



FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERIA Y AGRIMENSURA
Escuela de Formación Básica - Departamento de Matemática

PROBLEMAS APLICADOS

con

EDOS LINEALES de SEGUNDO ORDEN

Alberto J. Miyara ¹- Dirce Braccialarghe ²

-2011-

¹ ajmiyara@fceia.unr.edu.ar

² dirce@fceia.unr.edu.ar

Índice

1. Motor de corriente continua	3
2. Piezoeléctricos	5
3. Flotación de una boya	8
4. Flexión de vigas	10
5. Conducción de calor en una aleta de enfriamiento	13
6. Estabilidad	17

1. Motor de corriente continua

El motor de corriente continua es una máquina que convierte la energía eléctrica en mecánica, principalmente mediante el movimiento rotatorio. Esta máquina de corriente continua es una de las más versátiles en la industria. Su fácil control de posición, paro y velocidad la han convertido en una de las mejores opciones en aplicaciones de control y automatización de procesos. Con la llegada de la electrónica su uso ha disminuido en gran medida, pues los motores de corriente alterna, del tipo asíncronico, pueden ser controlados de igual forma a precios más accesibles para el consumidor medio de la industria. A pesar de esto los motores de corriente continua se siguen utilizando en muchas aplicaciones de potencia (trenes y tranvías) o de precisión (máquinas, micro motores, etc.). Son de los más comunes y económicos, y pueden ser encontrados en la mayoría de los juguetes a pilas.

En un motor de corriente continua es posible regular la velocidad angular del rotor controlando el voltaje a través del mismo, dado que éste es proporcional a aquélla.

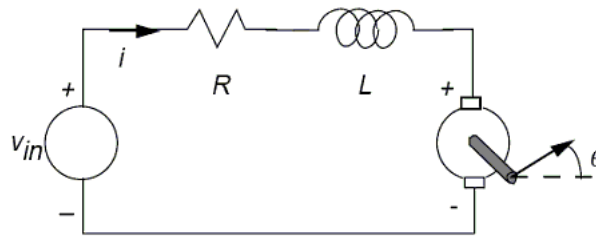


Figura 1: Motor de corriente continua

Uniando esas consideraciones a las leyes de Kirchoff para un circuito RL , se obtiene la ecuación diferencial lineal no homogénea cuya solución proporciona el ángulo θ (de la figura 1) en función del tiempo t :

$$\frac{L}{K_T} J \frac{d^3 \theta}{dt^3} + \frac{R}{K_T} J \frac{d^2 \theta}{dt^2} + K_b \frac{d\theta}{dt} = v_{in}$$

donde J es el momento de inercia del rotor, K_T y K_b son sendas constantes de proporcionalidad positivas, θ es el ángulo girado por el rotor y v_{in} es el voltaje de alimentación. Es deseable que una vez en marcha la velocidad angular del rotor alcance un valor estable (esto es, no crezca indefinidamente). ¿Qué condiciones harán que esto suceda?

Comenzaremos suponiendo que el motor parte del reposo y del equilibrio de momentos.

Para hallar la velocidad angular del motor en función de las constantes involucradas observemos que la derivada de θ , el ángulo girado, es ω , la velocidad angular. Así, la EDOL no homogénea que debe satisfacer ω es

$$\frac{L}{K_T} J \frac{d^2 \omega}{dt^2} + \frac{R}{K_T} J \frac{d\omega}{dt} + K_b \omega = v_{in} \quad (1.1)$$

La EDOL homogénea asociada tiene como ecuación característica

$$\frac{L}{K_T} J r^2 + \frac{R}{K_T} J r + K_b = 0$$

Sus soluciones son

$$r_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{K_T K_b}{LJ}}$$

Observemos que si las soluciones de esta ecuación son reales y distintas, una será positiva y la otra negativa. Esto haría que la solución general de la ecuación diferencial tendiese a más o menos infinito. Debemos imponer entonces que las soluciones $r_{1,2}$ sean iguales o complejas conjugadas. Es decir, para que la velocidad angular se estabilice debe ocurrir que

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 \leq \frac{K_T K_b}{LJ}$$

Supongamos que las soluciones r_1 y r_2 son complejas conjugadas. La solución general de la ecuación homogénea asociada es

$$\omega_h(t) = C_1 e^{-\frac{R}{2L}t} \operatorname{sen} \left[\sqrt{\frac{K_T K_b}{LJ} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} t \right] + C_2 e^{-\frac{R}{2L}t} \operatorname{cos} \left[\sqrt{\frac{K_T K_b}{LJ} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} t \right]$$

Tomando $\beta = \sqrt{\frac{K_T K_b}{LJ} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$ y $\alpha = \frac{R}{2L}$ esta última expresión puede escribirse

$$\omega_h(t) = C_1 e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \beta t + C_2 e^{-\alpha t} \operatorname{cos} \beta t.$$

Para resolver la ecuación no homogénea tengamos en cuenta que la función excitación es un polinomio de grado 0. Entonces, proponemos como solución particular $\omega_p = A$ (polinomio de grado 0). Sustituyendo en la ecuación 1.1 resulta:

$$\begin{aligned} \frac{L}{K_T} J \frac{d^2 \omega_p}{dt^2} + \frac{R}{K_T} J \frac{d\omega_p}{dt} + K_b \omega_p &= v_{in} \Rightarrow \\ \frac{L}{K_T} J \frac{d^2 A}{dt^2} + \frac{R}{K_T} J \frac{dA}{dt} + K_b A &= v_{in} \Rightarrow \\ K_b A = v_{in} \Rightarrow \omega_p = A &= \frac{v_{in}}{K_b} \end{aligned}$$

Con lo cual la solución general de la ecuación 1.1 es

$$\omega_g = \omega_h + \omega_p = C_1 e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \beta t + C_2 e^{-\alpha t} \operatorname{cos} \beta t + \frac{v_{in}}{K_b} \quad (1.2)$$

