Instituto Politécnico

iversidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de

Plano en el Espacio

4º Año

Cód. 1406-19

Prof. Verónica Filotti
Prof. María del Luján Martínez
Prof. Juan Carlos Bue
Dpto. de Matemática

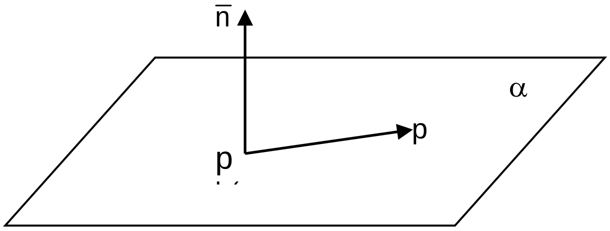
Matemática

Masterización: RECURSOS PEDAGOGICOS

EL PLANO

ECUACIÓN GENERAL

El plano como lugar geométrico
Dados un punto p_0 y un vector no nulo $\bar{n}$, el plano α perpendicular a $\bar{n}$ que contiene a p_0 es el lugar geométrico de los puntos p tales que $\overrightarrow{p_0p} \perp \bar{n}$ o $\overrightarrow{p_0p} = \bar{o}$.



De la definición anterior, podemos concluir:

$$p \in \alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{p_0p} \perp \bar{n} \text{ o } \overrightarrow{p_0p} = \bar{o} \Leftrightarrow \underbrace{\overrightarrow{p_0p} \times \bar{n} = 0}_{(1)}$$

La expresión (1) es la ***ecuación vectorial del plano*** α perpendicular a $\bar{n}$ que contiene a p_0.

Fijado un sistema $\{o;\ \bar{i};\ \bar{j};\ \bar{k}\}$, y en él un punto $p_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ perteneciente a α y un vector no nulo $\bar{n} = (a;\ b;\ c)$ perpendicular a dicho plano, resulta que para todo punto $p(x;\ y;\ z)$ de α

$$\overrightarrow{p_0p} \times \bar{n} = 0 \Rightarrow (x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0) \times (a;\ b;\ c) = 0$$

Resolviendo el producto escalar, obtenemos:

$$(x - x_0)a + (y - y_0)b + (z - z_0)c = 0$$

$$ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 = 0$$

$$ax + by + cz + (-ax_o - by_o - cz_o) = 0$$

Sustituyendo $-ax_o - by_o - cz_o$ por d, nos queda:

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad (2)$$

A la expresión (2) la llamamos ***ecuación general del plano*** α perpendicular a $\bar{n}$ que contiene a p_0.

Observación:

- Si el plano pasa por el origen de coordenadas, es decir por el punto $(0;\ 0;\ 0)$, su ecuación resulta $ax + by + cz = 0$, ya que $a0 + b0 + c0 + d = 0 \Rightarrow d = 0$
- Si d = 0 la ecuación del plano resulta ax + by + cz =0 $\Rightarrow$ (0;0;0) verifica la ecuación al plano, entonces el plano pasa por el origen de coordenadas

Definición:

Dadas las constantes $a;\ b;\ c;\ d \in R$ con a; b y c no simultáneamente nulas, se llama ecuación lineal en tres variables x; y y z la expresión: $ax + by + cz + d = 0$ donde a; b y c son los coeficientes y d es el término independiente.

Teniendo en cuenta la definición anterior, resulta:

La ecuación de un plano es una ecuación lineal en tres variables.

Ejemplo:

Determina la ecuación del plano perpendicular al vector $\bar{n} = (1;\ 2;\ -3)$ que pasa por el punto $p(-1;\ 0;\ 1)$.

