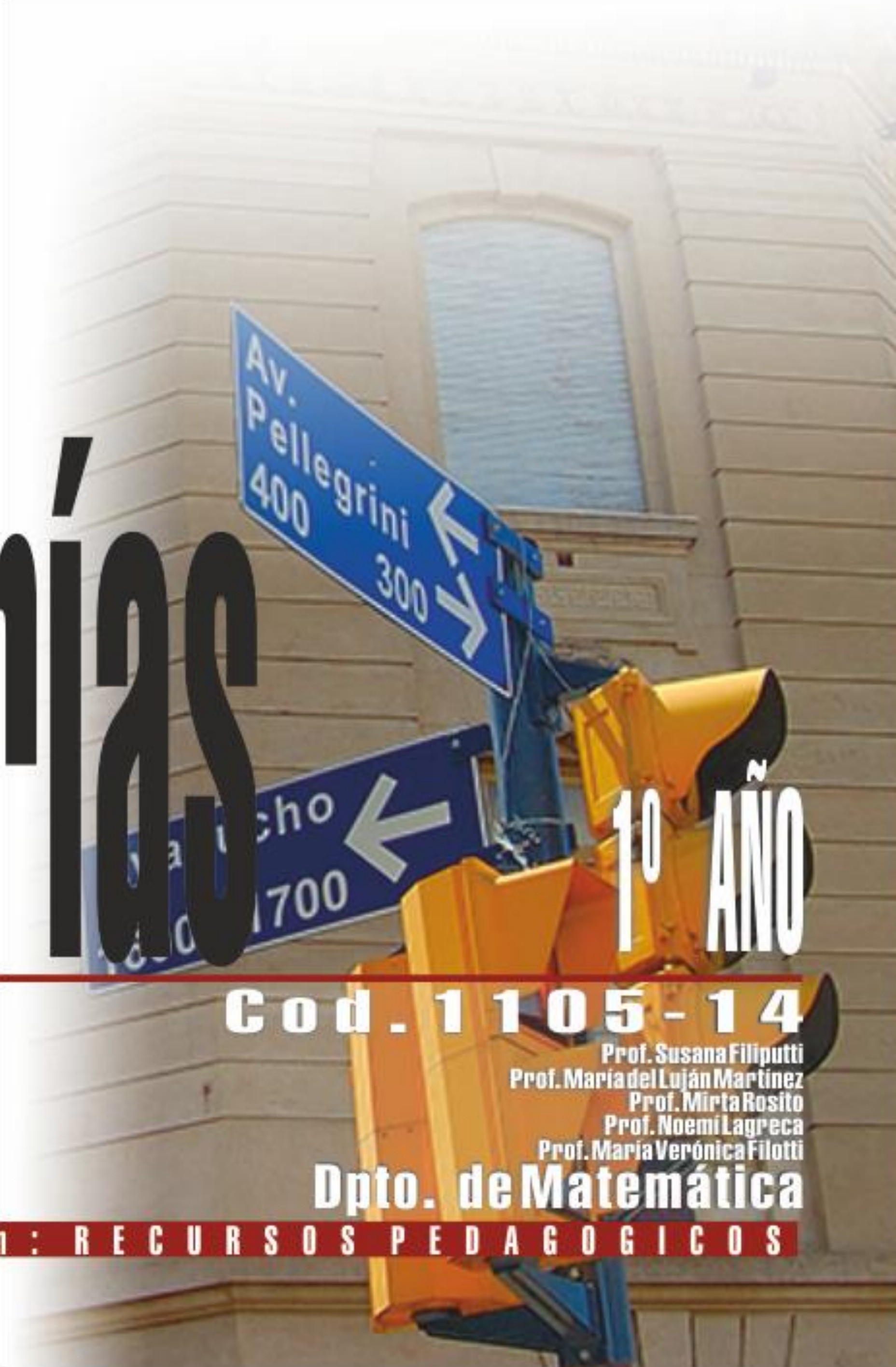
Instituto Politécnico

niversidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de



Simetrías

1º AÑO

Cod. 1105-14

Prof. Susana Filiputti
Prof. María del Luján Martínez
Prof. Mirta Rosito
Prof. Noemí Lagreca
Prof. María Verónica Filotti
Dpto. de Matemática

Matemática

Masterización: RECURSOS PEDAGOGICOS

TRANSFORMACIONES RÍGIDAS

El concepto de función que has trabajado te permitirá continuar aprendiendo nuevos temas

1 - FUNCIÓN PUNTUAL

Una función se denomina puntual o transformación si el conjunto de partida y de llegada son conjuntos de puntos.
Así, si llamamos "f" a la ley de correspondencia "punto a punto", podemos indicar:

$$f : R^3 \rightarrow R^3 \,/\, f(p) = q; \quad p \in R^3 \wedge q \in R^3$$

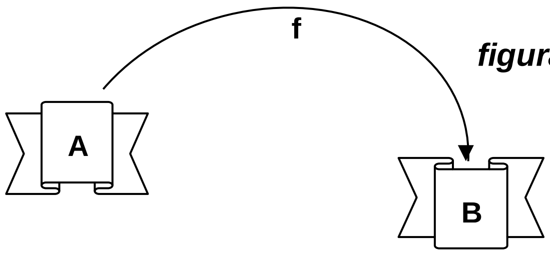
Si extendemos esta definición a figuras del espacio, expresamos:

$$f : R^3 \rightarrow R^3 \,/\, f(A) = B; \quad A \subset R^3 \wedge B \subset R^3$$

f(A) = B   B $\subset$ R^3

figura

figura constituida por las imágenes de cada uno de los puntos de A, obtenidas por la aplicación de la ley f

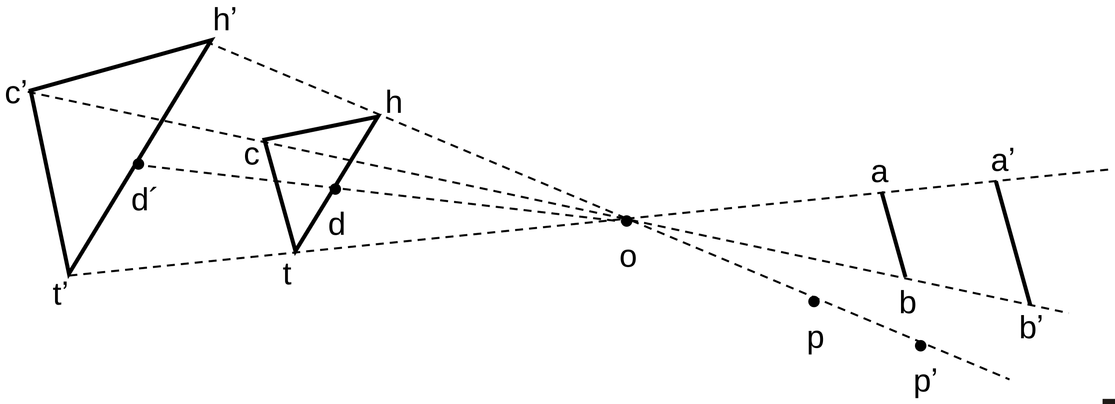


A continuación propondremos algunos ejemplos de funciones puntuales:

Ejemplo N° 1

Sea el plano α el conjunto de partida y de llegada , en él se fija un punto que lo llamaremos **o**.

Definimos la ***"función ZOOM"*** como la función puntual $f : \alpha \rightarrow \alpha$ que hace corresponder a cada punto $p \in \alpha$ un punto $p' \in \alpha$ tal que p es punto medio del segmento $\overline{op'}$



En la tabla de valores podemos observar la correspondencia realizada:

f	
o	o
p	p’
a	a’
b	b’
$\overline{ab}$	$\overline{a'b'}$
c	c’
h	h’
t	t’
$\overset{\Delta}{cht}$	$\overset{\Delta}{c'h't'}$

Responde:

- ¿Es f una función biyectiva?$\underset{\text{si–no}}{\text{.......}}$ ¿Por qué?................................
- ¿La figura y su imagen poseen la misma forma? $\underset{\text{si–no}}{\text{.......}}$
- Si poseen la misma forma, ¿son del mismo tamaño?..........$\underset{\text{si–no}}{\text{.......}}$ ....

Ejemplo N° 2

Considera un plano π y materialízalo con una hoja de papel.

Dibuja, utilizando una fibra, una recta: $R \ / \ R \subset \pi$ y un punto $a \in \pi \wedge a \notin R$.

