

MINISTERIO DE JUSTICIA E INSTRUCCION PUBLICA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS, Etc.
DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

MATHEMATICÆ NOTÆ

BOLETIN

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA

DIRECTOR
BEPPU LEVI

AÑO SEGUNDO - FASC. 1



ROSARIO
REPUBLICA ARGENTINA

1942

- El precio de suscripción a “*Mathematicae Notae*” es de 8 \$ (m/n) anuales.
- El Instituto de Matemática publica también una colección de Notas y Memorias bajo el título “Publicaciones del Instituto de Matemática de la Facultad de Ciencias etc.”, cuyo precio de suscripción es de 10 \$ (m/n.) por volumen. Se pueden adquirir los fascículos sueltos de las publicaciones al precio señalado en la pág. 4 de esta misma tapa.
- Para todo lo relacionado al Instituto, a las Publicaciones y a “*Mathematicae Notae*” dirigirse al Director del Instituto de Matemática — Avenida Pellegrini 250 — Rosario (R. Argentina).
- Para suscripciones y adquisición de los fascículos sueltos dirigirse al Bibliotecario de la Facultad de Ciencias Matemáticas etc. — Avenida Pellegrini 250 — Rosario (R. Argentina).
- En la sección de Bibliografía se publicarán los análisis críticos de libros recientes que sean enviados al Instituto de Matemática.

I N D I C E

—Al empezar el segundo año..	pág. 1
—Una observación elemental sobre las ecuaciones de la balística externa. (G. FUBINI)..	» 3
—Definición y condiciones de existencia de la tangente y el círculo osculador en un punto de una curva (B. LEVI)..	» 11
—Ejercicios y Problemas. Propuestos (del n° 20 al 25)..	» 35
—Flores y Hojas. Resuelta..	» 36
—Recordatorio del tricentenario de Galileo y Newton..	» 38
—Ejercicios y Problemas. Soluciones..	» 40
—Flores y Hojas..	» 48
—Bibliografía..	» 52

AL EMPEZAR EL SEGUNDO AÑO

Amigo lector:

Cuando en julio del año pasado — con un atraso por lo menos de tres meses sobre lo que era nuestro propósito — salió el primer fascículo del Boletín del Instituto de Matemática de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad del Litoral, un amigo nos preguntó sobre nuestro programa editorial: ¿Qué prometen Uds. al lector y eventual suscriptor de «Mathematicæ Notæ»?

Contestamos entonces: Pedimos a los amigos una demostración de confianza en nuestra buena voluntad, en los ideales que dominan nuestros propósitos, y si se quiere, en nuestra honradez. Nada queremos prometer, porque conocemos las dificultades de la empresa y lo que prometiéramos quisiéramos mantener sin duda alguna.

Los dos primeros fascículos del boletín salieron en julio y en octubre y a principios de febrero de 1942 pudimos salir con un fascículo 3—4 de tamaño más que doble de los anteriores, con el cual, considerada la cosa desde el solo punto de vista editorial, llegamos a las 164 páginas.

Desde el punto de vista substancial, esperamos también no haber decepcionado la expectativa de nuestros amigos.

Después de un poco de reflexión, nos pareció que estábamos justificados para cerrar honradamente el año y así acercarnos a ir de acuerdo con el calendario.

A los amigos suscriptores del primer año agradecemos la confianza que han tenido en nuestro programa no enunciado y queremos demostrarles nuestro reconocimiento ofreciendo el envío del segundo año dejando a su discreción la renovación de la suscripción, que adquiriría así el sentido de una demos-

tración de simpatía para la revista. Al contrario nos dirigimos a muchos otros lectores que han demostrado estimación para «*Mathematicæ Notæ*» para que se suscriban y procuren suscriptores. La Facultad de Ciencias Matemáticas costea hasta ahora casi íntegramente nuestra Revista, porque, como expresó su Consejo Directivo, considera hacer obra útil para sus alumnos y para el país; es justo que este gasto se reduzca gradualmente dentro de los límites que corresponden efectivamente a los intereses morales y materiales de la Facultad. Por otra parte, deseamos resaltar que el único instrumento de que podemos disponer para medir la extensión en la cual encuentran adhesión nuestros propósitos y aprobación nuestro trabajo, es aquel de numerar las suscripciones.

Por nuestra parte la experiencia de los pocos meses nos permite ahora prometer con mayor tranquilidad de ánimo. Pensamos pues que el volumen del boletín debe dar al menos 200 páginas y quizás más en el año y que la publicación debe hacerse regularmente. La experiencia nos ha demostrado que el período bimestral en el cual habíamos pensado al principio resulta poco practicable; contamos por consiguiente con salir cada tres meses pero con fascículos más gruesos.

Al grupo de nuestros lectores más jóvenes pedimos un esfuerzo para demostrarnos que aprovechan en alguna manera nuestro propio esfuerzo; el número de los que han enviado soluciones de nuestras cuestiones es todavía demasiado reducido; muchas de las que fueron planteadas no han tenido hasta ahora contestación ninguna y son quizás las que más habrían merecido un poco de atención.

Para ellos más que todo escribimos.

Saludos.

MATEMATICÆ NOTÆ

UNA OBSERVACION ELEMENTAL SOBRE LAS ECUACIONES DE LA BALISTICA EXTERNA

En la clásica memoria de FOWLER, GALLOP, LOCK y RICHMOND «*The aerodynamic of a spinning shell*» (Philos. Trans. of the R. Society of London, 1921, t. 221) se parte de las ecuaciones generales de la dinámica de un cuerpo libre escritas en forma vectorial y se escriben también en forma vectorial las ecuaciones de la balística externa. Se distinguen entonces varios casos, transformando estas ecuaciones en otras ecuaciones diferenciales explícitas respecto las varias incógnitas del problema. En lo sucesivo indicaremos esta memoria con (*M*).

Dichas ecuaciones diferenciales explícitas están dadas directamente en un tratado de MOULTON «*New methods in exterior ballistics*» (The University of Chicago Press, 1926, pág. 240 y siguientes). Moulton se limita al caso, particularmente importante en las aplicaciones, de que la trayectoria del baricentro *G* del proyectil sea plana o se pueda, por lo menos, considerar como tal en primera aproximación. El método de Moulton es muy ingenioso, pero exige algunos cálculos no inmediatos y algunas delicadas consideraciones sobre los signos.

Aquí vamos a hacer unas simplícísimas observaciones elementales mediante las cuales las ecuaciones para el movimiento de un proyectil alrededor de su baricentro *G*, válidas para el caso más general, se pueden deducir inmediatamente de aquellas válidas en primera aproximación (es decir, hasta tanto se considere solamente un corto arco de la trayectoria de *G*, y además se pueda considerar tal arco como rectilíneo).

Toda la dificultad de la cuestión está en que la parte de las fuerzas actuantes sobre el proyectil debida a la resistencia del aire, depende del ángulo que la tangente a la trayectoria forma con el eje del proyectil. Por esta razón todos los

autores estiman necesario introducir, además de un triedro trirectángulo $\xi\eta\zeta$ ⁽¹⁾ fijo en el espacio, otros dos triedros (dextrogiros) XYZ y xyz que tienen el mismo origen (por ej. en la posición inicial del baricentro G del proyectil). El eje Z (móvil) se supone en cada instante paralelo a la tangente a la trayectoria del baricentro G dirigida en el sentido del movimiento. El eje z (también móvil con continuidad) se supone en cada instante paralelo al eje del proyectil; su sentido se puede elegir, en los casos prácticos, de manera tal que por lo menos en el instante inicial el ángulo zZ sea muy pequeño (en las exposiciones elementales clásicas este ángulo se supone inicialmente nulo). Estas condiciones no bastan para fijar completamente ni el triedro xyz ni el XYZ . La elección del primer triedro no tiene mayor importancia: todos los autores están de acuerdo en elegir los tres ejes principales de inercia 1, 2, 3 del proyectil de manera que el 3 sea el eje de rotación y en suponer que en todo instante los ejes xyz sean paralelos respectivamente a los ejes 1, 2, 3. Más importante es la ambigüedad de elección para el triedro XYZ . Si la trayectoria es plana, todos los autores están de acuerdo en elegir un eje (para nosotros el eje Y) paralelo a la normal de la trayectoria; nosotros supondremos además que el sentido coincida con el de la proyección sobre dicha normal de las fuerzas actuantes sobre el proyectil (que prácticamente coincide con el sentido de la proyección sobre dicha normal del peso del proyectil, es decir, con el sentido de la vertical dirigida hacia abajo). Pero, si la trayectoria del proyectil no es prácticamente plana, entonces se podría sustituir el triedro XYZ determinado por las precedentes convenciones por otro triedro $X'Y'Z$ tal que el plano ZY' sea paralelo al eje z , es decir, al eje del proyectil (convención que permitiría simplificar un poco las componentes de las fuerzas y de los momentos debidos a la resistencia del

(1). Supondremos que todos los triedros siguientes sean *dextrogiros*, es decir, congruentes con un triedro cuyo eje ζ (Z, z) sea la vertical dirigida hacia lo alto, el eje ξ (X, x) dirigido hacia el Este; la tercera arista dirigida hacia el Norte. El sentido positivo de las rotaciones respecto una recta orientada r será aquél en el cual el movimiento que lleva la vertical dirigida hacia lo alto sobre r , transforma el sentido de rotación Este-Norte-Oeste-Sud respecto a tal vertical. Usando triedros *levogiros* debería cambiar el sentido según el cual una rotación se considera como positiva.

aire); o bien se podría, como en la memoria (M) citada, sustituir XYZ por otro triedro $X''Y''Z$ tal que uno de los ejes X'', Y'' fuese horizontal, etc. La primera elección del triedro XYZ parece la más simple desde el punto de vista geométrico y cinemático; pero su principal importancia depende del hecho que ella coincide con la usual en el caso de una trayectoria sensiblemente plana. En este caso el plano de la trayectoria es vertical, y por tanto el eje X horizontal; de aquí que en este caso el triedro XYZ coincida con el $X''Y''Z$ de (M) (si se supone OX'' horizontal). Esto explica la elección del triedro hecha en la memoria (M), puesto que también el triedro $X''Y''Z$ se reduce al usual en el caso de una trayectoria plana. Nótese bien que los nombres que hemos dado a los ejes no son de uso universal: algunos llaman eje X a la paralela a la tangente a la trayectoria de G . En cambio nosotros la hemos llamado eje Z , pues usualmente, en la consideración habitual de los ángulos de Euler, se da al eje z el papel preponderante.

Para nuestro triedro trirectángulo XYZ es fácil calcular la velocidad angular: sea t el tiempo, s el arco de la trayectoria del baricentro G medido en el sentido en que crece con el tiempo; sea $v = \dot{s} > 0$ (en nuestra hipótesis) la velocidad de G ⁽²⁾.

Las componentes $\bar{\Omega}_1, \bar{\Omega}_2, \bar{\Omega}_3$ sobre los ejes móviles X, Y, Z de la velocidad angular Ω del triedro XYZ serán $-\frac{v}{R}$, 0, $\frac{v}{T}$ si $\frac{1}{R}, \frac{1}{T}$ son la curvatura y torsión de la trayectoria de G ⁽³⁾.

A raíz del modo como hemos elegido la dirección del eje Y la curvatura $\frac{1}{R}$ es ≥ 0 , puesto que la componente de las fuerzas externas sobre la normal Y , que vale $m\frac{v^2}{R}$ (m es la masa del proyectil), es positiva por hipótesis. La curvatura $\frac{1}{R}$ podría ser nula si la trayectoria fuera rectilínea (lo cual única-

⁽²⁾ Como es costumbre en mecánica, indicamos con un punto en la parte superior la derivada respecto el tiempo.

