

MINISTERIO DE JUSTICIA E INSTRUCCION PUBLICA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS, Etc.
DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

MATHEMATICÆ NOTÆ

BOLETIN

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA

DIRECTOR

BEPPPO LEVI

AÑO SEXTO



ROSARIO
REPUBLICA ARGENTINA
1946

MINISTERIO DE INSTRUCCIÓN PÚBLICA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NOROCCIDENTE

MATHEMATICAL NOTES

BOLETIN

DEL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

DIRECCION

PROF. DR. J. J. GARCIA

*Es propiedad. Queda
hecho el depósito de ley.*

AÑO SEXTO



ROSARIO

REPUBLICA ARGENTINA

1930

I N D I C E

	Pág.
BABINI, J. — <i>Sobre un tipo de desarrollos en serie del número e</i>	40
COTLAR, M. — <i>Estudio de una clase de polinomios de Bernoulli</i>	69
DURAÑONA Y VEDIA, A. — <i>Cálculo de $\sqrt[n]{N}$ mediante una fracción continua generalizada</i>	116
GODEAUX, L. — <i>Sur une involution rationnelle appartenant à une réglée elliptique</i>	201
GROSS, B. y LEVI, B. — <i>Sobre el cálculo de la transformación inversa de Laplace</i>	213
LEVI, B. — <i>Magnitudes y dimensiones físicas</i>	1
» — <i>Propiedades del cuadrángulo base de un haz de cónicas</i>	112
» — <i>Federigo Enriques</i>	119
» — <i>Una ejercitación sobre integrales elípticas</i>	167
MATEO, J. — <i>Construcción de cónicas deducidas de una particularidad de las mismas respecto de un círculo y criterio para deducir su género</i>	96
SANTALÓ, L. A. — <i>Sobre un complejo lineal ligado a una curva cerrada del espacio</i>	45
» — <i>Sobre la longitud de una curva del espacio como valor medio de las longitudes de sus proyecciones ortogonales</i>	158
VALIRON, G. — <i>Relación sobre los trabajos de análisis matemático publicados durante la ocupación</i>	138
 LA REDACCION:	
Resultado del concurso entre solucionistas de problemas propuestos en el Año Quinto (1945)	166
 EJERCICIOS Y PROBLEMAS:	
Propuestos: Del 111 al 116	66
Del 117 al 121	133
Del 122 al 126	196
Del 127 al 131	229
Soluciones:	57, 124, 191, 225

BIBLIOGRAFIA:

- GUILLERMO KNIE, *Problemas de mecánica atómica* (Levi), pág. 67. M. O. GONZÁLEZ, *Nuevas tablas de logaritmos y de funciones naturales* (E. O. Ferrari), pág. 134. M. BALANZAT, *Introducción a la Matemática moderna* (L. A. Santaló), pág. 135. *Intermediaire des recherches Mathématiques* (La Red.). L. BIEBERBACH, *Theorie der Differentialgleichungen* (L. A. Santaló) pág. 197. M. KANT, *Historia Natural y teoría general del Cielo* (C. Pla) pág. 198. CH. DE LA VALLEE POUSSIN, *Cours d'analyse infinitesimale* (B. Levi) pág. 199. A. SAGASTUME BERRA, *Introducción a la Matemática Superior* (B. Levi), pág. 231. G. VALIRON, *Cours d'analyse mathématique* (B. Levi), pág. 232. L. M. GRAVES, *The Theory of functions of real variables* (L. A. Santaló), pág. 232. F. G. W. BROWN, *Elementary mathematics for Workshop Students. A short applied Workshop Mathematics* (B. Levi), pág. 235.

MAGNITUDES Y DIMENSIONES FISICAS

por

B. LEVI

1. — La noción de *magnitud física* coincide con la de *medición*; hasta que no interviene la medición puede tenerse el fenómeno, pero no la magnitud⁽¹⁾. La medición es también el medio por el cual la física se vincula a la matemática, aunque a veces esta medición deba entenderse en un sentido en todo ideal y no efectivamente llevable a la práctica; de manera que todavía podríamos decir que siempre tratamos con el mismo concepto al decir magnitud, o medición, o interpretación matemática de la física.

Esta interpretación matemática se hace por medio del *número*; *medir* es hacer corresponder a una determinada manifestación física un *número* o *sistema de números*, de tal manera que ese número o sistema de números pueda concebirse como *variable*, es decir capaz de tomar valores diferentes, correspon-

⁽¹⁾ Pedimos al lector aceptar esta y otras afirmaciones que podrán seguir, puestas en forma un poco trunca con el fin de fijar un punto de vista que se va a adoptar en lo que sigue y que serán justificadas por el artículo en su conjunto; y esto aunque puedan en parte chocar con alguna costumbre o direcciones de pensamiento diferentes.

Si, por ej., tenemos en cuenta obras aun clásicas, debemos admitir que, por lo menos en la apariencia, la noción de magnitud más universalmente recibida no se adapta enteramente a nuestra definición actual. Para Euclides, para dar un ejemplo, “magnitud” es una intuición no bien definida —que en lenguaje lógico actual podría decirse una *idea primitiva*— de cierta manera opuesta a la noción de “medir”; pues este vocablo llevaba entonces sobreentendido que la medida se expresara por números enteros.

Muchos autores modernos ponen, para definir la noción de magnitud, una axiomática que no difiere en la sustancia de la de los números reales. Y la presente observación debe en efecto valer también, por ej., respecto de lo que decimos más abajo acerca de los *números*.

diendo siempre, a estos diferentes valores, determinadas manifestaciones físicas que, a los efectos de la teoría físico-matemática adoptada, deben considerarse como de la misma especie. Y estas diferentes manifestaciones físicas se dicen constituir una *clase de magnitudes homogéneas*.

Números y sistemas de números son segmentos dirigidos y sistemas de segmentos dirigidos sobre los cuales son definidas determinadas operaciones (sumas, productos, etc.). A los sistemas de números en esta acepción se llama frecuentemente *tensores*, siendo una *clase de tensores* definida por las operaciones dichas. En particular pueden los tensores ser *vectores*. Cuando el sistema se reduce a un solo número la magnitud considerada se llama *escalar*.

En la teoría de la medida los números y tensores pueden tener también otra aplicación, distinta de la propia de medir; esto es la función de *operadores* que transforman una medida en otra equivalente. El caso más simple e importante se tiene cuando se conviene multiplicar todas las medidas de una determinada clase de magnitudes homogéneas por un mismo número, es decir, aplicar a todas estas medidas una *transformación por semejanza*, para la cual dicho multiplicador es la razón de semejanza. Transformaciones análogas a la semejanza, pero que operan con tensores en cambio de números son *homografías vectoriales* o *tensoriales*. Las transformaciones por semejanza se llaman ordinariamente *cambios de unidad de medida*. Las transformaciones homográficas se llaman ordinariamente *cambios de sistema de referencia*, llamándose *sistema de referencia*, en cada caso, al sistema de las magnitudes para las cuales el sistema de números representativos está constituido por todos 0, salvo uno que es 1. En el caso de magnitudes escalares el sistema de referencia se compone de un solo elemento, que es la magnitud a la cual corresponde la medida 1; se llama *unidad de medida*.

El procedimiento por el cual se establece la correspondencia entre los elementos de un sistema de magnitudes homogéneas y sus medidas lo llamaremos *aparato de medición* y puede ser constituido por determinadas operaciones físicas o bien aún por operaciones matemáticas⁽²⁾.

(²) Damos así a la palabra "aparato" un significado extensivo con respecto al que tiene en el idioma corriente, donde el vocablo está reservado para

El aparato de medición se supone, por hipótesis, *invariable con el tiempo*, aunque en muchos casos esta invariabilidad no pueda realizarse sino en modo aproximativo. Según nuestras costumbres mentales, atribuimos la absoluta invariabilidad a las operaciones lógicas y matemáticas. Por lo tanto, la tendencia a progresar en la realización de la invariabilidad de los aparatos de medición lleva consigo la extensión del dominio del cálculo matemático en la determinación de las medidas.

2. — Es importante que el lector esté convencido de que las definiciones del n. 1 no son ni demasiado abstractas, ni demasiado generales.

Aunque viejas costumbres de la enseñanza — de las cuales no sería fácil establecer el origen, pero que no podrían decirse antiguas, porque no corresponden al desarrollo histórico de la ciencia ⁽³⁾ — llevan a menudo a considerar la noción de magni-

indicar el dispositivo material por el cual la medición se hace posible, pero excluyendo las prescripciones que sirven para el uso del mismo. En el sentido del texto, estas prescripciones, y aun el procedimiento de cálculo que puede ser necesario aplicar para transformar los datos brutos de observación en la expresión definitiva de la medida deben considerarse como partes integrantes del aparato.

⁽³⁾ A estas costumbres ya aludimos en la nota (1). Aun en el artículo *Mass und Messen* (Medida y medir) por C. RUNGE en la *Encyklopaedie der mathematischen Wissenschaften* T. V., 1 (trad. francesa, muy acrecida, *La mesure*, por Ed. GUILLAUME) donde el fin no sería precisamente didáctico, se empieza en el § 1 (§ 2 de la traducción) con consideraciones de esta naturaleza. Sin embargo en los párrafos inmediatamente siguientes, donde, manteniéndose todavía en consideraciones generales, se intenta acercarse a la noción de magnitud física (que es la que interesa a nosotros y al artículo citado) tomando como ejemplo la temperatura, se demuestra en seguida la importancia fundamental y decisiva del instrumental y de la teoría física en la propia *definición de las magnitudes*. El resumen que se puede sacar de la comparación de los distintos párrafos es el siguiente, que vale la pena enunciar porque puede ser la luz de guía de toda la teoría: aunque sea necesariamente la sensación el origen primero de las nociones físicas y en particular esta misma sensación contenga el germen de una graduación por cantidad, el conocimiento científico lleva sin retardo a la abstracción que impone a los dos órdenes de conocimientos, el intuitivo y el científico, desarrollos divergentes. El ejemplo bastante sugestivo elegido por Runge, — de que una disposición de las temperaturas según órdenes acordes puede obtenerse igualmente sea comparando las dilataciones de los cuerpos como comparando las intensidades de la irradiación; pero que, después de elegir convenientemente el origen de las tempe-

tudes homogéneas como algo intuitivo y *a priori*, a imaginar luego otros procedimientos intuitivos que permitan establecer, la igualdad, la suma, la división en partes de esas magnitudes homogéneas, y construir sobre esta base la representación numérica; basta muy poca reflexión para convencerse que los pocos casos en los que tal mecanismo constructivo parece realizado, son todavía artificiales, o porque se refieren a sistemas de manifestaciones físicas que todavía no han alcanzado el grado de *magnitudes* en el sentido aclarado arriba, y la operación considerada más bien que medición es clasificación según un orden aceptado por los sentidos (ejemplos, la clasificación de las estrellas por orden de brillo o bien la escala de durezas, según Mohs), o porque el procedimiento descrito es del todo imaginario y lejos de la verdad práctica (así sería por ej. cualquier tentativa de definir de esta manera una escala de temperaturas o de tensiones eléctricas) ⁽⁴⁾.

El único caso en el que más o menos la definición de una clase de magnitudes por el método indicado puede reconocerse cierto es el de los segmentos; pero esto ocurre porque efectivamente la geometría debe aceptar como *idea primitiva* la de segmentos iguales y debe luego caracterizar esta idea primitiva mediante *postulados* sobre la suma y otras operaciones; y el transporte de segmentos rígidos inextensibles es una operación material que realiza con suficiente aproximación estos postulados.

Por opuesto es en general el aparato de medición el que, con sus indicaciones, *define la magnitud*; así, si nos preguntamos, aún desde el punto de vista histórico, ¿qué es la corriente eléctrica, no podemos decir más que una alteración que se pre-

raturas, los dos modos de crecimientos están entre ellos como la primera y la cuarta potencia de una variable—, muestra a las claras esta diferencia, y muestra también que sólo por la teoría tienen sentido las consideraciones dimensionales a las que se refiere el presente trabajo.

(⁴) Acostumbra, en los tratados elementales de física, hacer notar, por ej., que si las dos manos se tienen por breve tiempo sumergidas en aguas, una fría y otra caliente, luego se introducen en la misma, de temperatura intermedia, no van a juzgar igual temperatura; brevemente, el juicio de igual temperatura confiado a la sensación no tiene sentido determinado. Pero la situación se presenta en seguida mucho peor si uno quisiera dar significado intuitivo, anterior a la creación del instrumento de medición, al propósito de sumar temperaturas. Lo mismo hablando, como decimos, de tensiones eléctricas, y casi de cualquier otra magnitud pudiera ocurrir.

senta en cierto grupo de cuerpos por la que determinadas apariencias concordemente se manifiestan, térmicas, magnéticas, sensoriales, etc. Pero es únicamente el galvanómetro el que define la corriente como magnitud y asegura, cuando menos con cierta aproximación, la simultaneidad de estas manifestaciones; y que en el mismo tiempo indica sobre una escala un segmento que proporciona la medida de la corriente. Asimismo es para el termómetro, para la balanza, etc. Siempre el instrumento transforma la manifestación física que se pretende medir en un segmento por el corrimiento de un índice sobre una escala, tomando así la posición predominante en la definición de la magnitud.

Desde luego las magnitudes que responden a esta descripción serán siempre escalares. La definición de magnitudes vectoriales y tensoriales, como velocidades, aceleraciones, fuerzas, deformaciones elásticas de los sólidos, constante dieléctrica de cristales, etc. deriva generalmente de la aplicación de cálculos matemáticos a los resultados de mediciones escalares y no van a interesarnos mayormente en nuestro estudio.

3. — Una parcial excepción está representada por las tres magnitudes

longitud tiempo masa

que cumplen doble oficio, siendo de considerarse por un lado como magnitudes físicas en el sentido esbozado anteriormente; pero, por otro lado, también como el sustrato lógico que antecede a la física. Este segundo punto de vista da a estas magnitudes esa posición de preferencia por la cual en muchas oportunidades ha aparecido y aparece como el desideratum de la teoría física lo de referir a ellas todos los fenómenos.

El espacio físico en el cual nosotros concebimos desarrollarse los fenómenos es un duplicado del espacio de la métrica euclidiana; y es tal aun cuando no se quiera olvidar las discusiones acerca de la posible no-euclideanidad del espacio métrico real y los recientes desarrollos de la física teórica por la consideración de un cronotopo en cuatro dimensiones o aun de espacios de mayor número de dimensiones. El hecho que la estructuración lógica de nuestra mente no sea en contradicción con una geometría no-euclidiana no impide que, por ser la euclidiana compatible con ella y ser la misma en que históricamente se ha desenvuelto nuestra formación científica, le resulta esta posición de

preeminencia. La geometría se desarrolla enteramente sobre las nociones topológicas de punto y de espacio tridimensional y la de *distancia*; teniendo únicamente esta última carácter de magnitud; y esto necesariamente antes de definirse un aparato medidor en sentido físico.

Pero el espacio físico difiere del espacio geométrico en cuanto, mientras en éste únicamente vemos relaciones estáticas entre los elementos de las figuras, el primero está caracterizado por la variabilidad de esas relaciones, lo que llamamos movimiento. Para representarnos esta variabilidad debemos concebir primero un duplicado del punto geométrico, el que podemos llamar *punto material* ⁽⁵⁾, que del punto geométrico difiere por tener una individualidad que permite reconocerlo en instantes diferentes como coincidente con puntos geométricos diferentes; y debemos igualmente concebir un *tiempo* como una variable a cuyos valores (*instantes*) se coordinan las distintas configuraciones.

La *cinemática* trata notoriamente las propiedades que derivan de esta variabilidad; es sustancialmente una geometría analítica en un espacio cuadrimensional, sin que se necesite dar a la variable tiempo una más precisa interpretación física.

Pero la física pretende responder a la noción de *causa*, aun cuando deba, con Newton, excluirse de ella todo significado trascendente; la causa del movimiento es la *fuerza dinámica* (*vis motrix*) ⁽⁶⁾; admitiendo como postulado la ley de inercia, el

⁽⁵⁾ Podría acaso ser más conveniente *punto físico*, pero menos claro porque menos corresponde a la costumbre que reconoce el movimiento a la materia; por eso las antiguas teorías de los fluídos.

⁽⁶⁾ Como se sabe, NEWTON pone la ley de inercia como primer postulado en sus *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Que el principio no sea de intuición inmediata o resultado inmediato de experiencia está probado por el hecho de que no estaba admitido por la física aristotélica. Su primera afirmación pertenece, como se sabe, a Galileo y es importante recordar que el mismo llega a él por pura teoría, por medio de un razonamiento de continuidad. Desde las primeras páginas de la tercera jornada del *Diálogo*: *Dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze etc.*, observa Galileo que un cuerpo que cae de cierta altura adquiere una energía (en el lenguaje de Galileo, *momento*) capaz de hacerlo subir nuevamente hasta el nivel de partida; muy adelante, ya cerca de terminar la jornada, en el *Escolio* a la prop. XXIII, después de observar que, al subir de esta manera el cuerpo a lo largo de un plano inclinado, recorrerá un camino tanto más largo cuanto menor es la inclinación del plano, pasa al límite en el caso que el plano se hiciera hori-

movimiento uniforme resulta como el estado natural de las cosas, el que no necesita explicación causal y la causa del movimiento se identifica con la simple afirmación de la existencia de una aceleración. Es lo que hacemos ordinariamente cuando en las modernas teorías gravitacionales hablamos de campos de aceleraciones. Sin embargo a la *vis motrix* se opone la *vis materiæ*, la energía cinética, todavía llamada *fuerza viva*. De la unión de los dos conceptos nace como nueva idea abstracta la de *masa*, como un atributo del punto material al cual la fuerza dinámica está aplicada. Así entendida la masa es todavía una idea primitiva de magnitud, aunque Newton la defina como «la medida que surge de densidad y magnitud (grandor) conjuntamente».

