Instituto Politécnico

Universidad Nacional de Rosario

Números Reales

2º Año

Cód. 1202-20

Napolitano, Mónica
Napoli, Carla
Revisión: Módica, Antonela

Dpto. de Matemática

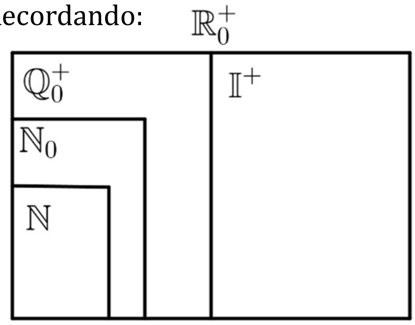
Matemática

Masterización: RECURSOS PEDAGOGICOS

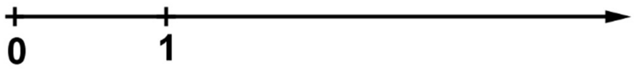
CAPÍTULO 1: "CONJUNTO DE NÚMEROS REALES"

Presentación del conjunto de los números reales y el eje real

En cursos anteriores has trabajado con los elementos del conjunto $\mathbb{R}_0^+$. Viste como estaba constituido dicho conjunto numérico. Recordando:



También has representado a mucho de ellos en la recta numérica. De hecho, habrás notado que todos estos números reales no negativos eran abscisas de puntos que se encontraban en una semirrecta.



Es lógico preguntarse si los puntos simétricos respecto de "o" (cuya abscisa es cero) por medio de una simetría central (¡completando así una recta!) serán también abscisas de números. En efecto sí los representan, ellos son los ***números reales negativos***.

CONJUNTO DE NÚMEROS REALES NEGATIVOS

Un número real negativo es aquel cuyo punto representativo es el simétrico respecto a "o" de un punto cuya abscisa es un número real positivo.

Al conjunto de esos números se lo denomina "**conjunto de los números reales negativos**" y lo simbolizamos $\mathbb{R}^-$

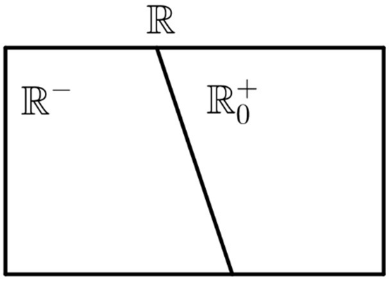
Observaciones y ejemplos

- ☑ A la abscisa de los infinitos puntos simétricos de aquellos cuya abscisa son números reales positivos, le anteponemos un guion "-"
    - Por ejemplo, la abscisa del punto simétrico al de abscisa 8, convenimos escribirlo "-8" y se lee "menos ocho".
- ☑ De esta forma a los números reales positivos le deberíamos anteponer el signo "+" pero convenimos su pertenencia a $\mathbb{R}^+$ sino le precede ningún signo. Por ejemplo, el número $5 \in \mathbb{R}^+$, deberíamos escribirlo $+5$, pero simplemente lo escribimos como 5.
- ☑ Convenimos, además, al número cero no considerarlo ni positivo ni negativo, y por lo tanto no le antepondremos ningún signo.

CONJUNTO DE NÚMEROS REALES

El conjunto de los números reales, que simbolizamos $\mathbb{R}$, es el conjunto unión de los conjuntos de los números reales negativos y el conjunto de los números reales no negativos.

Simbólicamente: $\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}_0^+$



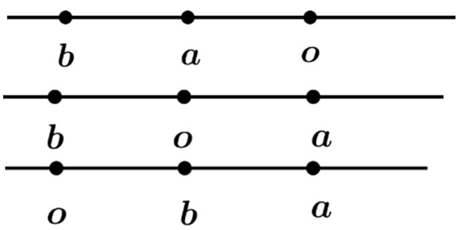
ACTIVIDAD

1. Representa en el eje real los números $\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \frac{5}{3}, -\frac{5}{3}$

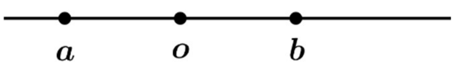
Orden en el conjunto de los números reales.

Consideremos dos números reales a y b, y un eje real.

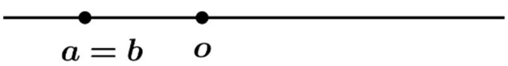
➔ Tal cual a lo realizado en cursos anteriores con los números reales no negativos, decimos que "$\boldsymbol{a}$ es mayor que $\boldsymbol{b}$", y simbolizamos $\boldsymbol{a > b}$ si el punto representativo de $\boldsymbol{a}$ sobre el eje real está a la derecha del punto representativo de $\boldsymbol{b}$.



➔ Decimos que "$\boldsymbol{a}$ es menor que $\boldsymbol{b}$", y simbolizamos $\boldsymbol{a < b}$ si el punto representativo de $\boldsymbol{a}$ sobre el eje real está a la izquierda del punto representativo de $\boldsymbol{b}$.



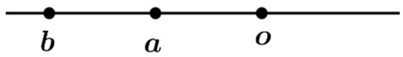
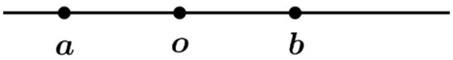
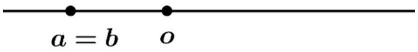
➔ Decimos que "$\boldsymbol{a}$ es igual que $\boldsymbol{b}$", y simbolizamos $\boldsymbol{a = b}$ si el punto representativo de $\boldsymbol{a}$ sobre el eje real coincide con el punto representativo de $\boldsymbol{b}$.



Según lo enunciado:

Las expresiones $\boldsymbol{a < b}$ y $\boldsymbol{b > a}$ son equivalentes

Podemos expresar lo anterior haciendo uso de distintos lenguajes:

Lenguaje Gráfico	Lenguaje Coloquial	Lenguaje Algebraico
	$\boldsymbol{a}$ es mayor que $\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a > b}$
	$\boldsymbol{a}$ es menor que $\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a < b}$
	$\boldsymbol{a}$ es igual que $\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a = b}$

En general:

Ley de tricotomía

Dados dos números reales $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, puede ocurrir una, y sólo una, de las tres posibilidades:

$$\boldsymbol{a < b} \text{ ó } \boldsymbol{a > b} \text{ ó } \boldsymbol{a = b}$$

Más simbología y conceptos

- ☑ $\boldsymbol{a \leq b}$ se lee: "a es menor o igual que b". Indica que puede ocurrir alguna de las siguientes posibilidades: $a < b$ o $a = b$. Es la negación de que a sea mayor a b; es decir, es el equivalente a $a \ngtr b$.
- ☑ $\boldsymbol{a \geq b}$ se lee: "a es mayor o igual que b". Indica que puede ocurrir alguna de las siguientes posibilidades: $a > b$ o $a = b$. Es la negación de que a sea menor a b; es decir, es el equivalente a $a \nless b$.
- ☑ Si queremos describir que un número real <u>x se encuentra entre otros dos números reales a y b</u>, es decir que $x > a \wedge x < b$ lo podemos escribir de forma más simple: $\boldsymbol{a < x < b}$.

ACTIVIDADES

2. Completa con “>”, “<” o “=” según corresponda:

$-3 \ldots\ldots\ldots 2$ $\qquad$ $-3 \ldots\ldots\ldots -4$ $\qquad$ $-3 \ldots\ldots\ldots -1$ $\qquad$ $-3 \ldots\ldots\ldots 0$

$-2,\overline{9} \ldots\ldots\ldots -3$ $\qquad$ $-1,\overline{5} \ldots\ldots\ldots -\dfrac{14}{9}$ $\qquad$ $-\sqrt{2} \ldots\ldots\ldots \sqrt{2}$ $\qquad$ $-\sqrt{5} \ldots\ldots\ldots -\sqrt{2}$

$-0{,}11 \ldots\ldots\ldots -0{,}1$ $\qquad$ $-1,\overline{2} \ldots\ldots\ldots -\dfrac{4}{3}$ $\qquad$ $5 \ldots\ldots\ldots -\pi$ $\qquad$ $8 \ldots\ldots\ldots -8$

3. Sea el conjunto $A = \left\{-15; 10; 9; -7; 0;\ -\sqrt{3};\ -\frac{3}{5};\ -\sqrt{962}\right\}$. Escribe por extensión los siguientes conjuntos:

$$B = \{x \in A / x \in \mathbb{R}_0^+\}$$
$$C = \{x \in A / x \in \mathbb{R}^-\}$$
$$D = \{x \in A / x > -32\}$$
$$E = \{x \in A / -8 < x \leq 5\}$$

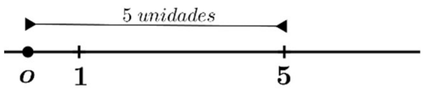
Valor absoluto de un número real.

DEFINICIÓN “VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO REAL”

Dado un número real cualquiera $x \in \mathbb{R}$, definimos el <u>valor absoluto de x</u>, y lo <u>simbolizamos $|x|$</u> a la distancia existente entre el punto representativo de dicho número sobre el eje real y el punto representativo de cero (el origen)

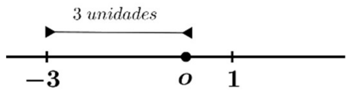
<u>Ejemplos:</u>

➔ $|5| = 5$



➔ $|0| = 0$ ya que la distancia entre un punto y él mismo es cero

➔ $|-3| = 3$



Observemos que al ser el valor absoluto la medida de una distancia entre puntos resultará siempre un número mayor o igual a cero. En símbolos:

$$\forall x \in \mathbb{R}: \qquad |x| \geq 0$$

ACTIVIDADES

4. Completa el cuadro:

Número	Signo	Valor absoluto
-12		
	"-"	2,3
20		
-5,2		

5. Responde:

   a. Si $x \in \mathbb{R}^+$ y $|x| = 8$; ¿qué valor tiene x?

   b. Si $x \in \mathbb{R}^-$ y $|x| = 8$; ¿qué valor tiene x?

   c. Si $x \in \mathbb{R}$ y $|x| = 8$; ¿qué valores tiene x?

6. En cada ítem, determina, si existen, el o los valores de "x":

a. $|x| = 3$ **b.** $|x| = 2{,}7$ c. $|x| = 0$ d. $|x| = -6$

7. Completa con "menor", "mayor" o "igual" según corresponda:

   a. Todo número real positivo es................................ que un número real negativo.

   b. El cero es............................ que todo número real positivo y .... que todo número real negativo.

   c. Dos números reales no nulos son iguales cuando tienen .... valor absoluto e igual signo.

   d. Si dos números reales son positivos, es menor el que tiene .... valor absoluto.

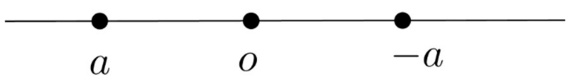
   e. Si dos números reales son negativos, es menor el que tiene .... Valor absoluto.

Opuesto de un número real.

DEFINICIÓN "OPUESTO DE UN NÚMERO REAL"

Dado un número real cualquiera $a \in \mathbb{R}$, definimos el <u>opuesto de $\boldsymbol{a}$</u>, y lo <u>simbolizamos $-\boldsymbol{a}$</u>, al número real cuyo punto representativo en el eje real es el simétrico respecto al origen, del punto representativo del primero

Gráficamente:



ACTIVIDADES

8. Representa en el eje real los siguientes números y sus opuestos: $-\frac{7}{3}$; 2 y $\sqrt{26}$.
9. Completa la siguiente tabla:

Número x	**Opuesto de x $(-x)$**	**Signo de x**	**Signo de $(-x)$**
15			
-8			
$-\sqrt{15}$			
$\frac{17}{13}$			
0			

Teniendo en cuenta tus cálculos, podemos realizar la siguiente observación:

- ☑ El **opuesto de cero es cero.** Simbólicamente: $a = 0 \Longrightarrow (-a) = 0$
- ☑ Si a es un número real <u>positivo</u>, entonces <u>su opuesto es negativo</u>. Simbólicamente: $a > 0 \Longrightarrow (-a) < 0.$
- ☑ Si a es un número real <u>negativo</u>, entonces <u>su opuesto es positivo</u>. Simbólicamente: $a < 0 \Longrightarrow (-a) > 0.$

¡Atención! El símbolo “-“ y el signo de un número.

Teniendo en cuenta la observación anterior podemos inferir que el símbolo “-“ que precede a una variable no determina su signo, de hecho, vemos que $(-a)$ puede ser positivo o negativo o siquiera tener signo (como sucede con cero).

Usando la definición de valor absoluto y de opuesto de un número, podemos calcular el valor absoluto de un número real de la siguiente forma:

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

ACTIVIDADES

10. Completa con “>”, “<” o “=” según corresponda:

    Siendo a y b dos números reales no nulos y distintos

    $$a = (-b) \Leftrightarrow |a| \ldots\ldots\ldots\ldots.. |b|$$

11. Justifica por qué los siguientes enunciados son falsos.
    a. $\forall x \in \mathbb{R}\ /\ |x| > 0 \Longrightarrow (-x) < 0$
    b. Si $x < -5 \Longrightarrow |x| < 5$

12. En cada ítem, escribe simbólicamente y luego representa en el eje real, el o los números reales que cumplan las condiciones establecidas:
    a. Su valor absoluto es 3.
    b. Su valor absoluto es 5 y su opuesto es un número positivo.
    c. Su valor absoluto es menor que 2.
    d. Su opuesto es – 5.
    e. Su distancia al origen es mayor o igual que 4.
    f. Su valor absoluto es menor que 2 y es mayor que 1.

13. Elije la alternativa correcta:
    a. Dados dos números reales positivos es mayor:
        i. El que está representado en el eje real a mayor distancia del origen.
        ii. El que está representado en el eje real a menor distancia del origen.
    b. Dados dos números reales negativos es mayor:
        i. El que está representado en el eje real a mayor distancia del origen.
        ii. El que está representado en el eje real a menor distancia del origen.

SUBCONJUNTOS DE $\mathbb{R}$

Conjunto de números enteros $\mathbb{Z}$.

