LAS ECUACIONES DIFERENCIALES COMO HERRAMIENTAS DISPARADORAS DE UN TRABAJO DE FORMACIÓN DOCENTE*

Anido de López, Mercedes
Departamento de Matemática, Escuela de Estadística
Simoniello de Alvarez, Ana María
Facultad de Ciencias Económicas - Universidad Nacional del Litoral

El trabajo muestra como se potencia, en la formación del docente, la utilización de instrumentos informáticos que permiten con facilidad explorar y cuantificar matemáticamente problemas de aplicación económica que requieren del método matemático para su planteamiento y resolución.

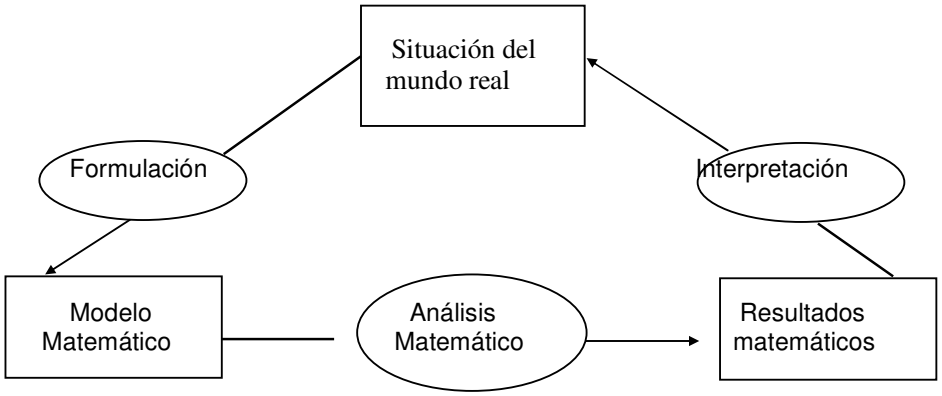
1. LA RELACIÓN ENTRE EL MATEMÁTICO Y EL ECONOMISTA, Y LOS MODELOS MATEMÁTICOS EN ECONOMÍA.

Los contenidos matemáticos en la enseñanza de economía y administración deben hacer hincapié fundamental en los métodos cuantitativos de análisis, y en que el alumno, desde un problema económico, sepa reconocer la naturaleza del mismo y sus premisas, cotejar la información matemática de la que dispone y aplicarla en la obtención de unos resultados a interpretar.

Un propósito y objetivo importante en la Matemática aplicada a la Economía es que el estudiante se familiarice con el pensamiento matemático. Debe aprender a reconocer los principios fundamentales y las ideas que los originan, las que a menudo son más importantes que las manipulaciones formales.

La aplicación de Matemática en problemas de Economía y Administración consiste en tres fases esenciales:

- Traducción de la información económica dada, al lenguaje matemático. De esta forma se obtiene un modelo económico. El modelo puede ser una Ecuación diferencial, un sistema de ecuaciones lineales o alguna otra expresión matemática.
- Tratamiento del modelo por medio de métodos matemáticos. Esto conducirá a la solución, en forma matemática, del problema dado.
- Interpretación del resultado matemático en términos económicos.



La existencia de analogías entre los caracteres centrales de varias teorías ha implicado la existencia de una teoría general que sirve de fundamento a las particulares y las unifica con respecto a dichos caracteres centrales.

* El trabajo se realiza en el marco del Proyecto de investigación de la Universidad Nacional de Rosario ***"La Enseñanza de la Matemática con Herramientas Computacionales"*** que dirigen la Lic. Mercedes Anido de López y el Ing. Héctor Rubio Scola. Financiación del M.C.E.

La Matemática es el gran auxiliar y el lenguaje de la Economía en esta labor de síntesis. Una gran parte de la economía moderna está caracterizada por conceptos matemáticos cuya formalización adecuada es simplificadora del pensamiento.

La Matemática es el lenguaje simplificador del pensamiento y un instrumento para el análisis de la realidad económica. Si bien a veces la abstracción es inevitable en Matemática, el estudiante de Matemática en una Facultad de Ciencias Económicas debe situarse en un campo concreto.

Es difícil saber "cuánta" matemática necesita un economista; dependerá de su campo de interés.

La mayor parte de las gráficas que son fundamentales para la comprensión de fenómenos económicos proceden de un caudaloso análisis estadístico de los datos recogidos. Los métodos matemáticos del cálculo de probabilidades y de la estadística encuentran en el campo de la economía muchas de sus aplicaciones más importantes.

Las representaciones geométricas son indispensables en la introducción a la economía, y herramientas como las ecuaciones diferenciales, método de las diferencias finitas, transformaciones lineales, espacios funcionales, lo son en etapas más avanzadas.

