FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERIA Y AGRIMENSURA
Escuela de Formación Básica - Departamento de Matemática

Optimización de funciones con restricciones

Marisa Piraino - Julieta Recanzone
Dirce Braccialarghe - Mariana Cisneros - Lorena Muñoz
Eduardo Santillan Marcus - Jorgelina Walpen[1]

-2018-

[1]{piraino, jureca, dirce, cisneros, lorena, edus, walpen}@fceia.unr.edu.ar

Índice

1. Motivación del presente material

Algunos docentes que trabajamos en la asignatura Cálculo III, asignatura del segundo año de las carreras de Ingeniería, consideramos que hay temas en la bibliografía utilizada en el aula que necesitan un abordaje más profundo. Es por ello que generamos durante el año 2017 espacios de estudio y discusión para fortalecer nuestra formación. Con la intención de que los encuentros sirvan para la reflexión y el enriquecimiento mutuo, las profesoras Marisa Piraino y Julieta Recanzone se encargaron de la organización de los mismos. El primero de ellos fue organizado para discutir sobre el tema *Optimización de funciones con restricciones*. A modo de disparador las docentes prepararon un material que fue analizado y resuelto previamente al encuentro. Participaron del mismo: D. Braccialarghe, E. Hinrichsen, R. Katz, M. Medina, L. Muñoz, C. Orsetti, G. Sbérgamo, L. Schaefer, M. Severino, R. Stagnitta, J. Walpen y C. Zelaya. Allí se decidió la realización de un apunte y se invitó a los docentes del departamento de Matemática a participar en la elaboración del mismo. El presente material, **destinado a docentes**, es una construcción grupal basado en el material puesto a disposición por Marisa y Julieta y en el trabajo realizado por los docentes del departamento de Matemática de la Escuela de Formación Básica que figuran como autores del apunte.

2. Introducción

Es frecuente en nuestra vida encontrarnos pensando en lo "mejor", en lo "peor", en lo óptimo.

- ¿Cómo optimizar el consumo de energía para la climatización de nuestra vivienda?
- ¿Cuál es la producción máxima que puede realizar un fabricante con una inversión fija?
- ¿Cuáles son las dimensiones de un envase de volumen dado que podemos fabricar utilizando la menor cantidad de material posible?
- ¿Cómo optimizar la ubicación de los distintos sectores en una fábrica y la posición de los equipos de manera de conseguir un adecuado flujo de materiales, minimización de costos, altos niveles de servicio al cliente y óptimas condiciones de trabajo para los empleados?

Éstos son algunos de los numerosos ejemplos que podemos encontrar en la vida real y que pertenecen al grupo de los problemas llamados *problemas de optimización con restricciones*. No son nuevos, han ido presentándose a lo largo de la historia de la humanidad. Que un segmento rectilíneo es la curva de longitud mínima entre dos puntos de un plano o que entre todas las curvas planas cerradas de la misma longitud, la circunferencia encierra el área mayor eran resultados conocidos por los antiguos griegos. A menudo, se enunciaban sin un serio intento de dar una demostración pero, como sabemos, han sido un fabuloso impulso al desarrollo de teorías y técnicas al intentar resolverlos. Durante el siglo XVII, la teoría general de los valores extremos - máximos y mínimos - se convirtió en uno de los principios sistemáticos de la ciencia. Los primeros pasos de Fermat en el desarrollo de su teoría de cálculo diferencial estuvieron animados por el deseo de estudiar las cuestiones de máximos y mínimos por medio de métodos generales. En el siglo siguiente, Leonhard Euler (1707-1783) y Joseph Louis Lagrange (1736-1813) desarrollaron métodos más generales para resolver problemas de extremos (como por ejemplo el de la braquistócrona), en los cuales el elemento independiente ya no era una sola variable o un número finito de variables, sino toda una curva o función e incluso un sistema de funciones. Nacía así la rama de la Matemática llamada *Cálculo variacional* a la que pertenecen famosos problemas, entre ellos, el problema isoperimétrico[1] que había desconcertado al mundo matemático durante mucho tiempo. A los diecinueve años de edad, Lagrange obtuvo fama resolviéndolo. Sí, Lagrange, el mismo que presentó, años después, en su libro *Mécanique Analytique* el método de los multiplicadores. Como comenta Bussotti en [1] *es necesario puntualizar que cada concepto científico tiene su fase gestacional y los multiplicadores no escapan a esta regla.* Antes de Lagrange otros autores concibieron soluciones a problemas utilizando ideas similares a las suyas. Sin embargo es necesario separar la fase gestacional de un concepto del nacimiento real del mismo porque Lagrange fue el primero que concibió completamente el valor de su método para resolver problemas diversos. La aparición de los multiplicadores tiene lugar en el contexto de la Estática. Bussotti hace una breve descripción de los conceptos básicos de la Estática en los que se basó Lagrange en su libro *Mécanique Analytique*. En la página 27, Lagrange señala la importancia de reducir la Mecánica a operaciones puramente analíticas y liberarla de consideraciones geométricas intuitivas. Por esta razón en la Sección 4, él introduce el método de los multiplicadores (precisamente *Méthode des multipliers* es el título del párrafo 1 de la Sección 4). Utilizándolo presenta, en forma general y simple, el estudio de problemas de equilibrio con restricciones determinando condiciones necesarias para que una función tenga máximo o mínimo condicionado.

En la próxima sección se encuentran las definiciones y teoremas que fundamentan los procedimientos que se utilizan a la hora de buscar los extremos condicionados de una función.

3. Condiciones necesarias para la existencia de extremos condicionados

El problema que vamos a estudiar es el de hallar los valores extremos de una función sujeta a una o más restricciones, conocidas también como condiciones o ligaduras. Estos valores, si existen, son llamados **extremos condicionados** de la función. En los siguientes teoremas llamaremos con f a la función a optimizar y con g o g_i a las funciones relacionadas con las restricciones.

Teorema 3.1. ***(Teorema de los multiplicadores de Lagrange general)***

- *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 (esto es, una función continua con derivadas parciales primeras continuas) definida en el conjunto abierto U.*
- *Sean $g_1, g_2, \cdots, g_m : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, m funciones de clase C^1 en U con $m < n$.*
- *Sean $c_1, c_2, \cdots, c_m$ números reales.*
- *Sea $S = \{x \in U / g_i(x) = c_i, i = 1, \cdots, m\}$.*
- *Sea $x_0 \in S$ un punto extremo condicionado de f.*

[1] Entre todas las curvas cerradas en el plano de perímetro fijo, hallar la curva (si existe) que maximiza el área de la región que encierra

- *Supongamos que* $\det\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x_0)\right) \neq 0$ *para* $\cancel{i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n}$.

Entonces, existen m *números reales* $\lambda_i, i = 1 \cdots, m$ *tales que cumplen con la siguiente igualdad:*

$$\overline{\nabla} f(x_0) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \overline{\nabla} g_k(x_0)$$

Teorema 3.2. *(**Teorema de los multiplicadores de Lagrange para** $n = 2$ **y** $m = 1$)*

- *Sea* $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una función de clase* C^1 *definida en el conjunto abierto* U*.*
- *Sean* $g : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*, una función de clase* C^1 *en* U*.*
- *Sea* $S = \{(x, y) \in U / g(x, y) = c\}$*.*
- *Sea* $(x_0, y_0) \in S$ *un punto extremo condicionado de* f*.*
- *Supongamos que* $\overline{\nabla} g(x_0, y_0) \neq \bar{0}$*.*

Entonces, existen un número real λ *tal que se cumple la siguiente igualdad:*

$$\overline{\nabla} f(x_0, y_0) = \lambda \overline{\nabla} g(x_0, y_0)$$

Antes de desarrollar la demostración del teorema observemos que, como consecuencia del mismo, x_0, y_0, λ verifican el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f_x(x, y) & = & \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) & = & \lambda g_y(x, y) \\ g(x, y) & = & c \end{array} \right.$$

Otra manera de presentar este sistema es en términos de la función auxiliar L, conocida como el ***Lagrangiano de f***, definida de la siguiente manera:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - c).$$

Los extremos condicionados de f pueden hallarse buscando los puntos críticos de la función L. Recordemos que éstos se obtienen resolviendo la ecuación vectorial,

$$\overline{\nabla} L(x, y, \lambda) = \bar{0}.$$

Es decir,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} L_x(x, y, \lambda) & = & 0 \\ L_y(x, y, \lambda) & = & 0 \\ L_\lambda(x, y, \lambda) & = & 0 \end{array} \right.$$

Entonces puede observarse que ambas ecuaciones vectoriales, $\overline{\nabla} f(x, y) = \lambda \overline{\nabla} g(x, y)$ y $\overline{\nabla} L(x, y, \lambda) = \bar{0}$ son equivalentes.

