



MAYO 1936

• Sumario •

Las Ecuaciones de Clapeyron - Bertot y su resolución por el Método de Iteración. (Continuación)

Prof. Ing. Juan C. Van Wyk

Análisis del taquímetro Autoreductor Bosshardt-Zeiss. (Continuación)

Ing. Raúl V. Lucchini

El factor de potencia en un circuito de corriente alternada.

Ing. Juan G. Schildknecht

Problema del Cuadrilátero. (Continuación)

Ing. Higinio Greppi

Trabajos de la Escuela de Arquitectura.

Estudio sintético de la Evolución de la Arquitectura a través de las Epocas. (Continuación)

Prof. Arq. Ermete De Lorenzi

Sombra propia y arrojada de un cono invertido hueco.

Arq. Carlos Schmidt

Nuevo método para el estudio acústico de las salas de audición. (Traducción)

Ennio Manfredonia

— SOCIOS PROTECTORES DE LA REVISTA —

• CEFCEM •

Agr. ACHILLI Manlio
Ing. AGUERRIBERRY Enrique
Agr. ALBANESE Julio
Sr. ALBANESE Santiago
Prof. Ing. ALBANO Horacio
Ing. ALBERDI Juan
Agr. ANTRUEJO Isidro
Prof. Ing. ARDIGO Dante
Ing. AUDET Arturo

Ing. BAIOCCHI Pablo
Prof. Ing. BARALIS Lorenzo
Ing. BERNARD Lucio X.
Arq. BESSONE Emilio
Arq. BIANCHI Héctor
Sr. BILBAO Ricardo J.
Prof. Ing. BOLLERO Santiago
Agr. BORASIO Teresio
Prof. Ing. Dr. BORDABEHERE Ismael C.
Ing. BOSSERT Carlos
Ing. BOURGEON Mario
Prof. Ing. BRINDISI Félix

Ing. CANTERO Fermin
Prof. Dr. CASTELLANOS Alfredo
Ing. CHIAPPARA Héctor
Prof. Ing. CHICHONI Roberto
Prof. Ing. CHICHIZZOLA Eduardo
Prof. Dr. COLOMBO BERRA Juan J.
Ing. CORNERO Guillermo
Ing. COSTANTINO Francisco
Prof. Arq. DELLAROLLE Víctor
Prof. Arq. DE LORENZI Ermete
Arq. DIAZ ANDRIEU Luis
Prof. Agr. DIEULEFAIT Carlos

Agr. ELLERT Walter
Prof. Agr. ERLIJMAN Marcos

Prof. Ing. FARENGO Adolfo
Sr. FERRARESE Enrique
Prof. Ing. FRAQUELLI Carlos

Prof. Ing. GACHE Eulogio
Prof. Dr. GAMBETTA Pedro H.
Ing. GIANNONE José
Arq. GIOVANNONE Lorenzo
Prof. Arq. GIORGETTI Angel
Ing. GREPPI Higinio
Prof. Arq. GUIDO Angel
Ing. HUTMACHER Celestian

Prof. Ing. INFANTE Alejo
Ing. INFANTE Juan
Prof. Ing. ISELLA Carlos

Prof. Ing. LACAL Emilio
Prof. Ing. LAMARQUE Eduardo
Prof. Arq. LAMOURET León

Prof. Ing. LEIVA Otoniel
Agr. LOCATELLI Delfo E.
Prof. Ing. LOUREIRO Jorge A.
Prof. Arq. LO VOI Guido
Ing. LUCCHINI Raúl V.
Ing. LUNA Alejandro
Prof. Ing. LUPPI Carlos A.

Prof. Arq. MAISONNAVE Emilio
Agr. MALDONADO Samuel
Prof. Ing. MARTINO Cándido
Prof. Ing. MAZZONI Eduardo
Ing. MEDICI Daniel
Prof. Arq. MICHELETTI José
Prof. Ing. MICHELETTI Luciano
Prof. Ing. MIGLIERINI León
Agr. MILIA Julián H.

Agr. NOREMBERG Arón
Prof. Arq. NEWTON Juan

Prof. OCAMPO Manuel
Prof. Agr. OLGUIN Juan
Ing. ORDOÑEZ Santiago
Ing. OSTROVSKY Jaime
Prof. Ing. PARENTI Domingo
Ing. PARFAIT Rodolfo
Ing. PERFUMO Mario
Decano Prof. Ing. PLA Cortés
Prof. Ing. PINASCO Emidgio
Agr. PROVERA Hugo
Ing. QUAGLIA Edmundo

Prof. Ing. RICUCCI Vicente
Arq. RIMBAU Jaime
Prof. Ing. ROSENTHAL Erico
Prof. Ing. RUBINSTEIN Simón

Prof. Ing. SALLOVITZ Manuel
Ing. SANCHO José
Prof. Arq. SANMARTINO José
Ing. SCHILDKNECHT Juan
Prof. Arq. SCHMIDT Carlos
Sr. SOLHAUNE Oscar W.
Ing. SPIRANDELLI Juan

Prof. Sr. TAVERNIER Julio
Arq. TORRES Antonio
Arq. TRANGONI Domingo S.
Arq. VANOLI Angel A.

Prof. Ing. VAN WIK Juan C.
Prof. Dr. VASALLI Miguel
Prof. Ing. VASALLO Manuel
Ing. VERGA Luis C.

Sr. WEILL Marcelo
Prof. Ing. ZAPATA Raúl

Las ecuaciones de Clapeyron - Bertot y su resolución por el método de iteración

(CONTINUACION DEL N° 7)

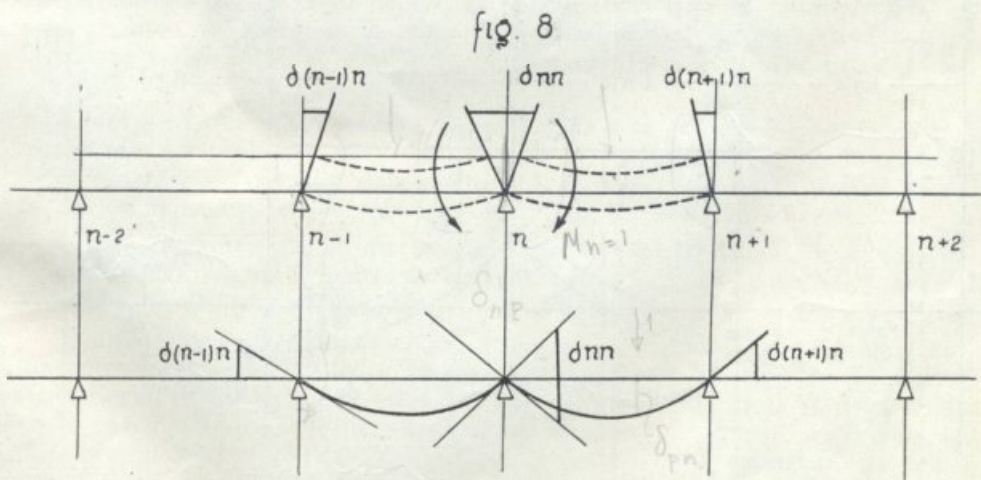
POR EL PROF. ING. CIVIL J. C. VAN WYK

LAS ECUACIONES DE LOS CINCO MOMENTOS

Las ecuaciones de los tres momentos planteadas en lo que antecede, para resolver el problema de la viga continua, contemplan el caso de la viga sobre apoyos rígidos o también de un corrimiento vertical de éstos en un trecho prefijado, y que no puede ser consecuencia de la carga, es decir, no puede ser un corrimiento elástico, función de la presión en el apoyo.

El problema de la viga continua adquiere su faz más general cuando los apoyos se comportan en forma análoga a los resortes, experimentan corrimientos verticales que son función de su sollicitación. En tales condiciones se hallan vigas continuas apoyadas en columnas largas o en vigas transversales de relativa flexibilidad como es el caso de los largueros de un puente sostenido por las viguetas; también el riel de ferrocarril apoyado sobre los durmientes, éstos al paso de la carga experimentan hundimientos de carácter elástico, además el caso de la viga de fundación para repartición de la carga; aquí los apoyos elásticos se hallan infinitamente próximos, y la reacción del terreno es en cierto grado función de la deformación elástica de la viga.

En la viga continua, sobre apoyos rígidos el momento actuante en determinada sección de apoyo repercute solamente en la sección de los dos apoyos adyacentes; para poner ésto en evidencia nos imaginamos la viga continua resuelta en su sistema fundamental, la sucesión de vigas simples (fig. 8)



y en la sección del apoyo n hacemos actuar un doble par virtual $M_n = 1$, producirá ésto rotaciones relativas en las dos caras de cada una de las sec-

ciones $n-1$, n , $n+1$ y las indicamos en la notación convencional con $\delta_{(n-1)n}$; δ_{nn} ; $\delta_{(n+1)n}$; el corrimiento del punto p de la aplicación de una carga se titula δ_{pn} , pero por el teorema de Maxwell $\delta_{pn} = \delta_{np}$ significando ésto la rotación relativa de las dos caras de la sección n por causa $P=1$, en la posición p ; por la misma razón

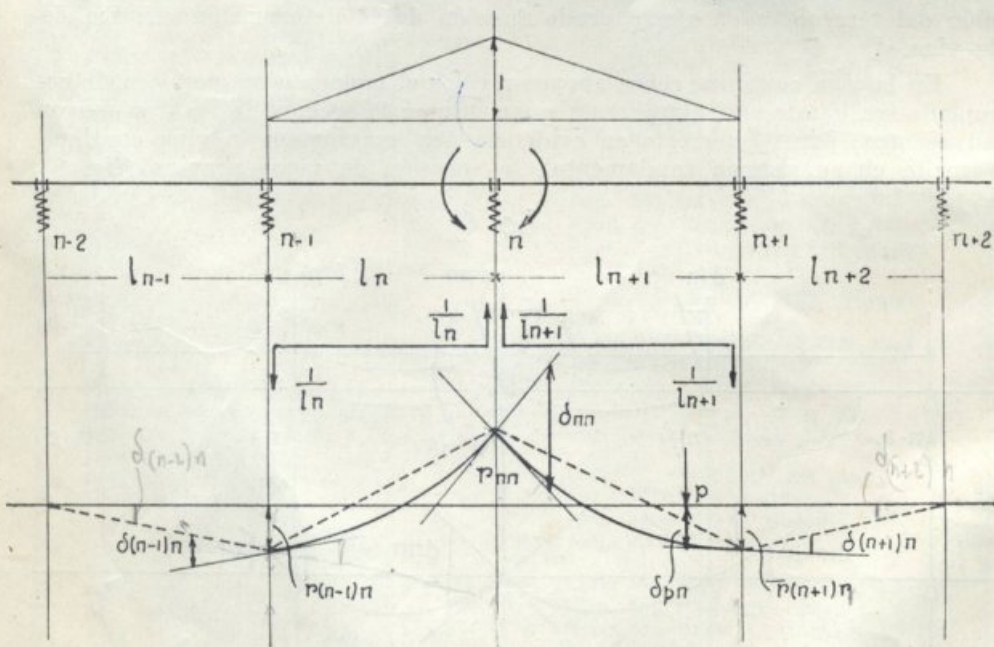
$$\delta_{(n-1)n} = \delta_{n(n-1)} \text{ y } \delta_{(n+1)n} = \delta_{n(n+1)}$$

Entonces actuando en vez de causas unitarias los momentos M_{n-1} ; M_n ; M_{n+1} ; y la carga P , la rotación relativa en n será la suma $M_{n-1} \delta_{n(n-1)} + M_n \delta_{nn} + M_{n+1} \delta_{n(n+1)} + P \delta_{np} = 0$ la condición de continuidad exige que la rotación en n sea nula, con ésto se habrá formulado la ecuación entre los tres momentos consecutivos. Al mismo resultado se llega si se aplica el teorema del trabajo virtual.

Imaginemos ahora que los apoyos sean elásticos, el doble par $M_n = 1$ actuando en las vigas l_n y l_{n+1} originará en los apoyos presiones dadas por $\pm \frac{1}{l_n}$ y $\pm \frac{1}{l_{n+1}}$; y conocida la condición elástica de estos apoyos

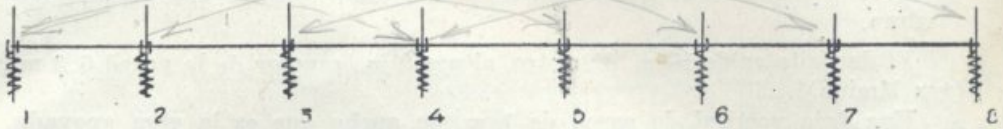
puede hallarse su corrimiento $r_{(n-1)n}$; r_{nn} ; $r_{(n+1)n}$. (fig. 9) el eje de las vigas del sistema fundamental tomaría la posición de línea quebrada como indicado con línea de puntos, además debido a su flexibilidad debe agregarse todavía las ordenadas de la elástica correspondiente al estado de carga, que es el par M_n . Titularemos las rotaciones resultantes como está indicado en la (fig. 9).

fig. 9



$\delta_{(n-2)n}$; $\delta_{(n-1)n}$; δ_{nn} ; $\delta_{[n+1]n}$; $\delta_{[n+2]n}$
y en seguida escribimos la condición de continuidad; esta implica que la rotación relativa de las secciones sobre el apoyo n debe ser nula para la

fig. 10



acción de $M_{[n-2]}$; $M_{[n-1]}$; M_n ; $M_{[n+1]}$; $M_{[n+2]}$ y la carga exterior.
 $M_{[n-2]} \delta_{n[n-2]} + M_{[n-1]} \delta_{n[n-1]} + M_n \delta_{nn} + M_{[n+1]} \delta_{n[n+1]} + M_{[n+2]} \delta_{n[n+2]} + P \delta_{np} = 0$

Es esta la ecuación entre los cinco momentos consecutivos de apoyo. ✓

Una ecuación análoga puede plantearse para cada sección de apoyo susceptible de transmitir un momento; así en el caso de la viga de la fig. 10, en los apoyos extremos no habrá momento alguno porque se hallan libres de girar, y la ecuación puede plantearse con respecto al apoyo 2 los momentos M_{n-2} ; y M_{n-1} aquí M_0 M_1 son nulos. A continuación se plantean las ecuaciones con respecto a los apoyos 3, 4, 5, 6, 7, en total y ecuaciones entre las 7 incógnitas.

Si algún apoyo extremo se halla impedido de girar sea total o parcialmente, también habrá que plantear la ecuación referente a estos apoyos y expresar que la rotación debe ser nula en caso de empotramiento perfecto, o una rotación parcial de acuerdo a la condición del empotramiento elástico.

Como consecuencia de la formación de los coeficientes de las incógnitas siempre predomina el coeficiente δ_{nn} y en el sistema de ecuaciones se obtendrán los coeficientes predominantes en diagonal, que es justamente la condición ideal para que en su resolución el sistema sea poco sensible a la propagación de errores o imprecisión y posibilita la fácil resolución por iteración.

En problemas de la viga continua apoyada elásticamente en toda su extensión puede llegarse a una resolución de suficiente aproximación si se divide la viga en campos de cierta extensión y se imagina reunido todo el medio elástico de sustentación en los puntos divisorios de estos campos, en estos puntos se secciona la viga para producir el sistema fundamental isostático y del modo ya explicado pueden plantearse las ecuaciones de los cinco momentos.

Para confrontar la novedosa aplicación de este criterio, he encarado por este medio un problema ya resuelto en la forma clásica por la integración de la ecuación diferencial correspondiente, problema que se refiere al cálculo de los momentos en la pared cilíndrica de un depósito de agua.

Las fajas verticales en que puede pensarse resuelta la pared, apoyan sobre el sistema anular y que constituye un apoyo elástico; además el sistema vertical se halla empotrado en el fondo del depósito.

En la obra "Eisenbetonbau" editada por la sociedad de ingenieros alemanes en la especialidad del hormigón armado, Tomo II, pág. 77, el Dr. Ing. Kurt Beyer calcula los momentos que por la presión del agua se desarrollan en la pared cilíndrica de un depósito, su espesor uniforme y empotrado en el fondo; el 2º ejemplo trata del mismo problema pero el espesor de la pared varía según ley lineal, y ya en este caso simple se ofrecen dificultades para la integración, por lo que recurre al cálculo por transformación de la ecuación diferencial en un sistema de ecuaciones a las diferencias. Ahora bien como se observará al seguir el desarrollo en la forma como en el presente trabajo

se aplica, el método admite cualquier ley de variación de los momentos de inercia o también del medio elástico de apoyo, resulta de una generalidad absoluta.

El depósito es de ¹⁸10 m. diámetro, altura 9 m., espesor de la pared 0.3 m. (ver lámina).

Una faja vertical de pared de 1 m. de ancho que es la viga apoyada sobre el sistema anular, se resuelve en un sistema fundamental isostático, formado de 9 vigas simples apoyadas en los aros 0, 1, 2, 3, ..., 9 que resumen toda la resistencia correspondiente al sistema anular que se extiende de mitad a mitad de cada zona. Igualmente la presión del agua se resume para cada zona en estos mismos puntos.

Para los distintos aros así concentrados en las líneas de apoyo calculamos su deformación en sentido radial provocada por una carga radial de 1T por m., la variación del radio es:

$$\Delta r = \frac{\pi r^2}{E t} \quad \text{para los aros 1 a 8 resulta:}$$

$$\Delta r = \frac{9^2}{2,1 \times 10^6 \times 0,3 \times 1} = 1,285 \times \frac{1}{10^4}$$

El aro 0 es la sección de empotramiento, el fondo del depósito reduce el desplazamiento Δr a una magnitud prácticamente nula.

El aro 9 tiene sección de 0,5 m. de ancho y el Δr correspondiente será el doble: $2,57 \times \frac{1}{10^4}$.

Aplicamos sucesivamente en las secciones 0, 1, 2, ..., 8 dobles pares virtuales 1TM, siendo la longitud de los trozos de viga 1 m. la presión en los aros es de 1T para cada extremo de viga. Para mayor comodidad se trazan los esquemas de estas deformaciones virtuales. Para el par en 0, el

apoyo 0 es rígido y el apoyo 1 se hunde en $\Delta r = 1,28 \times \frac{1}{10^4}$, para el trozo

de viga 0 — 1 debe agregarse todavía la elástica de deformación, pero como las cargas solamente gravitan en los apoyos nos interesan solamente las rotaciones en los extremos.

La deformación angular de la viga es:

$$\frac{1}{3} \quad \frac{1}{EI} \quad \text{y} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{EI}$$

respectivamente en el extremo de aplicación del par y en el extremo opuesto de la viga.

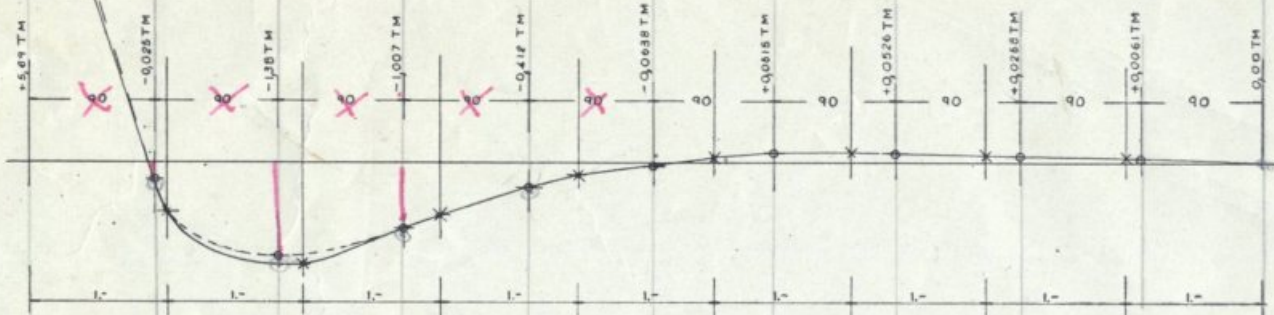
Como se producen rotaciones de distinto sentido convenimos en indicar con signo positivo cuando disminuyen el ángulo de 180° por debajo de la viga, y al par que tiende a abrir en V las caras del corte también indicaremos con signo positivo.