⁽³⁾ En el Cap. I de las "*Leçons sur la théorie des surfaces*", DARBOUX demuestra que estas componentes son $-\frac{1}{T}, 0, \frac{1}{R}$ suponiendo $v = 1$. El cambio de R, T y la discrepancia de signo dependen del hecho que en el texto se ha invertido el papel de los ejes X, Z con respecto al tratado de Darboux.

mente puede ser rigurosamente exacto cuando el baricentro del proyectil se mueve sobre la vertical). Pero en este caso nuestra determinación del eje Y pierde todo significado y entonces se podría suponer, sin más, que el triedro XYZ fuese fijo en el espacio y también, si se quiere, coincidente con el triedro $\xi\eta\zeta$. La suposición de que el triedro XYZ es fijo en el espacio es una aproximación a menudo usada en balística exterior y en tal aproximación se estudia cómo varían los ángulos de Euler de la terna $x y z$ móvil respecto de dichos ejes XYZ considerados como fijos. El problema es, pues, el siguiente: ¿Cómo deben modificarse las ecuaciones obtenidas en esta primera aproximación para obtener las válidas en el caso general? La respuesta es simple e inmediata. Se conservan las ecuaciones clásicas para el movimiento del baricentro y las conocidas ecuaciones de Euler para las componentes sobre los ejes $x y z$ de la velocidad angular ω del proyectil entorno del baricentro.

Se introducen como de ordinario los ángulos de Euler del triedro móvil $x y z$ respecto del triedro también móvil XYZ . Bastará modificar las ecuaciones puramente cinemáticas que en la precedente aproximación daban las derivadas de los ángulos de Euler como funciones de la velocidad angular ω , sustituyendo dicha velocidad angular ω por la velocidad relativa $\omega - \Omega$ del triedro $x y z$ respecto el triedro XYZ . Naturalmente que, si en vez del triedro XYZ considerásemos el triedro $X'Y'Z$ o el $X''Y''Z$ u otro análogo, deberíamos sustituir ω por $\omega - \Omega'$, $\omega - \Omega''$, ..., donde Ω' , Ω'' son las velocidades angulares de los triedros considerados.

Empecemos con el triedro XYZ . Sean, como de costumbre ϑ (nutación), ψ (precesión), φ (ángulo de rotación propia) los ángulos eulerianos del triedro $x y z$ respecto del XYZ . Las coordenadas $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ de la rotación del primer triedro respecto el segundo se expresan, como es conocido⁽⁴⁾, por

(4) Ver por ej. FRANK - MISES - *Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik*, II Teil, Frank 1ª edic. 1927, p. 94; 2ª edic. p. 157. DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. I, libro I, cap. I, p. 6.

Para comodidad del lector los cálculos que siguen han sido desarrollados por la redacción un poco más que en el manuscrito original.

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta} \cos \varphi \\ \dot{\omega}_2 &= \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi - \dot{\vartheta} \sin \varphi \\ \dot{\omega}_3 &= \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}\end{aligned}$$

de donde se obtiene inmediatamente

$$\begin{aligned}\dot{\vartheta} &= \omega_1 \cos \varphi - \omega_2 \sin \varphi \\ \dot{\psi} \sin \vartheta &= \omega_1 \sin \varphi + \omega_2 \cos \varphi \\ \dot{\varphi} &= \omega_3 - \dot{\psi} \cos \vartheta\end{aligned}$$

Efectuando las sustituciones indicadas obtenemos pues

$$\begin{aligned}\dot{\vartheta} &= (\omega_1 - \Omega_1) \cos \varphi - (\omega_2 - \Omega_2) \sin \varphi \\ \dot{\psi} \sin \vartheta &= (\omega_1 - \Omega_1) \sin \varphi + (\omega_2 - \Omega_2) \cos \varphi \\ \dot{\varphi} &= (\omega_3 - \Omega_3) - \dot{\psi} \cos \vartheta\end{aligned}$$

Llamando ahora $\bar{\Omega}_1, \bar{\Omega}_2, \bar{\Omega}_3$ a las componentes de Ω sobre los ejes XYZ , las mismas fórmulas de Euler dan

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \bar{\Omega}_1 (\cos \psi \cos \varphi - \cos \vartheta \sin \psi \sin \varphi) + \\ &\quad + \bar{\Omega}_2 (\sin \psi \cos \varphi + \cos \vartheta \cos \psi \sin \varphi) + \\ &\quad + \bar{\Omega}_3 \sin \varphi \sin \vartheta \\ \Omega_2 &= \bar{\Omega}_1 (-\cos \psi \sin \varphi - \cos \vartheta \sin \psi \cos \varphi) + \\ &\quad + \bar{\Omega}_2 (-\sin \psi \sin \varphi + \cos \vartheta \cos \psi \cos \varphi) + \\ &\quad + \bar{\Omega}_3 \sin \vartheta \cos \varphi \\ \Omega_3 &= \bar{\Omega}_1 \sin \vartheta \sin \psi - \bar{\Omega}_2 \sin \vartheta \cos \psi + \bar{\Omega}_3 \cos \vartheta.\end{aligned}$$

Hemos visto que

$$\bar{\Omega}_1 = -\frac{v}{R}, \quad \bar{\Omega}_2 = 0, \quad \bar{\Omega}_3 = \frac{v}{T}$$

y por tanto, sustituyendo en las fórmulas anteriores se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{\vartheta} &= \omega_1 \cos \varphi - \omega_2 \sin \varphi - \bar{\Omega}_1 \cos \psi \\ \dot{\psi} \sin \vartheta &= \omega_1 \sin \varphi + \omega_2 \cos \varphi + \bar{\Omega}_1 \sin \psi \cos \vartheta - \bar{\Omega}_3 \sin \vartheta \\ \dot{\varphi} &= \omega_3 - \dot{\psi} \cos \vartheta - \bar{\Omega}_1 \sin \psi \sin \vartheta - \bar{\Omega}_3 \cos \vartheta.\end{aligned}$$

Veamos por ejemplo de encontrar las ecuaciones de Moulton válidas para el caso de una trayectoria plana; bastará suponer $\bar{\Omega}_3 = \frac{1}{T} = 0$. Se puede, naturalmente, suponer que el plano fijo π de la trayectoria coincida con el plano ZY (esto sucede ciertamente si, como habíamos supuesto, el origen de nuestro triedro es la posición inicial del baricentro G). Será entonces espontáneo suponer que por plano $\zeta\eta$ se haya elegido el mismo plano π y, por ej., por eje ζ la proyección horizontal del proyectil. Si se suponen los ejes ξ, X coincidentes también en sentido, el eje η será la vertical dirigida hacia abajo (pues el eje η tiene la dirección que toma Y en los instantes en que Z y ζ coinciden, es decir, en los instantes en que la tangente a la trayectoria de G es horizontal). Si τ es, como de costumbre, el ángulo que la tangente a la trayectoria forma con el eje Z , es bien sabido que τ disminuye con el tiempo, es decir, $\frac{d\tau}{dt} < 0$. Puesto que $\frac{1}{R}$ y $v = \frac{d\varepsilon}{dt}$ son positivos, se tendrá que $\frac{d\tau}{ds} = -\frac{1}{R}$ y por tanto $\bar{\Omega}_1 = -\frac{v}{R} = v \frac{d\tau}{ds} = \frac{d\tau}{dt} < 0$. Si, para obtener ángulos crecientes con el tiempo, ponemos $\alpha = -\tau + \text{cte.}$, las ecuaciones precedentes, después de poner $\bar{\Omega}_1 = -\frac{d\alpha}{dt}$, $\bar{\Omega}_3 = 0$, coinciden completamente con las ecuaciones de Moulton.

Es superfluo observar que los métodos precedentes se pueden aplicar al movimiento de un cuerpo rígido cualquiera.

Podemos también ver cómo se deben modificar las ecuaciones precedentes cuando se sustituye el triedro XYZ por otro cualquiera X^0Y^0Z que tenga común con él el eje Z (por ej. los triedros $X'Y'Z$, $X''Y''Z$ anteriormente definidos). Los precedentes ángulos de Euler deben, naturalmente, sustituirse por los ángulos de Euler del triedro xyz respecto al triedro X^0Y^0Z . El problema es de nuevo elemental. En las fórmulas anteriores deberemos sustituir la velocidad angular Ω del triedro XYZ por la velocidad angular Ω^0 del nuevo triedro. Sea ε el ángulo $XX^0 = YY^0$ medido en el sentido positivo de rotación respecto al eje Z (con esta convención los ángulos XY y X^0Y^0 son iguales al ángulo recto positivo). Entonces la diferencia $\Delta = \Omega^0 - \Omega$ es evidentemente un vector paralelo al eje Z y de medida ε (es decir, sus componentes sobre los ejes XYZ

o sobre los $X^0 Y^0 Z$ son 0, 0, $\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt}$). El problema de encontrar las componentes de $\Omega^0 = \Omega + \Lambda$ no presenta con esto ninguna dificultad y por tanto será inmediato explicitar las ecuaciones análogas a las precedentes en este caso más general.

Para dar una aplicación concreta de estas consideraciones generales supongamos haber elegido por triedro $X^0 Y^0 Z$ precisamente el triedro $X' Y' Z$ el cual, por definición, es tal que el plano $Z Y'$ es idéntico al plano $Z z$. Queda todavía arbitrario el sentido positivo del eje Y' ; nosotros lo fijaremos suponiendo que la rotación de un ángulo recto positivo que lleva Y' sobre $Z' = Z$ devenga del mismo sentido que la rotación que lleva el eje Z sobre el eje z a través del ángulo cóncavo ϑ (se observa que ϑ es la nutación, la cual se supone, como siempre, cóncava, es decir, con $0 < \vartheta < \pi$). Puesto que el sentido de la rotación que lleva Y' sobre Z' a través de un ángulo recto positivo es el sentido positivo de la rotación alrededor del eje X' (recuérdese que $X' Y' Z$ es, como de costumbre, dextrogiro), se sigue que el nuevo eje X' coincidirá (también en sentido) con la línea de los nodos del triedro $x y z$ respecto del triedro $X Y Z$. Además tendremos como medida de los varios ángulos $z Y' = z Z$

$+ Z Y' = -\vartheta - \frac{\pi}{2}$. Los cosenos directores (respecto el triedro $X Y Z$) del eje Y' serán $\cos \psi, \sin \psi, 0$; y los del eje Y serán $-\sin \psi, \cos \psi, 0$. Por lo tanto, el vector $\Omega' - \Omega$ (diferencia entre las velocidades angulares de $X' Y' Z$ y $X Y Z$) será el vector cuyas componentes sobre los ejes $X Y Z$ y $X' Y' Z$ son 0, 0, ψ ; más simplemente este caso particular se deduce del caso general antes considerado poniendo $\varepsilon = \psi$. ¿Cuáles son los ángulos de Euler del triedro $x y z$ respecto del $X' Y' Z$? No habiéndose modificado el eje Z es obvio que la nutación ϑ y el ángulo de rotación propia φ tienen los mismos valores válidos para el triedro $X Y Z$; por el contrario, coincidiendo el eje X' con la línea de los nodos, el nuevo valor de la precesión ψ será cero. Observemos ahora que las ecuaciones precedentes para $\dot{\vartheta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}$ son equivalentes a

$$\begin{aligned}\dot{\vartheta} &= (\bar{\omega}_1 - \bar{\Omega}_1) \cos \psi + (\bar{\omega}_2 - \bar{\Omega}_2) \sin \psi \\ \dot{\varphi} \sin \vartheta &= (\bar{\omega}_1 - \bar{\Omega}_1) \sin \psi - (\bar{\omega}_2 - \bar{\Omega}_2) \cos \psi \\ \dot{\psi} &= \bar{\omega}_3 - \bar{\Omega}_3 - \dot{\varphi} \cos \vartheta.\end{aligned}$$

Obtendremos las ecuaciones correspondientes al nuevo triedro dejando tal como están φ y ϑ , escribiendo ψ en lugar de ψ y substituyendo las $\omega_i - \Omega_i$ por las componentes (que indicaremos con A, B, C) del vector $\omega - \Omega^0 = \omega - \Omega' = \omega - \Omega - \Lambda$ sobre los ejes $X'Y'Z$. Las ecuaciones devienen

$$\dot{\vartheta} = A, \quad \dot{\varphi} = -B, \quad \dot{\psi} = C - \dot{\varphi} \cos \vartheta.$$

Recordando los valores de los cosenos directores de X', Y' se encuentran inmediatamente A, B . De lo dicho anteriormente (es decir, que en este caso es $\varepsilon = \psi$) sigue que $C = \bar{\omega}_3 - \bar{\Omega}_3 - \dot{\psi}$ y se reconoce de esta manera que las nuevas ecuaciones son equivalentes a las precedentes como era de prever⁽⁵⁾.