Ahora, aplicaremos una función puntual $g : \pi \to \pi$ que definimos de la siguiente manera:

“la imagen de un punto, será la marca que se obtiene al plegar la hoja por la recta R”.

Dibuja otros puntos b y c que pertenezcan al mismo semiplano que “a” pero no a la recta R y aplícales la ley g. Además, obtiene gráficamente $g(\overline{ab})$

Marca un punto $d \in \overline{ab}$ y luego obtiene su imagen.

Con respecto a R, ¿dónde se encuentran las imágenes de las figuras dibujadas?..

¿Cómo resultan las imágenes de tres puntos alineados?.........................

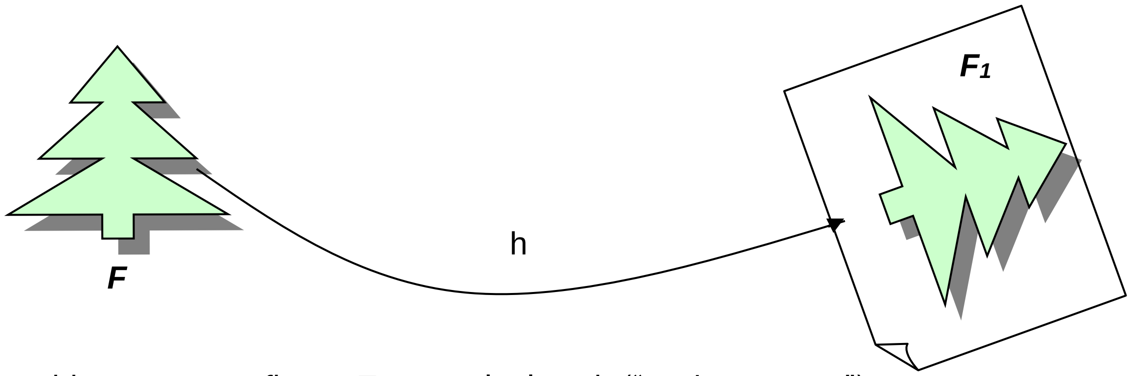
¿Y la imagen del que está entre dos puntos, estará entre las imágenes de ellos?.................

Marca otro punto p perteneciente a R y aplícale la ley g, ¿qué puedes expresar entre p y g(p)?...

- ¿Es f una función biyectiva? $\underset{\text{si-no}}{\ldots\ldots}$ ¿Por qué?...............................
- ¿La figura y su imagen poseen la misma forma? $\underset{\text{si-no}}{\ldots\ldots}$
- Si poseen la misma forma, ¿son del mismo tamaño?........... $\underset{\text{si-no}}{\ldots\ldots}$ ....

Ejemplo N° 3

La computadora nos ofrece a través de los comandos “copiar” y “pegar” la posibilidad de lograr la imagen de una figura. Una forma más artesanal de conseguir el mismo propósito es a través de un papel de calcar



Consideramos una figura $\mathbf{F} \subset \alpha$ y la ley h (“copiar y pegar”)

$$h : \alpha \to \alpha \quad / \quad h(F) = F_1 \quad ; \quad F_1 \subset \alpha$$

Responde :

- ¿Es biyectiva?..................
- A tres puntos alineados cualesquiera del plano α, ¿resultan sus imágenes también pertenecientes a una recta? Y ¿la imagen del que está entre los otros dos estará entre las imágenes de ellos?
- ¿La figura y su imagen tienen la misma forma?................
- Si la figura y su imagen tiene la misma forma, ¿son del mismo tamaño?

De las funciones puntuales que hemos analizado anteriormente, trabajaremos con aquellas que se compartan como las funciones que definimos en los ejemplos 2 y 3, las que llamaremos ***TRANSFORMACIONES RÍGIDAS***.

Si ***f*** es una transformación rígida entonces ***f*** es una ***función puntual biyectiva*** que además cumple con las siguientes propiedades :

Propiedad 1 (P_1) : *Las transformaciones rígidas conservan las relaciones de pertenencia y orden*

Propiedad 2 (P_2): *En una transformación rígida una figura y su imagen poseen la misma forma y el mismo tamaño.*

PARTE PRÁCTICA

1) Para trabajar con el software Geogebra:

El protagonista de esta actividad será el comando:
"Refleja objeto en recta"

Dibuja una recta dados dos puntos de la misma, llámala R. Coloca el punto c en uno de los semiplanos determinados por R , $c \notin R$. Utilizando el botón o comando "Refleja objeto en recta", refleja el punto c utilizando R como eje de reflexión.

¿Cómo llama a ese punto el software?.

Ahora dibuja un segmento y un triángulo, luego refléjalos.

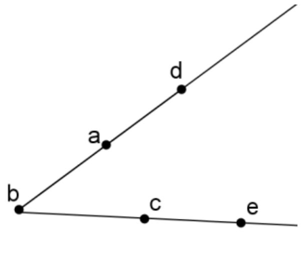
Dibuja un punto interior al triángulo y refléjalo. ¿qué sucede con su reflejodo?.

La operación realizada ***"Refleja objeto en recta",*** ¿es una función puntual?¿por qué?.¿Se comporta como una transformación rígida?. Justifica.

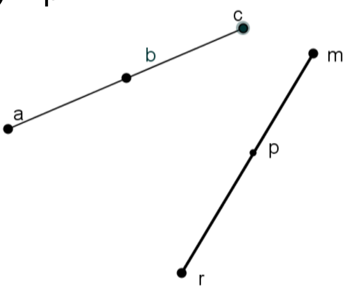
2) Si $t : \pi \to \pi$, coloca en cada uno de los siguientes apartados si la información es suficiente o no para indicar si *t* es una transformación rígida:

a) t(A) = B y t(B) = A

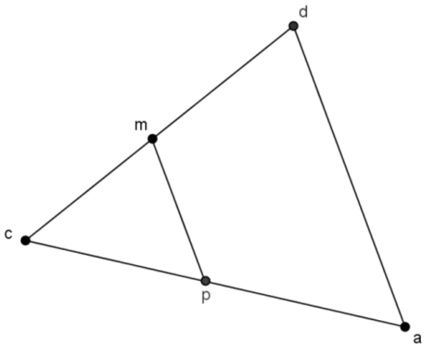
b) $t(a\hat{b}c) = d\hat{b}e$



c) t(a) = m; t(b) = r y   t(c) = p



d) $t\,(\overset{\Delta}{adc}) = \overset{\Delta}{pmc}$



2 - FIGURAS CONGRUENTES

Diremos que

Una figura es congruente con otra si una de ellas es imagen de la otra por aplicación de una transformación rígida.

Utilizaremos el signo = para indicar la congruencia de figuras, aunque no necesariamente significa que es el mismo conjunto de puntos

En símbolos:

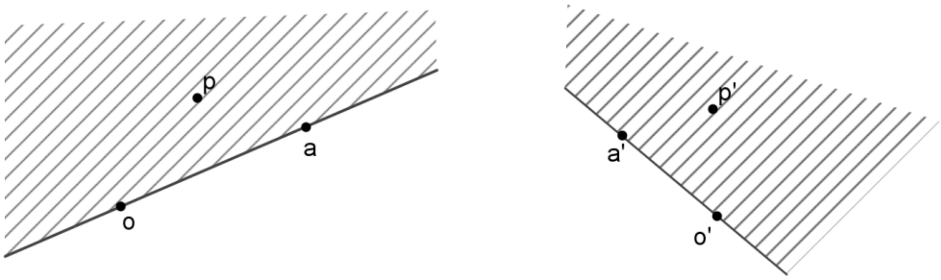
$$F_1 = F_2 \Leftrightarrow F_2 = t(F_1) \quad ; \; t \text{ es una transformación rígida}$$

que leemos F_1 congruente con F_2 sí y sólo sí F_2 es imagen de F_1 por aplicación de la transformación rígida **t**

3 – ALGUNAS PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LAS TRANSFORMACIONES RIGIDAS

A continuación, presentaremos otras propiedades que nos permitirán ir profundizando las transformaciones rígidas, las que postularemos de la siguiente forma:

Propiedad 3 (P3): Existe una transformación rígida y sólo una que transforma una semirrecta en otra y un determinado semiplano limitado por la primera en un determinado semiplano limitado por la segunda.