El razonamiento lógico es lo esencial para dominar los principios fundamentales, mientras que la ponderación sagaz de los datos empíricos es la llave para dominar las aplicaciones económicas.

El Análisis Matemático puro y el aplicado difieren en cuanto al aspecto empírico de las definiciones y supuestos de las conclusiones, no en cuanto a los métodos de deducción.

La Economía se relaciona con conceptos que son de naturaleza esencialmente cuantitativa: precio, costo, escalas de salarios, inversión, renta, beneficio,..., es decir, gran parte del análisis económico es Matemático.

Cuando las variables económicas se presentan como símbolos, sus propiedades se establecen en forma matemática. La Matemática suministra la técnicas para analizar relaciones entre los símbolos, y, por lo tanto entre las variables que ellos representan.

Gran parte del Análisis Económico es Matemática Aplicada.

La Matemática capacita al Economista para

- ser preciso al definir las variables pertinentes,
- plantear con claridad las hipótesis hechas,
- ser lógico en el desarrollo del Análisis, y
- considerar una cantidad de variables mayor que la que sería posible utilizar verbalmente.

La importancia creciente de los métodos cuantitativos ha hecho necesario poner énfasis en su estudio, no sólo para la comprensión de los fenómenos más comunes de la micro o macroeconomía sino también para dar base adecuada para proseguir estudios más avanzados en estadística, investigación operacional, teoría de inventarios, gestión de producción, etc.

Un modelo matemático provee la estructura de base: " Representa al fenómeno que describe, como un molde de vestido es al vestido". " Un mismo molde puede ser útil para muchos diferentes vestidos, con distintos colores, telas, adornos...". Citamos, al respecto, algunos párrafos de Beppo Levi:

" ... Una equivocación muy grande está en suponer que las relaciones entre el técnico y el matemático puedan asemejarse a las del caminante y del zapatero; el zapatero fabricará sus zapatos para el pie que el caminante le presente y no tiene que preocuparse de otra cosa sino que el pie entre en el zapato; si podrá proveer un surtido de números para distintos pies, el asunto andará mejor; y, desde luego, el surtido del matemático está encajonado en una fórmula. Partiendo de este concepto y del principio de que la característica de la matemática sea el rigor, el deber del técnico consistirá en trazar con nitidez el marco de su problema, usar notaciones racionales, notar todas sus variables, discernir las dependientes y las independientes y ¿ qué más?"

" Un problema no puede ser tratado matemáticamente sin una previa esquematización; ahora bien, un defecto muy común en los técnicos, si no tienen ellos mismos suficiente cultura matemática, consiste en pretender proporcionar ellos al matemático su propia esquematización, la cual en general

no tendrá solución posible o, por lo menos, no tendrá solución utilizable. Ya es esquematización en el grado más bajo la representación de las magnitudes por números, y la elección de éstos entre los datos de experiencia y los requisitos técnicos está condicionada a la previsión del desarrollo que podrán tener los cálculos.

" El mejor consejo para el técnico que desee sinceramente la colaboración del matemático es dirigirse primero al que se sienta inclinado a interesarse en el problema técnico, no en la ecuación que él supone representa a ese problema; y llevarlo delante del caso que verdaderamente le interesa. Podrá no ser inútil, si es posible, que este contacto sea entendido en el sentido más material, porque ojos y manos tienen su parte aún en la concepción y en el pensamiento. Y deberá dejerle a él elegir sus datos y sus incógnitas. Por cierto que pensando, como he dicho, que la matemática es un país muy vasto que tiene cabida para los humores más diferentes, no deberá extrañarse si desprecia al matemático que no siente interés por su problema ; porque encontrará también al otro (el caso opuesto), y con éste no deberá extrañarse si le ve intentar caminos en los cuales el técnico no había pensado.

" ... Ya la decisión de preferir una u otra forma depende del problema práctico que se tiene en vista y será esto solamente lo que podrá dirigir al matemático. " (Beppo Levi, 1946).

Los modelos matemáticos pueden estar expresados por:

- una teoría geométrica: geometría euclídea, geometría esférica, geometrías no euclídeas,...
- una fórmula, una ecuación,
- un sistema de ecuaciones que represente la ocurrencia simultánea de distintos fenómenos económicos.

Interesa rescatar la idea de **Matemática Aplicada a la Economía**.

Esta expresión designa un lenguaje con dimensiones semióticas provenientes de disciplinas diferentes: la sintaxis, de la matemática; la semántica, de la economía; y la pragmática, de las reglas de la práctica profesional, generadas en el uso del lenguaje llamado Matemática Aplicada a la Economía.