A continuación mostramos una demostración del Teorema de los multiplicadores de Lagrange para $n = 2$ y $m = 1$.

Demostración. Como es de suponer, se llega a una demostración analítica reduciéndolo al caso conocido de los valores extremos *libres.* Suponemos que $g_y(x_0, y_0) \neq 0$ (se puede hacer un razonamiento análogo al que sigue si se supone que $g_x(x_0, y_0) \neq 0$). Por el teorema de la función implícita (que está enunciado a continuación de la demostración de este teorema), en un entorno del punto (x_0, y_0) la ecuación $g(x, y) = 0$ define a y de modo único como una función de x, digamos $y = h(x)$, en un intervalo $I = \{x \in \mathbb{R}/x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$. En este intervalo la función h tiene derivada continua. Además resulta que $y_0 = h(x_0)$. Consideremos la función $k(x) = f(x, h(x))$. Esta función debe tener un valor extremo en $x = x_0$ por lo que debe verificarse que,

$$k'(x_0) = f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)h'(x_0) = 0. \tag{3.1}$$

Además la función h definida implícitamente satisface,

$$g_x(x_0, y_0) + g_y(x_0, y_0)h'(x_0) = 0. \tag{3.2}$$

Llamemos

$$\lambda = \frac{f_y(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)}.$$

Restemos a 3.1, la igualdad que se obtiene al multiplicar 3.2 por λ. Se obtiene entonces la siguiente ecuación:

$$f_x(x_0, y_0) - \lambda g_x(x_0, y_0) = 0.$$

Usando la definición de λ tenemos que,

$$f_y(x_0, y_0) - \lambda g_y(x_0, y_0) = 0.$$

Así, hemos demostrado que existe un valor para λ que verifica el sistema,

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) &= \lambda g_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) &= \lambda g_y(x_0, y_0) \end{cases}$$

O lo que es lo mismo,

$$\overline{\nabla} f(x_0, y_0) = \lambda \overline{\nabla} g(x_0, y_0)$$

QED

A continuación enunciamos el Teorema de la función implícita cuya demostración puede verse en [2].

Teorema 3.3. ***(Teorema de la función implícita)***
Si $F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función con derivadas primeras parciales continuas en un entorno del punto (x_0, y_0) y si $F(x_0, y_0) = 0$ y $F_y(x_0, y_0) \neq 0$, entonces la ecuación $F(x, y) = 0$ define a y de modo único como una función de x, digamos $y = h(x)$, en un intervalo $I = \{x \in \mathbb{R}/x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$. Esta función h satisface la condición inicial $y_0 = h(x_0)$, y para todo $x \in I$, $F(x, h(x)) = 0$ y $F_y(x, h(x)) \neq 0$. Además de ser h continua resulta también con derivada continua en I dada por

$$h'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}.$$

Resumiendo: Para que pueda ocurrir un valor extremo de la función f con la restricción $g(x,y)=0$ en el punto (x_0,y_0) , donde $\overline{\nabla} g(x_0,y_0)\neq \bar{0}$ debe existir una constante de proporcionalidad λ tal que se satisfagan las tres ecuaciones siguientes:

$$\left\{\begin{array}{rcl} f_x(x_0,y_0) & = & \lambda g_x(x_0,y_0) \\ f_y(x_0,y_0) & = & \lambda g_y(x_0,y_0) \\ g(x,y) & = & 0 \end{array}\right.$$

El procedimiento que se utiliza para hallar los extremos con restricciones de f consiste en resolver este último sistema.

Atención: Las soluciones de este sistema **NO** necesariamente serán las soluciones del problema, si es que ellas existen.

Algunas recomendaciones generales: Si el conjunto $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/g(x,y)=c\}$ es un conjunto acotado, entonces f debe tener máximo y mínimo absolutos condicionados en el conjunto (¿por qué?). Si el conjunto S no es acotado, entonces no está garantizada la existencia de extremos de f en S.

El objetivo de la próxima sección es mostrar condiciones suficientes para la existencia de extremos condicionados en problemas de optimización de funciones de dos variables reales con una restricción. La extensión de este resultado puede verse en [3].

4. Condiciones suficientes para la existencia de extremos condicionados

Como vimos en la sección anterior, una de las maneras de hallar los posibles extremos condicionados de f es buscar en los puntos críticos de la función auxiliar $L(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda(g(x,y)-c)$, conocida como el Lagrangiano de f. Supongamos que uno de esos puntos hallados es (x_0,y_0,λ) y sea $v_0=(x_0,y_0)$. Esto es,

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{v_0}=\lambda\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{v_0}\qquad ;\qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{v_0}=\lambda\left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{v_0}\qquad ;\qquad g(x_0,y_0)=c$$

Esto se trata en cierta forma de un problema en una variable. Si g es una función "razonable" entonces el conjunto S definido por $g(x,y)=c$ es una curva, y estamos interesados en cómo varía f conforme nos vamos moviendo a lo largo de esta curva. Si en la ecuación $g(x,y)=c$ podemos despejar una variable en función de la otra entonces tendremos una forma explícita y podremos usar el criterio de la derivada segunda para funciones de una variable. Si $\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{v_0}\neq 0$ entonces la curva S no es vertical en v_0 y suena bien que podamos despejar a y en función de x en un entorno de x_0. De hecho, estamos en las hipótesis del Teorema de la Función implícita y vamos a poder despejar y en función de x; escribamos entonces $y=\phi(x)$.
Si S es la gráfica de $y=\phi(x)$, la restricción de f sobre S, que simbolizamos, $f|_S$, puede escribirse como una función de una variable, $h(x)=f(x,\phi(x))$. Usando la Regla de la Cadena tenemos que:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dh}{dx} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d\phi}{dx} \\
\frac{d^2h}{dx^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{d\phi}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2\phi}{dx^2}
\end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

Podemos usar la relación $g(x, \phi(x)) = c$ para hallar $\dfrac{d\phi}{dx}$ y $\dfrac{d^2\phi}{dx^2}$, derivando ambos lados de esta relación respecto a x:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{d\phi}{dx} &= 0 \\
\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}\frac{d\phi}{dx} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{d^2\phi}{dx^2} &= 0
\end{aligned}$$

de lo que resulta que

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\phi}{dx} &= -\frac{\partial g/\partial x}{\partial g/\partial y} \\
\frac{d^2\phi}{dx^2} &= -\frac{\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}\dfrac{\partial g/\partial x}{\partial g/\partial y} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial g/\partial x}{\partial g/\partial y}\right)^2}{\dfrac{\partial g}{\partial y}}
\end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

Sustituyendo 4.2 en 4.1 tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{dh}{dx} &= \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g/\partial x}{\partial g/\partial y} \\
\frac{d^2h}{dx^2} &= \frac{1}{(\partial g/\partial y)^2}\left\{\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f/\partial y}{\partial g/\partial y}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right]\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2\right. \\
&\quad \left. -2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial f/\partial y}{\partial g/\partial y}\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}\right]\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial f/\partial y}{\partial g/\partial y}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right]\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2\right\}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