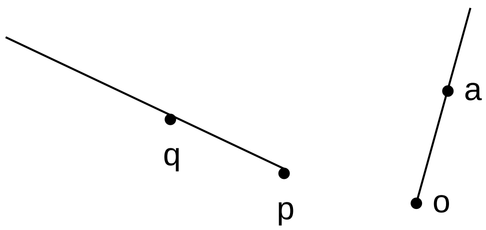
$$t\left(\vec{oa}\right) = \vec{o'a'}$$

$$t\left[\operatorname{semp}_{\overleftrightarrow{oa}}(p)\right] = \operatorname{semp}_{\overleftrightarrow{oa}}(p')$$

Propiedad 4 (P_4): Por una transformación rígida la imagen de una semirrecta es una semirrecta y en especial la imagen del origen es el origen

Propiedad 5 (P_5):

$$\left.\begin{array}{l} t\left(\vec{pq}\right) \;=\; \vec{oa} \\ \overline{p\,q} = \overline{o\,a} \end{array}\right\} \Rightarrow \; t(q) \;=\; a$$



Propiedad 6 (P_6)

Si ***i*** una transformación rígida que llamaremos **identidad** tal que:

. $$i\,(p\,) = p \quad \forall\ p \in F \qquad \therefore \qquad i(F) = F$$

<u>PARTE PRÁCTICA</u>

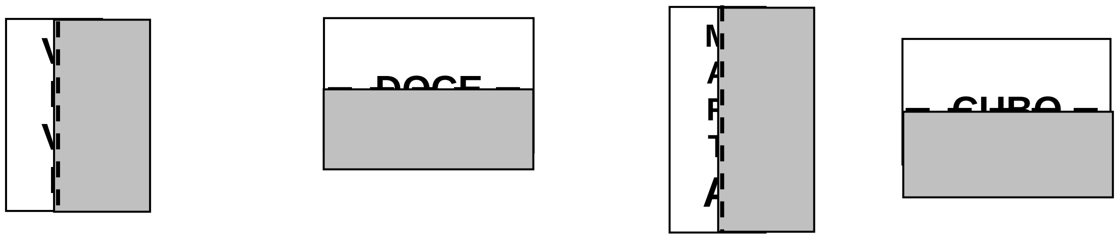
3) Analiza si la **congruencia** de figuras es una relación de equivalencia

4 - SIMETRÍA AXIAL O REBATIMIENTO

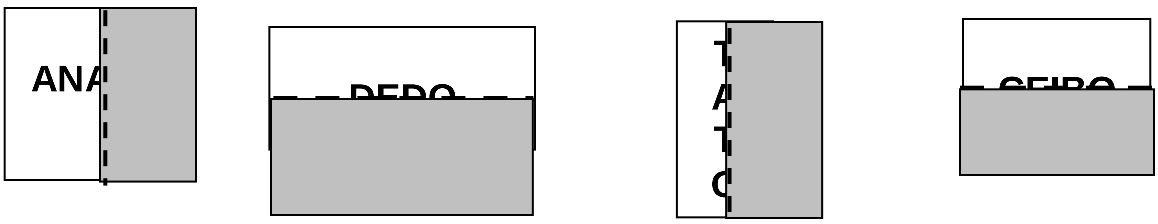
Algunos modelos de las transformaciones rígidas, a veces, están presentes en actividades como las siguientes:

Actividad Nº 1

Dos compañeros de 1º año juegan a descubrir nombres de objetos o personas usando 8 cartas semitapadas. Se reparten la misma cantidad de cartas y la consigna es descubrir palabras utilizando un espejo que se debe colocar sobre la línea de trazos . Gana el que encuentra mayor cantidad de palabras con sentido(objeto, nombre de personas u otros).
A Juan le tocaron estas cartas



Y a Pedro le tocaron estas otras



¿Quién ganó Juan o Pedro?

Completa

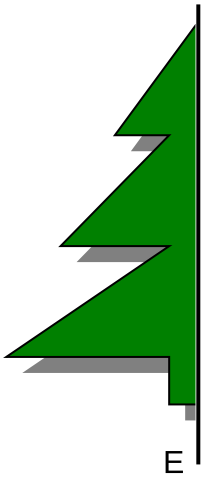
Ha ganado .... porque ha obtenido mayor cantidad de palabras.

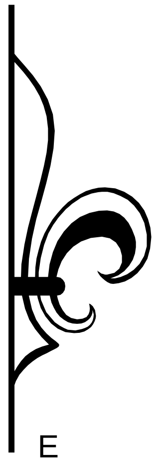
Ellas son:...

En las cartas que se han obtenido palabras que tienen un significado; diremos que la palabra obtenida es simétrica respecto a la línea de trazos

Actividad Nº 2

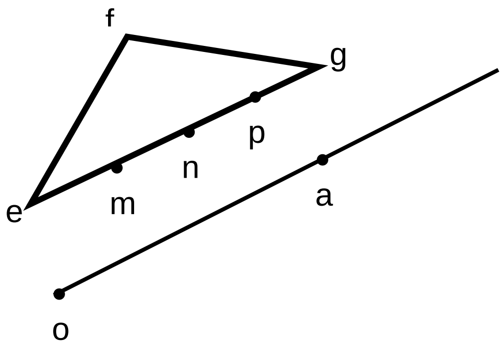
Se quiere obtener la figura completa en cada caso; utiliza el eje E indicado y papel de calcar y lo lograrás. (Considera para alcanzar tu objetivo la posibilidad de “invertir” el papel de calcar)





Actividad Nº3

Dado el $\overset{\triangle}{efg}$ y la semirrecta $\overrightarrow{oa}$. Utilizando papel de calcar, calca el triángulo y la semirrecta. Obtiene la imagen de ellos procediendo al calcado y haciendo coincidir las semirrectas



El triángulo que has obtenido, utilizando el papel de calcar, es imagen del $\overset{\triangle}{efg}$.
Teniendo en cuenta esta actividad, completa la siguiente tabla:

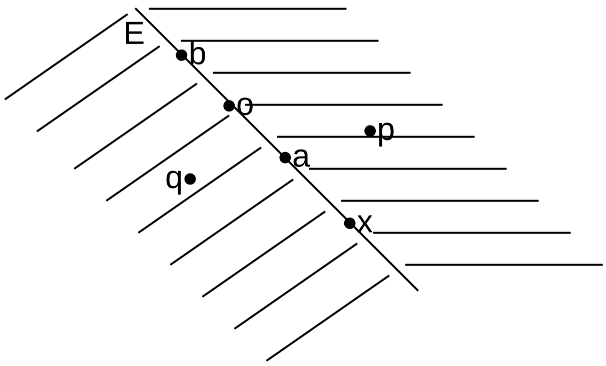
	Imagen
e	e’
f	
g	
m	
n	
p	

En esta última actividad, se ha presentado una transformación rígida, muy particular, conocida con el nombre de ***SIMETRÍA AXIAL O REBATIMIENTO***, que ha continuación formalizaremos

Definición

> ***La simetría axial o rebatimiento es una transformación rígida que transforma una semirrecta dada en sí misma y a uno de los semiplanos determinado por la recta que contiene a la semirrecta en su semiplano opuesto.***

La recta que contiene a la semirrecta se la denomina **eje de simetría** e indicaremos con **E**



En símbolos:

Simetría axial de eje E: S_E

- $S_E(\,semp_E(p)) = semp_E(q)$
- $S_E\,(\overrightarrow{oa}) = \overrightarrow{oa}$

Observamos que: $S_E\,(o) = o$ (P_4) (1)

a) Si $x \in E$ y $x \neq o$ ¿Cuál es el simétrico de x con respecto al eje E?

$$\left.\begin{array}{lcl} x & \in & \overrightarrow{oa} \\ S_E\left(\overrightarrow{oa}\right) & = & \overrightarrow{oa} \\ \overline{ox} = \overline{ox} & & (\text{prop reflexiva}) \end{array}\right\} \overset{P_5}{\Rightarrow} S_E(x) = x$$

b)

$$\left.\begin{array}{lcl} x & \in & \overrightarrow{ob} \\ S_E\left(\overrightarrow{ob}\right) & = & \overrightarrow{ob} \\ \overline{ox} = \overline{ox} & & (\text{prop reflexiva}) \end{array}\right\} \overset{P_5}{\Rightarrow} S_E(x) = x$$

Por lo tanto de (1) , a) y b) , resulta $S_E(x) = x \quad \forall\, x \in E$

***Veamos algunos términos* :**

- Cuando la imagen de un punto es el mismo punto se dice que el punto es **unido.**

- En general cuando la imagen de una figura es la misma figura se dice que la figura es **unida.**