Solución:
Los infinitos planos perpendiculares a $\bar{n}$ tienen por ecuación:

$$x + 2y - 3z + d = 0; \quad d \in R \qquad (*)$$

De todos ellos, el que pasa por el punto $p(-1;\ 0;\ 1)$ es el que con él se satisface la ecuación (*).
De donde:

$$-1 + 2\cdot 0 - 3\cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = 4$$

Entonces el plano buscado tiene por ecuación:

$$x + 2y - 3z + 4 = 0$$

POSICIONES RELATIVAS DE DOS PLANOS

Dos planos en el espacio pueden ser paralelos o secantes.

- **PLANOS PARALELOS**

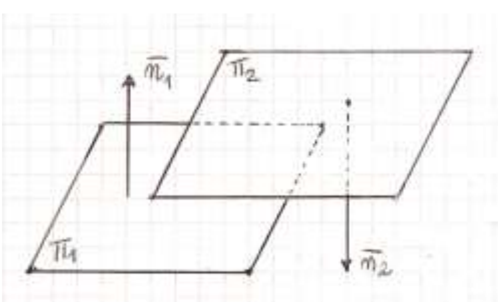
Dos planos π_1 y π_2 son paralelos si y sólo si sus vectores normales son paralelos.

En símbolos:

$$\pi_1 // \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 // \vec{n}_2 \text{ siendo } \vec{n}_1 \perp \pi_1 \text{ y } \vec{n}_2 \perp \pi_2$$

Si $\pi_1)\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ y $\pi_2)\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ entonces:

$\pi_1 // \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 // \vec{n}_2$ siendo $\vec{n}_1 \perp \pi_1$ y $\vec{n}_2 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in R - \{0\}$ tal que $\vec{n}_2 = \lambda \vec{n}_1$



Si $a_1 \neq 0$; $b_1 \neq 0$ y $c_1 \neq 0$, la expresión anterior resulta equivalente a:

$$\boxed{\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = \lambda}$$

Observación:

En particular, cuando dos planos paralelos tienen algún punto en común, son coincidentes y resulta $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = \frac{d_2}{d_1}$

- **<u>PLANOS SECANTES</u>**

Dos planos no paralelos se llaman secantes.

<u>Caso particular de planos secantes:</u> Planos perpendiculares

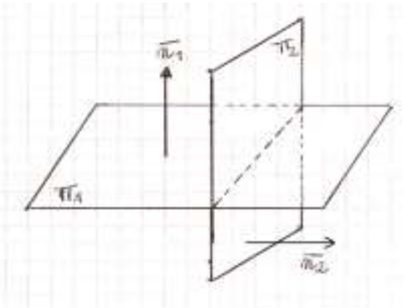
Dos planos π_1 y π_2 son perpendiculares sí y sólo si son perpendiculares sus vectores normales.

En símbolos:

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \text{ siendo } \vec{n}_1 \perp \pi_1 \text{ y } \vec{n}_2 \perp \pi_2$$

Si $\pi_1)\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ y $\pi_2)\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, entonces:

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \text{ siendo } \vec{n}_1 \perp \pi_1 \text{ y } \vec{n}_2 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \boxed{\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = 0}$$



<u>Ejemplos</u>:

a) Determina la ecuación de un plano paralelo no coincidente a 2 x - y + 3 z = 3.

<u>Solución</u>:

Basta multiplicar por un mismo número a las componentes del vector normal. Uno de los infinitos planos podría ser: 8 x - 4 y + 12 z = 3

b) Determina si los planos $x + y + z - 5 = 0$ y $-x - y + z - 3 = 0$ son perpendiculares.

<u>Solución</u>:

Debemos calcular el producto escalar entre los vectores normales a los planos dados, esto es:

1 . (-1) + 1 . (-1) + 1 . 1 = - 1 - 1 + 1 = -1 $\neq 0 \Rightarrow$ los planos no son perpendiculares.

PROBLEMAS

1) Determina la ecuación del plano α sabiendo que $p(-1;\ 2;\ -2) \in \alpha$ y $\overline{a} = (2;\ 0;\ -1) \perp \alpha$.