" La Economía como semántica no posee irrefutables criterios de verdad. Pero su práctica analítica autoriza a precisar los límites dentro de los cuales sus proposiciones pueden ser verdaderas. Así, ante un enunciado, la capacidad descriptiva de un economista consiste en mostrar el modelo heurístico (el conjunto de supuestos) en que éste se satisface o no. Y su percepción empírica se manifiesta mediante sus juicios acerca de la pertinencia de los supuestos respecto a los hechos observados en una economía determinada. Por lo tanto, la semántica de la Matemática Aplicada a la Economía apelará, para conformarse, al ejercicio del análisis y el razonamiento económicos".(Puchet Anyul,1993).

2. LA NECESIDAD DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARA EL FUTURO LICENCIADO EN ADMINISTRACIÓN O ECONOMÍA

La teoría de las ecuaciones diferenciales es una de las más amplias ramas de la matemática actual y también una de las que más se relaciona con las aplicaciones.

Cuando se trata de entender un fenómeno económico, entendido el mismo como una situación bajo estudio que presenta la variación de una variable con respecto a otra u otras, la mente crea una idealización y la plasma en un modelo matemático en el que, considerando el aspecto central del fenómeno, estudia sus causas y lo describe en forma matemática.

Con frecuencia la expresión matemática, o ley, que resulta del estudio, se expresa en forma de una ecuación diferencial.

Por ejemplo el problema de " Capitalización continua del interés":

"Supuesto que la función y = y(t) expresa el monto compuesto (o el monto total) a los t años de la fecha de la inversión inicial A cuando se capitaliza continuamente el interés a una tasa anual r, la rapidez de cambio de la cantidad de dinero que se tiene en un instante t es proporcional a la cantidad que se tiene en el mismo momento."

El modelo dinámico (el tiempo es una variable continua) que representa la situación del problema es la ecuación diferencial: $y'(t) = r\ y(t)$

Su solución general es : $y(t) = A \cdot e^{rt}$, $t \geq 0$

3. FORMACIÓN DE UN DOCENTE CAPACITADO EN EL TEMA

3.1 El trabajo en Taller como metodología de formación.

Fundamentada la necesidad de un manejo conceptual y operativo de las ecuaciones diferenciales por el estudiante de las carreras de Economía surge el problema de la formación del docente en el tema.

La mayor parte de los docentes del Dpto. de Matemática de la Facultad de Ciencias Económicas, Estadísticos ó Contadores, no recibieron en su formación de grado adecuados conocimientos en el tema. A aquellos docentes que sí los recibieron en sus carreras de grado, se les presentan otros problemas que adquieren significación, como la lejanía cronológica de la adquisición del conocimiento, y el hecho que , en general, no han tenido una formación al respecto, inserta en la problemática específica de las ciencias económicas.

Por otra parte existe conciencia generalizada en un grupo de docentes del Departamento, sobre la importancia de su formación permanente.

Muy especialmente en el caso del docente, la constante renovación del conocimiento, su puesta al día en nuevos enfoques (y aunque más no sea su permanente " repaso ") es condición **sine qua non** por mantenerse **en forma**, de modo no demasiado diferente al del atleta que requiere un entrenamiento constante.

Si el docente piensa que ya "sabe" bastante, y, que eso para enseñar le alcanza, ello revela que no se ha dado cuenta de que las mejores fórmulas pedagógicas no son las que se aprenden en un manual sino las que uno mismo va deduciendo por sus propios caminos.

Es esa experiencia personal e intransferible la que ilumina y entusiasma al profesor, y la que le da un toque, si no mágico al menos contagioso, por el cual el alumno queda imantado, alerta, deseoso de seguir aprendiendo.

Así surge el **3er.Taller de docentes** como una estrategia que nos permite abordar la problemática expuesta y plantear nuevos y más profundos interrogantes, sobre la base de algunos **supuestos**, como:

- La renovación efectiva de los métodos didácticos, en el marco de un currículum actualizado, sólo puede provenir del convencimiento de los docentes, a partir de su propia experiencia de reconstrucción del conocimiento matemático, en un proceso de redescubrimiento y análisis de los conceptos que permiten resolver problemas.
- Las herramientas computacionales constituyen un importante disparador para el cambio.

3.2 El Taller

Se elige esta estrategia porque la creación de un espacio de producción grupal es, en sí misma, motivadora para el docente, y además:

- proporciona la posibilidad de un gran enriquecimiento, al permitirnos percibir las distintas formas de afrontar una misma situación-problema,
- el trabajo con otros nos da la posibilidad de contrastar los progresos que el método es capaz de producir en uno mismo y en otros,

- el trabajo en grupo proporciona la posibilidad de prepararse mejor para ayudar a nuestros estudiantes en una labor semejante, con mayor conocimiento de los resortes que funcionan en diferentes circunstancias y personas.