Introducimos ahora las condiciones iniciales. Se parte del reposo por lo que $\omega_g(0) = 0$. Reemplazando en 1.2 tenemos:

$$\omega_g(0) = C_2 + \frac{v_{in}}{K_b} = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{v_{in}}{K_b}$$

Para hallar el valor de C_1 consideraremos el hecho de que se parte del equilibrio de momentos. Esto significa (como se vio en Física I) que la aceleración angular es 0, es decir que la derivada de la velocidad angular es nula. Derivando 1.2 obtenemos,

$$\begin{aligned} \omega'_g(t) &= -\alpha C_1 e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \beta t + \beta C_1 e^{-\alpha t} \operatorname{cos} \beta t + \alpha \frac{v_{in}}{K_b} e^{-\alpha t} \operatorname{cos} \beta t + \beta \frac{v_{in}}{K_b} e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \beta t \\ \omega'_g(0) &= \beta C_1 + \alpha \frac{v_{in}}{K_b} = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{\alpha v_{in}}{\beta K_b} \end{aligned}$$

Reemplazando nuevamente en 1.2 obtenemos la expresión para la **única solución** del (PVI)³ de orden 2 propuesto:

$$\omega(t) = -\frac{\alpha v_{in}}{\beta K_b} e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \beta t - \frac{v_{in}}{K_b} e^{-\alpha t} \operatorname{cos} \beta t + \frac{v_{in}}{K_b}$$

Observemos que cuando $t \rightarrow +\infty$ la velocidad angular tiende a $\frac{v_{in}}{K_b}$. El motor (el sistema) se estabiliza.

³Problema de valores iniciales.

2. Piezoeléctricos

La piezoelectricidad (del griego piezein, “estrujar o apretar”) es un fenómeno presentado por determinados materiales que al ser sometidos a tensiones mecánicas adquieren una polarización eléctrica en su masa, apareciendo una diferencia de potencial y cargas eléctricas en su superficie. Este fenómeno también se presenta a la inversa, esto es, los cristales se deforman bajo la acción de fuerzas internas al ser sometidos a un campo eléctrico. El efecto piezoeléctrico es normalmente reversible: al dejar de someter los cristales a un voltaje exterior o campo eléctrico, recuperan su forma. En 1880, Pierre Curie y su hermano Jacques descubrieron este fenómeno en el cuarzo y la sal de Rochelle.

Una de las importantes aplicaciones de un cristal piezoeléctrico es su utilización como sensor de vibración. Cada una de las variaciones de presión producidas por la vibración provoca un pulso de corriente proporcional a la fuerza ejercida. Así, se convierte de una forma fácil una vibración mecánica en una señal eléctrica lista para amplificar. Basta con conectar un cable eléctrico a cada una de las caras del cristal y enviar esta señal hacia un amplificador. Un ejemplo son las pastillas piezoeléctricas de una guitarra.

Otra aplicación muy importante de la piezoelectricidad, pero en este caso al revés, son los inyectores de combustible de los motores de combustión interna. Al aplicarse una diferencia de potencial a un material piezoeléctrico, se consigue abrir el inyector, permitiendo al combustible a muy alta presión entrar en el cilindro. El uso de inyectores piezoeléctricos permite controlar con una enorme precisión los tiempos de inyección y la cantidad de combustible que se introduce en el motor, lo que redundará en mejoras en el consumo, prestaciones y rendimiento de los motores.

Como ya dijimos, un piezoeléctrico es un bloque de un material que se contrae levemente cuando se le aplica una diferencia de tensión eléctrica. De ese modo, se lo puede utilizar como un posicionador muy preciso, pues regulando el voltaje es posible lograr contracciones muy pequeñas del piezoeléctrico, lo que permite desplazar en la misma infinitesimal medida a un objeto que esté adherido a uno de los extremos del bloque.

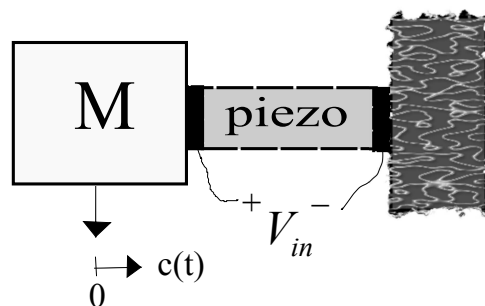


Figura 2: Piezoeléctrico

En el dispositivo de la figura, una masa M está unida a un bloque piezoeléctrico con electrodos metálicos depositados sobre las caras opuestas. La posición $c(t)$ de dicha masa dependerá del voltaje V_{in} que se aplique. La fuerza que el bloque ejercerá sobre M es proporcional a dicho voltaje:

$$F_b = \alpha V_{in}$$

Por otra parte, al producirse la contracción del material entran en juego también otras fuerzas que pueden expresarse en función de c y sus derivadas:

Fuerzas de resistencias. Como hemos visto en otros sistemas similares, estas fuerzas pueden pensarse proporcionales a la velocidad. Así, $F_r = r \frac{dc}{dt}$.

Fuerza de reacción elástica. Debido a la elasticidad del material, al contraerse ejerce una fuerza opuesta a su sentido de movimiento y proporcional al desplazamiento del extremo del bloque. Tenemos así, $F_e = \frac{1}{C_m}c$ donde C_m es la capacidad mecánica.

Aplicando la 2° ley de Newton, hallamos la ecuación diferencial que modela el problema de hallar la posición $c(t)$ de la masa.

La 2ª ley de Newton establece que $F = ma$; es decir, la fuerza total ejercida sobre una masa es igual al producto de ésta por la aceleración que adquiere.