2) a) Determina, que un plano no paralelo a los ejes coordenados y que no contiene al origen, admite por ecuación una expresión de la forma: $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1;\ p,\ q,\ r \in R - \{0\}$, que se conoce con el nombre de ***ecuación segmentaria del plano***.

   b) A partir de la ecuación segmentaria del plano, analiza las intersecciones del mismo con los ejes coordenados.

3) Dada la ecuación del plano $3x + 2y - 6z + 12 = 0$, determina:
   a) su ecuación segmentaria
   b) sus intersecciones con los ejes coordenados
   c) su representación gráfica

4) ***Tres puntos no alineados determinan un único plano***. Determina la ecuación del plano que contiene a los puntos $p(-1; -1; 2)$; $t(0; 3; 3)$ y $v(1; 3; 4)$.

5) El plano δ es perpendicular a los planos $2x - 3y + z + 1 = 0$ y $x - y - z - 3 = 0$. Determina la ecuación de δ si el punto $(-1; 2; 4)$ pertenece al mismo.

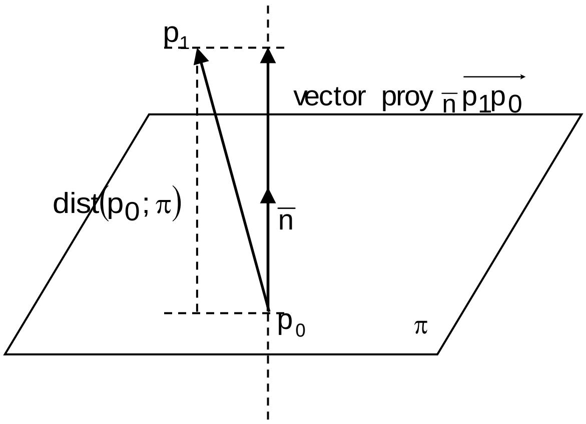
6) Los vectores $\overline{a} = (1; 1; -4)$ y $\overline{b} = (0; 3; 1)$ son paralelos al plano φ y además el punto $(1; 2; 2)$ pertenece al mismo. Determina la ecuación de φ.

DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO

Analizaremos a continuación el problema de cómo calcular la distancia desde un punto p_1 cualquiera a un plano π (p_1 no perteneciente a π). Para ello te proponemos que realices los siguientes pasos.

i. Ubica π y p_1 en un gráfico
ii. ubica un punto p_0 cualquiera de π
iii. determina $\overrightarrow{p_0p_1}$
iv. considera un vector $\overline{n}$ normal (perpendicular) a π
v. la distancia de p_1 a π esta dada por

$$\text{dist}(p_0; \pi) = \left|\text{proy}_{\overline{n}}\, \overrightarrow{p_1p_0}\right|$$



PROBLEMAS

7) Demuestra que dado el plano $\pi)\ ax+by+cz+d=0$, el punto $p_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ no perteneciente π y el punto $p_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ perteneciente a π, entonces $\text{dist}(p_1;\pi)=\left|\dfrac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$

8) Halla la distancia del punto $r(-1;2;4)$ al plano $\pi)\ 2x-3y+z+1=0$.

9) Determina la ecuación de el o los planos paralelos a $3x+y-5z+2=0$, cuya distancia al punto $s(0;\ -2;\ 3)$ es $\sqrt{140}$.

PROBLEMAS ADICIONALES

10) Determina el plano perpendicular al plano $\rho)\ x+y+z-1=0$, paralelo al vector $\bar{u}=(-1;\ 0;\ 2)$ y que pase por el punto p(0; -1; 2).

11) Dados los plano $\alpha)\ x+2y-z+3=0$ y $\beta)\ x+2y-z+5=0$,
    a) Justifica que son paralelos
    b) Calcula la distancia entre ambos, es decir, $\text{dist}(\alpha;\ \beta)$.