La metodología del trabajo en Taller apunta a permitir la participación de todos sus integrantes, revalorizando las experiencias que cada integrante tiene sobre el tema que se discute, debate o reflexiona. Un elemento fundamental es la " igualdad " en la participación.

Quien ocupe el lugar de Coordinador debe funcionar como un distribuidor que da fase (facilita) a la intervención/ participación de todos los miembros (en forma sucesiva, a la manera de un semáforo). Algunas cuestiones básicas a tener en cuenta por el Coordinador son:

- estimular la participación;
- evitar polarizaciones;
- organizar la producción del material que va surgiendo del grupo, pero sin intervenir con aportes personales;
- provocar la discusión/profundización;
- destrabar cuando se produce un obstáculo ó no se puede seguir avanzando;
- permitir que cada miembro tenga igual oportunidad para participar.
- no utilizar su función de coordinador para su lucimiento personal o para canalizar sus expectativas (por ejemplo, en el caso en que tenga una propuesta, no usar el Taller para que ésta sea aprobada; en tal caso, se pondrá a discusión del grupo como cualquiera otra de las propuestas).

Es importante destacar este espacio de formación orientado a las ecuaciones diferenciales como Modelos Matemáticos en Economía, ya que constituye la tercera etapa en la formación continua del docente, instancia ésta que se integra en el currículum del área Matemática de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Rosario.

Describimos brevemente las dos etapas previas para detenernos luego en la última mencionada.

3.3 El Primer Taller : de reflexión en la práctica docente

Contenido: El uso del Programa DERIVE. Aplicaciones de DERIVE en el aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral. Aplicaciones de DERIVE en la resolución de problemas de aplicación de la derivación e integración de funciones reales.

Se organizó sobre la base de **interrogantes** planteados en relación con : la práctica docente, la herramienta computacional, la selección y utilización de Software, el currículum de la carrera, el proceso de enseñanza-aprendizaje en el aula y la metodología de la enseñanza-aprendizaje de Matemática con la inclusión de innovaciones tecnológicas.

Objetivo operativo: proporcionar al docente *el conocimiento y manejo de una herramienta apta para la operatoria del Cálculo diferencial e integral, e instancias para la permanente reflexión sobre la potencialidad didáctica de la herramienta utilizada.*

3.4 El Segundo Taller: de análisis y elaboración de modelos matemáticos en economía

Tema: Aplicaciones del cálculo diferencial e integral. Uso de la herramienta computacional.

Objetivos:

- Promover, entre los docentes de Matemática Básica, una reflexión curricular sobre los contenidos y metodologías del área.
- Dar respuesta a los interrogantes planteados y plantear nuevos interrogantes.
- Diseño de metodologías que orienten al alumno en el **análisis** de problemas, y en la **modelización** de problemas con el lenguaje matemático, y estimule la búsqueda autónoma y el propio descubrimiento paulatino de conceptos matemáticos generados a partir de problemas interesantes relacionados con tales situaciones , que surjan de modo natural.
- Exploración de los diferentes bloqueos que actúan en cada uno de los actores, a fin de conseguir una actitud sana y agradable frente a la tarea de resolución de problemas.

Producción: Se produjeron **unidades didácticas** en los siguientes temas:

· Oferta y demanda, punto de equilibrio	· Optimización.
· Insumo-producto	· Crecimiento y decrecimiento. Función logística
· Tasas de variación: relativa , porcentual.	· Excedentes: de producción , de consumo.
ù Costos : total , promedio , marginal (total ó parcial).	· Productos competitivos ó complementarios.

· Ingresos: total, promedio,marginal (total ó parcial).

4 EL TERCER TALLER

Tema: Introducción a los modelos dinámicos. Ecuaciones diferenciales

Objetivos: Propiciar que los asistentes :

ù reconozcan la necesidad de modificar las técnicas del aprendizaje, cuando en la resolución de problemas se aprovechan las capacidades simbólicas, numéricas y/o gráficas de un sistema computacional;

ù apliquen el Programa DERIVE en la resolución de algunos tipos de Ecuaciones Diferenciales y exploración de soluciones, en problemas de las carreras de Ciencias Económicas.

4.1 Los ambientes propicios de aprendizaje y las unidades didácticas.

En este Taller se puso especial énfasis en la reflexión sobre la creación de un **"ambiente propicio de aprendizaje"** (al estilo de Vygotsky), en el Trabajo de Laboratorio como experiencia trasladable a la metodología del aula.