En v_0 sabemos que $\partial f/\partial y = \lambda \partial g/\partial y$ y que $\partial f/\partial x = \lambda \partial g/\partial x$, de modo que las expresiones 4.3 se convierten en:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dh}{dx}\right|_{x_0} &= \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{v_0} - \lambda \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{v_0} = 0 \\
\left.\frac{d^2h}{dx^2}\right|_{x_0} &= \left.\frac{1}{(\partial g/\partial y)^2}\left\{\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2\right\}\right|_{v_0} \\
&= \frac{-1}{(\partial g/\partial y)^2}\det\left.\begin{pmatrix}
0 & -\dfrac{\partial g}{\partial x} & -\dfrac{\partial g}{\partial y} \\
-\dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\
-\dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2}
\end{pmatrix}\right|_{v_0}
\end{aligned}$$

donde L es el Lagrangiano de f, función auxiliar que introdujimos anteriormente. El determinante de orden 3×3 que aparece en la última expresión se llama *Hessiano Limitado* o ***Hessiano Orlado*** y lo simbolizamos con $\tilde{D}$. Su signo es opuesto al de d^2h/dx^2. Por lo tanto si $\tilde{D}$ es negativo, h tiene un mínimo local; si es positivo, h tiene un máximo local y si es cero el criterio no permite concluir. Esto nos lleva a enunciar el siguiente criterio.

Teorema 4.1. ***Criterio del Hessiano Orlado***

Sean $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $g : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones suaves (al menos C^2). Sean $v_0 \in U$, $g(v_0) = c$ y S la curva de nivel para g con valor c. Supongamos que $\overline{\nabla} g(v_0) \neq \overline{0}$ y que existe un número real λ tal que $\overline{\nabla} f(v_0) = \lambda \overline{\nabla} g(v_0)$. Entonces considerando el Lagrangiano de f, $L = f - \lambda(g - c)$, y el Hessiano Orlado evaluado en v_0 y en el correspondiente λ,

$$\tilde{D} = \det \left. \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{\partial g}{\partial x} & -\dfrac{\partial g}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix} \right|_{v_0}$$

tenemos que:

1. *Si $\tilde{D} > 0$ entonces en v_0, f tiene un máximo local condicionado.*

2. *Si $\tilde{D} < 0$ entonces en v_0, f tiene un mínimo local condicionado.*

3. *Si $\tilde{D} = 0$ entonces el criterio no decide.*

En la próxima sección presentamos ejemplos que fueron extraídos de libros citados en la bibliografía de este material. La resolución de los mismos fue realizada por los docentes del Departamento de Matemática de la Escuela de Formación Básica que figuran entre los autores del apunte.

5. Ejercicios con sus resoluciones

Ejercicio 1 ***Hallar, si es posible, los extremos de*** $x + y$ ***sujeto a la condición*** $x^2 + y^2 = 1$**.**

Llamemos f a la función cuya ley es $f(x, y) = x + y$ y g, a la función cuya ley es $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. El conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / g(x, y) = 0\}$ corresponde a una circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 1. Éste es un conjunto cerrado y acotado por lo que el problema de encontrar óptimos en S de la función continua f tiene solución. En la figura se observan las curvas de nivel de f y la gráfica del conjunto S.

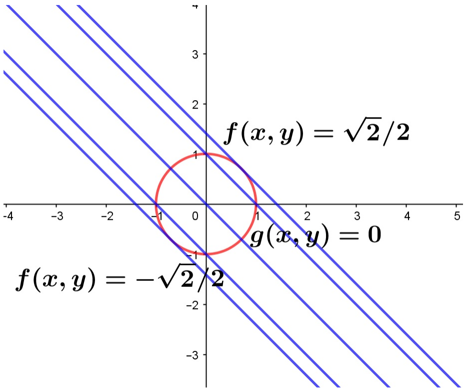


Figura 1: Curvas de nivel de f y gráfica del conjunto S

Observemos que $\overline{\nabla} g(x, y) = (2x, 2y) \neq \overline{0}$ en S. El sistema que debemos resolver en este caso es:

$$\overline{\nabla} f = \lambda \overline{\nabla} g \qquad \text{y} \qquad g(x, y) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 1 &=& \lambda 2x \\ 1 &=& \lambda 2y \\ x^2 + y^2 &=& 1 \end{array} \right. \tag{5.1}$$

De la resolución de este sistema obtenemos los puntos $P_1(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ y $P_2(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$. Evaluando f en ellos y observando la geometría del problema se tiene que la función f tiene su máximo condicionado absoluto en P_1 y su mínimo condicionado absoluto en P_2.
Veamos en este ejemplo cómo utilizar el Hessiano Orlado. Escribamos el Lagrangiano:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

$$L(x, y, \lambda) = x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

El Hessiano Orlado evaluado en un punto genérico es:

$$\tilde{D}(x, y, \lambda) = \det \begin{pmatrix} 0 & -2x & -2y \\ -2x & -2\lambda & 0 \\ -2y & 0 & -2\lambda \end{pmatrix} = 8\lambda(x^2 + y^2)$$

Sustituyendo en 5.1, para el punto P_1 encontrado el correspondiente valor de λ es $\frac{\sqrt{2}}{2}$ y para el punto P_2 el valor de λ es $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Así, en la expresión de $\tilde{D}$ tenemos:

$$\tilde{D}(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = 4\sqrt{2}$$

y

$$\tilde{D}(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = -4\sqrt{2}.$$

Luego, en P_1 f tiene un máximo local condicionado y en P_2 un mínimo local condicionado que además resultan absolutos.

Ejercicio 2 ***Hallar, si es posible, los extremos de*** x^2+y^2 ***sujeto a la condición*** $x.y = 1$**.**

Llamemos f a la función cuya ley es $f(x,y) = x^2 + y^2$ y g, a la función cuya ley es $g(x,y) = x.y - 1$. El conjunto $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / g(x,y) = 0\}$ corresponde a una hipérbola de centro $(0,0)$ cuyas rectas asíntotas son los ejes coordenados. Es un conjunto cerrado pero no acotado por lo que no sabemos a priori si el problema de encontrar óptimos en S de la función continua f tiene solución. En la figura se observan las curvas de nivel de f y la gráfica del conjunto S.

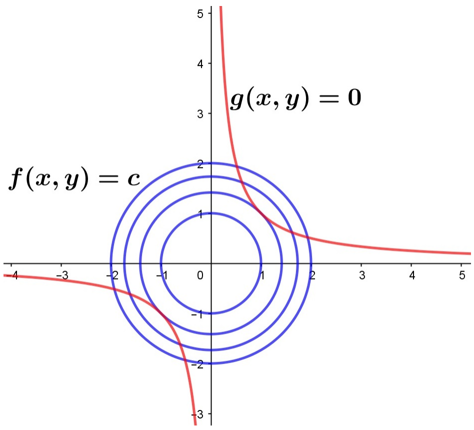


Figura 2: Curvas de nivel de f y gráfica del conjunto S

Observemos que $\overline{\nabla} g(x,y) = (y,x) \neq \overline{0}$ en S. El sistema que debemos resolver en este caso es:

$$\overline{\nabla} f = \lambda \overline{\nabla} g \qquad \text{y} \qquad g(x,y) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x &=& \lambda y \\ 2y &=& \lambda x \\ x.y &=& 1 \end{array} \right. \tag{5.2}$$

De la resolución cuidadosa de este sistema obtenemos los puntos $P_1(1,1)$ y $P_2(1,-1)$. Si representamos gráficamente al conjunto S y a las curvas de nivel de la función f podremos comprobar que en los puntos P_1 y P_2, la función f tiene su mínimo condicionado pero

que no posee máximo condicionado por no estar acotada sobre el conjunto S.
Veamos en este ejemplo cómo utilizar el Hessiano Orlado. Escribamos el Lagrangiano de f:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(xy - 1)$$

El Hessiano Orlado evaluado en un punto genérico es:

$$\tilde{D}(x, y, \lambda) = \det \begin{pmatrix} 0 & -y & -x \\ -y & 0 & -\lambda \\ -x & -\lambda & 0 \end{pmatrix} = -2\lambda xy$$

Tanto para el punto P_1 encontrado resolviendo 5.2 como para P_2 el correspondiente valor de λ es 2. Sustituyendo en la expresión $\tilde{D}$ tenemos:

$$\tilde{D}(1, 1, 2) = -4$$

y

$$\tilde{D}(-1, -1, 2) = -4.$$

Así, en P_1 y en P_2 f tiene mínimos locales condicionados que, por la geometría del problema, resultan absolutos.

