

# Instituto Politécnico

Universidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de

## Cuadriláteros 2º Año

### Matemática

Cód. 1201-19

Corrección y adaptación:  
Prof. María del Luján Martínez  
Prof. Mónica Napolitano



Dpto. de Matemática

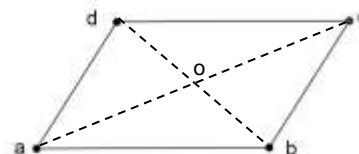
Masterización: RECURSOS PEDAGÓGICOS



## PARALELOGRAMO

### Definición

Un **paralelogramo** es un cuadrilátero con sus lados opuestos paralelos



Los paralelogramos poseen las siguientes propiedades

#### PROPIEDAD 1

En todo paralelogramo, los lados opuestos son congruentes

#### PROPIEDAD 2

En todo paralelogramo, las diagonales se bisecan

#### PROPIEDAD 3

En todo paralelogramo, los ángulos opuestos son congruentes

➤ Demuestra las Propiedades 1, 2 y 3.

### Propiedades recíprocas

Las propiedades anteriores, enuncian las condiciones necesarias de los cuadriláteros que son paralelogramos. ¿Serán suficientes? Es decir, si un cuadrilátero cumple con alguna de esas condiciones, el mismo, ¿será paralelogramo?

¿Qué significa que sea necesario y suficiente?  
Un ejemplo: El tomar 2l de agua diaria es una condición necesaria para tener una buena salud. Ahora, claro está que sólo de agua no vive el hombre. es decir que no es una condición suficiente.  
Investiga “Condición necesaria y suficiente” en Wikipedia y escribe un par de ejemplos cotidianos.

#### PROPIEDAD 4

Si los lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes, entonces es un paralelogramo

#### PROPIEDAD 5

Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan, entonces el mismo es un paralelogramo

#### PROPIEDAD 6

Si los ángulos opuestos de un cuadrilátero son congruentes entonces es un paralelogramo.

### CONDICIONES NECESARIAS Y SUFICIENTES

❖ De las propiedades 1 y 4 resulta:

**Un cuadrilátero, es paralelogramo si y sólo si los lados opuestos son congruentes**

En símbolos:

$$abcd \text{ paralelogramo} \Leftrightarrow \overline{ab} = \overline{dc} \wedge \overline{bc} = \overline{ad}$$



❖ De las propiedades 2 y 5 resulta:

**Un cuadrilátero, es paralelogramo si y sólo si las diagonales se bisecan**

En símbolos:

$$abcd \text{ paralelogramo} \Leftrightarrow \overline{ao} = \overline{oc} \wedge \overline{bo} = \overline{od}$$

❖ De las propiedades 3 y 6 resulta:

**Un cuadrilátero, es paralelogramo si y sólo si los ángulos opuestos son congruentes**

En símbolos:

$$abcd \text{ paralelogramo} \Leftrightarrow \hat{a} = \hat{c} \wedge \hat{b} = \hat{d}$$

❖ Otra propiedad importante:

**Un cuadrilátero, es paralelogramo si y sólo si posee un par de lados opuestos congruentes y paralelos**

En símbolos:

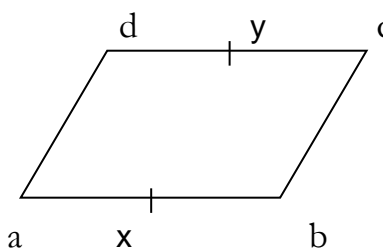
$$abcd \text{ paralelogramo} \Leftrightarrow \overline{ab} = \overline{cd} \wedge \overline{ab} \parallel \overline{cd}$$

► Demuestra esta propiedad

### Problemas

- 1) Demuestra que las bisectrices de dos ángulos opuestos de un paralelogramo son paralelas.
- 2) Demuestra que las bisectrices de dos ángulos consecutivos de un paralelogramo son perpendiculares.

- 3) Si  $x$  e  $y$  son los puntos medios de los lados opuestos de paralelogramo  $abcd$  y  $\overline{xy} \cap \overline{ac} = \{o\}$ , ¿será  $o$  punto de intersección de las diagonales? Justifica tu respuesta.