¿Cuál es la fuerza total en este caso? Tenemos una que provoca el movimiento (la ejercida por el piezoeléctrico) y dos que se oponen al mismo (fuerzas internas de resistencia y fuerza elástica). Entonces, la fuerza total es (tomando como positivo el sentido del movimiento):

$$F = F_b - F_r - F_e$$

$$F = \alpha V_{in} - r \frac{dc}{dt} - \frac{1}{C_m}c.$$

Aplicando la 2° ley de Newton tenemos que

$$\alpha V_{in} - r \frac{dc}{dt} - \frac{1}{C_m}c = Ma.$$

Pero la aceleración es la derivada segunda de la posición c con respecto al tiempo dos veces; esto es:

$$\alpha V_{in} - r \frac{dc}{dt} - \frac{1}{C_m}c = M \frac{d^2c}{dt^2}.$$

Entonces,

$$M \frac{d^2c}{dt^2} + r \frac{dc}{dt} + \frac{1}{C_m}c = \alpha V_{in}. \quad (2.1)$$

Así queda conformada la ecuación diferencial de segundo orden, ordinaria, lineal y a coeficientes constantes. Su resolución permitirá conocer la posición c del objeto de masa M en cada instante de tiempo.

A modo de ejemplo⁴ supongamos que se coloca en el dispositivo un objeto de masa $M = 1g$ y que en el instante $t = 0$ se aplica un voltaje tal que $\alpha V_{in}(t) = A \cos(\omega t)$ donde:

$$A = 8,39 \cdot 10^3 N$$

$$\omega = 3,1 \cdot 10^3 rad/s$$

$$C_m = 8 \cdot 10^{-6} s^2/g$$

$$r = 5,2 \cdot 10^3 g/s$$

Reemplazando en la ecuación (2.1) resulta:

$$\frac{d^2c}{dt^2} + 5,2 \cdot 10^3 \frac{dc}{dt} + \frac{1}{8 \cdot 10^{-6}}c = 8,39 \cdot 10^3 \cos(3,1 \cdot 10^3 t). \quad (2.2)$$

Para resolverla consideramos primero la ecuación lineal homogénea asociada,

$$\frac{d^2c}{dt^2} + 5,2 \cdot 10^3 \frac{dc}{dt} + \frac{1}{8 \cdot 10^{-6}}c = 0. \quad (2.3)$$

⁴Los valores de las constantes fueron tomados de [8].

Para resolver esta última ecuación hallamos las raíces características. Ellas son:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 50(-52 + \sqrt{2654}) \cong -24, \\ \lambda_2 &= 50(-52 - \sqrt{2654}) \cong -5176,\end{aligned}$$

por lo que una base del conjunto solución de (2.3) es

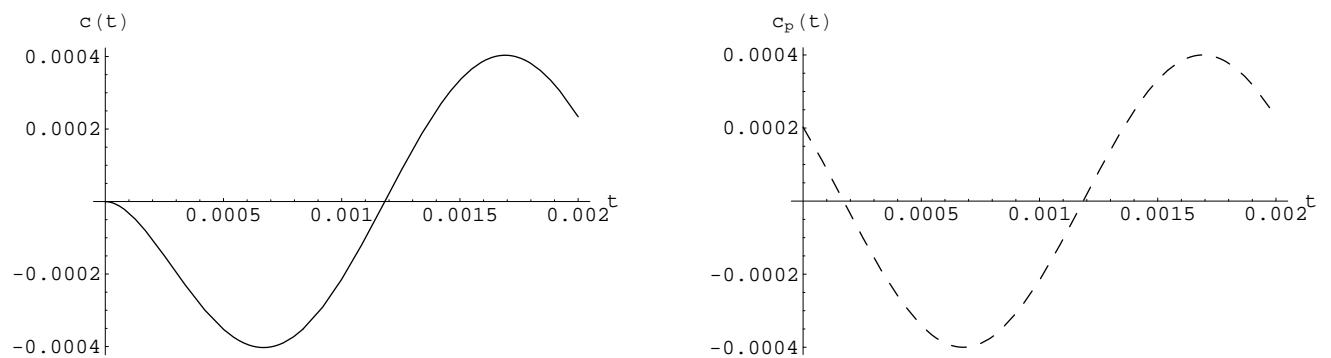
$$\left\{ e^{50(-52+\sqrt{2654})t}, e^{50(-52-\sqrt{2654})t} \right\}.$$

Una solución particular de (2.2) es $c_p(t) = D\cos(\omega t - \delta)$ donde $D = 4 \cdot 10^{-4}$ y $\delta \cong -1,04$. Así, la solución general de (2.2) resulta

$$c(t) = C_1 e^{50(-52+\sqrt{2654})t} + C_2 e^{50(-52-\sqrt{2654})t} + 4 \cdot 10^{-4} \cos(3,1 \cdot 10^3 t + 1,04)$$

donde C_1 y C_2 son constantes reales.

La figura de la izquierda muestra la gráfica de c suponiendo que el objeto parte del reposo. En la figura de la derecha, en línea de puntos, se muestra la gráfica de c_p .



En la figura 3 se muestran las gráficas de c y c_p en un mismo sistema de referencia. Observemos que cuando t tiende a infinito la solución c se comporta como c_p (esta función es llamada solución de estado estable).

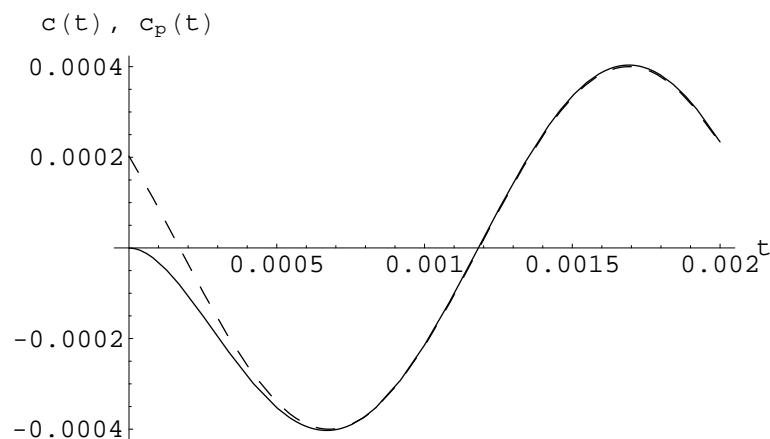


Figura 3: Gráficas de $c(t)$ y $c_p(t)$

3. Flotación de una boya

En la figura vemos esquemáticamente una boya cilíndrica, que supondremos homogénea, flotando en agua, de manera que solamente un tercio de ella asoma por sobre la superficie del líquido. La altura del artefacto es de 2 metros.