En efecto, la teoría del aprendizaje y la tecnología instruccional están en las mentes de la revolución científica (Jonassen, 1991). La nueva teoría es el constructivismo. El constructivismo concierne al proceso de cómo nosotros construimos el conocimiento.

La forma como nosotros construimos el conocimiento, depende sobre todo de los aprendizajes previos. Éstos a su vez dependen de la clase de experiencia que los que aprenden han tenido, de cómo los que aprenden han organizado esas experiencias en estructuras de conocimientos y de las creencias que los que aprenden invocan cuando interpretan eventos del mundo (Duffy y Jonassen, 1992).

Si nosotros construimos nuestra propia realidad a través de la interpretación de experiencias, entonces los profesores deberían analizar sus propias experiencias en lo que aprenden en situaciones de conocimiento de un tema no plenamente conocido, como el caso que nos ocupa.

Los modelos constructivistas del aprendizaje estriban en crear ambientes donde los alumnos participen activamente en ellos, en forma que intentan ayudarles a construir su propio conocimiento, más que haciendo del docente el " intérprete " del mundo, o del alumno el que "reproduce" el conocimiento del profesor.

La estrategia didáctica que se deriva de la concepción piagetiana tiene como objeto el facilitar al alumno el dominio del método científico y no tanto proporcionarle los contenidos de la ciencia; es una estrategia de enseñanza por descubrimiento y no una transmisión verbal de conceptos científicos; es más eficaz proporcionarle la capacidad de descubrirlos o construirlos por sí mismos.

Desde el marco teórico de las concepciones alternativas se cuestiona la enseñanza por descubrimiento ya que no parece posible que los alumnos generen o inventen en contexto de instrucción, por muy adecuados que sean los conceptos científicios básicos.

Desde estas posiciones se postula que, para que se produzca cambio conceptual es preciso que el alumno reciba aquellas teorías científicas que no sea capaz de descubrir por sí mismo.

Ahora bien, para que esa enseñanza perceptiva sea eficaz **ha de alejarse radicalmente de la vieja enseñanza repetitiva tradicional que conduce a un aprendizaje memorístico y no significativo, manteniéndose dentro de posiciones constructivistas, y acompañándose siempre de**

ejercicios de descubrimiento y consolidación de los conceptos adquiridos (Ausubel, Novak y Hanesian,1978).

En este contexto es que debemos considerar el aporte que significa el conocimiento del Estilo de Aprendizaje del alumno.

El Estilo de Aprendizaje de sus alumnos debería ser la guía del profesor, para crear los "ambientes propios de aprendizaje".

Pero, ¿ qué entendemos por aprendizaje en Matemática ?

Nos adherimos a la concepción de aprendizaje adoptada por Catalina Alonso en su documento "Estilos de Aprendizaje, Tutorías y Enseñanza a distancia" (1990), en cuanto a concebirlo, como "*no sólo un conjunto de procesos que se desarrollan en la mente humana sino además como un conjunto de habilidades susceptibles de modificaciones y mejoras ".*

Citamos también a Schoenfeld (1988) quien mencionó :

"... para que los estudiantes vean las matemáticas como una disciplina con sentido, es necesario que interactúen e internalicen los principios asociados con esta disciplina. Los estudiantes necesitan aprender matemáticas en un salón de clases que represente un microcosmo de la cultura matemática, esto es, clases en donde los valores de las matemáticas como una disciplina con sentido sean reflejados en la práctica cotidiana", y además puso énfasis en que:

"... si uno desea que la gente emerja del salón de clases con el sentido real de las matemáticas, entonces el medio, salón de clases, tiene que reflejar actividades donde los estudiantes tomen parte en el desarrollo de las matemáticas de tal manera que le encuentren el sentido de estudiar matemáticas... , es decir, que exista motivación para que los estudiantes continúen estudiando matemáticas fuera del salón de clases".

Con el propósito de generar un ambiente propicio se propone una alternativa práctica de acción docente con la incorporación de la herramienta computacional como herramienta cognitiva y la experimentación por el propio docente en la creación del "ambiente propicio de aprendizaje"

4.2- La computadora como herramienta cognitiva.

En la búsqueda de algunas respuestas a la problemática planteada, y de un diseño de ambiente propicio de aprendizaje, proponemos la incorporación de herramientas computacionales como herramientas cognitivas que, adecuadamente utilizadas, pensamos pueden ayudar al alumno en la exploración, organización y representación del conocimiento.

Jonassen(1995) incluye en las "herramientas computacionales cognitivas" las bases de datos, las redes conceptuales, los sistemas expertos, la construcción de multimedios e hipermedios. Enfatiza que las herramientas cognitivas no son " *fingertips* "(dispositivos sólo para apretar teclas) o sólo para almacenar o transformar información, por el contrario deben comprometer al alumno en la "creación del conocimiento" que refleje su comprensión y concepción de la información, mas que atentar reproducir el conocimiento del profesor.