La mecánica, como se ha formado por el pensamiento de muchos pensadores occidentales entre los siglos XV al XVIII, y de los cuales son máximos exponentes Galileo y Newton, es una estructuración exclusivamente lógica, a la par de la geometría de Euclides. Como tal, ella se levanta por postulados y definiciones sobre las ideas primitivas constituídas por el espacio físico y las tres magnitudes: longitud, tiempo y masa, concebidas como variables independientes; por lo tanto es tridimensional en el sentido de la teoría de las magnitudes aceptada por la física (7).

zontal, para enunciar la ley de inercia. Sin ninguna duda Galileo no espera este preciso razonamiento para formar el concepto de la ley; y en efecto a lo largo de todo el diálogo se considera como uniforme el movimiento en plano horizontal; la diferencia está en esto: que en aquellas aplicaciones experimentales era suficiente admitir lo que dice la experiencia, que el movimiento se mantiene uniforme por un breve lapso de tiempo, mientras el enunciado de la ley tiene valor absoluto.

(7) La palabra dimensión tiene evidentemente aquí un significado no confundible con el ordinario de las dimensiones del espacio. Aunque podría imaginarse una representación hiperspacial en 5 dimensiones del mundo físico en la cual cada punto fuera caracterizado por sus tres coordenadas geométricas, el instante y la masa (excluyendo esta última, es esta en substancia la primera presentación del cronotopo), se trataría únicamente de un artificio convencional, como el de los diagramas de la estadística, que probablemente no tendría ninguna utilidad. La razón es que las "dimensiones del espacio" no son precisamente las 3 coordenadas, por cuanto estas solo son relativas a un determinado sistema de referencia, mientras la tridimensionalidad espacial precede a la elección del sistema y está caracterizada por los postulados geométricos (En la traducción francesa del artículo de la *Encyklopædie*, que hemos citado, en el § 6 se intenta en efecto indicar la posibilidad de intro-

Todo otro concepto se introduce en la mecánica por definiciones nominales, representadas generalmente por fórmulas matemáticas; de eso resulta que muchos de ellos sean magnitudes en el sentido de tener medida escalar, para la cual aparato de medición son las mismas fórmulas de definición. El problema de la medición efectiva no se plantea por tratarse de teoría puramente lógica. El hecho de que estas fórmulas sean monomiales y que por lo tanto a cada una de las nuevas magnitudes corresponda una fórmula dimensional (cfr. n. 11) puede ser considerado como dependiente de nuestra voluntad, aunque ésta sea dirigida por las imágenes físicas que están detrás de la teoría y a las cuales vamos a referirnos ahora. Y es ésta la razón por la cual la teoría dimensional ha empezado con las magnitudes mecánicas, y precisamente con problemas relativamente vulgares de metrología. Así la identidad dimensional de la energía cinética y del trabajo no es un hecho físico, sino algebraico, pues si un punto material con masa m y velocidad v pierde su velocidad, nosotros decimos que esto es debido a la intervención de una fuerza f a la cual corresponde una aceleración $f/m = v/T$, si T es el tiempo empleado para que la velocidad se agote.

4. — La física difiere de la mecánica por su adherencia al mundo fenoménico, del cual busca una representación conforme a la estructuración de nuestra mente ⁽⁸⁾. Así la mecánica newto-

ducir fórmulas dimensionales con dimensiones vectoriales; es fácil ver que tales fórmulas no serían interpretables sin una explicación para cada una, mientras el ejemplo propuesto, que intentaría establecer una diferencia en la representación dimensional entre el trabajo y el momento de una fuerza respecto a un punto, no tiene razón de ser, por lo que decimos en el texto a continuación). La característica que da significado teórico al espacio-tiempo de Einstein o de Minkowski es de estar definido un sistema de transformaciones de coordenadas que intenta sustituir aquellos postulados.

⁽⁸⁾ Posiblemente haya alguien que prefiera asignar a la física y a la ciencia en general algún fin utilitario que se concrete en la palabra "prever". Pero ¿que significa prever? Una vez desacreditada una previsión por fuerza de magia, no puede la previsión fundarse sobre otra cosa que sobre la extrapolación estadística o sobre la confianza en una conformidad entre el desarrollo del mundo y las operaciones del cerebro razonante. La extrapolación pura y simple no pide ciencia, sino solo registración y supone una permanencia de las causas que está excluida por la experiencia. Queda luego como único punto de apoyo la fe en la racionalidad del mundo.

Pero aún: ¿hay un fin en prever? Si nuestra previsión llegara a decirnos

niana ha surgido por el esfuerzo de dar organización lógica al conjunto de los fenómenos vinculados a la gravedad, al movimiento dentro de los fluidos como el aire y el agua, y al movimiento del sistema planetario (^{s bis}). A ese fin debe conformarse la interpretación como magnitudes físicas de las ideas primitivas de longitud, tiempo, masa.

La primera no presenta problema, por pertenecer a la geometría tradicional.

Respecto del tiempo, la aceptación de la ley de inercia lleva a admitir la resistencia del aire y a buscar el aparato de medida que debe definir el tiempo en un movimiento de considerarse como uniforme por escapar a esa resistencia. Galileo imagina el péndulo o bien la masa de agua que sale de un pequeño agujero en una cuba grande; y es interesante notar que el movimiento del péndulo ha ocupado después a Huyghens, Newton, Bernoulli y otros. Y aunque desde antiguo el patrón natural para la determinación del tiempo haya sido el período de la rotación de la Tierra, la física moderna estima ciertamente más natural poner en tela de juicio la uniformidad de esa rotación, por considerar eventuales irregularidades en consecuencia de las mareas y de otras posibles influencias exteriores, que dudar de las leyes del péndulo. La física más moderna todavía nos lleva acaso a preferir referirnos a la propagación de la luz. Se trata de que, aun queriendo mantener la ley de inercia como guía en la definición del movimiento uniforme, queda todavía en nuestro arbitrio decidir cuándo deba afirmarse la falta o la constancia de las fuerzas.

Con respecto de la masa, se sabe que se la mide con la balanza; y ésta, en aplicación de la teoría de la palanca, es en verdad un aparato medidor de fuerzas estáticas, el cual, por la inversa proporcionalidad entre el brazo y la intensidad de las fuerzas en equilibrio, transforma directamente la intensidad de la fuerza por medir, en un segmento. La segunda ley de Newton afirma la proporcionalidad de la fuerza a la aceleración, entendiéndose que queda invariada la masa a la cual la fuerza se aplica. Pero la definición III (las definiciones de Newton son efec-

que no vale la pena de imponernos el esfuerzo de la deducción lógica, que el mundo es irreparablemente irracional, ¿es que nosotros nos adaptáramos al juicio?

(^{s bis}) Me refiero directamente a los *Principia* de Newton.

tivamente postulados relativos a las ideas de masa y fuerza) afirma que la resistencia de la materia para cambiar su estado de moto o de reposo es proporcional a la masa⁽⁹⁾; se sigue que, mientras todas las masas estén sujetas a aceleraciones iguales, las fuerzas serán proporcionales a las masas, siendo por lo tanto la masa el coeficiente de proporcionalidad del cual habla la ley II. Y, por cuanto tengamos mayor confianza en la invariabilidad de las masas que en la de las fuerzas (nosotros preferimos en efecto admitir que, cambiando lugar, los cuerpos conservan, en los casos ordinarios, su cantidad de materia y puede variar la fuerza que los empuja en la caída), se convierte la balanza en el aparato medidor de las masas, en cuanto sea indicado el patrón de la masa unidad⁽¹⁰⁾.

5. — Pero la consideración de la masa nos lleva a un más inmediato contacto con el mundo fenoménico que caracteriza,

(⁹) La def. III, en la parte enunciativa, no dice precisamente esto, sino solamente afirma la inercia: *Materiae vis insita est potentia resistendi, qua corpus unumquodque, quantum in se est, perseverat in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum*; la fuerza propia de la materia es la capacidad de resistir por la cual cualquier cuerpo, por cuanto es, persevera en su propio estado, sea de reposo, sea de movimiento uniforme por derecho. Pero en el comentario que inmediatamente sigue se añade: “ella es siempre proporcional al cuerpo, y no difiere en nada de la inercia de la masa, sino en el modo de concebir”.

(¹⁰) En verdad, resulta de toda la cita que la fuerza a la cual se refiere Newton es la fuerza dinámica, la que se manifiesta con la aceleración; suponer que sea verdaderamente la que se mide con la balanza incluye un postulado acerca de la identidad de las fuerzas estáticas, de las cuales tenemos conocimiento principalmente bajo las formas del equilibrio y de la reacción (tensiones y presiones), y de las dinámicas, proporcionadas por el examen del movimiento. Desde luego, una justificación inmediata para suponer esta identidad puede imaginarse en un paso al límite, cuando se considera el reposo como límite de movimientos con velocidades decrecientes; sin embargo, aun la posibilidad de este paso al límite no deja de ser un postulado. Si se considera como ejemplo de fuerza estática lo que solicita un grave mientras, por un artificio conveniente, se lo impide bajar (el peso) y como fuerza dinámica la centrifuga, y se refieren, como vectores a la misma unidad geométrica, la razón de estos vectores, comparada con la de las aceleraciones de gravedad y centripeta permite comparar una *masa pesante* y una *inercial*. La experiencia ha sido hecha por Eötvös en 1890 y luego en 1909 comparando la fuerza gravitacional con la debida a la fuerza centrifuga de rotación terrestre en niveles diferentes. La conclusión obtenida fué que la identidad se realiza con un error máximo del orden de (Cfr. *Encykl. der Math. W.* Vol. VI, 1).

como dijimos, a la física. Newton descubre la ley de atracción universal, según la cual cualquier cuerpo, puesto en una determinada distancia en presencia de una masa variable sufre una aceleración que es proporcional a dicha masa. El factor de proporcionalidad no tiene importancia, por cuanto nosotros podemos cambiarlo arbitrariamente al cambiar la masa a la cual atribuimos el valor 1; podemos pues atribuirle un valor de nuestro gusto (el más simple será el valor 1 (cfr. n. 11)) eligiendo convenientemente aquella masa. Pero una diferencia se presenta entre fijar la masa 1 por medio de un patrón, según dijimos al término del párrafo anterior, y fijar el valor de la constante de proporcionalidad; y es que la constante de proporcionalidad es un número, ciertamente invariable por teoría, y que no encuentra ninguna dificultad a ser contemporáneamente conocido por todos los experimentadores (en cuanto se abstrae de las dificultades prácticas de la experimentación), mientras el patrón material está sujeto a variabilidad por influencias exteriores (en particular por el uso) y no puede estar a disposición del experimentador en el momento que lo quiere; para remediar a este segundo inconveniente debe recurrirse a duplicados e imitaciones.

6. — Lo dicho nos lleva a establecer las ideas fundamentales de una teoría de la medida física.

Partimos de un cierto grupo de ideas primitivas de magnitudes relacionadas al sistema lógico que debe servir de modelo para la teoría física que se tiene en vista; y son las solas para las cuales exista un problema teórico de *medir* (prácticamente, desde luego, el problema se podrá poner también para magnitudes derivadas).

Estas ideas primitivas tienen una realización material en la relación entre el modelo lógico y el conjunto fenoménico que el modelo debe representar. El aparato de medición debe ser tal de establecer una correspondencia unívoca entre los diferentes estados de la imagen física de cada magnitud y los puntos o números de una escala. Para conseguir esta univocidad es necesario asegurar una *invariabilidad* de dicho aparato.

La máxima invariabilidad está asegurada por las operaciones matemáticas. Si llamamos independientes o fundamentales a las magnitudes que convenimos medir *necesariamente* ⁽¹¹⁾ por

⁽¹¹⁾ *Necesariamente* es decir sin otro modo posible. Para todas las magni-

operaciones físicas características para ellas, puede no haber coincidencia entre el número de las magnitudes aceptadas como ideas primitivas y el número de las independientes.

El número de las magnitudes independientes de la mecánica puede reducirse a 2, reduciendo la medición de la masa a mediciones de longitud y tiempo con fijar el valor de la constante de gravitación (cfr. n. 5) y puede también reducirse a 1 con fijar el valor numérico de una velocidad que pueda considerarse constante y continuamente presente, por ej. de la velocidad de la luz.

7. — Para proseguir nuestro estudio, conviene fijarnos sobre algún otro ejemplo.

La temperatura de un cuerpo es una propiedad característica que depende de sus condiciones físicas y es independiente de las condiciones físicas de todos los otros cuerpos⁽¹²⁾; ella se manifiesta por influir en modo determinado sobre los otros cuerpos, dependientemente de las condiciones de temperatura de éstos. Puestas las cosas así, las analogías entre la temperatura y la masa son evidentes: *la temperatura es una nueva idea primitiva*.

Decimos que dos cuerpos están en equilibrio de temperatura cuando, puestos en presencia uno del otro, sin la intervención de otras operaciones físicas, cada uno de ellos no varía la propia temperatura. Existe un cuerpo que puesto en presencia de cualquier otro cuerpo puede ponerse en equilibrio de temperatura con él sin alterar la temperatura de aquél y sufriendo una modificación que, en virtud eventualmente de operaciones físicas determinadas, se manifiesta bajo la forma de una longitud. Este cuerpo se llama *termómetro*. La analogía con la masa es todavía casi total; en el caso de la masa la transformación en segmento queda determinada en cuanto se disponga de una masa patrón, de llamarse 1; lo restante del aparato pertenece a la teoría mecánica. En el caso de la temperatura, al contrario, cuando menos en un primer tiempo, es el aparato íntegro, el

tudes que, por su definición, se miden indirectamente, con operaciones todas relativas a otras magnitudes con el intermedio de cálculos matemáticos, existen, sin embargo, en la práctica, instrumentos para la medición directa.

(12) Es la definición que leemos en el artículo fundamental de G. H. BRIAN, *Allgemeine Grundlagen der Thermodynamik*. Eneykl. der Math. W. Vol. IV, 1, p. 85.

termómetro, que tiene de ser dado y es único. La temperatura, además de ser idea primitiva, es también, magnitud fundamental.

Sin embargo, al desarrollarse de la teoría, hemos aprendido las leyes de los gases. Si entonces suponemos tener una realización del gas perfecto, tan perfecta y presente en cualquier momento a cualquier experimentador como, cuando menos teóricamente, lo es la gravitación universal, y si fijaremos un valor, por ej. 1, para la constante de los gases por la unidad de masa de ese gas perfecto, resultará la temperatura magnitud derivada, inserida dentro del sistema de las magnitudes mecánicas, al mismo modo que, en el párrafo 5, resultó la masa derivada de la longitud y el tiempo.

Este pasaje de la temperatura del concepto de magnitud independiente al de magnitud derivada se hará más preciso con la introducción de la noción de cantidad de calor.

8. — Si dos cuerpos en diferentes temperaturas se ponen en contacto, en un tiempo conveniente se ponen en equilibrio de temperatura; la temperatura final no es generalmente ninguna de las dos iniciales; pero no depende únicamente de estas dos temperaturas, sino también de características especiales de los dos cuerpos y en particular de sus masas relativas. En determinadas condiciones, la temperatura de equilibrio es la temperatura inicial de uno de los cuerpos, pero a la variación de la temperatura en el otro cuerpo corresponde una variación de estado de agregación en el primero. Estos y otros fenómenos concurren para formar una nueva noción no mayormente definida (luego diremos una nueva idea primitiva), la de *cantidad de calor*; decimos que los cambios de temperatura observados y los cambios de estado se deben a que una cierta cantidad de calor ha pasado de uno a otro cuerpo.

No tenemos ninguna idea sobre la cantidad de calor contenida en un cuerpo determinado, sino solamente de la cantidad de calor que se transporta de uno a otro cuerpo al realizarse determinadas transformaciones físicas como las aludidas. El calorímetro de hielo transforma la cantidad de calor en la formación de una masa medible de agua; con el artificio de Bunsen la transforma directamente en un segmento. De esta manera la idea primitiva de cantidad de calor se ha transformado en magnitud; pero es todavía una magnitud independiente de las an-

teriores porque en cambio del hielo podía usarse otra sustancia, porque es necesario asegurarse que temperatura y presión sean aquellas determinadas, etc.; en breve porque falta una teoría para establecer la dependencia con otras magnitudes anteriormente consideradas.