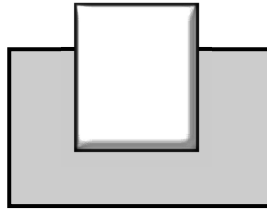
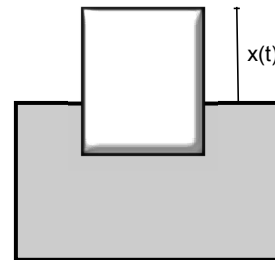


Figura 4: Esquema de la boya

Supongamos que se presiona la boya hasta que su cara superior queda exactamente al nivel del líquido y luego se la suelta. Nos proponemos averiguar cómo varía la altura de la porción de boya que sobresale encima del agua en función del tiempo.

Para encontrar un modelo que permita describir la variación de la altura vamos a despreciar los efectos de rozamiento. Observemos que la boya se desplaza en la dirección vertical y que en cada instante (después de que cesa la presión sobre ella) actúan la fuerza de empuje de magnitud, F_e , y la fuerza peso de magnitud, P . Llamemos $x(t)$ a la altura de la porción de boya que sobresale encima del agua en el instante t .



Considerando como sentido positivo el vertical hacia arriba y aplicando la segunda ley de Newton se obtiene que

$$F_e - P = mx''(t) \quad (3.1)$$

donde m es la masa de la boya.

El principio de Arquímedes dice que *un cuerpo total o parcialmente sumergido en un fluido estático será empujado con una fuerza vertical ascendente igual al peso del volumen de fluido desplazado por dicho cuerpo*. Entonces

$$F_e = \rho_a A(h - x(t))g$$

donde A es el área de la base de la boya, h es la altura de la boya, ρ_a es la densidad del agua y g es la aceleración de la gravedad. El peso de la boya se expresa como $h\rho_b Ag$ donde ρ_b es la densidad de la boya. Reemplazando en 3.1,

$$\rho_a A(h - x(t))g - h\rho_b Ag = h\rho_b Ax''(t) \quad (3.2)$$

Notemos que en la posición de equilibrio, $F_e = P$, lo que implica que $\frac{2}{3}h\rho_a Ag = h\rho_b Ag$. Simplificando esta última expresión obtenemos que $\rho_a = \frac{3}{2}\rho_b$. Reemplazando en la ecuación 3.2 y simplificando se llega a

$$x'' + \frac{3g}{2h}x - \frac{1}{2}g = 0$$

o

$$x'' + g \left(\frac{3}{2h}x - \frac{1}{2} \right) = 0.$$

Esta EDOL es de orden 2 y no homogénea. Haciendo la sustitución $z(t) = \frac{3}{2h}x(t) - \frac{1}{2}$ obtenemos la EDOL homogénea,

$$\frac{2h}{3}z'' + gz = 0.$$

Como ya hemos visto su solución general es

$$z(t) = C_1 \cos(\sqrt{\frac{3g}{2h}}t) + C_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\frac{3g}{2h}}t)$$

Y así,

$$x(t) = \frac{2h}{3}C_1 \cos(\sqrt{\frac{3g}{2h}}t) + \frac{2h}{3}C_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\frac{3g}{2h}}t) + \frac{h}{3}$$

Las condiciones iniciales, $x(0) = 0$ y $x'(0) = 0$ nos permiten obtener la expresión para la altura de la boya que sobresale del nivel del agua en cada instante t ,

$$x(t) = -\frac{h}{3} \cos(\sqrt{\frac{3g}{2h}}t) + \frac{h}{3}$$

En particular, para la boya de 2 metros de altura, tenemos

$$x(t) = -\frac{2}{3} \cos(\sqrt{\frac{3g}{4}}t) + \frac{2}{3}.$$

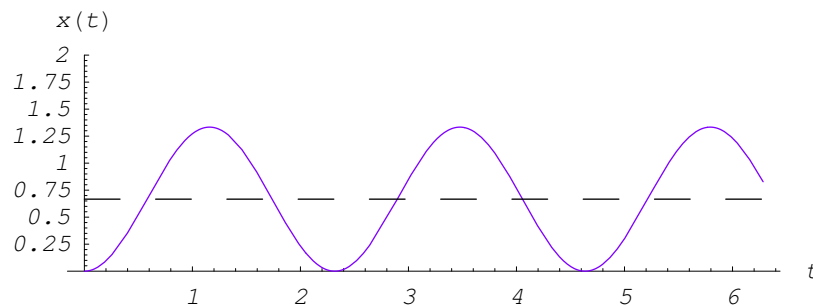


Figura 5: Gráfica de $x(t)$

Cuando la boya está en equilibrio, la parte que asoma por sobre la superficie del líquido mide $\frac{2}{3}$. En la figura 4 podemos ver las gráficas de la función x y, en línea de puntos, de la función constante $\frac{2}{3}$. Observemos que la oscilación de los valores de x se produce alrededor de este último valor.

¿Concuerda lo realizado con lo que esperaríamos del movimiento de una boya real? ¿Qué modificaciones habría que hacer al modelo para que la respuesta se ajuste más a la realidad?

4. Flexión de vigas

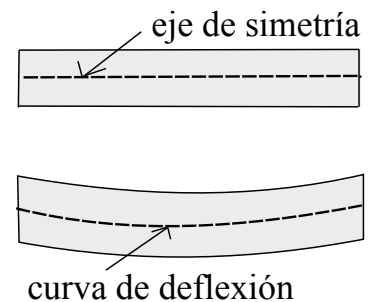
Numerosas estructuras se construyen utilizando vigas. Las vigas pueden ser de hierro, madera u hormigón y se deforman bajo su propio peso o bajo la influencia de alguna fuerza externa. Las EDOL nos proporcionan una herramienta para estudiar estas deformaciones. Como puede encontrarse en cualquier libro de Resistencia de Materiales, las deformaciones experimentadas por un material son de dos clases: elásticas, las cuales desaparecen cuando deja de actuar la carga que las origina; y permanentes, en las cuales no se verifica esta circunstancia. Para el análisis que realizaremos supondremos que la viga:

- es homogénea,
- tiene secciones transversales uniformes a lo largo de su longitud,
- tiene una longitud L mucho mayor que las dimensiones de su sección transversal.