En esta lista no cerrada de Jonassen podemos incluir las herramientas **CAS** (Computer Algebraic System). Éstas se han desarrollado en los últimos años como poderosas calculadoras numéricas, simbólicas y gráficas que no requieren conocimientos específicos de programación.

En esta categoría podemos considerar a : **MATHCAD, DERIVE, MAPLE, MATHEMATICA,** por ejemplo. Las nuevas herramientas ayudan y estimulan a "hacer", "enseñar", y "aprender" Matemática. Utilizan una sintaxis lógica y son abiertas a la creación de operadores funcionales.

4.3 ¿Porqué elegimos DERIVE para estos temas?

Seguimos las ideas directrices de los talleres anteriores.

En efecto, el Software DERIVE permite tratar el estudio de las ecuaciones diferenciales en forma bastante extensa considerando que es un programa sencillo, utilizable en todo tipo de ordenadores, con hasta la ventaja de no necesitar, en algunas versiones , que posean disco duro.

DERIVE proporciona archivos útiles que contienen operadores que permiten resolver ecuaciones diferenciales de primer orden utilizando los métodos más conocidos en esa área, como variables separadas, ecuaciones diferenciales lineales, de Bernoulli, homogéneas, diferenciales exactas,

factores integrantes, y otras.

También se encuentran operadores para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden y grado superior a uno utilizando los métodos más comunes como transformación a ecuaciones exactas, test de linealidad y otros.

Pero, una de las cuestiones más importantes es que asimismo puede el usuario aprovechar la capacidad operatoria en forma simbólica, numérica y/o gráfica del programa, para crear sus propios operadores que le interesen para analizar, plantear , en esencia modelizar su problema, de acuerdo con los datos que posea. Luego podrá resolver, determinar soluciones, verificar, analizar otras posibles aplicaciones del modelo, generalizar, etc.

Las posibilidades gráficas que ofrece el Programa DERIVE permite el análisis de las curvas integrales , variando los coeficientes, como parámetros, para investigar tendencias, relaciones, entre esos elementos y las características del problema que originó la ecuación diferencial.

4.4 La Pantalla de DERIVE en la resolución de una ecuación diferencial

La pantalla Algebra :

#1: " Hallar la solución general de la ecuación diferencial lineal:"

#2: $y'(t) = r \cdot y(t)$

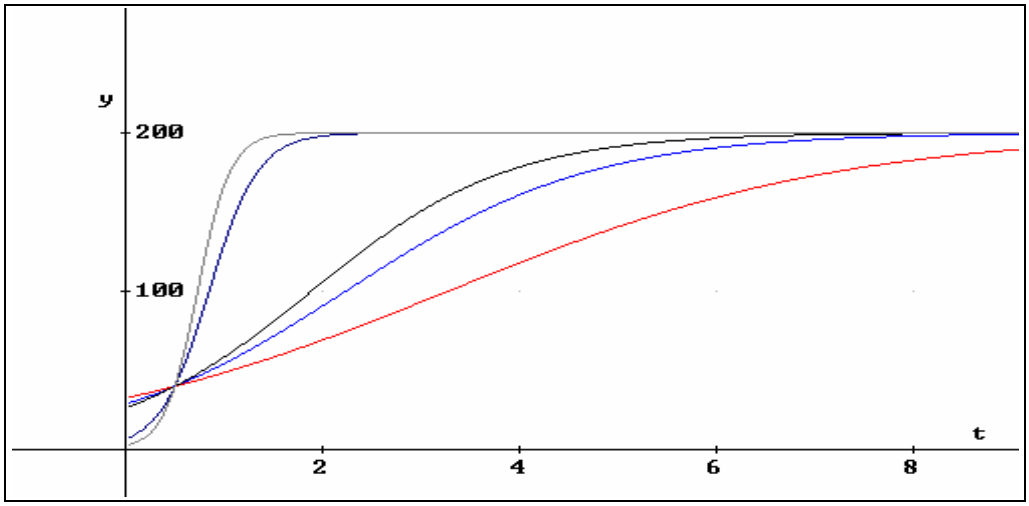
#3: $\text{LINEAR1_GEN}(p, q, x, y, c) := y = \dfrac{c + \int q \cdot \hat{e}^{\int p\, dx}\, dx}{\hat{e}^{\int p\, dx}}$

#4: $\text{LINEAR1_GEN}(-r, 0, t, y, c)$

#5: $y = c \cdot \hat{e}^{r \cdot t}$

#6: " Es la solución general."