Sin embargo, desde antiguo es conocida una vinculación entre calor y trabajo; y también la idea de que el calor sea una manifestación del movimiento de las partículas de la materia es difundida, pero más bien como vaga idea filosófica de causa que como cantidad medible. En 1798 Rumford describe sus experiencias para establecer la equivalencia cuantitativa entre cantidad de calor y energía que concluyen, como es sabido, con la determinación definitiva del coeficiente de equivalencia por Mayer en 1842. Al calorímetro se ha agregado de esta manera un número y un pequeño cálculo que permite expresar la cantidad de calor como energía. Desde luego, si el resultado se redujera al número y al pequeño cálculo, nada se habría cambiado en las conclusiones anteriores; la cantidad de calor sería todavía una magnitud independiente vinculada al calorímetro. Lo que cambia la situación es la transformabilidad recíproca, es decir la teoría termodinámica de Carnot.

La teoría termodinámica permite también eliminar la temperatura reduciéndola a ser un número proporcional a una cantidad de calor que actúa como concepto principal; lo mismo hace la consideración de cuerpos a capacidad calorífica constante (gases monoatómicos).

Debe notarse que la termodinámica es una teoría puramente lógica que se obtiene ampliando el grupo de las ideas primitivas de la mecánica al añadirles las de *cantidad de calor* y de *temperatura*, exactamente como la mecánica es una ampliación de la geometría, añadiendo las ideas de *punto material*, *tiempo* y *masa*.

9. — En condiciones análogas nos encontramos si nos volvemos a las magnitudes electromagnéticas. Las ideas primitivas son aquí *cantidad de electricidad*, *momento magnético*, *intensidad de campo eléctrico y magnético*, *intensidad de corriente*.

Vale la pena detenernos todavía sobre este caso para considerar el ejemplo de la medición de la intensidad magnética terrestre, que fué para Gauss la oportunidad para introducir el concepto de referir todas las medidas físicas a las unidades me-

cánicas y el nombre de sistemas absolutos de medidas⁽¹³⁾. Además de esta consideración histórica, el interés del ejemplo, en comparación con los anteriores, reside en que no se trata más aquí de una gradual puntualización de conceptos hasta llegar a una imagen lógica coherente de un conjunto de manifestaciones físicas que en un principio no tienen otra apariencia en común que la contemporaneidad, sino del desarrollo de un procedimiento de medición, provocado por razones esencialmente prácticas, y descansando sobre algunas hipótesis teóricas simples.

Se trataba de la medición del campo magnético terrestre que Gauss, conjuntamente con Weber estaba haciendo por comparación de lugar y de tiempo con fines de geofísica. Groseramente,

(13) La memoria de Gauss a la cual nos referimos se titula: *Intensitas vis magneticae ad mensuram absolutam revocata* (Göttinger Abhandlungen 1832, Werke, vol. 5, ps. 81-118). Gauss no explica por qué de la elección del término de *medida absoluta* y nada impone entenderle un significado más preciso del que resulta del problema que explícitamente se propone, es decir obviar a la variabilidad de los elementos magnéticos de comparación que se utilizan para la medición. Sin embargo el término ha pasado después en la costumbre para indicar medidas referidas únicamente a las unidades de longitud, masa y tiempo, llamándose a menudo sistema absoluto al (c. g. s.) y aún se ha discutido sobre si efectivamente las unidades de este sistema fueran absolutas, y si fueran las únicas absolutas pensables. Un reflejo de estas discusiones puede verse todavía en el citado artículo de Runge en la *Encyklopaedie d. Math. W.* (nº 9). Al vocablo "unidad absoluta" puede en efecto darse el sentido de *independiente de un patrón* por estar continuamente presente al experimentador y por él reproducible a voluntad con toda la precisión que se pueda querer. Se sabe bien que esta característica no pertenece al metro y por lo tanto al centímetro; pero cuando la convención francesa decidió elegir como unidad fundamental el metro definido como la diez-millonésima parte del cuadrante terrestre, tuvo ciertamente la ilusión de definir una unidad natural y por lo tanto respondiente a los aludidos requisitos, por lo menos en abstracto. Ni, en este sentido, habría sido una ilusión si la Tierra fuera verdaderamente esférica o, cuando menos, un elipsoide de rotación.

Por lo tanto la noción de medidas absolutas no es por si misma absurda; pero ese absoluto es siempre condicionado a la permanencia de algún hecho natural con respecto a la teoría física, como ya señalamos en los nos. 4 y 6. Una magnitud para la cual tenemos en efecto una medida absoluta en el modo más simple es el ángulo, en cuanto nuestra representación del mundo físico sea de acuerdo con el carácter euclidiano de la geometría, que nos permite medir el ángulo como la razón entre dos longitudes. Todavía lo sería en el caso de admitir únicamente la constancia de la curvatura del espacio (geometrías no-euclidianas).

la medición se hacía determinando el momento del par que este campo induce sobre una aguja magnética determinada al variar esta su orientación con respecto al campo. El instrumento de medición era por lo tanto una aguja magnética llevada por una balanza de torsión; lo que se medía era una fuerza; el campo quedaba detrás como una noción un poco indeterminada de *causa de dicha fuerza*. A lo más esta causa se diferenciaba de la propia fuerza por la constatación experimental de que esta última variaba por un factor de proporcionalidad al variar la aguja.

Pero, observa Gauss que no se puede aceptar la hipótesis de la invariabilidad de la aguja magnética que sirve como instrumento de medición, aun si materialmente ella sigue la misma, porque su momento sufre, principalmente por variar la temperatura, variaciones incontrolables por desaparecer tan pronto como se vuelve a las condiciones primeras; se propone luego el problema de *eliminar en la medida la parte que corresponde a la aguja*; esto es lo que el llama «conducir a medición absoluta»; pero se consigue únicamente por medio de *hipótesis y teoría*. Supone en primer lugar que la invariabilidad rechazada en distancia de lugar y de tiempo, se realice por opuesto para todos los elementos de la medición (aguja y campo terrestre) en un lugar determinado y por el espacio de tiempo de la experiencia. Supone además que la *causa* del magnetismo terrestre sea de la misma naturaleza por la cual un imán (en particular, la misma aguja medidora) actúa sobre otro; y que, por fin el coeficiente de proporcionalidad del cual hablamos arriba que media entre el campo y la fuerza sea el propio «momento magnético», proporcionalmente al cual varía el campo producido por la aguja. Inventa entonces el magnetómetro y proyecta el procedimiento de medición:

1º Llamando H al campo magnético terrestre y M al momento magnético de la aguja, la balanza de torsión permite medir una fuerza representable por el producto HM (esta fuerza puede medirse por oscilación o por torsión medida estáticamente; puede calificarse de momento, producto de fuerza por longitud; son detalles que despreciamos de propósito porque no influyen sobre el razonamiento) ⁽¹⁴⁾; ponemos, pues,

⁽¹⁴⁾ Los cálculos detallados se encuentran en muchos tratados de física y están despreciados aquí para concentrar la atención sobre el procedimiento con-

$$HM = m.$$

2º Si el mismo campo H actúa sobre otra aguja de momento M' , resultará otra fuerza o momento HM' ; y si sobre esta misma actúa la primera puesta sobre la perpendicular a su eje magnético, en el punto medio, a una distancia d bastante grande, produce otra fuerza o momento de la forma $kMM' : d^3$ donde k es un coeficiente numérico que depende únicamente de las dimensiones geométricas de las agujas; los dos momentos HM' y $kMM' : d^3$ se componen para determinar una dirección de equilibrio de la segunda aguja (magnetómetro). Observando el ángulo que esta dirección forma con la dirección momentánea del meridiano magnético se determina la razón

$$HM' : \frac{kMM'}{d^3} = q \frac{H}{M} = p$$

donde hemos indicado con q y p números dependientes únicamente, por lo dicho, de mediciones geométricas. Combinando con la medida anterior se obtiene

$$\frac{mp}{q} = H^2;$$

y luego la *medida absoluta* de H , expresada únicamente por cantidades geométricas y mecánicas.

Nos hemos detenido sobre el ejemplo para mostrar cómo es la teoría que impone al concepto la determinación necesaria y construye el aparato de medición.

Evidentemente condiciones análogas se repiten en muchos casos, y, en particular, más o menos las mismas cosas tendrán que repetirse para el momento magnético, la cantidad de electricidad, etc.

10. — Antes de adelantarnos en una teoría general de la medición física, nos conviene resumir todavía una vez, generalizando en principios generales, las observaciones que se desprenden de los distintos casos examinados.

ceptual. Aún en la expresión kMM' / d^3 se habría podido incluir el divisor d^3 en el coeficiente k .

Para organizar en forma de medidas las apariencias físicas, nosotros inventamos ideas no mayormente determinadas que por ser palabras, a las cuales coordinamos los hechos de experiencia con una justificación, desde un principio, no muy superior a la que se puede atribuir a las causas ocultas. Sin embargo, mediante una conveniente elección entre los fenómenos que a esas «ideas primitivas» se coordinan, intentamos transformarlas en magnitudes con la definición de algún aparato de medición empírico al cual atribuimos más o menos fundadamente la invariabilidad y que hace corresponder un segmento a cada estado de la idea primitiva considerada.

Las distintas ramas de la física difieren por las ideas primitivas a que se refieren. La teoría física establece entre estas ideas primitivas, con el concurso de la observación experimental, relaciones matemáticas que se expresan mediante ecuaciones, con el concurso, eventualmente, de coeficientes numéricos, que pueden resultar, sea de la teoría misma sea de elementos experimentales.

Estas ecuaciones constituyen las *leyes físicas*.

Para hacer posible la expresión de estas ecuaciones es necesario que los segmentos que representan las medidas sean traducidos en números. Esta traducción implica la elección de una *unidad de medida*, es decir, en cada clase de magnitudes homogéneas, de una magnitud a la cual se atribuye el valor 1. Esta elección es generalmente arbitraria y, variando la misma, pueden variar los coeficientes que entran en las ecuaciones (ver n^o. 11). Por otra parte, algunas de estas ecuaciones — o sistemas de ecuaciones — al ser resueltas respecto de determinadas magnitudes, permiten formar una definición de éstas que los hace pasar del grupo de las magnitudes fundamentales, para las cuales la elección de la unidad de medida es verdaderamente arbitraria, al grupo de las magnitudes derivadas, cuyos valores se pueden determinar, al menos en teoría, por la medición de otras magnitudes consideradas fundamentales y cálculos matemáticos. Evidentemente esta explicitación de determinadas magnitudes lleva a la eliminación de igual número de ecuaciones expresando leyes físicas.

El sistema de las leyes físicas y el sistema de las magnitudes que conviene explicitar — es decir considerar como derivadas — varía con el problema y la teoría física que se está considerando.

El cambio de unidad de medida, lleva — como hemos notado en el n.º. 1 — a alterar todas las medidas de una misma clase de homogéneas por un mismo factor. Entre los factores de multiplicación de magnitudes fundamentales y derivadas existen relaciones que están estudiadas por la teoría de las dimensiones físicas, de la cual vamos a ocuparnos en los párrafos siguientes.

11. — Podemos observar, como experiencia común, que la explicitación de magnitudes físicas en función de otras lleva ordinariamente a escribir fórmulas monomiales. El hecho no tiene nada de verdad matemática. A lo más puede atribuirse un cierto fundamento epistemológico en la disposición de nuestra mente a suponer relaciones de proporcionalidad directa o inversa; la que puede influenciar nuestro modo de ver el mundo fenoménico. Pero esta disposición está favorecida por el teorema según el cual cada función continua finita puede aproximarse por polinomios, y en el caso de tener funciones que en puntos singulares tienden a valores infinitos, la misma aproximación se puede obtener por funciones racionales; en todos los casos por combinaciones de monomios; y por otra parte, por razones variadas⁽¹⁵⁾, nosotros nunca pretendemos que las leyes que enuncia la teoría física se encuentren realizadas más que con cierta aproximación.

Una consecuencia importante de esta observación es la siguiente:

Supongamos un cierto grupo de magnitudes $U_1, U_2, \dots, U_n$ a las cuales hacemos corresponder las variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ que representan los valores de las mismas medidos con respecto a unidades momentáneamente fijadas. Estos valores estarán vinculados por ciertas ecuaciones, representantes de correspondientes leyes físicas, que podemos escribir

$$f_k(x_1 x_2 \dots x_n; a_1 a_2 \dots a_r) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (11.1)$$

donde las a_i son constantes determinadas por la teoría o cuyo valor empírico está determinado experimentalmente, desde luego

⁽¹⁵⁾ No solamente por la ineludible indeterminación de los datos experimentales, sino porque la pretensión de atribuirles valor absoluto llevaría a dar a las leyes una complicación inexpressable; y la experiencia nos enseña ser en general bastante satisfactorio atribuir las desviaciones a desconocidas causas perturbadoras.

con mediciones hechas en el sistema de medidas fijado. Por lo dicho y por tratarse de ecuaciones donde los eventuales denominadores habrán podido eliminarse por multiplicación, cada f_k será un polinomio, suma de monomios de la forma

$$a_j x_1^{\alpha_{j1}} x_2^{\alpha_{j2}} \dots x_n^{\alpha_{jn}}. \quad (11.2)$$

Si se efectúa un cambio de unidades por el cual los valores de las mismas magnitudes $U_1, U_2, \dots, U_n$ se cambien en

$$X_1 = \lambda_1 x_1, \quad X_2 = \lambda_2 x_2, \quad X_n = \lambda_n x_n, \quad (11.3)$$

obtendremos fácilmente un sistema de ecuaciones de la misma forma de las (11.1) para representar las mismas leyes físicas respecto del nuevo sistema de unidades con el artificio siguiente: para cada índice k supondremos elegido (por el momento arbitrariamente) un monomio de la forma

$$\Lambda_k = \lambda_1^{\beta_{k1}} \lambda_2^{\beta_{k2}} \dots \lambda_n^{\beta_{kn}}$$

y pondremos

$$F_k = f_k(X_1 X_2 \dots X_n; A_1 A_2 \dots A_n)$$

donde se habrá puesto

$$A_j = a_j \lambda_1^{\beta_{k1} - \alpha_{j1}} \lambda_2^{\beta_{k2} - \alpha_{j2}} \dots \lambda_n^{\beta_{kn} - \alpha_{jn}}. \quad (11.4)$$

La sustitución (11.3), (11.4) da evidentemente

$$A_j X_1^{\alpha_{j1}} X_2^{\alpha_{j2}} \dots X_n^{\alpha_{jn}} = \Lambda_k a_j x_1^{\alpha_{j1}} x_2^{\alpha_{j2}} \dots x_n^{\alpha_{jn}};$$

luego

$$F_k = \Lambda_k f_k$$

y las ecuaciones (11.1) resultan equivalentes a

$$F_k = 0. \quad (11.5)$$

Aunque la consideración pueda considerarse como banal, ella pone en evidencia como naturalmente se conservan formalmente

las leyes físicas respecto del cambio de variables y nos permite fijar una definición de lo que debe llamarse *constante física*. Es evidente que, para que el artificio pueda aplicarse es necesario que, si un mismo coeficiente a_i se encuentra escrito en varias de las ecuaciones (11.1), la correspondiente (11.4), en cuyo segundo miembro aparece el índice k , debe resultar, en realidad, independiente de k . La arbitrariedad que queda en la elección de las Λ_k permite siempre igualar los multiplicadores de los segundos miembros de las (11.4) correspondientes a dos coeficientes a_i, a_j elegidos arbitrariamente en dos f_k distintas. Se presenta entonces como natural la siguiente definición de *constante física*: Diremos que dos coeficientes a_i en el sistema de las ecuaciones (11.1) son la misma constante física cuando en la primera determinación de dicho sistema de ecuaciones, con un sistema de unidades fijado, tienen el mismo valor y, por una elección conveniente de los monomios Λ_k , la substitución (11.4) conserva, para los primeros miembros todavía valores coincidentes.

Desde luego, en la práctica podrá ocurrir que los coeficientes a_j se compongan algebraicamente mediante otras constantes entre las cuales puedan distribuirse los factores λ_i que aparecen en los segundos miembros de las (11.4); la definición indicada se transferirá entonces naturalmente a esas componentes.

Las constantes físicas no necesitan luego quedar constantes respecto de un cambio de unidades, sino que, respecto de una determinada teoría, las igualdades (11.4) y análogas definen su transformación. Se llaman *constantes dimensionadas* respecto del sistema de magnitudes U_i y los exponentes

$$\beta_{k1} = \alpha_{j1}, \beta_{k2} = \alpha_{j2}, \dots, \beta_{kn} = \alpha_{jn}$$

se dicen sus *dimensiones con respecto a cada una de dichas magnitudes*.

Deben hacerse dos observaciones:

1º Si entre las magnitudes U_i hubiera varias que pertenecen a la misma clase de magnitudes homogéneas, los correspondientes multiplicadores λ_i resultan siempre iguales; entonces en la expresión (11.4) se deben sumar los exponentes de factores idénticos y la dimensión de la constante dimensionada respecto de estas magnitudes en conjunto (la única que tenga importancia) es esta suma.

2º Según lo dicho, por lo menos uno de los monomios Λ_k quedará siempre arbitrario; se sigue que *en la determinación de las dimensiones de las constantes dimensionadas existe siempre una cierta arbitrariedad*. Este hecho no tiene ninguna importancia en las aplicaciones. Pero la observación tiene gran importancia conceptual para eliminar algunos prejuicios acerca de las nociones dimensionales.