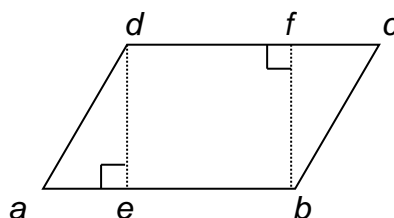
- 4) H)  $abcd$  paralelogramo

$$\overline{de} \perp \overline{ab}$$

$$\overline{fb} \perp \overline{dc}$$

$$T) \overline{de} = \overline{fb}$$

Realiza la demostración

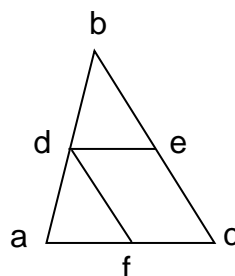


- 5) H)  $decf$  paralelogramo

$$\overline{bc} = \overline{ac}$$

$$T) \text{perímetro paralelogramo } decf = 2\overline{bc}$$

Realiza la demostración



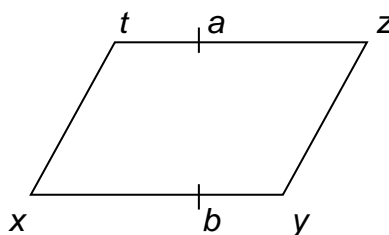
- 6)

$$H) xyzt \text{ paralelogramo}$$

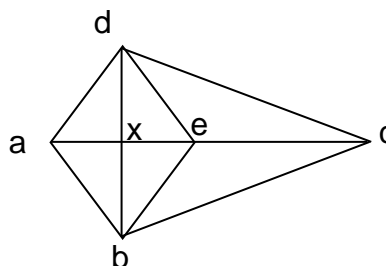
$$\overline{by} = \overline{ta}$$

$$T) tbya \text{ paralelogramo}$$

Realiza la demostración.



- 7) Sabiendo que  $\overline{xc}$  es mediana del  $\triangle dbc$  y que  $\hat{e}bd = \hat{a}db$ , demuestra que  $abed$  es un paralelogramo





## 1.1. TRAPECIO

### Definición

Un **trapecio** es un cuadrilátero que posee al menos un par de lados opuestos paralelos

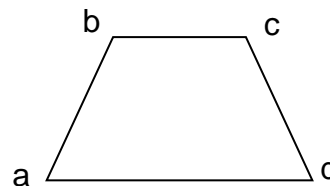
### 1.2.1 TRAPECIO ISÓSCELES

### Definición

Un trapecio que tiene el par de lados no paralelos congruentes se llama **trapecio isósceles**

En símbolos:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{bc} // \overline{ad} \\ \overline{ab} \not\cong \overline{cd} \\ \overline{ab} = \overline{cd} \end{array} \right\} \Rightarrow abcd \text{ trapecio isósceles}$$



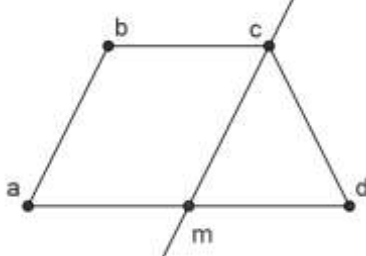
### Observación

A cualquiera de los lados paralelos se le llama base del trapecio isósceles.

### Propiedades:

- (I) En un trapecio isósceles, los ángulos de la base son congruentes.
- (II) En un trapecio isósceles, las diagonales son congruentes.