Ejercicio 3 ***Hallar, si es posible, los extremos de $x + y$ sujeto a la condición $x.y = 1$.***

Consideremos $f(x, y) = x+y$ y $g(x, y) = x.y$. Queremos encontrar los valores extremos de $f(x, y)$ sujetos a la restricción $g(x, y) = 1$. Para ello busquemos los valores x, y, λ para los cuales:

$$\overline{\nabla} f = \lambda \overline{\nabla} g \qquad \text{y} \qquad g(x, y) = 1$$

Esto nos lleva a resolver el siguiente sistema:

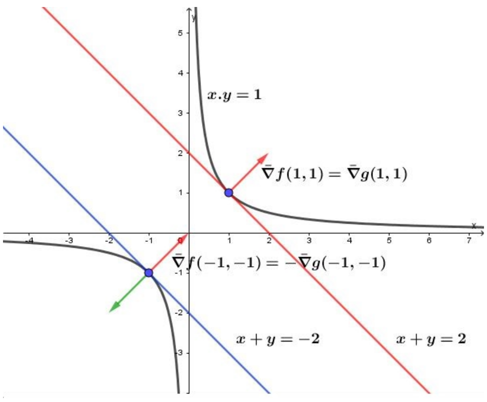
$$\begin{cases} 1 &= \lambda y \\ 1 &= \lambda x \\ x.y &= 1 \end{cases} \tag{5.3}$$

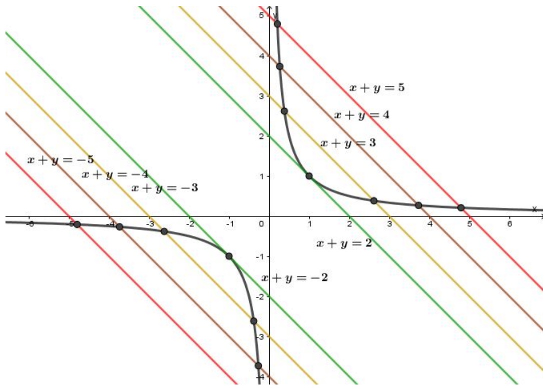
Igualando las dos primeras ecuaciones: $\lambda x = \lambda y$ y considerando $\lambda \neq 0$ ya que las mismas no se verficarían, se tiene que $x = y$.
Reemplazando en la última ecuación obtenemos: $x^2 = 1$, de modo que $x = \pm 1$. Tenemos entonces las siguientes soluciones al sistema:

$$x = 1, y = 1, \lambda = 1$$
$$x = -1, y = -1, \lambda = -1$$

En definitiva, el método de Lagrange identifica los puntos $P_1(1, 1)$ y $P_2(-1, -1)$ como candidatos para ubicar los valores extremos de f, pero la función $f(x, y)$ no tiene valores extremos sobre la hipérbola $x.y = 1$.

Veamos la geometría del Problema:

(a)


(b)


En el gráfico (a) comprobamos que los puntos hallados verifican las restricciones del sistema pero luego en el gráfico (b), al observar algunas curvas de nivel de $f(x, y) = x + y$ que se corresponden con las rectas $x + y = c$ muestran que la función f no posee valores extremos sobre la hipérbola ya que cuanto más lejos del origen estén éstas curvas, el valor absoluto de f será cada vez mayor sobre sus puntos de encuentro.

La condición $\overline{\nabla} f = \lambda \overline{\nabla} g$ no es suficiente

Veamos en este ejemplo cómo utilizar el Hessiano Orlado. Escribamos el lagrangiano:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

$$L(x, y, \lambda) = x + y - \lambda(xy - 1)$$

El Hessiano Orlado evaluado en un punto genérico es:

$$\tilde{D}(x, y, \lambda) = \det \begin{pmatrix} 0 & -y & -x \\ -y & 0 & -\lambda \\ -x & -\lambda & 0 \end{pmatrix} = -2\lambda xy$$

Para el punto P_1 obtenido resolviendo 5.3 el correspondiente valor de λ es 1 y para P_2 el valor de λ es -1. Sustituyendo en la expresión $\tilde{D}$ tenemos:

$$\tilde{D}(1, 1, 1) = -2$$

y

$$\tilde{D}(-1, -1, -1) = 2.$$

Así, en P_1 f tiene un mínimo local condicionado y en P_2, un máximo local condicionado pero éstos no corresponden a extremos condicionados absolutos por lo analizado anteriormente.

Ejercicio 4 ***Hallar, si es posible, los extremos de*** $f(x, y) = 9 - (x-3)^2 - (y-2)^2$ ***sujeto a la condición*** $y - x = -1$***.***

Primero observemos que el conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y - x + 1 = 0\}$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^2$ pero no acotado por lo que a priori no podemos determinar si existen extremos condicionados. Llamemos g a la función cuya ley es $g(x, y) = y - x + 1$. Observemos que $\overline{\nabla} g(x, y) = (-1, 1) \neq \overline{0}$. Busquemos los valores x, y, λ para los cuales:

$$\overline{\nabla} f = \lambda \overline{\nabla} g \qquad \text{y} \qquad g(x, y) = 0$$

Considerando la igualdad de las componentes y la ecuación correspondiente a la restricción resulta el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -2(x-3) & = & -\lambda \\ -2(y-2) & = & \lambda \\ y-x & = & -1 \end{array} \right. \tag{5.4}$$

Sumando las dos primeras ecuaciones miembro a miembro eliminamos el parámetro λ. Queda así el sistema, simple de resolver,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x-3+y-2 & = & 0 \\ y-x & = & -1 \end{array} \right.$$

cuya solución es $P(3,2)$. ¿f tiene un extremo condicionado en este punto? Analicemos la geometría del problema. La gráfica de la función f es un paraboloide elíptico. En la figura se observan las curvas de nivel de f: circunferencias centradas en el punto $(3,2)$.

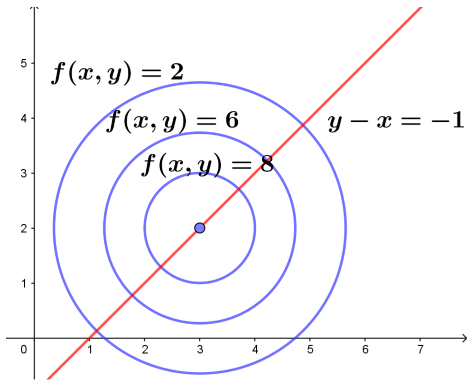


Figura 3: Curvas de nivel de f y curva restricción.

Los puntos que verifican la restricción son los puntos de la recta de ecuación $y-x=-1$. Así, tenemos que en el punto $(3,2)$ f tiene un máximo local condicionado (y también absoluto). Tengamos en cuenta que si una función tiene un extremo absoluto en un punto no necesariamente en ese punto tendrá un extremo condicionado pues dicho punto puede no pertenecer al conjunto definido por $g(x,y)=0$. También, observando la figura, podemos concluir que f **no** tiene mínimo condicionado.

