

# Instituto Politécnico

Universidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de

## Inecuaciones

### 3º Año

## Matemática

Masterización: RECURSOS PEDAGÓGICOS

Cód. 1304-19

Mónica Napolitano



Revisión: María del Luján Martínez

Dpto. de Matemática



## DESIGUALDADES EN $\mathbb{R}$



### DEFINICIÓN

Dados los números reales  $a$  y  $b$ , se tiene que:

$$a < b \Leftrightarrow b - a > 0$$

### PROPIEDAD

Dados  $a \in \mathbb{R}$  y  $b \in \mathbb{R}$ :

$$a < b \Leftrightarrow \exists k > 0 / a + k = b$$

### PROPIEDADES

Sean  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$  y  $c \in \mathbb{R}$ :

$$(I) \quad a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$$

$$(II) \quad \left. \begin{array}{l} a < b \\ c > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$$

$$(III) \quad \left. \begin{array}{l} a < b \\ c < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$$



### Demostraciones

$$(I) \quad a < b \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \exists k > 0 / a + k = b \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} (a + k) + c = b + c \\ \stackrel{(3)(4)}{\Leftrightarrow} (a + c) + k = (b + c) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} a + c < b + c$$

$$(II) \quad a < b \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \exists k > 0 / a + k = b \\ \stackrel{(5)}{\Rightarrow} (a + k) \cdot c = bc \stackrel{(6)}{\Rightarrow} ac + kc = bc \quad (*)$$

Dado que  $k > 0 \wedge c > 0$ , tenemos que  $kc > 0$ .

Llamemos  $h = kc$ , entonces (\*) queda:  $ac + h = bc$  con  $h > 0$ , así entonces, por (1),  $ac < bc$  como queríamos demostrar.

### Referencias:

- (1) Propiedad:  
 $a < b \Leftrightarrow \exists k > 0 / a + k = b$
- (2) Suma en las igualdades
- (3) Prop. Asociativa de la suma
- (4) Prop. Conmutativa de la suma
- (5)  $x = y \Rightarrow xz = yz$
- (6) Prop. Distributiva de la multiplicación respecto a la suma

$$(III) a < b \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \exists k > 0 / a + k = b \stackrel{(5)}{\Rightarrow} (a + k) \cdot c = bc \stackrel{(6)}{\Rightarrow} ac + kc = bc \Rightarrow ac = bc + (-kc)^{(**)}$$

Dado que  $k > 0 \wedge c < 0$ , tenemos que  $kc < 0 \Rightarrow -(kc) > 0$ .

Llamemos  $h = -(kc)$ , entonces  $(**)$  queda:  $ac = bc + h$ , con  $h > 0$ , así entonces, por (1),  $ac > bc$  como queríamos demostrar.

## INECUACIONES LINEALES EN UNA INCÓGNITA



### DEFINICIÓN

Llamaremos *inecuación lineal en una incógnita en la variable x* a toda expresión equivalente a alguna de las siguientes:

$$ax + b < 0 ; ax + b > 0 ; ax + b \leq 0 ; ax + b \geq 0$$

siendo  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $a \neq 0$



### DEFINICIÓN

Dos inecuaciones son equivalentes si poseen el mismo conjunto solución.



### Observación importante

Para obtener una inecuación equivalente a una dada, debe aplicarse a ésta las operaciones que se encuentran demostradas en las tres propiedades vistas anteriormente en este apunte.



### EJEMPLOS

1)  $2x + 3 \geq 1$



$$2x + 3 + (-3) \geq 1 + (-3)$$

Sumo  $(-3)$  a ambos miembros. Por la propiedad (I), no cambia el orden de la

$$2x + 0 \geq (-2)$$

Algoritmo de la suma

$$2x \geq (-2)$$

Elemento neutro de la suma

$$\frac{1}{2} 2x \geq \frac{1}{2} (-2)$$

Multiplico por  $\frac{1}{2}$  a ambos miembros. Por la propiedad (II), al ser  $\frac{1}{2} > 0$ , no cambia el orden de la desigualdad

$$1x \geq (-1)$$

Algoritmo de la multiplicación

$$x \geq (-1)$$

Elemento neutro de la multiplicación

$$\text{Solución} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -1\}$$

Representación gráfica:



$$2) 3x + 2 > 5x + 7$$

Sumo  $(-2) + (-5x)$  a ambos miembros. Por la propiedad (I), no cambia el orden de la desigualdad

$$3x + 2 + (-2) + (-5x) > 5x + 7 + (-2) + (-5x)$$

$$(-2)x > 5$$

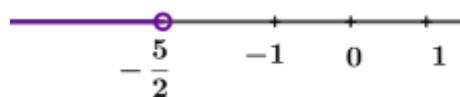
Multiplico por  $(-\frac{1}{2})$  a ambos miembros. Por la propiedad (III), al ser  $-\frac{1}{2} < 0$ , cambia el orden de la desigualdad

$$\left(-\frac{1}{2}\right)(-2)x < \left(-\frac{1}{2}\right) 5$$

$$x < \left(-\frac{5}{2}\right)$$

$$\text{Solución} = \left\{x \in \mathbb{R} / x < -\frac{5}{2}\right\}$$

Representación gráfica:



Existe una forma muy sencilla y compacta para describir conjuntos de números reales como los resultantes en los ejemplos anteriores, lo veremos a continuación.