DEFINICIÓN "CONJUNTO DE NÚMEROS ENTEROS"

Es el subconjunto de elementos x de $\mathbb{R}$ que cumplen la condición de que su valor absoluto es un elemento de$\mathbb{N}_0$.

En símbolos: $\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} / \quad |x| \in \mathbb{N}_0\} = \{\dots ; -3; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$

Conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$.

DEFINICIÓN "CONJUNTO DE NÚMEROS RACIONALES"

Es el subconjunto de elementos x de $\mathbb{R}$ que se pueden expresar como fracción $\frac{p}{q}$

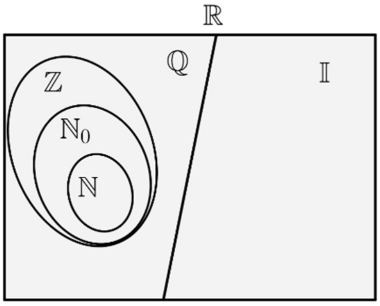
con $p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z} - \{0\}$

En símbolos: $\mathbb{Q} = \left\{x \in \mathbb{R} / \quad x = \frac{p}{q}\ , \ \ p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z} - \{0\}\right\}$

Conjunto de números irracionales I

DEFINICIÓN "CONJUNTO DE NÚMEROS IRRACIONALES"

Es el subconjunto de elementos x de $\mathbb{R}$ que se NO se pueden expresar como fracción. Es decir, son los números reales que no son racionales.



ACTIVIDADES

14. Indica con una X a qué conjunto pertenece cada número:

	$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\boldsymbol{I}$	$\mathbb{R}$
-6					
$-1,\overline{23}$					
0					
$-\sqrt{17}$					
$-\frac{1}{3}$					

15. Escribe por extensión cada uno de los siguientes conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{Z}/|x| < 3\}$ $B = \{x \in \mathbb{Z}/|x| = 3\}$

$C = \{x \in \mathbb{Z}/1 \leq |x| < 3\}$ $D = \{x \in \mathbb{Z}/|x| = -3\}$

$E = \{x \in \mathbb{N}_0/|x| < 1\}$ $F = \{x \in \mathbb{N}/|x| < 1\}$

16. Representa en el eje real cada uno de los siguientes conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{R}/|x| = 2\}$ $B = \{x \in \mathbb{R}/|x| < 2\}$

$C = \{x \in \mathbb{R}/|x| \leq 2\}$ $D = \{x \in \mathbb{R}/|x| \geq 2\}$

$E = \{x \in \mathbb{R}/1 < |x| \leq 2\}$ $F = \{x \in \mathbb{R}/|x| \neq 2\}$

$G = \{x \in \mathbb{Z}/|x| < 4\}$ $H = \{x \in \mathbb{R}/|x| = 0\}$

$J = \{x \in \mathbb{R}/|x| \geq 0\}$ $K = \{x \in \mathbb{R}/|x| < 0\}$

$L = \{x \in \mathbb{R}/|x| > 0\}$ $M = \{x \in \mathbb{R}/|x| = x\}$

$N = \{x \in \mathbb{R}/|x| = -x\}$ $P = \{x \in \mathbb{R}/|x| > -5\}$

17. Determina si cada una de las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). Justifica:

   a. El valor absoluto de un número real es siempre positivo.

   b. El valor absoluto de cero no existe.

   c. $\forall x \in \mathbb{R}: \quad |-x| = x$

   d. Si $-3 < x < 0 \Longrightarrow |x| > 3$.

   e. Si $x > 0 \Longrightarrow |x| = x$

   f. Si $x < 0$ entonces $|x| < 0$

   g. Si $x > 0$ entonces $|x| > 0$

CAPÍTULO 2: "OPERACIONES EN ℝ"

En cursos anteriores hemos sumado, multiplicado, en definitiva, operado con números reales no negativos. En este capítulo, definiremos estas operaciones para todos los números reales.

2.1 - SUMA EN ℝ

"SUMA DE NÚMEROS REALES"

$\forall a, b \in \mathbb{R}$, de ahora en adelante los "términos" o "sumandos". La suma de a y b, que simbolizamos $a+b$, es un único número real c.

¿Cómo se obtiene $c = a + b$?

ALGORITMO PARA SUMAR NÚMEROS REALES

➔ Si a y b tienen el mismo signo: el número c tiene el mismo signo de ellos y su valor absoluto es la suma de los valores absolutos de a y b. Es decir:

$$signo\ a = signo\ b = signo\ (a+b)$$
$$|c| = |a| + |b|$$

➔ Si a y b tienen distinto signo y no son opuestos: el número c tiene el mismo signo que el del término de mayor valor absoluto y su valor absoluto es la resta de los valores absolutos de a y b. Es decir:

$$signo\ a \neq signo\ b$$

$$\begin{array}{ccc} |a| > |b| & \vee & |a| < |b| \\ signo\ c = signo\ a & & signo\ c = signo\ b \\ |c| = |a| - |b| & & |c| = |b| - |a| \end{array}$$

➔ Si a y b son opuestos: el número c es cero. Es decir $a + b = 0$

➔ Si a o b son cero: el número c es cero si ambos términos son nulos, sino es igual que el sumando no es cero. Es decir $a + 0 = a$

Ejemplos:

- $(-6) + (-12) = [-(|-6| + |-12|)] = [-(6+12)] = (-18)$
- $\left(-\frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) = \left[-\left(\left|-\frac{1}{5}\right| + \left|-\frac{2}{3}\right|\right)\right] = \left[-\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3}\right)\right] = \left(-\frac{13}{15}\right)$
- $\left(-\frac{1}{5}\right) + \frac{2}{3} = \left|\frac{2}{3}\right| - \left|-\frac{1}{5}\right| = \frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \frac{7}{15}$
- $\frac{1}{5} + \left(-\frac{2}{3}\right) = \left[-\left(\left|-\frac{2}{3}\right| - \left|\frac{1}{5}\right|\right)\right] = \left[-\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right)\right] = -\frac{7}{15}$
- $(-2{,}1) + (2{,}1) = 0$
- $(-5) + 0 = (-5)$
- $0 + (-52) = (-52)$

Teniendo en cuenta los dos últimos ítems de la definición de suma de dos números reales, podemos realizar la siguiente observación:

- ☑ Siempre que se sume dos números reales opuestos el resultado será cero.
- ☑ Existencia de elemento neutro de la suma, el "cero". Siempre que a un número real le sume el número cero, el resultado será el primer número. Simbólicamente: $\forall a \in \mathbb{R}: a + 0 = 0 + a = a$

ACTIVIDADES

1. En cada ítem, para cada par de números "a" y "b" obtiene $a + b$ y $a + (-b)$:

   i. $a = 9 \quad y \quad b = (-5)$

   ii. $a = (-9) \quad y \quad b = 5$

   iii. $a = (-9) \quad y \quad b = (-5)$

   iv. $a = \frac{7}{3} \quad y \quad b = \left(-\frac{2}{3}\right)$

   v. $a = \sqrt{5} \quad y \quad b = 0$

   vi. $a = \frac{5}{7} \quad y \quad b = \left(-\frac{5}{7}\right)$

2. En cada ítem, para cada terna de números "a", "b" y "c", obtiene $a + [(-b) + (-c)]$:

   i. $a = 9 \quad b = (-5) \quad c = 1$

   ii. $a = \frac{5}{3} \quad b = 0 \quad c = 4$

   iii. $a = \left(-\frac{2}{9}\right) \quad b = \left(-\frac{5}{3}\right) \quad c = \frac{2}{3}$

   iv. $a = \left(-\frac{3}{4}\right) \quad b = \frac{1}{5} \quad c = 0$

Completa la siguiente tabla:

a	b	$\lvert a+b \rvert$	$\lvert a \rvert + \lvert b \rvert$
2	3		
0,5	-2,3		
-3	-4		
0	$\sqrt{2}$		

Algo más del valor absoluto de un número real

Observando las dos últimas columnas, conjeturamos:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad |a + b| \leq |a| + |b|$$

¿Para qué valores de a y b se verifica la igualdad?

PROPIEDADES DE LA SUMA DE NÚMEROS REALES

(I) Ley de cierre (o de clausura):

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: \qquad (a+b) \in \mathbb{R}$$

(II) Propiedad conmutativa:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad a+b=b+a$$

(III) Propiedad asociativa:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}: \quad (a+b)+c=a+(b+c)$$

(IV) Existencia y unicidad del elemento opuesto (simétrico):
Dado un $a \in \mathbb{R}$, existe un único número $b \in \mathbb{R}$ tal que $a+b=0$. Al número b se lo denomina "opuesto de a" y se lo simboliza $(-a)$.

Simbólicamente: $\forall a \in \mathbb{R}, \exists!\, b=-a \,/ \quad a+b=0$

(V) Existencia y unicidad del elemento neutro:

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists!\, 0 \in \mathbb{R} / \quad a+0=a$$

(VI) Suma en las igualdades:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$$
$$a=b \Leftrightarrow a+c=b+c$$

ACTIVIDADES

3. Demuestra las siguientes identidades:

a. $a+[b+(-a)]=b$

A modo de ejemplo, para ayudar a que te organices, te escribimos los pasos a seguir para demostrar esta identidad (tú sólo debes justificar con las propiedades o definiciones dadas previamente)

$$\begin{aligned} a+[b+(-a)] &\overset{\boxed{1}}{=} a+[(-a)+b] \\ &\overset{\boxed{2}}{=} [a+(-a)]+b \\ &\overset{\boxed{3}}{=} 0+b \\ &\overset{\boxed{4}}{=} b \end{aligned}$$

1 Prop. Conmutativa de la suma.
2 ....
3 ....
4 ....

b. $[a+(-2)]+[(-a)+3]=1$

c. $(a+b)+[(-a)+(-b)]=0$

d. $b+(-a)+5+[(-5)+(-b)]=(-a)$

Al demostrar esta identidad demostramos que "el opuesto de la suma es la suma de los opuestos"
Más adelante se probará de otra forma

4. Resuelve las siguientes <u>ecuaciones</u>:

Introducción: Para resolver una ecuación se debe intentar, por medio de operaciones elementales [1], pasar de la ecuación original a una ecuación equivalente[2] más simple.

a.

$x+\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2}$ — Suma en las igualdades

$x+\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}=\frac{3}{2}+\frac{1}{4}$ — Asociativa de la suma y algoritmo de suma

$x+\left[\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\right]=\frac{7}{4}$ — Existencia y unicidad de elemento opuesto

$x+0=\frac{7}{4}$ — Existencia y unicidad de elemento neutro de la suma

$x=\frac{7}{4}$

Así, la solución de la ecuación original es $x=\frac{7}{4}$

Ahora resuelve tu solo, te recomendamos intentar justificar los pasos (es la forma más fácil para saber que llegaste a la (o las soluciones) solución correcta.

b. $(-2)+x=\frac{1}{2}+\left(-\frac{5}{4}\right)$

c. $-\left[3+\left(-\frac{1}{9}\right)\right]+x=4+\left(-1,\overline{5}\right)$

d. $(-x)+3=\left(-\frac{1}{2}\right)+2$

e. $1,\overline{2}+(-3)+x+\frac{1}{2}=0$

f. $|x+(-2)|=3$

Por definición de valor absoluto resulta:

$$x+(-2)=3 \quad \vee \quad x+(-2)=(-3)$$
$$x+(-2)+2=3+2 \quad \vee \quad x+(-2)+2=(-3)+2$$
$$x=5 \quad \vee \quad x=(-1)$$

Las soluciones de esta ecuación son $x=5$ y $x=(-1)$.

[1] En capítulos posteriores lo trabajaremos en profundidad, en principio, **sumar a ambos miembros** un número real es una operación elemental.
[2] Una ecuación es equivalente a una dada si posee exactamente las mismas soluciones que ésta.

$g.$ $|3+x|=7$

h. $|(-x)+1|=5$

i. $\left|x+\frac{1}{4}\right|=0$

j. $|x+3|+6=10$

Conviene, inicialmente, trabajar el valor absoluto como una incógnita sola. Para visualizar esto puedes realizar la siguiente *sustitución*: $y=|x+3|$. Así, quedará la ecuación con la forma:

$$y+6=10$$

Esto ya lo sabemos resolver, tendremos que sumar (-6) a ambos miembros, quedando entonces que $y=4$; es decir:

$$|x+3|=4$$

Luego, trabajamos igual que el ítem f., por definición de valor absoluto:

$$x+3=4 \quad \vee \quad x+3=(-4)$$

$$x+3+(-3)=4+(-3) \quad \vee \quad x+3+(-3)=(-4)+(-3)$$

$$x=1 \quad \vee \quad x=(-7)$$

Las soluciones de esta ecuación son $x=1$ y $x=(-7)$.

k. $3+\left|x+\frac{1}{3}\right|=\frac{10}{3}$

l. $|x+2{,}1|+2=2$

m. $|(-x)+5|+1=3$

n. $|(-x)+2|+(-5)=(-2)$

2.2 - MULTIPLICACIÓN EN ℝ

"MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS REALES"

$\forall a, b \in \mathbb{R}$, de ahora en adelante los "factores". La multiplicación de a y b, que simbolizamos $a \cdot b$, es un único número real c, al que denominamos "producto".

¿Cómo obtenemos $c = a \cdot b$?