Supondremos, además, que la carga aplicada a la viga es tal que no produce deformación permanente, y que la deformación debida a su propio peso es despreciable.

En ausencia de carga en la viga, la curva que une los centroides de todas sus secciones transversales es una recta conocida como **eje de simetría**.

Si se aplica una carga a la viga en un plano vertical, la viga experimenta una distorsión y la curva que conecta los centroides de las secciones transversales se llama **curva de deflexión** o curva elástica.



Supongamos que el eje x coincide con el eje de simetría y que la deflexión $y(x)$ medida desde este eje es positiva si es hacia abajo. En teoría de elasticidad se muestra que el momento de flexión $M(x)$ a lo largo de la viga es proporcional a la curvatura κ de la curva de deflexión⁵

$$M(x) = EI\kappa, \quad (4.1)$$

donde E e I son constantes; E es el módulo de elasticidad del material de la viga, e I es el momento de inercia de una sección transversal de la viga (respecto a un eje conocido como el eje neutro). En Análisis Matemático II se estudió el concepto de curvatura en un punto

cualquiera de una curva. Una de las expresiones conocidas para calcularla es $\kappa = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{[1+(\frac{dy}{dx})^2]^{3/2}}$.

En esta expresión, $\frac{dy}{dx}$, representa la pendiente de la curva en un punto cualquiera, y para deformaciones pequeñas esta cantidad, y sobre todo su cuadrado, son pequeños en comparación con la unidad, por lo que puede despreciarse. Esta hipótesis de las deformaciones pequeñas simplifica la expresión de la curvatura que queda de la forma

$$\kappa \cong \frac{d^2y}{dx^2}.$$

⁵ $M(x)$ es el momento de la resultante de las fuerzas exteriores situadas a un lado de la sección de la viga que está a una distancia x del extremo de la viga.

Por lo tanto, para deformaciones pequeñas, la ecuación 4.1 se convierte en

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M. \quad (4.2)$$

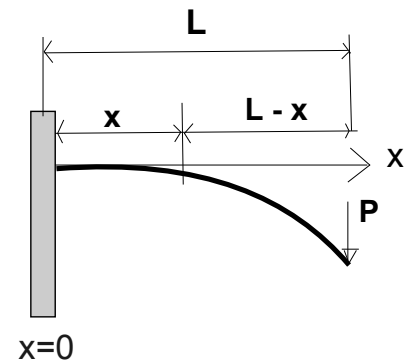
Las condiciones iniciales para la ecuación 4.2 dependen de cómo estén apoyados los extremos de la viga. Éstos pueden estar empotrados (fijos), libres o simplemente apoyados (abisagrados).

Por ejemplo, la llamada **viga en voladizo** tiene un extremo empotrado y el otro libre. Ejemplos comunes de tales vigas son un trampolín, un brazo extendido, una ala de avión y un balcón pero incluso árboles, astas de banderas y rascacielos actúan como vigas en voladizo, debido a que están empotrados en un extremo y sujetos a la fuerza de flexión del viento.

Para una viga en voladizo la deflexión $y(x)$ debe satisfacer las siguientes dos condiciones en el extremo fijo $x = 0$:

- $y(0) = 0$ porque no hay flexión ya que la barra está empotrada rígidamente,
- $y'(0) = 0$ porque la curva de deflexión es tangente al eje x (la viga está perfectamente empotrada en el muro).

Supongamos que queremos determinar la desviación máxima respecto del eje de simetría de una viga en voladizo, de longitud L , sometida a la carga aislada P representada en la figura. La viga deformada tiene el aspecto indicado por la línea gruesa.



Haciendo uso de contenidos de estática se obtiene que el momento flector en un punto, $M(x)$, es igual a $P(L - x)$. Reemplazando en la ecuación diferencial 4.2 resulta

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = PL - Px.$$

Esta ecuación diferencial se resuelve fácilmente mediante doble integración. Así, teniendo en cuenta las condiciones iniciales,

$$y(x) = \frac{P}{2EI} \left(Lx^2 - \frac{x^3}{3} \right) \quad (4.3)$$

La desviación máxima respecto del eje de simetría se obtiene en el extremo derecho de la viga deformada y es

$$y(L) = \frac{PL^3}{3EI}.$$

Por ejemplo, para una viga de hierro con perfil normal doble $T 240$ se tiene que $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ e $I = 4.250 \text{ cm}^4$. Si tuviese una longitud de $1,20 \text{ m}$ y estuviese sometida a una carga P de 3.000 kg , la desviación máxima sería

$$y(120) = \frac{3000 \text{ kg} (120 \text{ cm})^3}{3(2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2)(4250 \text{ cm}^4)} \cong 0,19 \text{ cm}$$

Sólo a modo de comentario mencionaremos que para asegurarse estar trabajando con una viga para la cual la carga no produce una deformación permanente, el ingeniero calcula el momento (o módulo) resistente W mediante la fórmula

$$W = \frac{PL}{\sigma_E}$$

donde σ_E es el límite de elasticidad o límite elástico del material. Luego busca en una Tabla de Perfiles, un perfil que posea un momento resistente mayor que el calculado.

Volviendo a nuestro ejemplo, para calcular W utilizamos el límite de elasticidad del hierro que es 1.400 kg/cm^2 . Así tenemos que el momento resistente es

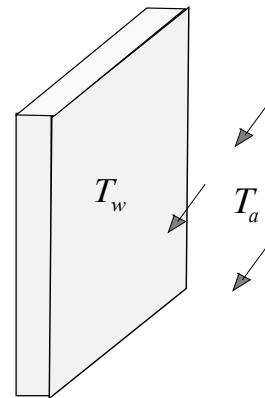
$$W = \frac{3000 \text{ kg} \cdot 120 \text{ cm}}{1400 \text{ kg/cm}^2} = 300 \text{ cm}^3.$$

Consultando una Tabla de Perfiles se encuentra que para un perfil normal doble $T 240$ se tiene un momento $W = 354 \text{ cm}^3$ que es mayor a los 300 cm^3 que dio el cálculo.