Guido Fubini

(5). Supongamos que por triedro $X^0 Y^0 Z$ se hubiera elegido el triedro $X'' Y'' Z$ ya considerado, por ej. con el eje X'' horizontal. Se puede repetir un cálculo análogo al anterior con tal de conocer los nuevos valores de ε y $\dot{\varepsilon}$. Elijamos el triedro fijo $\xi \eta \zeta$ con el eje ζ vertical y sean α_i ($i = 1, 2, 3$) los correspondientes cosenos directores de X , β_i aquellos de Y , γ_i aquellos de Z . Los cosenos directores α''_i de X'' serán $\alpha_i \cos \varepsilon + \beta_i \sin \varepsilon$ y los de Y'' serán $\beta''_i = -\alpha_i \sin \varepsilon + \beta_i \cos \varepsilon$. Siendo X'' horizontal, será $\alpha''_3 = 0$, o sea $\alpha_3 \cos \varepsilon + \beta_3 \sin \varepsilon = 0$. Derivando se obtiene, por las fórmulas de Frenet,

$$(\Omega_3 + \dot{\varepsilon})(-\alpha_3 \sin \varepsilon + \beta_3 \cos \varepsilon) + \Omega_1 \gamma_3 \sin \varepsilon = 0$$

o bien

$$(\Omega_3 + \dot{\varepsilon})\beta''_3 + \Omega_1 \gamma_3 \sin \varepsilon = 0.$$

Estas ecuaciones determinan ε y $\dot{\varepsilon}$ como funciones de $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$, es decir, de los cosenos de los ángulos que la vertical ζ forma con los ejes XYZ .

DEFINICION Y CONDICIONES DE EXISTENCIA DE LA TANGENTE Y EL CIRCULO OSCULADOR EN UN PUNTO DE UNA CURVA

El argumento puede considerarse trivial y está tratado en todos los cursos de cálculo infinitesimal. Sin embargo creo que algunas puntualizaciones que vamos a tratar en este artículo no carecerán de interés.

1. — Para delimitar exactamente el campo de nuestros razonamientos consideraremos solo *curvas planas* entendiendo, que, por definición, *una tal curva sea representable, con respecto a un conveniente sistema de coordenadas cartesianas ortogonales x, y , en la forma*

$$y = f(x) \tag{1}$$

donde $f(x)$ es función continua uniforme para los valores de x en un cierto entorno de un dado $x = x_0$. Por medio eventualmente de una traslación de coordenadas, podemos siempre suponer (y así lo haremos)

$$x_0 = 0, \quad f(0) = 0. \tag{2}$$

Llamemos desde ahora O a este punto $(0, 0)$.

TANGENTE

2. — Recordemos ahora algo acerca de la noción de la tangente a la curva (1) en el punto O .

Podemos dar de esta tangente dos definiciones distintas:

I. — Sea $A = (xy)$ otro punto de la curva. Consideremos la recta OA ; decimos que *la curva (1) tiene tangente en O si, la recta OA tiende a una recta determinada cuando $A \rightarrow O$, o, lo que es igual, cuando $x \rightarrow 0$* . La tangente será esta recta límite.

II. — Sean $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ dos puntos de la curva. Consideremos la recta AB ; decimos que la curva (1) tiene tangente en O si la recta AB tiende a una recta determinada cuando A y B tienden independiente a O (es decir, x_1, x_2 tienden a 0 independientemente). La tangente en O será esta recta límite.

Analíticamente, las dos definiciones exigen, respectivamente:

I — Existe

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0);$$

II — Existe

$$\lim_{x_1, x_2 \rightarrow 0} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2};$$

siendo estos límites respectivamente los coeficientes directores de la tangente.

Con respecto a la definición I es necesaria una observación especial para el caso de que fuera $f'(0) = \pm \infty$; desde el punto de vista simplemente geométrico, existe en este caso una recta límite determinada también cuando el signo del límite quedara ambiguo. Nosotros, para las aplicaciones que siguen, vamos a suponer que este signo sea determinado.

En el caso de la definición II ésta condición resulta implícitamente incluida. En efecto, si para valores de x_1, x_2 tan próximos a 0 como se quiera la razón $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ tuviera signos opuestos, el valor límite de esta razón, dado que exista, tendría que ser 0 ; porque, supongamos que $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}, \frac{f(x_3) - f(x_4)}{x_3 - x_4}$ tengan signos opuestos y sean $x_1 > x_2 > x_3 > x_4$; consideremos los valores de las funciones

$$\frac{f(x_1) - f(\xi)}{x_1 - \xi}, \quad \frac{f(\eta) - f(x_4)}{\eta - x_4}$$

cuando ξ varía desde x_2 a x_4 y cuando η varía desde x_1 a x_3 , respectivamente; se pasa de esta manera con continuidad de la primera a la segunda razón (sin encontrar nunca una en la

cual el denominador sea 0); como las dos razones extremas tienen por hipótesis signos contrarios, se encontrará una que es 0. Y esto para valores de la variable tan próximos a 0 como se quiera.

3. — Sentado esto, es evidente que *si se realiza la segunda definición de la tangente, se realiza también la primera y las dos definiciones resultan equivalentes.*

En efecto, se tiene

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{f(x_1)}{x_1} \frac{1 - \frac{f(x_2)}{f(x_1)}}{1 - \frac{x_2}{x_1}}.$$

Fijado arbitrariamente x_1 , se puede elegir $x_2 \neq 0$ y tal que $\left| \frac{x_2}{x_1} \right|$ y $\left| \frac{f(x_2)}{f(x_1)} \right|$ sean tan pequeños como se quiera; luego el primer miembro resultará tan próximo como se quiera a $\frac{f(x_1)}{x_1}$; resulta que, si dicho primer miembro tiene límite determinado cuando x_1 y x_2 tienden independientemente a 0, al mismo límite deberá tender $f(x) : x$.

4. — *Si, alrededor de $x=0$, la función $f(x)$ posee derivada continua, la segunda definición de la tangente se aplica y es equivalente a la primera.*

En efecto, a raíz de la existencia de la derivada alrededor de $x=0$

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(\xi),$$

donde ξ es un valor comprendido entre x_1 y x_2 ; en virtud de la continuidad de la derivada

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} f'(\xi) = f'(0);$$

por tanto

$$\lim_{x_1, x_2 \rightarrow 0} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(0).$$

La proposición se invierte en el sentido que, *si tiene aplicación la definición II y la función tiene derivada alrededor de $x=0$, ésta derivada es continua en el punto 0.*

En efecto, elegida arbitrariamente una sucesión de puntos de la curva

$$A_1, A_2, \dots, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} A_i = O$$

cuyas abscisas llamaremos $x_1^{(i)}$, se puede siempre elegir otra sucesión de puntos respectivamente próximos a ellos

$$B_1, B_2, \dots,$$

cuyas abscisas llamaremos $x_2^{(i)}$, tales que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} |x_1^{(i)} - x_2^{(i)}| = 0,$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x_1^{(i)}) - f(x_2^{(i)})}{x_1^{(i)} - x_2^{(i)}} - f'(x_1^{(i)}) \right| = 0;$$

por lo tanto si la sucesión de las razones

$$\frac{f(x_1^{(i)}) - f(x_2^{(i)})}{x_1^{(i)} - x_2^{(i)}}$$

tiende al límite determinado $f'(0)$, lo mismo debe realizarse para la sucesión de las derivadas $f'(x_1^{(i)})$.

Pero *existen casos en los cuales tiene aplicación la definición II, sin que la función $f(x)$ tenga derivada en puntos tan próximos como se quiera a 0 (pero $\neq 0$).*

5. — He aquí unos ejemplos para los diferentes casos:

1º. — Las curvas

$$y = x^n \quad (n \geq 0)$$

$$y = x^n \sin \frac{1}{x} \quad (n > 2)$$

realizan las definiciones I y II, siendo los segundos miembros derivables alrededor de $x = 0$, con derivadas continuas.

2º. — La curva

$$y = x^2 \sin \frac{1}{x} = f(x)$$

tiene tangente según la definición I, en el punto $O=(0,0)$, siendo

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (f(x) - f(0)) = \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0.$$

Para $x \neq 0$ existe también la derivada

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x};$$

pero esta función es discontinua para $x=0$; se sigue que no se aplica la definición II.

3º. — La curva

$$y = x^3 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{1}{x}} = f(x)$$

da todavía evidentemente $f'(0)=0$, es decir que existe la tangente en O según la definición I y es el eje x .

Para calcular la $f'(x)$ hay que observar que la regla de derivación del producto puede aplicarse sólo cuando $x \neq \frac{1}{n\pi}$ ($n=1, 2, \dots$) siendo que en los puntos $x = \frac{1}{n\pi}$ el último factor no es derivable. Se tiene, para dichos puntos no excepcionales

$$\begin{aligned} f'(x) = & 3x^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{1}{x}} - 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{1}{x}} \\ & + x \cos \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{1}{x}} \cos \frac{1}{x}; \end{aligned}$$

esta expresión es evidentemente discontinua en los puntos $x = 1:n\pi$; pero

$$|f'(x)| < 3x^2 + 3x = 3x(x+1).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0.$$

Para $x = \frac{1}{n\pi}$ la derivada existe todavía y es siempre

$$f'(x) = 0$$

como lo muestra el cálculo siguiente que nos será útil también en lo sucesivo:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{n\pi}\right) &= 0 \\ f'\left(\frac{1}{n\pi}\right) &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{n\pi}} \frac{f(x)}{x - \frac{1}{n\pi}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{n\pi}} x^3 \operatorname{sen} \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{1}{x} \frac{(-1)^{n-1} \operatorname{sen} \left(n\pi - \frac{1}{x}\right)}{x - \frac{1}{n\pi}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{n\pi}} n\pi x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{1}{n\pi} \times \lim_{x \rightarrow \frac{1}{n\pi}} \frac{(-1)^{n-1} \operatorname{sen} \left(n\pi - \frac{1}{x}\right)}{n\pi - \frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

El segundo límite vale ± 1 , mientras el primero es 0.

Resulta de esto que $f'(x)$ es continua tendiendo a 0 para $x \rightarrow 0$; pero es discontinua en todos los puntos de la forma $x = \frac{1}{n\pi}$, tan próximos como se quiera a 0. De lo dicho anteriormente sigue que para ninguno de estos puntos se aplica la definición II, pero sí para el punto 0. En efecto, por el teorema del valor medio se tiene

$$\left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right| < 3\xi(\xi + 1) \quad (\xi = \max(x_1, x_2));$$

luego

$$\lim_{x_1, x_2 \rightarrow 0} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = 0.$$

4º. — La curva

$$y = x^3 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \operatorname{sen} \log \operatorname{sen} \frac{1}{x} = f(x)$$

nos da todavía $f'(0) = 0$ y, para $x \neq \frac{1}{n\pi}$,

$$f'(x) = 3x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \operatorname{sen} \log \operatorname{sen} \frac{1}{x} \\ - x \cos \frac{1}{x} \left(\operatorname{sen} \log \operatorname{sen} \frac{1}{x} + \cos \log \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right),$$

pero, repitiendo un cálculo análogo al anterior, se ve que la derivada $f'(\frac{1}{n\pi})$, si existiera, sería expresada por

$$\lim n \pi x^2 \operatorname{sen} \log \operatorname{sen} \frac{1}{x} \cdot \lim \frac{(-1)^{n-1} \operatorname{sen} (n\pi - \frac{1}{x})}{n\pi - \frac{1}{x}};$$

donde los límites se entienden para $1/x \rightarrow n\pi$; pero mientras el segundo factor tiene límite determinado $= (-1)^{n-1}$, el primer factor oscila entre los límites máximo y mínimo $\pm \frac{1}{n\pi}$; en los puntos $x = \frac{1}{n\pi}$ no existe pues la derivada, sino números derivados superior e inferior respectivamente iguales a $\frac{1}{n\pi}$ y $-\frac{1}{n\pi}$. En los otros puntos, la expresión encontrada para $f'(x)$ nos da fácilmente $|f'(x)| \leq \sqrt{2}x + 3x^2$ (por ser los senos y cosenos, en valor absoluto ≤ 1 y la suma algebraica de un seno y un coseno de un mismo ángulo $\leq \sqrt{2}$). Una fácil generalización del teorema del valor medio ⁽¹⁾ nos permite afirmar que la razón incremental $[f(x_1) - f(x_2)] / (x_1 - x_2)$ está siempre comprendida entre el máximo y el mínimo valor de los números derivados en el intervalo $x_1 - x_2$; encontramos luego también en éste caso la misma limitación anterior para el mod. de la razón incremental; concluimos que se aplica en O la definición II sin existir la derivada alrededor del punto O ⁽²⁾.