### INTERVALOS REALES



DEFINICIONES			
Sean $a, b \in \mathbb{R}$ , con $a < b$			
Clasificación	Notación	Conjunto	Representación gráfica
Acotado y cerrado	$[a; b]$	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$	
Acotado y abierto	$(a; b)$	$\{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$	
Acotado y semiabierto	$(a; b]$	$\{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$	
	$[a; b)$	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$	
No acotado superiormente	$[a; +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$	
	$(a; +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} / x > a\}$	
No acotado inferiormente	$(-\infty; b]$	$\{x \in \mathbb{R} / x \leq b\}$	
	$(-\infty; b)$	$\{x \in \mathbb{R} / x < b\}$	

### EJEMPLOS

En los ejemplos de las páginas 2 y 3, los conjuntos solución se pueden expresar como intervalos.

En el 1)  $S = [-1; +\infty)$ , y en el 2)  $S = (-\infty; -\frac{5}{2})$ .



### ACTIVIDAD

1) En cada caso, resuelve la inecuación, escribe, si se puede, el conjunto solución como intervalo real y representa gráficamente.

a.  $\frac{2x+1}{5} - \frac{2+x}{3} > 1$

b.  $\frac{5x-1}{4} - \frac{3x-13}{10} \leq \frac{5x+1}{3}$

c.  $3x - 4 + \frac{x}{4} \leq \frac{5}{2}x + 2$

d.  $\frac{3x+2}{3} - \frac{x-1}{2} \geq \frac{x}{6}$

e.  $x \cdot (x - 1) \geq x^2 + 5x - 1$

f.  $(2x + 1)(3x + 2) < (2x + 5)(3x - 5)$

g.  $10(x - 1) < 10(x + 1) - 10x$

h.  $(\frac{1}{2}x - 1)^2 > \frac{x}{2}(\frac{1}{2}x - 6)$



## SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES

Un sistema de inecuaciones lineales está formado por varias inecuaciones lineales, de forma tal que las variables de estas deben cumplir simultáneamente todas ellas.

### EJEMPLOS

$$1) \begin{cases} 2x - 1 \geq 3 \\ x + 1 < 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 1 \geq 3 & (1) \\ x + 1 < 5 & (2) \end{cases}$$

Resolvemos (1):  $2x - 1 \geq 3 \Rightarrow 2x \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{2}2x \geq \frac{1}{2}4 \Rightarrow x \geq 2$ . Entonces (1) =  $[2; +\infty)$

Resolvemos (2):  $x + 1 < 5 \Rightarrow x < 4$ . Entonces (2) =  $(-\infty; 4)$

Debido a que integrarán la solución los valores de  $x$  que cumplan simultáneamente (1) y (2), el conjunto solución será el resultante de la intersección de (1) y (2).

Es decir,  $S = (1) \cap (2)$ .

Para visualizar mejor cómo quedará el conjunto solución, trabajemos con ejes reales.



$$\therefore S = [2; 4)$$

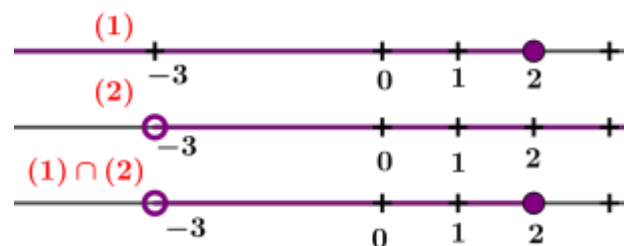
$$2) -10 < 3x - 1 \leq 5$$

Esta expresión es equivalente al sistema:  $\begin{cases} 3x - 1 \leq 5 & (1) \\ 3x - 1 > -10 & (2) \end{cases}$

(1):  $3x - 1 \leq 5 \Rightarrow 3x \leq 6 \Rightarrow \frac{1}{3}3x \leq \frac{1}{3}6 \Rightarrow x \leq 2$ . Entonces (1) =  $(-\infty; 2]$ .

(2):  $3x - 1 > -10 \Rightarrow 3x > -9 \Rightarrow \frac{1}{3}3x > \frac{1}{3}(-9) \Rightarrow x > (-3)$ . Entonces (2) =  $(-3; +\infty)$ .