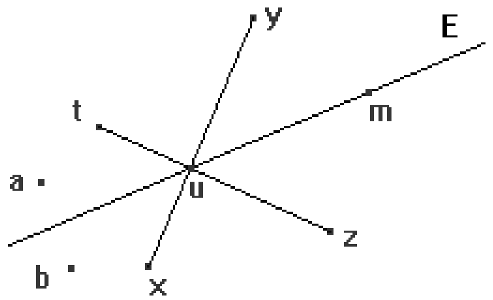
De lo anterior podemos concluir:

> ***El eje de simetría es una recta unida de puntos unidos.***
>
> ***En símbolos:***
>
> $$\mathbf{S_E(E) = E}$$

PARTE PRÁCTICA

4) Observando el gráfico y los datos que se consignan:

$S_E\,(a) = b$
$S_E(t) = x$
$S_E(z) = y$
$S_E(u) = u$
$S_E(m) = m$



a) Completa la siguiente tabla

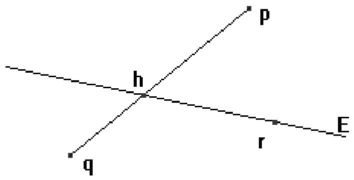
	S_E
b	....
$\overline{xy}$	....
u	....
$\overline{um}$	....
$\overset{\triangle}{uyz}$	....

b) Colorea en azul $\widehat{tum}$ y en rojo $S_E(\widehat{tum})$

c) ¿Puedes afirmar que $\widehat{tum} = \widehat{xum}$?.¿Por qué ?.

4 – 1. Simetría axial de un punto. Su determinación. Figuras simétricas

Determinaremos la imagen de un punto cualquiera que no pertenezca al eje de simetría



Por ejemplo, hallar la imagen de p según E

$s_E(p) =$ **¿ ?**

Sabemos que para todo p $\in$ semp $_E$ (p) su imagen estará en el semiplano opuesto.
Llamamos q a la imagen de p, o sea $s_E(p) = q$
El segmento $\overline{pq}$ interseca al eje en un punto que llamaremos h.

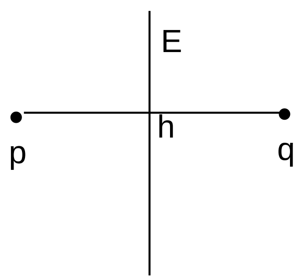
Con todos esos datos podemos confeccionar la siguiente tabla

	S_E	
	a) p	q
	q	p
	b) h	h
	c) r	r
De a) y b)	$\overline{ph}$	$\overline{qh} \overset{1}{\Rightarrow} \overline{ph} = \overline{qh} \overset{2}{\Rightarrow} h$ punto medio de $\overline{pq}$
De a) ; b) y c)	$p\hat{h}r$	$q\hat{h}r \overset{1}{\Rightarrow} p\hat{h}r = q\hat{h}r \overset{3}{\Rightarrow} \overleftrightarrow{pq} \perp E$

1- por definición de congruencia de figuras.
2- por definición de punto medio de un segmento.
3- por definición, si dos ángulos adyacentes son congruentes, son rectos y por lo tanto las rectas que incluyen a sus lados son perpendiculares.

Por lo precedente concluimos que el eje E corta perpendicularmente en su punto medio al segmento cuyos extremos son el punto y su imagen.

Por lo tanto, en el gráfico observarás que la posición de q es incorrecta, el gráfico correcto es:



Simbología:

$M_{\overline{ab}}$ se lee mediatriz del segmento ab

$$S_E : \pi \to \pi \ / \ \forall \ p \in \pi \ , S_E(p) = q \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{ph} = \overline{hq} \\ \overleftrightarrow{pq} \perp E \end{array} \right\} \Rightarrow E = M_{\overline{pq}}$$

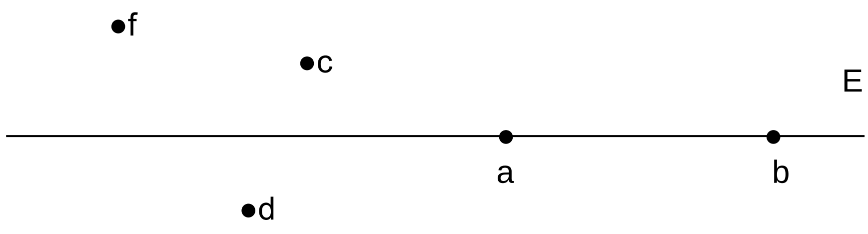
En síntesis:

En una simetría axial el eje es mediatriz del segmento determinado por un punto y su imagen.

Esta propiedad justifica el método gráfico para hallar la imagen de un punto cualquiera no perteneciente al eje.

<u>PARTE PRÁCTICA</u>

5) Ubica en el siguiente gráfico los puntos x, v, z tales que S_E (c) = x; S_E (d) = v; S_E (z) = f



De acuerdo con los datos del apartado anterior, resuelve

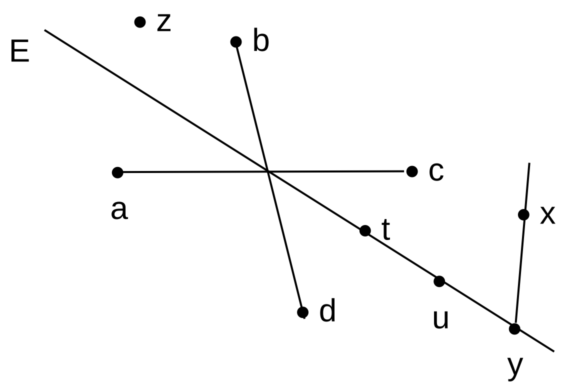
S_E (a) = ... S_E ($\overline{ab}$) = ... S_E(E) =........

$S_E(\overrightarrow{cd})$ = ... $S_E(\overrightarrow{cf})$ = ... $S_E(\widehat{dcf})$ = ...

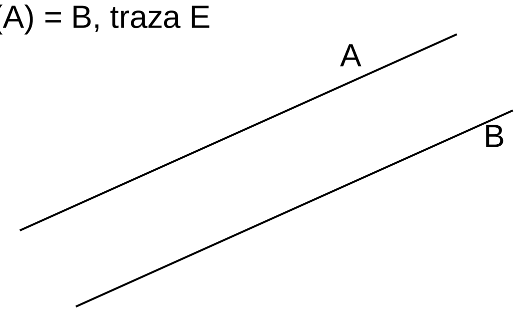
6) Completa la siguiente tabla y grafica de modo que se correspondan

S_E

$\overline{ac}$	$\overline{bd}$
$\overline{ab}$	......
y	....
$\overline{yv}$	$\overline{yz}$
r	x
$\overline{tu}$	….
$\widehat{xyr}$	......



7) Si s_E (A) = B, traza E



Veamos algunos términos usuales:

- En una simetría axial, un punto y su imagen se llaman **puntos simétricos** respecto del eje de simetría.

  O sea:

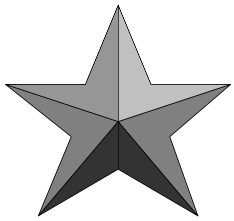
  S_E (p) = q $\Leftrightarrow$ p y q son simétricos respecto de E.

- Por extensión, una figura y su imagen, respecto de una simetría axial, se llaman **figuras simétricas** respecto del eje de simetría.

- Una figura que es **doble o unida** en una simetría axial se dice que es una **figura simétrica** respecto de un eje y que dicho eje es **su eje de simetría**

En símbolos:

S_E(F) = F $\Leftrightarrow$ F es simétrica respecto del eje E.

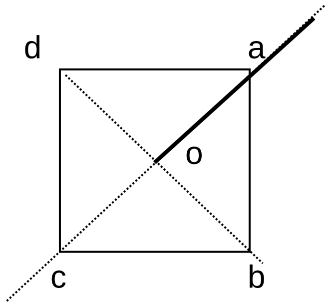


Esta copa es simétrica tiene un eje de simetría ¿Cuál?

Esta estrella tiene cinco ejes de simetría. ¿Cuáles?

PARTE PRÁCTICA

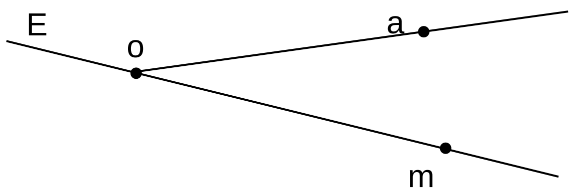
8) Busca la imagen del cuadrado abcd de la figura según la simetría de eje que contiene a la semirrecta $\overrightarrow{oa}$



¿Qué ocurre con la imagen obtenida y la figura dada?.Completa:

La recta que incluye la diagonal del cuadrado es..................................