5. Conducción de calor en una aleta de enfriamiento

La pared plana de la figura está a una temperatura fija, T_w . La rodea un fluido (aire, por ejemplo) que está a una temperatura T_a que suponemos es menor que la temperatura de la pared. En numerosas aplicaciones se hace necesario hallar una estrategia para aumentar la velocidad de enfriamiento de la pared.

¿Cómo aumentar la velocidad de transferencia de calor de la pared hacia el fluido adyacente?



Una opción es aumentar la velocidad del fluido (por ejemplo con un ventilador). Esto es, podría intentarse aumentar el coeficiente de transferencia de calor, h , entre la superficie de la pared y el fluido, el cual es una función creciente de la velocidad. Sin embargo, pueden encontrarse muchas situaciones en las cuales el aumento de h al máximo valor posible resulta insuficiente para obtener la velocidad de transferencia de calor deseada o en las que los costos asociados son prohibitivos. Estos costos están relacionados con los requerimientos de potencia para el ventilador o la bomba utilizados para aumentar el movimiento del fluido. Otra posibilidad sería intentar reducir la temperatura del fluido T_a lo cual es frecuentemente impracticable. Sin embargo, examinando la figura, vemos que existe una tercera opción. La velocidad de transferencia de calor puede aumentarse incrementando el área superficial sobre la cual ocurre la convección. Esto puede hacerse utilizando **aletas** que se extienden desde la pared hacia el fluido de los alrededores. Las superficies extendidas tienen varias aplicaciones. Cabe mencionar su uso en los radiadores de automóvil, en el enfriamiento de equipo eléctrico o electrónico (transformadores), etc.

En la figura se indica un esquema de una aleta rectangular sencilla.

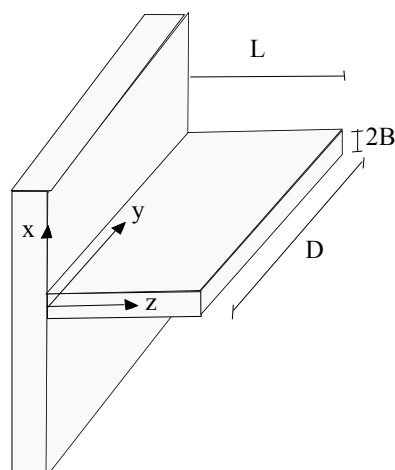


Figura 6: Aleta de enfriamiento rectangular con $B \ll L$.

Una descripción aceptable de este sistema puede obtenerse considerando un modelo con las siguientes características:

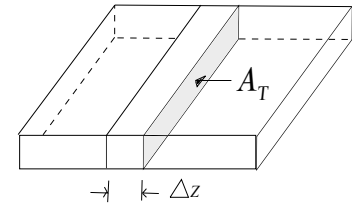
1. Aunque la conducción dentro de la aleta es realmente bidimensional, podemos suponer que tenemos conducción unidimensional de calor en la dirección z ya que en la práctica la aleta es delgada y los cambios de temperatura en la dirección longitudinal son mucho

mayores que éstos en la dirección transversal. Suponemos entonces, la temperatura T de la aleta sólo como función de z .

2. No hay pérdida de calor por el extremo y los bordes.
3. La densidad de flujo de calor q , en la superficie de la aleta (en la dirección de z), viene dada por $q = h(T - T_a)$, donde h , coeficiente de transmisión de calor convectivo entre la superficie de la aleta y el fluido, es constante y uniforme sobre la superficie.

Para determinar la transferencia de calor asociada a una aleta debemos primero obtener la distribución de temperatura $T(z)$ a lo largo de la misma.

Consideremos un segmento diferencial Δz de la aleta como el que se muestra en la figura. En éste, se presentan dos tipos diferentes de transferencia de calor: una por conducción (a través de las superficies transversales del segmento) y otra por convección (a través de la superficie lateral del segmento).



Se llama Q a la velocidad de transferencia de calor y q a la densidad de flujo de calor. Esto es, Q es la energía térmica transportada por unidad de tiempo y q es la velocidad de transferencia de calor por unidad de área. Se puede relacionar Q en cualquier posición arbitraria z con q en la misma posición usando la relación $Q = Aq$ donde A es el área de la superficie perpendicular a z .

En la superficie transversal del segmento se tiene transferencia de calor por conducción. La ley de Fourier para la conducción de calor en una dimensión establece que $q = -k \frac{dT}{dz}$. Luego, $\frac{Q}{A_T} = -k \frac{dT}{dz}$. Así, Q viene dada por la expresión

$$Q = -A_T k \frac{dT}{dz}$$

En la superficie lateral se tiene una transferencia de calor por convección. Se verifica $\frac{Q}{A_L} = h(T - T_a)$ lo que implica que $Q = A_L h(T - T_a)$. Así,

$$Q = P \Delta z h(T - T_a)$$

donde P es el perímetro del rectángulo transversal.