ALGORITMO PARA MULTIPLICAR NÚMEROS REALES

➔ Si a y b tienen el mismo signo: el número c es positivo y es igual a la multiplicación de los valores absolutos de a y b. Es decir:

$$c = |a| \cdot |b|$$

➔ Si a y b tienen distinto signo: el número c es negativo y su valor absoluto es la multiplicación de los valores absolutos de a y b. Es decir:

$$|c| = |a| \cdot |b|$$

➔ Si a o b son cero: el número c es cero. Es decir: $\forall a \in \mathbb{R},\ a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

Ejemplos:

- $(-8) \cdot (-2) = |-8| \cdot |-2| = 8 \cdot 2 = 16$
- $\left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \left|-\frac{1}{5}\right| \cdot \left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{15}$
- $\left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \frac{7}{2} = \left[-\left(\left|-\frac{1}{5}\right| \cdot \left|\frac{7}{2}\right|\right)\right] = \left[-\left(\frac{1}{5} \cdot \frac{7}{2}\right)\right] = \left(-\frac{7}{10}\right)$
- $\left(\frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) = \left[-\left(\left|-\frac{2}{3}\right| - \left|\frac{1}{5}\right|\right)\right] = \left[-\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right)\right] = -\frac{7}{15}$
- $(-2{,}1) \cdot 0 = 0$
- $0 \cdot (-3) = 0$
- $0 \cdot 0 = 0$

ACTIVIDADES

5. En cada ítem, para cada terna "a", "b" y "c", obtiene $(-a) \cdot b$; $a \cdot (-b)$; $a \cdot b + c$; $(-a) \cdot b + (-c)$; $(-a) \cdot [(-b) + c]$ y $\frac{5}{2}a + c$:

    i. $a = 2 \qquad b = 5 \qquad c = 4$

    ii. $a = (-5) \qquad b = 7 \qquad c = 12$

    iii. $a = \left(-\frac{1}{5}\right) \qquad b = 2 \qquad c = \frac{3}{5}$

6. Completa las siguientes implicaciones con “>”, “<” o “=” según corresponda:

   a. $\left.\begin{array}{r} x\cdot y>0 \\ x>0 \end{array}\right\} \Longrightarrow y \ldots\ldots 0$

   b. $\left.\begin{array}{r} x\cdot y>0 \\ x<0 \end{array}\right\} \Longrightarrow y \ldots\ldots 0$

   c. $\left.\begin{array}{r} x\cdot y<0 \\ x>0 \end{array}\right\} \Longrightarrow y \ldots\ldots 0$

   d. $\left.\begin{array}{r} x\cdot y<0 \\ x<0 \end{array}\right\} \Longrightarrow y \ldots\ldots 0$

   e. $x\cdot y>0 \Rightarrow [(x>0 \wedge y \ldots\ldots 0) \vee (x<0 \wedge y \ldots\ldots 0)]$

   f. $x\cdot y<0 \Rightarrow [(x>0 \wedge y \ldots\ldots 0) \vee (x<0 \wedge y \ldots\ldots 0)]$

   g. $x\cdot y=0 \Rightarrow (x \ldots\ldots 0 \ \vee y \ldots\ldots 0)$

   h. $|x|\cdot y<0 \Rightarrow (x \neq 0 \wedge y \ldots\ldots 0)$

7. Determina, si es posible, los números enteros “n” y “m” que cumplen, en cada caso, la condición pedida. Cuando no sea posible, explica el por qué:

   a. $0<n\cdot m<3$ b. $1<n\cdot m<2$ c. $(-2)\leq n\cdot m<0$

Completa la siguiente tabla:

a	b	$\lvert a\cdot b\rvert$	$\lvert a\rvert\cdot\lvert b\rvert$
2	3		
0,5	-2,3		
-3	-4		
0	$\sqrt{2}$		

Algo más del valor absoluto de un número real

Observando las dos últimas columnas, conjeturamos:

$$\forall a,b\in\mathbb{R}: \quad |a\cdot b|=|a|\cdot|b|$$

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS REALES

(I)Ley de cierre (o de clausura):

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: \qquad (a \cdot b) \in \mathbb{R}$$

(II) Propiedad conmutativa:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad a \cdot b = b \cdot a$$

(III) Propiedad asociativa:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}: \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

(IV) Existencia y unicidad del elemento neutro:

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists!\, 1 \in \mathbb{R} / a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

(V) Existencia y unicidad del elemento recíproco (simétrico):

Dado un $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, existe un único número $b \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot b = 1$. Al número b se lo denomina "recíproco de a" y se lo simboliza $\frac{1}{a}$.

$$\text{Simbólicamente: } \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}, \exists!\, b = \tfrac{1}{a} / a \cdot b = b \cdot a = 1$$

(VI) Condición de anulación del producto:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: \ a \cdot b = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \ \vee b = 0)$$

(VII) Multiplicación en las igualdades:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}: \qquad a = b \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c$$

Si $c \neq 0$: $\qquad a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow a = b$

ACTIVIDADES

8. En cada caso, escribe simbólicamente el enunciado, luego sustituye la parte literal con los valores $a = \left(-\frac{1}{2}\right), b = 0, c = \frac{3}{4}$ y calcula:

   a. Al doble del opuesto de a sumarle el recíproco de la suma de b y c.

   b. A la suma de a y c multiplicarla por el recíproco de c.

   c. Al opuesto de recíproco de a sumarle la tercera parte de c.

9. Si se sabe que $a \cdot b = a$, ¿cuáles son los valores que pueden asumir a y b?

10. Se tiene que $a \cdot b = 0,\ a + b = 5$ y $b \neq 0$. Calcula los valores de a y b.

11. Asocia, agrega paréntesis, corchetes, de modo que las igualdades resulten ciertas.

   a. $(-4) + (-3) \cdot (-5) + 3 = 38$

   b. $(-4) + (-3) \cdot (-5) + 3 = 14$

   c. $(-4) + (-3) \cdot (-5) + 3 = 2$

12. Completa la siguiente tabla:

$\boldsymbol{a}$	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$\left(-\mathbf{\frac{2}{3}}\right)$	7	$\mathbf{0,\overline{3}}$	-15	0,3	1	-1
$\boldsymbol{\frac{1}{a}}$								

13. Obtiene la mínima expresión posible en cada uno de los siguientes productos (es decir, usando definiciones y propiedades, reduce la cantidad de factores de cada expresión):

a.

$(-3)c\ \left[\left(-\frac{1}{2}\right)a\right]\ (5b) = \ \boxed{1}$

$= (-3) \cdot c \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot a \cdot 5 \cdot b = \ \boxed{2}$

$= (-3) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 5 \cdot a \cdot b \cdot c = \ \boxed{1}$

$= \left[(-3) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 5\right] \cdot (a \cdot b \cdot c) = \ \boxed{3}$

$= \frac{15}{2}\ abc$

$\boxed{1}$ Prop. asociativa de la multiplicación

$\boxed{2}$ Prop. conmutativa de la multiplicación

$\boxed{3}$ Algoritmo de multiplicación

b. $(4x)(\sqrt{2}y)\ (-3)z = [4 \cdot (-3) \cdot \sqrt{2}] \cdot (x \cdot y \cdot z) = (-12)\sqrt{2}\,xyz$

c. $[(-3)ab] \cdot \left[\left(-\frac{1}{3}\right)c\right] =$

d. $[(-1)xy] \cdot [(-1)ab] =$

e. $[(-1)a] \cdot \left(\frac{1}{3}b\right) \cdot [(-3)c] =$

f. $[(-3)xy] \cdot \left(\frac{1}{3}a\right) =$

g. $(xy) \cdot (\sqrt{3}t) =$

h. $(-4) \cdot (0{,}5x) \cdot (2ay) =$

i. $[(-9)ab] \cdot \left[\left(-\frac{1}{3}\right)c\right] \cdot [(-2)d] =$

j. $ab \cdot [(-5)c] \cdot [(-3)d] =$

Hasta ahora vimos propiedades que son exclusivas de la suma y de la multiplicación, es decir que se pueden aplicar cuando lo que se posee son sólo términos o sólo factores. En lo que sigue te mostraremos una propiedad que relaciona ambas operaciones...

PROPIEDAD DISTRIBUTIVA DE LA MULTIPLICACIÓN RESPECTO A LA SUMA

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Para analizar las expresiones a ambos miembros veamos un ejemplo con números:

Tomemos $a = 2; b = (-5)$ *y* $c = 8$.

- *Entonces la expresión de la izquierda es:* $2 \cdot [(-5) + 8]$ *y según los corchetes la forma de operar es:* $2 \cdot [(-5) + 8] = 2 \cdot 3 = 6$. *Así notamos que la última operación que realizamos es la multiplicación. Por eso decimos que una expresión algebraica como es "*$a \cdot (b + c)$*" está escrita como* ***multiplicación***.
- *En tanto, la expresión de la derecha es:* $2 \cdot (-5) + 2 \cdot 8$ *y por la jerarquía de las operaciones, no existiendo ningún tipo de corchete que nos dirija hacia otro orden de operatoria, calcularemos:* $2 \cdot (-5) + 2 \cdot 8 = (-10) + 16 = 6$. *Con esto vemos que, en este caso la última operación es la suma. Por eso decimos que una expresión algebraica como es "*$a \cdot b + a \cdot c$*" está escrita como* ***suma***.

Dicho esto, tenemos:

- Si trabajamos la expresión de izquierda a derecha, estamos ***transformando en suma.***

$$a \cdot (b + c) \quad = \quad a \cdot b \ + a \cdot c$$

Transforma multiplicación en suma

- Si trabajamos la expresión de derecha a izquierda, estamos ***transformando en multiplicación.***

Este proceso se llama, también, FACTOR COMÚN

$$a \cdot b \ + a \cdot c \ = \ a \cdot (b + c)$$

Transforma suma en multiplicación

ACTIVIDADES

14. Transforma en suma las siguientes multiplicaciones:

a. $\left(-\frac{1}{3}\right)\left(2x + \frac{3}{4}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)(2x) + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{3}{4} = \left[\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 2\right] x + \left(-\frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right) x + \left(-\frac{1}{4}\right)$

b. $2y\,[(-3)+z]=$

c. $4a\,[(-3)b+5]=$

d. $(-3)b\,[(-2)a+2c]=$

e. $(a+b)\,(c+d)=$

f. $[2a+(-3)b]\,\left[(-2)x+\frac{1}{3}y\right]=$

g. $[2ab+(-6)a]\,\left[4x+\left(-\frac{1}{2}\right)y\right]=$

h. $(3x+1)\,\left[\left(-\frac{1}{5}\right)+y\right]=$

i. $(-2)\,(a+b)\,(c+d)=$

j. $(-2)\,\left[(-3)a+\frac{1}{2}b\right]\,(c+2d)=$

15. Las expresiones algebraicas de los siguientes ítems están formadas por términos semejantes[3]. Aplicando convenientemente la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma, resuelve reduciéndolas a un solo término.

a. $\frac{1}{3}x+\left(-\frac{2}{5}\right)x+x=$

$=\frac{1}{3}\cdot x+\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot x+1\cdot x=$

$=\frac{1}{3}\cdot \boldsymbol{x}+\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot \boldsymbol{x}+1\cdot \boldsymbol{x}=$

$=\left[\frac{1}{3}+\left(-\frac{2}{5}\right)+1\right]\cdot \boldsymbol{x}=$

$=\frac{14}{15}\,x$

b. $2x+3x+(-6)x=$

c. $\left(-\frac{3}{5}\right)x+4x+\frac{1}{10}x=$

d. $2a+\frac{1}{2}a+\left(-\frac{3}{4}\right)a+a=$

e. $xy+\left(-\frac{1}{3}\right)xy+\frac{2}{5}xy$

16. Resuelve hasta obtener la mínima cantidad de términos posibles:

a. $2x+3y+4+\left(-\frac{1}{2}\right)x+(-4)y+(-2)=$

$=2x+3y+4+\left(-\frac{1}{2}\right)x+(-4)y+(-2)=$

$=\left[2x+\left(-\frac{1}{2}\right)x\right]+[3y+(-4)y]+[4+(-2)]=$

$=\left[2+\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\cdot x+[3+(-4)]\cdot y+[4+(-2)]=$

$=\quad \frac{3}{2}\,x\qquad +\qquad (-1)\,y\qquad +2$

[3] Decimos que los términos son semejantes si poseen la misma parte literal.

b. $2a + 1 + \frac{1}{2}b + b + (-5)a =$

c. $(-3)b + 2a + \left(-\frac{1}{6}\right)a + b =$

d. $\left(-\frac{1}{2}\right)y + z + x + 4z + (-1)x + y =$

e. $x + \left(-\frac{1}{3}\right)y + \frac{1}{2}x + (-2)z =$

f. $\frac{1}{2}y + \left(-\frac{1}{5}\right)xy + 2x + \left(-\frac{1}{3}\right)xy + (-3)x$

17. Obtiene la mínima expresión posible:

1º Separamos términos

2º Si es necesario, se transforma en suma cada uno de ellos

3º Ordenamos y minimizamos la cantidad de términos

4º Conmutamos y asociamos los términos semejantes

a. $(-2)\,(4x + y) + \frac{1}{4}\,[2x + (-4)y] =$

$= [(-2)\,(4x + y)] + \left\{\frac{1}{4}\,[2x + (-4)y]\right\} =$

$= [(-2)\,4x + (-2)y] + \left\{\frac{1}{4}\;2x + \frac{1}{4}\;(-4)y\right\} =$

$= [(-2)\cdot 4]\,x + (-2)y + \left(\frac{1}{4}\cdot 2\right)\,x + \left[\frac{1}{4}\cdot(-4)\right]\,y =$

$= \quad (-8)\;x \;+ (-2)y + \;\frac{1}{2}\;x \;+\; (-1)\;y =$

$= \quad \left[(-8)\;x + \frac{1}{2}\;x\right] \;+ [(-2)y \;+\; (-1)\;y] =$

$= \quad \left[(-8) + \frac{1}{2}\right]\cdot x \;+ [(-2) + \;(-1)\;]\cdot y =$

$= \left(-\frac{15}{2}\right)\,x + (-3)y$

b. $\frac{1}{5}(a + b) + (-2)\left(\frac{2}{5}b + a\right) =$

c. $\left(-\frac{1}{2}\right)(x + 2) + 0{,}8 + (-0{,}7)x =$

d. $(-2)(x + y) + 5x + (-7)y =$

e. $(-2)\left[a + \left(-\frac{3}{2}\right)b\right] + 5\,\left(0{,}2 + \frac{1}{5}b\right) =$

f. $x\,(2 + y) + (-3)(x + 2y) =$

g. $2x\,(4 + y) + 2\,[x + (-3)xy] =$

h. $\left(x + \frac{1}{3}\right)(y + 2) + [2x + (-1)]\,(3 + y) =$

i. $[(-2)x + 1]\,\left[(-1)y + \frac{1}{3}\right] + (x + 2)\,\left[y + \left(-\frac{1}{2}\right)\right] =$

j. $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)a + b\right]\,(-3)c + \frac{1}{4}ac + (a + c)\,(-2)b =$

2.3 – POTENCIA DE EXPONENTE NATURAL

DEFINICIÓN "POTENCIA DE EXPONENTE NATURAL"

$\forall a \in \mathbb{R} \ \wedge n \in \mathbb{N}$, definimos potencia de base a y exponente n y simbolizamos a^n, al número real:

- ➔ Si $n = 1$: $a^1 = a$
- ➔ Si $n > 1$: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \ldots \ldots . \cdot a}_{n \text{ factores}}$

PROPIEDADES DE LA POTENCIA DE EXPONENTE NATURAL

(I)
$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad n, m \in \mathbb{N} : \qquad a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

(II)
$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad n, m \in \mathbb{N} : \qquad (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

(III)
$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N} : \qquad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Vamos a demostrar la (I) y (III), la (II) te la proponemos como ejercicio.