⁽¹⁾ G. FUBINI, *La ley de la media para funciones no derivables*. B. LEVI, *Sobre un teorema de Weierstrass, el teorema de Rolle y el anterior teorema de Fubini*. Publicaciones del Instituto de Matemáticas, Fasc. 2, Vol. II-1940. Rosario.

⁽²⁾ No sería difícil mostrar esta posibilidad por consideraciones gráficas admitiendo como curvas poligonales de infinitos lados, curvas no expresables analíticamente si no con artificios complejos; nos pareció interesante hacer ver como la cosa podía resultar con expresiones analíticas elementales y por los comunes teoremas del cálculo.

Resumiendo: *condición necesaria y suficiente para que pueda aplicarse la definición I de la tangente es que en el punto la función $f(x)$ tenga derivada. Si es aplicable la definición II lo es también la I, pero no viceversa.*

Si la función $f(x)$ tiene derivada en todos los puntos de un entorno del punto considerado, condición necesaria y suficiente para que pueda aplicarse la definición II es que esta derivada sea continua en dicho punto (pudiendo ser discontinua en cualquier intervalo que lo contenga).

Puede ser aplicable la definición II no siendo derivable $f(x)$ en ningún intervalo que contenga al punto.

CÍRCULO OSCULADOR

6. — Pasemos al problema del círculo osculador.

Por analogía con lo que dijimos para la tangente, podemos considerar tres definiciones del círculo osculador a la curva (1) en el punto O . Las llamaremos, por comodidad, III, IV, V, continuando la numeración de las definiciones de la tangente; luego el círculo osculador en O :

III. — Es el límite de los círculos que pasan por O , teniendo en O la misma tangente que la curva y pasan por otro punto A de ésta, que se hace tender a O .

IV. — Es el límite de los círculos que pasan por O y por dos puntos A, B de la curva que tienden independientemente a O .

V. — Es el límite de los círculos determinados por tres puntos A, B, C de la curva cuando estos tienden independientemente a O .

Diremos existir el círculo osculador cuando existe uno de estos límites con radio $\neq 0$.

Para poder aplicar la definición III debe necesariamente suponerse que exista la tangente en O a la curva al menos según la definición I; por lo tanto debe existir $f'(0)$.

Para que pueda aplicarse una de las definiciones IV o V es necesario que la curva tenga tangente según la definición II. En efecto, mientras A y B tienden a O , la recta AB , considerada como cuerda del círculo (OAB o ABC) tiende a la tangente en O al círculo límite; por lo tanto tiene límite determinado. Concluimos que:

Cuando existe el círculo osculador según una cualquiera de las tres definiciones existe la derivada $f'(o)$; la curva tiene tangente en O que es también tangente al círculo osculador.

Agreguemos a esa observación esta otra: que el sistema de los círculos considerados en la definición IV puede considerarse contenido dentro del sistema considerado en V, en cuanto entre los modos de tender A, B, C a O hay aquellos en los cuales C llega a O más rápidamente (o antes) que A y B ; por lo tanto *cuando es posible aplicar la definición V, se aplica también IV y las dos definiciones resultan equivalentes.*

Una observación anterior muestra ahora que, si existe el círculo osculador según la definición IV y entre los círculos considerados en esta definición se consideran aquellos para los cuales B tiende a O antes que A , vienen a comprenderse en el sistema los círculos de la definición III, en cuanto la recta OB tiende a la tangente a la curva; concluimos que *cada una de las definiciones III, IV pueden considerarse como casos particulares respectivamente de IV y V y el círculo osculador en cuanto exista, es unívocamente definido.*

Notamos, para terminar con estas observaciones preliminares, que la existencia de la tangente según I o II es la condición necesaria y suficiente para que se pueda afirmar que *cualquier círculo límite de una sucesión parcial extraída de los sistemas considerados respectivamente en IV, V con la condición de hacer tender los puntos A, B, C a O según leyes determinadas, si tiene radio $\neq 0$ tiene en O la misma tangente que la curva.*

En efecto, condición necesaria y suficiente para que, si una sucesión de círculos de la forma OA_iB_i tiene por límite un círculo de radio $\neq 0$, este círculo sea tangente en O a la curva es que las rectas OA_i tiendan a esa tangente. Igualmente considerando sucesiones de círculos de la forma $A_iB_iC_i$, si ellos tienden a un círculo límite de radio $\neq 0$, su tangente en O será ciertamente la tangente a la curva si a esta tangente tienden todas las rectas A_iB_i .

7. — Analicemos ahora más particularmente la definición III. Supongamos antes de todo que

$$|f'(o)| < \infty;$$

la ecuación de un círculo tangente en el origen a la recta $y=f'(0)x$, y de radio r , es

$$x^2 + y^2 \pm 2r(xf'(0) - y) \cos \vartheta = 0,$$

donde

$$\vartheta = \arctan f'(0).$$

Suponiendo que el punto (xy) pertenezca a la curva, será

$$y = f(x) = x(f'(0) + \varepsilon),$$

donde ε es infinitésimo; sustituyendo se obtiene

$$2r = \pm \frac{x^2[1 + (f'(0) + \varepsilon)^2]}{x\varepsilon \cos \vartheta}. \quad (2)$$

Para que exista un límite determinado $\mp r$ o para r cuando $x \rightarrow 0$ es necesario y suficiente que exista y sea finito ó 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - xf'(0)}{x^2}.$$

Es fácil de ver que este límite puede existir sin realizarse mayores condiciones expresables en términos de derivadas; si en efecto se indica por $g(x)$ una función continua no derivable, para realizar las condiciones anteriores hasta poner

$$f(x) = x^2 g(x),$$

obteniéndose

$$\begin{aligned} f'(0) &= (xg(x))_{x=0} = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - xf'(0)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0). \end{aligned}$$

Fuera del punto 0, $f(x)$ no es derivable y por lo tanto no es posible hablar de la derivada segunda tampoco en el punto 0; existe sin embargo, por lo dicho, el círculo osculador según la definición III.

Pero es fácil dar también ejemplos en que las condiciones para la existencia de ese círculo osculador se realizan, siendo $f(x)$ derivable y con derivada continua en todo intervalo que contenga $x=0$, pero sin derivada segunda en el punto 0; así poniendo

$$f(x) = x^3 \operatorname{sen} \frac{1}{x},$$

tenemos

$$f'(0) = 0, \quad f'(x) = 3x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - xf'(0)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0;$$

pero para calcular $f''(0)$ tendríamos que considerar

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(3x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right),$$

el cual no existe.

Pero si se admite existir $f''(0)$, la regla de l'Hospital nos da

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - xf'(0)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - xf''(0)}{2x} = \frac{1}{2} f''(0),$$

y la fórmula (2) se transforma en la fórmula clásica

$$R = \lim r = \pm \frac{(1 + f'(0)^2)^{3/2}}{f''(0)}.$$

Concluimos que para que exista el círculo osculador según la definición III debe $f(x)$ ser derivable en el punto 0, pero no es necesario que exista tampoco la derivada alrededor del punto 0, ni es necesario, de existir esta derivada, que ella sea continua o derivable; pero es suficiente que estas condiciones se realicen, es decir que exista en 0 la derivada segunda finita para poder afirmar que dicho círculo osculador existe.

8. — El caso de ser $f'(0) = \pm \infty$ debe comprenderse entre los casos en que la existencia del círculo osculador no está relacionada con otras propiedades de las derivadas; en efecto, razonando como en el n.º. anterior, se tendrá que escribir, en lugar de la (2),

$$2r = \pm \frac{x^2 + y^2}{x}$$

y, para la existencia del círculo osculador según la definición III, habrá que exigir la existencia de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + f(x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)^2}{x} \neq 0.$$

Para eso es necesario y suficiente que

$$f(x) = \pm \sqrt{|x|} \cdot g(x) \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \neq 0,$$

y esta condición no es mayormente interpretable en términos de derivadas.

9. — Para estudiar las definiciones IV, V se acostumbra ordinariamente en los tratados a escribir un sistema de ecuaciones que definen el centro del círculo que pasa por tres puntos de la curva y deducir un sistema de ecuaciones, límite de aquel, en cuanto los tres puntos tienden a O . Este procedimiento, en cuanto lleva a utilizar muy tempranamente hipótesis sobre las derivadas de $f(x)$, conduce a imponer condiciones más severas de lo efectivamente necesario.

Llamando respectivamente M, N, P a los determinantes que se definen suprimiendo respectivamente la primera, la segunda o la tercera columna en la matriz

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & x_1^2 + y_1^2 & 1 \\ x_2 & y_2 & x_2^2 + y_2^2 & 1 \\ x_3 & y_3 & x_3^2 + y_3^2 & 1 \end{vmatrix},$$

las coordenadas del centro del círculo que pasa por los puntos (x_1, y_1) (x_2, y_2) (x_3, y_3) están representadas por

$$X = \frac{-\frac{1}{2}M}{P} \quad Y = \frac{\frac{1}{2}N}{P} \quad (3)$$

Poniendo primero $x_3 = y_3 = 0$, estudiaremos la definición
IV. Desarrollando los cálculos se obtiene

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2} \frac{x_1^2 y_2 - x_2^2 y_1 + y_1 y_2 (y_1 - y_2)}{x_1 y_2 - x_2 y_1} \\ &= \frac{1}{2} \left[x_1 + \frac{(x_1 - x_2) x_2 y_1 + (y_1 - y_2) y_1 y_2}{x_1 y_2 - x_2 y_1} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[x_1 \left(1 - \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} \right) + \frac{\frac{y_1}{x_1} \left[1 - \left(\frac{y_2}{x_2} \right)^2 \right]}{\left(\frac{y_2}{x_2} - \frac{y_1}{x_1} \right) : (x_1 - x_2)} \right] \\ Y &= \frac{1}{2} \left[y_1 + x_1 \frac{y_2}{x_2} + \frac{1 - \left(\frac{y_2}{x_2} \right)^2}{\left(\frac{y_2}{x_2} - \frac{y_1}{x_1} \right) : (x_1 - x_2)} \right] \end{aligned}$$

En estas expresiones hay que sustituir a y_1 e y_2 respectivamente $f(x_1)$ y $f(x_2)$ y pasar al límite para $x_1 \rightarrow 0, x_2 \rightarrow 0$. En cuanto se ha supuesto existir $f'(0)$ y se ha supuesto $f(0) = 0$, si se supone además

$$|f'(0)| < \infty,$$

resulta

$$\lim X = \frac{1}{2} \frac{f'(0)[1 - f'(0)^2]}{\lim \frac{\frac{y_2}{x_2} - \frac{y_1}{x_1}}{x_1 - x_2}}$$

$$\lim Y = \frac{1}{2} \frac{1 - f(0)^2}{\lim \frac{\frac{y_2}{x_2} - \frac{y_1}{x_1}}{x_2 - x_1}}$$

y el problema se reduce a discutir la existencia del único límite que comparece en los denominadores. Si ponemos

$$f(x) = xg(x),$$

se trata pues de

$$\lim_{x_1, x_2 \rightarrow 0} \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2}$$

y se sabe (cfr. n.º. 4) que una *condición suficiente* para la existencia de este límite es que $g(x)$ tenga derivada en un entorno de $x=0$, continua en $x=0$. Se tiene

$$f'(x) = g(x) + xg'(x),$$

$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{g(x) - g(0)}{x} + g'(x) \right].$$

Por la hipótesis hecha sobre $g(x)$ este último límite existe y es $= 2g'(0)$.