### **Demostraremos la propiedad I.**



H)  $abcd$  trapecio isósceles,  $\overrightarrow{bc} // \overrightarrow{ad}$

T)  $\hat{a} = \hat{d}$  y  $\hat{b} = \hat{c}$

D) Completa las proposiciones y así obtendrás la demostración

Trazamos  $\overrightarrow{cm} // \overrightarrow{ab}$ , entonces  $abcm$  es un paralelogramo. ¿Por qué?.....  
 Luego

$$\left. \begin{array}{l} \overline{ab} = \overline{cm} \text{ (1)} \\ \overline{ab} = \overline{cd} \text{ (2)} \end{array} \right\} \xRightarrow{(3)} \overline{cm} = \overline{cd} \xRightarrow{(4)} \triangle c m d \text{ isósceles} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{c} m d = \hat{d} \text{ (5)} \\ \hat{a} = \hat{c} m d \text{ (por(6))} \end{array} \right\} \xRightarrow{(3)} \hat{a} = \hat{d}$$

Ya demostramos que:  $\hat{a} = \hat{d}$  (\*)

$$\left. \begin{array}{l} \hat{a} + \hat{b} = 2R \text{ por ser conjugados internos en } \dots\dots\dots \\ \hat{c} + \hat{d} = 2R \text{ por ser conjugados internos en } \dots\dots\dots \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \hat{a} + \hat{b} = \hat{c} + \hat{d} \\ y(*) \hat{a} = \hat{d} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{b} = \hat{c}$$

- (1).....
- (2).....
- (3) Propiedad transitiva
- (4).....
- (5) En todo triángulo, a lados congruentes se oponen ángulos congruentes
- (6) Ángulos correspondientes entre .....

### Problemas

- 8) Demuestra la **Propiedad II**
- 9) Demuestra que si un trapecio posee el par de ángulos de una base congruentes, entonces el trapecio es isósceles.
- 10) En el paralelogramo  $abcd$  donde  $\overrightarrow{bc} // \overrightarrow{ad}$ , sea el punto  $m$  del lado  $\overline{ad}$  y perteneciente a la bisectriz del ángulo interior  $\hat{b}$ . Sabiendo que  $\hat{b} = 2\hat{a}$ , demuestra que el cuadrilátero  $bmcd$  es un trapecio isósceles.



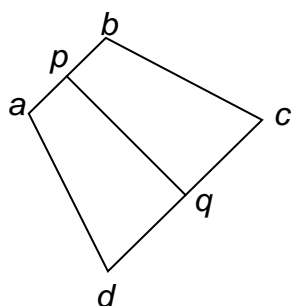
## 1.2. BASE MEDIA

### BASE MEDIA DE UN CUADRILÁTERO

Consideremos la siguiente definición:

**Base Media de un cuadrilátero** es el segmento determinado por los puntos medios de dos lados opuestos

Simbólicamente:



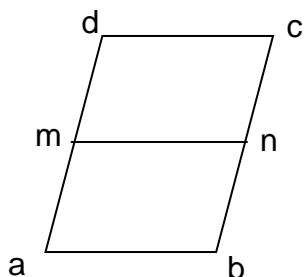
$p$  punto medio de  $\overline{ab}$   
 $q$  punto medio de  $\overline{cd}$  }  $\Leftrightarrow \overline{pq}$  base media del  $abcd$

- Construye la otra base media

### BASE MEDIA DE UN PARALELOGRAMO

En el caso particular que el cuadrilátero es un paralelogramo pueden demostrarse que:

La base media de un paralelogramo es paralela y congruente con los lados opuestos del paralelogramo



H)  $abcd$  es un paralelogramo  
 $\overline{mn}$  base media

T)  $\overline{mn} \parallel \overline{ab}$  ;  $\overline{mn} \parallel \overline{dc}$



D) Completando las proposiciones obtendrás la demostración

$$abcd \text{ es un paralelogramo} \Rightarrow \overline{ad} \parallel \overline{bc} \quad (1)$$

$$\overline{mn} \text{ base media} \Rightarrow \begin{cases} m \dots \text{ de } \overline{ad} \Rightarrow \overline{md} = \frac{1}{2} \overline{ad} & (2) \\ n \dots \text{ de } \overline{bc} \Rightarrow \dots = \frac{1}{2} \dots & (3) \end{cases}$$

De (1); (2) y (3)  $\Rightarrow \overline{md} \parallel \overline{nc}$  por ser mitades de lados opuestos de un paralelogramo.