La Pantalla gráfica 2D :



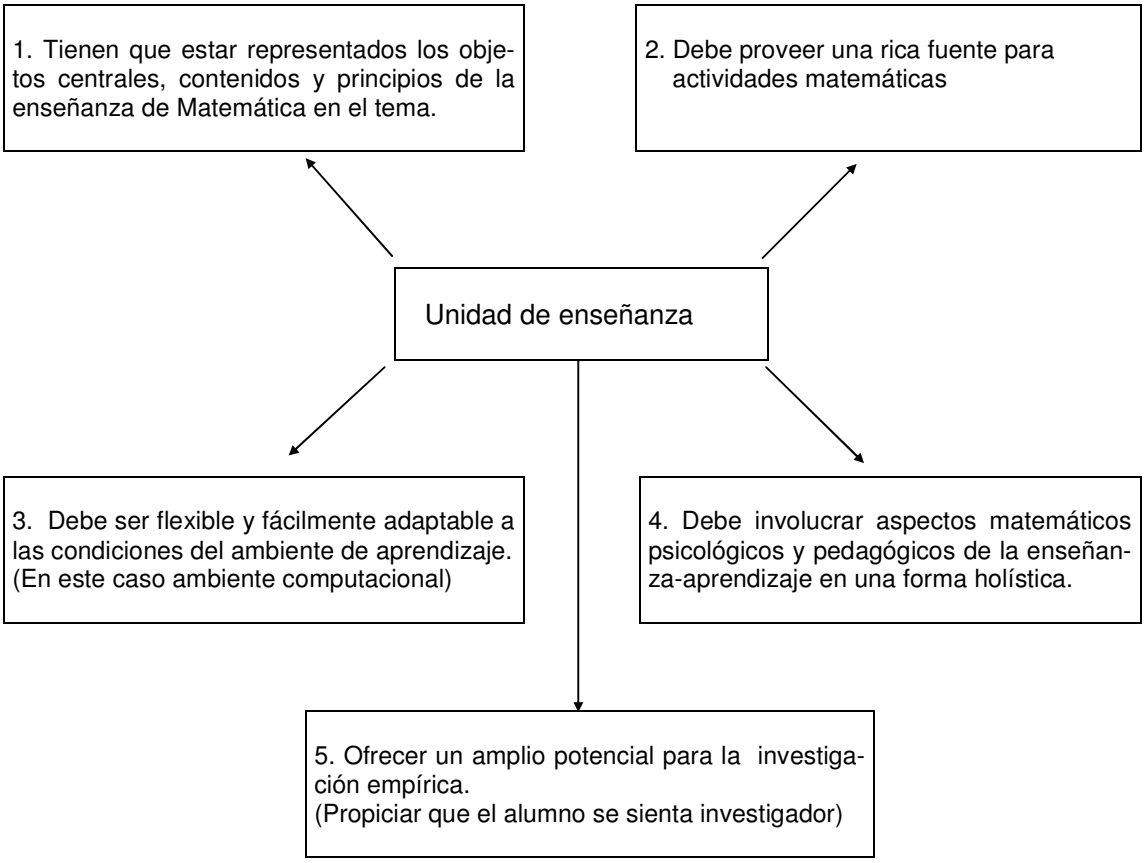
Algunas trayectorias temporales en el análisis de un problema de crecimiento poblacional inhibido.

4.5- El diseño de unidades de enseñanza en la Educación Matemática considerada como ciencia de diseño.

Con el deseo de aproximar a los docentes a una investigación empírica centrada alrededor del diseño de unidades de enseñanza se los estimuló hacia la propuesta de problemas de Economía o Ciencias Sociales que utilizan Ecuaciones diferenciales, y al análisis por el propio docente de las decisiones tomadas durante el proceso de resolución de problemas.

En una segunda instancia se propone al docente la construcción de unidades didácticas centradas en los problemas propuestos, reconociendo que encontrar la solución del problema matemático no es el final de la empresa matemática, " sino el punto inicial para encontrar otras soluciones, extensiones, generalizaciones de ese problema, relaciones con otros problemas,...." (Schoenfeld,1989).

Una " unidad de enseñanza" de acuerdo con el concepto de Erich Whittmann (1995) debe reunir las características siguientes:



Es decir, en cada problema que proponga el docente para ser modelado por una ecuación diferencial debe tratar de seguir los pasos de Whittmann para aprovechar la riqueza del problema, la posibilidad de un juego exploratorio por el aprovechamiento de la herramienta computacional, proponerse actividades matemáticas derivadas del problema que hagan a las situaciones de modificación de parámetros, ó datos, con el análisis gráfico correspondiente.