En cuanto al momento de inercia debe observarse todavía que las distintas fajas verticales en conjunto forman la envoltura cilíndrica, la simul-

REPRESENTACION DE LOS MOMENTOS - ESCALA 0.5 TM/cm

Linea de puntos por integración de la ecuación diferencial Dr Beyer Statik im Eisenbetonbau, pag. 77

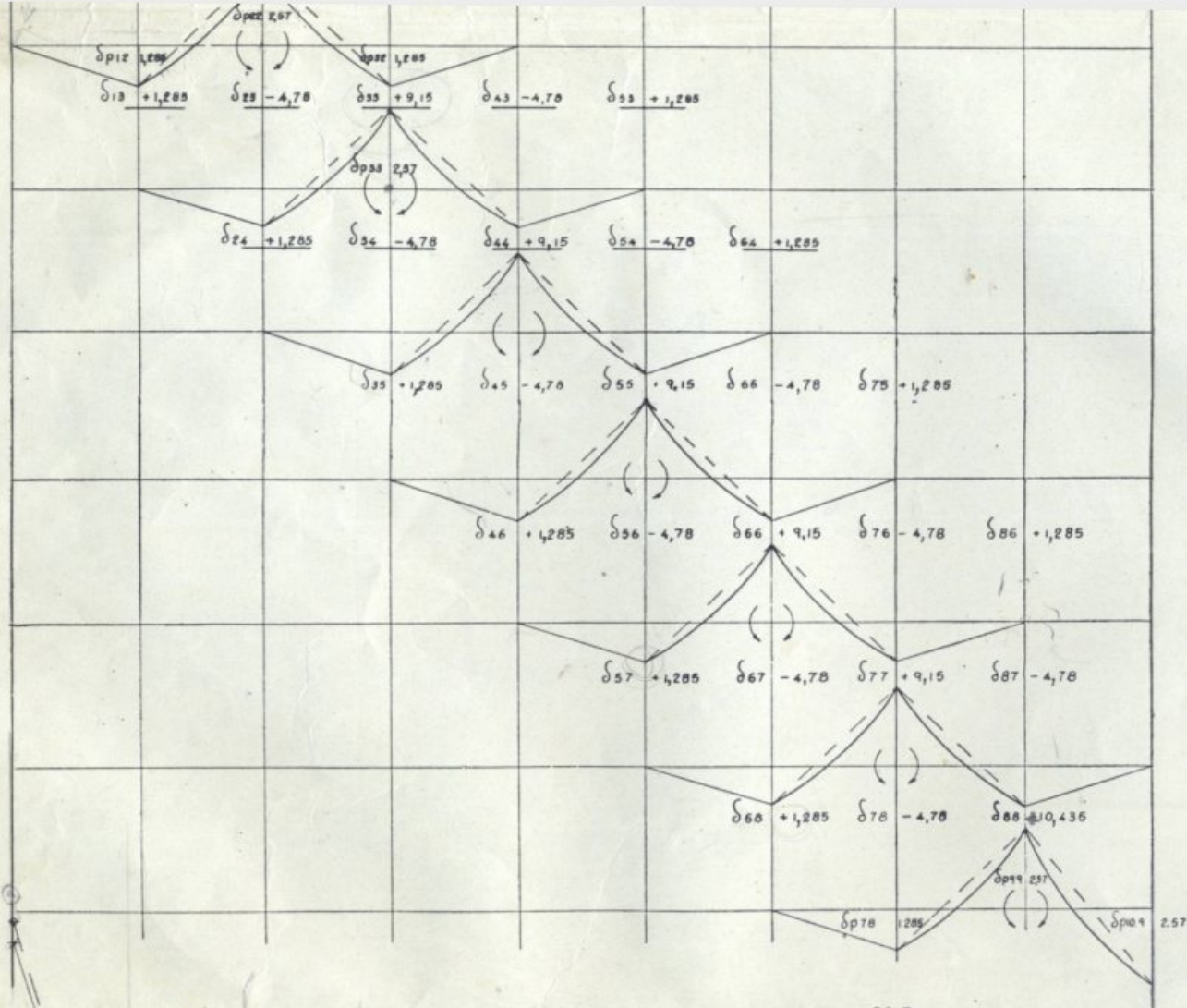
Linea llena por aplicación de las ecuaciones de los 5 momentos 6ª aproximación



RESOLUCION DE LAS ECUACIONES

M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8		1ª aproxim.	2ª aproxim.	3ª aproxim.	4ª aproxim.	5ª aproxim.	6ª aproxim.	
+2,005	-2,21	+1,285							+10,28	M_0	+5,14 TM	+5,58 TM	+5,53 TM	+5,44 TM	+5,36 TM	+5,31 TM
-2,21	+7,865	-4,78	+1,285						-11,56	M_1	-0,0305	-0,293	-4,96	-0,635	-0,72	-0,75
+1,285	-4,78	+9,15	-4,78	+1,285					0	M_2	-0,74	-1,11	-1,33	-1,44	-1,5	-1,52
	+1,285	-4,78	+9,15	-4,78	+1,285				0	M_3	-0,344	-0,58	-0,705	-0,76	-0,79	-0,80
		+1,285	-4,78	+9,15	-4,78	+1,285			0	M_4	-0,0765	-0,145	-0,181	-0,191	-0,195	-0,194
			+1,285	-4,78	+9,15	-4,78	+1,285		0	M_5	+0,0083	+0,013	+0,0193	+0,027	+0,033	+0,036
				+1,285	-4,78	+9,15	-4,78	+1,285	0	M_6	+0,015	+0,034	+0,0438	+0,052	+0,057	+0,06
					+1,285	-4,78	+9,15	-4,78	0	M_7	+0,0067	+0,0168	+0,022	+0,026	+0,028	+0,029
						+1,285	-4,78	+10,435	0	M_8	+0,0164	+0,035	+0,0047	+0,0057	+0,0058	+0,006

9
8
7
6
5
4
3
2
1
0



REPRESENTACION DE LOS MOMENTOS - ESCALA 0.5 Tm/cm

Línea de puntos por integración de la ecuación diferencial Dr Beyer Statik im Eisenbetonbau, pag. 77

Línea llena por aplicación de las ecuaciones de los 5 momentos 5ª aproximación

tánea deflexión de estas vigas verticales por razón de tensiones normales y la correlativa contracción o extensión lateral medida por el coeficiente de Poisson, tiende a variar el desarrollo del arco exterior e interior, es decir tienden a producir un giro de los planos radiales de separación entre las vigas; esto resulta impedido por la forma cilíndrica y se traduce en un cierto aumento de la rigidez de la viga o sea de su momento de inercia, y se demuestra que el factor $(1 + (1/m)^2)$ para 1 tiene en cuenta esta condición. Tomaremos para hormigón $m = 6$ entonces $1 + (1/m)^2 = 1.0277$. Con esto la deformación angular en los apoyos calculamos en:

$$\frac{1}{3} \frac{1}{2.1 \times 10^6} \frac{12}{1 \times 0.3^3} \cdot \frac{1}{1.0277} = 0.72 \times \frac{1}{10^4}$$

y en el apoyo opuesto será la mitad: $0.36 \times \frac{1}{10^4}$

La rotación virtual del apoyo 0 por el par $M_0 = 1$ en:

$$\delta_{00} = \frac{1.285}{1 \times 10^4} + 0.72 \times \frac{1}{10^4} = 2.005 \times \frac{1}{10^4} \text{ con signo } +.$$

Idem por la misma causa en el apoyo 1

$$\delta_{10} = - \frac{1.285}{1 \times 10^4} - \frac{1.285}{1 \times 10^4} + \frac{0.36}{10^4} = - 2.21 \times \frac{1}{10^4}$$

Idem por la misma causa en el apoyo 2

$$\delta_{20} = + \frac{1.285}{1 \times 10^4}$$

Siguiendo los 9 esquemas de la deformación virtual del sistema fundamental por las causas $M_0 = 1$, $M_1 = 1$ etc., sucesivamente se anotan encima de cada apoyo y subrayado las rotaciones correspondientes, y con los datos así anotados resulta fácil de formular el sistema de las ecuaciones de los cinco momentos como efectuado en la planilla de la lámina, el miembro absoluto de cada ecuación resulta del producto de las cargas por el recorrido de su punto de aplicación; por ejemplo en la 1ª ecuación es: $P \times \delta_{p10} = 8 \times 1.285 = + 10.28$; en la 2ª ecuación $- 8 \times 2.57 + 7 \times 1.285 = 11.56$, etc.

Se observa claramente el predominio de los coeficientes en diagonal y se resuelve por iteración. Obitiéndose la 1ª aproximación con suponer nulos los coef. de M_1 y M_2 en la 1ª ecuación; en la 2ª se suponen nulos los coeficientes de M_2 y M_3 , substituyendo para M_0 el valor aproximado ya deducido; así procediendo después, a la 6ª aproximación se encuentra una convergencia aceptable en las resoluciones y se han anotado estos resultados en el gráfico y trazado la curva de los momentos: En el mismo gráfico se ha superpuesto el resultado calculado por el Dr. Ing. Beyer; la coincidencia de los resultados es satisfactoria.

También por el criterio expuesto puede resolverse el caso de depósitos de forma distinta a la circular; debe entonces calcularse en vez del corrimiento Δr para presión interior de 1T, la deformación del marco horizontal correspondiente a la forma del depósito.

Análisis del Taquímetro Auto Reductor Bosshardt - Zeiss

(Continuación)

POR EL ING. RAUL V. LUCCHINI

c) Errores generales

El análisis se hará en la forma que sigue:

- I) Error medio angular
- II) Error medio en distancia
- III) Error de fijación de un punto
- IV) Error en la determinación de diferencias de nivel.

I) Para determinarlo se procedió a estacionarse en un punto visando dos torres lejanas. Se hicieron 18 observaciones angulares, por reiteración simple, girando el círculo azimutal 10° en cada observación completa (método de Bessel). El cuadro de valores que acompaño nos da los resultados obtenidos. Los minutos y segundos están inscriptos siguiendo el método que indica las instrucciones Zeiss en divisiones y décimos de divisiones leídas, valiendo cada división 2 minutos y cada décimo 12 segundos. De esas observaciones se deduce que el error medio por medición angular cruzada es de $\pm 4''{,}9$ y por dirección observada es de $\pm 9''{,}8$.

Los resultados obtenidos lo han sido en condiciones que no responden a la realidad, pues, no se manifiesta en ellos más que los errores sistemáticos instrumentales y los errores de apuntamiento y de lectura, no interviniendo los errores de estación y de señales, que hicimos notar anteriormente. Luego esos resultados indicarían únicamente el rendimiento máximo del instrumento cuando la influencia del estacionamiento y de la señal no se haga notar (visaciones a gran distancia).

Para salvar esta dificultad se compilaron los cierres angulares de los polígonos del relevamiento citado, los que evidenciarían la capacidad del instrumento en el trabajo real del mismo. Debemos añadir que los lados poligonales tienen una longitud media de 120 a 130 m., desde un máximo de 195 m. a un mínimo de 70 m.

Ese cuadro evidencia la existencia de un error sistemático angular apreciable y que no hemos tenido en cuenta en el cálculo del error medio.

Este ha dado un valor de $6''{,}3$ lo que importa un valor de $12''{,}6$ por dirección. El error por dirección ha resultado un poco superior a la apreciación de lectura (que es $12''$) lo que es lógico dado que es el error más preponderante. Podemos estimar el error de dirección en $13''$.

II) Varios son los factores que intervienen para modificar o indeterminar la lectura de la distancia, pero entre ellos pueden diferenciarse el que es causa directa de la agudeza visual del observador y función del aumento del antejo, que hace variar la apreciación de la distancia en el tambor centimetrado dentro de un cierto entorno, y que denominaremos error de coincidencia.

Así pues en el análisis que haremos se establecerá en primer término el error en distancia en forma global, y en segundo término el error de coincidencia.

Por otra parte para poder establecer la posibilidad de este método de relevamiento en trabajos nocturnos, en zonas en las que el trabajo diurno es poco factible por diversas causas, se ejecutará el mismo análisis con observaciones practicadas con ese fin.

Error medio angular

Puntos visados	Observaciones				Angulos	Error v	vv
	C.I.		C.D.				
	Nonius I	Nonius II	Nonius I	Nonius II			
Ch. Facultad	0900,0	180900,3	180900,3	0900,3			
Ig. Hospicio	44 02 7	224 03 0	224 02 7	44 03 0	44905'24"	- 3	9
Ch. Facultad	10 00 8	190 01 1	190 00 7	10 01 1			
Ig. Hospicio	54 03 5	234 03 8	234 03 4	54 03 8	44905'24"	- 3	9
Ig. Hospicio	64 08 0	244 08 3	244 07 9	64 08 3			
Ch. Facultad	20 05 2	200 05 6	200 05 2	20 05 6	44905'27"	0	0
Ig. Hospicio	74 03 0	254 03 3	254 03 0	74 03 4			
Ch. Facultad	30 00 3	210 00 7	210 00 2	30 00 7	44905'24"	- 3	9
Ch. Facultad	40 01 1	220 01 4	220 01 0	40 01 4			
Ig. Hospicio	84 03 8	264 04 2	264 03 7	84 04 1	44905'27"	0	0
Ch. Facultad	50 00 7	230 01 0	230 00 7	50 01 0			
Ig. Hospicio	94 03 4	274 03 7	274 03 3	94 03 7	44905'21"	- 6	36
Ig. Hospicio	104 03 7	284 04 0	284 03 7	104 04 0			
Ch. Facultad	60 01 0	240 01 3	240 01 0	60 01 3	44905'24"	- 3	9
Ig. Hospicio	114 04 5	294 04 9	294 04 6	114 04 9			
Ch. Facultad	70 01 8	250 02 2	250 01 8	70 02 1	44905'30"	+ 3	9
Ch. Facultad	80 02 2	260 02 5	260 02 2	80 02 6			
Ig. Hospicio	124 05 0	304 05 3	304 04 9	124 05 2	44905'27"	0	0
Ch. Facultad	90 03 5	270 03 8	270 03 5	90 03 8			
Ig. Hospicio	134 06 3	314 06 7	314 06 3	134 06 6	44905'39"	+ 12	144
Ig. Hospicio	144 04 1	324 04 5	324 04 1	144 04 4			
Ch. Facultad	100 01 4	280 01 7	280 01 4	100 01 8	44905'24"	- 3	9
Ig. Hospicio	154 05 2	334 05 6	334 05 2	154 05 5			
Ch. Facultad	110 02 4	290 02 7	290 02 4	110 02 7	44905'39"	+ 12	144
Ch. Facultad	120 02 0	300 02 3	300 02 0	120 02 3			
Ig. Hospicio	164 04 7	344 05 1	344 04 7	164 05 0	44905'27"	0	0
Ch. Facultad	130 02 6	310 02 9	310 02 6	130 02 9			
Ig. Hospicio	174 05 3	354 05 6	354 05 3	174 05 6	44905'24"	- 3	9
Ig. Hospicio	184 04 4	4 04 8	4 04 4	184 04 7			
Ch. Facultad	140 01 7	320 02 1	320 01 7	140 02 0	44905'24"	- 3	9
Ig. Hospicio	194 02 7	14 03 0	14 02 7	194 03 0			
Ch. Facultad	150 00 0	330 00 3	330 00 0	150 00 2	44905'27"	0	0
Ch. Facultad	160 00 9	340 01 2	340 00 9	160 01 1			
Ig. Hospicio	204 03 6	24 03 3	24 03 7	204 03 9	44905'30"	+ 3	9
Ch. Facultad	170 01 4	350 01 7	350 01 5	170 01 7			
Ig. Hospicio	214 04 1	34 04 4	34 04 2	214 04 4	44905'24"	- 3	9

$$m = \sqrt{\frac{414}{17}} = \pm 4,9''$$

$$[vv] = 414$$

Cierres Angulares

Nº de Observaciones	Observaciones			Error sistemático		Error accidental	
	Nº de Angulos	Cierres ang. ±	Σα"	εα		ε = $\frac{\epsilon\alpha}{\sqrt{n}}$	
				+	-	ε	εε
1	6	+	7	1",2		± 2,9	8,47
2	8	+	4	0,5		1,4	1,96
3	4	+	1	0,2		0,5	0,25
4	4	—	6		1",5	3,0	9,06
5	5	—	2		0,4	0,9	0,81
6	4	+	21	5,2		10,5	110,25
7	6	—	18		3,0	7,3	53,29
8	7	+	15	2,1		5,7	32,49
9	5	+	18	3,6		8,0	64,00
10	11	+	22	2,0		6,6	43,56
11	4	—	6		1,5	3,0	9,00
12	10	+	12	1,2		3,8	14,44
13	3	+	9	3,0		5,2	27,04
14	5	—	0	0,0		3,0	0,00
15	6	+	19	3,2		7,8	60,84
16	4	—	3		0,7	1,5	2,25
17	4	—	0	0,0		0,0	0,00
18	4	+	3	0,7		1,5	2,25
19	6	+	12	2,0		4,9	24,01
20	3	—	21		7,0	12,1	146,41
21	11	+	30	2,7		9,0	81,00
22	6	—	14		2,3	5,7	32,49
23	5	+	33	6,6		14,7	216,09
24	7	+	3	0,4		1,1	1,21
25	5	—	24		4,8	10,7	114,49
26	8	—	6		0,7	2,1	4,41
27	5	—	0	0,0		0,0	0,00
28	4	—	12		3,0	6,0	36,00
29	8	+	3	0,4		1,1	1,21
30	5	—	15		3,0	6,7	44,89
31	8	—	18		2,2	6,4	40,96
32	5	—	16		3,2	7,2	51,84
33	4	—	19		4,7	9,5	90,25
34	5	+	3	0,6		1,3	1,69
35	5	+	3	0,6		1,3	1,69
36	6	+	15	2,5		6,1	37,21
37	4	+	3	0,7		1,5	2,25
38	4	+	6	1,5		3,0	9,00
39	5	—	12		2,4	5,4	29,16
40	6	+	12	2,0		4,9	24,01
41	8	+	39	4,9		13,8	190,44

$$\begin{array}{r}
 + 47",8 \quad - 40",4 \\
 - 40,4 \\
 \hline
 + 7",4
 \end{array}
 \quad [\epsilon\epsilon] = 1620,55$$

Error sistemático: $7",4 = + 0",18$

Error accidental: $\sqrt{\frac{1620,55}{41}} = \pm 6",3$

ERROR EN DISTANCIA

OBSERVACIONES DIURNAS

	Promedio lm.		Error prom. δmm.		Correcc. Excentr. mm.	Promedio Corregido lm.		Lectura verdader L	A		B		p. v. v.	
	A	B	A	B		A	B		Lc+a	Error v. mm.	Lc+a	Error v. mm.	A	B
	1	5,0012	5,0013	0,8	0,5	26,6	4,9746	4,9747	4,9948	4,9944	- 0,4	4,9948	0,0	0,0064
2	10,0022	10,0027	1,3	1,5	18,5	9,9837	9,9842	9,9994	10,0028	+ 3,4	10,0038	+ 4,4	0,1156	0,1936
3	14,9867	14,9803	1,4	1,2	7,4	14,9793	14,9729	14,9946	14,9976	+ 3,0	14,9920	- 2,6	0,0400	0,0301
4	19,9738	19,9697	2,2	1,4	2,4	19,9714	19,9673	19,9904	19,9890	+ 1,4	19,9859	- 4,5	0,0049	0,0507
5	24,9815	24,9793	1,2	3,6	3,2	24,9783	24,9761	25,0034	24,9951	- 8,3	24,9942	- 9,2	0,1102	0,1354
6	29,9793	29,9758	1,2	2,1	1,0	29,9783	29,9748	30,0022	29,9943	- 7,9	29,9924	- 9,8	0,0693	0,1067
7	34,9753	34,9742	2,7	4,2	1,6	34,9737	34,9726	35,0026	34,9890	- 13,6	34,9897	- 12,9	0,1510	0,1358
8	39,9833	39,9833	2,3	4,5	0,4	39,9829	39,9829	40,0024	39,9974	- 5,0	39,9995	- 2,9	0,0156	0,0053
9	44,9863	44,9802	3,2	3,3	0,8	44,9855	44,9794	45,0010	44,9993	- 1,7	44,9955	- 5,5	0,0014	0,0149
10	50,1200	50,1203	1,4	5,8	1,1	50,1189	50,1192	50,1338	50,1319	- 1,9	50,1348	+ 1,0	0,0014	0,0004
11	54,9960	55,0000	3,2	3,2	0,3	54,9957	54,9997	54,9972	55,0079	+ 10,7	55,0149	+ 17,7	0,0379	0,1036
12	60,0007	60,0043	3,3	4,3	0,5	60,0002	60,0038	59,9994	60,0117	+ 12,3	60,0185	+ 19,1	0,0490	0,1013
13	64,9992	64,9863	1,5	5,3	0,1	64,9991	64,9862	64,9964	65,0008	+ 13,4	65,0004	+ 4,0	0,0425	0,0038
14	69,9950	69,9905	2,9	5,9	—	69,9950	69,9905	69,9957	70,0050	+ 9,3	70,0042	+ 8,5	0,0177	0,0147
15	74,9877	74,9817	4,7	3,1	—	74,9877	74,9817	74,9973	74,9969	- 0,4	74,9949	- 2,4	0,0000	0,0010
16	79,9868	79,9878	3,7	6,0	0,1	79,9867	79,9877	79,9955	79,9951	- 0,4	80,0004	+ 4,9	0,0000	0,0038
17	85,0563	85,0450	3,1	3,9	—	85,0563	85,0450	85,0788	85,0640	- 14,8	85,0572	- 21,6	0,0303	0,0645
18	89,9660	89,9805	4,1	6,9	0,2	89,9658	89,9803	89,9901	89,9727	- 17,4	89,9920	+ 1,9	0,0374	0,0004
19	94,9880	94,9837	1,9	3,8	—	94,9880	94,9837	94,9867	94,9942	+ 7,5	94,9949	+ 8,2	0,0062	0,0075
20	99,9788	99,9547	3,1	6,7	0,3	99,9785	99,9544	99,9830	99,9839	+ 0,9	99,9651	- 17,9	0,0001	0,0321
21	104,9718	104,9655	3,7	5,4	0,1	104,9717	104,9654	104,9755	104,9763	+ 0,8	104,9756	+ 0,1	0,0001	0,0000
22	109,9890	109,9905	4,3	3,7	0,5	109,9885	109,9900	109,9727	109,9924	+ 19,7	109,9997	+ 27,0	0,0321	0,0603
23	115,0148	115,0000	5,1	3,9	0,3	115,0145	114,9997	114,9966	115,0176	+ 21,0	115,0089	+ 12,3	0,0333	0,0114
24	119,8572	119,8663	3,2	4,4	0,7	119,8565	119,8656	119,8739	119,8589	- 15,0	119,8743	+ 0,4	0,0157	0,0000
25	124,9712	124,9798	4,4	2,0	0,4	124,9708	124,9794	124,9738	124,9724	- 1,4	124,9876	+ 13,8	0,0001	0,0122
26	129,9895	129,9830	6,4	5,8	0,8	129,9887	129,9822	129,9752	129,9895	+ 14,3	129,9899	+ 14,7	0,0121	0,0128
27	134,9858	134,9802	5,9	4,2	0,5	134,9853	134,9797	134,9578	134,9854	+ 26,6	134,9869	+ 29,1	0,0388	0,0465
28	140,0100	140,0207	5,3	6,4	0,3	140,0097	140,0204	140,0384	140,0090	- 29,4	140,0271	- 11,3	0,0441	0,0065
29	144,9472	144,9248	5,0	7,5	0,6	144,9466	144,9242	144,9532	144,9452	- 8,0	144,9305	- 22,7	0,0030	0,0245
30	149,9000	149,8922	8,1	10,8	0,4	149,8996	149,8918	149,8944	149,8974	+ 3,0	149,8976	+ 3,2	0,0004	0,0005
31	154,8750	154,8425	5,4	6,2	0,4	154,8746	154,8421	154,8745	154,8717	- 2,8	154,8477	- 26,8	0,0003	0,0299
32	159,8693	159,8652	5,6	8,6	0,1	159,8692	159,8651	159,8571	159,8655	+ 8,4	159,8699	+ 12,8	0,0028	0,0064
33	164,9278	164,9165	4,9	12,7	0,2	164,9276	164,9163	164,9377	164,9231	- 14,6	164,9206	- 17,1	0,0078	0,0107
34	169,8747	169,8880	15,8	15,4	—	169,8747	169,8880	169,8525	169,8635	+ 17,0	169,8918	+ 39,3	0,0100	0,0535
												Σ	0,9305	1,2808

comparación directa con las medidas que se suponen verdaderas; estas observaciones que denominaremos con l_0 , están referidas a los dos observadores A y B.