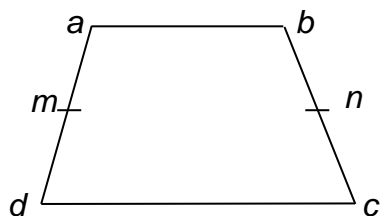
$\overline{md} \parallel \overline{nc} \Rightarrow mdcn$  es un..... pues

$$\left. \begin{array}{l} mdcn \text{ paralelogramo} \Rightarrow \overline{mn} \parallel \overline{dc} \\ abcd \text{ paralelogramo} \Rightarrow \overline{ab} \parallel \overline{dc} \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{mn} \parallel \dots \parallel \dots$$

### BASE MEDIA DE UN TRAPECIO

Cuando el cuadrilátero es un trapecio puede demostrarse que:

El segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio es paralelo a los otros dos lados y congruente con su semisuma



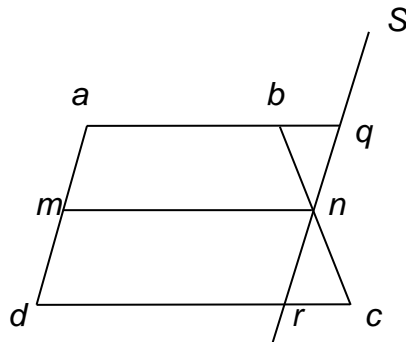
H)  $abcd$  es trapecio con  $\overline{ab} \parallel \overline{cd}$   
 $\overline{mn}$  base media

T)  $\overline{ab} \parallel \overline{cd} \parallel \overline{mn}$  ;  $\overline{mn} = \frac{\overline{ab} + \overline{cd}}{2}$



- Completa las proposiciones para demostrar el teorema.  
Previamente efectuaremos una construcción auxiliar:

por  $n$  trazamos una recta  $S$  paralela a  $\overline{ad}$  y llamamos  $\overleftrightarrow{ab} \cap S = \{q\}$  y  $\overleftrightarrow{dc} \cap S = \{r\}$



Comparamos los triángulos  $\triangle bqn$  y  $\triangle rnc$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle bqn \\ \text{y} \\ \triangle rnc \end{array} \right\} \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \widehat{b}nq = \widehat{r}nc \quad \text{por } \dots\dots\dots \\ \widehat{q}bn = \widehat{n}cr \quad \text{por } \dots\dots\dots \\ \overline{bn} = \overline{nc} \quad \text{por } \dots\dots\dots \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle bqn = \triangle rnc \quad \text{pues } \dots\dots\dots \end{array}$$

.....

$$\triangle bqn = \triangle rnc \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{bq} = \overline{rc} \\ \overline{qn} = \overline{nr} \quad (1) \end{array} \right\} \text{ por } \dots\dots\dots$$

**aqrd** es un paralelogramo por construcción

$$\left. \begin{array}{l} m \text{ punto medio de } \overline{ad} \text{ por H} \\ n \text{ punto medio de } \overline{qr} \text{ por (1)} \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{mn} \text{ es } \dots\dots\dots$$

De **aqdr**  $\Rightarrow \overline{mn} \parallel \overline{aq} \wedge \overline{mn} \parallel \overline{dr}$  siendo  $\overline{aq} \parallel \overline{cr}$  de donde

$$\boxed{\overline{mn} \parallel \overline{ab} \parallel \overline{cd}} \quad (\text{Aquí se demuestra la primera parte de la Tesis})$$

Además

$$\begin{aligned} \overline{mn} = \overline{aq} &\Rightarrow \overline{mn} = \overline{ab} + \overline{bq} \\ \overline{mn} = \overline{dr} &\Rightarrow \overline{mn} = \overline{cd} - \overline{rc} \\ \hline 2\overline{mn} &= \overline{ab} + \overline{cd} \end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{mn} = \dots\dots\dots} \quad (\text{se demuestra la segunda parte de la tesis})$$

### BASE MEDIA DE UN TRIÁNGULO

Si se extiende la definición de base media de un cuadrilátero para un triángulo resulta:

**Base Media de un triángulo** es el segmento que posee como extremos los puntos medios de dos lados

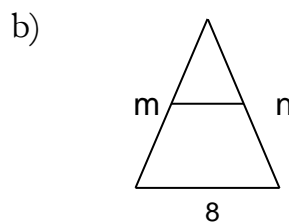
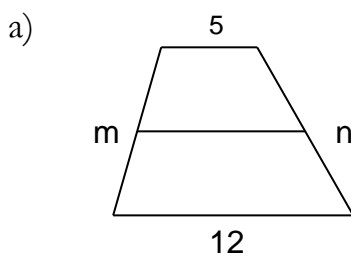
### PROPIEDAD

La **base media** respecto a un lado del triángulo, es paralela y congruente con la mitad del mismo

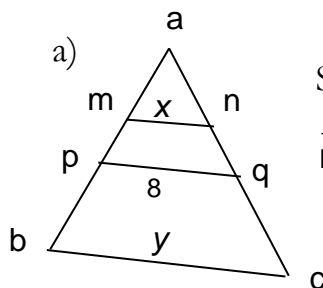
Se puede demostrar esta propiedad

### Problemas

11) Calcula la medida de la base media  $\overline{mn}$ , en cada caso

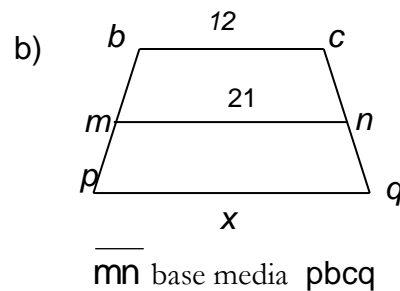


12) Calcula  $x$  e  $y$  si  $\overline{mn} \parallel \overline{pq} \parallel \overline{bc}$



Sabiendo que:

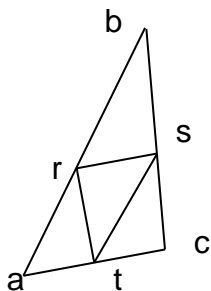
$\overline{mn}$  base media  $\triangle paq$   
 $\overline{pq}$  base media  $\triangle abc$





- 13)  $r, s$  y  $t$  son puntos medios de los lados del  $\triangle abc$  cuyos lados miden:

$$\overline{ac} = 23 \text{ cm}, \overline{bc} = 32 \text{ cm} \text{ y } \overline{ab} = 45 \text{ cm}$$

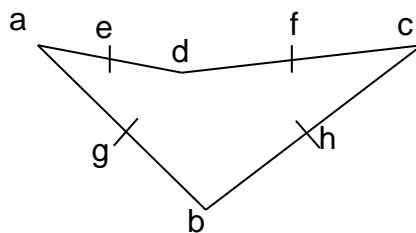


Halla el perímetro del  $\triangle rst$

- 14) Si  $x, y, t$  son puntos medio de los lados  $\overline{ab}, \overline{bc}$  y  $\overline{ac}$  respectivamente del  $\triangle abc$ , demuestra que  $xyct$  es un paralelogramo

15)

$e, f, g$  y  $h$  son los puntos medios de los lados consecutivos de un cuadrilátero no convexo de la figura. ¿Será  $efgh$  un paralelogramo?. Justifica tu respuesta.



## PROPIEDAD

Toda recta paralela a un lado de un triángulo trazada por el punto medio de otro de los lados, interseca al tercer lado en el punto medio de éste.

Se puede demostrar esta propiedad

## Problema

- 16) Prueba que el segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio biseca a las dos diagonales.

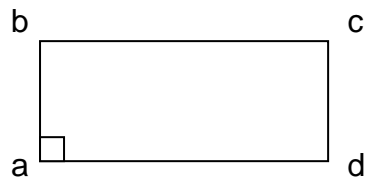
### 2 PARALELOGRAMOS PARTICULARES

Paralelogramos particulares son el rectángulo, el rombo y el cuadrado.