Gráficamente:



$$\therefore S = (-3; 2]$$



### ACTIVIDADES

2) En cada caso, resuelve la inecuación o sistema, escribe, si se puede, el conjunto solución como intervalo real y representa gráficamente.

a. 
$$\begin{cases} 2x - 1 > 3x + 5 \\ x + 1 > -8 \end{cases}$$

c. 
$$\begin{cases} \frac{x-1}{3} - \frac{2x-5}{3} \geq 0 \\ 2x + 1 < 3 \end{cases}$$

e.  $-2 \leq 3x + 8 < 2$

b. 
$$\begin{cases} 3x + \frac{x-1}{3} \leq \frac{1}{5} \\ 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

d. 
$$\begin{cases} x \geq -1 \\ -\frac{x}{5} < 1 \\ 3x - 7 \leq 15 \end{cases}$$

f.  $\frac{1}{2} < x - 5 < 1$

3) En los siguientes problemas, escriba la o las inecuaciones que lo modelizan y luego resuélvelas:

- La suma de tres enteros consecutivos es al menos  $-18$  y no supera a  $-12$ . ¿Qué ternas de enteros pueden ser?
- Al medir, en cm, el lado de un cuadrado, se comete un error de  $\pm 0.05\text{cm}$ . Al calcular con esta medida el perímetro de este, ¿cuál será el error máximo cometido?
- ¿Cuáles son los números enteros tales que su triple menos 6 sea mayor que su mitad más 4 y cuyo cuádruple aumentado en 8 sea menor que su triple aumentado en 15?

### ALGUNAS INECUACIONES NO LINEALES

A continuación, te mostraremos algunas inecuaciones que, a pesar de no ser lineales, se pueden transformar en sistemas de inecuaciones lineales.

#### INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Antes de empezar a resolver, recordemos rápidamente el concepto de valor absoluto de un número real como distancia. Teniendo en cuenta esto ya pudimos resolver algunas inecuaciones simples con valor absoluto en unidades anteriores.

Por ejemplo, si  $|x| < 3$  pudimos ver que el conjunto solución eran los números reales entre  $-3$  y  $3$ , es decir  $S = (-3; 3)$ . Incluso, resolvimos si la inecuación era  $|x| > 3$ , ahí el conjunto solución era  $S = (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$ .

Demostraremos algunas propiedades algebraicas para poder “desprendernos” de lo geométrico y así poder resolver casos más complejos.



## PROPIEDADES



Sean  $x \in \mathbb{R}$  y  $k > 0$ :

$$(I) \quad |x| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k$$

$$(II) \quad |x| \geq k \Leftrightarrow (x \geq k \vee x \leq -k)$$

### Demostraciones

(I) Si  $x \geq 0$ :

- $|x| = x$
- $-x \leq x$  (\*)

Entonces:

$$|x| \leq k \Leftrightarrow x \leq k \text{ (■)} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} -x \geq -k \Leftrightarrow -k \leq -x \text{ (**)}$$

Por (\*), (\*\*) y Propiedad Transitiva de la relación " $\leq$ ", tenemos que  $-k \leq x$ .

Se debe cumplir simultáneamente con (■) y  $-k \leq x$ , entonces:

$$-k \leq x \leq k$$

Si  $x < 0$ :

- $|x| = -x$
- $x \leq -x$  (\*)

Entonces:

$$|x| \leq k \Leftrightarrow -x \leq k \text{ (**)} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} x \geq -k \text{ (■)}$$

Por (\*), (\*\*) y Propiedad Transitiva de la relación " $\leq$ ", tenemos que  $x \leq k$ .

Se debe cumplir simultáneamente con (■) y con  $x \leq k$ , entonces:

$$-k \leq x \leq k$$

Hemos demostrado, entonces que  $\forall x \in \mathbb{R}: |x| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k$ .

(II) Si  $x \geq 0$ :

- $|x| = x$

Entonces:

$$|x| \geq k \Leftrightarrow x \geq k$$

Si  $x < 0$ :

- $|x| = -x$

Referencias:

$$(1) \left. \begin{array}{l} a < b \\ c < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$$

Entonces:

$$|x| \geq k \Leftrightarrow -x \geq k \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} x \leq -k$$

Como consecuencia de lo obtenido anteriormente, resulta:

$$|x| \geq k \Leftrightarrow (x \geq k \vee x \leq -k).$$

Veamos algunos ejemplos sobre como sirven estas propiedades para resolver inecuaciones con valor absoluto.

### EJEMPLOS:

1)  $|3x - 4| \leq 2$

Usaremos la Propiedad (I). Entonces nos queda:

$$-2 \leq 3x - 4 \leq 2$$

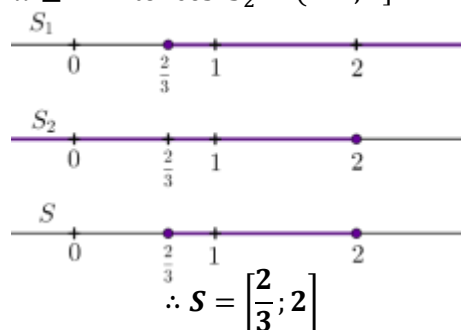
La cual es una forma reducida de escribir el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 3x - 4 \geq -2 & S_1 \\ 3x - 4 \leq 2 & S_2 \end{cases}$$

$S_1: 3x - 4 \geq -2 \Rightarrow 3x \geq 2 \Rightarrow x \geq \frac{2}{3}$ . Entonces:  $S_1 = \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$ .