En las dos columnas que siguen se ha consignado el error medio de cada observación deducido de las 6.^{as}, y que designaremos con δ . Como l_0 está afectado del error de excentricidad de la mira se ha corregido mediante el ábaco, sacando los valores ΔD consignados en la columna 5. En las columnas 6 y 7, figuran los valores de l_0 corregidos que denominaremos 1 siendo: $1 = l_0 - \Delta D$

En la columna 8, se ha colocado los valores de las magnitudes verdaderas que se llamarán L. Si se designa con c, la constante de multiplicación y con a, la de adición, podemos escribir:

$$L = c \cdot 1 + a \quad (3)$$

en la que 1, sería el largo de mira observado, pero desconocemos c y a; aplicando el método de Gauss para ecuaciones ponderadas, tendríamos:

$$c = \frac{p \sum [pL] - [\sum p] [\sum L]}{p \sum [pL] - [\sum p]^2}$$

$$a = \frac{[\sum L] [\sum p] - [\sum pL]}{p \sum [pL] - [\sum p]^2}$$

para poder calcular estas ecuaciones, hay que recurrir a la (2) que nos dá p, pero esta no puede ser satisfecha hasta tanto no se conozcan m y s, los que son obtenidos a "posteriori"; esta dificultad se salva haciendo:

$$p \cong \frac{1}{m^2 L^2} = \frac{K}{LL} \quad (5)$$

fórmula esta que se ha obtenido haciendo s despreciable frente a m.L. Esta suposición no afecta en nada los resultados, pero queda la posibilidad de una rectificación a los cálculos luego de haber obtenido estos valores, lo que no se ha hecho por no ser necesario. Sustituída (5) en (4) nos dá:

$$c = \frac{\left[\frac{1}{LL} \right] \left[\frac{1}{L} \right] - \left[\frac{1}{LL} \right] \left[\frac{1}{L} \right]}{\left[\frac{1}{LL} \right] \left[\frac{11}{LL} \right] - \left[\frac{1}{LL} \right]^2}$$

$$a = \frac{\left[\frac{1}{L} \right] \left[\frac{11}{LL} \right] - \left[\frac{1}{LL} \right] \left[\frac{1}{L} \right]}{\left[\frac{1}{LL} \right] \left[\frac{11}{LL} \right] - \left[\frac{1}{LL} \right]^2}$$

Realizadas las operaciones resultó:

Para observador A

$$\left[\frac{1}{L} \right] = 0,82387849 ; \left[\frac{1}{LL} \right] = 0,0647257737 ; \left[\frac{1}{L} \right] = 0,33988220 ;$$

$$\left[\frac{1}{LL} \right] = 0,00822670 ; \left[\frac{11}{LL} \right] = 0,0033976431 ;$$

$$\text{Observador B} \begin{cases} \left[\frac{1}{L} \right] = 0,82387849 ; \left[\frac{1}{LL} \right] = 0,0647257735 ; \left[\frac{1}{L} \right] = 0,33986346 ; \\ \left[\frac{1}{LL} \right] = 0,00822624 ; \left[\frac{11}{LL} \right] = 0,0033972721 ; \end{cases}$$

Sustituyendo valores en (6):

$$\text{Observador A} \begin{cases} c = 99,9848 \\ a = 2,06 \text{ cm.} \end{cases}$$

$$\text{'' B} \begin{cases} c = 99,9901 \\ c = 2,06 \text{ cm.} \end{cases}$$

Conocidos estos, se procedió a la eliminación de la influencia sistemática, calculando los valores corregidos l que figuran en las columnas (9) y (10) y con estos se determinó los errores verdaderos v , consignados en 11 y 12. Luego se calcula p_{vv} (columnas 13 y 14). Este valor nos sirve para determinar el error de las constantes que está dado por:

$$\text{Observ. A} \begin{cases} m_c = m_o \sqrt{\left(\frac{1}{LL} \right) \frac{1}{D}} = \pm 0,0035 ; D = \left(\frac{1}{LL} \right) \left(\frac{11}{LL} \right) - \left(\frac{1}{L} \right)^2 \\ m_a = m_o \sqrt{\left(\frac{11}{LL} \right) \frac{1}{D}} = \pm 0,81 \text{ mm} ; m = \sqrt{\frac{p_{vv}}{n-z}} = \pm 0,171 \text{ mm/m.} \end{cases}$$

$$\text{'' B} \begin{cases} m_o = \pm 0,200 \text{ mm/m.} \\ m_c = \pm 0,0041 ; m_a = \pm 0,94 \text{ mm.} \end{cases}$$

Estos resultados nos indican la precisión obtenida para las constantes. El error por cada observación sería:

$$\text{Observador A) } m_c = \pm 0,02 ; m_a = \pm 4,6 \text{ mm.}$$

$$\text{'' B) } m_c = \pm 0,023 ; m_a = \pm 5,2 \text{ mm.}$$

Son estas magnitudes las que anteriormente han intervenido al tratar de los errores sistemáticos del aparato considerado como auto-reductor.

Conocido v se ha ajustado por el mismo procedimiento que c y a a m y s , de la expresión (1). Las fórmulas correspondientes para ecuaciones ponderadas son:

$$m = \frac{\left(\frac{v}{L} \right) \left(\frac{1}{LL} \right) - \left(\frac{1}{L} \right) \left(\frac{v}{LL} \right)}{n \left(\frac{1}{LL} \right) - \left(\frac{1}{L} \right)^2} ; s = \frac{n \left(\frac{v}{LL} \right) - \left(\frac{v}{L} \right) \left(\frac{1}{L} \right)}{n \left(\frac{1}{LL} \right) - \left(\frac{1}{L} \right)^2} \quad (7)$$

Ejecutando los cálculos ha resultado:

$$\text{Observ. A: } \left(\frac{v}{LL} \right) = 0,132345 ; \left(\frac{v}{L} \right) = 4,4361$$

$$B: \left(\frac{v}{LL} \right) = 0,140799 ; \left(\frac{v}{L} \right) = 5,2154$$

Sustituyendo en (7) nos queda:

$$\begin{aligned} A) \quad m &= 0,117 \text{ mm/m.} ; \quad s = 0,6 \text{ mm.} \\ B) \quad m &= 0,146 \text{ mm/m.} ; \quad s = 0,3 \text{ mm.} \end{aligned}$$

Luego la expresión numérica de (1) sería:

$$\begin{aligned} A) \quad v \text{ (mm)} &= 0,6 + 0,117 L \text{ (m)} \\ B) \quad v \text{ (mm)} &= 0,3 + 0,146 L \text{ (m)} \end{aligned} \tag{8}$$

Las expresiones (8) dan el error absoluto. El error relativo estaría dado por:

$$\begin{aligned} A) \quad E &= \frac{v}{L} = 0,000117 + \frac{0,0006}{L \text{ (m)}} \\ B) \quad E &= \frac{v}{L} = 0,000146 + \frac{0,0003}{L \text{ (m)}} \end{aligned} \tag{9}$$

Las fórmulas (8) y (9) tienen una validez restringida; en efecto, para $L = 0$, $E = \infty$ lo cual es imposible. Pero no puede verificarse pues la distancia mínima de enfilado es 2,40 m., pero no aceptando extrapolación su mínimo sería de 5 m.

Vamos a establecer ahora la expresión del error de coincidencia. Aceptamos también la fórmula del tipo lineal para el presente caso:

$$\delta = p L + q \tag{10}$$

significando δ , los valores tabulados en las 3ª y 4ª columnas de la tabla, y L la distancia; p y q estarían dados por:

$$q = \frac{[\delta] [LL] - [L\delta] [L]}{n [LL] - [L]^2} \quad p = \frac{n [L\delta] - [\delta] [L]}{n [LL] - [L]^2} \tag{11}$$

ejecutando las operaciones ha resultado:

$$\begin{aligned} A) \quad [LL] &= 341885,34 ; [L] = 2974,28 ; [\delta] = 123,3 ; [L\delta] = 14908,57 \\ B) \quad [\delta] &= 174,2 ; [L\delta] = 19038,30 \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en (11) se obtiene:

$$\begin{aligned} A) \quad q &= 0,3 \text{ mm} ; \quad p = 0,041 \text{ mm/m} \\ B) \quad q &= 1,1 \text{ mm} ; \quad p = 0,046 \text{ mm/m} \end{aligned}$$

Reemplazado en (10):

$$\begin{aligned} A) \quad \delta \text{ (mm)} &= 0,041 L \text{ (m)} + 0,3 \\ B) \quad \delta \text{ (mm)} &= 0,046 L \text{ (m)} + 1,1 \end{aligned} \tag{12}$$

si quisiéramos obtener el error relativo:

$$\begin{aligned} A) \quad e &= 0,000041 + \frac{0,0003}{L \text{ (m)}} \\ B) \quad e &= 0,000046 + \frac{0,0011}{L \text{ (m)}} \end{aligned} \tag{13}$$

si se quiera tener la agudeza que denominaremos con a :

$$\begin{aligned} \text{A)} \quad a'' &= 0'',085 + \frac{0'',62}{L(m)} \\ \text{B)} \quad a'' &= 0'',095 + \frac{2'',27}{L(m)} \end{aligned} \quad (14)$$

Calculamos las expresiones (14) para un lado medio de 80 m.

$$a_A = 0'',093 ; a_B = 0'',123$$

Estos valores corresponden a un aumento de 24 x., refiriéndoles a un aumento de un diámetro, se tiene:

$$a_A = 2'',2 ; a = 3'',0$$

resultado un poco inferiores a los obtenidos por Hofer y Eggert en las experiencias citadas por Bosshardt en su obra, y que son respectivamente:

$$a = 3'',5 \text{ y } a = 3'',3.$$

Pero más en concordancia con los valores de Nouzli y Hering que dan 2". Por otra parte como los resultados obtenidos para A y B mediante las funciones hiperbólicas (14) son variables con la distancia se podría determinar la longitud equivalente a esos valores y verificarla con la distancia de aquellos autores, para saber si existe una concordancia más correcta.

Además las expresiones (12 y (13), al ser respectivamente inferiores a las (8) y (9), nos evidencian la estimación correcta del aumento del anteojo, al provocar con la influencia de la agudeza valores inferiores a los del error global en distancia. Si observamos la forma de obtención de las expresiones (8), veremos que ellas están afectadas por una pequeña porción del error de coincidencia, dado que l_0 , era la media de 6 observaciones, suponiendo nula esta magnitud determinaremos la expresión resultante de sumación de los errores dados por (8) y (12).

Ante todo vamos a observar que en la práctica corriente, para tener un control en las mediciones de distancia se ejecutan 2 observaciones independientes, luego la expresión (12) quedaría:

$$\text{A)} \quad \delta_1 (\text{mm}) = \sqrt{\frac{\delta}{2}} = 0,029 L(m) + 0,2$$

Estas nuevas expresiones sumadas geométricamente a las (8) nos dan llamando con ϵ el error definitivo:

$$\text{B)} \quad \delta_1 (\text{mm}) = \sqrt{\frac{\delta}{2}} = 0,033 L(\text{mm}) + 0,8$$

$$\text{A)} \quad \epsilon^2 = (0,6 + 0,117 L(m))^2 + (0,2 + 0,029 L(m))^2$$

$$\text{B)} \quad \epsilon^2 = (0,3 + 0,146 L(m))^2 + (0,8 + 0,033 L(m))^2$$

Ejecutando operaciones se obtiene que:

$$\begin{aligned} \text{(8f)} \quad \text{A)} \quad \epsilon (\text{mm}) &= 0,6 + 0,120 L(m) \\ \text{B)} \quad \epsilon (\text{mm}) &= 0,8 + 0,150 L(m) \end{aligned} \quad (15)$$

Las ecuaciones (15) resuelven definitivamente el problema para las observaciones diurnas.

De ellas podemos deducir las expresiones del error relativo:

$$A) \quad E_t = 0,000120 + \frac{0,0006}{L(m)} \quad (16)$$

$$A) \quad E_t = 0,000150 + \frac{0,0008}{L(m)}$$

Veamos los resultados dados por las fórmulas (16); para su límite inferior de validez y para el máximo admisible por el instrumento:

$$L = 5 \text{ m.}: \quad A) \quad E_t = \frac{1}{4170} \quad B) \quad E_t = \frac{1}{3230}$$

$$L = 200 \text{ m.}: \quad A) \quad E_t = \frac{1}{8130} \quad B) \quad E_t = \frac{1}{6500}$$

Reduzcamos para establecer comparaciones con otros autores esta precisión relativa a una langitud de 100 m.:

$$A) \quad \frac{1}{7900} \quad B) \quad \frac{1}{6300}$$

Podemos tomar como valor representativo de las experiencias aquí ejecutadas el valor $\frac{1}{7000}$

Bosshardt (1) sin indicar expresamente un error relativo admite valores superiores a $\frac{1}{5000}$ y de los datos consignados por él, un error medio

de aproximadamente de $\frac{1}{8000}$.

El Dr. F. Ackerl (2) en las mediciones practicadas como ensayo, ha obtenido valores que le permiten afirmar una precisión media de $\frac{1}{4000}$

$\frac{1}{5000}$

El Dr. Ing. Walter (3) al hacer experiencias destinadas a examinar la factibilidad del catastro por vía óptica en las zonas boscosas de Baden, ha demostrado que la precisión es superior a la de medición con regiones (Staffel Methode) y en un entorno de pendiente de 0° a 30°, el error medio

para 100 m. es de 2 cm. lo que reportaría una precisión de $\frac{1}{5000}$.

(1) R. Bosshardt. — Op. cit.

(2) Dr. F. Ackerl. — Op. cit.

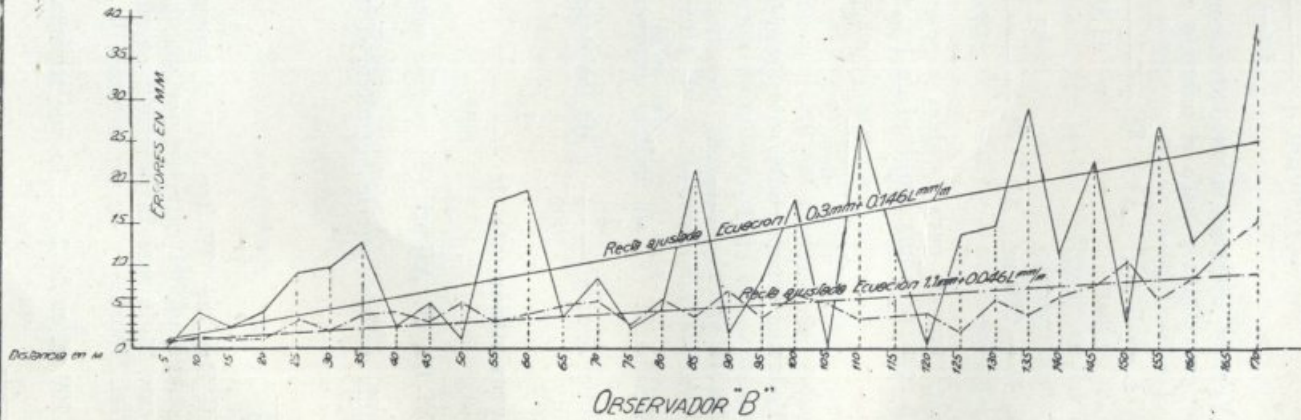
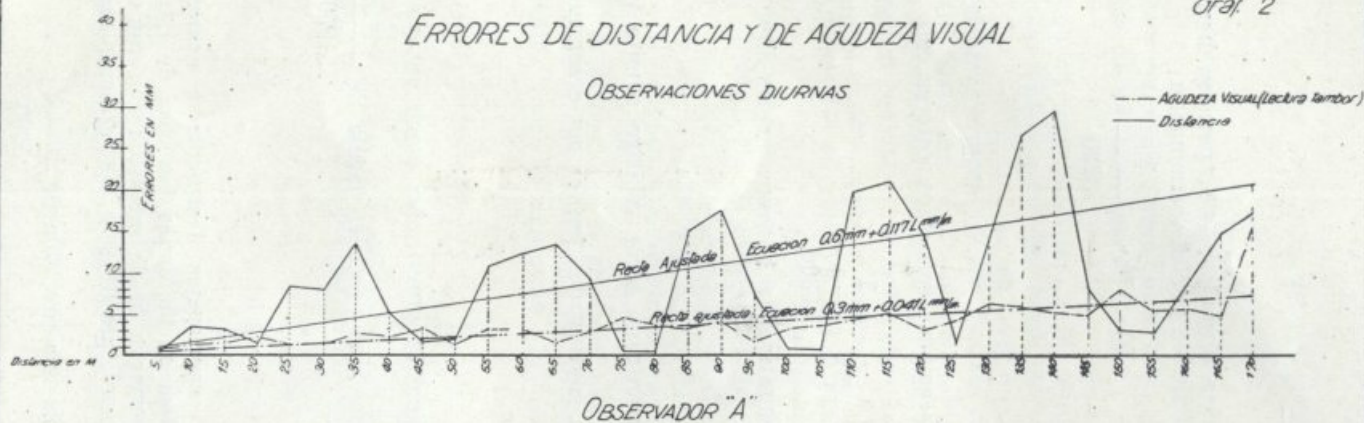
(3) Dr. Walter. — Op. cit.

TAQUIMETRO AUTO REDUCTOR REDTA 36698

Graf. 2

ERRORES DE DISTANCIA Y DE AGUDEZA VISUAL

OBSERVACIONES DIURNAS



El Dr. W. Heiskanen (4) al tratar de los resultados obtenidos, en el catastro de la ciudad de Savonlinna, de un conjunto de lados medidos de ida y vuelta el error medio deducido de las diferencias para 100 m., es 13 mm., pero en esta magnitud no tiene ninguna influencia las constantes de multiplicación y adición que no tuviesen el verdadero valor, y quedan subsanados parcialmente los errores de orientación y horizontalidad de la regla, y el de excentricidad de la misma si no se corrige como se ha indicado. Luego ese valor podría tomarse como cota superior de las diferencias de

medida y así tendríamos como error relativo $\frac{1}{7700}$, que representaría un máximo para terrenos de fuerte pendiente.

El conjunto de valores arriba anotados evidencian que el error relativo $\frac{1}{7000}$ obtenido por nosotros, no está fuera de proporción dado que, las

experiencias se han practicado en terreno casi horizontal, que es el característico de esta ciudad y con poca diferencia el de las ciudades del litoral del país.

Los errores absolutos así como su expresión de ajuste han sido consignados en el gráfico 2, que hace resaltar claramente para los 2 observadores la menor importancia del error de coincidencia.

b) El método seguido para las observaciones nocturnas, es idéntico al anteriormente expuesto, con la diferencia de que no es tan grande el número de observaciones, como se puede ver en el cuadro correspondiente que tiene sus columnas dispuestas en el mismo orden y con idéntico significado que el anterior.

Para poder ejecutar estas observaciones debía ir munido el equipo, de iluminación en forma tal que se pudiera hacer las lecturas con comodidad. El aparato puede iluminarse fácilmente, por necesitar una sola fuente de luz, así pues que la dificultad se concentraba en la regla. Para solucionarla se colocó un tipo de pantalla distribuidora de luz con una lamparita, dispuesta de manera que aprovechando el máximo rendimiento luminoso no moleste la visación.

De estas pantallas se colocaron 2, una para iluminar el nonius, y la otra para iluminar el otro extremo de la regla abarcada en la lectura. Estas pantallas son movibles aprovechando para ello la canaladura que tiene la regla en la que corren 3 rueditas. Este sistema puede verse en la figura 13 en la que se indica un corte por el eje, teniendo la pantalla un largo de 24 cm. La fuente de energía era un acumulador de 6 voltios.