(I) Tenemos que dividir estas demostraciones en el caso que el exponente sea "uno" y "mayor a uno":

- Si $n = m = 1$: $\quad a^1 \cdot a^1 \overset{\boxed{1}}{=} a \cdot a \overset{\boxed{1}}{=} a^2 \overset{\boxed{2}}{=} a^{1+1}$

- Si $n = 1 \ \wedge \ m > 1$: $\quad a^1 \cdot a^m \overset{\boxed{1}}{=} a \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \ldots \cdot a)}_{m \text{ factores}} \overset{\boxed{3}}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \ldots \cdot a}_{m+1 \text{ factores}} \overset{\boxed{1}}{=} a^{1+m}$

- Si $n > 1 \ \wedge \ m > 1$: $\quad a^n \cdot a^m \overset{\boxed{1}}{=} \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots . \cdot a)}_{n \text{ factores}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots . . \cdot a)}_{m \text{ factores}} \overset{\boxed{3}}{=}$

$$= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots . \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots . . \cdot a}_{n+m \text{ factores}} \overset{\boxed{1}}{=} a^{n+m}$$

(III)

- Si $\underline{n = 1:}$ $\quad (a \cdot b)^1 \overset{\boxed{1}}{=} a \cdot b \overset{\boxed{1}}{=} a^1 \cdot b^1$

- Si $\underline{n > 1:}$ $\quad (a \cdot b)^n \overset{\boxed{1}}{=} \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \ldots \cdot (a \cdot b)}_{n \text{ factores “}a \cdot b\text{"}} \overset{\boxed{3}}{=}$

$$= a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot \ldots \ldots \cdot a \cdot b \overset{\boxed{3}\,\boxed{4}}{=} \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ factores}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \ldots \ldots \cdot b)}_{n \text{ factores}}$$

$$\overset{\boxed{1}}{=} a^n \cdot b^n$$

$\boxed{1}$ Definición de potencia de exponente natural

$\boxed{2}$ Algoritmo de Suma

$\boxed{3}$ Propiedad asociativa de la multiplicación

$\boxed{4}$ Propiedad conmutativa de la multiplicación

ACTIVIDADES

18. Dados $a = (-3)$; $\ b = \frac{1}{3}$; $\ c = 0$, calcula:

i. $a^2 + b \cdot c$ iii. $a^3 + (-c)$ v. $(2b)^3 + (-a)$

ii. $b^2 \cdot a + c + \frac{1}{5}$ iv. $2a^4 + (-5)^{20}c$ vi. $2b^3 + (-a)$

19. Siendo a un número real no nulo, responde las siguientes preguntas:

   a. ¿Qué signo tendrá a^2?

   b. ¿Qué signo tendrá a^3?

   c. ¿Qué puedes conjeturar acerca del signo de a^n, si n es par? ¿Sucederá lo mismo si n es impar?

20. Obtiene la mínima expresión posible:

   a) $x \cdot (2x + 3) + (-5)x^2 =$
   b) $(x + 2)[x + (-3)] + 3x^2 + \frac{1}{3}x + (-1) =$
   c) $(x + y)[x + (-1)y] + 2xy + y^2 =$
   d) $(x + 5)^2 + 2x + \frac{1}{3}x^2 =$
   e) $2\,(x + 5)^2 + (-2)x + 1 =$
   f) $[x + (-3)]^2 + (-1)x^2 + 9 =$
   g) $(2x + 1)\,(x + 3) + (-2)x^2 =$

h) $\left[(-3)x + \frac{1}{4}\right](2x+6) + 5x^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)x + 9 =$

i) $xy^2\,[x + (-1)y] + y\,(xy + 5xy^2) =$

j) $\frac{1}{3}x^2y\,[y + (-9)] + \frac{2}{3}xy^2\,(x+6) =$

2.4 – PROPIEDADES IMPORTANTES DEL OPUESTO Y RECÍPROCO DE NÚMEROS REALES

PROPIEDADES DEL OPUESTO DE UN NÚMERO REAL

(I) $\forall a \in \mathbb{R}$:	$(-a) = (-1)\,a$
(II) $\forall a, b \in \mathbb{R}$:	$-(a+b) = (-a) + (-b)$
(III) $\forall a, b \in \mathbb{R}$:	$(-a)\cdot(-b) = a\cdot b$
(IV) $\forall a, b \in \mathbb{R}$:	$(-a)\cdot b = a\cdot(-b) = [-(a\cdot b)]$
(V) $\forall a \in \mathbb{R}$:	$-(-a) = a$

Vamos a demostrar alguna de ellas, las que no demostramos aquí te las proponemos como ejercicio.

(I) Antes de empezar dicha demostración, vamos a expresarla coloquialmente: "Queremos mostrar que el opuesto de a es la expresión $(-1)a$"; por otra parte, sabemos que un número real b es el opuesto de a si $a + b = 0$. Así que deberemos mostrar que sumándole a a la expresión $(-1)a$, el resultado será "cero".

$$\begin{aligned} a + (-1)a &\overset{\boxed{1}}{=} 1\cdot a + (-1)\cdot a \\ &\overset{\boxed{2}}{=} [1 + (-1)]\cdot a \\ &\overset{\boxed{3}}{=} 0 \cdot a \\ &\overset{\boxed{4}}{=} 0 \end{aligned}$$

$\boxed{1}$ Existencia y unicidad del elemento neutro de la multiplicación

$\boxed{2}$ Prop. distributiva de la multiplicación respecto de la suma

$\boxed{3}$ Algoritmo de suma

$\boxed{4}$ Algoritmo de multiplicación

Utilizando lo demostrado en (I) demostraremos las demás propiedades

(III) $-(a+b) \overset{\boxed{1}}{=} (-1)\cdot(a+b) \overset{\boxed{2}}{=} (-1)\cdot a + (-1)\cdot b \overset{\boxed{1}}{=} (-a)+(-b)$

(IV) i- Primero demostraremos que $(-a)\cdot b = [-(a\cdot b)]$

$$(-a)\cdot b \overset{\boxed{1}}{=} [(-1)\cdot a]\cdot b \overset{\boxed{3}}{=} (-1)\cdot(a\cdot b) \overset{\boxed{1}}{=} [-(a\cdot b)]$$

ii- Ahora demostraremos que $a\cdot(-b) = [-(a\cdot b)]$

$$a\cdot(-b) \overset{\boxed{1}}{=} a\cdot[(-1)\cdot b] \overset{\boxed{3}}{=} [a\cdot(-1)]\cdot b \overset{\boxed{4}}{=} [(-1)\cdot a]\cdot b \overset{\boxed{3}}{=} (-1)\cdot(ab) \overset{\boxed{1}}{=} [-(a\cdot b)]$$

$\boxed{1}$ $\forall x \in \mathbb{R}: \quad (-x) = (-1)\,x$

$\boxed{2}$ Prop. distributiva de la multiplicación respecto a la suma

$\boxed{3}$ Prop. asociativa de la multiplicación

$\boxed{4}$ Prop. conmutativa de la multiplicación

De i- y ii- se tiene $(-a)\cdot b = [-(a\cdot b)] = a\cdot(-b)$

ACTIVIDADES

21. Determina la veracidad (V) o falsedad (F) de cada enunciado. Justifica:
    a. $\forall a,b,c \in \mathbb{R}: \quad (-a)[(-b)+(-c)] = ab + ac$
    b. $\forall a,b \in \mathbb{R}: \quad -[a+(-b)] = (-a)+b$
    c. $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \exists \frac{1}{a}$
    d. Un número real no nulo y su recíproco tienen el mismo signo.
22. En cada enunciado completa con $>, <, \geq, \leq$ según corresponda. Justifica tu elección:
    a. $m > 0 \wedge p < 0 \Longrightarrow (-m)p \ldots\ldots\ldots..0$
    b. $m \geq 0 \wedge p < 0 \Longrightarrow (-m)p \ldots\ldots\ldots..0$
    c. $m < 0 \wedge p > 0 \Longrightarrow \frac{1}{m}\cdot p \ldots\ldots\ldots..0$
    d. $m < 0 \wedge p < 0 \Longrightarrow \frac{1}{(-m)}\cdot(-p) \ldots\ldots\ldots..0$

23. Resuelve hasta obtener la mínima expresión:

a. $(-a)[2b + (-3c)] + 3ab =$

Usamos la propiedad de opuestos de números reales: $\forall x \in \mathbb{R}: \ (-x) = (-1)x$

$= [(-a)\cdot 2b + (-a)\cdot(-3c)] + 3ab =$

$= [(-1)\cdot a \cdot 2 \cdot b] + [(-1)\cdot a \cdot (-3)\cdot c] + 3ab =$

$= [(-1)\cdot 2]\cdot ab + [(-1)\cdot(-3)]\cdot ac + 3ab =$

$= (-2)\cdot ab \quad + \quad 3\cdot \ ac \quad + \ 3\cdot ab =$

$= [(-2)\cdot ab + 3\cdot ab] + 3ac =$

$= [(-2) + 3]\cdot ab + 3ac =$

$= 1\cdot ab + 3ac = ab + 3ac$

b. $(-2a)\left(\frac{1}{2}b + \frac{1}{4}\right) + \frac{7}{2}(-a) =$

c. $\frac{1}{3}x\ [(-6y) + 2] + (-3y)\ [x + (-4)] =$

d. $2\ [x + (-y)]\ (z + 5) + 6yz + (-8)xz =$

e. $[(-y) + 3]\cdot\left(x + \frac{1}{9}\right) + [2(-x) + 1]\ y =$

f. $\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)[(-y) + 2] + \left(-\frac{5}{2}x\right)(y + 1) =$

g. $[2x + (-y)]\ (-4) + 2y\ [x + (-3)] =$

h. $(x + 2)[x + (-2)] + 4 =$

i. $[x + (-y)](x + y) + 4y^2 =$

j. $[x + (-2y)]^2 + (-4y^2) =$

24. Demuestra:

a. $\forall x \in \mathbb{R}: \quad (-x)^2 = x^2$

b. $\forall x \in \mathbb{R}: \quad (-x)^3 = -(x^3)$

c. $\forall x \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N}: \quad (-x)^{2n} = x^{2n}$

25. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $\left(-\frac{1}{4}\right)x = 3$

- Multiplicación en las igualdades[4]

[4] Otra operación elemental: "multiplicar a ambos miembros por un número real no nulo"

$(-4)\left(-\frac{1}{4}\right)x = (-4)\cdot 3$ — Asociativa de la multiplicación y algoritmo de multiplicación

$\left[(-4)\left(-\frac{1}{4}\right)\right]x = (-12)$ — Existencia y unicidad de elemento recíproco

$1 \quad x = (-12)$ — Existencia y unicidad de elemento neutro de la multiplicación

$x = (-12)$

Así, la solución de la ecuación original es $x = (-12)$.

b. $\left(-\frac{1}{4}\right)x + 1 = 3$

c. $\left(-\frac{1}{4}\right)x + 1 + x = 3$

d. $2(-x) + 3 = 1$

e. $x[(-x) + 1] + x^2 + x = 7$

f.

$\left(-\frac{1}{4}\right)x + 1 = 2x + (-3)$	Suma en las igualdades
$(-2x) + \left(-\frac{1}{4}\right)x + 1 = (-2x) + 2x + (-3)$	Asociativa de la suma
$\left[(-2x) + \left(-\frac{1}{4}\right)x\right] + 1 = [(-2x) + 2x] + (-3)$	Distributiva de la multiplicación respecto a la suma y existencia de opuesto
$\left[(-2) + \left(-\frac{1}{4}\right)\right]\cdot x + 1 = 0 + (-3)$	Algoritmo de suma
$\left(-\frac{9}{4}\right)x + 1 = (-3)$	Suma en las igualdades
$\left(-\frac{9}{4}\right)x + 1 + (-1) = (-3) + (-1)$	Algoritmo de suma
$\left(-\frac{9}{4}\right)x + 0 = (-4)$	Existencia elemento neutro de la suma
$\left(-\frac{4}{9}\right)\left(-\frac{9}{4}\right)x = \left(-\frac{4}{9}\right)(-4)$	Multiplicación en las igualdades
$1\cdot x = \frac{16}{9}$	Existencia de elemento neutro del producto
$x = \frac{16}{9}$	

g. $\left(-\frac{4}{5}x\right) = \left(-\frac{1}{2}\right) + x$

h. $\frac{1}{5}x + \frac{2}{3} = \frac{1}{15} + \left(-\frac{2}{5}x\right)$

i. $1 + \left(-\frac{1}{2}\right)x = (-3x) + \frac{1}{2}$

l. $2\,|x + (-1)| + 5 = 7$

m. $|(-2x) + 1| = 8$

n. $\left|(-2x) + \frac{1}{2}\right| + \frac{7}{2} = 8$

j. $-(x+3) = 2x + \frac{1}{2}$

k. $2\,|x + (-1)| = 3$

ñ. $\frac{1}{2}\left|(-2x) + \frac{1}{2}\right| + \frac{7}{2} = 8$

26. En cada ítem: (a) Escribe la ecuación que modeliza el problema, (b) Resuelve la ecuación

    i. Si al doble del opuesto de un número se le suma 5 unidades, será igual al triple de dicho número, ¿cuál es el número?

    ii. Agustín entra a un negocio muy decidido a comprar un jean y un buzo. El buzo cuesta $100 menos que la mitad del costo del jean. ¿Cuánto le cuesta el buzo si al abonar $1000 por ambas prendas recibe un vuelto de $50?

    iii. La edad de Violeta dentro de 5 años será el triple de la edad que tendrá Juana, su hermanita recién nacida. ¿Qué edad tiene actualmente Violeta?