#### 2.1 RECTÁNGULO

##### Definición:

Un **rectángulo** es un paralelogramo con un ángulo recto



- Demuestra que el rectángulo **abcd** es un CUADRILÁTERO EQUIÁNGULO

Veamos una propiedad importante de los rectángulos:

#### PROPIEDAD

*Las diagonales del rectángulo son congruentes*

- *Efectúa su demostración*

#### Propiedad recíproca

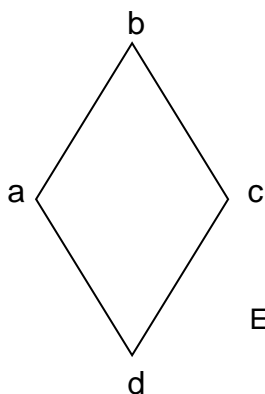
*Si un paralelogramo tiene sus diagonales congruentes es un rectángulo*

- *Efectúa su demostración*



## 2.2 ROMBO

### Definición



Un rombo es un paralelogramo con dos lados consecutivos congruentes

En la figura  $\overline{ab} = \overline{bc}$

- Demuestra que un rombo es un CUADRILÁTERO EQUILÁTERO

Veamos una propiedad importante de los rombos:

### PROPIEDADES

- *Las diagonales del rombo son perpendiculares.*
- *Las diagonales del rombo son bisectrices de los ángulos opuestos.*

- *Efectúa las demostraciones correspondientes*

### Propiedades recíprocas

- *Si las diagonales de un paralelogramo son perpendiculares, el paralelogramo es un rombo.*
- *Si las diagonales de un paralelogramo son bisectrices de los ángulos opuestos, el paralelogramo es un rombo*

- *Efectúa las demostraciones correspondientes*

### 2.3 CUADRADO

Definición:

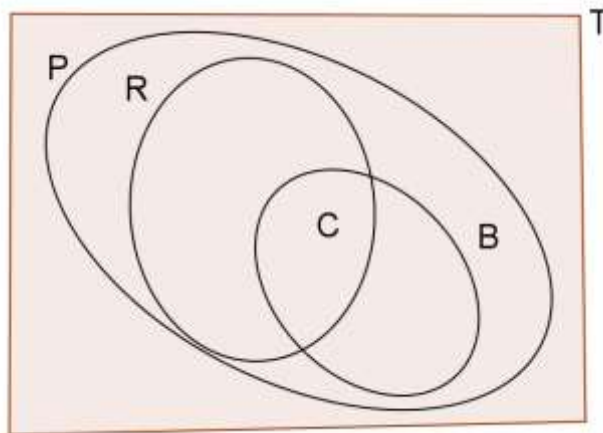
Un **cuadrado** es un cuadrilátero regular

➤ Completa:

Un cuadrado es un rectángulo porque .....

Un cuadrado es un rombo porque.....

➤ Veamos un diagrama que muestre la relación de inclusión entre los conjuntos



**T** = {trapezios}

**P** = {paralelogramos}

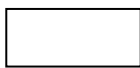
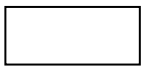
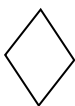
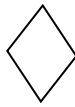


**R** = {rectángulos}

**B** = {rombos}

**C** = {cuadrados}



## SINTESIS

NOMBRE	CUADRILÁTERO	PARALELOGRAMO CON:	PROPIEDADES DE LAS
RECTÁNGULO	 equiángulo	 un ángulo recto	-Se bisecan mutuamente -Son congruentes
ROMBO	 equilátero	 dos lados consecutivos congruentes	-Se bisecan mutuamente -Son perpendiculares -Bisecan a los ángulos opuestos
CUADRADO	 equilátero y equiángulo	 un ángulo recto y dos lados consecutivos congruentes	-Se bisecan mutuamente -Son congruentes -Son perpendiculares -Bisecan los ángulos opuestos

## Problemas

17) Justifica la veracidad de las siguientes proposiciones:

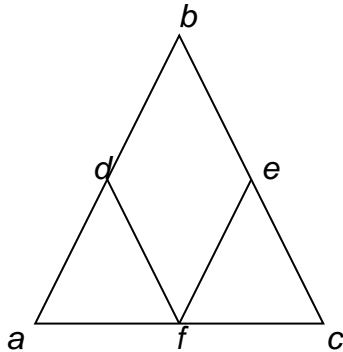
- Todo rombo es un paralelogramo
- Un rectángulo es un trapecio
- Un cuadrado es un paralelogramo
- Algunos paralelogramos son rombos
- Todos los cuadrados son rombos
- Las diagonales de un cuadrado se bisecan
- Las rectas que incluyen a las diagonales de un rombo son eje de simetría del mismo

18) Responde y justifica:

- Un cuadrilátero que tenga un par de lados consecutivos congruentes, ¿es un rombo?
- Un cuadrilátero que tenga dos ángulos rectos, ¿es un rectángulo?



21)



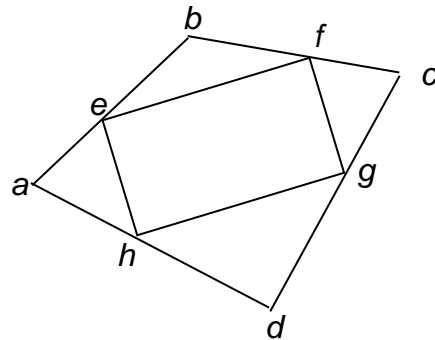
- H)  $d$  punto medio de  $\overline{ab}$
- $e$  punto medio de  $\overline{bc}$
- $f$  punto medio de  $\overline{ac}$
- $\overline{ab} = \overline{bc}$

T) **dbef** rombo

Realiza la demostración.

22) Demuestra cada propuesta con respecto al dibujo de la derecha:

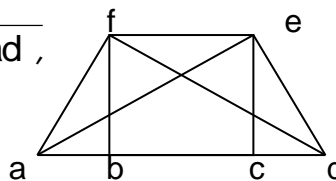
- H)  $abcd$  paralelogramo
- $e, f, g$  y  $h$  puntos medios de los lados.
- T)  $efgh$  paralelogramo





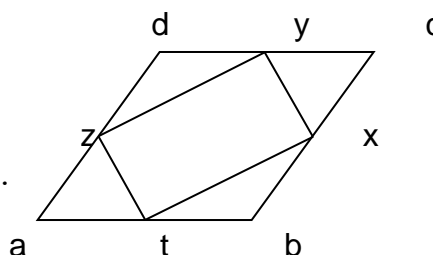
## AUTOEVALUACIÓN

- 1) En la figura es  $\overline{fb} \perp \overline{ad}$ ,  $\overline{ec} \perp \overline{ad}$ ,  
 $\overline{af} = \overline{ed}$  y  $\overline{fb} = \overline{ec}$   
Demuestra que  $\overline{ae} = \overline{fd}$



- 2) En el paralelogramo  $abcd$  traza las perpendiculares a la diagonal  $\overline{ac}$  desde  $b$  y  $d$  y llama  $r$  y  $s$  a los respectivos pies de tales perpendiculares. Demuestra que  $rdsb$  es un paralelogramo.
- 3) Demuestra que los segmentos que unen los puntos medios de los lados opuestos de un cuadrilátero se bisecan mutuamente.

- 4) Sean  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y  $t$  los puntos medios de los lados del rombo  $abcd$ .  
Demuestra que  $xyzt$  es un rectángulo.



- 5) En un paralelogramo  $abcd$  con  $\overline{ad} > \overline{ab}$ , la bisectriz  $\hat{a}$  corta a  $\overline{bc}$  en  $g$  y la del  $\hat{b}$  interseca a  $\overline{ad}$  en  $h$ . Demuestre que  $abgh$  es un rombo.

## BIBLIOGRAFIA

- Apunte "El Universo de los cuadriláteros" Hinrichsen-Buschiazzo-Cattaneo Impreso en el instituto Politécnico 1985
- Geometría Serie Awli - Clemens - Editorial Addison Wesley Longman - Impreso en Mexico - Año 1998