Recíprocamente, basta suponer que *existe en el punto 0 la derivada segunda de $f(x)$ y la derivada primera de $g(x) = f(x):x$ para concluir que existe el círculo osculador según la definición IV.*

En el caso de ser $f'(0) = \pm \infty$ se reproduce necesariamente la excepción encontrada para la definición III de faltar condiciones expresables sencillamente por las derivadas de $f(x)$ y el problema se resuelve, en los casos particulares, cambiando la función $f(x)$ con una transformación de coordenadas.

10. — En el caso de la definición V la transformación de las fórmulas (4) resulta necesariamente un poco más complicada. Bastará aún en este caso considerar una sola de las (4), por ej. la segunda. Resulta

$$P = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$$

$$= \Delta \left[\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right] : (x_3 - x_2),$$

donde Δ representa al determinante de Vandermonde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).$$

$$N = \Delta + \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3^2 \end{vmatrix} = \Delta - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)(y_3 - y_2)P + (y_3 + y_1).$$

Luego

$$Y = \frac{1}{2} \left[\frac{1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}}{\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}} + y_3 + y_1 \right].$$

Si en lugar de y_1, y_2, y_3 se piensan sustituidos $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ y, admitiendo que $f(x)$ sea derivable en un entorno de $x=0$, se aplica el teorema del valor medio, se obtiene por tanto

$$Y = \frac{1}{2} \left[\frac{1 - f'(\xi_{12})f'(\xi_{23})}{\frac{f'(\xi_{13}) - f'(\xi_{12})}{x_3 - x_2}} + y_3 + y_1 \right],$$

donde $\xi_{12}, \xi_{13}, \xi_{23}$ son valores medios entre x_1 y x_2 , x_1 y x_3 , x_2 y x_3 .

Finalmente, admitiendo que $f'(x)$ sea continua y recordando que $f(0)=0$,

$$\lim Y = \frac{1}{2} \frac{1 - f'(0)^2}{\lim \frac{f'(\xi_{13}) - f'(\xi_{12})}{x_3 - x_2}}.$$

Para estudiar el límite escrito en el denominador, notamos que éste puede escribirse

$$\frac{f'(\xi_{13}) - f'(\xi_{12})}{\xi_{13} - \xi_{12}} \cdot \frac{\xi_{13} - \xi_{12}}{x_3 - x_2},$$

cuando x_1, x_2, x_3 , tienden a 0, lo mismo ocurre para ξ_{12}, ξ_{13} ; consideramos pues por separado el comportamiento de los dos factores. Por lo que respecta el primero podemos aplicar las observaciones de los párrafos 4, 5, donde sólo hay que cambiar f en f' . Si suponemos, en particular, que en un entorno de $x=0$, $f'(x)$ tenga derivada continua en el punto $x=0$, el primer factor tiende a dicha derivada $f''(0)$.

Supongamos además (lo que es siempre posible) que de los tres valores x_1, x_2, x_3 se hayan llamado x_2 y x_3 los extremos (siendo por tanto x_1 comprendido entre ellos); se tiene entonces claramente

$$0 \leq \frac{\xi_{13} - \xi_{12}}{x_3 - x_2} \leq 1;$$

si pues $f''(0) = 0$, sin más se concluye que todo el producto tiende al límite 0 y $\lim Y = \infty$. Si al contrario $f''(0) \neq 0$, ξ_{12}, ξ_{13} difieren respectivamente de $\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_3}{2}$ por infinitésimos de orden superior a $x_2 - x_1, x_1 - x_3$ ⁽³⁾; se concluye por tanto que

(3) Se trata de puntualizar acerca del valor ϑ en la fórmula del valor medio:

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x+\vartheta h) \quad (0 < \vartheta < 1).$$

Si la función $f(x)$ admite en el punto x la derivada segunda, tenemos las relaciones

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \varepsilon h^3$$

$$f'(x+\vartheta h) = f'(x) + \vartheta h f''(x) + \varepsilon_1 h$$

donde $\varepsilon, \varepsilon_1$ representan infinitésimos con h . Sustituyendo en la primera fórmula resulta

$$(\vartheta - \frac{1}{2}) f''(x) = \varepsilon - \varepsilon_1 = \text{infinitésimo}.$$

Luego, siempre que se supone $f''(x) \neq 0$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \vartheta = \frac{1}{2}$$

(Cfr. B. LEVI, *Analisi Matematica Algebrica e infinitesimale*, p. 239).

Esta conclusión no basta sin embargo para la aplicación del texto, en tanto que la fórmula del valor medio se aplica simultáneamente a los intervalos variables $x_1 - x_2, x_1 - x_3$, donde además x_1 es variable. Hay por lo tanto que considerar una uniformidad en la convergencia al límite $\frac{1}{2}$. Supongamos entonces que la derivada $f''(x)$ exista para todos los x de un cierto intervalo; escribamos entonces las anteriores fórmulas de Taylor con el resto de Lagrange

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x+\eta h)$$

$$(0 < \eta, \delta < 1);$$

$$f'(x+\vartheta h) = \vartheta h f''(x+\delta \vartheta h)$$

comparando resulta

$$\vartheta = \frac{1}{2} \frac{f''(x+\eta h)}{f''(x+\delta \vartheta h)},$$

Si ahora suponemos estar alrededor de un punto $x=0$ en el cual $f''(x_0) \neq 0$ y suponemos $f''(x)$ continua en x_0 , el segundo miembro resulta uniformemente tan próximo como se quiera a $\frac{1}{2}$ con solo suponer bastante estrecho el intervalo de variabilidad.

$$\lim \frac{\xi_{13} - \xi_{12}}{x_3 - x_2} = \frac{1}{2};$$

luego aún existe el límite del producto y vale $\frac{1}{2}f''(0)$.

Concluimos que si la función $f(x)$ tiene derivada segunda en un entorno del punto $x=0$, la condición necesaria y suficiente para que exista el círculo osculador en dicho punto según la definición V es que esa derivada sea continua en el punto. Evidentemente la condición deja de ser necesaria en el caso de no existir la derivada segunda en todos los puntos de un entorno del punto considerado.

11. — He aquí unos ejemplos para aclarar las anteriores conclusiones:

1º. Consideremos nuevamente la curva

$$y = x^3 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

del n. 6; vimos que en el punto $(0,0)$ tiene círculo osculador según la definición III y este círculo es la misma tangente $y=0$. Consideremos ahora los círculos cuyo centro está sobre una paralela al eje x

$$y = a \quad a > \frac{1}{2}$$

y que pasan por el origen O , cortando nuevamente al eje x en un punto de la forma $x = \frac{1}{2n\pi}$; la tangente en este punto al círculo tendrá la pendiente $-\frac{1}{4n\pi a}$; por otra parte la curva pasa por este mismo punto con la pendiente

$$-x = -\frac{1}{2n\pi} < -\frac{1}{4n\pi a}.$$

Luego los puntos de la curva de abscisa inmediatamente $< \frac{1}{2n\pi}$ están fuera del círculo el cual tendrá que cortar la curva en algún punto entre $(0,0)$ y $(\frac{1}{2n\pi}, 0)$. El razonamiento puede repetirse para $a < -\frac{1}{2}$ considerando los puntos de la forma $x = \frac{(2n+1)\pi}{1}$ (n entero) en lugar de los $x = \frac{1}{2n\pi}$. Se concluye

que cualquier círculo con el centro sobre el eje y , fuera del segmento $-\frac{1}{2} \text{---} \frac{1}{2}$ es límite de una sucesión de círculos que cortan a la curva en O y en otros dos puntos que tienden a O .

Desde el punto de vista analítico se constata que la derivada

$$f'(x) = 3x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}$$

es continua, pero no la derivada de $g(x) = f(x) : x = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ y notamos anteriormente que ya no existe $f''(0)$.

2º. Si, al contrario, consideramos la curva

$$y = x^4 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = f(x),$$

tenemos

$$f'(x) = 4x^3 \operatorname{sen} \frac{1}{x} - x^2 \cos \frac{1}{x}, \quad f'(0) = 0$$

$$g(x) = x^3 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, \quad g'(x) = 3x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}$$

$$f''(0) = 0, \quad f''(x) = 12x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} - 6x \cos \frac{1}{x} - \operatorname{sen} \frac{1}{x}.$$

La teoría nos dice que existirá el círculo osculador según la definición IV, pero, por ser $f''(x)$ discontinua en $x=0$, no podemos afirmar que exista según la definición V.

En efecto, si consideramos los círculos cuyo centro está sobre una recta $y=a < 0$ y que cortan al eje x en dos puntos de abscisas

$$x = \frac{1}{2n\pi} \quad \text{y} \quad x = \frac{1}{(2n+1)\pi},$$

la pendiente de la tangente en estos puntos es respectivamente

$$\pm \frac{1}{4n(2n+1)a\pi},$$

mientras la pendiente de la tangente a la curva es respectivamente

$$-\frac{1}{4n^2\pi^2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{(2n+1)^2\pi^2}.$$

Basta entonces elegir

$$|a| > \frac{\pi}{2}$$

para asegurar que el círculo corta la curva una tercera vez a la izquierda del punto $x = \frac{1}{2n\pi}$.

(Se podría considerar igualmente valores positivos de a cuando los círculos cortaran el eje x en puntos de la forma $\frac{1}{(2n-1)\pi}$ y $\frac{1}{2n\pi}$). Se concluye que cualquier círculo tangente en O al eje x y de radio $> \frac{\pi}{2}$ es límite de círculos que cortan la curva en tres puntos tendientes a O .

12. — Se nota realizada en los ejemplos del n. anterior la observación general hecha ya en el n. 6, de que, en caso de no existir un determinado círculo osculador según las definiciones IV, V, los centros de los círculos límites de sucesiones de círculos en las condiciones de dichas definiciones están todos sobre la normal a la curva en el punto O . Se nota además, en los ejemplos, que estos centros llenan un segmento (infinito). También esta propiedad es general en tanto que de las fórmulas (4), (5) podemos concluir fácilmente que *si dos puntos C_1, C_2 de la normal son centros de círculos límites de dos sucesiones de círculos en las condiciones de las definiciones IV, V lo es también cualquier punto de uno al menos de los dos segmentos (uno finito, el otro infinito) C_1, C_2 .*

Sean en efecto Y_1, Y_2 las ordenadas de C_1, C_2 ; en los dos segmentos proyectivos $C_1 C_2$ fijamos arbitrariamente dos puntos L_1, L_2 cuyas ordenadas serán de la forma

$$l_1 = \frac{Y_1 + \lambda_1 Y_2}{1 + \lambda_1}, \quad l_2 = \frac{Y_1 - \lambda_2 Y_2}{1 - \lambda_2} \quad (\lambda_1, \lambda_2 > 0).$$

Supongamos ahora fijadas dos sucesiones de círculos definiendo respectivamente los círculos límites de centros C_1, C_2 , Llamando $x'_1(i) x'_2(i) x'_3(i), x''_1(i) x''_2(i) x''_3(i)$ a las abscisas de los puntos de la curva que determinan los círculos de lugar i en las dos sucesiones, podemos siempre elegir la numeración de las dos sucesiones y aquella de los puntos de manera que

$$x'_1(i) < x'_2(i) < x'_3(i) < x''_1(i) < x''_2(i) < x''_3(i);$$

llamemos todavía $Y_1^{(i)}, Y_2^{(i)}$ a las ordenadas de los centros de esos dos círculos de lugar i , y pongamos

$$z^{(i)} = \frac{Y_1^{(i)} + \lambda_1 Y_2^{(i)}}{1 + \lambda_1}, \quad t^{(i)} = \frac{Y_1^{(i)} - \lambda_2 Y_2^{(i)}}{1 - \lambda_2},$$

de manera que $z^{(i)}$ y $t^{(i)}$ están respectivamente en el intervalo finito y en el infinito entre $Y_1^{(i)}$ e $Y_2^{(i)}$.