Resumiendo:

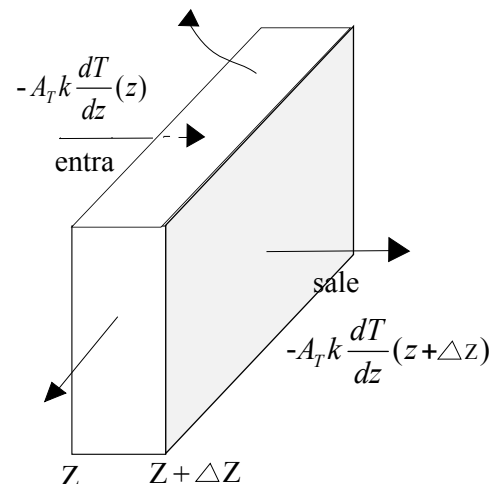
$$Q \text{ entra} - Q \text{ sale} = A_T k \left(\frac{dT}{dz}(z + \Delta z) - \frac{dT}{dz}(z) \right) \quad (\text{por conducción})$$

$$Q \text{ sale} = P \Delta z h(T - T_a) \quad (\text{por convección})$$

Aplicando balance de energía al segmento de aleta tenemos que:

$$A_T k \left(\frac{dT}{dz}(z + \Delta z) - \frac{dT}{dz}(z) \right) \cong P \Delta z h(T - T_a)$$

$$A_T k \frac{\frac{dT}{dz}(z + \Delta z) - \frac{dT}{dz}(z)}{\Delta z} \cong Ph(T - T_a).$$



Pasando al límite cuando Δz tiende a cero se obtiene que la temperatura T verifica la ecuación,

$$\frac{d^2T}{dz^2} = \frac{hP}{kA_T}(T - T_a) \quad (5.1)$$

donde k es la conductividad térmica del material con que está hecha la aleta y que se considera constante; A_T es el área de la sección transversal de la aleta ($2BD$ en nuestro caso) y P es el perímetro de la sección transversal ($2D + 4B$ para nuestra aleta). Para el tipo de aleta que estamos analizando, donde $B \ll D$, el factor $\frac{hP}{kA_T}$ puede aproximarse por $\frac{h}{kB}$. Teniendo en cuenta esto, la ecuación (5.1) resulta

$$\frac{d^2T}{dz^2} = \frac{h}{kB}(T - T_a). \quad (5.2)$$

Esta EDOL no homogénea de orden 2 a coeficientes constantes puede resolverse como ya hemos visto o puede ser transformada en una EDO lineal homogénea mediante la sustitución

$$\Theta = T - T_a.$$

Así, la ecuación (5.2) puede escribirse como

$$\frac{d^2\Theta}{dz^2} = r^2\Theta$$

donde $r^2 = \frac{h}{kB}$. Resolviendo esta ecuación (ejercicio para el lector) y teniendo en cuenta que $\Theta = T - T_a$ la solución general de la ecuación (5.2) se expresa

$$T(z) = C_1 e^{rz} + C_2 e^{-rz} + T_a. \quad (5.3)$$

Las constantes C_1 y C_2 se calculan con la ayuda de condiciones aceptables. La condición $T(0) = T_w$ no tiene discusión ya que hemos supuesto conocida la temperatura T_w de la pared. En $z = L$, puede considerarse $\frac{dT}{dz}(L) = 0$ lo cual significa que estamos despreciando las pérdidas en el extremo de la aleta debido a su delgadez. Así, obtenemos

$$C_1 = \frac{T_w - T_a}{e^{2rL} + 1}$$

y

$$C_2 = \frac{T_w - T_a}{e^{2rL} + 1} e^{2rL}.$$

El calor total transferido por la aleta, Q_T , se obtiene calculando la integral

$$Q_T = \int_0^L hP(T - T_a) dz. \quad (5.4)$$

Como ejemplo, imaginemos una aleta rectangular con las siguientes dimensiones: longitud igual a 35 mm , ancho igual a 30 mm y espesor igual a 2 mm . La conductividad térmica de la aleta es $k = 205 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot ^\circ\text{C}}$, el coeficiente de transferencia de calor es igual a $600 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$, la temperatura en la base es igual a $135 \text{ }^\circ\text{C}$ y la temperatura del aire ambiente es igual a $40 \text{ }^\circ\text{C}$. Calculemos el calor disipado por la aleta.

A partir de (5.3) y de la ecuación (5.4) tenemos que

$$Q_T = hP \int_0^L (C_1 e^{rz} + C_2 e^{-rz}) dz dy$$

donde

$$r = \sqrt{\frac{h}{kB}} = \sqrt{\frac{600}{205 \cdot 0,001} \frac{1}{m}} \cong 54,10 \frac{1}{m}$$

$$P = 2D + 2B = 0,064m$$

$$C_1 = \frac{T_w - T_a}{e^{2nL} + 1} \cong \frac{135 - 40}{45,12} \text{ } ^\circ C \cong 2,11 \text{ } ^\circ C$$

$$C_2 = e^{2nL} C_1 \cong 92,66 \text{ } ^\circ C$$

Integrando y sustituyendo valores se obtiene

$$Q_T = \frac{hP}{r} (C_1 e^{rL} - C_2 e^{-rL} - C_1 + C_2) = \frac{hP}{r} (C_2 - C_1) = \frac{600 \cdot 0,064}{54,10} \cdot 88,66W \cong 62,93W$$

$$Q_T \cong 62,93W$$

Por último, para comparar situaciones, calculemos cuál hubiese sido el valor de Q_T si no se hubiera colocado la aleta. El calor disipado por la porción rectangular de la pared, de área A , correspondiente a la base que ocupa la aleta se calcula con la expresión $hA(T_w - T_a)$.

En nuestro ejemplo $A = 2mm \cdot 30mm$. Entonces, si la aleta no estuviera, la porción de superficie de la pared ocupada por ella disiparía sólo $600 \cdot 0,0006 \cdot 95W = 3,42W$.

6. Estabilidad

Consideremos la ecuación

$$L_2[y] = y'' + p_1(t)y' + p_2(t)y = F(t) \quad (6.1)$$

donde suponemos p_1, p_2 y F funciones continuas sobre un intervalo abierto I .

Sabemos que una respuesta $y(t)$ a la perturbación $F(t)$ queda unívocamente determinada cuando se establecen 2 condiciones iniciales $y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1$, para cada $t_0 \in I$, cualesquiera sean y_0, y_1 .