12. — Las consideraciones que anteceden pueden invertirse *demonstrando que condición necesaria para que pueda hablarse de constantes físicas dimensionadas es que cada una de estas constantes se presente en las leyes físicas asociada con un determinado monomio*. Supongamos en efecto que una ley física sea representada por una ecuación

$$f(xy \dots ab \dots) = 0 \quad (12.1)$$

en la cual se supone haber reunido bajo el mismo símbolo de variable todas las magnitudes de la misma especie, esto es todas las que por un cambio de unidades sufren la misma sustitución y se supone que $a, b, \dots$ sean constantes dimensionadas, de manera que la ecuación (12.1) se cambie en otra equivalente cuando se efectúa la sustitución

$$\begin{pmatrix} x & y & \dots & a & b & \dots \\ \lambda x & \mu y & \dots & a\lambda^{\alpha_1} \mu^{\alpha_2} \dots & b\lambda^{\beta_1} \mu^{\beta_2} \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (12.2)$$

Esto significa que debe tenerse

$$f(\lambda x \mu y \dots a\lambda^{\alpha_1} \mu^{\alpha_2} \dots b\lambda^{\beta_1} \mu^{\beta_2} \dots) = g(\lambda \mu \dots) f(xy \dots ab \dots)$$

Derivando parcialmente respecto de $\lambda, \mu, \dots$ se obtienen luego las ecuaciones

$$\frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial a} a\alpha_1 \lambda^{\alpha_1-1} \mu^{\alpha_2} + \frac{\partial f}{\partial b} b\beta_1 \lambda^{\beta_1-1} \mu^{\beta_2} + \dots = \frac{\partial g}{\partial \lambda} g \quad (12.3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} y + \frac{\partial f}{\partial a} a\alpha_2 \lambda^{\alpha_1} \mu^{\alpha_2-1} + \frac{\partial f}{\partial b} b\beta_2 \lambda^{\beta_1} \mu^{\beta_2-1} + \dots = \frac{\partial g}{\partial \mu} g$$

.....

Debe notarse que en los primeros miembros los símbolos $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial a}, \dots$ deben entenderse en el sentido que las variables dentro del signo funcional están reemplazadas según la sustitución (12.2); pero, si ahora se pone $\lambda = \mu = \dots = 1$, los dos miembros resultan únicamente funciones de las variables $x, y, \dots, a, b, \dots$. Resulta así un sistema de ecuaciones en derivadas parciales que debe satisfacer la función (12.1):

$$\frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial a} a \alpha_1 + \frac{\partial f}{\partial b} b \beta_1 + \dots = g_1 f$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} y + \frac{\partial f}{\partial a} a \alpha_2 + \frac{\partial f}{\partial b} b \beta_2 + \dots = g_2 f$$

.....

donde $g_1, g_2, \dots$ son constantes.

Considerando antes las ecuaciones por separado, se nota, por aplicación de una regla conocida, que la solución general de la primera se escribe

$$f = x^{g_1} \varphi \left(\frac{a}{x^{\alpha_1}}, \frac{b}{x^{\beta_1}}, \dots \right)$$

donde φ es una función arbitraria de las expresiones en paréntesis. En esta función puede aparecer y como constante; pero la segunda ecuación da análogamente

$$f = y^{g_2} \psi \left(\frac{a}{y^{\alpha_2}}, \frac{b}{y^{\beta_2}}, \dots \right)$$

donde ψ es función arbitraria donde puede aparecer la x como constante; las dos expresiones serán compatibles sólo en cuanto sea

$$f = x^{g_1} y^{g_2} \Phi \left(\frac{a}{x^{\alpha_1} y^{\alpha_2}}, \frac{b}{x^{\beta_1} y^{\beta_2}}, \dots \right)$$

donde todavía Φ es función arbitraria y pueden aparecer como constantes otras variables $z, t, \dots$ condicionadas por las ecuaciones

(12.3) siguientes. Se obtiene concluyendo que, salvo un factor de la forma

$$x^{g_1} y^{g_2} z^{g_3} \dots,$$

la f será función arbitraria de los monomios

$$ax^{-\alpha_1} y^{-\alpha_2} z^{-\alpha_3} \dots, bx^{-\beta_1} y^{-\beta_2} \dots, \dots$$

Mientras, se ha determinado también la función

$$g(\lambda \mu \dots) = \lambda^{g_1} \mu^{g_2} \dots;$$

en cuanto se refiere a la ecuación (12.1), como representante de una ley física, es evidente, por el contrario, que el factor $x^{g_1} y^{g_2} \dots$ puede suprimirse sin alterar la misma.

13. — Llamaremos en general *dimensionada respecto de un sistema de magnitudes* $U_1, U_2, \dots, U_n$ a una expresión que, por un cambio de unidades de medida de dichas magnitudes, teniendo en cuenta la consecuente transformación de las constantes dimensionadas, se reproduce multiplicada por un monomio de la forma

$$\lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} \dots \lambda_n^{\alpha_n}$$

donde $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$ son los factores de reducción correspondientes al cambio de unidades. Precisamente diremos que

$$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$$

son las *dimensiones* de dicha expresión.

La función f de la cual ha sido encontrada en el n. anterior la forma general es evidentemente dimensionada. Vamos a demostrar que ésta es también la forma general de una expresión tal. Demostraremos el siguiente teorema general ⁽¹⁶⁾:

⁽¹⁶⁾ P. W. Bridgmann ha dado a este teorema el nombre de teorema II. Se han dado muchas demostraciones, muchas veces con recursos inútilmente complicados.

Si una función

$$y = f(x_1 x_2 \dots x_n)$$

de n variables dimensionadas respecto de un sistema de magnitudes $U_1, U_2, \dots, U_n$ es a su vez dimensionada, dicha función puede siempre expresarse por el producto de un monomio formado con las variables x_i y que tiene las mismas dimensiones que la f , multiplicado por una función de un determinado grupo de monomios de dimensión 0 formados con las mismas x_i .

Para simplificar la expresión, va a convenirnos razonar, no sobre los factores de reducción de las cantidades dimensionadas, sino sobre sus logaritmos. Si $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$ son los factores de reducción para un cambio de unidades de las magnitudes $U_1, U_2, \dots, U_n$, pondremos luego

$$\log \lambda_i = \gamma_i;$$

si una cantidad dimensionada tiene las dimensiones

$$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n,$$

a consecuencia de dicho cambio de unidades se multiplicará luego por

$$\lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} \dots \lambda_n^{\alpha_n} = e^A$$

$$A = \alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2 + \dots + \alpha_n \gamma_n \quad (13.1)$$

Las γ_i , como las λ_i , hay que considerarlas como variables; las α_i como coeficientes constantes para cada cantidad dimensionada.

Indiquemos con

$$\alpha_{1i} \alpha_{2i} \dots \alpha_{ni} \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

las dimensiones de x_i y con

$$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$$

las de y (que se supone dimensionada por hipótesis). Un monomio

$$x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}$$

tendrá las mismas dimensiones que y siempre y sólo cuando

$$A = \sum k_i A_i, \quad (13.2)$$

habiendo puesto

$$A_i = \alpha_{i1} \gamma_1 + \alpha_{i2} \gamma_2 + \dots + \alpha_{in} \gamma_n. \quad (13.3)$$

Existe un sistema de valores k_i que realiza esta condición. Sea en efecto p la característica de la matriz de los coeficientes de las expresiones (13.3)

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1m} & \alpha_{2m} & \dots & \alpha_{nm} \end{vmatrix};$$

es

$$p \leq m, \quad p \leq n$$

y pueden ordenarse las A_i en modo que las primeras p son independientes, mientras las siguientes son combinaciones lineales de éstas y sus valores quedan por tanto determinados por los valores de las $A_1 A_2 \dots A_p$. Pueden además suponerse ordenados los índices de las variables γ_i de manera que el sistema formado por las primeras p ecuaciones (13.3) sea resoluble respecto de las primeras p variables.

Se obtienen en tal modo expresadas $\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_p$ como combinaciones lineales de $A_1 A_2 \dots A_p \gamma_{p+1} \dots \gamma_n$; sustituyendo estas expresiones en A , resultará una expresión de la forma

$$A = m_1 A_1 + m_2 A_2 + \dots + m_p A_p + m_{p+1} \gamma_{p+1} + \dots + m_n \gamma_n.$$

Mostramos ahora que los coeficientes $m_{p+1}, \dots, m_n$ son necesariamente nulos: supongamos en efecto que fuese $m_{p+1} \neq 0$; podemos en tal caso atribuir a $\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n$ valores tales que $A_1 A_2 \dots A_p \gamma_{p+1}$ tengan valores asignados arbitrariamente y

$\gamma_{p+2} = \dots = \gamma_n = 0$; por lo dicho, los valores de $A_{p+1} \dots A_m$ quedan determinados por los valores de $A_1 A_2 \dots A_p$, independientemente del valor de γ_{p+1} , mientras, por la hipótesis de que $m_{p+1} \neq 0$ el valor de A variará con γ_{p+1} . Si ahora consideramos la función

$$y = f(x_1 x_2 \dots x_m)$$

para un sistema de valores de las x_i tal que resulte $y \neq 0$ y luego para el sistema de los valores $e^{A_i} x_i$, sabemos, por hipótesis, que el valor de y se multiplica por e^A ; al variar γ_{p+1} mientras $A_1 A_2 \dots A_p$ quedan fijos; se mantienen fijas todas las A_i y por tanto los valores $e^{A_i} x_i$ y el valor consiguiente de y , lo que contradice a la hipótesis de que el exponente A pudiera variar.

Queda determinado de esta manera un sistema de valores de las k_i que realiza (13.2) con

$$k_1 = m_1, \quad k_2 = m_2, \quad \dots, \quad k_p = m_p, \quad k_{p+1} = \dots = k_m = 0$$

La teoría de los sistemas de ecuaciones lineales nos enseña que, una vez asegurada la existencia de una solución de (13.2), si $p < m$ existen ∞^{m-p} .

Supongamos fijada una solución cualquiera y consideremos la función

$$\varphi(x_1 x_2 \dots x_m) = \frac{f(x_1 x_2 \dots x_m)}{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}}; \quad (13.4)$$

será todavía dimensionada con todas sus dimensiones 0, es decir que su valor no varía con la elección de las unidades de medida.

Consideremos ahora el grupo de las expresiones (13.3) formado por las primeras p y una cualquiera de las siguientes, la de índice $p+s$; por ser p la característica del sistema total y la de las primeras p , se sigue que las $A_1 A_2 \dots A_p A_{p+s}$ son linealmente dependientes, pero no las $A_1 A_2 \dots A_p$; es decir existe un sistema de números h_{si} ($i=1, 2, \dots, p$) tal que

$$h_{s1} A_1 + h_{s2} A_2 + \dots + h_{sp} A_p + A_{p+s} = 0;$$

el monomio

$$\Pi_s = x_1^{h_{s1}} x_2^{h_{s2}} \dots x_p^{h_{sp}} x_{p+s}$$

tiene luego dimensión 0. Evidentemente el sistema de variables

$$x_1, x_2, \dots, x_p, \Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{m-p}$$

es equivalente a

$$x_1, x_2, \dots, x_m,$$

correspondiendo a cada sistema de valores de estas uno para las primeras y a cada sistema de valores de las primeras en el cual ninguna de las $x_1 x_2 \dots x_p$ sea nula uno determinado para las segundas. Haciendo solamente excepción para los valores nulos de estas primeras x , podemos luego sustituir las primeras variables a las segundas por la sustitución

$$x_{p+s} = \frac{\Pi_s}{x_1^{h_{s1}} x_2^{h_{s2}} \dots x_p^{h_{sp}}};$$

resulta

$$\varphi(x_1 x_2 \dots x_n) = \Phi(x_1 x_2 \dots x_p \Pi_1 \Pi_2 \dots \Pi_{m-p}).$$

Si a las x_i atribuimos un sistema cualquiera de valores en los cuales las $x_1 x_2 \dots x_p$ sean todas $\neq 0$, podemos luego hacer un cambio de unidades por el cual las mismas variables adquieran valores cualesquiera; al contrario, las $\Pi_1 \Pi_2 \dots \Pi_{m-p}$ y la Φ quedan invariadas; se sigue que Φ es independiente de aquellas x_i , es decir que se tiene

$$\varphi(x_1 x_2 \dots x_m) = \Phi(\Pi_1 \Pi_2 \dots \Pi_{m-p})$$

$$f(x_1 x_2 \dots x_m) = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m} \Phi(\Pi_1 \Pi_2 \dots \Pi_{m-p}) \quad (13.5)$$

con lo cual queda demostrado el teorema.

Si $m=p$ la función Φ se reduce a una constante y la F es necesariamente un monomio; será necesariamente $m \leq n$.

Si $m > p$ se presentan en el segundo miembro de (13.5) dos indeterminaciones de distinta naturaleza: 1º $m-p$ de los

exponentes k_i pueden elegirse arbitrariamente y quedarán determinados en consecuencia los p restantes; 2º la elección indicada de los monomios Π_r puede admitir generalizaciones evidentes; si por ej., una vez determinado un sistema $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{m-p}$, se formara un nuevo sistema de la forma

$$\Pi_1, \Pi_1^{\alpha_2} \Pi_2, \Pi_1^{\alpha_3} \Pi_2^{\beta_3} \Pi_3, \dots, \Pi_1^{\alpha_{m-p}} \Pi_2^{\beta_{m-p}} \dots \Pi_{m-p},$$

se ve en seguida que se llegaría a las mismas conclusiones. En las aplicaciones ocurre frecuentemente que, al valerse de esta arbitrariedad, puedan entrar los mismos monomios en la expresión de funciones diferentes, obteniéndose así para ellos una interpretación teórica.

Si se supone $m > n$ y se supone que de las m variables x_i , n representan magnitudes de las clases $U_1, U_2, \dots, U_n$ mientras las demás se interpretan como constantes dimensionadas, la proposición actual reproduce la del n. anterior.

14. — Supongamos ahora que nuestra teoría física nos haya llevado a introducir un cierto número de ideas primitivas de magnitudes: por ej. después de las magnitudes mecánicas fundamentales, la temperatura, el campo eléctrico, el campo magnético, la intensidad de corriente, la cantidad de electricidad, etc. Supongamos que entre estas magnitudes se han establecido leyes físicas representadas por un sistema de ecuaciones (11.1) en un determinado sistema de unidades de medida y se hayan formadas las ecuaciones transformadas respecto de otro sistema de unidades, definido por la sustitución (11.3) (11.4); esto es las (11.5). Supongamos ahora que por medio del sistema (11.1) se expliciten determinadas x_i , que resultarán expresadas por funciones explícitas de las restantes. Por ser las F_k , salvo los multiplicadores Λ_k , idénticas a las f_k después de una simple sustitución tipográfica de las X a las x y de las A a las a , resolviendo el sistema (11.5) respecto de las X_i correspondientes a las sobredichas x_i , se obtendrán las mismas funciones explícitas, salvo la dicha sustitución tipográfica. En breve, se tiene que *por efecto de la consideración de constantes físicas dimensionadas, se conservan formalmente las fórmulas de definición de las magnitudes derivadas en función de las fundamentales.*

Notamos ahora que en el n. 11 no hemos hecho ninguna hipótesis acerca de los valores que deben darse a las λ_i ; ya en

las últimas consideraciones del párrafo hemos, por ej., considerado el caso que algunos de los λ_i se supusieran iguales. En modo análogo, supongamos ahora que, habiendo separado las variables x_i en dos grupos

$x_1 x_2 \dots x_p$ representando medidas de magnitudes fundamentales

$x_{p+1} x_{p+2} \dots x_n$ medidas de magnitudes derivadas por efecto de la explicitación antes aludida,

y que las $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_p$ se dejen arbitrarias, mientras para cada una de las $\lambda_{p+1} \lambda_{p+2} \dots \lambda_n$ se asignan valores representados por monomios de las anteriores, que se pueden elegir arbitrariamente, con la sola advertencia de elegir los mismos para los multiplicadores de magnitudes de la misma especie. Nada de lo dicho viene a alterarse, y resulta luego que, *mediante una conveniente determinación de las fórmulas de sustitución de las constantes dimensionadas puede siempre hacerse en modo que las dimensiones de las magnitudes derivadas respecto de las fundamentales sean ciertas arbitrariamente asignadas.*

Esta observación que, después de la demostración, nos parece la generalización de las discordantes fórmulas dimensionales en debería considerarse como absolutamente banal, no es más que los sistemas electrostático y electrodinámico que han hecho correr mucha tinta, y es también la explicación de que, en caso de considerarlo conveniente, se pueda aumentar a gusto el número de las magnitudes a unidad independiente, con la sola advertencia de arreglar convenientemente las constantes.

Desde luego, en el caso clásico de las medidas electrostáticas y electromagnéticas, la vinculación con la velocidad de la luz no tiene mayor trascendencia por depender de las ecuaciones que toman el lugar de las (11.1).

15. — Hemos observado ya en el n. 11 que podemos servirnos de la arbitrariedad inicial de los exponentes β_k para obtener que determinadas constantes α_i sufran por (11.4) la misma sustitución, la cual, en el caso de haber puesto

$$\beta_{ki} = \alpha_{ji} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

será la sustitución idéntica. Esto significa que podemos suponer

que un grupo determinado de constantes físicas se vuelvan de dimensionadas en constantes absolutas, al variar convenientemente el número y las dimensiones de las magnitudes de considerarse como derivadas. Es lo que se hizo, sin teoría previa, en los comienzos de la teoría dimensional por Gauss al tomar iguales a 1 los factores de proporcionalidad de las fuerzas eléctrica y magnética.