TRABAJO PRÁCTICO DE PLANO

1) Sea la ecuación del plano $\beta)\ ax+by+cz+d=0$. Determina las características geométricas del mismo si:
    a) $a=0$
    b) $b=0$
    c) $c=0$
    d) $a=b=0$
    e) $b=c=0$
    f) $a=c=0$

2) Representa gráficamente los siguiente conjuntos de puntos y define el lugar geométrico que determina cada uno:
    a) $A=\left\{(x;\ y;\ z)/\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+z=1\right\}$
    b) $B=\left\{(x;\ y;\ z)/\ \frac{y}{5}+\frac{z}{2}=1\right\}$
    c) $C=\{x/\ x=1\}$
    d) $D=\{(x;\ y)/\ y=1\}$
    e) $E=\{(x;\ y;\ z)/\ x=1\}$

3) Determina justificando la respuesta si son V(verdaderas) o F(falsas) cada una de las siguientes proposiciones:
    a) Si $\pi_1)\ x-y+2z+1=0$ y $\pi_2)\ -2x+2y+1=0$ entonces $\pi_1 // \pi_2$
    b) el plano z = 3 es paralelo al eje z.
    c) Dos planos perpendiculares a un tercero son paralelos entre si.
    d) El plano x + 2y – 4 = 0 es paralelo al plano xy.
    e) Los planos $\pi_1)\ x-2y+z-2=0$ y $\pi_2)\ 2x+y+3=0$ son perpendiculares.

Apéndice (Resolución ejercicios 2)a) y 7)

Problema 2a (Demostración **Ecuación Segmentaria del Plano**)

Hipótesis

- plano α de ecuación $ax+by+cz+d=0$ no paralelo a los ejes coordenados y que no contiene al origen (es decir $a \neq 0$; $b \neq 0$; $c \neq 0$ y $d \neq 0$)

Tesis

- el plano α se puede expresar de la forma $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1$; siendo $p=-\frac{d}{a}$; $q=-\frac{d}{b}$ y $r=-\frac{d}{c}$

Demostración

$$ax+by+cz+d=0 \qquad (1)$$

Sumando $-d$ a ambos lados de la expresión (1), obtenemos:

$$ax+by+cz=-d \qquad (2)$$

Dividimos ambos miembros por $d \neq 0$ en (2), resulta:

$$\frac{ax}{-d}+\frac{by}{-d}+\frac{cz}{-d}=1$$

Como $a \neq 0$; $b \neq 0$ y $c \neq 0$, esta última expresión la podemos escribir:

$$\frac{x}{\frac{-d}{a}}+\frac{y}{\frac{-d}{b}}+\frac{z}{\frac{-d}{c}}=1$$

Llamando $p=-\frac{d}{a}$; $q=-\frac{d}{b}$ y $r=-\frac{d}{c}$, resulta

ECUACIÓN SEGMENTARIA: $\boxed{\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1}$

Problema 7 (Demostración **Distancia de un punto a un plano**)

Demuestra que dado el plano α de ecuación ax + by + cz + d = 0, el punto $p_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ no perteneciente π y el punto $p_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ perteneciente a π, entonces

$$\operatorname{dist}(p_1;\pi)=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Hipótesis

- plano α de ecuación ax + by + cz + d = 0
- punto $p_1(x_1;\ y_1;\ z_1)\notin\alpha$

Tesis

- la distancia del plano α al punto $\operatorname{dist}(p_1;\pi)=\dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Demostración

En el apunte se mostro que $\operatorname{dist}(p_1;\pi)=\left|\operatorname{proy}_{\vec{n}}\overrightarrow{p_0p_1}\right|$, donde $\vec{n}=(a;b;c)\perp\alpha$ y $p_0(x_0;y_0;z_0)\in\alpha$