Nos interesa investigar bajo qué condiciones dos respuestas a condiciones iniciales distintas, en un mismo punto t_0 , se “aproximan” para valores de t adecuadamente “grandes”. Se sabe que la solución del (PVI)

$$\begin{cases} y'' + p_1(t)y' + p_2(t)y = F(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

puede escribirse como $\varphi(t) = C_1y_1(t) + C_2y_2(t) + \varphi_p(t)$, donde:

- (i) $\{y_1, y_2\}$ es una base del conjunto de soluciones de la ecuación homogénea asociada $L_2[y] = 0$,
- (ii) φ_p es una solución particular de (6.1) y,
- (iii) las constantes C_1 y C_2 dependen de las condiciones iniciales.

En consecuencia, para una excitación $F(t)$ dada, las respuestas $\varphi_1(t)$ y $\varphi_2(t)$ respecto de las condiciones iniciales distintas (en un mismo punto) diferirán en

$$\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = (C_{11} - C_{12})y_1(t) + (C_{21} - C_{22})y_2(t) = C_1y_1(t) + C_2y_2(t)$$

siendo $C_k = C_{k1} - C_{k2}$ con $k = 1, 2$.

Entonces la diferencia $\varphi_1(t) - \varphi_2(t)$ se aproximará a cero para t “grandes” si lo hace $C_1y_1(t) + C_2y_2(t)$.

Definición de estabilidad

La ecuación (6.1) y análogamente el sistema se dice **estable** cuando para cualquier elección de las constantes C_1 y C_2 se verifica la condición

$$C_1y_1(t) + C_2y_2(t) \rightarrow 0$$

para $t \rightarrow +\infty$ siendo $\{y_1, y_2\}$ cualquier base del conjunto de soluciones de la ecuación homogénea asociada $L_2[y] = 0$. La ecuación (6.1) se dice **inestable** si no es estable.

Observemos que si $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_k = 0$ para $k = 1, 2$ entonces (6.1) es estable. Si al menos una función y_k no tiene límite cero para $t \rightarrow +\infty$ la ecuación (6.1) no será estable.

En la solución (o respuesta) φ de la ecuación (6.1) se distinguen dos términos:

- (a) $C_1y_1(t) + C_2y_2(t)$
- (b) $\varphi_p(t)$.

Si la ecuación (6.1) es estable (sinónimo de sistema físico estable), entonces la respuesta queda caracterizada esencialmente por (b) para t “grandes” y por ello escribiremos $\varphi(t) \approx \varphi_p(t)$ para t suficientemente “grandes”. En tal caso, se dice que (a) representa un transitorio. Diferenciamos así, en cuanto a la evolución del sistema estable pensando a la variable independiente t como el tiempo, dos regímenes:

- (i) régimen transitorio, durante el cual la respuesta es la superposición de un transitorio con la solución $\varphi_p(t)$ (t pequeños; en algunos casos del orden de 0,01 segundos).
- (ii) régimen permanente, durante el cual la respuesta es esencialmente la solución $\varphi_p(t)$.

Cuando la ecuación (y por ende el sistema) es inestable la respuesta para todo t está dada por la superposición de (a) con (b).

Consideremos ahora la ecuación

$$L_2[y] = y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \quad (6.2)$$

donde suponemos que los coeficientes a_1, a_2 son constantes y reales. ¿Qué condiciones harán que esta ecuación sea estable?

La ecuación característica asociada a 6.2 es

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0.$$

Si llamamos λ_1, λ_2 a las raíces de esta ecuación sabemos que una base del conjunto solución de 6.2 será:

- $\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}\}$ si las dos raíces son reales y distintas;
- $\{e^{\lambda_1 t}, t e^{\lambda_1 t}\}$ si λ_1 es real y tiene multiplicidad dos;
- $\{e^{\alpha t} \cos(\beta t), e^{\alpha t} \sin(\beta t)\}$ si $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ ($\beta \neq 0$).

Teniendo en cuenta que las raíces de la ecuación característica asociada a 6.2 pueden expresarse mediante la fórmula

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

y que verifican las condiciones $\lambda_1 + \lambda_2 = -a_1$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = a_2$, es fácil demostrar que si todas las raíces de la ecuación característica tienen parte real negativa entonces la ecuación 6.2 será estable. El siguiente criterio establece una condición necesaria y suficiente para que las raíces de la ecuación característica tengan parte real negativa.

Criterio de estabilidad

$$Re(\lambda_1) < 0, Re(\lambda_2) < 0 \Leftrightarrow a_1 > 0, a_2 > 0$$

A modo de ejemplo, recordemos el problema del motor de corriente continua que fue analizado en la sección 1. Bajo las condiciones impuestas, el sistema resultó estable. Puede observarse ahora que la ecuación 1.1 verifica el criterio de estabilidad.

Referencias

- [1] Ayres, F., *Theory and Problems of Differential Equations*, Serie Schaum - Schaum Publishing, 1952.
- [2] Bird, R.B., Stewart, W.E., Lightfoot, E.N. *Fenómenos de transporte* - Editorial Reverté, 1976.
- [3] Bortolato, G., Sastre, E., *Análisis Perturbación-Respuesta. Estabilidad*, Apunte para la cátedra de Análisis Matemático III -Dpto. de Matemática (EFB-FCEIA), 1987.
- [4] Manrique Valadez, J. *Transferencia de Calor*, Segunda Edición - Ed. Oxford, 2002.
- [5] Nash, W., *Resistencia de materiales*, Serie Schaum - Editorial McGraw-Hill, 1970.
- [6] Rodriguez-Avial Azcúnaga, F., *Construcciones metálicas*, Tercera Edición - Editorial DOSSAT, 1956.
- [7] Timoshenko, S., *Resistencia de materiales*, Segunda Edición - Editorial Espasa-Calpe, 1957.
- [8] Tremblay, D., *Resonance in a piezoelectric material*, Physics Department, The College of Wooster, Wooster, 2006.
- [9] Zill, D., *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*, Octava Edición - Thomson Editores, 2007.

Agradecimientos

Deseamos expresar nuestra gratitud al Lic. Emilio Sastre, al Dr. Reinaldo Welti, al Dr. Oscar de Sanctis y al Ing. Ronald Braccialarghe por sus contribuciones y apoyo en la realización de este apunte.