Los resultados obtenidos son altamente satisfactorios, y por tanto corresponde dar algunas características de la intensidad luminosa y de la energía empleada.

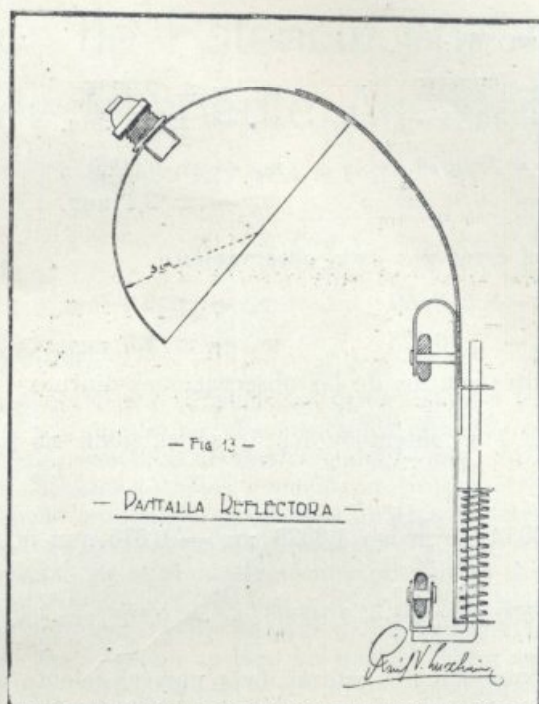
La lámpara tiene un consumo de 3 watts, con 0,5 ampéres de intensidad,

(4) Dr. W. Heiskanen. — "Eine optische Etaddvermessung" sacado del N° 35 del año 1933 de "Allgemeinen Vermessungs - Nachrichten".

ERROR EN DISTANCIA

OBSERVACIONES NOCTURNAS

	Promedio lm.		Error prom. δmm.		Correcc. Excentr. mm.	Promedio Corregido lm.		Lectura verdadera L	A		B		p. v. v.	
	A	B	A	B		A	B		Lc+a	Error v. mm.	Lc+a	Error v. mm.	A	B
1	9,9987	10,0000	± 1,4	± 0,9	— 6,8	9,9919	9,9932	9,9994	10,0011	+ 1,7	10,0015	+ 2,1	0,0289	0,0441
2	19,9817	19,9820	± 1,2	± 1,5	— 2,4	19,9793	19,9796	19,9904	19,9866	— 3,8	19,9867	— 3,7	0,0361	0,0343
3	29,9918	29,9910	± 1,7	± 2,6	— 1,0	29,9908	29,9900	30,0022	29,9962	— 6,0	29,9958	— 6,4	0,0400	0,0455
4	39,9942	39,9948	± 2,9	± 3,2	— 0,4	39,9938	39,9944	40,0024	39,9973	— 5,1	39,9990	— 3,4	0,0163	0,0072
5	50,1337	50,1332	± 2,3	± 1,8	— 1,1	50,1326	50,1321	50,1338	50,1342	+ 0,4	50,1354	+ 1,6	0,0001	0,0010
6	69,9977	69,9962	± 3,8	± 4,6	—	69,9977	69,9962	69,9957	69,9955	— 0,2	69,9970	+ 1,3	0,0000	0,0003
7	90,0013	90,0007	± 2,9	± 3,2	—	90,0013	90,0007	89,9901	89,9953	+ 5,2	89,9990	+ 8,9	0,0033	0,0098
8	109,9993	110,0013	± 3,0	± 4,2	— 0,5	109,9988	110,0008	109,9727	109,9890	+ 16,3	109,9965	+ 23,8	0,0220	0,0468
9	130,0105	130,0153	± 8,8	± 7,9	— 0,2	130,0103	130,0151	129,9752	129,9967	+ 21,5	130,0083	+ 33,1	0,0274	0,0649
10	149,9085	149,9022	± 7,2	± 9,6	— 1,3	149,9072	149,9009	149,8944	149,8898	— 4,6	149,8916	— 2,8	0,0009	0,0003
Σ						700,0037	700,0030	699,9563					0,1750	0,2542



provocando en la regla una iluminación de 180 lux., y reflejando en dirección al instrumento 60 lux. siendo el rendimiento: $\frac{60}{180} = 0,33$.

Frente a los rendimientos que se aceptan para pinturas blancas, (del 60 % al 70 %) este rendimiento es bajo lo cual es atribuible en parte a las rayas negras de la división y porque la reflexión no es exactamente horizontal. La iluminación fué medida con un luxómetro Philips.

Con esta iluminación se ha podido, sin dificultad hasta los 100 m., ejecutar las lecturas, pero para ampliar hasta 150 m. las observaciones, a las tres últimas se las leyó reforzando la iluminación.

Siguiendo la misma forma de exposición de resultados que en a), se tiene:

Para las fórmulas (6):

$$A) \left[\frac{1}{L} \right] = 0,27716325 ; \left[\frac{1}{LL} \right] = 0,0151513203 ; \left[\frac{1}{L} \right] = 0,09998822$$

$$\left[\frac{1}{LL} \right] = 0,00277048 ; \left[\frac{11}{LL} \right] = 0,0009997645 ;$$

$$B) \left[\frac{1}{LL} \right] = 0,00277062 ; \left[\frac{11}{LL} \right] = 0,0009997862 ; \left[\frac{1}{L} \right] = 0,09998930$$

El Factor de Potencia en un Circuito de Corriente Alternada

(1.ª PARTE)

POR EL ING. JUAN G. SCHILDKNECHT

I. — INTRODUCCION:

En la siempre creciente difusión que se va dando a la electricidad en la industria y en el uso doméstico, el consumidor cree ver detrás de esa generalización fenómenos sencillos de fáciles conclusiones. Sin embargo, lejos de ser así, los profesionales técnicos encuentran en esa difusión una serie de complejos problemas que exigen profundos análisis y detenidos estudios.

En los temas de gran actualidad, es decir la "corriente continua" y la "corriente alternada" debe el electrotécnico argentino ver un problema de trascendental importancia y todos los estudios que al respecto podrá hacer, nunca resultarán suficientes para abarcar ampliamente el porvenir industrial de nuestro país. Ese porvenir radica, en primer lugar, en el exacto conocimiento de todas las teorías básicas y sus aplicaciones prácticas para brindar al país nuevas fuentes de progreso en su industria técnica eléctrica y en segundo lugar se irá proporcionando con ella mayores comodidades de vida a todos los habitantes de la nación argentina. Pertenece igualmente a los técnicos la difícil misión social de influir sobre los consumidores de electricidad de manera tal que sean destruidos los prejuicios existentes sobre peligrosidades de las corrientes y determinados voltajes, debiendo asimismo orientar sobre tarifas, ventajas de los diferentes sistemas y todo aquello que haga desaparecer los obstáculos para un mayor y mejor desenvolvimiento de la electricidad. Se seguirá así análogos procedimientos como ha sucedido en todos aquellos países que hoy marchan a la vanguardia de la industria eléctrica.

Entre uno de los complicados fenómenos que nos presenta la corriente alternada, tenemos los que se refieren a la "Inducción" y "Auto-inducción" de los circuitos eléctricos.

II. — AUTOINDUCCION:

Admitiéndose como conocido el proceso de la inducción en el circuito de corriente continua, tal como éste se produce en un motor eléctrico, recopilaremos rápidamente los efectos de la inducción en el caso de la corriente alternada. Tomemos para ello un solenoide que posea la resistencia **R** cuyas extremidades se conectan a una fuente de corriente continua con la tensión **E** y observaremos que la intensidad que atraviesa por ese solenoide se determina por la ley de Ohm, es decir:

$$(1) \quad I = \frac{E}{R}$$

Ese mismo solenoide con su resistencia ohmica **R** conectada a una fuente de corriente alternada de **E** voltios, no será ya atravesado por la misma

intensidad I que se calculara por la fórmula (1), sino que en ese caso ese valor resultará inferior. La diferencia que resulta en ese segundo caso, o sea para la corriente alternada, proviene que esta clase de energía eléctrica al atravesar las espiras del solenoide induce en todo su alrededor un campo magnético cuyas líneas de fuerzas actúan como "freno" al paso de la intensidad del circuito en consideración. Esa influencia del magnetismo producido por la misma bobina sobre la propia resistencia de su conductor es lo que se designa con "autoinducción".

La ley fundamental, establecida por los sabios Henry y Faraday, para los fenómenos de la inducción se define por:

"La diferencia de potencial que se produce en un conductor, que se mueve dentro de un campo magnético o si ese campo es variable y el conductor fijo, es proporcional al movimiento del conductor dentro del campo o bien a la variación de ese campo en la unidad de tiempo."

Expresada algebraicamente esa ley se tiene que:

$$(2) \quad e = - \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{N}{10^8}$$

donde φ representa el flujo de líneas magnéticas durante el instante de tiempo dt y N el número de espiras del conductor influenciado por el campo. El signo menos (—) de la fórmula significa que la inducción actúa como resistencia a la variación del campo magnético.

En el caso de la "autoinducción" rige la misma ley que antecede, pudiéndose simplificar la expresión algebraica, considerando para ello que el flujo magnético sea proporcional a la intensidad i y al número de espiras N del solenoide, es decir:

$$\varphi = \text{constante } i \cdot N = c \cdot i \cdot N$$

Sustituyendo ese valor en la fórmula (2) se tendría que la caída de potencial de la autoinducción será:

$$(3) \quad e_1 = - \frac{d(c \cdot i \cdot N)}{dt} \cdot \frac{N}{10^8} = - \left(\frac{c \cdot N^2}{10^8} \right) \frac{di}{dt}$$

Para simplificación de la fórmula (3) se hace:

$$\frac{c \cdot N^2}{10^8} = L = \text{coeficiente de autoinducción o inductividad.}$$

Para ese coeficiente se ha introducido la unidad "HENRY" que equivale a la autoinducción que produce un voltio de potencial cuando la intensidad del conductor es aumentada o disminuída de un amperio durante un segundo.

Sustituyendo en la fórmula (3) el valor de la autoinducción, se obtiene:

$$(4) \quad e_1 = - L \frac{di}{dt}$$

A los efectos de resolver la ecuación, se parte de la base que la intensidad instantánea es una función sinusoidal relacionada con la velocidad angular ω y del tiempo t ,

$$(5) \quad i = \bar{I} \cdot \text{sen } \omega t$$

aplicando esa sustitución a la fórmula (4) y diferenciando se tendrá:

$$(6) \quad e_1 = - L \frac{d(\bar{I} \cdot \text{sen } \omega t)}{dt} = - L \cdot \omega \cdot \bar{I} \cdot \text{cos } \omega t$$

El valor máximo de la caída de potencial por autoinducción se obtendrá para $\cos \omega t = +1$, siendo así

$$\bar{E}_1 = + \omega \cdot L \cdot \bar{I}$$

y el valor efectivo:

$$(7) \quad E_1 = \frac{I \cdot \omega \cdot L}{\sqrt{2}} = I \cdot \omega \cdot L$$

Como se observa esta fórmula tiene una absoluta analogía con la ley de Ohm, la cual es algebraicamente:

$$(8) \quad E_0 = I \cdot R$$

En la fórmula (7) el valor ωL viene a equivaler al R de la (8), lo que significa que se trata también de una resistencia, que en el caso de la "autoinducción" se llama resistencia inductiva.

De las fórmulas (5) y (6) se desprende que, como consecuencia de la autoinducción, la caída de potencial e_1 está atrasada en 90° , o sea $\frac{1}{4}$ de período, con respecto a la intensidad i .

Recopilando las deducciones que anteceden se tiene, que en el circuito del solenoide, conectado a una fuente de corriente alternada, forman un sistema en equilibrio: la tensión de la fuente de energía eléctrica y las caídas de potencial por las resistencias ohmica e inductiva.

Basado en estos dos últimos párrafos puede mostrarse, por medio de un diagrama vectorial cuál es la expresión analítica del fenómeno que tiene lugar en el solenoide en consideración.

El diagrama Fig. A representa a la intensidad I_1 atrasada en 90° con respecto a la caída de potencial E , debido a la autoinducción del solenoide. De no existir esa autoinducción y actuando únicamente una resistencia ohmica la intensidad I_0 estaría en fase con la caída de potencial, es decir, los vectores tendrían la misma dirección.

Como el solenoide posee resistencia ohmica e inductiva, la fase que se obtiene para la intensidad será la resultante de los dos componentes de I_0 e I_1 es decir I .

El diagrama será en consecuencia el representado en la Fig. B.

Haciendo análogas consideraciones para las caídas de potenciales y admitiendo constante la intensidad I , la función variable será la caída de poten-

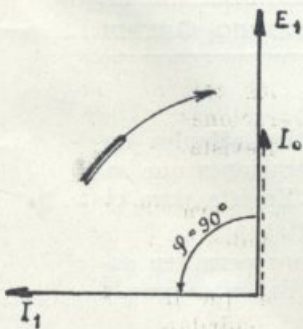


Fig. A.

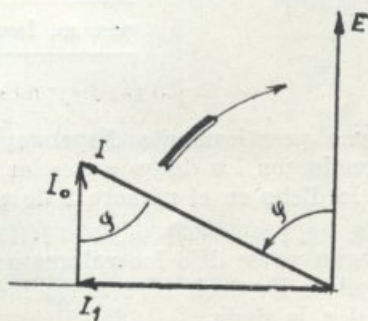


Fig. B.

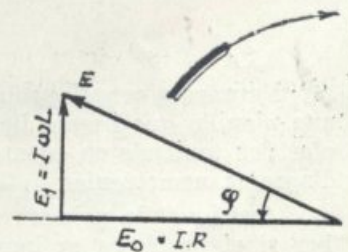


Fig. C.

cial total E , que es, como se dijo más arriba, la resultante de las provenientes de las resistencias ohmica e inductiva. La Fig. C refleja por vectores ese fenómeno, que ha sido establecido en las fórmulas (7) y (8).

Analizando ese diagrama se establecen las siguientes deducciones geométricas:

$$E^2 = E_1^2 + E_0^2 = (IR)^2 + (I\omega L)^2$$

$$E = I \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$(9) \quad I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

Como puede observarse, esta última fórmula (9) tiene analogía con la (1) que se obtiene con la ley de Ohm. Además en (9) se confirma que, por la auto-inducción, se aumenta la resistencia del circuito. La expresión $\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$, que es una especie de resistencia, tiene en la electrotécnica el nombre de "Impedancia" o también "resistencia aparente".

Al haberse dejado aclaradas hasta aquí algunas particularidades del solenoide conectado a un fuente de corriente alternada, es decir, después de considerar ese caso como fundamental y clásico, debe hacerse notar que en la electrotécnica existen infinidad de aplicaciones prácticas de auto-inducción, tales como las que se presentan en los enrollamientos de alternadores, transformadores, cables, líneas aéreas, etc.

Problema del Cuadrilátero

(Continuación)

POR EL ING. HIGINIO GREPPI

Para resolver el problema practicamente dispongamos los cálculos en una planilla que iremos llenando con los datos y con las operaciones que se efectúen teniendo en cuenta lo dicho en el número 8 de esta Revista para el diagrama nemotécnico.

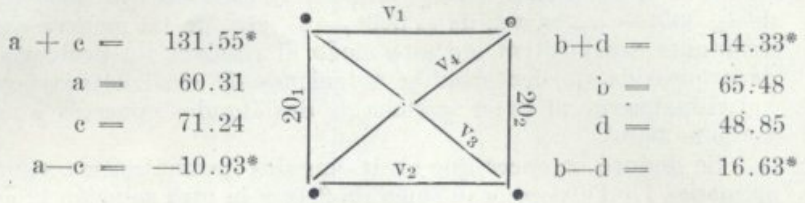
Averiguando primero según ya se dijo los valores que nos permiten saber si el problema es imposible. Es decir si con los lados dados se puede encerrar una superficie igual a la dada.

Descontando el caso en que uno de los lados sea mayor que la suma de los otros tres pues entonces no se podrá construir ningún cuadrilátero sea cual sea la superficie encerrada.

PRIMER EJEMPLO PRACTICO

a = 60,31 b = 65,48 c = 71,24 d = 48,85 2 S = 6414.34

PLANILLA DE CALCULO SIMULTANEO DE LOS CUATRO ANGULOS



a + c = 131.55*		b + d = 114.33*
a = 60.31		b = 65.48
c = 71.24		d = 48.85
a - c = -10.93*		b - d = 16.63*

ab + cd = 7429.1728*	≡ R = 6418.5245	2 ab = 7898.1976
ab = 3949.0988*		2 cd = 6960.1480
cd = 3480.0740*		2 ad = 5892.2870
ab - cd = 369.0248*	< R = 6418.5245	2 cb = 9329.5904

v1 + v2 = 14858.3456	•-----•	v3 + v4 = 938.0496
v1 = 15040.1115		v3 = 2187.6765
v2 = -181.7659		v4 = -1249.6269
v1 - v2 = 15221.8774	•-----•	v3 - v4 = 3437.3034

C = 0 ₁ + 0 ₂ = 231.7332*		4 R = 25674.0980
0 ₁ = -718.9207*		4 V R = 13937864.5839
0 ₂ = 950.6539*		4 V'R' = -52322209.5665
C' = 0 ₁ - 0 ₂ = -1669.5747		4 R' = 26512.2572

V + R = 6961.4010	V' + R' = 4654.5542
-------------------	---------------------

R = √(C ² + 4 S ²) = 6418.5245*	R' = √(C' ² + 4 S ²) = 6628.0643
--	---

V = $\frac{4 V R}{4 R}$ = 542.8765	V' = $\frac{4 V'R'}{4 R'}$ = 1973.5101
------------------------------------	--

V - R = -5875.6480	V' - R' = -8601.5744
--------------------	----------------------

$\frac{C}{R} = \text{sen } \phi = 0.0361038$	$\frac{C'}{R'} = \text{sen } \phi' = -0.2518947$
--	--

$-\frac{V-R}{2cd} = \text{sen } (\alpha_2 - \phi) = 0.8441843;$	$-\frac{V'-R'}{2cb} = \text{sen } (\beta_2 - \phi') = 0.9219669$
---	--

$+\frac{V+R}{2ab} = \text{sen } (\alpha_1 + \phi) = 0.8813910;$	$+\frac{V'+R'}{2ad} = \text{sen } (\beta_1 + \phi') = 0.7899401$
---	--

INDIVIDUALIZACION DE LAS SOLUCIONES

Tendremos en general dos valores:

I	II	III	IV
(α ₂ - φ) = 57°35'05" ó 122°24'55"		(β ₂ - φ') = 67°12'55" ó 112°47'05"	
(α ₁ + φ) = 61°48'38" ó 118°11'22"		(β ₁ + φ') = 52°10'48" ó 127°49'12"	
Σ = 119°23'43" ó 240°36'17"		Σ' = 119°23'43" ó 240°36'17"	

Si sumamos los ángulos $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2$ la suma deberá dar 360° o bien podrá dar 720° si el cuadrilátero es cruzado y en este caso no lo consideraremos más que como una solución teórica. (Pues habíamos visto que con la convención que se hacía en figura 2 se llegaba a las mismas ecuaciones de partida de los casos de cuadrilátero convexo o cóncavo; los ángulos de la figura 2 se los puede trazar también en sentido contrario, es decir en vez de α_1 , $360^\circ - \alpha_1$, en vez de α_2 , $360^\circ - \alpha_2$, etc., de tal manera que la superficie resultante sea positiva, de este modo al resolver un problema de superficie dada positiva pueden resultar soluciones de cuadriláteros cruzados que se individualizarán al hacer la suma de dos ángulos opuestos y resulte ésta mayor que 360° .)

Se deduce entonces que serán ángulos de una misma solución los de las columnas I y IV porque su suma da 360° y la otra solución la compondrán los ángulos de las columnas II y III. Es decir: Si se admite como solución 1ª la de la columna I evidentemente la columna II pertenecerá a la solución 2ª, y de la columna III y IV será primera solución aquella cuya suma Σ' no sea igual a la suma Σ de la columna I. Obteniéndose de esta manera si los cálculos están bien:

$$\begin{aligned} \Sigma + \Sigma' &= 360^\circ \text{ cuadrilátero convexo o cóncavo} \\ \Sigma + \Sigma' &= 720^\circ \text{ cuadrilátero cruzado.} \end{aligned}$$

De los valores (dos valores de cada uno) de $(\alpha_2 - \phi)$, $(\alpha_1 + \phi)$, $(\beta_2 - \phi')$ y $(\beta_1 + \phi')$ vamos a despejar α_1 , α_2 , β_1 , β_2 para ambas soluciones e individualizar éstas, disponiendo los cálculos igualmente en forma de planilla:

	I	II		III	IV
$\alpha_2 =$	59°39'13"	= 124°29'03"		$\beta_2 =$	52°37'32" = 98°11'42"
$(\alpha_2 - \phi) =$	57°35'05"	= 122°24'55"	$(\beta_2 - \phi') =$	67°12'55"	= 112°47'05"
$\phi =$	2°04'08"	= 2°04'08"	$\phi' =$	-14°35'23"	= -14°35'23"
$(\alpha_1 + \phi) =$	61°48'38"	= 118°11'22"	$(\beta_1 + \phi') =$	52°10'48"	= 127°49'12"
$\alpha_1 =$	59°44'30"	= 116°07'14"	$\beta_1 =$	66°46'11"	= 142°24'35"
$\Sigma = \alpha_1 + \alpha_2 =$	119°23'43"	= 240°36'17"	$\Sigma' = \beta_1 + \beta_2 =$	119°23'43"	= 240°36'17"
	1ª Sol.	2ª Sol.		2ª Sol.	1ª Sol.