$Y_1^{(i)}, Y_2^{(i)}$ son los valores tomados por la expresión de Y dada por (4) o (5) según se considera el caso de la definición IV o V, cuando se ponen por las x respectivamente las x' o las x'' . Imitando el razonamiento del n. 2, se ve que se puede pasar con continuidad de los primeros a los segundos valores sin pasar nunca por el valor $x=0$ y sin que nunca dos variables de distinto índice tomen el mismo valor. La expresión Y pasará entonces con continuidad (eventualmente pasando por el ∞) del valor $Y_1^{(i)}$ a $Y_2^{(i)}$, de manera que se tendrá que encontrar uno al menos de los valores $z^{(i)}, t^{(i)}$.

Eligiendo los valores de x_1, x_2, x_3 que realizan esta condición se determinará por cada i un círculo, obteniendo de tal manera una sucesión que satisface a las condiciones de la definición IV o V y tal que las ordenadas de sus centros tienden a l_1 o a l_2 (no está excluido que la sucesión pueda descomponerse en dos tendientes a los dos límites).

Considerando que las expresiones de X difieren de Y sólo por factores de la forma $\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}$, que en las actuales hipótesis tienen límite determinado, se ve que también las sucesiones de las abscisas de los centros de la sucesión de círculos tiende a límite determinado, y precisamente a la abscisa del punto de la recta $C_1 C_2$ que tiene la ordenada l_1 o l_2 .

Con esto el asunto queda demostrado.

USO DE UNA TRANSFORMACIÓN

13. — Las condiciones para la aplicabilidad de las definiciones III y IV se pueden deducir en modo intuitivo de las condiciones de aplicabilidad de las definiciones I y II de la tangente, mediante un orden de consideraciones que vamos a explicar a continuación y que puede servir en gran número de casos para establecer teoremas de geometría infinitesimal.

Recordemos que se llama *transformación cremoniana* del plano (o del espacio) a una transformación algebraica biunívoca no proyectiva. Las transformaciones proyectivas son caracterizadas por cambiar rectas en rectas. Las transformaciones cremonianas cambian las rectas en curvas, generalmente de orden mayor.

Con respecto a las transformaciones cremonianas del plano, puede por muchos aspectos concentrarse la atención sobre las transformaciones que se llaman cuadráticas porque hacen corresponder cónicas a las rectas. En efecto, un teorema muy notable, pero que no nos interesa en este momento, afirma que cada transformación cremoniana del plano puede descomponerse en una sucesión de cuadráticas.

Las transformaciones cuadráticas pueden considerarse todas como productos de transformaciones proyectivas y de la *inversión* (transformación por radios vectores recíprocos) y por tanto sobre ésta vamos a detenernos ahora únicamente.

La inversión del plano respecto a un punto O es la transformación que, a cada punto M hace corresponder el punto M_1 que pertenece a la misma semirrecta de origen O y tal que

$$OM \cdot OM_1 = \text{constante}.$$

Esta constante se puede poner sin más $= 1$ porque a este caso uno puede siempre llegar por medio de una semejanza.

La inversión puede estudiarse geométricamente con medios muy elementales y así se la encuentra en muchos libros de geometría⁽⁴⁾. Se demuestra fácilmente que cada círculo se transforma en un círculo; en particular las rectas se transforman en círculos por el punto O y se transforman en rectas los círculos que pasan por O .

14. — Respecto a cualquier transformación cremoniana existen puntos singulares que no tienen correspondiente determinado. La inversión tiene un solo punto singular real y es O ; cuando un punto se mueve en el plano acercándose a O el punto correspondiente se aleja hacia el infinito. Cada punto de la recta del infinito puede de este modo considerarse como

(4) Ver por ej. *Rouché et Comberousse - Traité de géométrie* I. 7-ème edit. p. 281 y sig.

correspondiente al punto O . Se demuestra fácilmente (y lo vamos a averiguar luego analíticamente) que todas las curvas pasantes por O con la misma tangente se transforman en curvas que pasan por el mismo punto del infinito y recíprocamente.

A veces conviene transportar al finito los puntos del infinito aplicando una transformación proyectiva. El producto de una inversión por una transformación proyectiva nos da pues una transformación (cuadrática, pero no inversión) en la cual los círculos pasantes por O (en particular las rectas por O) se cambian en rectas; los demás círculos se cambian en las cónicas que pasan por los puntos transformados por la proyectividad de los puntos cíclicos; al punto O corresponden todos los puntos de una recta, con la condición que todas las curvas que pasan por O con una misma tangente se transforman en curvas que pasan por un mismo punto de esa recta. Diremos que este punto corresponde a la dirección de aquella tangente.

15. — Supongamos ahora dada una curva γ pasante por O y sea t su tangente; sea γ' la curva transformada de γ y T' el punto correspondiente a la dirección t .

Consideremos los círculos que pasan por O y por dos puntos cualesquiera A, B de γ ; ellos tendrán por transformadas las rectas que unen los puntos correspondientes A', B' de γ' y recíprocamente. Si A y B se mueven sobre γ tendiendo a O , A' y B' se mueven sobre γ' tendiendo a T' . Condición necesaria y suficiente para que el círculo OAB variando tienda a uno determinado, es que la recta $A'B'$ tienda a una determinada recta por T' es decir que γ' tenga en T' tangente determinada. Es decir que las condiciones para que γ tenga círculo osculador según la definición IV son las mismas que para que γ' tenga tangente en T' según la definición II.

Si en lugar de considerar círculos por O y dos puntos variables A, B se hubiesen considerado los círculos tangentes en O a t y pasantes por un punto A de γ , habríase tenido como correspondientes las rectas por T' y por un punto variable A' de γ' ; de este modo el estudio de la definición III, aplicada a γ se reduce al estudio de la definición I aplicada a γ' .

16. — Para realizar los cálculos correspondientes conviene expresar la transformación en forma analítica.

Llamando x, y las primeras coordenadas, x_1, y_1 las coordenadas del punto correspondiente por la inversión, X, Y las coordenadas del nuevo punto correspondiente después de una transformación proyectiva que lleve al finito la recta del infinito del plano $x_1 y_1$, podemos escribir las fórmulas de transformación en la forma:

$$x = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2} \quad y = \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2}$$

$$x_1 = \frac{1}{X} \quad y_1 = \frac{Y}{X}$$

$$x = \frac{X}{1 + Y^2} \quad y = \frac{YX}{1 + Y^2}$$

Si consideramos la curva γ

$$y = f(x) = x g(x), \quad (6)$$

la ecuación de la curva transformada F será

$$Y = g\left(\frac{X}{1 + Y^2}\right). \quad (7)$$

El coeficiente de dirección de la tangente en O a γ es

$$y'(0) = f'(0) = g(0)$$

y F pasa por el punto $(0, g(0))$, comprobándose así que la dirección de la tangente a γ determina un punto por el cual pasará F . De (7) se obtiene

$$\frac{dY}{dX} = g'\left(\frac{X}{1 + Y^2}\right) \frac{(1 + Y^2) - 2XY \frac{dY}{dX}}{(1 + Y^2)^2}$$

de donde

$$\frac{dY}{dX} = \frac{g'\left(\frac{X}{1 + Y^2}\right)(1 + Y^2)}{(1 + Y^2)^2 + 2XY g'\left(\frac{X}{1 + Y^2}\right)}$$

La existencia de $\frac{dY}{dX}$ en el punto $(0, g(0))$ es la condición necesaria y suficiente para la existencia de la tangente a Γ según la definición I.

Concluimos que para la existencia del círculo osculador a γ según la definición III es necesario y suficiente que $f(x): x$ tenga derivada para $x=0$; si esta derivada existe en un entorno de $x=0$ y es continua en $x=0$, entonces existe en un entorno del punto $(0, g(0))$ la $\frac{dY}{dX}$ y es también continua, es decir se aplica a Γ la definición II de la tangente; se aplica entonces a γ la definición IV del círculo osculador; y es esta la conclusión obtenida ya anteriormente.

Un poco menos inmediata es la aplicación del método a la definición V, porque en este caso las transformadas de los círculos por tres puntos de la curva γ son todavía cónicas, que sólo al límite van a degenerar en la recta $x=0$ y en otra recta. Sin embargo, utilizando el hecho ya demostrado de que en todo caso los círculos límites son tangentes a γ y por lo tanto las rectas transformadas pasan por el punto fijo correspondiente a esa tangente, se obtienen todavía notables simplificaciones en los cálculos. Esta y otras aplicaciones dejamos al lector.

B. Levi

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

PROPUESTOS

20. Construir un hexágono regular que tenga cuatro lados consecutivos pasando respectivamente por cuatro puntos fijados del plano.

21. Siendo $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ números positivos con la condición $\sum_{i=1}^n x_i = k$, demostrar las desigualdades

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \geq \frac{k^2}{n}, \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq \frac{n^2}{k}.$$

22. Demostrar que la suma de los cuadrados de las distancias de los vértices de un polígono regular de n lados a cualquier recta trazada por el centro es constante. Hallar el valor de esta constante y vincular la proposición a un conocido teorema de mecánica.

23. Se da vulgarmente el nombre de números «capicua» a aquellos que pueden leerse indistintamente en los dos sentidos. Los llamaremos números simétricos. Un número cualquiera se puede siempre expresar de varias maneras como suma de números simétricos. Se pide una fórmula que exprese un número mínimo de sumandos simétricos necesarios para formar cualquier número de n cifras.

24. Hallar $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctg x}{x^2 \arctg x}.$

25. En la teoría de las vibraciones de un eje que rueda sosteniendo un volante en su punto medio, los posibles períodos de vibración están determinados por las raíces de una ecuación de la forma

$$\xi \left(\operatorname{tg} \xi - \frac{1 - e^{-2\xi}}{1 + e^{-2\xi}} \right) = a, \quad (a > 0).$$

Se pide un estudio de esta ecuación y del cálculo aproximado de sus raíces.

FLORES Y HOJAS

V. Es conocido que para encontrar un valor aproximado de una integral definida se usan fórmulas dichas de cuadraturas, de las cuales las más simples son las llamadas de los trapecios y de Simpson

$$(\text{trapecios}) \quad \int_a^b f(x) dx \sim \frac{f(a)+f(b)}{2} (b-a)$$

$$(\text{Simpson}) \quad \int_a^b f(x) dx \sim \frac{f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)}{6} (b-a)$$

Se aconseja a menudo, para calcular la integral con mayor exactitud, de dividir el intervalo $a-b$ en cierto número de partes iguales cuya anchura podemos designar por h , formando la integral en el intervalo total como suma de integrales parciales en dichos intervalos parciales, siendo éstas calculadas por una de las fórmulas anteriores. Para lo que vamos a decir, nos conviene suponer que el número de las partes en que se ha dividido el intervalo $a-b$ sea par $= 2n$; se obtienen entonces las fórmulas siguientes, que se encuentran fácilmente también en libros de matemática aplicada: llamando por brevedad $y_0, y_1, \dots, y_{2n}$ a los valores de $f(x)$ en los sucesivos puntos de división ($y_0 = f(a), y_{2n} = f(b)$),

$$(\text{Trapecios}) \quad \int_a^b f(x) dx \sim h \left(\frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{2n-1} + \frac{1}{2} y_{2n} \right) \quad (1)$$

$$(\text{Simpson}) \quad \int_a^b f(x) dx \sim \frac{h}{3} (y_0 + 4 y_1 + 2 y_2 + 4 y_3 + 2 y_4 + \dots + 4 y_{2n-1} + y_{2n}) \quad (2)$$

Se demuestra también en los libros de análisis que un límite superior de la diferencia entre los dos miembros (lo que se llama el error de la fórmula de cuadratura) puede expresarse de la manera siguiente:

$$(\text{Trapecios}) \quad \frac{nh^3}{6} f''(m), \quad (\text{Simpson}) \quad \frac{nh^5}{90} f^{(4)}(m),$$

donde m es un número conveniente del intervalo $a-b$. Se observa entonces que dicho error es ciertamente menor del valor que se obtiene poniendo por $f''(m)$ o $f^{(4)}(m)$ respectivamente el máximo valor absoluto de la derivada segunda o cuarta en el

intervalo $a-b$, y esto independientemente del valor de n , es decir de la anchura h . Se concluye fácilmente que, por lo menos cuando se tome h bastante pequeño, el error proporcionado por la fórmula de Simpson deberá considerarse como menor de aquel proporcionado por la fórmula de los trapecios.