Veamos qué ocurre en este caso con el Hessiano Orlado. Escribamos el Lagrangiano de f:

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$$

$$L(x,y,\lambda) = 9-(x-3)^2-(y-2)^2-\lambda(y-x+1)$$

El Hessiano Orlado evaluado en un punto genérico es:

$$\tilde{D}(x,y,\lambda) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 4$$

Luego en el punto $(3,2)$ obtenido de la resolución de 5.4, f tiene un máximo local condicionado.

Ejercicio 5 ***Determinar el punto de la curva de ecuación*** $y^2 = (x-1)^3$ ***más próximo al origen.***

En primer lugar debemos reconocer la función a optimizar. En este caso se trata de la función distancia al origen, luego: $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ es nuestra función a minimizar. En segundo lugar identificamos la restricción: x e y deben satisfacer la ecuación de la curva, esto es, deben verficar $y^2 = (x-1)^3$. Luego, si $g(x,y) = y^2 - (x-1)^3$, podemos expresar la restricción como $g(x,y) = 0$. En la figura podemos observar curvas de nivel de la función f y la gráfica del conjunto $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / g(x,y) = 0\}$.

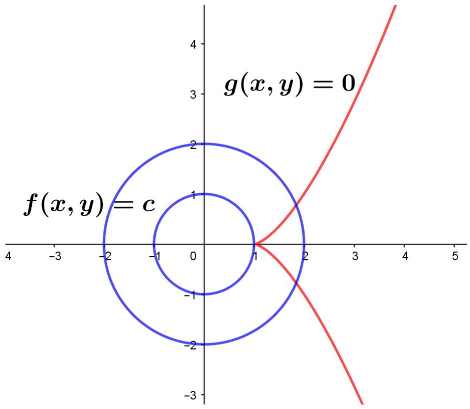


Figura 4: Curvas de nivel de f y gráfica del conjunto S

Dado que se trata de un problema de mínimo de una función de varias variables podríamos (sin pensar demasiado), intentar aplicar el método de los Multplicadores de Lagrange para buscar posibles candidatos óptimos.

Observación: dado que $\sqrt{x^2+y^2}$ y x^2+y^2 asumen el mínimo en el mismo punto, a fin de facilitar los cálculos, pensamos a f como esta última.

Escribimos el sistema que resulta de la condición de paralelismo de los gradientes y obtenemos:

$$\begin{cases} \overline{\nabla} f &= \lambda \overline{\nabla} g \\ g &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x &= \lambda(-3)(x-1)^2 & (1) \\ 2y &= \lambda 2y & (2) \\ 0 &= y^2 - (x-1)^3 & (3) \end{cases}$$

Suponiendo $y \neq 0$, se obtiene de (2): $\lambda = 1$. Luego, reemplazando en (1), resulta:

$$0 = -3x^2 + 4x - 3.$$

Esta última es una ecuación de segundo orden que no admite soluciones reales. Concluímos hasta aquí que el supuesto $y \neq 0$ no puede ser válido.

Analizamos entonces qué sucede si $y = 0$. De (3), resulta: $x = 1$. Sin embargo, este último no verifica (1). Más aún, aún si $(1,0)$ fuera una solución al sistema, podemos ver que dicho punto no verifica la condición $\overline{\nabla} g(1,0) \neq \overline{0}$, que está entre las hipótesis que deben verificarse para que el método de los multiplicadores de Lagrange sea válido.

Estamos entonces ante un problema que no puede resolverse mediante el método de los multiplicadores de Lagrange y a menos que tengamos en mente cuál es la gráfica de la curva $y^2 = (x-1)^3$ no habría ningún indicio para sospechar que el punto obtenido $(1,0)$ es la solución del problema.

Pensando entonces que no tuviéramos ninguna herramienta graficadora a mano, nos preguntamos si habría alguna otra manera de obtener la solución del problema...

Una estrategia que podría surgir naturalmente es reemplazar, en la función f, el término y^2 por su expresión equivalente $(x-1)^3$, obtenida de la restricción g del problema. De esta manera, pasaríamos a un nuevo problema de búsqueda de extremos no condicionados de la función de una sola variable $F(x) = x^2 + (x-1)^3$. Éste es un problema sencillo y se espera obtener las soluciones resolviendo la ecuación $F'(x) = 0$. Rápidamente podemos ver que la ecuación de segundo orden que obtenemos **no admite soluciones reales**.

¿Por qué? La respuesta es sencilla, **no** se verifica el Teorema de la función implícita en ningún entorno del punto $(1,0)$, es decir, no es posible escribir a y como función de x en ningún entorno del punto que nos interesa, ya que $\frac{\partial g}{\partial y}(1,0) = 0$.

Sin embargo, cambiando un poco la definición de g a $g(x,y) = y^{2/3} - (x-1)$ (que es equivalente y no puede hacerse para el caso anterior) resulta $\frac{\partial g}{\partial x}(1,0) = -1$, en cuyo caso vale el teorema de la función implícita y podemos obtener una expresión válida para x como función de y en un entorno del punto $(1,0)$.

Ahora sí, entonces, pasamos al problema de buscar los extremos no condicionados de la función $F(y) = (y^{2/3}+1)^2 + y^2$. Del cálculo de $F'(y)$ y la ecuación $F'(y) = 0$ se obtiene que la primera no está definida para $y = 0$ y la segunda no admite soluciones reales, luego el mínimo, si existe, solo puede darse para $y = 0$.

Observemos que $F(0) = 1$ y $F(y) \geq 1,\ \forall y \in \mathbb{R}$, de donde se concluye que efectivamente, $y = 0$ es un mínimo absoluto de la función F.

Por último, de la restricción del problema, sabemos que si $y = 0$, entonces $x = 1$, obteniendo finalmente la solución del problema original!!

Ejercicio 6 ***Optimizar la función*** $f(x,y) = y - x^4$ ***en los puntos de la curva de ecuación*** $y - x^3 = 0$***.***

Observemos que el conjunto $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = x^3\}$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^2$ pero no acotado por lo que, a priori, no podemos determinar si existen extremos condicionados. En la figura podemos ver algunas curvas de nivel de f en azul y la gráfica de $y = x^3$ en rojo.

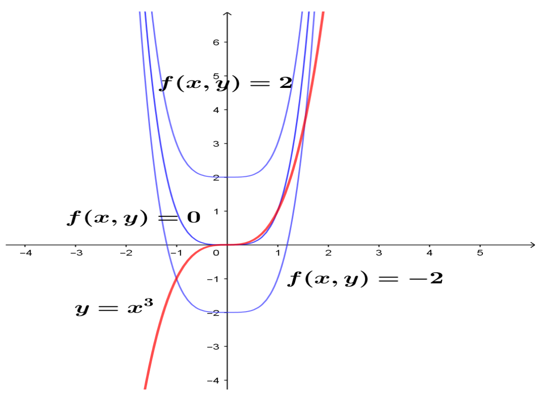


Figura 5: Curvas de nivel de f y curva restricción.