Cuando los investigadores tienen como objetivo final de su trabajo el diseño de unidades curriculares (que pueden ir desde material de apoyo ante dificultades de aprendizaje específicas, o unidades para la enseñanza de un tema concreto, hasta el desarrollo del curriculum completo de un nivel educativo), es absolutamente imprescindible evaluar la calidad (es decir, la eficacia) de los materiales que han elaborado. Nos encontramos ante una " investigación curricular " en la que se debe seguir un proceso cíclico de desarrollo y evaluación : elaboración de una primera propuesta de material, experimentación del mismo, evaluación de los resultados, modificación del material como consecuencia de la evaluación, experimentación del nuevo material, etc.

5. LOS CENTROS DE INTERÉS DE LAS UNIDADES DE ENSEÑANZA

En el mencionado contexto de trabajo la producción de los docentes se focalizó en los siguientes temas de Matemática Aplicada a Ciencias Sociales y Economía:

1er. Unidad : Modelos de crecimiento poblacional.

2da.Unidad: Dinámica del precio de mercado.

3er. Unidad: Relación entre volúmenes de ventas y precios

4ta. Unidad: Variación de ingresos por ventas en relación con cantidades demandadas.

REFLEXIÓN FINAL

Subyace un interrogante que es elemento de discusión en el Taller:

El hecho de trasladar al aula, a la práctica educativa, una metodología como la que surge en el Taller se confronta con los espacios de tiempo dedicados en el currículum de las Facultades de Ciencias Económicas, a los contenidos matemáticos.

Las opciones son difíciles. No obstante se debe tener presente que la única forma en la que el aprendizaje es real y fluctuoso es cuando es significativo.

El enseñar debe ser altamente interactivo, debe envolver a los estudiantes activamente de manera que puedan entender las ideas y con ello puedan resolver problemas que sean social y personalmente relevantes.

El aprender es un proceso dinámico por el cual "entender" es conceptual e interconectado. Los estudiantes obtendrán un conocimiento que tiene más sentido (ó es más útil) si lo obtienen a través de varias rutas y en una forma integral, vinculada al área de interés de su carrera.

BIBLIOGRAFIA

ANIDO,M. y SIMONIELLO,A.M. (1995). *"Las herramientas CAS como motivadoras para la reflexión en la práctica docente*". Congreso Internacional de Informática Educativa. Santa Fe.Argentina.

ANIDO,M.Y SIMONIELLO,A.M. *(1996).* Una encuesta de análisis sobre un Taller para la reflexión docente. *Memorias de la Décima Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa.* Puerto Rico.

ANIDO,M. Y SIMONIELLO,A.M. (1997). " El taller de docentes como estrategia de abordaje de un problema : la integración curricular del área Matemática en una Facultad de Ciencias Económicas". *Mem. de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.*México.

ANIDO,M. Y SIMONIELLO,A.M.(1997). " La construcción de unidades didácticas en el marco del proyecto de investigación: La enseñanza de la matemática con herramientas computacionales".*Jornadas de Investigación.Fac.de Cs. Económicas y Estadística.Univ.Nac.de Rosario.Argentina.*

BEPPO LEVI (1946). *" Matemática aplicada y matemática pura" .* Revista Ciencia e Investigación .Vol II. nº 11-págs. 487/490. Emecé . Buenos Aires.

Educación a distancia. (1987).Qué es el perfeccionamiento docente? *Revista nº 1.* Buenos Aires. R. Argentina.

FURNO, G.; KOEGEL, L.; SAGRISTÁ, R. (1995). *Posibilidad de introducir la herramienta computacional en la enseñanza de Matemática I y Matemática II en la Facultad de Ciencias Económicas y Estadística* . Universidad Nacional de Rosario. R.Argentina.

GUZMÁN, M. DE .(1996).*Tendencias innovadoras en Educación Matemática.* Red Olímpica.

MEDINA RIVILLA, A. Y DOMÍNGUEZ GARRIDO, M.C.(1989). *La formación del profesorado en una sociedad tecnológica.* Ed. Cincel, Madrid.

PUCHET ANYUL,M. (1993) *Educación Matemática* .Vol.5.nº2.Grupo Editorial Iberoamérica.México.

SCHOENFELD, A.(1989) . Ideas in the air: Speculations on small group learning, environment and cultural influences on cognition, and epistemology. *International Journal of Educational Research,13(1).*

VYGOTSKY, L.C. (1976). *Mind in society: The development of higher psychological process.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

WENZELBURGER, E. (1986*).* La relación entre le significatividad de los contenidos curriculares y las actividades cognoscitivas. *Didáctica. Boletín 38.* Univ. Iberoamericana.