Primera solución:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= 59^\circ 39' 13'' \\ \alpha_1 &= 59^\circ 44' 30'' \\ \beta_2 &= 98^\circ 11' 42'' \\ \beta_1 &= 142^\circ 24' 35'' \\ \text{Suma} &= 360^\circ 00' 00'' \end{aligned}$$

Segunda solución:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= 124^\circ 29' 03'' \\ \alpha_1 &= 116^\circ 07' 14'' \\ \beta_2 &= 52^\circ 37' 32'' \\ \beta_1 &= 66^\circ 46' 11'' \\ \text{Suma} &= 359^\circ 59' 59'' \end{aligned}$$

CONTROL DOBLE (Verificación de la superficie)

Dado los lados y las dos soluciones de ángulos determinar si la superficie que resulta es la dada como dato del problema.


$$\begin{aligned} ab \operatorname{sen} \alpha_1 &= ab \operatorname{sen} 59^\circ 44' 30'' = 3949.0988 \times 0.8637622 = 3411.0823 \\ cd \operatorname{sen} \alpha_2 &= cd \operatorname{sen} 59^\circ 39' 13'' = 3480.0740 \times 0.8629868 = 3003.2579 \\ &2 S = 6414.3402 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ad \operatorname{sen} \beta_1 &= ad \operatorname{sen} 142^\circ 24' 35'' = 2946.1435 \times 0.6100107 = 1797.1791 \\ eb \operatorname{sen} \beta_2 &= eb \operatorname{sen} 98^\circ 11' 42'' = 4664.7952 \times 0.9897887 = 4617.1616 \\ &2 S = 6414.3407 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ab \operatorname{sen} \alpha_1 &= ab \operatorname{sen} 116^\circ 07' 14'' = 3949.0988 \times 0.8978697 = 3545.7761 \\ cd \operatorname{sen} \alpha_2 &= cd \operatorname{sen} 124^\circ 09' 03'' = 3480.0740 \times 0.8242827 = 2868.5647 \\ &2 S = 6414.3408 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ad \operatorname{sen} \beta_1 &= ad \operatorname{sen} 66^\circ 46' 11'' = 2946.1435 \times 0.9189270 = 2707.2908 \\ eb \operatorname{sen} \beta_2 &= eb \operatorname{sen} 52^\circ 37' 32'' = 4664.7952 \times 0.7946855 = 3707.0451 \\ &2 S = 6414.3359 \end{aligned}$$

A continuación se da la planilla con el cálculo para un segundo ejemplo que ha sido llenada con los datos del problema y que contiene todas las operaciones necesarias hasta llegar a los ángulos de la solución (o soluciones).

	$a + c = 94,3$		$b + d = 22,2$
	$a = \underline{49,6}$		$b = \underline{6,8}$
$2 S = \underline{615 \text{ m}^2}$	$c = \underline{44,7}$		$d = \underline{15,4}$
	$a - = 4,9$		$b - d = -8,6$
	$ab + cd = 1025,66$	$> R = 629,766$	$2 ab = 674,56$
	$ab = 337,28$		$2 cd = 1376,76$
	$cd = 688,38$		$2 ad = 1527,63$
	$ ab - cd = 351,10$	$< R = 629,766$	$2 cb = 607,92$
	$v_1 + v_2 = 2051,32$	$4VR$	$v_3 + v_4 = -702,20$
	$v_1 = 2093,46$	•-----•	$v_3 = -810,98$
	$v_2 = -42,14$		$v_4 = 108,78$
	$v_1 - v_2 = 2135,60$	$-4 V'R'$	$v_3 - v_4 = -919,76$
	$C = 0_1 + 0_2 = 135,575$	•-----•	$4 R = 2519,0640$
	$0_1 = 231,035$		$4 V R = -1440436,9040$
	$0_2 = -95,460$		$4 V' R' = +1964239,4560$
	$C' = 0_1 - 0_2 = 326,495$		$4 R' = 2785,1720$
	$V + R = +57,952$		$4 R = 2519,0640$
$R = \sqrt{C^2 + 4 S^2} = +629,766$			$4 V R = -1440436,9040$
	$4 V R$		$4 V' R' = +1964239,4560$
$V - \frac{4 V R}{4 R} = -571,814$			$4 R' = 2785,1720$
	$4 R$		$V' + R' = +1401,542$
$V - R = -1201,580$			$R' = \sqrt{C'^2 + 4 S^2} = +696,293$
			$4 V'R'$
$\frac{C}{R} = \text{sen } \phi = +0,2152783$			$V' = \frac{4 V'R'}{4 R'} = +705,249$
			$4 R'$
			$V' - R' = +8,956$
			$\frac{C'}{R'} = \text{sen } \phi' = +0,4689046$
$-\frac{V - R}{2 cd} = \text{sen } (a_2 - \phi) = +0,8727592$			$-\frac{V' - R'}{2cb} = \text{sen } (\beta_2 - \phi') = -0,0147322$
$+\frac{V + R}{2 ab} = \text{sen } (a_1 + \phi) = +0,0859110$			$+\frac{V + R'}{2ad} = \text{sen } (\beta_1 + \phi') = +0,9174316$
I	II	III	IV
$a_2 = 73^{\circ}12'45''9 \text{ ó } 131^{\circ}39'03''5$	$(\beta_2 - \phi') = -0^{\circ}50'38''9 \text{ ó } 180^{\circ}50'38''9$		
$(a_2 - \phi) = 60^{\circ}46'51''2 \text{ ó } 119^{\circ}13'08''8$	$\phi' = 27^{\circ}57'47''6 = 27^{\circ}57'47''6$		
$\phi = 12^{\circ}25'54''7 = 12^{\circ}25'54''7$	$(\beta_1 + \phi') = 66^{\circ}33'12''4 \text{ ó } 113^{\circ}26'47''6$		
$(a_1 + \phi) = 4^{\circ}55'42''3 \text{ ó } 175^{\circ}04'17''7$	$\beta_1 = 38^{\circ}35'24''8 \text{ ó } 85^{\circ}29'00''0$		
$a_1 = 352^{\circ}29'47''6 \text{ ó } 162^{\circ}38'23''0$	$= 65^{\circ}42'33''5 \text{ ó } 294^{\circ}17'26''5$		
$\Sigma = 425^{\circ}42'33''5 \text{ ó } 294^{\circ}17'26''5$	$\beta_2 = 27^{\circ}07'08''7 \text{ ó } 208^{\circ}48'26''5$		
Sol. 1	Sol. 2	Sol. 2	Sol. 1

Luego las soluciones angulares son:

$$a_2 = 73^{\circ}12'46'' \quad a_1 = 352^{\circ}29'48'' \quad \beta_2 = 208^{\circ}48'26'' \quad \beta_1 = 85^{\circ}29'00''$$

Cuadrilátero cruzado. Solución teórica. (Suma = 720°)

$$a_2 = 131^{\circ}39'03'' \quad a_1 = 162^{\circ}38'23'' \quad \beta_2 = 27^{\circ}07'09'' \quad \beta_1 = 38^{\circ}35'25''$$

Cuadrilátero convexo. (Ningún ángulo mayor de 180°) Suma 360° .

Hay un solo cuadrilátero como solución topográfica.

(Continuará)

Erratas de lo publicado en el número 8 de esta Revista.

En el dibujo que sirvió para hacer el cliché de la figura 2 se cometió un error al designar los ángulos. Corriójase poniendo en lugar de a_2 y a_2' los ángulos β_2 y β_2' respectivamente e inversamente en lugar de β_2 y β_2' ; a_2 y a_2' .

En la corrección de pruebas se deslizaron errores que se corregirán así:

En página 48 la fórmula 9) es:

$$\text{sen } (a_2 - \phi) = \frac{R^2 - (ab + cd)(ab - cd)}{2 R cd}$$

la fórmula 10) es:

$$\text{sen } (a_1 + \phi) = \frac{R^2 + (ab + cd)(ab - cd)}{2 R ab}$$

En página 51 la fórmula

$$4 V R = [(a+c)(b+d) + (a-c)(b-d)] [(a+c)(b-d) + (a-c)(b+d)]$$

y las fórmulas

$$\begin{aligned} \text{VI) } \quad & (a+c)(b+d) = v_1 \\ & (a-c)(b-d) = v_2 \\ & (a+c)(b-d) = v_3 \\ & (a-c)(b+d) = v_4 \end{aligned}$$

En página 52 a la fórmula de R le falta completar el signo radical.
y la fórmula $4 V'R'$ es

$$4 V'R' = - (v_1 - v_2)(v_3 - v_4)$$

Por carecer la imprenta de los signos \leq \geq se empleó

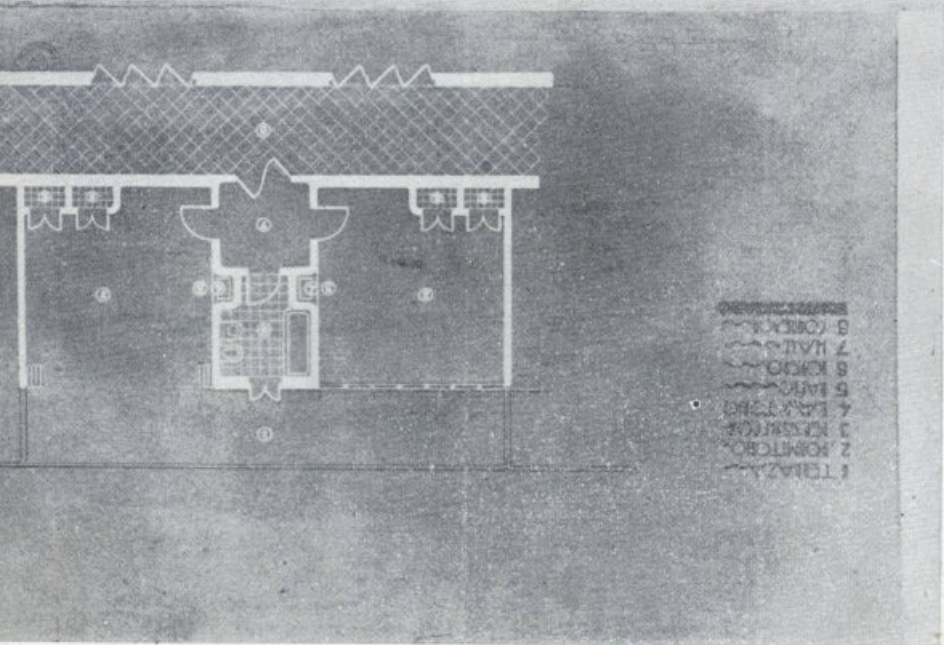
en vez de \geq mayor o igual : $>$ ó =

en vez de \leq menor o igual : $<$ ó =



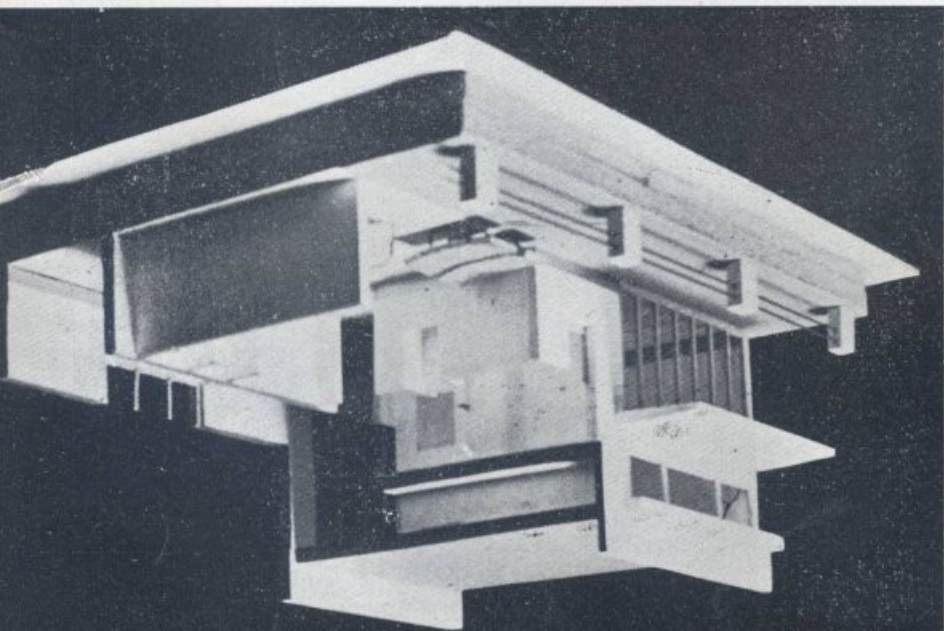
ALUMNO
C. J. DIAZ ABBOTT

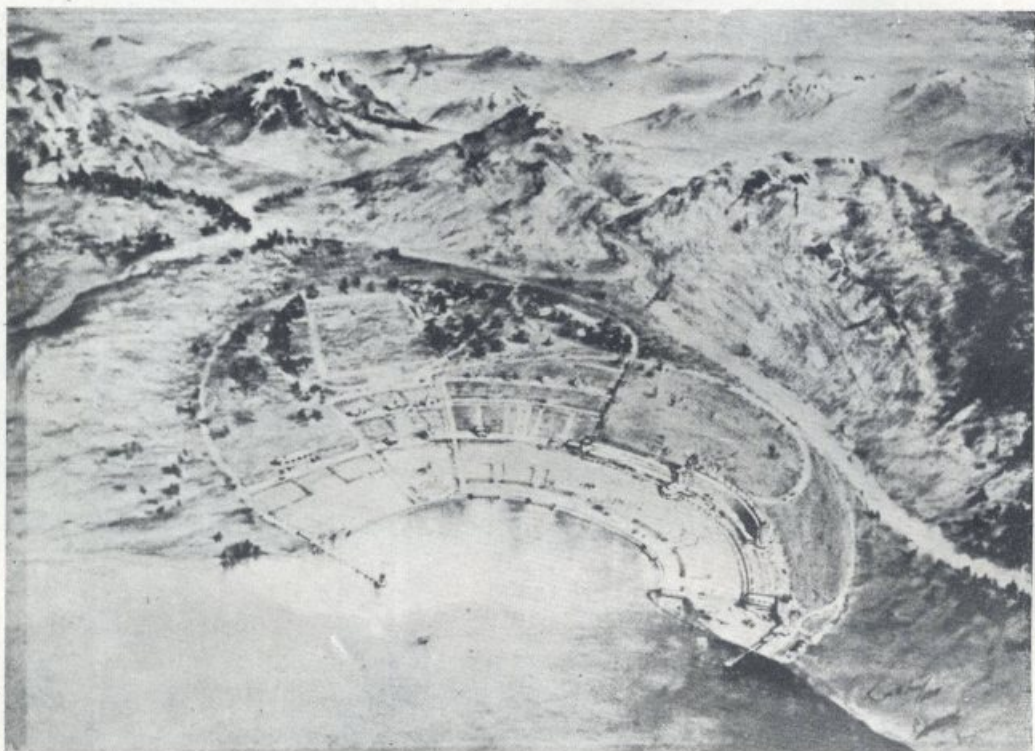
PROFESOR
ARQ. JOSE MICHELETTI



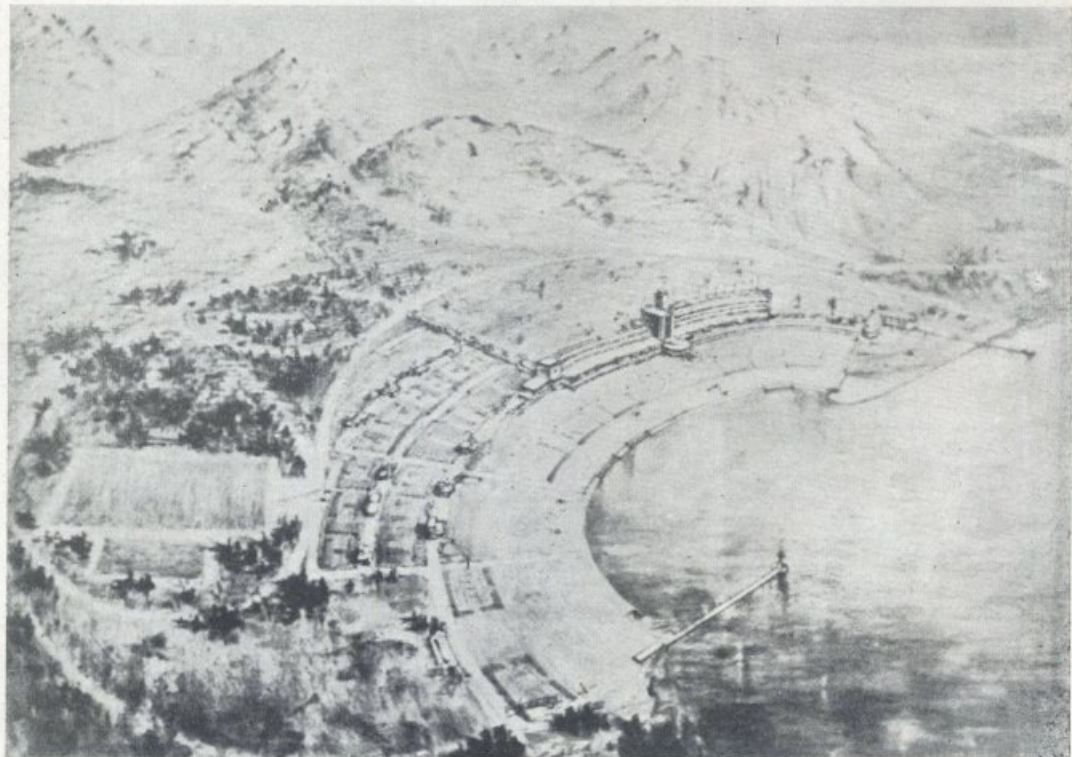
UN SANATORIO PARA TUBERCULOSOS

MAQUETTE





UN ESTABLECIMIENTO TERMAL A ORILLAS DE UN LAGO



ALUMNO
RAUL COSTA VARSÍ

PROFESOR
ARQ. JOSE MICHELETTI

TUDIO SINTETICO DE LA EVOLUCION DE LA ARQUITECTURA A TRAVES DE LAS EPOCAS

(Continuación)

POR EL PROF. ARQ. ERMETE DE LORENZI

RENACIMIENTO FRANCES

Las influencias del Renacimiento en el Arte Francés nos dan:

desde Luis XI hasta las guerras de la Religión el:

RENACIMIENTO

desde la terminación de las guerras de la religión en adelante el:

MODERNO

ORDENAMIENTO RESPECTO A LOS REINADOS

Luis XI	Siglo XV	Sucesor de Carlos VII	RENACIMIENTO
Carlos VIII	Siglo XV	1483 - 1498	
Luis XII	Fines XV princ. XVI	1498 - 1515	
Fco. I	1ª mitad siglo XVI	1515 - 1547	
Enrique II	fines XV	1547 - 1559	
Fco. II	mitad XVI	1559 - 1560 (su hermano Carlos IX tiene solo 16 años; gobierna la madre)	
Catalina de Medicis por minoría de Carlos IX		1560 - 1574	MODERNO
Carlos IX (segunda mitad del siglo XVI)			
Enrique III	2ª mitad siglo XVI	1574 - 1589	
Enrique IV	fines XVI princ. XVII	1589 - 1610	
Luis XIII	mediados XVII	1610 - 1643 (hijo de Enrique IV tiene por consejero a Richelieu que gobierna por él).	
Luis XIV	fines XVII princ. XVIII	1643 - 1715 (entra a reinar a los 5 años bajo la regencia de Ana de Austria).	
Luis XV	siglo XVIII	1715 - 1774	
Luis XVI	fin XVIII	1774 - 1792	
Luis XVII		Hijo de Luis XVI murió en 1795 sin reinar	
Luis XVIII	siglo XIX	Reinó hasta 1824	

Con la muerte de Mansard (1708) coincide la formación de dos escuelas o tendencias dentro del moderno a saber:

LA "ROCAILLE": que se acentúa en 1730 y cuyo principal iniciador es Boffrand

EL ESTILO CLASICO: Gabriel, Soufflot, Louis, Antoine

RENACI- MIENTO

1a. EPOCA

ULTIMOS AÑOS DE LUIS XI Y REINADO DE CARLOS VIII (1483-1498)

La influencia Italiana es casi insignificante; se nota en trozos aislados y casi más en obras de escultura que de Arquitectura. Aun impera el Gótico.

- a) **TUMBA DE CARLOS DE ANJOU** (Catedral de Mans 1475)
- b) **SANTO SEPULCRO DE SOLESMA**
- c) **CAPILLA DE SAN LAZARO** (en la catedral de Marsella). 1840. — Una joya de delicado arte, debida al artista italiano Laurana —autor del palacio de Urbino—.

San Lázaro es el único caso de arcadas de proporción clásica en Francia antes del siglo XVI.

2a. EPOCA

LUIS XII (1498-1515) Y LOS PRIN- CIPIOS DEL REINADO DE Fco. I°.

Época de la real iniciación del Renacimiento Francés. Esta época (de Luis XII) es la de la Cancillería de Bramante en Roma y la **Cartuja de Pavia en el Milanesado**. Esta segunda escuela es la que influye en la segunda época del renacimiento Francés así como también en el renacimiento Alemán (castillo del Rhin) y en el renacimiento español especialmente.