2.5 – RESTA DE NÚMEROS REALES

DEFINICIÓN "RESTA DE NÚMEROS REALES"

$\forall a, b \in \mathbb{R}$, definimos la resta entre b y a y simbolizamos $b - a$, al número real x tal que $x + a = b$

☑ Al número real b se lo denomina **minuendo.**

☑ Al número real a se lo denomina **sustraendo**.

☑ Al número real $x = b - a$ se lo denomina **resta** o **diferencia**.

Ejemplos:

- $5 - 3 = 2$ porque $2 + 3 = 5$
- $5 - (-3) = 8$ porque $8 + (-3) = 5$
- $(-5) - 3 = (-8)$ porque $(-8) + 3 = (-5)$
- $(-5) - (-3) = (-2)$ porque $(-2) + (-3) = (-5)$

No suele ser muy práctico resolver una diferencia usando la definición, por lo que se "investigó" una técnica para evitar su uso a la hora de resolver estas "cuentas". Se dio así una forma muy sistematizada de resolver una resta, la cual llamamos "Algoritmo de la resta".

Algoritmo de la Resta

$$\forall a, b \in \mathbb{R}$$

$$b - a = b + (-a)$$

Demostración:

$x = b - a \Longrightarrow \quad x + a = b$	(1) Suma en las igualdades
$x + a + (-a) = b + (-a)$	(2) Asociativa de la suma
$x + [a + (-a)] = b + (-a)$	(3) Existencia elemento opuesto
$x + 0 = b + (-a)$	(4) Existencia elemento neutro suma
$x = b + (-a)$	

$$\therefore b - a = b + (-a)$$

PROPIEDADES DE LA RESTA DE NÚMEROS REALES

(I)

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad a - b = -(b - a)$$

(II)

$$\forall a \in \mathbb{R}: \quad a - 0 = a$$

(III)

$$\forall a \in \mathbb{R}: \quad a - a = 0$$

(IV)

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}: \quad a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$

Vamos a demostrar (I)

(I)

$$\begin{aligned} -(b-a) &\overset{\boxed{1}}{=} -[b + (-a)] \\ &\overset{\boxed{2}}{=} (-b) + [-(-a)] \\ &\overset{\boxed{3}}{=} (-b) + a \\ &\overset{\boxed{4}}{=} a + (-b) \\ &\overset{\boxed{1}}{=} a - b \end{aligned}$$

$\boxed{1}$ Algoritmo de la resta

$\boxed{2}$ $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ -(x + y) = (-x) + (-y)$

$\boxed{3}$ $\forall x \in \mathbb{R}: \ -(-x) = x$

$\boxed{4}$ Conmutativa de la suma

ACTIVIDADES

27. Demuestra las propiedades II, III y IV

28. Siendo los valores de $a = \left(-\frac{1}{7}\right)$, $b = \left(-\frac{6}{7}\right)$ y $c = 2$, calcula:

i. $a - b$ | iii. $a - b - c$ | v. $b - (-a)$

ii. $b - a$ | iv. $(-a) - (-b)$ | vi. $(-c - a) - (-a)$

29. Obtiene la mínima expresión:

a. $2\,(x - 3) + 5x - \frac{1}{2}x + 1 =$

b. $2\,\left(x - \frac{1}{2}\right) - x\,(2 - y) =$

c. $\left(-\frac{1}{2}x\right)\,(x - 3) - 2x^2 + y\,(1 - x) =$

d. $-x - [x - 1 - (x - 1)] =$

e. $-2x - [(-x) - (-3x + 1)] =$

f. $-2y\,(x - 3) - (x - 2) - 3xy =$

g. $-3x\,(2 - 5y) - 5y =$

h. $5\,\left(x - \frac{1}{5}\right) - 3x - 2(x - 1) =$

i. $x - 2\,(3 + x) + (x + 3)^2 =$

j. $2\,(x - 1) - 3\,(x - 2)^2 =$

k. $(x - 3)^2 + 6x + 9 - x^2 =$

l. $(x - 3)(x + 3) + 9 =$

m. $\left(\frac{1}{5}x - 2\right)(5y + 3) - 2\,(x - 5) =$

n. $(-x - 1)(x + 1) + 2x^2 - \frac{1}{2} =$

o. $2\,(x - 1)^2 - (1 - x) =$

30. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $2 - x = 7 + x$

$2 + (-x) = 7 + x$

$2 + [(-x) + x] = 7 + (x + x)$

$2+0=7+2x$

$(-7)+2=(-7)+7+2x$

$(-5)=2x$

$\frac{1}{2}\cdot(-5)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot x$

$\left(-\frac{5}{2}\right)=1\cdot x \Longrightarrow \quad x=\left(-\frac{5}{2}\right)$

b. $\left(x-\frac{1}{5}\right)(-3)+2x=\left(-\frac{2}{5}\right)$

c. $3x-6-\frac{1}{3}(x-1)=2(x-1)$

d. $x-4-5(x-2)=4-(x-5)$

e. $2x-1-\frac{1}{2}(4x-6)=1-(1-x)$

f. $|x-2|=5$

g. $2|x+1|-3=5$

h. $(-3)|x-1|-2=(-2)$

i. $(-2)|x-2|-1=(-5)$

31. En cada ítem: (i) Escribe la ecuación que modeliza el problema.

(ii) Resuelve la ecuación.

a. La diferencia entre dos números es de 12 unidades. El sustraendo es la mitad del minuendo aumentado 2 unidades. ¿Cuáles son esos números?

b. De los alumnos de una escuela, $\frac{9}{10}$ tienen hermanos y, entre los que tienen hermanos, $\frac{1}{8}$ tienen dos o más hermanos. Si hay 45 alumnos que tienen dos o más hermanos, ¿cuántos alumnos hay, en total, en esa escuela?

c. La diferencia entre dos números es (-55). Si el minuendo es 35, ¿cuál es el sustraendo?

d. Si a un número se le suma 36 y luego a este resultado se le resta (-27), se obtiene cero. ¿Cuál es dicho número?

2.6 – DIVISIÓN DE NÚMEROS REALES

DEFINICIÓN "DIVISIÓN DE NÚMEROS REALES"

$\forall a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} - \{0\}$, definimos la división entre a y b y simbolizamos $a{:}b$ o también $\frac{a}{b}$, al número real x tal que $x \cdot b = a$

- ☑ Al número real a se lo denomina **dividendo.**
- ☑ Al número real b se lo denomina **divisor.**
- ☑ Al número real $x = \frac{a}{b}$ se lo denomina **cociente.**

Algoritmo de la División

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$$

$$a{:}b = a \cdot \frac{1}{b} \qquad \text{(o también: } \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}\text{)}$$

Ejemplos:

- $6{:}(-3) = (-2)$ porque $(-2) \cdot (-3) = 6$
- $(-6){:}3 = (-2)$ porque $(-2) \cdot 3 = (-6)$
- $(-6){:}(-3) = 2$ porque $2 \cdot (-3) = (-6)$

No suele ser muy práctico resolver un cociente usando la definición, al igual que sucedió con la resta, por eso se suele trabajar con un proceso denominado "Algoritmo de la división".

Demostración:

$x = \frac{a}{b} \implies x \cdot b = a$	(1) Multiplicación en las igualdades
$x \cdot b \cdot \frac{1}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$	(2) Asociativa de la multiplicación
$x \cdot \left(b \cdot \frac{1}{b}\right) = a \cdot \frac{1}{b}$	(3) Existencia elemento recíproco
$x \cdot 1 = a \cdot \frac{1}{b}$	(4) Existencia elemento neutro
$x = a \cdot \frac{1}{b}$	multiplicación
$\therefore \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$	

PROPIEDADES DEL RECÍPROCO DE UN NÚMERO REAL NO NULO

(I)

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0 \wedge b \neq 0: \qquad \frac{1}{a \cdot b} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$$

(II)

$$\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}: \qquad \frac{1}{\frac{1}{a}} = a$$

Vamos la (I), la propiedad (II) te las proponemos como ejercicio

(I) Antes de empezar dicha demostración, vamos a expresarla coloquialmente: "Queremos mostrar que el recíproco del producto $a \cdot b$ es la expresión $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$"; por otra parte, sabemos que un número real c es el recíproco de a si $a \cdot c = 1$. Así que deberemos mostrar que multiplicando a $a \cdot b$ la expresión $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$, el resultado será "uno".

$$(a \cdot b) \cdot \left(\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}\right) \overset{\boxed{1}}{=} a \cdot b \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$$
$$\overset{\boxed{2}}{=} a \cdot \frac{1}{a} \cdot b \cdot \frac{1}{b}$$
$$\overset{\boxed{1}}{=} \left(a \cdot \frac{1}{a}\right) \cdot \left(b \cdot \frac{1}{b}\right)$$
$$\overset{\boxed{3}}{=} 1 \cdot 1$$
$$\overset{\boxed{4}}{=} 1$$

$\boxed{1}$ Prop. asociativa de la multiplicación

$\boxed{2}$ Prop. conmutativa de la multiplicación

$\boxed{3}$ Existencia y unicidad de elemento recíproco de un real no nulo

$\boxed{4}$ Algoritmo de multiplicación

ACTIVIDADES

32. Demuestra las siguientes identidades:

a. $\forall a \neq 0: \qquad -\left(\frac{1}{\frac{1}{a}}\right) = (-a)$

b. $\forall a \neq 0: \qquad \left(-\frac{1}{a}\right) \cdot a = (-1)$

c. $\forall a \neq 0, \forall b \neq 0$: $\left(-\frac{1}{a}\right) \cdot \left(-\frac{1}{b}\right) = \frac{1}{ab}$

d. $\forall a \neq 0, \forall b \neq 0$: $\frac{1}{(-a)} \cdot \frac{1}{(-b)} = \frac{1}{ab}$

PROPIEDADES DE LA DIVISIÓN DE NÚMEROS REALES

(I) $\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$: $\frac{a}{a} = 1$

(II) $\forall a \in \mathbb{R}$: $\frac{a}{1} = a$

(III) $\forall a \in \mathbb{R}$: $\frac{a}{(-1)} = (-a)$

(IV) $\forall a, c \in \mathbb{R} \wedge \forall b, d \in \mathbb{R} - \{0\}$: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

(V) $\forall a \in \mathbb{R} \wedge \forall b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$: $\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$

(VI) $\forall a \in \mathbb{R} \wedge \forall b \in \mathbb{R} - \{0\}$: $\frac{a}{(-b)} = \frac{(-a)}{b} = -\left(\frac{a}{b}\right)$

(VII) $\forall a, b \in \mathbb{R} \wedge \forall c \in \mathbb{R} - \{0\}$: $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$

Vamos a demostrar (IV), (V) y (VI)

(IV)
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \overset{\boxed{1}}{=} \left(a \cdot \frac{1}{b}\right) \cdot \left(c \cdot \frac{1}{d}\right)$$
$$\overset{\boxed{2}}{=} a \cdot \frac{1}{b} \cdot c \cdot \frac{1}{d}$$
$$\overset{\boxed{3}\ \boxed{2}}{=} (a \cdot c) \cdot \left(\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{d}\right)$$
$$\overset{\boxed{4}}{=} (a \cdot c) \cdot \left(\frac{1}{b \cdot d}\right)$$
$$\overset{\boxed{1}}{=} \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

(V)
$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} \overset{\boxed{5}}{=} \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} \overset{\boxed{6}}{=} \frac{a}{b} \cdot 1 \overset{\boxed{7}}{=} \frac{a}{b}$$

$\boxed{1}$ Algoritmo de la división

$\boxed{2}$ Asociativa de la multiplicación

$\boxed{3}$ Conmutativa de la multiplicación

$\boxed{4}$ $\forall x \neq 0, y \neq 0$: $\frac{1}{x} \frac{1}{y} = \frac{1}{xy}$

$\boxed{5}$ $\forall x, y \in \mathbb{R}, z \neq 0, w \neq 0$ $\frac{x}{z} \cdot \frac{y}{w} = \frac{xy}{zw}$

$\boxed{6}$ $\forall x \neq 0$: $\frac{x}{x} = 1$

$\boxed{7}$ Existencia neutro multiplicación

$\boxed{8}$ $\forall x \in \mathbb{R}$: $(-x) = (-1)x$

$\boxed{9}$ $\forall x$: $\frac{x}{1} = x$

$$\text{(VI)}\quad \frac{\boldsymbol{a}}{(-\boldsymbol{b})} \overset{\boxed{7}\,\boxed{8}}{=} \frac{a\cdot 1}{(-1)\cdot b} \overset{\boxed{5}}{=} \frac{a}{(-1)}\cdot\frac{1}{b} = (-a)\cdot\frac{1}{b} \overset{\boxed{1}}{=} \frac{(-\boldsymbol{a})}{\boldsymbol{b}} \overset{\boxed{8}\,\boxed{7}}{=}$$

$$= \frac{(-1)\cdot a}{1\cdot b} \underset{\boxed{5}}{=} \frac{(-1)}{1}\cdot\frac{a}{b} \underset{\boxed{9}}{=} (-1)\frac{a}{b} \underset{\boxed{8}}{=} -\left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right)$$