9) Encuentra la imagen de una semirrecta con origen en el eje de simetría y no incluida en el eje. Grafica y completa:



- Su imagen será .... del mismo origen.
- El origen es un punto...................... por pertenecer al eje.

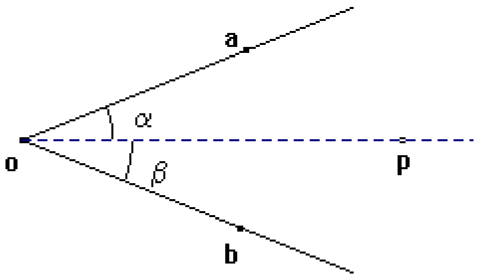
- Su imagen está en el semiplano.................... al que contiene a la semirrecta dada.
- Si $S_E(\overrightarrow{oa}) = \overrightarrow{ob}$ y $S_E(\widehat{aom}) =$ .... por lo tanto el $\widehat{aom} =$ ....

  $\Rightarrow \overrightarrow{om}$ es..............................del $\widehat{aob}$.
- $S_E(\widehat{aob}) =$ .... por lo tanto la figura es ....

Por lo que podemos concluir que:

El eje de simetría contiene a la bisectriz del ángulo determinado por una semirrecta con origen en el eje y su imagen

Bisectriz de un ángulo



A la bisectriz de un ángulo la notaremos con la letra B colocándole como subíndice el nombre del ángulo,
En símbolos:

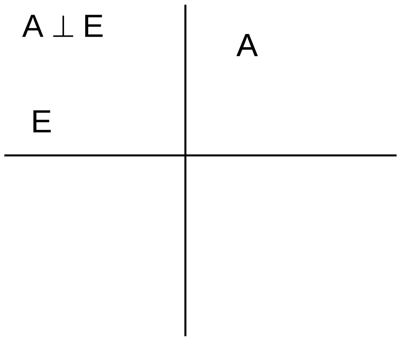
$$\overrightarrow{op} = B_{\widehat{aob}}$$

$$\widehat{\alpha} = \widehat{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{op} = B_{\widehat{aob}}$$

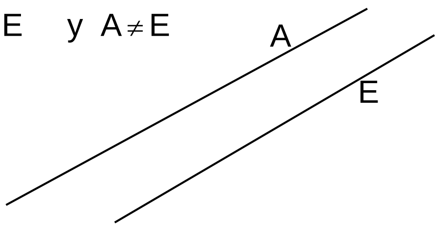
<u>PARTE PRÁCTICA</u>

10) Dibuja S_E (A) en cada uno de los siguientes casos

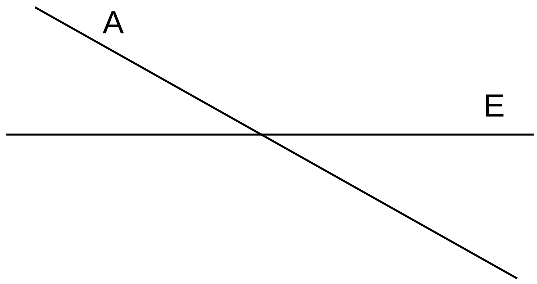
a) $A \perp E$



b) A // E y $A \neq E$



c) $A \not\perp E$ y $A \not\parallel E$



Observando las distintas posiciones relativas de una recta y su transformada en una simetría axial, ¿te sugieren alguna conjetura?.Indícala

11) Dada s_E establece y justifica cómo son las imágenes de:
   a) dos rectas paralelas
   b) dos rectas perpendiculares

12) Dibuja un rectángulo abcd y realiza $S_{\overleftrightarrow{cd}}\left(\overset{\Delta}{abc}\right)$

13) Dibuja un triángulo obtusángulo mnp

   a) $S_{\overleftrightarrow{mp}}\left[S_{\overleftrightarrow{np}}\left(\overset{\Delta}{mnp}\right)\right]$ b) $S_E\left[S_o\left(\overset{\Delta}{mnp}\right)\right]$ $,E \perp \overline{mp}\ /\ E \cap \overline{mp} = \{p\}$

14) En cada uno de los siguientes casos, dibuja un triángulo $\overset{\Delta}{mnp}$ y halla $S_E\,(\overset{\Delta}{mnp})$, sabiendo que:

a. $E \,//\, \overleftrightarrow{mn}$ y $E \cap \overset{\Delta}{mnp} = \phi$

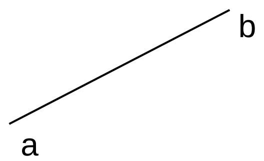
b. $E \cap \overset{\Delta}{mnp} = \{m\}$

c. $E \not\parallel \overline{mn}$, $E \not\parallel \overline{mp}$, $E \not\parallel \overline{np}$;$E \cap \overset{\Delta}{mpn} = \varnothing$

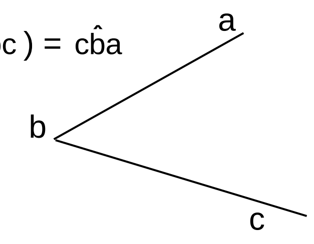
d. $E \cap \overset{\Delta}{mnp} = \overline{ab}$, $a \in \overline{mn}$ y $b \in \overline{np}$

15) Determina el eje de simetría para que resulte:

a) $S_E(\overrightarrow{ab}) = \overrightarrow{ba}$



b) $S_E(a\hat{b}c) = c\hat{b}a$



5 - ALGUNAS PROPIEDADES

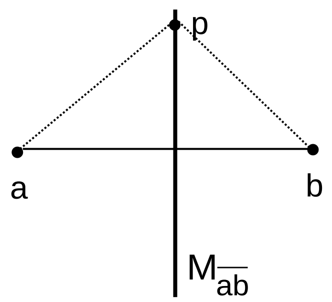
5 – 1.Propiedad de los puntos de la mediatriz de un segmento

Un punto pertenece a la mediatriz de un segmento, si y sólo si, equidista (está a igual distancia) de los extremos del mismo.

Para tener en cuenta: Llamaremos distancia entre dos puntos a y b y lo indicaremos d(a; b), al segmento ab

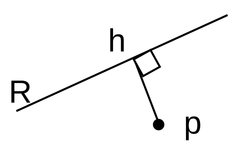
En símbolos:

$$\forall\, p \;,\; p \in M_{\overline{ab}} \iff d(p; a) = d(p; b)$$



5 – 2.Propiedad de los puntos de la bisectriz de un ángulo

Un punto interior a un ángulo pertenece a su bisectriz sí y sólo sí, equidista de sus lados

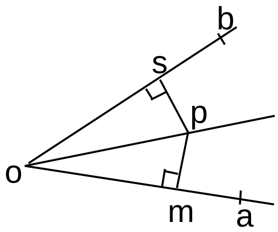


Para tener en cuenta: llamaremos distancia del punto p a la recta R y lo notaremos d(p; R), al segmento perpendicular trazado desde el punto a la recta.

$$d(p; R) = \overline{ph}$$

En símbolos

$$\forall\, p \in a\hat{o}b\ ;\quad d(p;\ \overrightarrow{oa}) = d(p;\ \overrightarrow{ob}) \quad \Leftrightarrow \quad p \in B_{a\hat{o}b}$$



Observación: Estas propiedades se demostrarán más adelante

PARTE PRÁCTICA

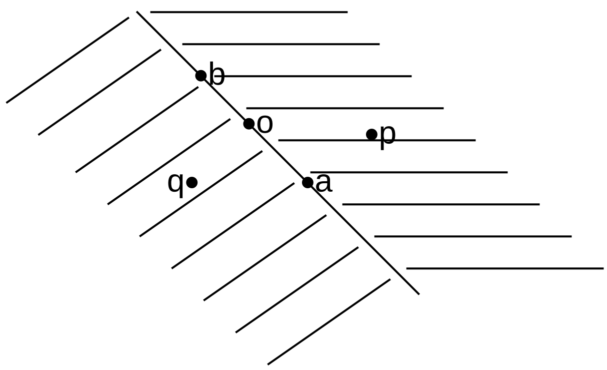
16) Sabiendo que $S_E(\overrightarrow{ba}) = \overrightarrow{bc}$, $\overline{bc} = \overline{ba}$ y $S_E(d) = d$.

a) Realiza un gráfico

b) Justifica que E es mediatriz del segmento $\overline{ac}$ y $a\hat{b}d = d\hat{b}c$.