Pero un paso ulterior puede hacerse con el artificio siguiente: supongamos fijadas las β_{ki} y luego los valores de todas las diferencias

$$\beta_{ki} - \alpha_{ji} = \gamma_{ji} \quad (i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots)$$

y separemos, como antes, los índices i en dos grupos, conviniendo que

$$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_p$$

quedan arbitrarias, mientras se pondrá

$$\lambda_{p+s} = \lambda_1^{\varepsilon_{s1}} \lambda_2^{\varepsilon_{s2}} \dots \lambda_p^{\varepsilon_{sp}} \quad (s=1, 2, \dots, n-p)$$

donde los exponentes ε_{sr} quedan todavía por elegir. Las (11.4) se transforman en

$$A_i = a_i \lambda_1^{\delta_{i1}} \lambda_2^{\delta_{i2}} \dots \lambda_p^{\delta_{ip}} \quad (15.1)$$

donde

$$\delta_{il} = \gamma_{il} + \sum \gamma_{ip \pm s} \varepsilon_{sl};$$

el número de las indeterminadas ε_{sr} es $p(n-p)$; podremos entonces elegir igual número de δ_{il} y buscar de determinar esas ε_{sr} de manera que dichas δ_{il} sean 0; salvo la limitación que resulta de las conocidas condiciones de compatibilidad del sistema resultante de ecuaciones lineales, se obtiene que *mediante la imposición de relaciones dimensionales entre los multiplicadores que definen un cambio de unidades de medida, es siempre posible reducir a constantes absolutas un cierto número de constantes físicas*. Este número depende esencialmente del número n de ideas primitivas de magnitudes que la teoría física adoptada ha dejado libres y

tiene evidentemente por máximo $n^2:4$ ⁽¹⁷⁾, siendo en este caso $n:2$ el número de las magnitudes a medida independiente, es decir el número de las dimensiones de la teoría física adoptada.

16. — Como resumen de las consideraciones que anteceden he aquí algunas conclusiones esenciales:

A cada rama de la física se le puede hacer corresponder una imagen lógica más o menos representativa de un cierto grupo de hechos (ej. la mecánica, la termodinámica, o la teoría de Maxwell). Como cualquier teoría lógica, dicha imagen postula un cierto número de ideas primitivas, algunas de las cuales son magnitudes, es decir, sujetas al cálculo de números, vectores, tensores. Para cada una de estas teorías hay cierta arbitrariedad en el número de estas ideas primitivas y en las propiedades que se le postulan, las que reflejan la imagen física que se le atribuye; pero el número de estas ideas primitivas sube por necesidad cuando las distintas teorías se yuxtaponen, sin considerar datos de experiencia o lo que llamamos la teoría física.

Estos datos de la experiencia y de la teoría física introducen constantes que sirven para escribir ecuaciones entre magnitudes que en la representación lógica pueden ser distintas, generando por consecuencia magnitudes físicamente derivadas al lado de las lógicamente definidas por combinación de símbolos. Así en una mecánica física gravitacional la magnitud «masa» se deriva de la magnitud «campo gravitacional» y luego no es independiente de longitud y tiempo, pero sí del hecho de tener un *conocimiento físico* de ese campo.

Esta derivación nada impone a priori respecto de las relaciones dimensionales entre distintas magnitudes, en el sentido que son ciertamente dimensiones distintas las que corresponden a magnitudes independientes, pero a magnitudes derivadas unas de otras pueden todavía corresponder dimensiones con cierta arbitrariedad; el símbolo dimensional de cada magnitud es, en principio, arbitrario.

Se limita esta arbitrariedad por dos requisitos: uno es de reducir al mínimo el número de las constantes de significado físico independiente; el otro es de asignar a ciertas constantes físicas dimensiones predeterminadas; en el caso más común, pretender

⁽¹⁷⁾ Si n es impar en lugar de $n^2:4$ y del siguiente $n:2$ deberá escribirse respectivamente $(n-1)^2:4$ y $n+1:2$.

que determinadas constantes físicas se reduzcan a constantes numéricas.

La pura teoría lógica subyacente a la teoría física no tiene constantes, pero tampoco tiene leyes que permitan establecer relaciones dimensionales otras que las que resultan de las definiciones nominales.

Por contrario la teoría física, con la introducción de las constantes, limita el número de las dimensiones independientes y nada tiene de absurdo una física de una sola dimensión (en el sentido que tiene la palabra dimensión en la presente teoría).

Así, aunque la mecánica newtoniana sea ciertamente tridimensional, la física newtoniana puede ser unidimensional en el caso de atribuir un valor determinado a la constante de la gravitación y a la velocidad de la luz.

(Evidentemente no es posible la dimensión 0 porque quedará siempre arbitraria una magnitud a la cual atribuir el valor 1).

17. — La noción de dimensiones físicas encuentra una aplicación semi-práctica en el llamado *análisis dimensional*. Este se puede definir como un procedimiento inductivo o heurístico para indicar algunas características del modo de desenvolverse de determinados fenómenos; una guía para la intuición; muy raramente un verdadero procedimiento de investigación. Vale la pena notar que las incertidumbres que las consideraciones anteriores parecen poner en la noción misma de dimensión no impiden las posibles aplicaciones en esta dirección, y, en cualquier caso, proporcionan todavía alguna útil sugestión. Vamos a indicar brevemente los fundamentos de eso.

El caso más simple, y diríamos más clásico de aplicación del análisis dimensional es el siguiente: *Se tiene un cierto grupo de magnitudes $X_1, X_2, \dots, X_m$ entre las cuales se sabe existir una relación funcional. Se conocen las dimensiones de esas magnitudes respecto de un sistema de magnitudes fundamentales. ¿Podemos, sin mayores conocimientos acerca del fenómeno físico estudiado, concluir algo sobre aquella relación?* El teorema II nos da la contestación: Supongamos resuelta la relación que se supone ligar las magnitudes consideradas respecto una de ellas; el segundo miembro deberá ser una función de los valores de las magnitudes restantes que debe tener las mismas dimensiones que la magnitud explicitada. Esta función deberá luego poderse expresar como el producto de un monomio formado con los

valores de dichas magnitudes y que tenga aquellas dimensiones, por una función de ciertos monomios formados con los mismos valores y de dimensión 0.

Si, con las dimensiones de las magnitudes distintas de la explicitada no se pudiera formar un monomio con las dimensiones requeridas, esto significaría que la relación supuesta no existe y que en todos los casos el fenómeno considerado incluye alguna magnitud que se ha olvidado.

El procedimiento de demostración que hemos indicado para el teorema II, proporciona un procedimiento regular para decidir si existe tal monomio y determinar uno que realice las condiciones dichas; es posible que pueda elegirse entre varios, y generalmente tiene poca importancia elegir uno u otro, porque esta elección está compensada por el segundo factor del producto. Una vez elegido este primer factor, la misma demostración proporciona un modo de calcular, todavía, en general con cierta ambigüedad, los monomios de dimensión 0. Por contrario absolutamente nada podemos saber sobre la función que con ellos se debe formar.

Para comprender mejor examinemos un caso muy simple y clásico. Las magnitudes que se consideran son el período t de oscilación de un péndulo, su longitud l , y la aceleración g de la gravedad; se supone saber que entre estas magnitudes pasa una relación que se puede escribir

$$t = f(l, g).$$

Respecto de las magnitudes fundamentales de la mecánica L, M, T conocemos las dimensiones:

$$[t] = T, \quad [l] = L, \quad [g] = LT^{-2}.$$

Con l y g podemos formar un monomio de dimensión T que no puede ser otro que

$$\sqrt{l : g};$$

no podemos formar ningún monomio de dimensión 0; luego la función llamada Φ en el teorema debe ser una constante c ; luego la fórmula buscada será

$$t = c\sqrt{l : g} \quad (17.1)$$

y para determinar c bastará examinar experimentalmente un solo caso. Aunque el resultado pueda parecer brillante, debemos notar que el problema es aun muy simple y que Galileo determinó la fórmula sin análisis dimensional, y sin tampoco ecuaciones diferenciales. Reflexionando vemos que el éxito está debido en mucho a que nosotros sabíamos de antemano dónde íbamos a parar. ¿Porqué no se tuvo en cuenta la amplitud de la oscilación? Para hacerlo habría bastado introducir, entre las magnitudes de la cual depende t , también la cuerda de máxima elongación. Si la llamamos l_0 tenemos

$$[l_0] = L;$$

monomios de dimensión T habrían entonces podido ser

$$\sqrt{l : g}, \sqrt{l_0 : g}, \sqrt[4]{l_0 : g^2};$$

como monomio de dimensión 0 se tiene

$$l_0 : l$$

(es decir, dos veces el seno de la máxima elongación); se obtiene luego

$$t = \Phi(l_0 : l) \sqrt{l : g}, \quad (17.2)$$

donde la función Φ es totalmente desconocida. Resolviendo la ecuación diferencial que nos indica la mecánica estamos en condición de calcularla; pero esto no puede hacerlo el análisis dimensional. Los resultados habrían sido peores si hubiésemos tenido que dudar de la existencia de otras influencias, por ej. de la altura del sol o de la luna, como en las mareas⁽¹⁸⁾.

⁽¹⁸⁾ En teoría no es problema absurdo, aunque actualmente fuera del alcance de la experiencia, principalmente por la presencia del valor de g cuya variación, por las causas dichas, se calcula en $1:2.10^6$ (Cfr. *Encykl. d. M. W.* Vol. VI, 1 B p. 175 - 177). Llamando g , al valor variado de g , es bien evidente que el tiempo

Supongamos ahora que, por considerar que existe una cierta constante física que es una velocidad — la velocidad de la luz — se hubiera eliminado de entre las magnitudes fundamentales el tiempo (o la longitud, que habría sido lo mismo), obteniendo las fórmulas dimensionales:

$$[t]=L, \quad [l]=L, \quad [g]=L^{-1},$$

quedando por otra parte en las hipótesis simples del principio. Como monomio de la misma dimensión de t habría podido tomarse l , y se habría obtenido lg como monomio de dimensión 0. El resultado habría sido

$$t = l \phi(lg). \quad (17.3)$$

Ahora bien, este resultado no está nada en contradicción con el anterior representado por la (17.1), pues ésta puede escribirse

$$t = cl \sqrt{1 : lg};$$

pero es evidentemente mucho más indeterminado porque, mientras antes quedaba sólo por determinar la constante c , ahora es la función $\phi(lg)$ que la aplicación hecha del análisis dimensional no sabe determinar.

Esta observación demuestra que, aunque las conclusiones del análisis dimensional, dentro de los límites indicados, sean atendibles independientemente del sistema de dimensiones que puede

periódico se obtendría cambiando en las fórmulas (17.1), (17.2) el factor $\sqrt{l:g}$ en $\sqrt{l:g_1}$; ahora nótese que

$$\sqrt{l:g_1} = \sqrt{l:g} \sqrt{g:g_1}$$

y el segundo factor del segundo miembro tiene evidentemente dimensiones 0. Si en lugar de cambiar g en g_1 en las fórmulas (17.1), (17.2) se cambiaran los segundos miembros respectivamente en

$$\Phi\left(\frac{g}{g_1}\right) \sqrt{l:g}, \Phi\left(\frac{l_0}{l}, \frac{g}{g_1}\right) \sqrt{l:g}$$

se obtendrían pues fórmulas plenamente conformes, aunque menos expresivas, y serían las que daría la aplicación automática del teorema II, cuando se agregaran las nuevas causas en el problema del período de oscilación.

haberse elegido, las indicaciones obtenidas pueden ser más satisfactorias o menos. Si examinamos nuevamente la demostración del n. 13, vemos fácilmente que se tendrá la máxima determinación, es decir el mínimo número de variables para la función Φ , cuanto mayor es el número de las magnitudes independientes, con tal que el problema conserve sentido⁽¹⁹⁾. Por cuanto evidentemente deben atribuirse las mismas dimensiones a las magnitudes de la misma clase de homogéneas, se obtiene la regla que el razonamiento dimensional podrá dar las máximas ventajas cuando, al elegir la representación dimensional, se tendrá cuidado de que sean consideradas como independientes las magnitudes que, en el proceso físico que se estudia, no obedecen a una ley de equivalencia.

Así, en caso de considerar un problema en el cual entran las magnitudes del calor (cantidad de calor y temperatura), deberá atribuirse a éstas las dimensiones termodinámicas sólo cuando su presencia en el problema corresponde a una transformación del calor en trabajo, pero deberán considerarse como magnitudes independientes en caso contrario.

18. — Al análisis dimensional, y más generalmente a la teoría de las dimensiones, se da a veces otra interpretación llamada *principio de semejanza*: si se hace un cambio de unidades, los números que representan las magnitudes que actúan en un determinado fenómeno se multiplican por factores determinados; pero el mismo resultado se obtendría si, dejando inalteradas las unidades, se considerara el fenómeno análogo desarrollándose entre elementos materiales cuyas medidas se hubieran ampliado o reducido según la misma razón; imaginativamente podemos decir que el mismo resultado correspondería a estudiar el fenómeno en un *mundo en miniatura*. Si esta interpretación se toma por válida, se presenta un modo para determinar la función Φ o, cuando menos, adquirir algún mayor conocimiento de ella por vía experimental: bastará considerar uno o más casos concretos e interpretarlos como los representantes del fenómeno general en

⁽¹⁹⁾ Si, desconociendo la naturaleza de la gravedad, se la hubiera considerado como una noción primitiva, atribuyéndole por lo tanto una dimensión independiente G , no se habría podido formar con l y g ningún monomio de dimensión T y el problema habría perdido todo sentido; a lo más se habría obtenido el resultado $t=t$.

mundos de dimensiones convenientemente variadas. Evidentemente la imaginación del mundo en miniatura no puede ser sino muy groseramente aproximada, porque las discontinuidades de las cuales la física no puede independizarse en la consideración del mundo real no se transmiten por semejanza cuando el desenvolvimiento de un fenómeno en este mundo real se quiera identificar con aquél que podría ocurrir en el mundo en miniatura. En la pura mecánica el principio de semejanza es válido en razón de su fundación por postulados, del mismo modo que es válido para la geometría.

Puede, sin embargo, darse al principio de semejanza una forma completamente rigurosa, salvo hacer más problemática su aplicación práctica, en cuanto se sepa traducir en ecuaciones matemáticas el problema físico. Si entonces es posible encontrar otro problema que se traduzca en un sistema de ecuaciones que se reduce idéntico al anterior por medio de una dilatación aplicada al sistema de las variables (independientes e incógnitas), de la solución de uno de ellos, supuesta conocida, se obtendrá evidentemente con simples cálculos de proporcionalidad la del otro. El concepto no difiere del que aparece en el n. 11, con la diferencia de no preocuparse del significado físico, más o menos universal, de los coeficientes y de aplicarse a sistemas de ecuaciones aun diferenciales, en cambio de referirse a relaciones finitas entre magnitudes; las dificultades de aplicación consisten en encontrar para cada problema *dado numéricamente* el semejante que se supone más alcanzable en la práctica.

19. — A modo de conclusión, queremos observar que, aun cuando, principalmente en las notas, nos pareció a veces necesario aclarar la posición de los problemas tratados con alusiones que podrían calificarse un poco de corte filosófico, y en particular más de una vez tuvimos que aludir a la teoría física como a un molde necesario, pero algún tanto arbitrario, consideraríamos equivocado, siendo fuera de nuestro pensamiento, cualquier interpretación de lo dicho en un sentido epistemológico. De propósito notamos que, por referirnos a las leyes físicas como expresadas por relaciones polinomiales o aún monomiales, no es necesario hacer epistemología; podríamos limitarnos a constatar un hecho, pero hemos indicado también una razón matemática; por otra parte muchas de las cosas que hemos referido a polinomios podría repetirse para series; según lo dicho en los nos. 11 y sig., aumentar el número de términos en la ex-

presión de leyes físicas puede significar aumentar el número de las llamadas constantes, sean dimensionadas ó universales; y mirando al desenvolvimiento de la física, podemos ver que en efecto las constantes de la física van creciendo delante de nuestros propios ojos; y van creciendo acaso a pesar de los esfuerzos epistemológicos para reducir su número.

Hemos hablado de ideas primitivas y de substrato lógico de cualquier teoría física; no negamos que se pueda hacer investigación experimental sin las unas y sin el otro; pero se hace catálogo y no ciencia, porque la ciencia supone orden y coordinación; y quiérase o no, las ideas son algo distinto de los casos particulares que las hacen asomar en nuestra inteligencia; si así no fuera, tampoco la palabra abstracción no tendría sentido. Por lo restante, los últimos párrafos, nos. 16 a 18, me parecen puntualizar el fin y el significado concreto del trabajo.

Rosario
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

SOBRE UN TIPO DE DESARROLLOS EN SERIE DEL NUMERO e

por

JOSÉ BABINI

Nos proponemos, en esta nota, generalizar una fórmula propuesta como problema por J. V. Uspensky (Ver esta Revista, Año V, página 191), dando la expresión general de un tipo de desarrollos en serie de e de la forma

$$e = \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! f(n) f(n+1)} \quad (1)$$

donde k es un coeficiente y $f(n)$ un polinomio en n de grado p cualquiera (la fórmula de Uspensky corresponde a $p=2$).