Ahora bien, presentamos a nuestro lector las consideraciones siguientes:

En la fórmula (2) las y con índice par comparecen con el coeficiente 2, aquellas de índice impar con el coeficiente 4; resulta que en el cálculo se da un peso preponderante a los valores de las y de índice impar; pero es evidente que en cuanto nuestros razonamientos se dirigen a una $f(x)$ cualquiera y a un intervalo $a-b$ cualquiera, no es posible dar una preferencia a unos o a otros valores de $f(x)$. Podemos restablecer el equilibrio en la manera siguiente: la razón de la división en un número par de partes estaba en que esto era necesario para aplicar la fórmula de Simpson; descomponemos entonces la integral en la suma de tres, correspondientes a los intervalos entre a y el punto 1, entre 1 y $2n-1$ y entre $2n-1$ y b . A las dos integrales extremas aplicamos la fórmula de los trapecios, la que, aún en el caso de ser menos exacta, influenciará muy poco el error total por ser los dos intervalos muy pequeños (anchura h) y aplicamos la fórmula de Simpson al intervalo entre los puntos 1 y $2n-1$, con lo cual los puntos de índice impar y par cambiarán sus funciones.

El cálculo indicado nos dará una nueva valuación de la integral buscada. Nosotros tomaremos entonces la media de las dos valuaciones, la (2) y la nueva. Si se hace el cálculo se encuentra como resultado la expresión (1) más

$$\frac{h}{12} [(y_1 - y_0) - (y_{2n} - y_{2n-1})]$$

Esta diferencia podría reducirse sin más a 0 en el caso muy simple en que la curva $y=f(x)$, siendo absolutamente cualquiera en el intervalo entre los puntos 1 y $2n-1$, terminara a las extremidades con dos trechos horizontales. En este caso podría observarse en más que no tendría mayor importancia lo de haber calculado las integrales extremas con la fórmula de trapecios, porque ella da sin más el valor exacto.

¿Qué conclusiones saca el lector de todo eso?

El día 8 de enero de 1642 falleció en Arcetri (Florencia), Galileo Galilei, quien

..... vide

sotto l'etereo padiglion rotarsi
più mondi, e il sole irradiarli immoto,
onde all'Anglo che tanta ala vi stese
sgombrò primo le vie del firmamento ⁽¹⁾.

Este último, Isaac Newton, nació en Whoolstorpe (Grant-ham-Inglaterra) casi exactamente un año después, el 25 de diciembre de 1642, según el calendario juliano que en aquel tiempo se adoptaba todavía en Inglaterra.

Teniendo en cuenta que en los países católicos desde 1582 regía el calendario gregoriano, para comparar exactamente las fechas habría que agregar 10 días a la anterior, llevando así el nacimiento de Newton al 4 de enero de 1643; pero conviene aceptar la costumbre de mantener las fechas que los acontecimientos tuvieron al cumplirse, lo cual en este caso nos lleva a conmemorar al mismo tiempo el centenario de la muerte y del nacimiento de dos mentes soberanas, y sin embargo de características tan diferentes, en un siglo de mentes universales.

«*Mathematicæ Notæ*» recordará la fecha con unos artículos históricos y críticos que se publicarán en fascículos sucesivos. Mientras tanto, presentamos en la página del frente una reproducción de la tapa de la primera edición (1632) ⁽²⁾ del célebre «*Diálogo sopra i due massimi sistemi del mondo*» ⁽³⁾.

Sea dicho de paso desde ahora, que el punto de contacto más popular de los dos grandes, recordado por el poeta y que está precisamente vinculado a la teoría del sistema solar, no es posiblemente, ni para el uno ni para el otro, el mayor título de gloria.

⁽¹⁾ Ugo Foscolo, *Dei sepolcri* (1807), "...vió rodar varios mundos bajo la bóveda celeste y el sol alumbrarlos inmóvil, por lo que fué el primero en despejar las vías del firmamento al Inglés que tanta ala extendió en ellos".

⁽²⁾ Como se encuentra en la "Edizione Nazionale" de "Le Opere di Galileo Galilei", Barbera, Firenze.

⁽³⁾ La edición latina de tres años después dice simplemente "Dialogus de systemate mundi". La tapa de esta otra edición, imitando a la presente pero con algunas diferencias evidentemente no casuales, se encuentra reproducida en *SCRIPTA MATHEMATICA*, Vol. VII (1940).



Las tres personas representan, de izquierda a derecha, Aristóteles, Tolomeo y Copérnico, como puede leerse en el borde las túnicas; nótese que se trata de un dibujo de fantasía; en la edición latina que citamos al lado el retrato de Copérnico está sustituido por otro más verosímil, según la figura que de este sabio nos fué conservada.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

SOLUCIONES

N.º 5 — Dibujar la curva de ecuación $x^2 y - x^2 + y = 0$; determinar alguno de sus elementos notables (puntos de inflexión, puntos de máxima curvatura, asíntotas...); calcular el área comprendida entre la curva y la recta $y = 1$.

Solución. Se trata de una ecuación cúbica. La curva será simétrica respecto al eje de las y y por contener únicamente potencias pares de x y por tanto bastará estudiarla sólo para valores positivos de x .

Como la ecuación de la curva se puede escribir

$$x = \pm \sqrt{\frac{y}{1-y}} \quad (1)$$

se ve que x toma valores reales sólo para $0 \leq y \leq 1$; cuando y varía con continuidad en este intervalo, el valor positivo de x recorre con continuidad el intervalo $0 - \infty$; por tanto la curva tiene una sola rama real (infinita) contenida en la banda $0 \leq y \leq 1$.

Despejando y la ecuación de la curva se escribe

$$y = \frac{x^2}{1+x^2} \quad (2)$$

y derivando dos veces

$$y' = \frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad y'' = \frac{2-6x^2}{(1+x^2)^3}. \quad (3)$$

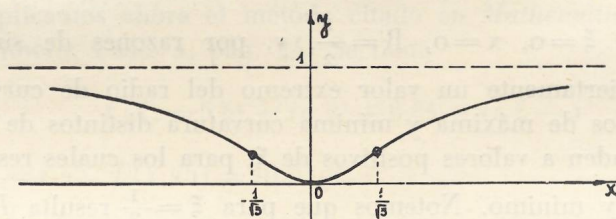
Para valores $x > 0$ resulta $y' > 0$: la función es pues creciente. En el origen es $y' = 0$, tenemos pues un mínimo de la función.

La derivada segunda se anula en los puntos $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, los cuales serán por tanto los únicos puntos de inflexión de la curva.

Para $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$ resulta $y'' > 0$ y la curva será cóncava hacia el semieje positivo de las y . Para $x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$ o $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$ resulta $y'' < 0$ y la curva será convexa hacia el mismo semieje.

De la fórmula (2) se ve que para $x \rightarrow \infty$, $y \rightarrow 1$; por lo tanto la recta $y = 1$ es asíntota de la curva.

Con estos elementos podemos ya dibujar la curva. Es la representada en la figura.



Para hallar el área comprendida entre la curva y la recta $y = 1$, procedemos por cálculo integral. Teniendo en cuenta la ecuación (2) de la curva, el área dicha será

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{1+x^2} \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \left[\arctg x \right]_{-\infty}^{+\infty} = \pi.$$

Esta solución es análoga a las enviadas por los Sres. LORENZO O. COPELLO y PEDRO E. ZADUNAISKY, alumnos de la Facultad de Ingeniería de Rosario. Otra solución ha enviado la Srta. MABEL MOLINELLI WELLS de Buenos Aires.

N. de la R. Entre las soluciones enviadas ninguna resuelve la cuestión de hallar los puntos de máxima curvatura. Veamos cómo se pueden hallar. Siendo la expresión general del radio de curvatura

$$R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|},$$

según las expresiones (2) y (3) del texto será

$$R = \frac{[(x^2+1)^4 + 4x^2]^{3/2}}{2(x^2+1)^3 |3x^2-1|}.$$

Observando que en esta expresión aparece x elevada a sólo potencias pares, conviene, para simplificar, hacer la sustitución

$$x^2 = \xi,$$

resultando

$$R = \frac{(\xi^4 + 4\xi^3 + 6\xi^2 + 8\xi + 1)^{3/2}}{2(\xi+1)^3 |3\xi-1|}.$$

Para $\xi=0$, $x=0$, $R=\frac{1}{2}$, y, por razones de simetría, éste es ciertamente un valor extremo del radio de curvatura. Los puntos de máxima y mínima curvatura distintos de $x=0$, corresponden a valores positivos de ξ , para los cuales resulta R máximo y mínimo. Notemos que para $\xi=\frac{1}{3}$ resulta $R=\infty$, que corresponde a los puntos de inflexión ya determinados. Excluyendo estos puntos, los valores de ξ buscados serán los que anulen a la derivada R' . Se tiene

$$\begin{aligned} \pm 2 R' &= \frac{6(\xi^3 + 3\xi^2 + 3\xi + 2)(\xi^4 + 4\xi^3 + 6\xi^2 + 8\xi + 1)^{1/2}}{(\xi+1)^3(3\xi-1)} \\ &\quad - \frac{12\xi(\xi^4 + 4\xi^3 + 6\xi^2 + 8\xi + 1)^{3/2}}{(\xi+1)^4(3\xi-1)^2} \\ &= \frac{6(\xi^4 + 4\xi^3 + 6\xi^2 + 8\xi + 1)}{(\xi+1)^4} \times \frac{\xi^5 + 3\xi^4 + 2\xi^3 - 7\xi^2 - \xi - 2}{(3\xi-1)^2}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que sólo buscamos para ξ valores positivos, para los cuales la primera fracción es siempre >0 , excluido el valor $\xi=\frac{1}{3}$ del cual ya se ha hablado, los valores de ξ que cumplen la condición citada serán las raíces positivas de la ecuación

$$f(\xi) = \xi^5 + 3\xi^4 + 2\xi^3 - 7\xi^2 - \xi - 2 = 0.$$

Se tiene que para $\xi=1$, $f(1)=-4$, y para $\xi=2$, $f(2)=64$; hay pues, por lo menos, una raíz entre 1 y 2, y no puede haber otra, por cuanto los coeficientes de la ecuación presentan una sola variación. Por ser los coeficientes de la ecuación enteros y el primero 1 la ecuación no tiene raíces quebradas; por tanto esta única raíz positiva será irracional y podemos calcularla por aproximación. Considerando el punto medio del intervalo 1-2, $\xi=1,5$, se tiene

$$f(1,5) = 10,28125 > 0$$

Tomando ahora $\xi = \frac{1+1,5}{2} = 1,25$, $f(1,25) = 0,0947$.

Aplicamos ahora el método citado en *Mathematicæ Notæ*, año primero, Fasc. 2, pág. 44. Se tiene

$$f'(\xi) = 5\xi^4 + 12\xi^3 + 6\xi^2 - 14\xi - 1$$

para $\xi = 1,25$, $f'(1,25) = 26,5195$

$$\frac{f(1,25)}{f'(1,25)} = 0,00357.$$

El número indicado con η vale pues 0,007; la variación de $f'(\xi)$ dentro de un intervalo de esa anchura en proximidad de $\xi=1,25$ es ciertamente $< 0,07 f''(2) < 0,007 \cdot 4 \cdot 150 = 4,2 < \frac{1}{2} f'(1,25)$. Se sigue que una sucesión de aproximaciones sucesivas a la raíz buscada está dada por

$$\xi = 1,25 - 0,003 = 1,247$$

$$\xi_1 = 1,247 - \frac{f(1,247)}{f'(1,25)} = 1,247 - \frac{0,01558}{26,52} = 1,2465$$

$$\xi_2 = 1,2465 - \frac{f(1,2465)}{26,52} = 1,2465 - 0,000093 = 1,246407.$$

Según la teoría general expuesta en el l. c. cada una de estas determinaciones representa la raíz con error menor de

la diferencia con la determinación anterior; podemos pues escribir

$$\xi = 1,2464 \text{ con error } < 10^{-4}.$$

Podemos agregar que este error es por exceso; bastaría, para averiguarlo, verificar mediante el cálculo directo que todavía $f(\xi_2) > 0$.