$S_2: 3x - 4 \leq 2 \Rightarrow 3x \leq 6 \Rightarrow x \leq 2$ . Entonces:  $S_2 = (-\infty; 2]$ .

Gráficamente:



2)  $|2x - 3| > 1$

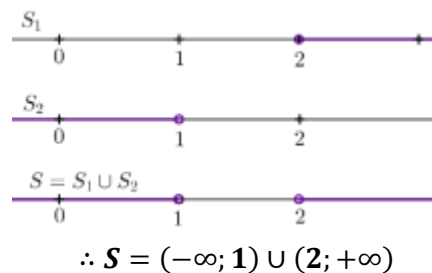
Usaremos la Propiedad (II). Entonces nos queda:

$$2x - 3 > 1 \quad (S_1) \quad \vee \quad 2x - 3 < -1 \quad (S_2)$$

$S_1: 2x - 3 > 1 \Rightarrow 2x > 4 \Rightarrow x > 2$ . Entonces:  $S_1 = (2; +\infty)$ .

$S_2: 2x - 3 < -1 \Rightarrow 2x < 2 \Rightarrow x < 1$ . Entonces:  $S_2 = (-\infty; 1)$ .

Gráficamente:





## ACTIVIDADES

4) En cada caso, resuelve la inecuación o sistema, y escribe, si se puede, el conjunto solución como intervalo real y representa gráficamente.

$$\begin{array}{ll}
 \text{a. } |2x + 5| \geq 3 & \text{d. } \begin{cases} |4x - 3| \leq 1 \\ \frac{x-1}{3} + \frac{x-2}{5} > \frac{1}{5} \end{cases} \\
 \text{b. } \left|x - \frac{1}{2}\right| < 1 & \text{e. } \begin{cases} |x + 1| > 1 \\ |x - 5| \leq 8 \end{cases} \\
 \text{c. } -2|4x - 3| > -6 & \text{f. } \begin{cases} \left|\frac{-2x+1}{-3}\right| < 1 \\ -5x + 6 \geq 2 \end{cases}
 \end{array}$$

## OTRAS INECUACIONES

Veamos algunos ejemplos de otro tipo de inecuaciones no lineales.



### EJEMPLOS:

1)  $(x - 1)(x + 2) > 0$

La anterior no es una inecuación lineal, en efecto la expresión algebraica de la izquierda, una vez que se trasforma a suma, es  $x^2 + x - 2$ , que no es una expresión lineal.

Sin embargo, esta inecuación podemos “reducirla” a expresiones lineales, teniendo en cuenta el algoritmo de la multiplicación. ¿Cómo es esto?

Coloquialmente, la inecuación expresa que el producto de los factores  $(x - 1)$  y  $(x + 2)$  es positivo. Para que eso suceda, el algoritmo de la multiplicación indica que los factores deben tener el mismo signo, es decir, serán ambos positivos o serán los dos negativos.

En símbolos:

$$S_1) \begin{cases} x - 1 > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \quad \vee \quad S_2) \begin{cases} x - 1 < 0 \\ x + 2 < 0 \end{cases}$$

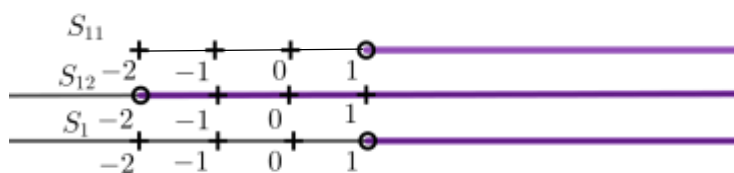
Es decir que nos quedan dos sistemas de inecuaciones lineales, cada uno tendrá una solución, pero como ambas situaciones son correctas el conjunto solución de la inecuación original será la unión de los conjuntos solución de  $S_1$  y  $S_2$ . Es decir:

$$S_F = S_1 \cup S_2$$

Resolvemos  $S_1: \begin{cases} x - 1 > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \begin{matrix} S_{11} \\ S_{12} \end{matrix}$ . Sabemos que  $S_1 = S_{11} \cap S_{12}$ . Entonces:

$$S_{11}: x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow S_{11} = (1; +\infty)$$

$$S_{12}: x + 2 > 0 \Rightarrow x > (-2) \Rightarrow S_{12} = (-2; +\infty)$$



$$S_1 = (1; +\infty)$$

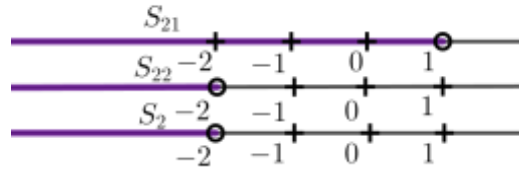
# INECUACIONES

## Matemática

Resolvemos  $S_2: \begin{cases} x - 1 < 0 \\ x + 2 < 0 \end{cases} \begin{matrix} S_{21} \\ S_{22} \end{matrix}$ . Sabemos que  $S_2 = S_{21} \cap S_{22}$ . Entonces:

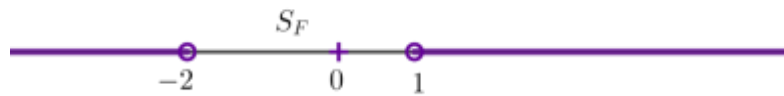
$$S_{21}: x - 1 < 0 \Rightarrow x < 1 \Rightarrow S_{21} = (-\infty; 1)$$

$$S_{12}: x + 2 < 0 \Rightarrow x < (-2) \Rightarrow S_{22} = (-\infty; -2)$$



$$S_2 = (-\infty; -2)$$

$$\therefore S_F = (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$$



$$2) \frac{2x-4}{x+1} < 0$$

Aquí tenemos un cociente, que, por medio del algoritmo de la división lo podemos reescribir  $(2x - 4) \cdot \frac{1}{x+1}$ , es decir como un producto y ahora, por el algoritmo de la multiplicación, sabemos que si el producto es negativo es porque el signo de ambos factores deben ser distintos; también sabemos que el signo de un número y su recíproco debe ser el mismo, por lo que, en resumen, lo que tenemos es que el signo de  $(2x - 4)$  y el de  $(x + 1)$  debe ser distinto.

Resolvamos:

$$S_1) \begin{cases} 2x - 4 > 0 \\ x + 1 < 0 \end{cases} \begin{matrix} S_{11} \\ S_{12} \end{matrix} \quad \vee \quad S_2) \begin{cases} 2x - 4 < 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \begin{matrix} S_{21} \\ S_{22} \end{matrix}$$

$S_1)$

$$S_{11}: 2x - 4 > 0 \Rightarrow 2x > 4 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow S_{11} = (2; +\infty)$$

$$S_{12}: x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1 \Rightarrow S_{12} = (-\infty; -1)$$

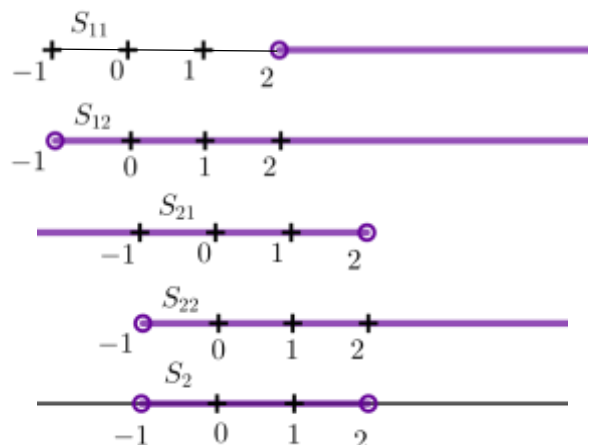
$$\therefore S_1 = \emptyset$$

$S_2)$

$$S_{21}: 2x - 4 < 0 \Rightarrow 2x < 4 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow S_{21} = (-\infty; 2)$$

$$S_{22}: x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow S_{22} = (-1; +\infty)$$

$$\therefore S_2 = (-1; 2)$$



$$S_F = S_1 \cup S_2 = \emptyset \cup (-1; 2)$$

$$\therefore S_F = (-1; 2)$$



$$3) (-2x + 2)(x - 3) \leq 0$$

En la anterior desigualdad el producto puede ser negativo o cero. En el caso de ser negativo, los factores deberán tener distinto signo; pero para que el producto sea nulo (por condición de anulación del producto) cualquiera de los factores puede ser cero. Teniendo en cuenta esto, nos quedará resolver entonces los siguientes sistemas:

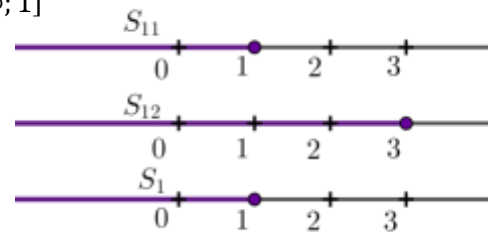
$$S_1) \begin{cases} -2x + 2 \geq 0 & S_{11} \\ x - 3 \leq 0 & S_{12} \end{cases} \vee S_2) \begin{cases} -2x + 2 \leq 0 & S_{21} \\ x - 3 \geq 0 & S_{22} \end{cases}$$

$S_1)$

$$S_{11}: -2x + 2 \geq 0 \Rightarrow -2x \geq -2 \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow S_{11} = (-\infty; 1]$$

$$S_{12}: x - 3 \leq 0 \Rightarrow x \leq 3 \Rightarrow S_{12} = (-\infty; 3]$$

$$\therefore S_1 = S_{11} \cap S_{12} = (-\infty; 1]$$

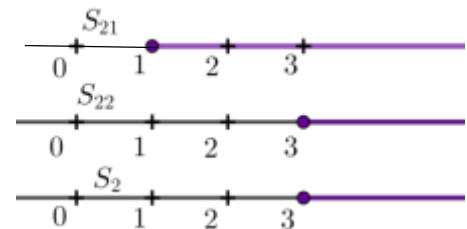


$S_2)$

$$S_{21}: -2x + 2 \leq 0 \Rightarrow -2x \leq -2 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow S_{21} = [1; +\infty)$$