Para ello, recordemos que si $f(x)$ y $f(x+1)$ son polinomios sin raíces comunes, existen dos polinomios $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ a lo sumo de grado $p-1$, tales que idénticamente

$$\varphi(x) f(x+1) - \psi(x+1) f(x) = 1 \quad (2)$$

o sea

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} - \frac{\psi(x+1)}{f(x+1)} = \frac{1}{f(x)f(x+1)}.$$

Si llevamos esta expresión a la fórmula (1)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{f(n)f(n+1)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{\varphi(n)}{f(n)} - \frac{\psi(n+1)}{f(n+1)} \right] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\varphi(n)}{n! f(n)} - \frac{(n+1) \psi(n+1)}{(n+1)! f(n+1)} \right] = \\ &= \frac{\varphi(0)}{f(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n) - n\psi(n)}{n! f(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(n) - n\psi(n)}{n! f(n)} \end{aligned}$$

y bastará entonces elegir $f(x)$ de tal modo que satisfaga a

$$kf(x) + x\psi(x) = \varphi(x) \quad (3)$$

para que la (1) se verifique.

Si se elimina $\varphi(x)$ entre (2) y (3) se obtiene la identidad

$$kf(x)f(x+1) + x\psi(x)f(x+1) - \psi(x+1)f(x) = 1 \quad (4)$$

a la que deben satisfacer los polinomios $\psi(x)$ y $f(x)$.

Como esos polinomios tienen, a lo sumo, $2p+1$ coeficientes, con el coeficiente k se tienen $2p+2$ parámetros a obtenerse partiendo de las $2p+1$ condiciones que ofrece la identidad (4).

Para mostrar la compatibilidad del sistema, así como para el cálculo efectivo de $f(x)$, consideremos un cero x_0 de $f(x)$ y sustituyamos en (4) x por x_0 y por x_0-1 . Se obtendrá

$$x_0\psi(x_0)f(x_0+1) = -\psi(x_0)f(x_0-1) = 1 \quad (5)$$

de donde resulta, ante todo, que

$$\psi(x_0) \neq 0; \quad f(x_0+1) \neq 0; \quad f(x_0-1) \neq 0$$

lo que comprueba que $f(x)$ y $f(x+1)$ no tienen raíces comunes; y que

$$x_0f(x_0+1) + f(x_0-1) = 0. \quad *$$

Entonces el polinomio

$$F(x) = xf(x+1) + f(x-1) - xf(x)$$

que será de igual grado que $f(x)$, se anula para los mismos valores que éste; luego, suponiendo que $f(x)$ no tenga raíces múltiples, se diferenciará de él en un factor constante, que tomaremos de la forma $h+1$, es decir que

$$x[f(x+1) - f(x)] = h f(x) + [f(x) - f(x-1)].$$

Igualando en los dos miembros los términos de mayor grado

es fácil comprobar que $h=p$ con lo que, finalmente, $f(x)$ debe satisfacer la ecuación

$$x[f(x+1) - f(x)] - [f(x) - f(x-1)] = pf(x). \quad (6)$$

Resuelta esta ecuación funcional, y siempre en la hipótesis de que $f(x)$ no tenga raíces múltiples, de la (5) se podrán obtener p valores de $\psi(x)$ lo que permitirá obtener esta función y si se toma para k el valor,

$$k = \frac{1+\psi(1)f(0)}{f(0)f(1)}$$

la (4) se satisfará para $2p$ valores de x de la forma x_0 y x_0+1 (o x_0-1) y para el valor $x=0$; y por lo tanto, satisfecha para $2p+1$ valores, lo será para todos.

Volviendo a la (6), podrán de ella deducirse, por recurrencia, los coeficientes del polinomio $f(x)$, pero preferimos considerar esa ecuación como una ecuación con diferencias finitas y determinar, por ese camino, los polinomios $f(n)$ y $f(n+1)$ a introducir en (1). Estos polinomios satisfarán a la (6) que, utilizando las diferencias se expresará

$$(n+1)\Delta^2 f(n) + (n-p)\Delta f(n) - pf(n) = 0.$$

Consideremos la solución general de esta ecuación en la forma

$$f(n) = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a_r \quad (7)$$

donde las a_r son coeficientes indeterminados.

Por lo tanto será

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{r=0}^n a_r \left[(n+1) \binom{n}{r-2} + (n-p) \binom{n}{r-1} - p \binom{n}{r} \right] = \\ &= \sum_{r=0}^n a_r \left[(n-r+2) \binom{n}{r-2} + (r-1) \binom{n}{r-2} + (n-r+1) \binom{n}{r-1} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (r-1-p) \binom{n}{r-1} - p \binom{n}{r} \Big] = \sum_{r=0}^n a_r \left[(r-1) \binom{n}{r-2} + \right. \\
 & \left. + (r-1) \binom{n}{r-1} + (r-1-p) \binom{n}{r-1} + r \binom{n}{r} - p \binom{n}{r} \right] = \\
 & = \sum_{r=0}^n a_r \left[(r-1) \binom{n}{r-2} + (2r-2-p) \binom{n}{r-1} + (r-p) \binom{n}{r} \right] = \\
 & = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} [(r+1) a_{r+2} + (2r-p) a_{r+1} + (r-p) a_r]
 \end{aligned}$$

y esos coeficientes indeterminados satisfarán a las condiciones

$$(r+1) a_{r+2} - (p-2r) a_{r+1} + (r-p) a_r = 0 \quad r=0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

que permitirán obtenerlos por recurrencia, partiendo de dos de ellos.

Es fácil comprobar que si se toma $a_{p+1}=0$; $f(n)$ se convierte en un polinomio de grado p , pues $a_r=0$ para $r \geq p+1$.

Ese polinomio es el que resuelve nuestro problema y, si, por comodidad, se desea que el coeficiente de la mayor potencia de n sea 1, bastará tomar $a_p=p!$ y eliminando $a_0; a_1; a_2; \dots; a_{p-1}$ entre la (7) y las (8) con $a_{p+1}=a_{p+2}=\dots=0$, se obtendrá

$$f(n) = \begin{vmatrix} \binom{n}{p} & \binom{n}{p-1} & \binom{n}{p-2} & \dots & \binom{n}{2} & \binom{n}{1} & \binom{n}{0} \\ 2-p & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -(p-1) & 4-p & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(p-2) & 6-p & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p-2 & p-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & p & p \end{vmatrix}$$

Razonando de igual manera se obtiene también

$$f(n+1) = \begin{vmatrix} \binom{n}{p} & \binom{n}{p-1} & \binom{n}{p-2} & \dots & \binom{n}{2} & \binom{n}{1} & \binom{n}{0} \\ 1-p & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -p & 3-p & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(p-1) & 5-p & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p-3 & p-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & p-1 & p \end{vmatrix}$$

Veamos, para terminar, un par de ejemplos:

$$p=2 \text{ (caso de Uspensky)} \quad f(n) = 2 \binom{n}{2} + \binom{n}{0} = n^2 - n + 1$$

$$f(n+1) = 2 \binom{n}{2} + 2 \binom{n}{1} + \binom{n}{0} = n^2 + n + 1;$$

$$\varphi(n) = -\frac{1}{2}(n-1); \quad \psi(n) = -\frac{1}{2}n; \quad k = \frac{1}{2}$$

$$\frac{e}{2} = \sum_0 \frac{1}{n!} \frac{1}{1+n^2+n^4}$$

$$p=3; \quad f(n) = 6 \binom{n}{3} + 6 \binom{n}{2} + 3 \binom{n}{1} - \binom{n}{0} = n^3 + 2n - 1$$

$$f(n+1) = 6 \binom{n}{3} + 12 \binom{n}{2} + 9 \binom{n}{1} + 2 = n^3 + 3n^2 + 5n + 2$$

$$\varphi(n) = \frac{1}{6}(n^2 + 1); \quad \psi(n) = \frac{1}{6}(n^2 + n + 2); \quad k = -\frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} e &= -6 \sum_0 \frac{1}{n!} \frac{1}{n^6 + 3n^5 + 7n^4 + 7n^3 + 7n^2 - n - 2} = \\ &= -6 \left(-\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.11} + \frac{1}{2!11.32} + \frac{1}{3!32.71} + \frac{1}{4!71.134} + \dots \right) = \\ &= 3 - \frac{3}{11} - \frac{3}{11.32} - \frac{1}{32.71} - \frac{1}{4.71.134} - \dots \end{aligned}$$

SOBRE UN COMPLEJO LINEAL LIGADO A UNA CURVA CERRADA DEL ESPACIO

por

L. A. SANTALÓ

Supongamos en el espacio ordinario un triedro trirectángulo R de vértice el punto X . Consideremos que este triedro se somete a un movimiento cualquiera M y vuelve a su posición inicial. Toda recta g invariablemente unida al triedro R habrá descrito, por este movimiento M , una superficie reglada S_g .

En estas condiciones, es fácil ver que si una trayectoria ortogonal de las generatrices g de S_g es cerrada, también lo son las demás trayectorias ortogonales, y, además, Blaschke ha demostrado que las rectas g para las cuales esto ocurre forman un complejo lineal⁽¹⁾.

El objeto de esta nota es estudiar con más detalle este complejo lineal de Blaschke en los casos particulares siguientes:

- 1º. Movimiento general alrededor de un punto fijo.
- 2º. Caso en que el triedro móvil coincide con el triedro fundamental de una curva del espacio.
- 3º. Dentro del caso particular anterior consideraremos las rectas g para las cuales las trayectorias ortogonales de la superficie S_g correspondiente no son cerradas, sino que cortan a una misma generatriz en puntos cuya distancia tiene un valor constante D . Veremos que estas rectas forman un complejo cuadrático de rectas, el cual se reduce al complejo lineal anterior en el caso de ser $D=0$.

⁽¹⁾ W. BLASCHKE, *Consideraciones sobre cinemática*, Publicaciones del Instituto de Matemática, Vol. VI (Homenaje a Julio Rey Pastor, T. II, págs. 179-182). Rosario, 1946.

En un principio seguiremos la misma demostración de Blaschke, alterándola ligeramente en vistas a los casos particulares que deseamos tratar.

1. - CASO GENERAL. — Sea un triedro trirrectángulo móvil del espacio, definido por el vértice X y los tres vectores ortogonales entre sí U, V, W . Supongamos que X, U, V, W sean funciones periódicas de un parámetro s , de manera que si L es el período, al recorrer s el intervalo $0, L$ el triedro vuelva a su posición primitiva.

Consideremos un punto Y invariablemente ligado al triedro móvil; si y_1, y_2, y_3 son sus coordenadas respecto el mismo triedro será

$$Y = X + y_1 U + y_2 V + y_3 W. \quad (1.1)$$

Sea A un vector de módulo unidad y de origen Y , que sea también inmóvil respecto el triedro U, V, W ; si a_1, a_2, a_3 son las componentes de A respecto el mismo triedro, un punto cualquiera Z de la recta g que contiene al vector A será de la forma

$$Z = Y + \lambda A = Y + \lambda (a_1 U + a_2 V + a_3 W), \quad (1.2)$$

siendo λ la distancia del punto Z al punto Y .

Al variar s , la recta g describirá una superficie reglada y el punto Z describirá una curva sobre la misma. Para que esta curva sea ortogonal a todas las generatrices de la superficie, debe ser

$$A \cdot dZ = 0. \quad (1.3)$$

De (1.2) se deduce

$$dZ = dY + A d\lambda + \lambda dA, \quad (1.4)$$

y como $A \cdot dA = 0$ (por ser $A^2 = 1$), la condición (1.3) se escribirá

$$A \cdot dY + d\lambda = 0. \quad (1.5)$$

Por tanto, cuando s haya descrito todo el intervalo $0, L$,

o sea, al volver la recta g a su posición inicial, el punto Z habrá pasado a otro punto Z^* y la distancia entre ambos puntos valdrá

$$D = \int_0^L d\lambda = - \int_0^L A \cdot dY. \quad (1.6)$$

Teniendo en cuenta (1.1) y siendo $A = a_1 U + a_2 V + a_3 W$, se tiene

$$A \cdot dY = [a_1 U \cdot X' + a_2 V \cdot X' + a_3 W \cdot X' + (a_2 y_1 - a_1 y_2) V \cdot U' + \\ + (a_1 y_3 - a_3 y_1) U \cdot W' + (a_3 y_2 - a_2 y_3) W \cdot V'] ds. \quad (1.7)$$

Conviene ahora introducir para la recta g las coordenadas g_{ik} de Grassmann y Plücker. Para ello, siendo $y_i, y_i + a_i$ ($i=1, 2, 3$) las coordenadas de dos puntos de la misma, se sabe que es, por definición ⁽²⁾,

$$g_{01} = a_1, \quad g_{02} = a_2, \quad g_{03} = a_3 \quad (1.8)$$

$$g_{23} = a_3 y_2 - a_2 y_3, \quad g_{31} = a_1 y_3 - a_3 y_1, \quad g_{12} = a_2 y_1 - a_1 y_2$$

donde las g_{ik} cumplen la relación

$$g_{01} g_{23} + g_{02} g_{31} + g_{03} g_{12} = 0 \quad (1.9)$$

y además, siendo A de módulo unidad,

$$g_{01}^2 + g_{02}^2 + g_{03}^2 = 1. \quad (1.10)$$

Con estas coordenadas y según la expresión (1.7), la integral (1.6) se escribe (recordando que las a_i, y_i son constantes),

⁽²⁾ Recordemos que las coordenadas g_{ik} de la recta determinada por dos puntos $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)$ son

$$g_{01} = y_1 - x_1, \quad g_{02} = y_2 - x_2, \quad g_{03} = y_3 - x_3 \\ g_{23} = y_2 x_3 - y_3 x_2, \quad g_{31} = y_3 x_1 - y_1 x_3, \quad g_{12} = y_1 x_2 - y_2 x_1,$$

las cuales cumplen la condición (1.9).

$$\begin{aligned}
 -D = & g_{01} \int U \cdot X' ds + g_{02} \int V \cdot X' ds + g_{03} \int W \cdot X' ds \\
 & + g_{12} \int V \cdot U' ds + g_{31} \int U \cdot W' ds + g_{23} \int W \cdot V' ds,
 \end{aligned}
 \tag{1.11}$$

donde las integraciones están todas extendidas al intervalo $0, L$ y los acentos indican derivadas respecto el parámetro s . Como estas integrales, dado el movimiento, tienen valores determinados, las rectas para las cuales es $D=0$ tienen sus coordenadas g_{ik} ligadas por una relación lineal y homogénea; forman, por tanto, un complejo lineal, lo cual constituye el teorema de Blaschke enunciado en la introducción.

2. - ALGUNAS DEFINICIONES. — Antes de entrar en el estudio de los casos particulares enunciados, vamos a resumir brevemente algunas definiciones referentes a complejos lineales de rectas.

Si para definir una recta g se toman las coordenadas g_{ik} de Grassmann y Plücker definidas anteriormente, las cuales satisfacen la condición (1.9), un *complejo lineal* es el conjunto de rectas cuyas coordenadas satisfacen a una ecuación lineal y homogénea entre las g_{ik} , o sea,

$$h_{01} g_{01} + h_{02} g_{02} + h_{03} g_{03} + h_{23} g_{23} + h_{31} g_{31} + h_{12} g_{12} = 0, \tag{2.1}$$

donde las h_{ik} son coeficientes constantes.

El complejo se llama *especial* o *singular* cuando los coeficientes h_{ik} pueden considerarse también como las coordenadas de una recta, es decir, cuando satisfacen la relación (1.9),

$$h_{01} h_{23} + h_{02} h_{31} + h_{03} h_{12} = 0. \tag{2.2}$$

Cuando un complejo es singular, se demuestra que está formado por todas las rectas que cortan a una recta fija (aquella cuyas coordenadas plückerianas son las h_{ik}). En el caso general, las rectas de un complejo lineal están distribuidas de tal manera que por cualquier punto del espacio pasan todas las de un haz contenido en un plano llamado *plano polar* del punto. Recíprocamente, las rectas del complejo contenidas en un plano cualquiera pasan todas por un punto que se llama *polo* del mismo. Todos los planos polares de los puntos de una recta pasan por otra recta, que se llama *conjugada* de la primera.

En particular, el polo del plano del infinito es un punto del mismo que determina una dirección del espacio; las rectas paralelas a esta dirección se llaman *diámetros* del complejo. Cada diámetro tiene por recta conjugada una recta del infinito y, por tanto, los planos polares de los puntos de un diámetro son planos paralelos entre sí. En particular, hay un diámetro tal que los planos polares de todos sus puntos son planos perpendiculares al mismo: este diámetro se llama *eje* del complejo.

3. - CASO DEL MOVIMIENTO ALREDEDOR DE UN PUNTO FIJO. — Se puede suponer que el punto fijo es el origen X del sistema de coordenadas móvil. Entonces es $X'=0$ y el complejo lineal de las rectas para las cuales es $D=0$, según (1.11) se reduce a

$$g_{12} \int V \cdot U' ds + g_{31} \int U \cdot W' ds + g_{23} \int W \cdot V' ds = 0. \quad (3.1)$$

Como antes, las integrales están todas, lo mismo que en lo sucesivo, extendidas de 0 a L , no poniéndolo para abreviar.