6 - SIMETRÍA CENTRAL

La simetría central es una transformación rígida por la cual la imagen de una semirrecta dada es su opuesta y la imagen de uno de los semiplanos determinado por la recta que contiene a la semirrecta en su semiplano opuesto.



Siendo **o** centro de simetría de esta transformación en símbolos se expresa

S_o que se lee : simetría de centro o

$S_o(\vec{oa}) = \vec{ob}$ $\qquad$ $S_o(Semp_{\overleftrightarrow{oa}}(p)) = semp_{\overleftrightarrow{oa}}(q)$

Para trabajar con esta transformación rígida procuraremos describir analíticamente el comportamiento de la misma , estudiando algunas de sus propiedades.

Para ello,te proponemos que completes las siguientes actividades

a) $S_o(\vec{oa}) = \ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow S_o(o) = \ldots\ldots$ por P_4

b) **o** determina en la recta dos semirrectas tales que:

$$\left.\begin{array}{l} S_O(o) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \forall h \in \vec{oa} \Rightarrow S_O(h) \in \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \forall h \in \vec{ob} \Rightarrow S_O(h) \in \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{oa} \text{ tiene un único punto unido que es el centro de simetría}$$

Luego podemos concluir que $S_o(\overleftrightarrow{oa})$=..........

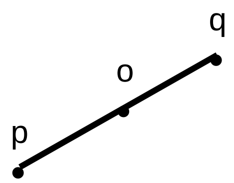
Relacionado las actividades propuestas podemos expresar que:

El centro de simetría es el único punto unido en una simetría central

En una simetría central diremos que la imagen de una recta que contiene al centro de simetría es la misma recta o sea que es una recta unida con el único punto unido que es el centro de simetría.

Veamos ahora de encontrar una ***propiedad que justifique un método gráfico*** para hallar ***la imagen de un punto cualquiera del plano por aplicación de una simetría central*** de centro **o**.

$$\left.\begin{array}{l} Si\ \ S_O(p) = q \Rightarrow 0 \in \overline{pq} \\ S_O(\overline{op}) = \overline{oq} \Rightarrow \overline{op}. = \overline{oq} \end{array}\right\} \Rightarrow o\ \ es\ punto\ medio\ de\ \ \overline{pq}$$



Con lo que concluimos :

En una simetría central, el centro de simetría es punto medio del segmento determinado por un punto y su imagen.

Algunos nombres para tener en cuenta:

- En una simetría central a un punto y su imagen se los llama **puntos simétricos** respecto del centro de simetría.

En símbolos:

$S_o(p) = q \ \Leftrightarrow\ p\ \ y\ \ q$ son **simétricos** respecto de o.

- En una simetría central a una figura y su imagen se las llama **simétricas** entre sí, respecto del centro.

En símbolos:

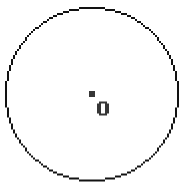
$S_o(F) = G \Leftrightarrow F$ y G son simétricas entre sí respecto del centro

- Una figura es simétrica respecto de un punto, si es doble o unida en la simetría central que tiene por centro a dicho punto, y éste es el centro de simetría de la figura.

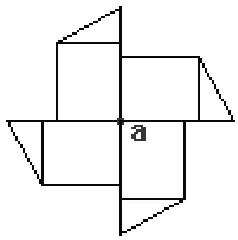
En símbolos:

$$S_o(F) = F \Leftrightarrow F \text{ es simétrica respecto de } o$$

Ejemplos:



Este círculo es simétrico respecto de *o*



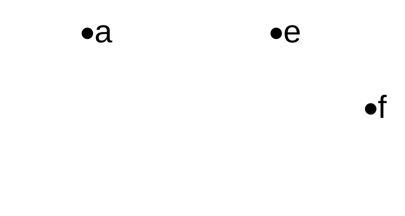
Esta figura es simétrica respecto de *a*

PARTE PRÁCTICA

17) En el siguiente gráfico:

a) Ubica los puntos x, y, u, v y w tal que

$$x = S_a(b), \quad y = S_a(c), \quad u = S_a(d), \quad v = S_a(e), \quad w = S_a(f)$$



b) Resuelve:

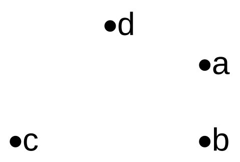
$S_a(a) =$ ....　　　　$S_a(\overline{fe}) =$ ....

$S_a(\overline{ca}) =$ ....　　　　$S_a(\overrightarrow{fb}) =$ ....

$S_a(\overleftrightarrow{ad}) =$ ....　　　　$S_a(\widehat{efb}) =$ ....

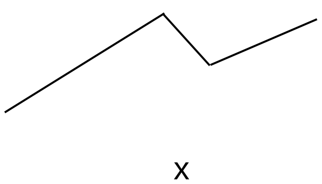
18) En el siguiente gráfico dibuja, con distintos colores:

$S_a(\overrightarrow{cd})$, $S_a(\widehat{bcd})$, $S_a(\widehat{abc})$ y ubica al punto *x* tal que $S_a(x) = d$

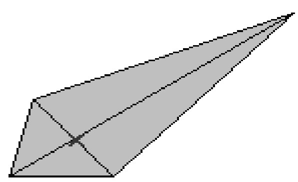


19) En cada uno de los siguientes apartados determina la imagen de la figura correspondiente por una simetría central, siendo el centro de simetría el punto señalado con una cruz.

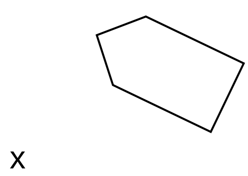
a)



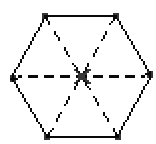
b)



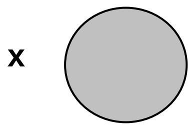
c)



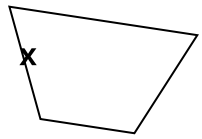
d)



e)



f)

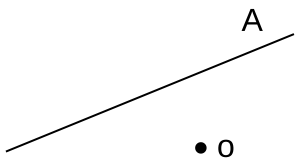


g) ¿Cuáles de las figuras anteriores tienen centro de simetría?

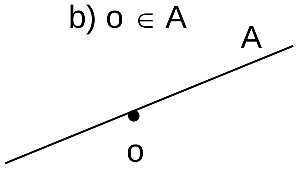
h) Dibuja un triángulo $\overset{\Delta}{uxv}$ y $S_x\left(\overset{\Delta}{uxv}\right)$

20) Dibuja $S_o(A)$ en cada uno de los siguientes casos:

a) $o \notin A$



b) $o \in A$



En cada uno de los siguientes apartados anteriores,

¿Qué puedes decir de la recta A y su simétrica?

6 – 1. Rectas simétricas.

Propiedad de los ángulos opuestos por el vértice

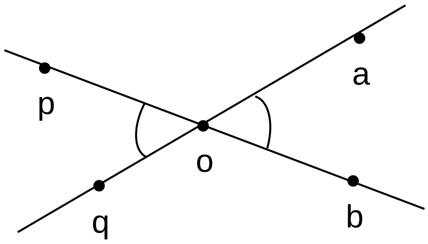
Al resolver el último problema, puedes conjeturar la siguiente propiedad:

Dos rectas simétricas en una simetría central son paralelas.
En una simetría central, las únicas rectas unidas son las que contienen al centro de simetría.

Analicemos otra propiedad de la simetría central:

La imagen de un ángulo con vértice en el centro de simetría es su opuesto por el vértice.