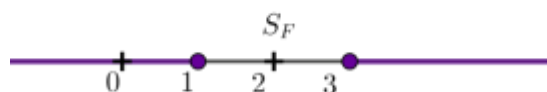
$$S_{22}: x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \Rightarrow S_{22} = [3; +\infty)$$

$$\therefore S_2 = S_{21} \cap S_{22} = [3; +\infty)$$



$$S_F = S_1 \cup S_2 = (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$$

$$\therefore S_F = (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$$



$$4) \frac{-3x+6}{x-1} \geq 0$$

Teniendo en cuenta lo expuesto en los ejemplos 2. y 3., y sin olvidar que **no podemos dividir por cero**, nos quedan los siguientes sistemas:

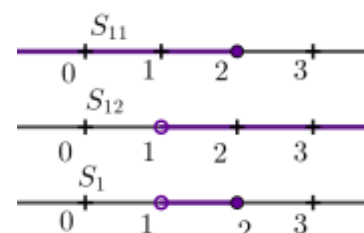
$$S_1) \begin{cases} -3x + 6 \geq 0 & S_{11} \\ x - 1 > 0 & S_{12} \end{cases} \vee S_2) \begin{cases} -3x + 6 \leq 0 & S_{21} \\ x - 1 < 0 & S_{22} \end{cases}$$

$S_1)$

$$S_{11}: -3x + 6 \geq 0 \Rightarrow -3x \geq -6 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow S_{11} = (-\infty; 2]$$

$$S_{12}: x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow S_{12} = (1; +\infty)$$

$$\therefore S_1 = S_{11} \cap S_{12} = (1; 2]$$



$S_2$ )

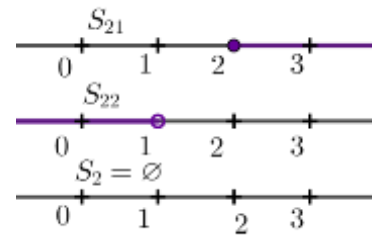
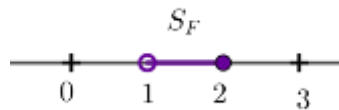
$$S_{21}: -3x + 6 \leq 0 \Rightarrow -3x \leq -6 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow S_{21} = [2; +\infty)$$

$$S_{22}: x - 1 < 0 \Rightarrow x < 1 \Rightarrow S_{22} = (-\infty; 1)$$

$$\therefore S_2 = S_{21} \cap S_{22} = \emptyset$$

$$S_F = S_1 \cup S_2 = (1; 2] \cup \emptyset$$

$$\therefore S_F = (1; 2]$$



### ACTIVIDADES

5) En cada caso, resuelve la inecuación o sistema, escribe, si se puede, el conjunto solución como intervalo real y representa gráficamente.

a.  $(3x - 2)(-x - 1) < 0$

b.  $\frac{x-1}{2x-1} \leq 0$

c.  $\frac{5x-10}{4x-5} > 0$

d.  $(x - 1)^3 < 0$

e.  $(2x - 7)^2 > 0$

f.  $|x - 1|(-3x + 2) \geq 0$

g.  $|x - 1|(-3x + 2) < 0$

h.  $\begin{cases} (x - 1)(x + 2) > 0 \\ |5x - 1| \leq 9 \end{cases}$

i.  $(x^2 - 6x + 9)(x - 5) > 0$

j.  $\begin{cases} -3x^2 + 30x - 75 \leq 0 \\ |2x + 1| > 7 \end{cases}$



## MÁS INECUACIONES NO LINEALES

A continuación, te mostraremos algunas inecuaciones que, a pesar de no ser lineales, se pueden transformar en sistemas de inecuaciones lineales. Requieren un trabajo algebraico más profundo.

Veamos algunos ejemplos:

### EJEMPLO:

1)  $\frac{x-1}{x+2} + 3 < 0$  (\*)

La expresión " $\frac{x-1}{x+2} + 3$ " se puede reescribir con el formato  $\frac{ax+b}{cx+d}$  donde  $a, b, c$  y  $d$  son constantes reales.

Sabemos que  $\frac{p}{q} + \frac{r}{q} = \frac{p+r}{q}$ , con la idea de lograr ese formato es que trabajamos de la siguiente manera la expresión:

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x+2} + 3 &= \frac{x-1}{x+2} + 3 \cdot \frac{x+2}{x+2} = \frac{x-1}{x+2} + 3 \cdot \frac{x+2}{x+2} = \frac{x-1}{x+2} + \frac{3 \cdot (x+2)}{x+2} = \\ &= \frac{x-1}{x+2} + \frac{3x+6}{x+2} = \frac{(x-1) + (3x+6)}{x+2} = \frac{4x+5}{x+2} \end{aligned}$$

Por lo tanto la inecuación (\*) es equivalente a  $\frac{4x+5}{x+2} < 0$ , y ésta sí sabemos resolver.