Llamemos g a la función cuya ley es $g(x,y) = y - x^3$. Observemos que $\overline{\nabla} g(x,y) = (-3x^2, 1) \neq \overline{0}$. Busquemos los valores x, y, λ para los cuales:

$$\overline{\nabla} f = \lambda \overline{\nabla} g \qquad \text{y} \qquad g(x,y) = 0$$

Considerando la igualdad de las componentes y la ecuación correspondiente a la restricción tenemos el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -4x^3 & = & -3x^2\lambda \\ 1 & = & \lambda \\ y & = & x^3 \end{array} \right. \tag{5.5}$$

Reemplazando el valor de λ en la primera ecuación obtenemos la ecuación $4x^3 - 3x^2 = 0$. Esta ecuación tiene como soluciones a $x = 0$ y $x = \frac{3}{4}$. Utilizando la tercera ecuación del sistema obtenemos las coordenadas de los puntos candidatos: $P_1(0,0)$ y $P_2(\frac{3}{4}, \frac{27}{64})$.
Veamos qué ocurre en este caso con el Hessiano Orlado. Escribamos el Lagrangiano de f:

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$$

$$L(x,y,\lambda) = y - x^4 - \lambda(y - x^3)$$

El Hessiano Orlado evaluado en un punto genérico es:

$$\tilde{D}(x,y,\lambda) = \det \begin{pmatrix} 0 & 3x^2 & -1 \\ 3x^2 & -12x^2 + 6\lambda x & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 6x(2x - \lambda)$$

Considerando el sistema 5.5, para el punto P_1 el valor de λ es 1 y sustituyendo obtenemos $\tilde{D}(0,0,1) = 0$ por lo que el criterio no decide. Para el punto P_2 el valor de λ también es 1 y sustituyendo tenemos que $\tilde{D}(\frac{3}{4}, \frac{27}{64}, 1) = \frac{9}{4} > 0$. Luego en $(\frac{3}{4}, \frac{27}{64})$ f tiene un máximo local condicionado.
Para poder determinar la naturaleza de los puntos encontrados observemos que podemos reducir el problema a hallar extremos de una función de una variable. En efecto, llamemos $h(x)$ a la expresión que resulta de sustituir en la ley de f a y por x^3. Así, $h(x) = x^3 - x^4$. En la figura podemos observar la gráfica de h.

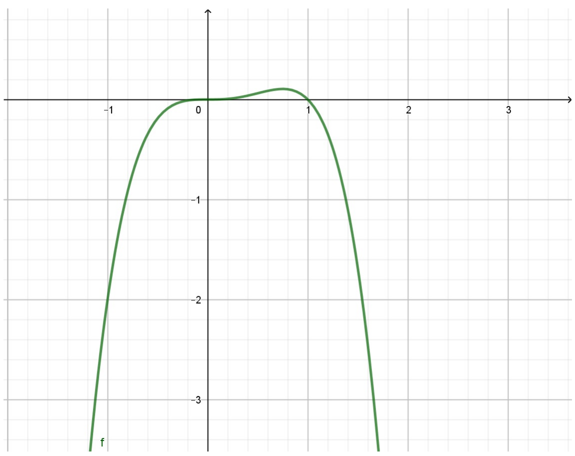
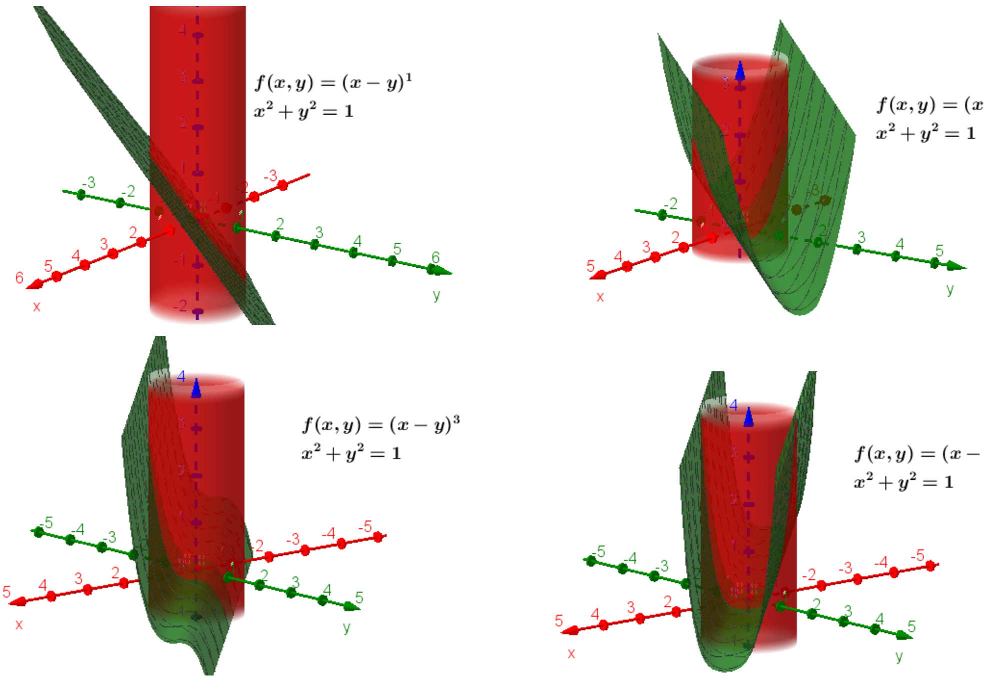


Figura 6: Gráfica de h.

Como vemos en la figura, la gráfica de h tiene en $(0,0)$ un punto de inflexión por lo que en este punto f no posee extremo condicionado. Por otra parte, h tiene en $\frac{3}{4}$ un máximo local que a su vez es absoluto. Entonces en el punto $(\frac{3}{4}, \frac{27}{64})$ f tiene un máximo absoluto condicionado.

Ejercicio 7 ***Hallar los puntos extremos de*** $f(x,y) = (x-y)^n$ ***sujetos a la restricción*** $x^2+y^2=1$ ***donde*** $n \geq 1$

Observemos las gráficas de las funciones f para distintos valores de n junto con la restricción $x^2+y^2=1$:



Notamos en los gráficos que el problema tiene solución para todo valor de n. Realicemos la resolución análitica aplicando el método de Lagrange:
Sea $g(x,y) = x^2+y^2-1$ tenemos entonces que $\nabla g(x,y) = (2x, 2y) \neq (0,0)$ para los $(x,y) \neq (0,0)$, luego podemos entonces aplicar el método :

$$\begin{cases} \overline{\nabla} f(x,y) = & \lambda \overline{\nabla} g(x,y) \\ g(x,y) = & 0 \end{cases}$$

- **Caso n=1:**

$$\begin{cases} 1 = \lambda 2x & (1) \\ -1 = \lambda 2y & (2) \\ x^2+y^2=1 & (3) \end{cases}$$

Observemos que de las ecuaciones (1) y (2) tenemos que $x \neq 0$ e $y \neq 0$ luego dividiendo miembro a miembro tenemos que :

$-1 = \dfrac{x}{y} \Rightarrow x = -y$

Sustituimos en (3) y obtenemos

$(-y)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow 2y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 12 \Rightarrow y = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Luego es fácil comprobar que la función f admite extremos condicionados absolutos en los puntos $P_1(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$ y $P2(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$.

- **Caso $n>1$:**
  El sistema de ecuaciones que obtenemos es el siguiente:

$$\begin{cases} n(x-y)^{n-1}=\lambda 2x & (1)\\ -n(x-y)^{n-1}=\lambda 2y & (2)\\ x^2+y^2=1 & (3)\end{cases}$$

  Si $x-y\neq 0$ podemos trabajar como en el caso 1, dividiendo miembro a miembro las dos primeras ecuaciones y obtenemos los puntos P_1 y P_2.
  Si n es impar vemos en los gráficos que son los puntos donde se obtienen los extremos, en cambio si n es par $f(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})=f(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})=2(\sqrt{2})^n$ que es el valor máximo de la función bajo la restricción $x^2+y^2=1$
  ¿Cómo obtenemos el valor mínimo? Podemos observar que como n es par, $f(x,y)\geq 0$ y entonces el mínimo se obtiene cuando $x=y$,es decir cuando $x-y=0$, situación que descartamos cuando decidimos dividir miembro a miembro las ecuaciones (1) y (2). Observemos que si sustituimos $x=y$ en la ecuación (3) tenemos que: $2y^2=1\Rightarrow$ $y^2=12\Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ y entonces obtenemos los puntos $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ y $(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$ donde la función f se anula, obteniendo así la solución del problema para todo valor de n.