Se sabe que el movimiento de un triedro trirectángulo U, V, W alrededor de su vértice X , queda determinado dando las funciones $p(s), q(s), r(s)$ que definen para cada valor de s el eje de rotación instantánea y cumplen las condiciones

$$U' = rV - qW, \quad V' = pW - rU, \quad W' = qU - pV. \quad (3.2)$$

Según estas relaciones será

$$\int V \cdot U' ds = \int r ds, \quad \int U \cdot W' ds = \int q ds, \quad \int W \cdot V' ds = \int p ds, \quad (3.3)$$

con lo cual los coeficientes del complejo lineal (3.1) pueden expresarse mediante las funciones p, q, r que definen el movimiento.

El complejo (3.1) es siempre singular. Las rectas que lo componen son todas aquellas que cortan a la recta fija que pasa por el punto X y tiene los cosenos directores α, β, γ dados por

$$\frac{\alpha}{\int p ds} = \frac{\beta}{\int q ds} = \frac{\gamma}{\int r ds}. \quad (3.4)$$

Si, por ejemplo, el movimiento es una rotación alrededor de un eje, p, q, r son constantes y proporcionales a los cosenos directores del eje de rotación; por tanto, el complejo (3.1) está formado por todas las rectas que cortan al eje de rotación. Lo cual, por otra parte, es fácil de comprobar directamente.

Para que el complejo (3.1) se reduzca a una identidad, según (3.3) debe ser

$$\int p \, ds = \int q \, ds = \int r \, ds = 0. \quad (3.5)$$

Por tanto, resumiendo todo lo obtenido, se tiene: Si un triedro trirrectángulo U, V, W describe un movimiento alrededor de su vértice X y vuelve a su posición inicial, las rectas invariablemente unidas a él que describen superficies regladas cuyas trayectorias ortogonales de las generatrices son curvas cerradas, forman un complejo lineal singular definido por (3.1). Si el movimiento está definido por las ecuaciones diferenciales (3.2), las rectas del complejo son las que cortan a la recta que pasa por el punto fijo y cuyos cosenos directores, respecto al triedro U, V, W , están dados por (3.4). Para que el complejo (3.1) se reduzca a una identidad, o sea, para que todas las rectas describan superficies cuyas trayectorias ortogonales de las generatrices sean curvas cerradas, es necesario y suficiente que se cumplan las condiciones (3.5).

4. - CASO DEL MOVIMIENTO DEL TRIEDRO FUNDAMENTAL DE UNA CURVA DEL ESPACIO.— Supongamos ahora que el punto X describe una curva del espacio cerrada C , y consideremos el movimiento particular en que el triedro móvil U, V, W coincide, en cada punto, con el triedro fundamental de la curva C . Sea U el vector tangente, V el normal principal y W el binormal. Tomando como parámetro s el arco de la curva C , tienen lugar las fórmulas de Frenet,

$$U' = \kappa V, \quad V' = -\kappa U + \tau W, \quad W' = -\tau V, \quad (4.1)$$

siendo κ la curvatura y τ la torsión de C , ambas funciones de s .

Pondremos

$$K = \int_0^L \kappa \, ds, \quad T = \int_0^L \tau \, ds \quad (4.2)$$

y llamaremos a K la *curvatura total* y a T la *torsión total* de la curva cerrada C . Obsérvese que L es ahora la longitud de C .

Siendo X' el vector tangente, o sea, $X' = U$, la fórmula (1.11) se escribirá entonces

$$-D = g_{01} L + g_{12} K + g_{23} T. \quad (4.3)$$

Por consiguiente, en el caso particular considerado, el complejo lineal de rectas que describen superficies regladas tales que las trayectorias ortogonales de sus generatrices sean curvas cerradas, está definido por la ecuación

$$g_{01} L + g_{12} K + g_{23} T = 0. \quad (4.4)$$

Vamos a estudiar este complejo lineal.

Comparando (4.4) con (2.1) es $h_{01} = L$, $h_{02} = h_{03} = h_{31} = 0$, $h_{23} = T$, $h_{12} = K$, y por tanto, la condición (2.2) para que sea singular es

$$LT = 0. \quad (4.5)$$

Puesto que $L \neq 0$, resulta: *la condición necesaria y suficiente para que el complejo (4.4) sea singular, es que la curva C tenga torsión total nula.*

Como ejemplos de curvas alabeadas C cuya torsión total es nula, se tienen todas las curvas esféricas, o sea, aquellas contenidas en la superficie de una esfera.

En este caso, la ecuación del complejo lineal se reduce a

$$g_{01} L + g_{12} K = 0. \quad (4.6)$$

Para hallar la recta a la cual cortan todas las del complejo procederemos de la manera siguiente. Dado un punto Y de coordenadas y_1, y_2, y_3 y otro punto X de coordenadas x_1, x_2, x_3 , según la definición recordada en la nota (2), se tiene

$$g_{01} = x_1 - y_1, \quad g_{12} = x_2 y_1 - x_1 y_2.$$

Por tanto la ecuación (4.6) se puede escribir

$$(x_1 - y_1) L + (x_1 y_2 - x_2 y_1) K = 0 \quad (4.7)$$

o sea

$$\frac{x_1}{Kx_2 + L} = \frac{y_1}{Ky_2 + L} = \lambda$$

que nos dice que las rectas del complejo son todas las que pertenecen a los planos del haz

$$x_1 - \lambda (Kx_2 + L) = 0$$

o, lo que es lo mismo, todas las que cortan a la recta

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{L}{K}. \quad (4.8)$$

Por consiguiente: *el complejo singular de las rectas que, al moverse rígidamente ligadas con el triedro fundamental de una curva cerrada de torsión total nula engendran superficies regladas cuyas trayectorias ortogonales son curvas cerradas, tiene por eje la paralela a la binormal a la curva en el punto posición instantánea del vértice del triedro, trazada por el punto de la normal principal que dista de dicho punto $-L/K$.*

Pasemos ahora a estudiar el caso en que el complejo no es singular, o sea, el caso $T \neq 0$.

En este caso, siendo (4.4) la ecuación del complejo y según la nota⁽²⁾, la ecuación del plano polar de un punto general y de coordenadas y_1, y_2, y_3 es

$$(x_1 - y_1) L + (x_1 y_2 - x_2 y_1) K + (x_2 y_3 - x_3 y_2) T = 0. \quad (4.9)$$

Veamos algunos casos particulares:

a) *Planos polares de los puntos de la tangente.* Un punto de la tangente tiene las coordenadas $y_1, 0, 0$. Por tanto, según (4.9), su plano polar será

$$(x_1 - y_1) L - x_2 y_1 K = 0.$$

Para cualquier valor de y_1 , este plano contiene la recta

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{L}{K}. \quad (4.10)$$

Por tanto: *el plano polar de un punto de la tangente, es el determinado por dicho punto y la recta fija (4.10). Esta recta será la conjugada de la tangente.*

En particular, el plano polar del punto X de la curva, es el plano normal, o sea: *el polo del plano normal es el punto X de la curva.*

b) *Planos polares de los puntos de la normal principal.* Consideremos el punto general $(0, y_2, 0)$; según (4.9) su plano polar será

$$x_1(L + Ky_2) - x_3y_2T = 0,$$

el cual forma con el plano osculador un ángulo ϑ tal que

$$\text{tang } \vartheta = \frac{x_1}{x_3} = \frac{L + Ky_2}{y_2T}. \quad (4.11)$$

Por tanto: *el plano polar de un punto $0, y_2, 0$ de la normal principal, es el que contiene la misma normal principal y forma con el plano osculador un ángulo ϑ dado por (4.11).*

En particular, para que sea $\vartheta = 0$, debe ser $y_2 = -L/K$. Por tanto: *el polo del plano osculador es el punto $0, -L/K, 0$.*

c) *Planos polares de los puntos de la binormal.* Considerando el punto general $(0, 0, y_3)$; según (4.9) su plano polar será

$$x_1L + x_2y_3T = 0.$$

El ángulo φ que forma este plano con el plano normal está dado por

$$\text{tang } \varphi = -\frac{y_3T}{L}. \quad (4.12)$$

Por tanto: *el plano polar de un punto $(0, 0, y_3)$ de la binormal es el que contiene a la binormal y forma con el plano normal un ángulo φ dado por (4.12).*

En particular, para $y_3 = \infty$, es $\varphi = \pi/2$; por tanto: *el polo del plano rectificante es el punto del infinito de la binormal.*

d) *Diámetro y ejes del complejo.* Para hallar la dirección de los diámetros y el eje del complejo (4.4), es cómodo utilizar coordenadas homogéneas. Entonces, si y_1, y_2, y_3, y_4 son las coordenadas homogéneas de un punto Y y x_1, x_2, x_3, x_4 son las de un punto variable, la ecuación del plano polar del punto Y , según (4.9), se escribirá

$$(x_1 y_4 - y_1 x_4) L + (x_1 y_2 - x_2 y_1) K + (x_2 y_3 - x_3 y_2) T = 0,$$

o sea,

$$(y_4 L + y_2 K) x_1 + (y_3 T - y_1 K) x_2 - y_2 T x_3 - y_1 L x_4 = 0.$$

Para que este plano sea el del infinito, $x_4 = 0$, debe ser

$$\frac{y_1}{y_3} = \frac{T}{K}, \quad y_2 = y_4 = 0.$$

Luego: *los diámetros son las rectas paralelas a la dirección*

$$\frac{y_1}{y_3} = \frac{T}{K}, \quad y_2 = 0.$$

En particular, el diámetro que pasa por el punto general (y_1^0, y_2^0, y_3^0) (otra vez en coordenadas no homogéneas), tiene por ecuaciones paramétricas (con el parámetro λ)

$$y_1 = y_1^0 + \lambda T, \quad y_2 = y_2^0, \quad y_3 = y_3^0 + \lambda K \quad (4.13)$$

y por tanto el plano polar de un punto (y_1, y_2, y_3) de este diámetro es

$$(L + K y_2^0) x_1 + (y_3^0 T - y_1^0 K) x_2 - y_2^0 T x_3 - (y_1^0 + \lambda T) L = 0.$$

Para que este plano sea perpendicular al diámetro (4.13) debe ser

$$\frac{L + K y_2^0}{T} = \frac{-y_2^0 T}{K}, \quad y_3^0 T - y_1^0 K = 0.$$

De aquí, según la definición de eje de un complejo (nº. 2), se tiene: *el eje del complejo lineal de rectas unido a cada punto de la curva cerrada C definido por (4.4), es la recta*

$$y_2 = -\frac{KL}{K^2+T^2}, \quad \frac{y_1}{y_3} = \frac{T}{K} \quad (4.14)$$

donde las coordenadas y_1, y_2, y_3 se refieren al sistema formado por la tangente, normal principal y binormal correspondientes al punto considerado de C.

5. - COMPLEJO CUADRÁTICO DE LAS RECTAS PARA LAS CUALES ES $D = \text{cte.}$ — Observemos que según (1.10), la ecuación (4.3) puede escribirse en la forma homogénea

$$(g_{01}L + g_{12}K + g_{23}T)^2 = D^2 (g_{01}^2 + g_{02}^2 + g_{03}^2). \quad (5.1)$$

Como L, K, T son constantes, esta ecuación (5.1) nos dice que las rectas para las cuales D tiene un mismo valor constante forman un complejo cuadrático. Es decir: *Las rectas invariablemente unidas al triedro fundamental de una curva cerrada C, tales que las trayectorias ortogonales de las generatrices de la superficie reglada que ellas engendran al variar dicho triedro a lo largo de C, cortan a cada generatriz en puntos equidistantes a distancia D, forman un complejo cuadrático dado por la ecuación (5.1).*

Pasemos a estudiar este complejo cuadrático.

Las rectas del complejo que pasan por un punto Y del espacio, según (5.1) y lo dicho en la nota (2) forman un cono cuadrático de ecuación

$$\begin{aligned} & [(x_1 - y_1)L + (x_1y_2 - x_2y_1)K + (x_2y_3 - x_3y_2)T]^2 \\ & = D^2 [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2] \end{aligned} \quad (5.2)$$

donde y_1, y_2, y_3 son, como siempre, las coordenadas del punto Y.

Para ver la disposición de estos conos, consideremos su intersección con la esfera $(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 = 1$. Esta intersección coincide con la de la misma esfera con los planos paralelos

$$(x_1 - y_1)L + (x_1y_2 - x_2y_1)K + (x_2y_3 - x_3y_2)T = \pm D. \quad (5.3)$$

La distancia de estos planos al punto Y es

$$\delta = \frac{D}{\sqrt{(L+y_2K)^2 + (y_3T-y_1K)^2 + y_2^2T^2}}. \quad (5.4)$$

Para que el cono sea real, esta distancia debe ser igual o menor que 1, o sea,

$$D^2 \leq (L+y_2K)^2 + (y_3T-y_1K)^2 + y_2^2T^2. \quad (5.5)$$

De todo esto se deducen inmediatamente las siguientes propiedades del complejo cuadrático (5.1):

a) Las rectas del complejo cuadrático (5.1) están distribuidas de tal manera que cada punto del espacio es vértice de un cono de revolución formado por rectas del complejo.

b) Para cada punto, el eje de este cono es la recta que pasa por el punto considerado y es perpendicular al plano polar del mismo respecto al complejo lineal (4.4) estudiado en el n.º 4.

c) El cono es real si se cumple la desigualdad (5.5) e imaginario en el caso contrario.

d) Por cada punto Y , la recta que describe la superficie reglada cuyas trayectorias ortogonales de las generatrices cortan a las mismas según puntos cuya distancia D es máxima, es la recta normal al plano polar de Y respecto al complejo lineal (4.4).

e) El máximo valor de D para el cual el cono cuadrático mencionado es real para todos los puntos del espacio, viene dado buscando el valor mínimo del segundo miembro de (5.5); un cálculo fácil demuestra que se obtiene para los puntos del eje del complejo lineal (4.4), o sea, para los puntos de la recta (4.14), y su valor es

$$D_{max} = \frac{LT}{\sqrt{K^2+T^2}}.$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

SOLUCIONES

N.º 81 — Sea el cilindro elíptico representado en coordenadas cartesianas rectangulares por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Se pide:

- Determinar los dos planos que pasan por el origen y cortan al cilindro según circunferencias.
- Determinar el volumen de los husos que dichos planos determinan en el cilindro.

SOLUCIÓN. — a) Supongamos $a > b$. Consideremos un plano π que contenga al eje x y forme con el plano x, y un ángulo Θ . Llamando b' al segmento de la recta de intersección de π con el plano y, z que es interior al cilindro dado, será

$$b' = \frac{b}{\cos \vartheta}.$$

Eligiendo ϑ de manera que sea $b' = a$, o sea,

$$\vartheta = \arccos \frac{b}{a},$$

la sección del cilindro con el plano π será una circunferencia. El plano simétrico del π respecto el plano x, y cumplirá, por simetría, la misma condición. Por tanto los dos planos pedidos son los representados por las ecuaciones

$$bz = \pm y \sqrt{a^2 - b^2}. \quad (1)$$

- Estos planos (1) cortan al cilindro y determinan en el

mismo dos husos, iguales por simetría. Recordando que la expresión de un volumen es $V = \iint z \, dx \, dy$, sustituyendo el valor de z que se deduce de (1) y sabiendo que la integración se realiza sobre la sección recta del cilindro dado, y teniendo en cuenta, además, que es suficiente hallar el volumen de un octante, tendremos

$$\frac{V}{8} = \int_0^a dx \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} y \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b} dy = \frac{1}{2} b \sqrt{a^2-b^2} \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx$$

de donde, finalmente

$$V = \frac{8}{3} a b \sqrt{a^2-b^2}$$

Esta solución ha sido enviada por el Sr. ADOLFO DAGHETTO, alumno de la Escuela Industrial de la Nación, Rosario.

N. de la Red. Se observa que en esta solución se supone desde un principio que el plano que determina la sección circular pasa por el eje mayor de la elipse sección recta del cilindro. La necesidad de esta condición puede establecerse fácilmente. En efecto, supongamos un plano π que determine una sección circular; sea A uno de los extremos de la intersección del plano π con el plano xy . La recta OA es perpendicular a la generatriz del cilindro dado que pasa por A y, además, a la recta tangente a la circunferencia en el mismo punto; por tanto es perpendicular al plano tangente al cilindro en A y, en consecuencia, también a la tangente a la elipse sección recta del mismo. Luego, si el diámetro que pasa por A es normal a la tangente, este diámetro debe ser un eje de la elipse; es inmediato entonces ver que este eje debe ser el eje mayor, porque el círculo correspondiendo a una sección oblicua tendrá todos los demás diámetros mayores que los diámetros de la elipse que son sus proyecciones.

Si se quisiera aplicar nociones relativamente elevadas de la teoría de las cuádricas, habría podido despreciarse la demostración que precede, por ser conocido que una cuádrica que

no sea una esfera — en particular luego un cilindro — tiene dos y no más haces de secciones circulares paralelas.

N.º 88 — De un rombo variable está fijado un vértice O y la recta r que pasa por O sobre la cual debe estar uno de los lados, mientras que el lado opuesto recorre una recta s también dada, paralela a r . Se pide:

- a) La envolvente del otro lado opuesto al vértice fijo O .
- b) El lugar geométrico de los ortocentros de los triángulos en los cuales el rombo queda dividido por la diagonal que pasa por O .
- c) La envolvente de la diagonal opuesta al vértice fijo O .