- a) **CAMPANARIOS DE TOURS Y FACHADAS DE GAILLON:**

Primeras manifestaciones del renacimiento francés, adoptando motivos tomados de los órdenes, pero desprovistos de proporción.

- b) **ALA DEL CASTILLO DE BLOIS:**

La de la izquierda entrando (Luis XII y Fco. I), donde la imitación del Renacimiento italiano se reduce a sustituir las decoraciones tomadas de la flora indígena: hojas de **acanto, óvalos y rin-ceaux**.

Respecto a las bóvedas subsiste el tipo a nervaduras y, si la ojiva desaparece de las fachadas, el pleno centro no la reemplaza sino que con timidez y se prefiere un tipo intermedio, menos severo que el pleno centro, tal que el arco rebajado que vemos, aquí en Blois, como transición entre la ojiva y el pleno centro.

LUIS XII

aparición, aunque vaga, del dibujo y modulatura de los órdenes.



COMO EJEMPLOS DE LOS PRIMEROS AÑOS
DEL REINADO DE FCO. I° TENEMOS:

c) FONTAINEBLEU:

Ordenes empleados sin proporción modular.

d) SAINT GERMAIN:

Los órdenes están sustituidso por simples cadenas de ladrillo sobre fondo de piedra.

e) CHATEAUX MADRID:

Tiene como influencia Italiana los estilobatos y medallones, conservando, como recuerdo del gótico, los haces de pilares. Empléase una ordenanza de pilastras caprichosas que sostienen unas arcadas rebajadas.

Fué este arte el más ligero, variado y extraño a las convenciones arquitectónicas.

Fco. I

En la mayor parte del reinado se siguen empleando los grandes órdenes pero aún sin proporción modular.

3a. EPOCA

ULTIMOS AÑOS DE Fco. I°
Y REINADO DE ENRIQUE II°.

**EPOCA CLASICA DEL
RENACIMIENTO FRAN-
CES (1540 -- 1559)**

(Adaptación definitiva de
los órdenes con la propor-
— ción modular) —

a) ECOUEN:

Hacia 535 al 37 aparece este castillo que llama la atención del hombre de arte y que se caracteriza por lo atrevido de su concepción (bastaría citar las ventanas fuera de eje con los panneaux). Su desconocido autor llega a un gran efecto de conjunto con el único recurso de la proporción y la línea.

Las ventanas fuera de eje y los cuatro pabellones de ángulo (que en detalles son diferentes pero balanceados en masas) indican que se está frente a un ejemplo de transición, pero que es la chispa que dará origen a una gran escuela.

b) ANCY - LE - FRANC:

Señala un paso más en la vía abierta por el ejemplo anterior.

Precursores del arte de la gran época.



c) **EL LOUVRE** (1540) por **PIERE LESCOT**

Es donde se revela definitivamente el arte del renacimiento francés, con la arquitectura subordinada estrictamente a las leyes de simetría y modulo.

Después de la Cancillería de Bramante es el ejemplo más notable de órdenes adaptados en fachada.

Aun
Fco. I^o

A PARTIR DE AQUI — P. LESCOT — EL ARTE FRANCÉS SIGUE PARALELO AL ITALIANO SIN COPIARLE

Arte de
la gran
época.

d) **LAS TULLERIAS** por **FILIBERTO DELORME**

Tenemos en este artista un continuador de la escuela de Lescot.

El pintoresco arranque de los techos y los detalles demuestran una atrevida concepción de estilo, inferior al Louvre como pureza, pero de un verdadero sello francés.

ya Enri-
que II^o



J. BULLANT:

Continuador de Delorme en las obras de las Tullerías.

Por mucho tiempo se le atribuyó el castillo de Ecouen pero, de todos modos, aun cuando no fuera obra suya, tiene por lo menos el gran honor de ser el que terminó la obra maestra de las Tullerías.

P. CHAMBIGE:

Figura entre los mejores promotores del arte clásico francés; a él se deben las arcadas que han servido de basamento a la galería de Apolonio.

Otros artistas de
la gran época.

JEAN COUJON:

Que conduce el arte ornamental a la altura a que P. Lescot llevó la Arquitectura. De él son las fachas del Louvre y la fuente de los Inocentes.



RESUMEN

1º) **REINADO DE CARLOS VIIIº**

Trozos aislados de arquitectura —o más bien escultura— italiana. Nada del sello italiano en la gran Arquitectura.

2º) **EPOCA LUIS XII:**

Se inicia una vaga aparición del dibujo y modulatura de los órdenes.

3º) **MAYOR PARTE DEL REINADO DE FCO. Iº**

Aplicación de los grandes órdenes, pero desprovistos aun de la proporción modular.

4º) **EPOCA DE ENRIQUE II:**

Adaptación definitiva de la proporción canónica.

EL PERIODO CREADOR DEL ARTE
DEL RENACIMIENTO FRANCÉS TER-
MINA CON LA CONCLUSION DE
ECOEN Y LA EPOCA DE LAS TU-
LLERIAS.

ARTE MODERNO

Toma la Arquitectura desde el final del siglo XVI en que terminan las guerras de la religión



1

ARQUITECTURA DE LADRILLO Y PIEDRA:

- a) Ladrillo y piedra Mansard
- b) Piedra imitando ladrillo y piedra Doucerceaux - Lemer cier - Mansard

2

ARQUITECTURA A BASE DE ORDENES:

- Siglo XVII
- a) Ordenes proporcionados al piso Brosse - Lemer cier - Lepautre
 - b) Ordenes de carácter monumental Levau - Dorbais - Lemuet - Mansard

3

ARQUITECTURA COLOSAL CON ENTABLAMENTOS REDUCIDOS:

- a) Arreglos a base de cadenas ... Lemer cier - Bruand - Mansard - Perrault
- b) Arreglos a base de recuadros.. Perrault - Blondel - Bullet

ARTE MODERNO

Último tercio siglo XVII

El gusto se pierde, el arte está en decadencia y lo trata de salvar Golbert creando becas, academia de Arquitectura, etc., pero todo es inútil: terminó la generación de Mansard y Lemer cier.

Golbert

Siglo XVIII

A la muerte de H. Mansard (1708) le sigue un resurgimiento.

ESCUELA DE "ROCAILLE":

En vigor en 1730 Boffrand

ESTILO CLASICO: Gabriel - Soufflot - Louis - Antoine



SIGLO XVII

1 ARQUITECTURA DE LADRILLO Y PIEDRA

a) **COMBINACIONES DE LADRILLO Y PIEDRA**

Bajo Enrique IV la decoración de las fachadas es sólo con efecto de color, lo cual resulta conveniente a la situación por lo económico; cadenas de piedra y rellenos de mampostería; paneaux coloreados con enduido de cemento de tejas según una tradición que viene de los primeros tiempos del renacimiento. Los contramarcos de las ventanas se unen de piso a piso y terminan formando lucarna: se destacan así del rojo de los paneaux y negro azulado de los techos de pizarra. Todo ello da una silueta franca y como finalidad:

- 1º Efecto de color
- 2º Silueta que armonice el conjunto

EJEMPLOS:

Hotel Mayenne	Enrique III
Hotel del Cardenal Bourbon	Enrique IV
Edificios de las plazas Dauphine y Vosgos	Enrique IV
Núcleo central del castillo de Versailles (origen del Palacio)	Luis XIII
Hotel Mazarin (luego biblioteca Nacional) construido por Mansard en la menor edad de	Luis XIV
Hotel de Rambouillet (entra también dentro esta Arquitectura).	

b) **ESTRUCTURAS DE PIEDRA IMITANDO LA ANTERIOR DE LADRILLO Y PIEDRA**

El mejoramiento de la situación económica es la causa de este fenómeno.

EJEMPLOS:

Hotel de Sully (Ducereeau)	Luis XIII
La Sorbonne (Lemercier)	Luis XIII
Palacio Cardinal (Lemercier)	Luis XIII
Hotel d'Aumont (Mansard)	Luis XIV

SE OBSERVA FACILMENTE QUE LAS ESTRUCTURAS A BASE EXCLUSIVA DE PIEDRA, QUE DESAPARECIERAN CON LA SITUACION QUE LA GUERRA HABIA PLANTEADO, REAPARECEN CON LUIS XIII COEXISTIENDO, SIN EMBARGO, POR COSTUMBRE EN UNOS CASOS, Y ECONOMIA EN OTROS, CON EL LADRILLO Y PIEDRA CREADO BAJO ENRIQUE III, DESPUES DE LAS GUERRAS. ———

2 ARQUITECTURA CON DECORACION A BASE DE ORDENES

La arquitectura de ladrillo y piedra, inspirada en un principio de economía, no podía producir más que el carácter de una edificación sencilla.

Francia (como todos los pueblos) cuando sus condiciones económicas le permitieron nuevamente, se encaminó a las construcciones monumentales que lleva insensiblemente a caer en los órdenes colosales.

a) ORDEN PROPORCIONADO AL PISO

EJEMPLOS:

Construcciones de Tanlay (Yonne)	Enrique IV (al final)
Palacio Luxemburgo (S. de Brosse)	Luis XIII
Fachada S. Gervais (S. de Brosse)	Luis XIII
Louvre (Lemercier)	Luis XIII
Hotel Liancourt (Lemercier)	Luis XIII
Totel Beauvais (Lepautre)	Luis XIV (comienzo del reinado)
Castillo Bussy — Rabutin	Luis XIV (comienzo del reinado)

Como otros ejemplos pueden citarse:

La galería del Louvre;

Unica aplicación franca del sistema tradicional en la época de Enrique IV. El piso inferior ya construido data de C. de Medicis; era necesario unir ese piso con un ala del pabellón a nivel más alto: el entresuelo era la única solución.

Hotel de Torpanne;

Se ensaya una variante arquitectónica:
Se conservan los entablamentos y las pilastras se reemplazan por cadenas.

MAS ADELANTE LOS EJEMPLOS DISMINUYEN Y LA TENDENCIA SE INCLINA NETAMENTE AL COLOSAL ES DECIR: COMO VEREMOS EN EL PUNTO b) EL ORDEN COLOSAL QUE PARTE DE ENRIQUE II COEXISTIENDO CON EL ORDEN DE UN PISO, QUE HEMOS TRATADO, HASTA LUIS XIV A PARTIR DEL CUAL LA TENDENCIA ES NETAMENTE COLOSAL.

b) ORDEN COLOSAL

EJEMPLOS:

El ala del palacio de Chantilly.

Demuestra las primeras dificultades que se tuvieron al abordar este problema:

los grandes entablamentos, por su gran altura, caían generalmente sobre la línea de uno de los pisos de ventanas cortando a estas más o menos arriba o abajo con lo cual aparecerían como perdidas y sin importancia. Se encontró para ello dos soluciones:

Enrique II

1º

Aumentando la importancia de las ventanas haciéndolas subir arriba de la corniza y delante de los techos, como cuerpos pertenecientes a la vez a la fachada y al techo: lucarnas.

2º

Unir los contramarcos de los dos pisos de ventanas, simulando ser una única ventana, con ello aumenta su importancia y no se pierde en la corniza.

PRIMER PERIODO DE ESTA ESCUELA

EPOCA DE COINCIDENCIA CON LA ESCUELA DE ORDEN SENCILLO

Hotel de Diana de Francia

Enrique III

Galería de unión de las Tullerías y el Louvre

Enrique IV

Hotel de la Duquesa de Saboya (pilastras jónicas fuera de escala)	Luis XIII
En Versalles pilastras dóricas de dimensiones ya más moderadas	Luis XIII

SEGUNDO PERIODO DE ESTA ESCUELA

EPOCA DEL PREDOMINIO ABSOLUTO DEL ORDEN COLOSAL PARA LAS OBRAS MONUMENTALES —

Hacia el comienzo del reinado de Luis XIV el gusto se pronuncia en forma cada vez más decisiva hacia el colosal. Se pueden citar como EJEMPLOS:

Antigua fachada Sud del Louvre	} Levau y Dorbais
Castillo de Vaux	
Actual Instituto	
Hotel d'Avaux	Lemuet
Frontispicio de Minimes	Mansard
Columnada del Louvre	Perrault
Plaza de la Concordia	Gabriel

3 ARQUITECTURA COLOSAL CON ESTABLECIMIENTOS REDUCIDOS

a) A BASE DE CADENAS DE PIEDRA

Vimos que el orden colosal, en la forma anterior (con órdenes), implica grandes entablamentos y grandes ventanas. Si se sustituyen las pilastras de los órdenes, por cadenas de piedra la solución se simplifica dado que no existiendo ya el imperativo de un modulo que rija la relación de la cadena y el entablamento, este último puede ser menor.

EJEMPLOS:

Bajo Luis XIII:

En el castillo de Richelieu	} Lemercier
En el palacio Cardinal	

Bajo Luis XIV:

Interior de los Invalidos	Bruand
Val - de - Grace	Mansard
Cuerpo avanzado, sud, del Louvre ...	Perrault

b) **A BASE DE
RECUAROS**

La arquitectura se simplifica cada vez más y las cadenas de piedra acaban también por desaparecer: el entablamiento descansa sobre muros desnudos apenas decorados con paneaux.

EJEMPLOS:

Patio de los Invalidos	
El Observatorio	Perrault
Puerta de S. Denis	Blondel
Puerta de S. Martín	Bullet



**ULTIMO TER-
CIO DEL SI-
GLO XVII**

Comienza a perderse el gusto y se inicia la decadencia.

Golbert trata de hacer reaccionar el arte; funda la academia de Arquitectura; manda a estudiar arquitectura a Roma; publica monumentos de la antigüedad clásica, etc. todo es inútil.

La generación de Lemercier y Mansard se acaba y los sucesores producen solo imitaciones mediocres. **Golbert**

Los edificios son más o menos como los del arte italiano con temas repetidos de un extremo al otro de la fachada y no se acusa al exterior la arquitectura interna; se llega hasta hacer desaparecer los techos.

Hardouin Mansard adopta esta arquitectura en Versalles **Hardouin
Mansard**



SIGLO XVIII

TRADICIONES DEL GRAN ARTE Y LA DECADENCIA

Ya se ha mencionado que hacia fines del siglo XVII se produce una reacción hacia formas más variadas por la arquitectura de HARDUIN MANSARD.

A la muerte de este arquitecto (1708) que había terminado su carrera con dos obras maestras:

CUPULA DE LOS INVALIDOS CAPILLA DE VERSALLES.—

un nuevo vuelo parece anunciarse, pero, los desastres del fin del reino le detienen un poco acusándose, recién en forma definitiva, después de la regencia con dos distintas escuelas:

- a) La una continúa las formas severas de la época anterior.
- b) La otra se entrega a las elegancias afectadas que traducen el refinamiento de la sociedad de la época; esta escuela recibe la denominación de "ROCAILLE", su fulgor se tiene en 1730 y como principal iniciados y propulsor cuenta a Boffrand.

Gabriel - Soufflot -
Louis - Antoine

Boffrand



Durante toda la segunda mitad del reino de Luis XV las dos escuelas coexisten:

Mientras en el palacio de NANCY las decoraciones son ROCAILLE; la PLAZA DE LA CONCORDIA eleva espléndidos monumentos de GABRIEL.



La escuela desordenada de la mitad del siglo XVIII expira con la época de Luis XVI.

En el momento actual el espíritu filosófico, después de llevarnos nuevamente a las fuentes de pureza de los monumentos de la an-

figüedad clásica, nos ha planteado el problema de la masa y de la línea para resolver, con la proporción, los problemas arquitectónicos respondiendo a los conceptos de funcionalismo y estética más refinados.



Es interesante citar, como final, algunos de los mejores ejemplos del arte Francés.

IGLESIAS :

De la Sobonne	Lemercier
Val de Grace	Fr. Mansard
Capilla del Instituto	Le Vau
Duomo de los Inválidos	J. H. Mansard
S. Pablo de Londres	Wren
Cúpula del Pantheon	Soufflot

PALACIOS Y HOTELES:

Antes del Siglo XVIII

Palacio de Versalles (núcleo original fué el castillo Luis XVIII).

Hotel Clermort

Durante el Siglo XVIII

Hotel de Maine

FACHADAS :

Bretonville (época Luis XIII).

Castillo Richelieu

Castillo Bouffleurs

"Maissons" (la más bella fachada de Fr. Mansard).

(Continuará)

Sombra propia y arrojada de un cono invertido hueco

POR EL ARQ. CARLOS SCHMIDT

Nos proponemos determinar la **sombra propia y arrojada** que se origina en un cono circular hueco, cuyo vértice está dado por sus dos proyecciones y cuya directriz pertenece a un plano dado por las dos proyecciones de una horizontal **h** del plano y las del centro **O** de la directriz.

Comenzaremos por dibujar las proyecciones de la directriz. En la proyección horizontal el diámetro **AB** aparece en tamaño natural dándonos directamente un eje de la elipse. Ahora para determinar el otro eje de la elipse **C'D'** perpendicular a **A'B'** recurramos a una proyección sobre un plano que pase por **O** y que sea perpendicular a **AB**. En este plano, **CD** aparecerá en tamaño natural. Hagamos girar ahora este plano alrededor de su traza sobre el plano horizontal que pasa por **O**, hasta que coincida con él. La proyección horizontal de esta traza será **C'D'**, **O'''** coincidirá con **O''** y **h''** se proyectará en un punto cuya distancia a **C'D'** será igual a la diferencia de cotas entre **h** y **O**. **O''' h'''** será ahora la proyección del plano determinado por **h** y **O** sobre el auxiliar y **O''' D'''** será la proyección del radio de la directriz del cono. Para obtener **D'** giramos el plano auxiliar a su posición primitiva, hallándose **D'** sobre el rayo de giro trazado por **D'''** normalmente a **C'D'**. **C'** se determina inmediatamente por simetría. Tenemos así determinados los dos ejes de la elipse que representa la proyección horizontal de la directriz, siéndonos por lo tanto fácil su trazado.

En la proyección vertical aparecerá el diámetro frontal en tamaño natural, dándonos directamente un eje de la elipse que representará a la proyección vertical de la directriz. Para determinar su dirección trazaremos primero su proyección horizontal **E'F'** y determinamos su punto de intersección **G'** con **h'**. **E'F'** pasará luego por **D''** y **G''** punto este último que se obtiene directamente de **G'**. Conocemos así en la proyección vertical el diámetro frontal **E'F'** y el diámetro **A'B''**. Para determinar el otro eje recordaremos que: si desplazamos una regla en la cual están marcados dos puntos (**H** e **I** p. ej.) sobre los ejes de una elipse, de manera que **H** siempre corra sobre un eje e **I** sobre el otro y que **HB** sea igual al eje mayor de la elipse e **IB** igual al menor, los puntos **B** describirán una elipse. De acuerdo a esto con un arco de compás igual a **E''O''** hacemos centro en **B''** y cortamos la normal trazada por **O''** a **E'F'** en **H**. Unimos **H** con **B''** y **B''I** nos dará la magnitud del otro semieje **J'' K''**. Determinados así los dos ejes de la elipse ésta se trazará fácilmente.

Conocidas así ambas proyecciones de la directriz, tendremos que trazar las generatrices del contorno aparente del cono; para esto trazaremos desde **V'** y **V''** las tangentes a la directriz. Recordaremos aquí que las dos elipses pueden ser consideradas como afines de las circunferencias de radio **O''J₀** y **O'C₀**; por lo tanto para trazar esas tangentes debemos determinar primero los puntos circulares correspondientes a los **V''** y **V'**, trazar luego desde estos puntos las tangentes a la circunferencia, y determinar recién después los puntos que en el campo elíptico corresponden a los puntos de tangencia circulares. Estos puntos unidos con **V'** y **V''** nos darán las tangentes a las elipses.

Determinadas así las dos proyecciones del cono y estudiada su visibilidad comenzaremos con el estudio de la **sombra propia del cono**.

Para determinar ésta busquemos los planos que sean tangentes al cono y paralelos a la dirección de la luz. Las generatrices de contacto de estos planos, (digo generatrices porque sabemos que todo plano tangente a una superficie desarrollable lo es a la superficie a lo largo de una generatriz. Ver Aparici, Teorema 313) nos darán las líneas que separan la parte en sombra de la parte en luz del cono.

Sabiendo que los planos tangentes deben contener una generatriz tenemos que el vértice **V** del cono pertenecerá a los planos buscados y como éstos deben ser paralelos a **L**₁ tenemos que deben contener el rayo de luz que pasa por **V**.

Para la determinación de las trazas de estos planos sobre el plano β (plano de la directriz) determinaremos la traza del rayo **L**, punto que ya nos daría un elemento de la traza. Luego en base al teorema que dice: "La tangente en un punto de la línea de intersección de un plano con una superficie cualquiera es la recta de intersección del plano con el plano tangencial a la superficie en este punto", hallaríamos las trazas, trazando por **Q** las posibles tangentes a la directriz. Unimos luego estos puntos de tangencia con el vértice del cono y tendremos así las generatrices buscadas.

Hago notar que una vez determinado **Q'** y **Q''** el trazado restante se puede llevar a cabo independientemente en cada proyección. Nosotros seguiremos con el estudio de la proyección vertical, repitiéndose para la horizontal exactamente lo mismo.

Así una vez determinadas las generatrices que determinan la sombra propia del cono, tenemos que la parte de Ω (manto del cono) comprendida entre las generatrices recientemente determinadas y que vista desde **Q** es convexa, se encuentra exteriormente en luz y por lo tanto interiormente en sombra, hallándose la otra parte exteriormente en sombra e interiormente en luz.