ACTIVIDADES

33. Demuestra las propiedades I, II, III y VII

34. Siendo $a = \left(-\frac{1}{5}\right)$, $b = (-10)$ y $c = \frac{2}{5}$, calcula:

i. $\frac{a}{b}$ ii. $\frac{a}{b} + c$ iii. $\frac{a}{b} - c$ iv. $\left|\frac{a}{c}\right|$

v. $\left(\frac{c}{a}\right)^2 + 1$ vi. $a^3 - \frac{b}{2}$ vii. $\frac{2a}{c} + 1$ viii. $\frac{a}{b} + \frac{c}{b}$

Completa la siguiente tabla:

a	b	$\left\lvert\frac{a}{b}\right\rvert$	$\frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$
2	3		
0,5	-2,3		
-3	-4		
0	$\sqrt{2}$		

Algo más del valor absoluto de un número real

Observando las dos últimas columnas, conjeturamos:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0: \qquad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

Completa la siguiente tabla:

a	b	$\left(\frac{a}{b}\right)^2$	$\frac{a^2}{b^2}$
2	3		
0,5	-2,3		
-3	-4		
0	$\sqrt{2}$		

Otra propiedad de la potencia de exponente natural

Observando las dos últimas columnas, conjeturamos:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0, n \in \mathbb{N} : \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Podemos demostrar esta última conjetura para $\boldsymbol{n > 1}$ (demuéstrala para $\boldsymbol{n = 1}$):

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(a \cdot \frac{1}{b}\right)^n = a^n \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^n = a^n \cdot \left(\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{b}\right) = a^n \cdot \frac{1}{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b} = a^n \cdot \frac{1}{b^n} = \frac{a^n}{b^n}$$

Justifica los pasos

ACTIVIDADES

35. Obtiene la mínima expresión:

a. $(x-2)(x-3) - x^2 : 2 =$

b. $(x+4) : 5 - 3\left(\frac{2x}{5} - \frac{1}{15}\right) =$

c. $(2xy-4)\,(x+2) - \frac{x+1}{2} =$

d. $\frac{2x-3}{4} - \frac{3x+2}{6} =$

e. $(x-3)\,(-x) - \frac{2x^2-1}{2} =$

f. $-\frac{x-5}{10} + \frac{2x-6}{3} =$

36. Utilizando la definición de división, obtiene el o los valores que puede asumir "x":

a. $x : 5 = (-3)$

b. $x : 5 = 0$

d. $3 : x = 3$

e. $3 : x = (-1)$

c. $0 : x = 0$

f. $x : (-3) = 1$

37. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $x : (-2) \cdot \frac{1}{6} + 6 = \left(-\frac{1}{3}\right)$

b. $-5x - \frac{1}{5}x = \frac{2}{3}x + 12$

c. $\frac{1}{4}x : \left(-\frac{3}{8}\right) + 4 = \left(-\frac{1}{6}\right)x - 6$

d. $\left(5x + \frac{2}{7}\right) : (-8) - 1 - \frac{6}{21}x = (-15)$

e. $\frac{1}{3}(x - 1) : \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(-2x + 5)$

f. $(-6)(2x + 2) - 1 = (-x) - 2$

g. $4(2x - 1) + \frac{1}{10}(x - 2) = (-5)(x - 5) - 3$

h. $-2x + 10 - x = (-7) + 3x - 1$

i. $2\left(\frac{3}{5}x - 1\right) = \frac{x-3}{2} + 0{,}4$

j. $\frac{x+1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3x-7}{3}$

k. $2(x - 1) - \frac{x+1}{5} = \frac{13}{5}$

l. $\frac{x+1}{2} - \frac{x-1}{3} = (-2x) - \frac{4}{3}$

m. $\frac{x-2}{4} - (x + 3) : 5 = -x + \frac{3}{10}$

n. $2|x : 2 - 1| + 3 = 7$

ñ. $|x - 1| : \frac{1}{4} + 4 = 8$

o. $\left|\frac{x-1}{3}\right| : (-2) + 1 = (-2)$

p. $-\left|\frac{x-2}{4}\right| = \left(-\frac{1}{4}\right)$

38. En cada ítem (a) Escribe la ecuación que modeliza el problema y (b) Resuelve la ecuación:

i. Una canilla llena los $\frac{5}{7}$ de un depósito en una hora; al mismo tiempo, un desagüe desagota los $\frac{5}{9}$. Si al cabo de dicha hora quedan en el depósito 160 litros, ¿Cuál es la capacidad del depósito?

ii. En la elección de presidente del centro de estudiantes $\frac{1}{3}$ de los alumnos votó por el candidato A, $\frac{1}{4}$ por el candidato B y 120 alumnos por otros candidatos. ¿Cuántos alumnos votaron en esta elección?

iii. Los $\frac{5}{8}$ de un camino están asfaltados, los $\frac{2}{3}$ del resto son de tierra y faltan construir aún 225km. ¿Cuál es la longitud total del camino?

iv. Se repartió \$2000 entre Ana, Belén y Corina. De manera que Ana recibió el doble de Belén y Corina, $\frac{1}{3}$ de Belén. ¿Cuánto dinero obtuvo cada una de ellas?

39. Demuestra las siguientes identidades:

a. $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $\quad (-x)(y - x) = x^2 - xy$

b. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} - \{0\}$: $\quad \frac{x}{y\,(-z)} : x = \left(-\frac{1}{yz}\right)$

c. $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$: $\quad -\frac{x^2 - x}{x} = y - x$

2.7 – RAZONES y PROPORCIONES

DEFINICIÓN "RAZÓN"

$\forall a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}-\{0\}$, definimos la razón entre a y b y simbolizamos $\frac{a}{b}$, al cociente entre a y b.

<u>Ejemplo de uso:</u>

"Un automóvil se desplaza a razón de 60km por hora"

- El concepto de velocidad es una razón entre distancia y tiempo: $v = 60\frac{km}{h}$
- El automóvil recorre en una hora 60km

DEFINICIÓN "PROPORCIÓN"

Llamamos proporción a una igualdad entre dos razones.

Simbólicamente:

$$\forall a, c \in \mathbb{R} \wedge b, d \in \mathbb{R}-\{0\}: \ \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ es una proporción}$$

- ☑ Una proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ se lee ***"a es a b como c es a d".***
- ☑ En la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, a los números a y d se los denomina **extremos**; y a los números b y c se los llama **medios.**
- ☑ En la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, a los números a y c se los denomina **antecendentes** ; y a los números b y d se los llama **consecuentes.**

<u>Ejemplo de uso:</u>

"Un automóvil se desplaza a velocidad constante de 60km por hora"

- $v = 60\frac{km}{h}$, es decir que la distancia que recorre el automóvil es proporcional al tiempo.

PROPIEDADES DE LAS PROPORCIONES

(I) En toda proporción el producto de los medios es igual al producto de los extremos

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow a\cdot d=b\cdot c \qquad ; b\neq 0, d\neq 0$$

(II) En toda proporción se verifica que la suma del antecedente y consecuente de la primera razón es a su consecuente como la suma del antecedente y consecuente de la segunda razón es a su consecuente

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \qquad ; b\neq 0, d\neq 0$$

(III) En toda proporción se verifica que la resta del antecedente y consecuente de la primera razón es a su consecuente como la resta del antecedente y consecuente de la segunda razón es a su consecuente

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d} \qquad ; b\neq 0, d\neq 0$$

Vamos a demostrarlas:

(I) $\Rightarrow)\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\overset{\boxed{1}}{\Rightarrow}\frac{a}{b}\cdot(bd)=\frac{c}{d}\cdot(bd)\overset{\boxed{2}}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow\frac{a\cdot b\cdot d}{b}=\frac{c\cdot b\cdot d}{d}\underset{\boxed{3}}{\Rightarrow} ad=cb\ (*)$$

$\Leftarrow)\ ad=cb\overset{\boxed{1}}{\Rightarrow} ad\,\frac{1}{bd}=cb\frac{1}{bd}\overset{\boxed{2}}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow\frac{ad}{bd}=\frac{cb}{bd}\underset{\boxed{3}}{\Rightarrow}\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\qquad(**)$$

De (*) y (**) se demuestra que $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow ad=bc$

(II) $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}\overset{\boxed{4}}{\Leftrightarrow}\frac{a}{b}+\frac{b}{b}=\frac{c}{d}+\frac{d}{d}\overset{\boxed{5}}{\Leftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1\underset{\boxed{6}}{\Leftrightarrow}\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$\boxed{1}$ Multiplicación en las igualdades

$\boxed{2}$ $\forall x,y\in\mathbb{R}, z\neq 0, w\neq 0:\ \frac{x}{z}\cdot\frac{y}{w}=\frac{xy}{zw}$

$\boxed{3}$ $\forall x\neq 0, y\neq 0:\ \frac{xz}{xy}=\frac{z}{y}$

$\boxed{4}$ $\forall x,y\in\mathbb{R}, z\neq 0:\ \frac{x}{z}+\frac{y}{z}=\frac{x+y}{z}$

$\boxed{5}$ $\forall x\neq 0:\ \frac{x}{x}=1$

$\boxed{6}$ Suma en las igualdades

$\boxed{7}$ Algoritmo de la resta

$\boxed{8}$ $\forall\, y\neq 0:\ \frac{-x}{y}=\frac{x}{-y}=-\frac{x}{y}$

$$\text{(III)}\ \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}\overset{\boxed{7}}{\Leftrightarrow}\frac{a+(-b)}{b}=\frac{c+(-d)}{d}\overset{\boxed{4}}{\Leftrightarrow}\frac{a}{b}+\frac{(-b)}{b}=\frac{c}{d}+\frac{(-d)}{d}\Leftrightarrow$$

$$\underset{\boxed{8}}{\Leftrightarrow}\frac{a}{b}+\left(-\frac{b}{b}\right)=\frac{c}{d}+\left(-\frac{d}{d}\right)\underset{\boxed{5}}{\Leftrightarrow}\frac{a}{b}+(-1)=\frac{c}{d}+(-1)\underset{\boxed{6}}{\Leftrightarrow}\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

ACTIVIDAD

40. Usando las propiedades de proporciones recién vistas obtiene los valores de x e y:

   a. $\frac{x}{3}=\frac{-5}{2}$
   b. $\frac{x}{y}=\frac{1}{2}\quad \wedge \quad x+y=6$
   c. $\frac{x}{y}=\frac{2}{5}\quad \wedge \quad x-y=-6$

DEFINICIÓN "SERIE DE RAZONES IGUALES"

Una serie de razones iguales es una expresión de la forma:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$$

$$con\ n\in\mathbb{N}\wedge n>2 \qquad \text{y } b_i\neq 0,\ \ \forall i=1,2,\ldots,n$$

<u>Ejemplo de uso:</u>

"Un automóvil se desplaza a velocidad constante de 60km por hora"

- El automóvil recorre en una hora 60km, en dos horas 120km, en media hora 30km y así…

Un listado de fracciones equivalentes también es una serie de razones iguales.

PROPIEDAD

En toda serie de razones iguales se verifica:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$$

$$con\ n\in\mathbb{N}\wedge n>2$$

$$\text{y } b_i\neq 0,\ \ \forall i=1,2,\ldots,n$$

No realizaremos la demostración

ACTIVIDADES

41. En cada ítem (I) Plantea la o las ecuaciones que modelizan el problema, (II)Resuelve dichas ecuaciones:

   a. La razón entre dos números es 1,5 y su suma es 5. ¿Cuáles son esos números?

   b. ¿Cuál es el número entero tal que su anterior es a su consecutivo como 4 es a 6?

   c. Tres hermanos reciben una herencia de \$360000 y debe ser repartida en forma directamente proporcional a sus edades. Si Alberto tiene 30 años, Betina 24 años y Chiara 18 años, ¿cuánto dinero recibe cada uno de ellos?

42. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $\frac{x-3}{x} = \frac{-\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}}$

$$(x-3)\frac{1}{3} = \left(-\frac{1}{6}\right)x$$

$$\frac{1}{3}x - 3 \cdot \frac{1}{3} = \left(-\frac{1}{6}\right)x$$

$$\frac{1}{3}x - 1 + \frac{1}{6}x = \left(-\frac{1}{6}\right)x + \frac{1}{6}x$$

$$\frac{1}{2}x - 1 + 1 = 0 + 1$$

$$2 \cdot \frac{1}{2}x = 2 \cdot 1$$

$$x = 1$$

b. $\frac{x-2}{2x} = \frac{-5}{\frac{1}{2}}$

c. $\frac{-3}{2x-5} = \frac{1}{x+4}$

d. $\frac{-2}{-\frac{1}{2}+\frac{4}{3}} = \frac{1,2+2x}{x}$

e. $\frac{x-2}{-2,\overline{3}} = \frac{\frac{3}{7}x}{-0,\overline{3}}$

CAPÍTULO 3: "ECUACIONES"

¿Qué significa resolver una ecuación?

Recordando que una ecuación es una igualdad condicionada al valor o valores que pueda asumir la incógnita, resolver una ecuación significa encontrar el o los valores que verifican dicha igualdad.

Hasta ahora has resuelto ecuaciones que tenían única solución o bien, podían llegar a tener dos soluciones, que son aquellas ecuaciones con valor absoluto.

Para esto, has utilizado las siguientes operaciones elementales:

- Si $a = b \Longrightarrow a + c = b + c$ con $a; b; c \in \mathbb{R}$ (suma en las igualdades)
- Si $a = b \Longrightarrow a \cdot c = b \cdot c$ con $a; b; c \in \mathbb{R}$ y $c \neq 0$ (multiplicación en las igualdades)

Estas operaciones nos aseguran que, al ser aplicadas a una ecuación, siempre obtendremos otra ecuación, denominada **ecuación equivalente** a la dada, es decir con el mismo conjunto solución.

Pero existen otras ecuaciones que no son del mismo tipo de las ecuaciones en las que has trabajado.