Recordando que $\operatorname{proy}_{\vec{n}}\overrightarrow{p_0p_1}=\dfrac{\overrightarrow{p_0p_1}\times\vec{n}}{|\vec{n}|}$, tenemos:

$$\operatorname{dist}(p_1;\pi)=\left|\operatorname{proy}_{\vec{n}}\overrightarrow{p_0p_1}\right|=\left|\frac{\overrightarrow{p_0p_1}\times\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|=\frac{\left|\overrightarrow{p_0p_1}\times\vec{n}\right|}{|\vec{n}|}=\frac{|(x_1-x_0;y_1-y_0;z_1-z_0)\times(a;b;c)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=$$

$$=\frac{|a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)+c(z_1-z_0)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|ax_1+by_1+cz_1-(ax_0+by_0+cz_0)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=$$

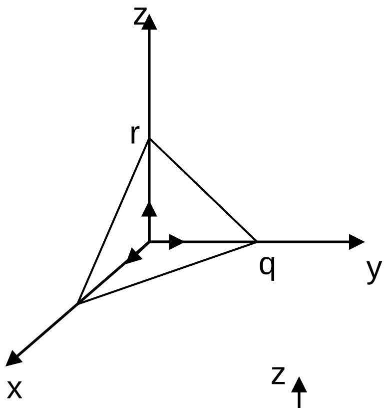
$$\overset{(1)}{=}\frac{|ax_1+by_1+cz_1-(-d)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

(1) Dado que $p_0(x_0;y_0;z_0)\in\alpha$ se tiene que $ax_0+by_0+cz_0+d=0\Rightarrow ax_0+by_0+cz_0=-d$

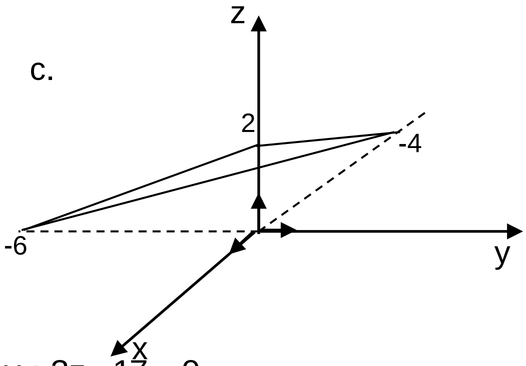
RESPUESTAS

1. $2x - z = 0$

2.
   a. Demostración a cargo del alumno
   b. Intersección con el eje x $\rightarrow (p; 0; 0)$
      Intersección con el eje y $\rightarrow (0; q; 0)$
      Intersección con el eje z $\rightarrow (0; 0; r)$



3.
   a. $\dfrac{x}{-4} + \dfrac{y}{-6} + \dfrac{z}{2} = 1$
   b. Intersección con el eje x $\rightarrow (-4; 0; 0)$
      Intersección con el eje y $\rightarrow (0; -6; 0)$
      Intersección con el eje z $\rightarrow (0; 0; 2)$
   c.



4. $4x - 4z + 12 = 0$

5. $\delta)\ 4x + 3y + z - 6 = 0$

6. $\varphi)\ 13x - y + 3z - 17 = 0$

7. Demostración a cargo del alumno

8. $\dfrac{3}{\sqrt{14}}$

9. $3x + y - 5z + 87 = 0 \vee 3x + y - 5z - 53 = 0$

10. $2x - 3y + z - 5 = 0$

11. a. $\dfrac{1}{1} = \dfrac{2}{2} = \dfrac{-1}{-1}$ b. $\dfrac{2}{\sqrt{6}}$

1. Se determinan características, las representaciones a cargo del alumno
   a. Plano perpendicular al vector $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{3}; 1\right)$
   b. Plano paralelo al eje x
   c. Punto en un eje
   d. Recta en el plano xy paralela al eje y
   e. Plano paralelo al plano yz

2.
   a. Paralelo al eje x
   b. Paralelo al eje y
   c. Paralelo al eje z
   d. Paralelo al plano xy
   e. Paralelo al plano yz
   f. Paralelo al plano xz

3. a. F b. F c. F d. F e. V