Ahora nos falta determinar la **sombra arrojada** por el arco **T**₁ **E**₁ **T**₂ sobre el manto interior del cono. Para hallar la sombra de un punto cualquiera de este arco (1 p. ej.), trazaremos por él un rayo luminoso paralelo a **L** y determinaremos la intersección de éste con Ω . Para determinar ésta, haremos pasar por **1**, un plano que pase por **Q** y sea paralelo a **L** conteniendo por consiguiente este rayo de luz. Este plano cortará al cono en dos generatrices, las que serán **V**₁ y **V**₁' el rayo luminoso trazado por **1** cortará a la generatriz **V**₁' (con la que está en un mismo plano) en un punto **1s**, el que será la sombra arrojada por **1** sobre Ω . De análoga manera podemos determinar una serie de puntos de la sombra buscada.

Observando el procedimiento seguido podemos considerar que la sombra del arco de circunferencia **T**₁ **E**₁ **T**₂ sobre Ω no es otra cosa que la intersección del cono con el cilindro de sombra generatrices son paralelas a los rayos de luz y que tiene por directriz, la directriz del cono. Nos encontramos por lo tanto en presencia del caso de intersección de un cono con un cilindro de los cuales ya conocemos una parte de su curva de intersección o sea **B** (así denominaremos desde ahora la directriz). Los puntos **T**₁ y **T**₂ de ambas superficies son puntos dobles, es decir son puntos en que las superficies tienen un plano tangente común. Efectivamente los planos **VQT**₁ y **VQT**₂ serán en **T**₁ y **T**₂ tangentes al cono por serlo a lo largo de las generatrices que pasan por ellos y lo serán también al cilindro por contener las rectas **QT**₁ y **QT**₂ respectivamente que son tangentes a la directriz del cilindro en esos puntos y las generatrices **L**_{t1} y **L**_{t2} que pasan por esos puntos.

Ahora nos proponemos demostrar que la sombra que arroja \bar{B} sobre $\bar{\Omega}$ o sea un fragmento de la intersección del cono y cilindro, será una **curva plana**.

Antes de entrar a ésto debemos dar algunas definiciones sobre curvas y superficies de un orden determinado;

Así tenemos que curva plana de un orden n (cualquiera) es aquella que no es cortada por ninguna recta de su plano en más de n puntos y a la cual por lo menos una recta la cortará en n puntos.

Si una curva plana de orden n tiene más de n puntos comunes con una recta de su plano, podemos decir que un trozo de la curva coincide con la recta.

Se define por curva alabeada de orden n , aquella que no es cortada por ningún plano en más de n puntos y a la cual por lo menos un plano debe cortarla en n puntos.

Análogamente a lo que pasa con las curvas planas podemos considerar que si una curva alabeada de orden n , tiene más de n puntos comunes con un plano, éste contendrá un trozo de la curva.

Se define superficie de orden n aquella que es cortada por cualquier plano en una curva de orden n ; según ésto ninguna recta podrá cortar a una superficie de orden n en más de n puntos, porque si por la recta hacemos pasar un plano éste cortará a la superficie según una curva de orden n , la cual no podrá ser cortada por la recta en más de n puntos.

Una superficie de orden n y otra de orden m , poseen en común una curva cuyo grado no puede ser superior a $m.n$. Efectivamente un plano cualquiera ϵ corta a las dos superficies en dos curvas planas de orden m y n , las que de acuerdo a una deducción analítica tienen como máximo $m.n$ puntos comunes. Pero éstos son los únicos puntos comunes a las superficies que contiene ϵ . Por lo tanto la curva será de un órden que no puede ser superior a $m.n$.

Después de estas breves consideraciones sigamos con nuestro problema. Como hemos dicho, el cono y el cilindro poseen en T_1 y T_2 dos puntos dobles, debiendo pasar por estos últimos dos veces la curva de intersección entre cono y cilindro; ésto se ve inmediatamente si consideramos que toda recta que pase por T_1 y T_2 respectivamente y esté en el plano tangente común, tiene tanto con el cono como con el cilindro y por lo tanto también con su común intersección, dos puntos coincidentes en común.

Ahora podremos demostrar inmediatamente que la curva de sombra buscada es una curva plana.

Desde ya podemos adelantar que la curva completa de intersección entre el cono y el cilindro no estará en un solo plano, en vista de encontrarse todos los puntos pertenecientes a la directriz (que ya es una parte de la intersección) en un plano y puntos como el $1s$ fuera del mismo.

Tomemos uno de estos puntos cualesquiera y hagamos pasar por él y por los dos puntos dobles, un plano. Este plano tendrá cinco puntos comunes con la curva, si se tiene en cuenta que en cada uno de los puntos dobles cortará dos veces a la curva de intersección. Ahora si observamos que la curva de intersección de ambas superficies no puede ser de órden superior al 4^o (por tratarse de dos superficies de 2^o orden) y que sin embargo tiene cinco puntos comunes con un plano, tenemos de acuerdo a lo dicho anteriormente que una parte de la curva estará dentro del plano; es decir será plana. Al ser plana esta parte de la curva será forzosamente de 2^o orden por pertenecer a una superficie de tal órden, y en especial será una elipse por pertenecer a un cilindro. Denominaremos a esta elipse e_s .

Tenemos así ya dos fragmentos planos de la curva de intersección total: la directriz e perteneciente al plano β y la elipse e_s . Se ve inmediatamente que todo otro punto perteneciente a la curva de intersección debe hallarse sobre esta elipse, porque si hubiera un punto fuera de ella, tendríamos que un plano podría tener cinco puntos comunes con la curva, 1 el punto considerado, 2 y 3 los puntos en que el plano corte a "c", y 4 y 5 los puntos en que el plano corte a e_s . Esto no podría suceder porque la curva no podría ser de orden superior al 4º.

Tenemos así demostrado que todos los puntos $1s$, $2s$ etc. pertenecientes a la sombra arrojada por la directriz del cono, pertenecen a una **elipse** que pasará por los puntos T_1 y T_2 , por ser éstos puntos dobles por los que la curva de intersección de cono y cilindro debe pasar dos veces.

Considerando las dos curvas e y e_s como secciones planas de un mismo cilindro, vemos que ellas son afines homológicas entre sí y tendremos como eje de afinidad la recta de intersección de los dos planos ($T_1 T_2$) y como rayos de afinidad los paralelos a la dirección de los rayos de luz. Tenemos así a esta afinidad completamente determinada por el eje $T_1 T_2$ y un par de puntos correspondientes 1 y $1s$ p. ej. siéndonos de consiguiente fácil determinar la elipse e_s .

Busquemos ahora dos diámetros conjugados de e y determinemos los afines de éstos en el plano σ (como denominaremos desde ahora al plano de la elipse e_s), con los cuales ya podríamos trazar fácilmente a e_s .

Tomemos como uno de los diámetros de e al **I II** que es paralelo al eje **X**; su conjugado de acuerdo a la propiedad que dice: "las tangentes en el extremo de una cuerda se cortan sobre el diámetro que es conjugado respecto al que es paralelo a la cuerda", deberá pasar por **Q** y cortará a la elipse en **III** y **IV**. Los diámetros afines a éstos en σ los determinaremos ahora con la mayor facilidad con ayuda de los puntos afines **III** y **III_s** de los que el segundo se ha determinado previamente en la misma forma como se determinó **1s**.

Determinados así dos diámetros conjugados de la elipse e_s se podrán determinar fácilmente sus ejes y trazarla.

Para mayor exactitud del trazado podríamos determinar aún algunas tangentes en puntos de e_s . Propongámonos p. ej. determinar la tangente en el punto **1s** será la intersección del plano tangente en ese punto al cono, intersección de dos superficies es la recta de intersección de los planos que en ese punto son tangentes a las superficies"; tendremos que la tangente en el punto **1s** será la intersección del plano tangente en ese punto al cono, con el plano tangente en ese punto al cilindro. De esta recta de intersección un punto ya será directamente el punto **1s**, así que nos será suficiente determinar otro cualquiera. El plano tangente al cono estará determinado por la generatriz que pasa por **1s** y la tangente t_2 a la directriz en el pie de esta generatriz. Esta tangente será simultáneamente la traza de este plano sobre β . Ahora el plano tangente al cilindro estará igualmente determinado por la generatriz que pasa por **1s** y la tangente t_1 a la directriz en el punto en que ésta corte a la generatriz que pasa por **1s**. Esta tangente por pertenecer al plano tangente y a β será la traza del primero sobre el segundo, t_1 y t_2 pertenecen ambos a β y su intersección será por lo tanto un punto común a ambos planos tangentes. Uniéndolo por consiguiente con **1s** tendremos la tangente buscada.

Observemos aún lo siguiente sobre el punto de intersección de t_1 y t_2 . Sabemos de acuerdo a la teoría polar que si el polo de una recta se encuentra sobre una segunda recta, el polo de ésta se encuentra sobre la primera. En base de esto y observando que la intersección de t_1 y t_2 no es otra cosa que el polo de la cuerda $1\ 1_1$ y que el polo de X se encuentra sobre esta cuerda, tendremos que el polo de $1\ 1_1$ deberá estar sobre X . Por consiguiente t_1 y t_2 se cortarán sobre el eje de afinidad.

Tratemos de determinar las tangentes a e_s en los puntos T_1 y T_2 . Ellas serán las afines de QT_1 y QT_2 , en σ . Determinaremos por lo tanto en σ el punto Q_s afin de Q (T_1 y T_2 se corresponden así mismo por estar sobre el eje) el cual se encontrará también sobre la recta afin de $III\ IV$ y además sobre el rayo de afinidad QV . Determinado así Q_s , lo unimos con T_1 y T_2 , y tendremos las tangentes deseadas.

Ahora observaremos que $QV = Q_s V_1$ porque tendremos que ambos segmentos son las proyecciones del mismo segmento paralelo $III\ III_s$ desde los puntos IV_s y IV situados sobre una paralela a $III\ III_s$.

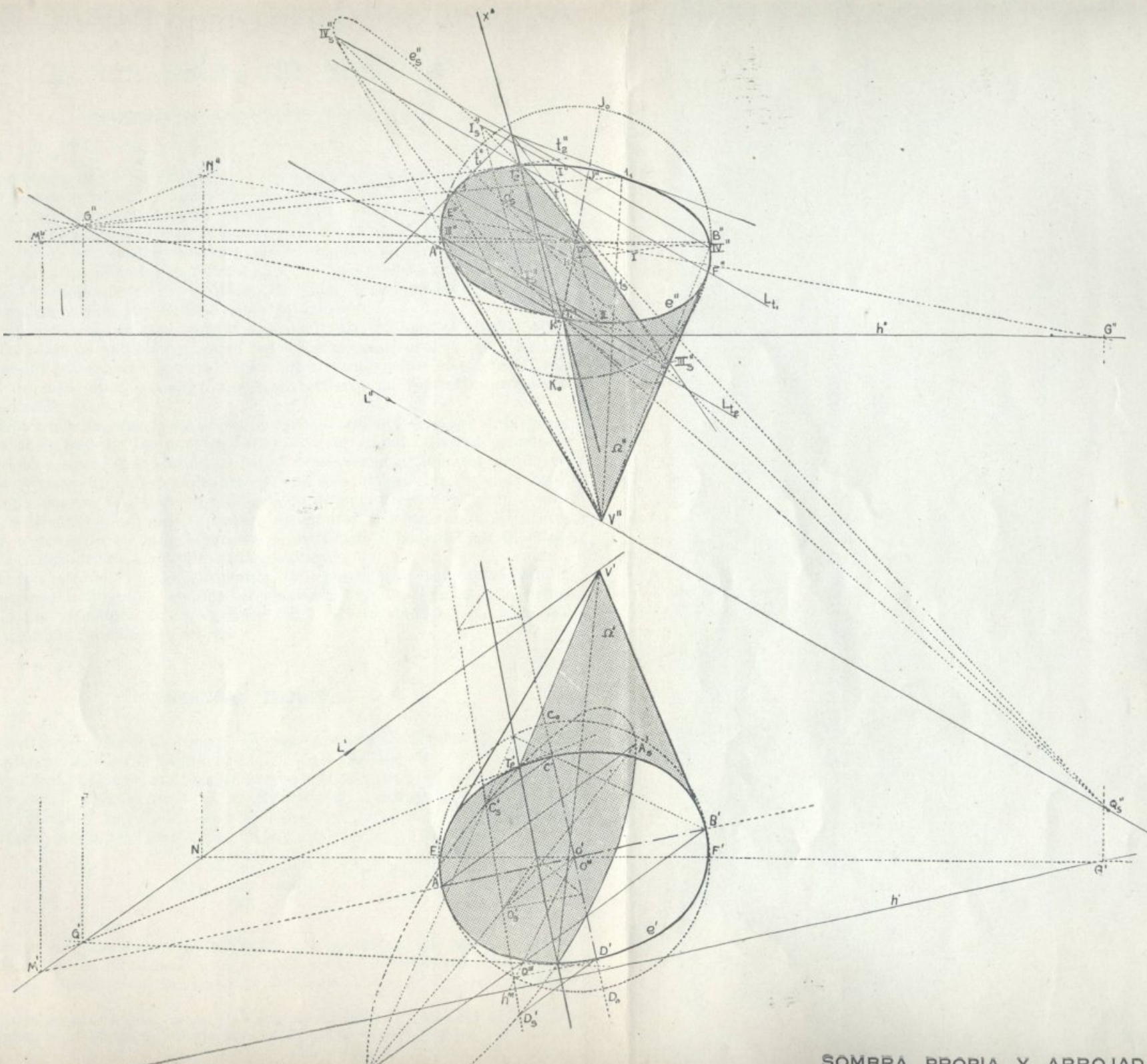
Como los rayos luminosos que pasan por T_1 y T_2 cortan a QV en el infinito, tendremos que este punto del infinito que llamaremos U , conjuntamente con V dividirán armónicamente a Q y Q_s .

$$Q\ Q_s\ VU = -1$$

Ahora como los haces T_1 ($Q\ Q_s\ VU$) y T_2 ($Q\ Q_s\ VU$) son perspectivas con la relación doble $Q\ Q_s\ VU$, tendremos que ellos también son haces armónicos. Luego en los puntos T_1 y T_2 tenemos que la tangente a la directriz y la tangente a la curva e_s , dividen armónicamente a la generatriz de sombras del cono y al rayo luminoso que pasa por esos puntos.

Diré brevemente aún, que se podrá trazar también la elipse e_s , haciendo $VQ_s = VQ$, luego se traza $Q_s T_1$ y $Q_s T_2$ teniendo así ya dos puntos y dos tangentes de e_s ; bastaría determinar un tercer punto cualquiera, como se ha hecho al comienzo para $1s$ y tendríamos cinco elementos de la elipse, quedando ésta por consiguiente completamente determinada, pudiéndose determinar cuantos puntos se quiera con ayuda del teorema de Pascal.

En la proyección horizontal hemos partido de los ejes de la elipse e' como diámetros conjugados, y hemos determinados los afines correspondientes en σ , pero previamente habíamos determinado O'_s deduciéndolo de la proyección vertical. Todo lo demás dicho para la proyección vertical es idéntico para la horizontal.



SOMBRA PROPIA Y ARROJADA

Nuevo método para el estudio acústico de las salas de audición

(TRADUCIDO DE IL POLITECNICO - ENERO 1935)

El problema de poder establecer a priori, ya durante el período de proyecto, el comportamiento acústico de una sala ha sido uno de aquellos que han preocupado a los arquitectos especialmente en estos últimos siglos. Varios hombres de ciencia se han apasionado en la búsqueda de una solución; y, en defecto de una verdadera teoría, sin el estímulo de un apoyo científico-matemático, varios métodos empíricos han sido propuestos; métodos sin embargo casi exclusivamente de verificación. Ni el descubrimiento del **tiempo de reverberación**, hecho por Sabine agota la cuestión.

Hasta pocos años hace no existía un cálculo directo para el estudio acústico de las salas de audición y, entre todos los métodos propuestos, ninguno era aceptable con carácter general. Ellos eran considerados más como explicaciones de salas bien resueltas que como criterio de conducta universalmente aplicable.

Se diferencia de éstos, y se presenta verdaderamente original en la parte referente al estudio de las paredes reflejantes, el método directo propuesto por el francés Lyon. Este divide la pared destinada a reflejar el sonido en partes proporcionales a los cuadrados de los recorridos de los rayos sonoros, de modo de asignar una porción más grande de superficie a los puntos más lejanos de la sala y una más pequeña a los puntos más próximos. El procedimiento, a pesar de ser muy laborioso y justificado solamente por la intuición, se ha demostrado aceptable en la práctica.

El nuevo método (1), aquí propuesto, que, por cuanto respecto al estudio de las paredes reflejantes, conduce a resultados muy próximos a aquellos obtenibles por el método de Lyon, tiene sobre éste la ventaja de una mayor rapidez y de un fundamento teórico.

PREMISAS TEORICAS

Es necesario recordar primero algunas nociones generales de acústica y en particular aquella de curva isofónica, base del método.

Si una fuente sonora puntiforme produce un sonido de intensidad I , una superficie en el espacio, puesta a la distancia R y orientada de modo que su normal forme el ángulo β con la dirección del haz de rayos sonoros que lo encuentra, recibe por unidad de área y de tiempo, la energía:

$$E = \frac{I}{R^2} \cos \beta \quad 1)$$

Llámanse entonces **superficie isofónica** una superficie tal que —admitida la constancia de la intensidad I , ésto es la uniforme irradiación del sonido en todas las direcciones— la densidad del flujo de energía sonora en cada

(1) El procedimiento ha sido expuesto por el autor en una de las sesiones de la XXIV Reunión de la Sociedad Italiana para el Progreso de las Ciencias.

punto de la superficie sea la misma; esto es una superficie en que $E =$ constante.

La expresión "intensidad" se entiende aquí en sentido análogo a aquel que se le dá en fotometría: relación entre el flujo de energía que viaja en un cono y el ángulo sólido de éste. Al contrario sin embargo de cuanto sucede en óptica, la energía del sonido directo no es solamente aquella contenida en el haz de rayos que parten de la fuente y se apoyan en el oído, ya que por ejemplo las paredes que están inmediatamente detrás de las espaldas del oyente refuerzan el sonido. Término medio, con aproximación suficiente, se podrá considerar que la E relativa al oído sea proporcional a la E relativa a aquella parte de la superficie de la sala (gradería, pared, etc.) que se halla adosada al oyente. En otros términos, se puede sustituir al oyente por un trozo de la superficie de la sala.

La sala, por lo tanto, estará bien conformada respecto al sonido directo, siempre que la superficie interesada sea isofónica.

Para simplificar el problema, se reduce de 3 a 2 el número de las dimensiones, considerando en el plano una **curva isofónica**, lugar de los puntos en los cuales E es constante.

Excluido el caso particular de la circunferencia, que resulta inmediatamente de la 1) poniendo $\cos \beta = 1$, en la curva isofónica serán variables tanto R como β .

Poniendo en el centro de emisión, el origen S de un sistema de coordenadas polares R y φ se llega a la relación:

$$R^2 = \frac{I}{E} \sin 2\varphi = A \sin 2\varphi \quad 2)$$

El máximo radio vector está a lo largo del eje de simetría ST y tiene el

valor $\sqrt{\frac{I}{E}} = \sqrt{A}$; el área tiene el valor $\frac{A}{2}$, como se reconoce calculando:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} R^2 d\varphi = \frac{1}{2} A \int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi d\varphi = \frac{A}{2}$$

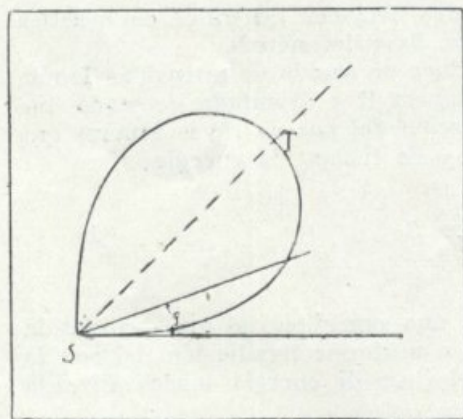


Figura 1

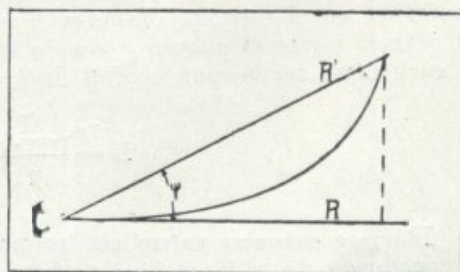


Figura 2

Está claro entonces que la condición $E = \text{Const.}$ se puede utilizar mediante una curva **mixta**, esto es constituida de arcos de una curva (2) y de arcos de círculo. Por ejemplo, se puede hacer rotar una mitad de la curva (fig. 1) alrededor de S de modo de desdoblarse en ST' y ST'' e intercalar un arco de círculo $T'T''$ con centro en S.

La curva isofónica (2) puede ya servir para proyectar racionalmente la sección longitudinal de una sala de audiciones y, en particular, para establecer el perfil de la gradería (idealizado).

De la curva isofónica se puede pasar a la construcción de una superficie isofónica en diferentes modos, por ejemplo, hacer rotar la figura 1 alrededor del eje ST ; o bien alrededor de una recta que, pasando por S, sea normal a ST y esté contenida en el plano de la fig. 1.

Más a menudo bastará fijar la sección longitudinal de la sala como se ha dicho y asignar a la planta una forma conveniente. En la figura 2, que es una sección longitudinal de la sala, el perfil es un arco de curva isofónica de constante A' . Queriendo que tal sea también aproximadamente la sección de la sala hecha con el plano inclinado que tiene por traza R' , basta, según la fig. 2 y la fórmula (2), que la planta de la sala sea isofónica con constante $A = A' \cos^2 \varphi$.