Para presentártelas, te proponemos que resuelvas los siguientes ejemplos:

a. $\frac{5}{2}x - 1 = \frac{1}{4}(10x - 2) - \frac{1}{2}$

b. $3x - 2 = \frac{1}{2}(6x - 2) + \left(-\frac{1}{2}\right)$

En la primera, utilizando propiedades y aplicando las operaciones elementales, se llega a una expresión de la forma: $0 \cdot x = 0$

Esto significa que x puede ser cualquier número real, es decir $\forall x \in \mathbb{R}$ se verifica la igualdad, dado que cualquier número real multiplicado por cero es igual a cero.

En cambio, en la segunda ecuación, se llega a una expresión de la forma: $0 \cdot x = \frac{1}{2}$

En este caso la incógnita no puede asumir ningún número real, es decir $\nexists x \in \mathbb{R}$ que verifique la igualdad, dado que ningún número real multiplicado por cero da $\frac{1}{2}$.

> Una ecuación del tipo $\boldsymbol{a \cdot x = b}$, es una ecuación lineal con una sola incógnita.

En este tipo de ecuaciones puede suceder:

- ☑ Si $a \neq 0$ entonces $x = \frac{b}{a}$ es la <u>única</u> solución de la ecuación y $S = \left\{\frac{b}{a}\right\}$ es el conjunto solución de la misma.

- ☑ Si $a = 0$, se tiene una expresión de la forma $0 \cdot x = b$ y la ecuación tendrá o no solución dependiendo del valor de b, es decir:

  → Si $b = 0$, la ecuación es $0 \cdot x = 0$ y x puede tomar cualquier número real y el conjunto solución es $S = \mathbb{R}$

  → Si $b \neq 0$, la ecuación es $0 \cdot x = b$ y no existe ningún valor de $x$que verifique la igualdad y el conjunto solución es $S = \varnothing$

ACTIVIDADES

1. Resuelve las siguientes ecuaciones e indica el conjunto solución:

a. $\frac{3}{2}x + (-2) = \frac{1}{4}(6x - 2) + \left(-\frac{1}{2}\right)$

<u>Resolución</u>:

$$\frac{3}{2}x + (-2) = \frac{1}{4}(6x - 2) + \left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$\frac{3}{2}x + (-2) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}x = (-1) + 2$$
$$0x = 1$$

$\therefore$La ecuación no tiene solución, por lo que $S = \varnothing$

b. $(-3)\left(\frac{x-3}{27}\right) + 0,\overline{1}x = \frac{1}{3}$

c. $2(x+2) = 3x + \left(-\frac{2}{3}\right)(x+1) + \left(-\frac{1}{3}x\right)$

d. $2x + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(4x+3) + (-4x)$

e. $\left(-\frac{1}{2}\right)(0{,}4x+3)=-\left(1{,}5+\frac{1}{5}x\right)$

f. $(-6)(x+1)^2+(-0{,}\overline{3})x=\left[(-x)+\left(-\frac{19}{18}\right)\right]6x$

g. $\frac{x-2}{3}-\frac{1-2x}{2}=\frac{4x-1}{3}$

h. $\frac{\frac{1}{4}}{(0{,}\overline{2}+2).0{,}9}=\frac{1-x}{\frac{4}{3}}$

i. $\frac{\frac{2}{3}(5x-2)-\frac{2}{3}}{2-\frac{1}{5}(x-1)}=-2$

j. $\frac{1}{2}.\left(-x+\frac{6}{5}\right)-\frac{1}{4}=\frac{5}{2}x-\left(\frac{4}{3}+3x\right)+2$

k. $\frac{x-5}{3x-15}=\frac{1}{3}$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones con valor absoluto e indica el conjunto solución de cada una. (Recordar que si $|x|=a\ ;\ con\ a\geq 0 \Rightarrow x=a \vee x=-a$)

a. $\left|x-\frac{1}{3}\right|=(-9)$

b. $\left|-\frac{2}{5}+x\right|=0$

c. $(-3).|x-1|+2=(-1)$

d. $|x-0{,}8|.(-2)=1{,}3$

e. $2.|x-1{,}\overline{1}|-\frac{4}{9}=0{,}\overline{4}$

f. $\frac{1}{3}.|2-x|=3$

3. Teniendo en cuenta la **"condición de anulación del producto"** ($a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \vee b=0$), resuelve e indica el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

a. $(2-2{,}\overline{1}x).\left(\frac{1}{2}-\frac{6-x}{4}\right)=0$

Resolución:

$$(2-2,\bar{1}\,x)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{6-x}{4}\right)=0 \Leftrightarrow 2-2,\bar{1}\,x=0\ (I)\ \vee\ \frac{1}{2}-\frac{6-x}{4}=0\ (II)$$

En (I): $2-2,\bar{1}\,x=0 \Rightarrow 2=\frac{19}{9}x \Longrightarrow 2\cdot\frac{9}{19}=x \Longrightarrow x=\frac{18}{19}$

En (II): $\frac{1}{2}-\frac{6-x}{4}=0 \Rightarrow \frac{1}{2}-\frac{3}{2}+\frac{1}{4}x=0 \Rightarrow (-1)=\left(-\frac{1}{4}\right)x \Rightarrow x=4$

Verifiquemos reemplazando los distintos valores obtenidos en la ecuación

Si $x=\frac{18}{19}$ queda $\left(2-2,\bar{1}\cdot\frac{18}{19}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{6-\frac{18}{19}}{4}\right)=0\cdot\left(-\frac{29}{38}\right)=0$, entonces verifica.

Si $x=4$ queda $(2-2,\bar{1}\cdot 4)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{6-4}{4}\right)=\left(-\frac{58}{9}\right)\cdot 0=0$, también verifica.

Por lo tanto el conjunto de todas las soluciones de la ecuación es:

$$S=\left\{\frac{18}{19};4\right\}$$

b. $\left(x+\frac{1}{3}\right).(0,1-x)=0$

c. $\left(\frac{x-3}{2}-\frac{x}{3}\right).\left(\frac{7-x}{-3}\right)=0$

d. $(x^2+1).(x-\sqrt{2})=0$

e. $\left(\frac{2x-1}{8}-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}\right).(2x+0,\bar{3})=0$

4. Escribe, en cada caso, una ecuación que verifique que:
   a. sus soluciones sean los divisores primos de 6.
   b. sus tres soluciones sean números enteros negativos consecutivos mayores que (-3,17)
   c. 2 y $\left(-\frac{3}{4}\right)$ son sus soluciones
   d. tiene como soluciones el opuesto de (-3) y la quinta parte del elemento neutro del producto.

3.1 Sistemas de ecuaciones

Problema: "Una granja tiene pavos y cerdos. Si en total se cuentan 58 cabezas y 168 patas, ¿cuántos animales de cada tipo hay en la granja?

Para resolverlo comenzaremos expresando algebraicamente este enunciado. Observemos que necesitamos *dos incógnitas*, una para indicar la cantidad total de pavos (x) y otra para la cantidad total de cerdos (y), resultando así, las siguientes expresiones simbólicas:

58 cabezas: $x + y = 58$ (1)

Cada pavo tiene 2 patas, luego el total de patas correspondientes a los pavos será: 2x

Cada cerdo tiene 4 patas, así el total de patas correspondientes a los cerdos será: 4x

Por lo tanto, si se contaron 168 patas, tendremos: $2x + 4y = 168$ (2)

Debemos encontrar un valor de x y uno de y que hagan válidas las ecuaciones (1) y (2) simultáneamente.

Es decir que tenemos que resolver ***un sistema de ecuaciones***[5], encontrando una solución común a las dos ecuaciones.

A ese sistema lo indicamos así: $\begin{cases} x + y = 58 \\ 2x + 4y = 168 \end{cases}$, se corresponde con un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas.[6]

Veremos por ahora, dos métodos para resolver un sistema de ecuaciones: ***el de sustitución*** y ***el de igualación***.

Podrás usar el método que prefieras, aunque en cada caso, será más cómodo alguno en particular.

MÉTODO POR SUSTITUCIÓN

Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones y se sustituye, la expresión obtenida, en la otra ecuación.

Resolvamos por este método, el problema planteado:

$$\begin{cases} x + y = 58 & (1era.\, ecuación) \\ 2x + 4y = 168 & (2da.\, ecuación) \end{cases}$$

Despejamos de la $(1era.\, ecuación)$ la variable $\boldsymbol{y}$: $y = 58 - x$ (*)

[5] Un sistema de ecuaciones está determinado por una cantidad *n* de ecuaciones con una cantidad *m* de incógnitas, de forma que los valores que pueden asumir las incógnitas verifiquen todas las *n* ecuaciones.
[6] En este capítulo sólo trabajaremos con este tipo de sistemas, en cursos posteriores, ampliaremos.

Sustituimos esta expresión, por la variable ***y*** de la $(2da.\, ecuación)$, obteniendo así la siguiente igualdad con una incógnita:

$$2x + 4\underbrace{(58 - x)}_{y} = 168$$

Resolvemos esta ecuación:

$$2x + 232 - 4x = 168 \Rightarrow -2x = -64 \Rightarrow x = 32$$

Este valor de ***x*** ahora se sustituye en la expresión en donde aparecía despejada la variable ***y***, (*): $y = 58 - 32 = 26$

<u>Rta</u>: la granja tiene 32 pavos y 26 cerdos.

MÉTODO POR IGUALACIÓN

Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones y se igualan las expresiones obtenidas.

En el sistema $\begin{cases} x + y = 58 & (1era.\, ecuación) \\ 2x + 4y = 168 & (2da.\, ecuación) \end{cases}$

resulta de la 1*ra ecuación*: $y_{1^{o}ec} = 58 - x$

y de la *2*da ecuación: $y_{2^{o}ec} = (168 - 2x) \cdot \frac{1}{4}$

Por la definición de lo que es un sistema de ecuaciones debe suceder que

$$y_{1^{o}ec} = y_{2^{o}ec}$$

Ahora, entonces, se igualan ambas expresiones y se obtiene una nueva ecuación con una sola incógnita (en este caso ***x***).

$$58 - x = (168 - 2x) \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow -x + \frac{1}{2}x = 42 - 58 \Rightarrow -\frac{1}{2}x = -16 \Rightarrow x = 32$$

Y luego se sustituye este valor de x en alguno de los despejes realizados: $y = 58 - 32 \Rightarrow y = 26$

La solución del sistema es $x = 32 \wedge y = 26$.

<u>Verificación</u>:

Siempre conviene comprobar si la solución encontrada verifica el sistema de ecuaciones.

En nuestro problema se tiene que:

$32 + 26 = 58$, se verifica la 1*ra ecuación*

$2.32 + 4.26 = 168$, se verifica la 2*da ecuación.*

❖ ANALICEMOS LO TRABAJADO

La ecuación $x+y=58$ tiene infinitas soluciones. Algunas de ellas son:
$x=0 \wedge y=58$; $x=10 \wedge y=48$; $x=30 \wedge y=28$; $x=6 \wedge y=52$; etc.

La ecuación $2x+4y=168$ tiene infinitas soluciones. Algunas de ellas son:
$x=0 \wedge y=42$; $x=10 \wedge y=37$; $x=30 \wedge y=27$; $x=6 \wedge y=39$; etc.

De todas esas infinitas soluciones de cada ecuación, sólo hay una que es solución de ambas ecuaciones a la vez: $x=32 \wedge y=26$. Esta es <u>la solución</u> del sistema y la misma se expresa de la siguiente forma: $S=\{(32;26)\}$

Los métodos para resolver sistemas de ecuaciones aquí planteados sirven para garantizar la unicidad en la repuesta, algo que no se puede garantizar usando, por ejemplo, tanteo.

Nota: No siempre al resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas encontrarás una única solución del mismo. Más adelante profundizarás sobre este tema.

ACTIVIDADES

5. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones e indica el conjunto solución:

a. $\begin{cases} x+5y=13 \\ x-y=7 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3x+7y=31 \\ 4x-y=26 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 5x-y=-8 \\ 5x-3y=50 \end{cases}$

e. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}+\dfrac{x-y}{3}=15 \\ x-\dfrac{2}{5}y=12 \end{cases}$

f. $\begin{cases} 2x+3y=-1 \\ 3x+4y=0 \end{cases}$

g. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}=x-1 \\ \dfrac{x-y}{2}=y+1 \end{cases}$

i. $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ 4x-3y=-2 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 4x-3y=24 \\ \dfrac{x}{5}=\dfrac{y}{4} \end{cases}$

h. $\begin{cases} \dfrac{x+3y}{2}=5 \\ 4-\dfrac{2x-y}{2}=1 \end{cases}$

6. **¡A resolver problemas!** Plantea el sistema correspondiente y resuelve cada uno de los siguientes problemas:

   a. El otro día mi abuelo, de 70 años de edad, quiso repartir entre sus nietos cierta cantidad de dinero. Si nos daba $300 a cada uno, le sobraban $600 y si nos daba $500 a cada uno, le faltaban $1000. ¿Cuántos nietos tiene el abuelo? ¿Qué cantidad de dinero quería repartir?

   b. Si los lados de un rectángulo se alargan $2cm.$ cada uno, el perímetro es de $24cm.$ Sabiendo además que la diferencia de las longitudes de los lados es de $2cm.$, ¿cuánto miden los lados del rectángulo?

   c. La suma de dos números es el doble de su diferencia. El más grande es 6 unidades mayor que el doble del más pequeño. Calcula los números.

   d. Encuentra las edades de dos personas sabiendo que la suma de las mismas es, actualmente, 50 años y que la razón entre las mismas era, hace 5 años, igual a $\frac{1}{3}$

   e. ¿Cuántos CD tiene Aníbal y cuántos Bernardo sabiendo que, si Bernardo le da a Aníbal 5 CD, éste tiene el triple de los que le quedan a Bernardo y que ambos quedan con el mismo número de CD, si Aníbal le da a Bernardo 6 CD?

   f. Un comerciante compró manzanas a $1,8 cada una y naranjas a $0,8 cada una, por un total de $144. Las vendió con una ganancia del 20% en las manzanas y del 50% en las naranjas. En total recibió por la venta $190,08. ¿Cuántas manzanas y cuántas naranjas habían comprado?