SOLUCIÓN. — Tomemos el rombo variable en un sistema cartesiano ortogonal tal que tenga por origen el punto fijo O , siendo el eje de las x congruente con la recta r sobre la cual debe estar uno de los lados y llamemos λ a la distancia entre las dos rectas r y s , Θ al ángulo que forman las rectas variables que constituyen los otros dos lados del rombo, que por comodidad podemos designar con p y q pasando la primera por el origen y la segunda cortando a la recta r a una distancia δ del mismo, siendo δ el valor variable del lado del rombo.

a) El valor δ , después de las notaciones establecidas anteriormente se puede expresar en la forma

$$(1) \quad \delta = \frac{\lambda}{\sin \Theta}.$$

La ecuación de la recta q , teniendo en cuenta que corta al eje de las x a una distancia δ del origen que por comodidad podemos expresar en función de (1), será

$$(2) \quad y = \tan \Theta \left(x - \frac{\lambda}{\sin \Theta} \right).$$

La (1) expresa entonces un conjunto de rectas cuya envolvente debemos hallar y que es función de un parámetro variable Θ . Como de ordinario haremos:

$$\frac{\partial f}{\partial \Theta} = 0 \quad \text{siendo} \quad f \equiv y - \tan \Theta \left(x - \frac{\lambda}{\sin \Theta} \right)$$

Será, por tanto,

$$\frac{\partial f}{\partial \Theta} = \frac{x}{\cos^2 \Theta} - \lambda \frac{\tan \Theta}{\cos \Theta} = 0$$

y obtenemos:

$$\operatorname{sen} \Theta = \frac{x}{\lambda} \quad \Theta = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{x}{\lambda}$$

y reemplazando finalmente este valor de Θ en la (2) resulta:

$$y^2 + x^2 = \lambda^2.$$

Ecuación de la envolvente deseada, que, por tanto, es una circunferencia con centro en el origen y radio igual a λ .

b) Si se traza la diagonal del rombo que pasa por O tendremos dos triángulos definidos respectivamente por las rectas p, s y la diagonal que pasa por O , y r, q , y la diagonal que pasa por O .

Consideremos primeramente el lugar geométrico de los ortocentros del primero de ellos. Por ser constante la posición de una de las alturas este lugar geométrico será una recta, precisamente congruente con la recta de las ordenadas, y .

Para el segundo caso hallaremos la intersección de las alturas bajadas desde el punto O , y desde el vértice opuesto O_1 .

La primera de ellas tiene por ecuación:

$$x = \frac{\lambda}{\operatorname{sen} \Theta} + \frac{\lambda}{\tan \Theta}$$

o:

$$(1) \quad x \operatorname{sen} \Theta = \lambda(1 + \cos \Theta)$$

mientras que la segunda siendo perpendicular a la recta q y a p es:

$$(2) \quad y = -\frac{x}{\tan \Theta}.$$

Hallando la intersección obtenemos la ecuación del lugar geométrico en forma paramétrica que es:

$$(3) \quad y = -\frac{\lambda(1+\cos \Theta)\cos \Theta}{\sin^2 \Theta} \quad (3') \quad x = \frac{\lambda(1+\cos \Theta)}{\sin \Theta}.$$

De la (3') obtenemos que el valor de Θ que la satisface, es:

$$(4) \quad \cos \Theta = \frac{x^2 - \lambda^2}{x^2 + \lambda^2} \quad \Theta = \arccos \frac{x^2 - \lambda^2}{x^2 + \lambda^2}.$$

Sustituyendo (4) en (3) tenemos el lugar geométrico deseado:

$$(5) \quad x^2 = \lambda^2 - 2\lambda y$$

que es una curva del género parábola que corta al eje de las y a una distancia $\frac{\lambda}{2}$ del origen y al de las x a una distancia λ .

c) La ecuación de la diagonal del rombo que pasa por O es:

$$y = x \tan \frac{\Theta}{2}$$

y la de su perpendicular (diagonal opuesta al vértice O) será por tanto, teniendo en cuenta que corta a la recta r a una distancia δ del origen,

$$(1) \quad y = \frac{\sin \Theta}{1 - \cos \Theta} \left(\frac{\lambda}{\sin \Theta} - x \right);$$

tenemos así la ecuación de una familia de rectas, de la cual debemos hallar su envolvente. Como anteriormente, igualando a cero la derivada parcial de (1) con respecto a la variable paramétrica Θ , tendremos

$$(2) \quad \Theta = \arccos \frac{x^2 - \lambda^2}{x^2 + \lambda^2},$$

y, sustituyendo esta (2) en la (1) nos resulta finalmente:

$$(3) \quad x^2 = \lambda(\lambda - 2y).$$

Ecuación de una parábola, precisamente la misma que habíamos encontrado como lugar geométrico en el apartado b).

Esta solución ha sido enviada por el Sr. ADOLFO DAGHETTO, alumno de la Escuela Industrial de la Nación, Rosario.

N. de la Red.— Por consideraciones puramente geométricas y elementales se puede llegar más directamente a los mismos resultados. En efecto, utilizando las mismas notaciones anteriores, se tiene:

a) Llamando h a la distancia de O a la recta q , el área del rombo del enunciado se expresa indistintamente por $\delta\lambda$ y $h\delta$; por tanto $h=\lambda$, o sea, la recta q envuelve la circunferencia de centro O y radio λ .

b) El lugar geométrico de los ortocentros de los triángulos formados por las rectas p, s, OO_1 , como está dicho en la solución anterior, es la recta perpendicular a r por O . Para hallar el lugar geométrico descrito por el ortocentro P del triángulo formado por las rectas q, r, OO_1 , basta observar que este triángulo es isósceles y que, por tanto, también lo es el POO_1 ; en consecuencia $PO=PO_1$, es decir P describe el lugar geométrico de los puntos equidistantes del punto O y de la recta s , o sea la parábola de foco O y directriz s .

c) Puesto que la diagonal del rombo opuesta al vértice O es bisectriz del ángulo OPO_1 , será tangente a la parábola anterior. Luego la curva que ella envuelve es la misma parábola.

N.º 98 — Hallar el límite, para $x \rightarrow 0$, de la expresión

$$\frac{1}{x} \left(\frac{e^x - 1}{x} - 1 \right) - 1.$$

SOLUCIÓN.— Escribiendo la expresión dada en la forma

$$\frac{e^x - x^2 - x - 1}{x^2}$$

se observa que se trata de una indeterminación del tipo $0/0$. Aplicando entonces dos veces seguidas la regla de l'Hospital, tendremos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x^2 - x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 2x - 1)}{2x} = \frac{(e^x - 2)_{x=0}}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Queda, en consecuencia que el límite pedido es igual a $-\frac{1}{2}$.

Esta solución ha sido enviada por el Sr. JOSÉ LAHOZ, alumno de la Facultad de Ciencias Matemáticas de Rosario. Otra solución, aplicando el desarrollo

en serie de e^x , se ha recibido del Sr. MOISÉS GRILL, alumno de la misma facultad.

N.º 99 — Se tiene la cúbica:

$$(x - 12a)^3 + 27a [y^2 + (x - 8a)^2] = 0$$

y se pide:

1º Demostrar que tiene un punto doble en el origen y determinar las tangentes en el mismo.

2º Demostrar que en el intervalo $0 \leq x \leq 9a$ la curva recorre un circuito cerrado. Hallar la longitud de este circuito y el volumen descrito por el mismo al girar alrededor del eje x .

1. — La ecuación anterior mediante simplificaciones puede ponerse en la forma más reducida:

$$(1) \quad x^2(9a - x) = 27a y^2$$

de donde,

$$(1') \quad y = \pm x \sqrt{\frac{9a - x}{27a}}.$$

Derivando:

$$y' = \pm \sqrt{\frac{9a - x}{27a}} \mp \frac{x}{2} \sqrt{\frac{1}{27a(9a - x)}},$$

Comparando esta expresión con (1') se ve que a cada punto (x, y) de la curva corresponde una tangente determinada, salvo el caso de $x=0, y=0$ en el cual el signo $\pm$ de (1') queda efectivamente indeterminado mientras y' toma valores distintos según el signo que se elija. Por tanto el punto $(0, 0)$ es doble y y haciendo $x=0$, tenemos:

$$y' = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

es el valor del coeficiente angular de las dos tangentes en él.

Luego la ecuación de las dos tangentes será:

$$y_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} x.$$

2. — En la (1) la variable y toma dos valores para cada valor de x , y cuando $y=0$, tenemos:

$$x_1=0$$

$$x_2=9a.$$

Por lo que se deduce que en el intervalo $0 \leq x \leq 9a$ recorre un circuito cerrado.

Ahora bien, recordando la expresión que nos da la longitud de una curva que es

$$S = \int \sqrt{1 + y'^2} dx$$

y aplicando a nuestro caso,

$$S = \int \frac{12a-x}{\sqrt{12a} \sqrt{9a-x}} dx.$$

La anterior integral puede descomponerse en otras dos S_1 y S_2 de modo que $S = S_1 + S_2$.

La primera de ellas nos da:

$$S_1 = \int_0^{9a} \frac{\sqrt{12a} dx}{\sqrt{9a-x}} = \left[-2 \sqrt{12a} \sqrt{9a-x} \right]_0^{9a} = 2 \sqrt{12a} \sqrt{9a}.$$

$$S_1 = 12a \sqrt{3};$$

mientras que la segunda se integra más fácilmente realizando el cambio de variables

$$\sqrt{9a-x} = t,$$

que trae consigo

$$x = 9a - t^2, \quad dx = -2t \cdot dt,$$

y de allí, aplicando valores, poniendo límites e integrando:

$$S_2 = -2 \int_0^{9a} \frac{9a-t^2}{\sqrt{12a}} \cdot dt = \left[\frac{2}{\sqrt{12a}} \cdot 9a \sqrt{9a-x} \right]_0^{9a} - \left[\frac{2}{\sqrt{12a}} \frac{(\sqrt{9a-x})^3}{3} \right]_0^{9a}$$

$$S_2 = -6a\sqrt{3}.$$

Luego, sumando:

$$S = S_1 + S_2 = 12a\sqrt{3} - 6a\sqrt{3} = 6a\sqrt{3},$$

que es la longitud del antedicho circuito cerrado.

La expresión que nos da el volumen del cuerpo engendrado por el giro del mismo circuito es:

$$V = \pi \int_0^{9a} y^2 dx = \pi \int_0^{9a} \frac{x^2(9a-x)}{27a} dx.$$

Sustituyendo valores y desarrollando:

$$V = \frac{\pi}{3} \left[\int_0^{9a} x^2 dx \right] - \left[\frac{\pi}{27a} \int_0^{9a} x^3 dx \right] = \pi \left[\frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{4 \cdot 27a} \right]_0^{9a}$$

$$V = \frac{81}{4} \pi a^3$$

que es el volumen deseado.

Esta solución ha sido enviada por el Sr. ADOLFO DAGHETTO, alumno de la Escuela Industrial anexa a la Facultad de C. Matemáticas de Rosario.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

PROPUESTOS

111. - Escribir el término general y hallar la suma de la serie

$$\frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \dots$$

112. - Demostrar la siguiente fórmula para la diferencia de un producto

$$\Delta^n u v = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} \frac{n!}{\alpha! \beta! \gamma!} \Delta^{\alpha} u \Delta^{\beta} v$$

siendo α, β, γ números naturales.

113. - Representar la función

$$y = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \left(1 - \frac{2x}{\operatorname{tg} 2x} \right)$$

y demostrar:

- a) Que los máximos y mínimos están alineados sobre una recta r ;
- b) Que esa recta corta además a la curva en puntos de abscisa x_n , doble de los valores que anulan a la función;
- c) Que el trapezoide limitado por la ordenada correspondiente a x_n y por la ordenada máxima próxima, está dividido por r en dos figuras cuyas áreas tienen diferencia constante e igual a 1.

Este problema y el anterior han sido propuestos por el Ing. JOSÉ BABINI de Santa Fe.

114. - Demostrar que todos los rombos inscritos a una elipse tienen sus lados tangentes a un mismo círculo.

115. - Un rectángulo variable gira conservando dos lados consecutivos tangentes en los vértices no comunes a una elipse fija. ¿Cuál es el lugar geométrico de cada uno de los dos vértices restantes? Determinar el área de cada una de las curvas cerradas que constituyen estos lugares.

116. - Demostrar las siguientes propiedades referentes a superficies regladas:

a) Sobre cualquier superficie reglada las trayectorias ortogonales de las generatrices son equidistantes (es decir, los segmentos en que dos cualesquiera de ellas cortan a las distintas generatrices, son todos iguales).

b) La condición necesaria y suficiente para que exista una trayectoria oblicua isogonal de las generatrices tal que todas las trayectorias que cortan las generatrices bajo el mismo ángulo sean equidistantes, es que la reglada sea un cilindro. En este caso la propiedad se realiza para cualquier trayectoria isogonal de las generatrices.

c) Si la superficie reglada no es un cilindro, consideremos la intersección C de un cono director de la reglada con una esfera de centro en el vértice del cono. Suponiendo que existan dos trayectorias isogonales de las generatrices, igualmente inclinadas y equidistantes, demostrar que sus tangentes en puntos correspondientes forman ángulos de cosenos opuestos con la tangente en el punto correspondiente de la intersección C mencionada y que los arcos correspondientes en las dos trayectorias son iguales.

BIBLIOGRAFIA

GUILLERMO KNIE. *Problemas de mecánica atómica*. Monografías físico-matemáticas. N° 2, 1945.

Es conocido que E. Schrödinger inventó su ecuación de onda por un cambio puramente formal de letras en la ecuación del movimiento newtoniano de dos cuerpos; y, aunque haya dado normas para aplicar la transformación a las ecuaciones de un problema dinámico cualquiera, refiriéndose a la función hamiltoniana, no olvidó el mismo de notar que estas normas quedaban todavía indeterminadas en puntos de importancia, por la elección del sistema de coordenadas y por la forma de normalización de dicha función. Esta arbitrariedad ha sido aprovechada en lo sucesivo por los investigadores de la mecánica cuántica por cuanto, sirviendo la ecuación, más bien que para calcular

soluciones capaces de proporcionar una descripción matemática del desarrollo previsible de determinados fenómenos, para provocar una descomposición de los mismos comparable bajo muchos aspectos con un análisis periodal, se pudo obtener, al variar la elección de dichos elementos indeterminados, descomposiciones que parecieran reflejar uno que otro caso experimental. Pues el caso tratado originariamente por Schrödinger era aquel de la emisión luminosa, por un átomo excitado, quedaba indicado referirse a coordenadas y soluciones con simetría esférica; por lo tanto la ecuación fué escrita en coordenadas cartesianas ortogonales y las soluciones se representaron por funciones esféricas. El autor de esta monografía informa detalladamente sobre otros casos estudiados. Si el fenómeno estudiado tiene una dirección preferencial, como el caso de un átomo alcanzado por una radiación paralela proveniente del infinito, será natural poner en evidencia esta dirección, desde un principio, con la elección del sistema de coordenadas con simetría circular alrededor de un eje con la dirección preferencial; agregando la condición de ortogonalidad, el sistema elegido fué (no porque estas condiciones sean todavía suficientes a determinarlo unívocamente) el sistema doble ortogonal de los paraboloides de rotación homofocales con el agregado del haz de planos diametrales. Este sistema de coordenadas tiene, desde el punto de vista analítico, la especialidad que la distancia de un punto del origen se expresa linealmente por las coordenadas (el autor dice tan solo *racionalmente*) y un sistema de soluciones de la correspondiente ecuación de Schrödinger anulándose en el infinito está dado, salvo un factor exponencial, por polinomios de Laguerre generalizados. El autor expone los cálculos correspondientes con muchos detalles aunque con un simbolismo no siempre enteramente propio; luego pasa a la interpretación física.

Vuelve por otra parte a las coordenadas cartesianas ortogonales en casos en los que ya no existe la dirección preferencial, de manera que el lector tiene oportunidad de tomar contacto con distintos aspectos de la teoría. Si decimos tan solo tomar contacto es que nos parecería útil, si fuera posible, un mayor esfuerzo de coordinación teórica y una información bibliográfica e histórica más completa; como tuvimos oportunidad de notar en otras ocasiones el autor se limita, para las pocas indicaciones bibliográficas al pie de algunas páginas, a tres, cuatro palabras: un apellido, la indicación cortada de una revista, un número; nada de título y ninguna indicación histórico-crítica. El lector voluntarioso podrá partiendo de aquellas pocas indicaciones, y con la ayuda de una biblioteca apropiada, tomar camino. Nos parece útil dar, para este fin, el índice de los párrafos: 1. Principio de variación de la mecánica ondulatoria. 2. Elección de coordenadas. Coordenadas parabólicas. 3. Espectro discontinuo de energía de los átomos del tipo del hidrógeno. 4. Espectro continuo de energía de los átomos del tipo del hidrógeno. 5. Normalización de las funciones propias del espectro continuo. 6. Dispersión de partículas α por un núcleo atómico. 7. Dispersión de una partícula α por una partícula α . 8. Dispersión de un proton por un proton. 9. Funciones propias aproximadas de la ecuación de Dirac. 10. Dispersión de un electrón rápido por un centro cargado. 11. Espectro continuo de los rayos X.

B. LEVI