Dado $\hat{aob}$ y S_o



$$\left.\begin{array}{l} S_o\left(\overrightarrow{oa}\right) = \text{ opuesta de } \overrightarrow{oa} \text{ por (1)} \\ S_o\left(\overrightarrow{ob}\right) = \text{ opuesta de } \overrightarrow{ob} \text{ por (1)} \end{array}\right\} \overset{(2)}{\Rightarrow} S_o\left(\hat{aob}\right) = \hat{qop};\ \hat{qop} \text{ es el opuesto por el vértice a } \hat{aob}$$

(1) la imagen de una semirrecta con origen en el centro de simetría es su opuesta

(2) por definición de ángulos opuestos por el vértice

Además, por definición de congruencia, $\hat{aob}$ es congruente con su imagen, por lo que de la anterior propiedad, concluiremos que:

Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes

PARTE PRÁCTICA

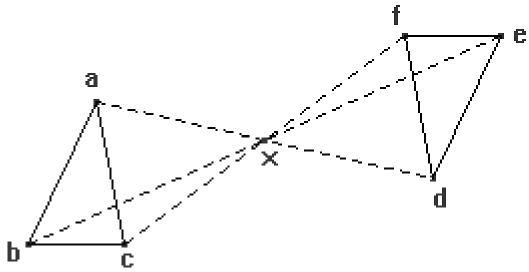
21) Responde:

a) ¿Qué condición debe cumplir una semirrecta para que en una simetría central su imagen sea la semirrecta opuesta?

b) ¿Qué condición debe cumplir una recta para que en una simetría central sea una recta unida?

22) Si $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$ se bisecan en un punto o, justifica que $\overline{ac} = \overline{bd}$ y $\overline{ac} // \overline{bd}$

23) En la figura *x* es el punto medio de $\overline{ad}, \overline{be}$ y $\overline{cf}$. Justifica que $\overset{\Delta}{abc}$ y $\overset{\Delta}{fed}$ son congruentes.



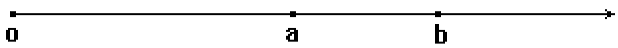
6 – 2. Ángulos cuyos lados son respectivamente paralelos a los lados de otro

Con el propósito de ampliar el estudio sobre la simetría central, introducimos la siguiente definición:

> ***Dos semirrectas paralelas son del mismo sentido, si:***
> ***a) estando en la misma recta, una incluye a la otra,***
> ***b) estando en rectas paralelas distintas, se encuentran incluidas en un mismo semiplano respecto de la recta que determinan sus***

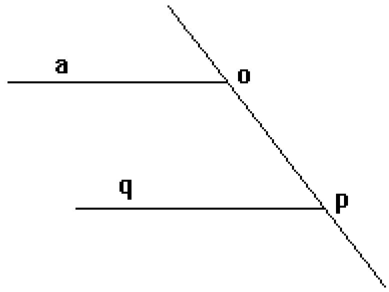
Simbólicamente:

a)



$\vec{ab} \subset \vec{oa} \quad \Rightarrow \vec{ab}$ y $\vec{oa}$ son del mismo sentido b)

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{oa} // \overrightarrow{pq} \wedge \overleftrightarrow{oa} \neq \overleftrightarrow{pq} \\ \overrightarrow{oa} \subset \text{semp}_{\overleftrightarrow{op}}(a) \\ \overrightarrow{pq} \subset \text{semp}_{\overleftrightarrow{op}}(a) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{oa} \text{ y } \overrightarrow{pq} \text{ son del mismo sentido}$$



Dos semirrectas paralelas son de distinto sentido, si:

- ***a) estando en la misma recta, no incluye una a la otra,***
- ***b) estando en rectas paralelas distintas, se encuentran incluidas en distintos semiplanos respecto de la recta que determinan sus orígenes***

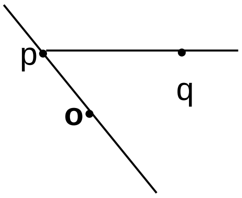
Propiedad

Dos semirrectas paralelas y de distinto sentido son simétricas respecto del punto medio del segmento determinado por sus orígenes

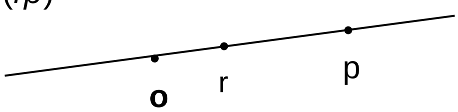
Realiza la siguiente ***Actividad***:

Dibuja :

a) $S_o(\overrightarrow{pq})$



b) $S_o(\overrightarrow{rp})$



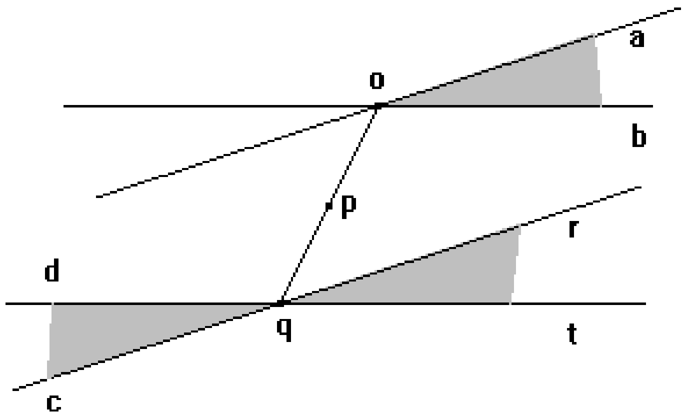
Completa:

- En el a) $\overrightarrow{pq}$ y $S_o(\overrightarrow{pq})$ son ....paralelas y de ...., por lo tanto son simétricas respecto del................del segmento determinado por ....
- En el b) $\overrightarrow{rp}$ y $S_o(\overrightarrow{rp})$ son ....y de ...., por lo tanto son simétricas respecto del...

Aplicando la última propiedad enunciada ***comparemos pares de ángulos*** cuyos lados sean respectivamente:

- ***Semirrectas paralelas y del mismo sentido.***
- ***Semirrectas paralelas y orientadas en sentido contrario.***

Gráficamente: $\widehat{boa}$ y $\widehat{tqr}$ tienen por lados semirrectas paralelas y de igual sentido y



$\widehat{aob}$ y $\widehat{dqc}$ tienen por lados semirrectas paralelas y de distinto sentido:

Llamamos *p* al punto medio de $\overline{oq}$, y apliquemos S_p confeccionando una tabla de correspondencia entre los elementos y/o figuras y sus respectivas imágenes.

	S_p	
o	q	por ser p punto medio de $\overline{oq}$
(2) $\overrightarrow{oa}$	$\overrightarrow{qc}$ por (1)	
(3) $\overrightarrow{ob}$	$\overrightarrow{qd}$ por (1)	
por(2) y(3) $a\hat{o}b$	$c\hat{q}d$	$\overset{(4)}{\Rightarrow}$ $a\hat{o}b = c\hat{q}d$ (*)

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{qc} \text{ es opuesta de } \overrightarrow{qr} \\ \overrightarrow{qd} \text{ es opuesta de } \overrightarrow{qt}\end{array}\right\} \overset{(5)}{\Rightarrow} c\hat{q}d = r\hat{q}t$$

$$\left.\begin{array}{l} c\hat{q}d = r\hat{q}t \\ \text{por (*)} \quad a\hat{o}b = c\hat{q}d \end{array}\right\} \Rightarrow \quad r\hat{q}t = a\hat{o}b \qquad (**)$$

(1) Dos semirrectas paralelas y de distinto sentido son simétricas respecto del punto medio del segmento determinado por sus orígenes.

(4) Definición de congruencia

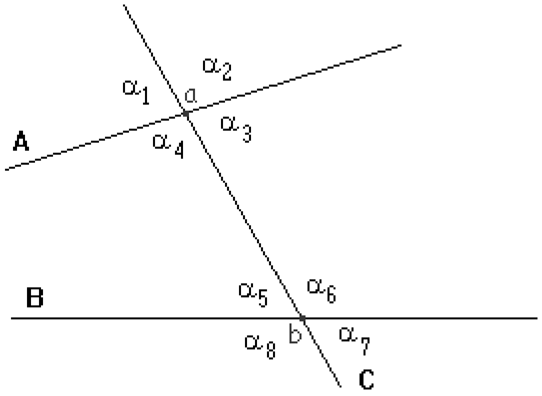
(5) Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes,

Enunciamos coloquialmente lo demostrado en (*) y (**):

Los ángulos cuyos lados son semirrectas paralelas de igual (o distinto) sentido son congruentes

7. ÁNGULOS FORMADOS POR DOS RECTAS CORTADAS POR UNA TERCERA

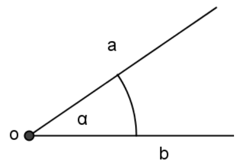
Consideremos dos rectas A y B cortadas por una tercera C como muestra la figura.