Ejercicio 8 ***Determinar los extremos de la función*** $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ ***sujetos a la restricción*** $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$**.**

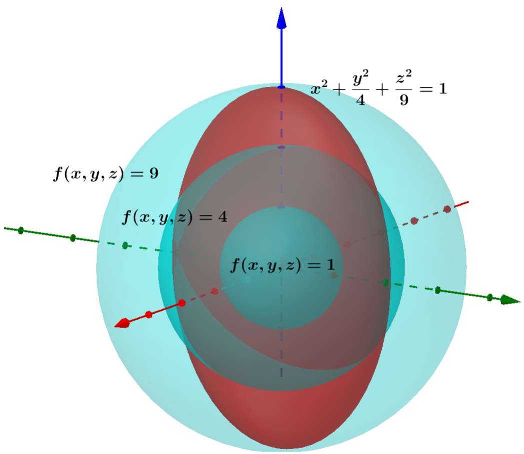


Figura 7: Superficies de nivel de f y superficie restricción

Para comenzar, identificamos a f como la función a optimizar. Por lo tanto si consideramos a $g(x,y,z) = x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - 1$, resulta que nuestra restricción puede ser reescrita como $g(x,y,z) = 0$. Notemos que tanto f como g al ser funciones polinómicas son funciones de clase C^1 (esto es, una función continua con derivadas parciales primeras continuas) definida en $\mathbb{R}^3$ que es un conjunto abierto. Vamos entonces a construir el Lagrangiano de f y g de la manera siguiente: $L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z)$. Luego busquemos los puntos críticos de L igualando a cero a todas sus derivadas primeras, vale decir:

$$\begin{cases} L_x(x,y,z,\lambda) &= 2x - 2\lambda x = 0 \\ L_y(x,y,z,\lambda) &= 2y - 2\lambda \dfrac{y}{4} = 0 \\ L_z(x,y,z,\lambda) &= 2z - 2\lambda \dfrac{z}{9} = 0 \\ L_\lambda(x,y,z,\lambda) &= -\left(x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - 1\right) = 0 \end{cases}$$

Aquí nos encontramos con la mayor dificultad del ejercicio ya que se trata de resolver un sistema no lineal de 4 ecuaciones con 4 incógnitas.
Una técnica bastante exitosa para resolver este tipo de problemas es la factorización de las ecuaciones para luego ir observando caso a caso. Veámoslo en nuestro ejercicio. El sistema puede ser reescrito como:

$$\begin{cases} 2x(1-\lambda) = 0 & (1) \\ 2y(1 - \dfrac{\lambda}{4} = 0 & (2) \\ 2z(1 - \dfrac{\lambda}{9}) = 0 & (3) \\ x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 & (4) \end{cases}$$

Supongamos en (1) que $x = 0$. Luego en (2) puede suceder que $y = 0$ o que $\lambda = 4$. Si consideramos que $y = 0$, vamos a (3) y puede suceder que $z = 0$ o que $\lambda = 9$. Si $z = 0$, obtendríamos el punto $(0,0,0)$, y éste no verifica (4), así que lo descartamos. Si $\lambda = 9$, de (4) considerando que $x = y = 0$ surge que $|z| = 3$. De esta manera hallamos a $P_1(0,0,-3)$ y $P_2(0,0,3)$ como puntos críticos.
Volvemos a (2) y ahora supongamos que $\lambda = 4$. Nuevamente, yendo a (3) podríamos considerar que $z = 0$ o que $\lambda = 9$. Obviamente descartamos rápidamente el caso en que $\lambda = 9$ ya que este multiplicador no puede tener simultáneamente dos valores distintos. Así que el único caso a considerar es $z = 0$. De manera similar a lo hecho anteriormente, de (4) considerando que $x = z = 0$ surge que $|y| = 2$. De esta manera hallamos a $P_3(0,-2,0)$ y $P_4(0,2,0)$ como puntos críticos.
Volvamos a (1) y supongamos que $\lambda = 1$. Luego en (2) podríamos considerar que $y = 0$ o que $\lambda = 4$. Razonando de forma similar a lo anterior descartamos rápidamente el caso en que $\lambda = 9$. Así que considerando que $y = 0$ vamos a (3) y nos encontramos con que o $z = 0$ o que $\lambda = 9$. Nuevamente descartamos el caso $\lambda = 9$, y nos quedamos con $z = 0$. Finalmente, de (4) considerando que $y = z = 0$ surge que $|x| = 1$. De esta manera hallamos a $P_5(-1,0,0)$ y $P_6(1,0,0)$ como puntos críticos.

De esta manera hemos encontrado seis puntos críticos entre los cuales estarán el máximo y el mínimo absoluto de nuestra función restringida pues estamos en la situación de optimizar una función continua sobre un conjunto cerrado y acotado. Notemos que al estar trabajando en $\mathbb{R}^3$ no tenemos a mano una herramienta como el Hessiano Orlado para determinar esto. Por lo tanto podemos tratar de interpretar nuestro problema geométricamente. Qué estamos haciendo al optimizar esta f restringida a g?

Observemos que f es lo que está dentro de la raíz cuando queremos calcular la distancia de un punto al origen de coordenadas en el espacio, y que $g = 0$ puede interpretarse como la ecuación de un elipsoide centrado en el origen. Por lo tanto estaríamos calculando cuáles son los puntos que están sobre el elipsoide que están a mayor o menor distancia del origen.
Entonces sólo resta evaluar a f en los puntos obtenidos, y donde obtengamos el valor más grande será el máximo, y donde hallemos el menor el mínimo. De esta manera concluimos que el valor máximo absoluto es 9 y lo obtenemos en dos puntos: P_1 y P_2, y el valor mínimo absoluto es 1 y lo obtenemos también en dos puntos: P_5 y P_6.
Además vemos que este resultado es coherente pensando en la gráfica del elipsoide determinado por la ecuación $g = 0$.
En la sección siguiente veremos dos interpretaciones del parámetro multiplicador de Lagrange.

6. Interpretación del parámetro λ.

6.1. Maximización del ingreso.

Supongamos que cierta actividad industrial genera un ingreso que depende de las horas-hombre trabajadas y de la cantidad de acero utilizado[2]. Estudiaremos el problema de maximizar el ingreso sujeto a una restricción presupuestaria para mostrar un significado del multiplicador de Lagrange.
Simbolicemos con $I(h, a)$ al ingreso en función de las horas-hombre, (h), y del acero en toneladas, (a) y con $B(h, a)$ al presupuesto en pesos. El problema consiste en maximizar el ingreso $I(h, a)$ sujeto a la restricción $B(h, a) = b$ donde b es la cantidad de dinero de la que se dispone.
Construyamos la función lagrangiana:

$$L(h, a, \lambda) = I(h, a) - \lambda(B(h, a) - b)$$

Supongamos que el problema tiene solución. Como hemos visto el óptimo condicionado se obtiene resolviendo el sistema

$$\overline{\nabla} L = \overline{0}$$

Si notamos a la solución del sistema (h^*, a^*, λ^*) tendremos que el ingreso máximo $M^* = I(h^*, a^*)$. Es obvio que si cambiamos el valor del presupuesto, b, tendremos otro valor para el ingreso máximo: el ingreso máximo depende de b. Así podemos escribir,

$$M^*(b) = I(h^*(b), a^*(b))$$

Es natural entonces preguntarnos: ¿Cómo cambian h^* y a^* y por lo tanto M^* cuando cambia b? Demostraremos que

$$\lambda^* = \frac{dM^*}{db}(1)$$

A partir de esta última igualdad podremos justificar proposiciones como, por ejemplo, si $\lambda^* > 1$ entonces M^* crece. O, si el presupuesto b es de 10000 y si $\lambda^* = 2{,}3$ entonces