$$S_1) \begin{cases} 4x+5 > 0 & S_{11} \\ x+2 < 0 & S_{12} \end{cases} \vee S_2) \begin{cases} 4x+5 < 0 & S_{21} \\ x+2 > 0 & S_{22} \end{cases}$$

$S_1)$

$$S_{11}: 4x + 5 > 0 \Rightarrow 4x > -5 \Rightarrow x > -\frac{5}{4} \Rightarrow S_{11} = \left(-\frac{5}{4}; +\infty\right)$$

$$S_{12}: x + 2 < 0 \Rightarrow x < -2 \Rightarrow S_{12} = (-\infty; -2)$$

$$\therefore S_1 = S_{11} \cap S_{12} = \emptyset$$

$S_2)$

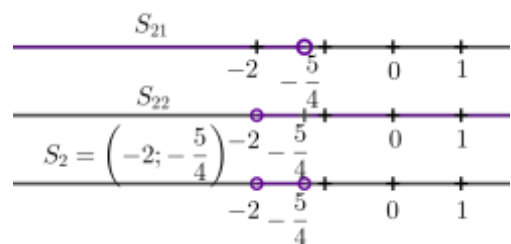
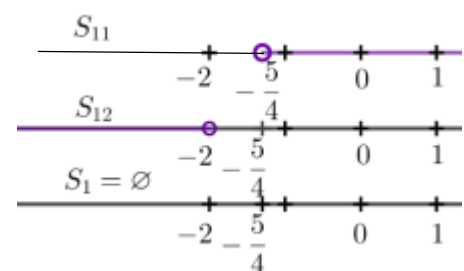
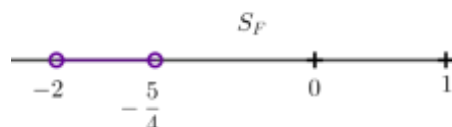
$$S_{21}: 4x + 5 < 0 \Rightarrow 4x < -5 \Rightarrow x < -\frac{5}{4} \Rightarrow S_{21} = \left(-\infty; -\frac{5}{4}\right)$$

$$S_{22}: x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2 \Rightarrow S_{22} = (-2; +\infty)$$

$$\therefore S_2 = S_{21} \cap S_{22} = \left(-2; -\frac{5}{4}\right)$$

$$S_F = S_1 \cup S_2 = \emptyset \cup \left(-2; -\frac{5}{4}\right) = \left(-2; -\frac{5}{4}\right)$$

$$\therefore S_F = \left(-2; -\frac{5}{4}\right)$$



$$2) \frac{2x+5}{-3x+9} > 2 \quad (*)$$

$$\frac{2x+5}{-3x+9} > 2 \Leftrightarrow \frac{2x+5}{-3x+9} + (-2) > 2 + (-2) \Leftrightarrow \frac{2x+5}{-3x+9} + (-2) > 0 \quad (**)$$

La inecuación (\*) es equivalente a la (\*\*).

Ahora trabajaremos con la expresión de la izquierda:

$$\begin{aligned} \frac{2x+5}{-3x+9} + (-2) &= \frac{2x+5}{-3x+9} + (-2) \cdot 1 = \frac{2x+5}{-3x+9} + (-2) \cdot \frac{-3x+9}{-3x+9} \\ &= \frac{2x+5}{-3x+9} + \frac{(-2)(-3x+9)}{-3x+9} = \frac{2x+5}{-3x+9} + \frac{6x+(-18)}{-3x+9} = \frac{2x+5+6x+(-18)}{-3x+9} \\ &= \frac{8x+(-13)}{-3x+9} \end{aligned}$$

Entonces (\*) es equivalente a  $\frac{8x+(-13)}{-3x+9} > 0$ .

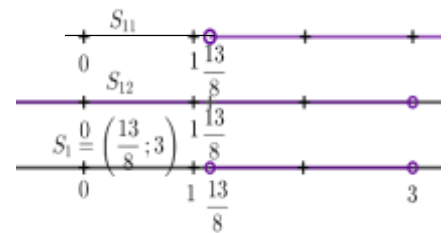
$$S_1) \begin{cases} 8x - 13 > 0 & S_{11} \\ -3x + 9 > 0 & S_{12} \end{cases} \vee S_2) \begin{cases} 8x - 13 < 0 & S_{21} \\ -3x + 9 < 0 & S_{22} \end{cases}$$

$S_1)$

$$S_{11}: 8x - 13 > 0 \Rightarrow 8x > 13 \Rightarrow x > \frac{13}{8} \Rightarrow S_{11} = \left(\frac{13}{8}; +\infty\right)$$

$$S_{12}: -3x + 9 > 0 \Rightarrow -3x > -9 \Rightarrow x < 3 \Rightarrow S_{12} = (-\infty; 3)$$

$$\therefore S_1 = S_{11} \cap S_{12} = \left(\frac{13}{8}; 3\right)$$

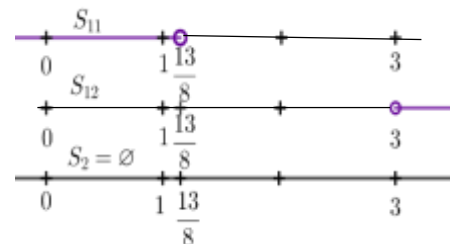


$S_2)$

$$S_{21}: 8x - 13 < 0 \Rightarrow 8x < 13 \Rightarrow x < \frac{13}{8} \Rightarrow S_{21} = \left(-\infty; \frac{13}{8}\right)$$