$A \cap C = \{a\}$
$B \cap C = \{b\}$

Llamamos "transversal" a la recta que corta a dos rectas coplanares en dos puntos distintos. En nuestro caso, C es la transversal

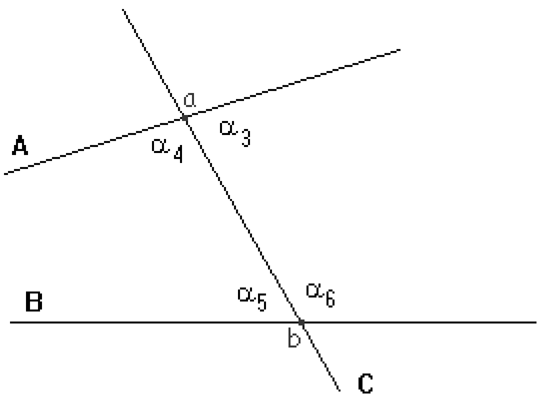
Para tener en cuenta: otra forma de simbolizar un ángulo:



$\hat{\alpha} = \hat{aob}$

Con estos datos quedan determinados ángulos convexos, entre los que distinguiremos los que hemos nombrado en la figura con $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_3, \hat{\alpha}_4, \hat{\alpha}_5, \hat{\alpha}_6, \hat{\alpha}_7, \hat{\alpha}_8$
Estos ocho ángulos reciben nombres especiales como veremos:

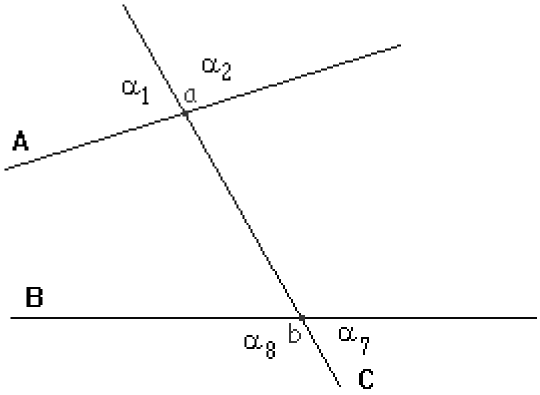
Ángulos interiores o internos



son los incluidos en semp $_A$ (b) $\cap$ semp $_B$ (a)

o sea $\hat{\alpha}_3, \hat{\alpha}_4, \hat{\alpha}_5$ y $\hat{\alpha}_6$

Ángulos exteriores o externos



son los no incluidos en $semp_A(b) \cap semp_B(a)$

o sea $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_7$, y $\hat{\alpha}_8$

Si consideramos un par cualquiera de esos ocho ángulos puede suceder:

- que tengan el mismo vértice. En ese caso son opuestos por el vértice o adyacentes.
- que tengan distinto vértice. En este segundo caso también serán clasificados asignándoles nombres especiales. Los pares de ángulos interiores de distinto vértice se clasifican en:

Alternos internos: es el par de ángulos internos de distinto vértice que se encuentran en distintos semiplanos respecto de la transversal.
En nuestro caso

$$\left.\begin{matrix} \hat{\alpha}_3 \text{ y } \hat{\alpha}_5 \\ \hat{\alpha}_4 \text{ y } \hat{\alpha}_6 \end{matrix}\right\} \text{son alternos internos}$$

Alternos externos: es el par de ángulos externos de distinto vértice que se encuentran en distintos semiplanos respecto de la transversal.
En nuestro caso

$$\left.\begin{matrix} \hat{\alpha}_1 \text{ y } \hat{\alpha}_7 \\ \hat{\alpha}_2 \text{ y } \hat{\alpha}_8 \end{matrix}\right\} \text{son alternos externos}$$

Conjugados internos: es el par de ángulos internos de distinto vértice que se encuentran en el mismo semiplano respecto de la transversal.
En nuestro caso

$$\left.\begin{matrix} \hat{\alpha}_3 \text{ y } \hat{\alpha}_6 \\ \hat{\alpha}_4 \text{ y } \hat{\alpha}_5 \end{matrix}\right\} \text{son conjugados internos}$$

Conjugados externos: es el par de ángulos externos que se encuentran en el mismo semiplano respecto de la transversal.
En nuestro caso

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\alpha}_1 \text{ y } \hat{\alpha}_8 \\ \hat{\alpha}_2 \text{ y } \hat{\alpha}_7\end{array}\right\} \text{son conjugados externos}$$

Finalmente distinguiremos a los ***ángulos correspondientes*** que definiremos como el par de ángulos de distinto vértice, uno interno y otro externo, que se encuentran en el mismo semiplano respecto de la transversal.

En nuestro caso

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\alpha}_1 \text{ y } \hat{\alpha}_5 \\ \hat{\alpha}_2 \text{ y } \hat{\alpha}_6 \\ \hat{\alpha}_3 \text{ y } \hat{\alpha}_7 \\ \hat{\alpha}_4 \text{ y } \hat{\alpha}_8\end{array}\right\} \text{son correspondientes}$$

En general, los ángulos alternos, conjugados o correspondientes no revisten mayor trascendencia, excepto en el caso en que alguno de esos pares sean congruentes o que las rectas que son cortadas por una tercera sean paralelas. A estas dos últimas situaciones se refieren las consideraciones siguientes.

Si *A / / B* y la recta *C* es la transversal (lo que abreviadamente indicamos *A / / B* $\not\parallel$ *C)* resulta que en cualquier par de ángulos alternos los lados de uno son semirrectas paralelas y de distinto sentido con respeto a los lados del otro. Resulta, por propiedades de la simetría central que tales pares de ángulos son congruentes.

De ello podemos concluir:

Los ángulos alternos determinados por dos rectas paralelas cortadas por una tercera son congruentes

También observemos que en cualquier par de ángulos correspondientes entre rectas paralelas, los lados de uno son semirrectas paralelas y de igual sentido a los lados del otro, luego:

Los ángulos correspondientes determinados por dos rectas paralelas cortadas por una tercera son congruentes.

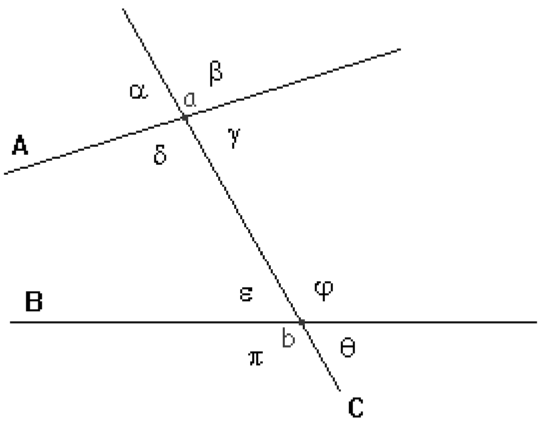
Son ciertos además los enunciados recíprocos de los anteriores:

Si los ángulos alternos son congruentes, las rectas que los determinan son paralelas

Si los ángulos correspondientes son congruentes, las rectas que los determinan son paralelas

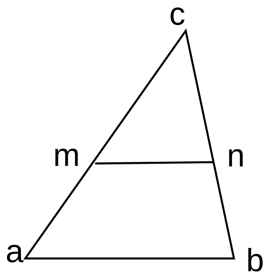
PARTE PRÁCTICA

24) Según la figura, nombra todos los pares de:

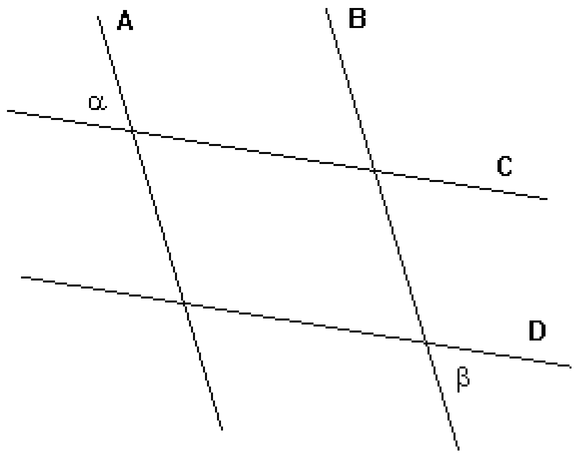


a) ángulos alternos internos
b) ángulos alternos externos
c) ángulos conjugados internos
d) ángulos conjugados externos
e) ángulos correspondientes

25) Dado el $\overset{\Delta}{abc}$ con $\overleftrightarrow{mn} \,//\, \overleftrightarrow{ab}$, justifica que los $\overset{\Delta}{abc}$ y $\overset{\Delta}{mnc}$ tienen sus ángulos respectivamente congruentes



26) Si *A // B* y *C // D,* justifica que $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$



Bibliografía : Transformaciones rígidas –Buschiazzo-Cattaneo- Hinrichsen-Filiputti
Geometria -Tirao
Geometría - Clemens/ O"Daffer /Cooney