Determinados los perfiles, el problema estaría concluido si se tuviese que considerar sólo el sonido directo. ¿Cómo tener en cuenta también aquel regularmente reflejado? Nos hemos propuesto resolver la cuestión adoptando el siguiente **criterio**: mantener el perfil longitudinal ya establecido en base al sonido directo y hacer de manera que aquél resulte isofónico también para el sonido reflejado por la superficie especular.

El fin será alcanzado cuando se consiga obtener una superficie reflectora que dé imágenes sonoras, tales de poderlas considerar como origen de una misma curva isofónica, que se desplaza en el espacio de modo de coincidir por breves trozos sucesivos con el perfil ya establecido.

Llamemos con A_1 la constante de la curva isofónica móvil. Se trata pues de encontrar primero una curva isofónica A_1 , que tenga en un punto cualquiera la misma curvatura que, en un punto genérico C tiene la curva isofónica A establecida ya como perfil; luego ver donde es necesario ubicar el origen S_1 de esta curva A_1 para que tenga lugar la coincidencia requerida. Finalmente encontrar el espejo que dé este origen como imagen del centro de emisión.

a) **Puntos, de curvas isofónicas diversas, con igual curvatura.**

Teniendo presente la (2):

$$R^2 = A \operatorname{sen} 2 \varphi$$

de la expresión del radio de curvatura en coordenadas polares:

$$\rho = \frac{\left[R + \left(\frac{d\varphi}{dR} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{R^2 + 2 \left(\frac{dR}{d\varphi} \right)^2 - R \frac{d^2 R}{d\varphi^2}}$$

siendo:

$$\frac{dR}{d\varphi} = \sqrt{\frac{A \cos 2\varphi}{\text{sen} 2\varphi}}$$

$$\frac{d^2R}{d\varphi^2} = - \sqrt{\frac{A}{(\text{sen} 2\varphi)^{\frac{3}{2}}}} \frac{1 + \text{sen} 2\varphi}{2}$$

sustituyendo, en el numerador se tiene:

$$R^2 + \left(\frac{dR}{d\varphi}\right)^2 = \frac{A}{\text{sen} 2\varphi} \quad 3)$$

y en el denominador:

$$R^2 + 2 \left(\frac{dR}{d\varphi}\right)^2 - R \frac{d^2R}{d\varphi^2} = \frac{3A}{\text{sen} 2\varphi}$$

El radio de curvatura en un punto genérico de una curva isofónica resulta entonces:

$$\rho = \frac{\left(\frac{A}{\text{sen} 2\varphi}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3A}{\text{sen} 2\varphi}} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{A}{\text{sen} 2\varphi}} \quad 4)$$

Dadas ahora dos curvas isofónicas:

$$R^2 = A \text{sen} 2\varphi$$

$$R_1^2 = A_1 \text{sen} 2\varphi_1$$

cuyos radios de curvatura genéricos son respectivamente:

$$\rho = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{A_1}{\text{sen} 2\varphi}}$$

$$\rho_1 = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{A_1}{\text{sen} 2\varphi_1}}$$

poniendo $\rho = \rho_1$ y por lo tanto:

$$\frac{1}{3} \sqrt{\frac{A}{\text{sen} 2\varphi}} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{A_1}{\text{sen} 2\varphi_1}}$$

se llega a la relación:

$$\frac{A}{\operatorname{sen} 2\varphi} = \frac{A_1}{\operatorname{sen} 2\varphi_1} \quad 5)$$

Ella nos dice que son infinitas las curvas que resuelven el problema, pero sobre cada una de ellas el punto de igual curvatura está bien definido. Como se verá en la exposición del método, la indeterminación del resultado constituye una ventaja.

b) **Posición del origen de la curva A_1 .** — Se recuerda que, dada una línea en coordenadas polares, el ángulo que el radio vector forma con la normal a la línea, está expresado por:

$$\cos \beta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{dR}{d\varphi}\right)^2}}$$

En el caso de las curvas isofónicas, teniendo presente la (2) y la (3), se tiene (fig. 3):

$$\cos \beta = \operatorname{sen} 2\varphi$$

o lo que es equivalente:

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{ctg} 2\varphi \quad 6)$$

Tomando ahora dos curvas isofónicas y haciendo coincidir el punto C, en el cual ellas tienen curvatura igual, de manera que en CO vengan a sobreponerse los radios de curvatura, llamamos con δ el ángulo comprendido por los dos radios vectores.

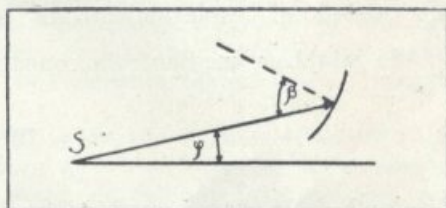


Figura 3

De la fig. 4 se ve que:

$$a = \beta - \beta_1$$

pero de la 6)

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{ctg} 2\varphi$$

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \operatorname{ctg} 2\varphi_1$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} a &= \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta_1}{1 + \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \beta_1} = \\ &= \frac{\operatorname{ctg} 2\varphi - \operatorname{ctg} 2\varphi_1}{1 + \operatorname{ctg} 2\varphi \cdot \operatorname{ctg} 2\varphi_1} = \operatorname{tg} (2\varphi_1 - 2\varphi) \end{aligned}$$

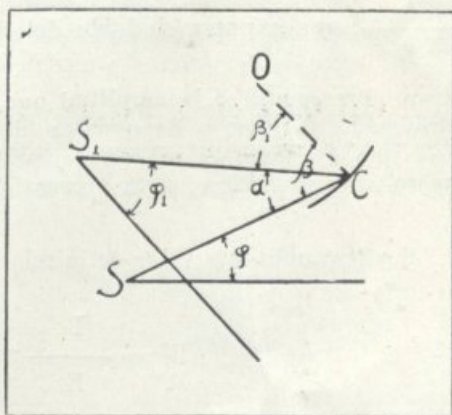


Figura 4

o sea:

$$a = 2(\varphi_1 - \varphi) \quad 7)$$

Esta fórmula y la 5) permiten una rápida solución del siguiente problema: Dada una curva isofónica y fijado un punto C sobre ella, encontrar la recta sobre la que está el origen S_1 , de otra curva —de constante A_1 — que coincida en C con la curva dada.

El origen S_1 de la curva A_1 se determina llevando sucesivamente, sobre la dirección encontrada, el segmento R_1 , relativo a φ_1 y A_1 , dado por la fórmula general (2).

c) **Especjos.** — Encontrado el punto S_1 que debe ser imagen del punto sonoro S , es necesario encontrar un espejo adaptado.

Espejos planos, convexos o cóncavos, que resuelvan tal cuestión, los hay infinitos. Será por lo tanto criterio del proyectista escoger aquel que responda mejor a las exigencias técnicas o estéticas.

EL NUEVO METODO

Valiéndose de los conocimientos teóricos que anteceden puede desarrollarse el estudio acústico de una sala de audiciones del modo siguiente:

a) **Sonido directo.** — Se fija la posición más desfavorable del baricentro del conjunto de instrumentos y voces (y ello por cuanto si bien los instrumentos tienen una posición determinada no puede decirse lo mismo para las voces debido al desplazamiento de los actores sobre la escena).

Se establece, mediante la conocida fórmula:

$$S = 10 \log. \frac{E}{E_0}$$

el valor E de la energía recibida, una vez fijado para E_0 el valor en el ingreso y para S el valor en **decibel** de la sensación deseada.

Tomado el valor medio de la intensidad sonora I , se controla si la relación

$\frac{I}{E}$, que expresa el doble del área de la superficie encerrada por la

curva, corresponde a la amplitud que se quiere asignar a la platea, una vez establecido el número de oyentes allí contenidos y el espacio ocupado por cada uno de ellos. Si tal correspondencia —que debe ser aproximada **por exceso**— no se tuviese, sería necesario variar el valor de la energía E .

Sustituyendo este valor de la relación $\frac{I}{E}$ en la fórmula:

$$R^2 = \frac{I}{E} \text{ sen}2\varphi = A \text{ sen}2\varphi$$

se construye la curva isofónica que tiene por origen el baricentro sonoro y por eje de simetría el eje de la sala.

Esta curva, así construída, delimita el espacio ocupado por la platea y, al mismo tiempo, señala el perfil de la fila de palcos.

En cuanto a la fila de butacas, estarán determinadas por arcos de círculo no concéntricos pero teniendo sus centros sobre el eje de la sala y precisamente sobre el segmento representativo del máximo desplazamiento que, a lo largo de este eje, puede tener un actor (esto es en relación con la profundidad del escenario) (fig. 5).

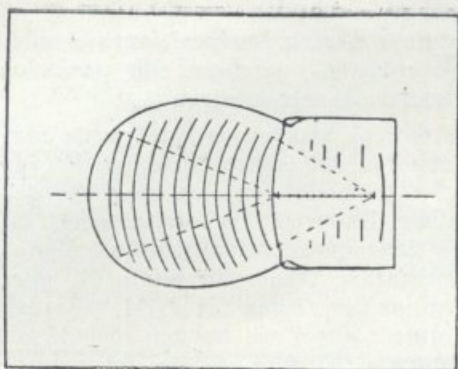


Figura 5

Definida de tal manera la planta de la sala —que toma una forma semejante a aquella llamada **en herradura**, que ha resultado de la experiencia una de las mejores—, se pasa a la sección longitudinal, esto es al perfil vertical de la platea.

La línea ideal que une las cabezas de los oyentes será también un trozo de curva isofónica, teniendo aproximadamente como constante el

$$\text{valor } A' = \frac{\Lambda}{\cos^2 \varphi}$$

centro de emisión.

Bajando el perfil encontrado paralelamente a sí mismo en una cantidad igual a la altura que el oído de un oyente de estatura media sentado tiene sobre el suelo (\sim m. 1.00), se obtiene el perfil del pavimento de la platea.

Es necesario sin embargo trazar ambas curvas, porque: la línea ideal servirá después para el procedimiento inherente al sonido reflejado, y el perfil del pavimento, cuando, por excesiva pendiente, no fuese posible dejarlo como curva servirá de guía al trazado de oportunas gradas, que sigan lo mejor posible, compatiblemente con las exigencias prácticas, el trazado de la isofónica.

b) **Sonido reflejado.** — Para el sonido reflejado —que no tiene menor importancia que el sonido directo— ocurre ante todo escoger la ubicación de las paredes reflejantes, de modo que ellas, no estando influenciadas por el coeficiente “público”, den siempre la misma contribución de energía.

Se aconseja por lo tanto escoger: el fondo del escenario, el techo de la sala y aquella parte de paredes verticales en las cuales no haya lugares para el público.

Elegidas estas paredes, se trata de determinar el perfil vertical de modo que aquellas respondan a los requisitos necesarios para una distribución uniforme del sonido reflejado. Teniendo presente cuanto se ha dicho en las premisas, se procederá del modo siguiente:

En la sección longitudinal de la sala se divide la curva A' que pasa por los oídos de los oyentes, en tramos y se señalan los centros 1, 2, ... de estos tramos (fig. 6). A cada punto así fijado aquíquese la (5) bajo la forma

$$\text{sen } 2\varphi_1 = \frac{A_1}{A} \text{ sen } 2\varphi$$

dando a A_1 un valor arbitrario, que permanece constante pasando de uno a otro de los puntos 1, 2, ... Sustituyendo en la (7):

$$a = 2\varphi_1 - 2\varphi$$

los valores $2\varphi_1$ encontrados, se trazan, desde los puntos 1, 2, ... dados, las rectas que formen los ángulos a con los respectivos radios vectores, y sobre ellos se llevarán respectivamente los segmentos obtenidos de:

$$R_1^2 = A_1 \text{ sen } 2\varphi$$

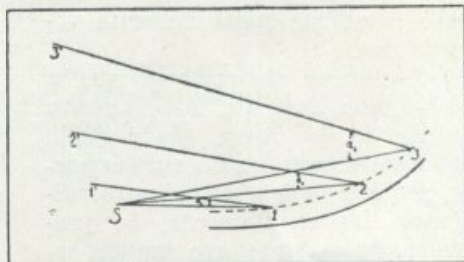


Figura 6

Los puntos 1', 2', ... así encontrados no son sino las posiciones donde sería preciso poner cada vez el origen de la curva A_1 , para que ella, pasando sucesivamente por los puntos 1, 2, ... coincida allí con la curva A.

Reuniendo estos puntos 1', 2', ..., se obtiene una curva que puede ser considerada como lugar de las imágenes sonoras del centro S de emisión, a través de una superficie especular o curva formada por una sucesión de espejos planos 1'', 2'' ..., fácil de determinar. Dada en efecto una fuente S y su imagen I, si el espejo es plano éste debe encontrarse sobre el plano mediano del segmento SI (fig. 7); si es esférico, fijado un punto M, por el cual se desea que el espejo pase, trácense las dos rectas SM e IM, trazada después la bisectriz del ángulo SMI, si se quiere que I sea imagen real de S, el punto O en el cual la bisectriz encuentra a SI será centro del espejo cóncavo elemental de radio OM y el rayo reflejado será $r \equiv MI$. Si en cambio

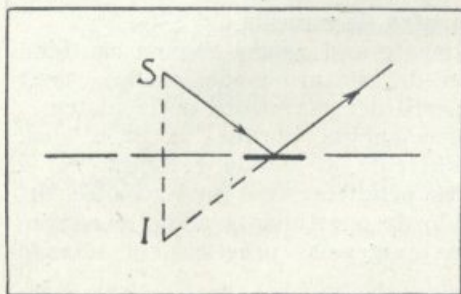


Figura 7

I debe ser imagen virtual de S, trácese por M la perpendicular a la bisectriz OM, el punto O' en el cual esta perpendicular encuentra a la recta SI será centro del espejo convexo de radio O'M y el rayo reflejado será $r \equiv IM$. Este espejo podrá resultar cóncavo como en fig. 8 o convexo, según donde caiga el punto O'.

Bien entendido, las construcciones indicadas para los espejos esféricos valen cuando subsisten las hipótesis de aproximación que suelen hacerse en la óptica geométrica elemental.

El conjunto de espejitos 1'', 2'', ... elementales, modificado eventualmente y oportunamente para tener en cuenta las exigencias artísticas o constructivas, constituye una de las posibles superficies reflejantes, que, a menos del coeficiente de absorción, dan a la sala la contribución E_1 de energía.

Haciendo variar el valor de la constante A_1 , se obtendrán, con el método ya descrito, otras superficies reflejantes y se podrá por lo tanto escoger entre estas superficies o combinar oportunamente varias juntas.

Debe notarse sin embargo que, a medida que aumenta A_1 , aumenta también R_1 [v. form. (5) y (2)]; por lo tanto no todas las curvas pueden ser adoptadas en el procedimiento. Más exactamente, la precaución de evitar el eco impide sobrepasar el valor A_1 , por lo cual se obtiene en correspondencia un valor R_1 tal que:

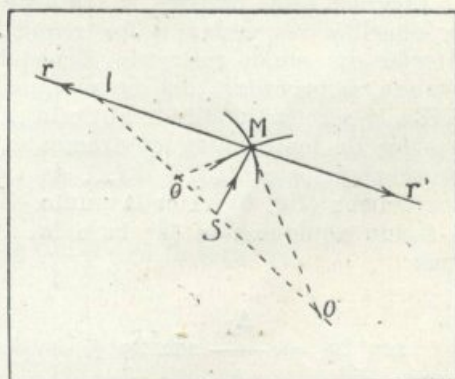


Figura 8

$$[R_1 - R] = 30 \text{ metros}$$

El método se podrá aplicar a cualquier pared de la sala, que —por las consideraciones hechas— haya sido elegida como pared reflectora.

A fin de hacer más claro el procedimiento sugerido para determinar el perfil de las paredes reflejantes, se da en la figura 9 un ejemplo. S es la fuente sonora, 1 2 3 ... el perfil longitudinal isofónico, 1' 2' 3' ... la curva que constituye el conjunto de las imágenes, 1'', 2'', 3'', ... el conjunto de los espejos elementales. Del dibujo se ve que ellos no forman una superficie continua. El proyectista podrá o hacerla continua adoptando sucesivamente valores de A_1 no muy diversos uno de otro y mediante modificaciones no esenciales, tanto más lícitas en cuanto la reflexión de las ondas sonoras es siempre más o menos difusa; o dejarla discontinua intercalando entre los elementos 1'', 2'', ... superficies absorbentes, si se desea tener un tiempo de reverberación pequeño.

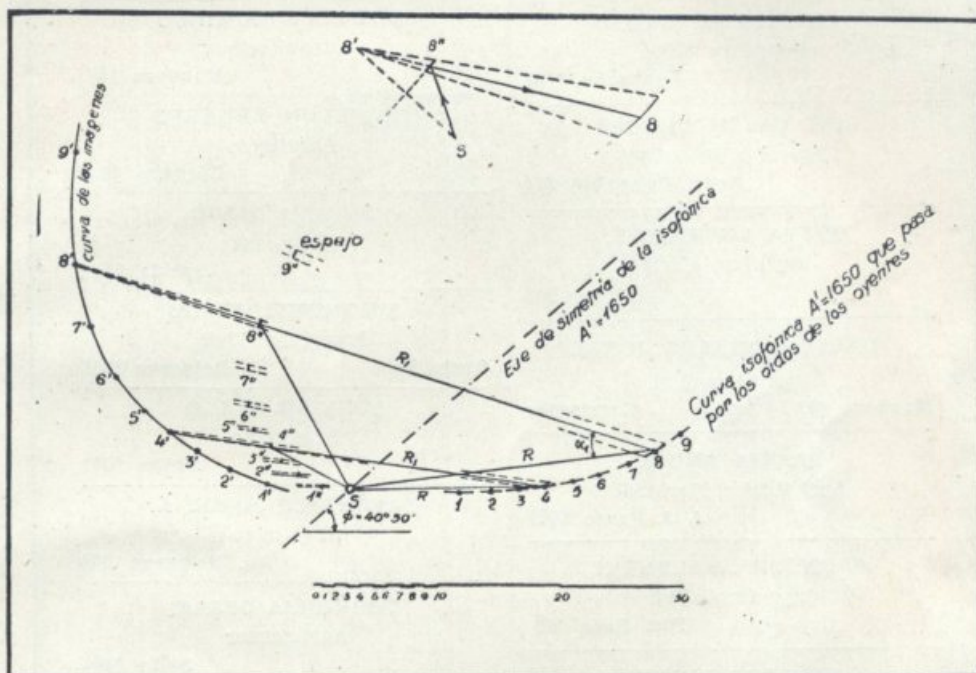


Figura 9

Adoptar un solo valor de A_1 o diversos valores dependerá únicamente de la contribución de energía sonora que se desea tener de la superficie reflejante, porque las energías E_1 recibidas se suman.

Aun procediendo de modo racional y expedito se tiene amplia libertad de acción.

ENNIO MANFREDONIA.

— GUIA PROFESIONAL —

BERIZZO ANTONIO J.

Ingeniero Civil

Sarmiento 333 U. T. 7956

CASELLA ALBERTO T.

Ingeniero Civil

Laprida 2192

D'ANGELO JUAN

Ingeniero Civil

Ayacucho 1762

DIAZ VALENTIN JOSE

Ingeniero Industrial

Avda. Pellegrini 634

DOTTA LORENZO Z.

Ingeniero Civil

Alvear 543

FIALLO MONTERO JORGE

Ingeniero Civil

Mendoza 467 Corrientes

GARCIA ANGEL

Agrimensor Nacional

J. J. Passo 1187

GRONDONA VALENTIN

Ingeniero Civil

Pte. Roca 175

LAPORTE LUIS B.

Ingeniero Civil

1º de Mayo 1059

MALAJOVICH LUIS

Ingeniero Civil

Est. La Chispa (F. C. C. A.)

MOUNIER CELESTINO

Ingeniero Civil

Santa Fe, San Gerónimo 3277

OCCHILUPPO ITALO

Ingeniero Civil

San Juan 455

PICASSO Y FERNANDEZ DIAZ

Arquitectos

Paraguay 594 U. T. 22518

QUAGLIA EDMUNDO D.

Ingeniero Civil

Italia 531

RIAL CELESTINO P.

Agrimensor

Reconquista 1180

RICARDO PABLO E.

Ingeniero Civil

Montevideo 530

RIZZOTTO DOMINGO

Arquitecto

Mendoza 1581

ROUILLON ERNESTO

Arquitecto

Córdoba 1995

SIBURU DAVID

Agrimensor

Laprida 1146

SIMONUTTI ATILIO

Ingeniero Civil

Santa Fe Belgrano 3055

SONVICO PABLO

Arquitecto

Colón 1661

TAVERNIER JORGE A.

Arquitecto

Av. Belgrano 348

TORRIGLIA CESAR

Agrimensor

Salta 2484

VACCA ENRIQUE

Agrimensor

E. Zeballos 642

VERGARA OROÑO G.

Agrimensor

U. T. 0249 San Luis 1188

VESCOVO CARLOS

Arquitecto

E. S. Zeballos 2084

VIEYRA ANTONIO H.

Agrimensor

Felipe Moré 1205

WEIHMULLER WALDO

Ingeniero Civil

U. T. 9792 Alvear 470

ZANOTTI PASCUAL E.

Ingeniero Civil

Maipú 841 U. T. 20774