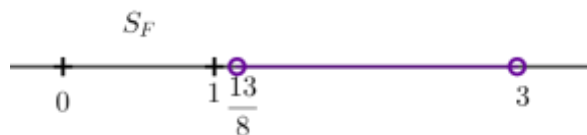
$$S_{22}: -3x + 9 < 0 \Rightarrow -3x < -9 \Rightarrow x > 3 \Rightarrow S_{22} = (3; +\infty)$$

$$\therefore S_2 = S_{21} \cap S_{22} = \emptyset$$



$$S_F = S_1 \cup S_2 = \left(\frac{13}{8}; 3\right) \cup \emptyset = \left(\frac{13}{8}; 3\right)$$

$$\therefore S_F = \left(\frac{13}{8}; 3\right)$$





## ACTIVIDADES

6) En cada caso, resuelve la inecuación o sistema, escribe, si se puede, el conjunto solución como intervalo real y representa gráficamente.

a.  $\frac{2x+1}{x-5} > 1$

c.  $\frac{3x-2}{2x-4} \leq -1$

e.  $\left| \frac{2x-1}{x+5} \right| > 1$

b.  $\frac{5x-4}{2x+6} \geq -3$

d.  $\frac{3x+1}{3x-5} \leq 1$

f.  $\begin{cases} \frac{x-1}{x+2} > 1 \\ (x-1)(x+3) > 0 \end{cases}$

## Respuestas

Sólo escribiremos los conjuntos solución, las gráficas quedan a cargo del alumno.

1.a.  $S = (22; +\infty)$

b.  $S = [1; +\infty)$

c.  $S = (-\infty; 8]$

d.  $S = \left[-\frac{7}{2}; +\infty\right)$

e.  $S = (-\infty; \frac{1}{6}]$

f.  $S = (-\infty; -\frac{27}{2})$

g.  $S = (-\infty; 2)$

h.  $S = \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$

2.a.  $S = (-9; -6)$

b.  $S = (0; \frac{4}{25}]$

c.  $S = (-\infty; -1]$

d.  $S = \left[-1; \frac{22}{3}\right]$

e.  $S = \left[-\frac{10}{3}; -2\right)$

f.  $S = \left(\frac{11}{2}; 6\right)$

3.a. Las ternas pueden ser:  $(-7; -6; -5)$ ,  $(-6; -5; -4)$  y  $(-5; -4; -3)$ .

b. 0,2cm.

c. Los números son 5 y 6.

4.a.  $S = (-\infty; -4] \cup [-1; +\infty)$

b.  $S = \left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$

c.  $S = \left(0; \frac{3}{2}\right)$

d.  $S = \left(\frac{7}{4}; 2\right]$

e.  $S = [-3; 2) \cup (0; 13]$

f.  $S = \left(-1; \frac{4}{5}\right]$

5.a.  $S = (-\infty; -1) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$

b.  $S = \left(\frac{1}{2}; 1\right]$

c.  $S = \left(-\infty; \frac{5}{4}\right) \cup (2; +\infty)$

d.  $S = (1; +\infty)$

e.  $S = \mathbb{R} - \left\{\frac{7}{2}\right\}$

f.  $S = \left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$

# INECUACIONES

## Matemática

---

$$g. S = \left(\frac{2}{3}; +\infty\right) - \{1\}$$

$$h. S = (1; 2]$$

$$i. S = (5; +\infty)$$

$$j. S = (-\infty; -4) \cup (3; +\infty)$$

$$6.a. S = (-\infty; -6) \cup (5; +\infty)$$

$$b. S = (-\infty; -3) \cup \left[-\frac{14}{11}; +\infty\right)$$

$$c. S = \left[\frac{6}{5}; 2\right)$$

$$d. S = \left(-\infty; \frac{5}{3}\right)$$

$$e. S = (-\infty; -5) \cup \left(-5; -\frac{4}{3}\right) \cup (6; +\infty)$$

$$f. S = (-\infty; -3)$$

## Bibliografía

- ⊗ Apunte "Inecuaciones" – (Cod. 1303). Autores: Godino, Patricia; Rosito, Mirta.
- ⊗ Fundamentos del Álgebra Lineal -Ed. CENGASE Learning. Autor: Larson, Ron.
- ⊗ Álgebra Lineal y sus aplicaciones – Ed. Pearson. Autor: Lay, David.
- ⊗ Matemáticas para Administración y Economía – Ed. PEARSON Educación. Autores: Haeussler, Ernest Jr; Richard, Paul.