BIBLIOGRAFIA:

- "Números Reales – Operaciones en los reales" Cod. 1201-15 – Bue, J. C. – Filotti, M.V.- Martínez, M.L. – Rosito, M. – Apunte IPS
- PREM 8 - Buschiazzo-Filiputti- Gonzalez- Lagreca N- Lagreca L-Strazziuso
- Matemática Activa- Masco- Lagreca Liliana- Strazziuso Editorial EUCA
- Matemática 1º Seveso – Wykowski – Ferrarini – Ed . Kapelusz
- Matemática I . Guzmán – Colera – Salvador – Editorial Anaya
- Precálculo- Stewart-Redlin-Watson -3º Edición –Editorial Thomson Learning

RESPUESTAS

CAPÍTULO 1

1. A cargo del alumno.

2.

$-3<2$	$-3>-4$	$-3<-1$	$-3<0$
$-2,\overline{9}=-3$	$-1,\overline{5}=-\dfrac{14}{9}$	$-\sqrt{2}<\sqrt{2}$	$-\sqrt{5}<-\sqrt{2}$
$-0{,}11<-0{,}1$	$-1,\overline{2}>-\dfrac{4}{3}$	$5>-\pi$	$8>-8$

3. $B=\{0;9;10\}$ $C=\left\{-15;-7:-\sqrt{3};\ -\frac{3}{5};\ -\sqrt{962}\right\}$ $D=A$ $E=\left\{-7;0;-\sqrt{3};-\frac{3}{5}\right\}$

4. A cargo del alumno.

5. **a.** 8 **b.** -8 **c.** 8 y -8

6. **a.** $x=3 \vee x=-3$ **b.** $x=2{,}7 \vee x=-2{,}7$ **c.** $x=0$ **d.** $\nexists x\ tal\ que\ |x|<0$

7. A cargo del alumno.

8. A cargo del alumno.

9. A cargo del alumno.

10. $|a|=|b|$

11. A cargo del alumno.

12. Gráficas a cargo del alumno.

a. $|x|=3$ **b.** $|x|=5 \wedge (-x)<0$ **c.** $|x|<2$ **d.** $(-x)=-5$

e. $|x|\geq 4$ **f.** $1<|x|<2$

13. **a.** i. **b.** ii.

14. A cargo del alumno.

15. $A=\{-2;-1;0;1;2\}$ $B=\{-3;3\}$ $C=\{-2;-1;1;2\}$ $D=\emptyset$ $E=\{0\}$ $F=\emptyset$

16. A cargo del alumno.

17. **a.** F **b.** F **c.** F **d.** F **e.** V **f.** F **g.** V

CAPÍTULO 2

1.

	i	ii	iii	Iv	v	vi
$a+b$	4	-4	-14	$\frac{5}{3}$	$\sqrt{5}$	0
$a+(-b)$	14	-14	-4	3	$\sqrt{5}$	$\frac{10}{7}$

2.

	i	ii	iii	iv
$a+(-b)+(-c)$	13	$-\frac{7}{3}$	$\frac{7}{9}$	$-\frac{19}{20}$

3. A cargo del alumno.

4. b. $x=\frac{5}{4}$ c. $x=\frac{16}{3}$ d. $x=\frac{3}{2}$ e. $x=\frac{23}{18}$

g. $x=4 \vee x=-10$ h. $x=-4 \vee x=6$ i. $x=-\frac{1}{4}$ k. $x=0 \vee x=-\frac{2}{3}$

l. $x=-2{,}1$ m. $x=3 \vee x=7$ n. $x=-1 \vee x=5$

5.

	i	ii	iii
$(-a)\cdot b$	-10	35	$\frac{2}{5}$
$a\cdot(-b)$	-10	35	$\frac{2}{5}$
$a\cdot b+c$	14	-23	$\frac{1}{5}$
$(-a)\cdot b+(-c)$	-14	23	$-\frac{1}{5}$
$(-a)\cdot[(-b)+c]$	2	25	$\frac{7}{25}$
$\frac{5}{2}a+c$	9	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$

6. a $>$ b. $<$ c. $<$ d. $>$ e. $>$; $<$ f. $<$; $>$ g. $=$; $=$ h. $<$

7. a.

n	1	-1	1	2	-1	-2
m	1	-1	2	1	-2	-1

b. $\nexists n, m \in \mathbb{Z}$

c.

n	1	-1	1	-1	2	-2
m	-1	1	-2	2	-1	1

8.a. $2(-a) + \frac{1}{b+c} = \frac{7}{3}$ **b.** $(a+c) \cdot \frac{1}{c} = \frac{1}{3}$ **c.** $\left(-\frac{1}{a}\right) + \frac{1}{3} \cdot c = \frac{9}{4}$

9. Si $a = 0 \longrightarrow b \in \mathbb{R}$. Si $a \neq 0 \longrightarrow b = 1$. Si $b = 1 \longrightarrow \forall a$

10. $a = 0 \wedge b = 5$

11. A cargo del alumno.

12. A cargo del alumno.

13.c. abc **d.** $abxy$ **e.** abc **f.** $(-1)axy$ **g.** $\sqrt{3}txy$ **h.** $(-4)axy$ **i.** $(-6)abcd$ **j.** $15abcd$

14. b. $(-6)y + 2yz$ **c.** $(-12)ab + 20a$ **d.** $6ab + (-6)bc$ **e.** $ac + bc + ad + bd$

f. $(-4)ax + 6bx + \frac{2}{3}ay + (-1)by$ **g.** $8abx + (-24)ax + (-1)aby + 3ay$

h. $\left(-\frac{3}{5}\right)x + \left(-\frac{1}{5}\right) + 3xy + y$ **i.** $(-2)ac + (-2)bc + (-2)ad + (-2)bd$

j. $6ac + (-1)bc + 12ad + (-2)bd$

15.b. $(-1)x$ **c.** $\frac{7}{2}x$ **d.** $\frac{11}{4}a$ **e.** $\frac{16}{15}xy$

16.b. $(-3)a + \frac{3}{2}b + 1$ **c.** $\frac{11}{6}a + (-2)b$ **d.** $\frac{1}{2}y + 5z$

e. $\frac{3}{2}x + \left(-\frac{1}{3}\right)y + (-2)z$ **f.** $\frac{1}{2}y + \left(-\frac{8}{15}\right)xy + (-1)x$

17.b. $\left(-\frac{9}{5}\right)a + \left(-\frac{3}{5}\right)b$ **c.** $(-1{,}2)x + (-0{,}2)$ **d.** $3x + (-9)y$ **e.** $(-2)a + 4b + 1$

f. $(-1)x + xy + (-6)y$ **g.** $10x + (-4)xy$ **h.** $8x + 3xy + \left(-\frac{2}{3}\right)y + \left(-\frac{7}{3}\right)$

i. $\left(-\frac{7}{6}\right)x + 3xy + y + \left(-\frac{2}{3}\right)$ **j.** $\frac{7}{4}ac + (-5)bc + (-2)ab$

18.i. 9 **ii.** $-\frac{2}{15}$ **iii.** -27 **iv.** 162 **v.** $\frac{89}{27}$ **vi.** $\frac{83}{27}$

19. A cargo del alumno.

20.b. $4x^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)x + (-7)$ **c.** $x^2 + 2xy$ **d.** $\frac{4}{3}x^2 + 12x + 25$ **e.** $2x^2 + 18x + 51$

f. $-6x + 18$ **g.** $7x + 3$ **h.** $(-1)x^2 + (-19)x + \frac{21}{2}$

i. $x^2y^2 + 4xy^3 + xy^2$ j. $x^2y^2 + (-3)x^2y + 4xy^2$

21. a. V b. V c. F d. V

22.a. $>$ b. $\geq$ c. $<$ d. $>$

23.b. $(-1)ab + (-4)a$ c. $-5xy + \frac{2}{3}x + 12y$ d. $-6xz + 10x + 4yz + (-10)y$

e. $3x + (-3)xy + \frac{8}{9}y + \frac{1}{3}$ f. $\left(-\frac{13}{6}\right)xy + \frac{1}{6}y + \left(-\frac{19}{6}\right)x + \left(-\frac{1}{3}\right)$

g. $(-8)x + (-2)y + 2xy$ h. x^2 i. $x^2 + 3y^2$ j. $x^2 + (-4)xy$

24. A cargo del alumno.

25.b. $x = -8$ c. $x = \frac{8}{3}$ d. $x = 1$ e. $x = \frac{7}{2}$ g. $x = \frac{5}{18}$ h. $x = -1$

i. $x = -\frac{1}{5}$ j. $x = -\frac{7}{6}$ k. $x = \frac{5}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$ l. $x = 0 \vee x = 2$

m. $x = \frac{9}{2} \vee x = -\frac{7}{2}$ n. $x = \frac{5}{2} \vee x = -2$ ñ. $x = \frac{19}{4} \vee x = -\frac{17}{4}$

26.i. $n^{o} = 1$ ii. Buzo cuesta \$250 iii. $n^{o} = 10$

27. A cargo del alumno.

28. i. $\frac{5}{7}$ ii. $-\frac{5}{7}$ iii. $-\frac{9}{7}$ iv. $-\frac{5}{7}$ v. -1 vi. -2

29. a. $\frac{13}{2}x - 5$ b. $-1 + xy$ c. $-\frac{5}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + y - xy$

d. $-x$ e. $-4x + 1$ f. $-5xy + 6y - x + 2$ g. $-6x + 15xy - 5y$

h. 1 i. $5x + 3 + x^2$ j. $-3x^2 + 14x - 14$ k. 18 l. x^2

m. $xy - 10y - \frac{7}{5}x + 4$ n. $x^2 - 2x - \frac{3}{2}$ o. $2x^2 - 3x + 1$

30. b. $x = 1$ c. $x = \frac{11}{2}$ d. $x = -1$ e. $x = 2$ f. $x = 7 \vee x = -3$

g. $x = 3 \vee x = -5$ h. $x = 1$ i. $x = 4 \vee x = 0$

31.a. 28 y 16 b. 400alumnos c. 90 d. -63

32. A cargo del alumno.

33. A cargo del alumno.

34.i. $\frac{1}{50}$ ii. $\frac{21}{50}$ iii. $-\frac{19}{50}$ iv. $\frac{1}{2}$ v. 5 vi. $\frac{624}{125}$ vii. 0 viii. $-\frac{1}{50}$

35.a. $\frac{1}{2}x^2 - 5x + 6$ b. $-x + 1$ c. $2x^2y - \frac{9}{2}x + 4xy - \frac{17}{2}$ d. $-\frac{13}{12}$

e. $-2x^2 + 3x + \frac{1}{2}$ f. $\frac{17}{30}x - \frac{3}{2}$

36.a. $x = -15$ b. $x = 0$ c. $\forall x \neq 0$ d. $x = 1$ e. $x = -3$ f. $x = -3$

37.a. $x = 76$ b. $x = -\frac{45}{22}$ c. $x = 20$ d. $x = \frac{46}{3}$ e. $x = \frac{19}{10}$ f. $x = -1$ g. $x = 2$

h. $x = 3$ i. $x = \frac{9}{7}$ j. $x = 5$ k. $x = \frac{8}{3}$ l. $x = -1$ m. $x = \frac{4}{3}$

n. $x = 6 \vee x = -2$ **ñ.** $x = 2 \vee x = 0$ **o.** $x = 19 \vee x = -17$ **p.** $x = 3 \vee x = 1$

38.i. 1008 litros **ii.** 288 alumnos **iii.** 1800km **iv.** Ana: \$1200; Belén: \$600; Corina:\$200

39. A cargo del alumno.

40.a. $x = -\frac{15}{2}$ **b.** $x = 2 \wedge y = 4$ **c.** $x = -6 \wedge y = -15$

41.a. $n^{o}: 3\ y\ 2$ **b.** $n^{o}: 5$ **c.** Alberto: \$150000; Betina: \$120000; Chiara: \$90000

42.b. $x = \frac{2}{21}$ **c.** $x = -\frac{7}{5}$ **d.** $x = -\frac{3}{11}$ **e.** $x = -1$

CAPÍTULO 3

1)

a. $S = \emptyset$
b. $S = \mathbb{R}$
c. $S = \emptyset$
d. $S = \{0\}$
e. $S = \mathbb{R}$
f. $S = \{-1\}$
g. $S = \emptyset$
h. $S = \left\{\frac{5}{6}\right\}$
i. $S = \left\{-\frac{9}{11}\right\}$
j. $S = \emptyset$
k. $S = \mathbb{R} - \{5\}$

2)

a. $S = \emptyset$
b. $S = \left\{\frac{2}{5}\right\}$
c. $S = \{0;2\}$
d. $S = \emptyset$
e. $S = \left\{\frac{14}{9};\frac{2}{3}\right\}$
f. $S = \{-7;11\}$

3) a. $S = \left\{\frac{18}{19}; 4\right\}$ b. $S = \left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{10}\right\}$ c. $S = \{7; 9\}$ d. $S = \{\sqrt{2}\}$ e. $S = \mathbb{R}$

4) A cargo del alumno

5)

a. $S = \{(8;1)\}$
b. $S = \left\{\left(\frac{213}{31};\frac{46}{31}\right)\right\}$
c. $S = \left\{\left(-\frac{37}{5};-29\right)\right\}$
d. $S = \{(15;12)\}$
e. $S = \{(16;10)\}$
f. $S = \{(4;-3)\}$
g. $S = \{(2;0)\}$
h. $S = \{(4;2)\}$
i. $S = \{(1;2)\}$

6) a. Nietos: 8 - Dinero a repartir: \$3000
b. Base: 5 cm. – Ancho: 3 cm.
c. Los números son 6 y 18
d. Las edades son 15 años y 35 años
e. Aníbal tiene 28 CD y Bernardo tiene 16 CD
f. Manzanas: 48 – Naranjas: 72