[2] La siguiente interpretación corresponde a una síntesis de videos de la Khan Academy cuyos links se mencionan en la sección de Recursos Tic.

aumentar el presupuesto a 10001 implicará un aumento en el ingreso en $2,3$ pesos.
Demostremos la fórmula (1). Definamos la función

$$g(b) = L(h^*(b), a^*(b), \lambda^*(b)) = I(h^*(b), a^*(b)) - \lambda^*(b)(B(h^*(b), a^*(b)) - b)$$

Derivemos la función g con respecto a b:

$$\frac{dg}{db} = \frac{\partial I}{\partial h^*}\frac{dh^*}{db} + \frac{\partial I}{\partial a^*}\frac{da^*}{db} - \frac{d\lambda^*}{db}(B(h^*(b), a^*(b)) - b) - \lambda^*(b)(\frac{\partial B}{\partial h^*}\frac{dh^*}{db} + \frac{\partial B}{\partial a^*}\frac{da^*}{db} - 1)$$

Pero $\frac{\partial I}{\partial h^*}(h^*, a^*) = \frac{\partial I}{\partial a^*}(h^*, a^*) = 0$, $\frac{\partial B}{\partial h^*}(h^*, a^*) = \frac{\partial B}{\partial a^*}(h^*, a^*) = 0$,$B(h^*(b), a^*(b)) - b) = 0$, por lo que:

$$\frac{dg}{db}(b) = \lambda^*(b)$$

Por otro lado (h^*, a^*, λ^*) es solución de $\overline{\nabla} L = \overline{0}$ por lo que resulta $L(h^*, a^*, \lambda^*) = M^* - \lambda^* \cdot 0 = M^*$. Así, $M^*(b) = g(b)$
Entonces,

$$\frac{dM^*}{db} = \frac{dg}{db} = \lambda^*$$

A continuación presentamos otro ejemplo extraido de [8].

6.2. Maximización de la producción. Isocuantas.

Supongamos que la producción de un cierto producto de una compañía manufacturera es una cantidad Q, donde Q es función de K, el capital invertido en equipos y L, la mano de obra utilizada. Si el precio de la mano de obra es p, el precio de los equipos es q y la compañía no puede gastar más de B pesos, cómo podemos hallar las cantidades de capital y trabajo que maximizan la producción Q?

Es de esperar que si aumenta la inversión o la mano de obra, aumente también la producción; esto es,

$$\frac{\partial Q}{\partial K} \geq 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial Q}{\partial L} \geq 0.$$

También es de esperar que a medida que se añada mano de obra a una inversión en equipos dada, la cantidad de producción adicional obtenida sea cada vez menor; esto es, $\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} < 0$. Análogamente $\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} < 0$. Con estas hipótesis sobre Q, es razonable esperar que las curvas de nivel de la producción (llamadas ***isocuantas***) $Q(K, L) = c$ tengan un aspecto parecido al de las curvas bosquejadas en la figura con $c_1 < c_2 < c_3$.

Podemos interpretar la convexidad de las isocuantas como sigue: cuando uno se mueve hacia la derecha a lo largo de una cierta isocuanta, se necesita cada vez más inversión para sustituir una unidad de mano de obra y seguir produciendo lo mismo. La restricción sobre el presupuesto significa que tenemos que permanecer dentro del triángulo limitado por los ejes y la recta $pL + qK = B$. Geométricamente, está claro que produciremos lo máximo posible si gastamos nuestro dinero de tal forma que seleccionemos la isocuanta que justo toca, pero no cruza, la línea de presupuesto. Como el punto de máximo está en la frontera de nuestro dominio, aplicamos el método de los multiplicadores de Lagrange para hallar el máximo. Para maximizar Q sujeta a la restricción $pL + qK = B$ buscamos los puntos críticos de la función auxiliar

$$H(K, L, \lambda) = Q(K, L) - \lambda(pL + qK - B)$$

Para hallar los puntos críticos planteamos $\overline{\nabla}H = \overline{0}$ que nos conduce a la resolución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial K} = \lambda q \\ \frac{\partial Q}{\partial L} = \lambda p \\ pL + qK = B. \end{cases}$$

En este ejemplo λ representa algo interesante. Sean $k = qK$ y $l = pL$, de forma que k es el valor en pesos de la inversión y l es el valor en pesos de la mano de obra empleada. Entonces las dos primeras ecuaciones pasan a ser

$$\frac{\partial Q}{\partial k} = \frac{1}{q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial K} = \lambda = \frac{1}{p} \cdot \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{\partial Q}{\partial l}$$

Por consiguiente en el punto de producción óptima, el cambio marginal en la producción por cada peso de inversión adicional en equipos es igual al cambio marginal de producción por cada peso de mano de obra adicional, y λ es este valor común. En el punto óptimo, el intercambio de un peso de inversión en equipos por un peso de mano de obra no cambia la producción. Lejos del punto óptimo las producciones marginales son diferentes, y uno de los dos cambios se traducirá en una mayor producción.
Un ejemplo para función de producción es la **función de producción de Cobb-Douglas** que se utiliza en ocasiones como un modelo macroeconómico simple. Ésta viene dada por $Q(K, L) = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}$ donde A y α son constantes positivas y $0 < \alpha < 1$. En este caso Q es el producto agregado de la economía para una cantidad dada de capital y mano de obra.

Para finalizar dejamos aquí algunos de los numerosísimos recursos que podemos encontrar en internet. Pensamos que pueden ayudar al mejor aprendizaje del tema.

7. Recursos Tic

1. Animación que permite visualizar simultáneamente superficie, curvas de nivel y gradientes: `https://www.geogebra.org/m/grvkdznH`

2. Animación que permite visualizar simultáneamente superficie, curvas de nivel y gradientes: `https://www.geogebra.org/m/DrjH24TK`

3. Videos de la Khan Academy con un ejemplo y demostración de una interpretación del multiplicador de Lagrange — Khan Academy en Español

    a) https://es.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/applications-of-multivariable-derivatives/lagrange-multipliers-and-constrained-optimization/v/lagrange-multiplier-example-part-1

    b) https://es.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/applications-of-multivariable-derivatives/lagrange-multipliers-and-constrained-optimization/v/lagrange-multiplier-example-part-2

    c) https://es.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/applications-of-multivariable-derivatives/lagrange-multipliers-and-constrained-optimization/v/the-lagrangian

    d) https://es.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/applications-of-multivariable-derivatives/lagrange-multipliers-and-constrained-optimization/v/proof-for-the-meaning-of-lagrange-multipliers

Referencias

[1] Bussotti, P., *On the Genesis of the Lagrange Multipliers*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol 117, Nro. 3, pgs. 453-459, 2003.

[2] Apostol, T., *Calculus*, Volumen II, Segunda Edición, Editorial Reverté, 1967.

[3] Pita Ruiz, C., *Cálculo Vectorial*, Primera Edición, Editorial Pearson Educación, 1995.

[4] Oviedo,J.M., *Interpretación económica de los multiplicadores de Lagrange*, Documento de trabajo N° 4 del Dpto. de Estadística y Matemática de la Facultad de Cs. Económicas, Universidad Nacional de Córdoba.
https://drive.google.com/open?id=0BzqaQPgFyWoQTHlQemJiVE9QcDg

[5] Marsden, J., Tromba, A., *Cálculo Vectorial*, Tercera Edición, Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, 1991.

[6] Stewart, J., *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas.*, Sexta Edición, Editorial Cengage Learning, 2009.

[7] Apostol, A., *Análisis Matemático*, Segunda Edición, Editorial Reverté, 1996.

[8] Marsden J., Tromba A. ,*Cálculo Vectorial*, Pearson Addison Wesley, 5ta edición, 2004.