Sin cálculos, resulta de la teoría de las citadas páginas 44 y 45, porque, siendo evidentemente, para los valores considerados de ξ , $f''(\xi) > 0$, f' decrece con ξ y por lo tanto la fórmula (5) de la pág. 44 dice que $\xi_3 - \xi_2$ y $\xi_2 - \xi_1$ tendrán el mismo signo.

Para calcular ahora el valor de x , sustituyendo en $x = \sqrt{\xi}$, tenemos

$$\sqrt{1,2463} < x < \sqrt{1,2464}.$$

Un valor aproximado de x es pues $x = 1,116$; siendo además $1,116^2 = 1,245456$, se tiene más precisamente

$$\sqrt{1,116^2 + 8,44 \cdot 10^{-4}} < x < \sqrt{1,116^2 + 9,44 \cdot 10^{-4}}$$

$$\sqrt{1 + \frac{8,44}{1,24545} 10^{-4}} < \frac{x}{1,116} < \sqrt{1 + \frac{9,44}{1,24545} 10^{-4}}.$$

Se sabe que un valor aproximado por exceso de las dos raíces es

$$1 + \frac{1}{2} \frac{10 \cdot 10^{-4}}{1,24545} \sim 1 + \frac{10^{-3}}{2,50};$$

por lo tanto el valor $x = 1,116$ es aproximado por defecto con error

$$< \frac{116 \cdot 10^{-3}}{2,50} < 5 \cdot 10^{-4}.$$

N.º 8 — Sumar la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+3}{(n-1)n(n+2)}.$$

Solución. Descompongamos cada término de la serie en tres fracciones con denominadores $n-1$, n , $n+2$; para lo cual basta determinar los valores A , B , C con la condición

$$\frac{2n+3}{(n-1)n(n+2)} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n} + \frac{C}{n+2}. \quad (1)$$

De aquí

$$2n+3 = A n(n+2) + B(n-1)(n+2) + C n(n-1)$$

e identificando los coeficientes de potencias análogas de n , se obtiene

$$A+B+C=0, \quad 2A+B-C=2, \quad -2B=3$$

de donde

$$A = \frac{5}{3}, \quad B = -\frac{3}{2}, \quad C = -\frac{1}{6}.$$

Según (1) será

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+3}{(n-1)n(n+2)} &= A + \frac{A}{2} + \frac{A}{3} + \frac{B}{2} + \frac{B}{3} \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{A}{n+2} + \frac{B}{n+2} + \frac{C}{n+2} \right) \end{aligned}$$

y como $A+B+C=0$, queda que la suma buscada, teniendo en cuenta los valores encontrados para A , B y C , vale

$$A \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + B \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{65}{36}.$$

Esta solución ha sido enviada por el Sr. MODESTO GONZÁLEZ, profesor de San Luis.

N.º 9 — Se corta una figura convexa del plano por n rectas tales que nunca pasen dos por un mismo punto del contorno de la figura ni tres por un mismo punto interior a la misma. Sea p el número de puntos de intersección de estas rectas que son interiores a la figura y r el número de regiones en que queda dividida. Demostrar que

$$r = n + p + 1.$$

Solución. En la demostración que vamos a dar se puede prescindir de la condición de que «nunca pasen dos rectas por un mismo punto del contorno de la figura», con tal que, en caso de que esto ocurra, no se cuente el punto de intersección como «interior».

Procederemos por inducción. Sabemos que si seccionamos una figura convexa por una recta cualquiera, la figura queda dividida en dos recintos convexos. Luego, para $n=1$, es $p=0$ y $r=2$, verificándose la relación del enunciado

$$r = n + p + 1. \quad (1)$$

Supongamos que el teorema se cumpla para n rectas. Demostraremos que se cumple para $n'=n+1$.

Seccionada por las n rectas, la figura convexa quedará dividida en r recintos convexos. Sean P_i los puntos p de intersección de las rectas que son interiores a la figura. Si cortamos la figura con otra recta cualquiera s que no pase por ningún punto P_i ella cortará por ejemplo a γ recintos de los r y originará δ puntos S_i de intersección con los segmentos de las rectas anteriores que limitan estos recintos. Después de la sección con la recta s , el número de rectas trazadas es $n' = n+1$; el número de recintos en que queda dividida la figura será la suma de los $r-\gamma$ no cortados por s , más los obtenidos por la sección con s de los γ recintos, que serán 2γ . Es pues

$$r' = r - \gamma + 2\gamma = r + \gamma = n + p + 1 + \gamma = n' + p + \gamma.$$

El número p' de puntos de intersección de rectas que son interiores a la figura, es $p' = p + \delta$ pues, por hipótesis, ninguno de los puntos P_i coincide con alguno de los S_i . Para demostrar que $r' = n' + p' + 1$ bastará demostrar que $\gamma = \delta + 1$.

Pero esto es inmediato, pues sobre la cuerda que la recta s determina en la figura convexa dada, incluídos los extremos,

hay $\delta + 2$ puntos los cuales determinarán $\delta + 2 - 1 = \delta + 1$ segmentos y como a cada segmento corresponde una de las γ regiones, es $\delta = \gamma + 1$. Con esto resulta demostrado el enunciado del problema.

Esta demostración se debe al Sr. RAIMUNDO FAJARDO, alumno de la Fac. de C. Matemáticas de Rosario. Otra solución análoga ha sido enviada por el Sr. JOSÉ COHEN de La Plata.

N.º 10 — Sean fijos sobre un plano una recta r y un punto O distante de ella h . Se traza una circunferencia cualquiera que pase por O y corte a r en dos puntos A y B . Llamando R al radio de la circunferencia, demostrar que se verifica

$$OA \cdot OB = 2Rh.$$

Solución. De la construcción indicada en el enunciado resulta un triángulo ABO inscrito en la circunferencia de radio R . Llamo H al pie de la normal bajada a AB desde O y con β el ángulo ABO .

Queda así determinado un triángulo rectángulo OHB en el cual se cumple

$$\text{sen } \beta = \frac{h}{OB}.$$

Supongamos el diámetro AB' que pasa por A , con lo cual queda definido un nuevo triángulo AOB' que es rectángulo por estar inscrito en media circunferencia. El ángulo en B' es igual al β ya que ambos abarcan el mismo arco de circunferencia y por tanto

$$\text{sen } \beta = \frac{OA}{AB} = \frac{OA}{2R}.$$

Igualando esta expresión de $\text{sen } \beta$ con la obtenida anteriormente se obtiene

$$\frac{h}{OB} = \frac{OA}{2R}$$

de donde se deduce $OA \cdot OB = 2Rh$, como se quería demostrar.

Esta solución es debida al Sr. LORENZO O. COPELLO de la Facultad de Ciencias Matemáticas etc. de Rosario; soluciones análogas han enviado los Sres. OSCAR P. SIMIÁN, RAIMUNDO FAJARDO, GUIDO O. G. LISERRA, JOSÉ COHEN. Una pequeña modificación, consistente en considerar directamente la semejanza de los triángulos OHB, AOB' permite de evitar el uso de fórmulas trigonométricas; con esta variante enviaron soluciones los Sres. MODESTO GONZÁLEZ, CARLOS A. KRÜGER, Dr. M. SADOSKI.

N. de la R. La fórmula propuesta resulta evidentemente de la composición de las dos conocidas fórmulas de trigonometría

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

$$ab \sin \gamma = c h_c$$

FLORES Y HOJAS

RESPUESTA

La paradoja propuesta en el Fasc. 2 (año 1º., pág. 73) estaba expresada en el modo siguiente:

III. Un coche se mueve con la velocidad v . Un viajero deja caer del coche una piedra de masa m ; al llegar a tierra la piedra golpeará el suelo con una energía $1/2 mv^2$ (abstracción hecha de la energía adquirida por efecto de la gravedad). Si empero el viajero imprime a la piedra una velocidad v respecto al coche (empleando por esto una energía $1/2 mv^2$) la piedra golpeará el suelo con la energía $1/2 m (2v)^2 = 2 mv^2$. ¿En el caso de ser cierta la conclusión, de dónde proviene la mayor energía adquirida por la piedra?

Del Sr. S. Freiberg de Tucumán recibimos la solución siguiente:

Llamando:

M a la masa del tren,

u a la pérdida de velocidad del tren.

De acuerdo a la ley de conservación de los impulsos se tendrá:

$$Mv + mv = M(v - u) + 2mv \quad (1)$$

y por lo tanto

$$u = \frac{mv}{M} \quad (2)$$

De acuerdo a la ley de conservación de la energía, llamando X a la energía que entrega el viajero, escribimos:

$$\frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} mv^2 + X = \frac{1}{2} M(v-u)^2 + \frac{1}{2} m(2v)^2 \quad (3)$$

De (2) y (3) obtenemos:

$$X = \frac{1}{2} mv^2 \left(1 + \frac{m}{M} \right) \quad (4)$$

energía entregada por el pasajero y que tomará el valor $\frac{1}{2} mv^2$, indicado en el problema, en el caso que m sea despreciable ante M o que alguna energía exterior mantenga la velocidad v del tren en el instante de ser lanzada la piedra.

Analizando ahora la energía perdida por el tren, X' , se tiene:

$$X' = \frac{1}{2} Mv^2 - \frac{1}{2} M(v-u)^2 \quad (5)$$

de donde, teniendo en cuenta (2),

$$X' = mv^2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{m}{M} \right). \quad (6)$$

Si sumamos la energía entregada por el viajero con la perdida por el tren, encontramos

$$E = X + X' = \frac{3}{2} mv^2, \quad (7)$$

valor éste que sumado a la energía que llevaba inicialmente la piedra, $\frac{1}{2} mv^2$, dan la energía $2mv^2$, que es el valor indicado en el problema.

Es evidente, por lo tanto, que la mayor energía adquirida por la piedra no es más que la perdida por el tren al ser aquella lanzada.

Se ve que para $M = \infty$ se obtiene de las ecuaciones (2), (4) y (6)

$$u = 0 \qquad X = \frac{1}{2} mv^2 \qquad X' = mv^2$$

resultando para E el mismo valor $\frac{3}{2} mv^2$, evidenciándose que es independiente de la masa del tren.

N. de la R. — Se admite por cierto, en las consideraciones anteriores, que la piedra adquiriera la velocidad $2v$ respecto a la tierra, lo cual, como observa el Sr. Freiberg, sólo ocurre si se desprecia la masa m respecto a M o se entrega energía desde el exterior. En cuanto estas hipótesis no están en el enunciado el cual dice sólo que el viajero imprime a la piedra la velocidad v con respecto al coche, puede ser conveniente repetir el cálculo sin hipótesis complementarias.

Si tomamos como sistema de referencia uno ligado al baricentro del sistema coche + piedra y admitimos que en este sistema la piedra adquiriera la velocidad x , llamando M a la masa del coche, debe éste adquirir una velocidad y tal que

$$mx + My = 0. \qquad (8)$$

Esta condición, la cual expresa el llamado principio del baricentro, y que es equivalente a afirmar que el sistema piedra + coche es dinámicamente aislado, es la única que actúa en la deducción. En efecto, por ella sigue que

$$m(x+v)^2 + M(y+v)^2 = mv^2 + Mv^2 + mx^2 + My^2;$$

$$m(x+v)^2 = mv^2 + [Mv^2 - M(y+v)^2] + [mx^2 + My^2].$$

En el segundo miembro el primer corchete [] es la energía perdida por el coche y el segundo la energía gastada para alterar las velocidades relativas de la piedra y del coche.

Si queremos expresar exactamente las hipótesis del problema, tenemos que observar que la velocidad de la piedra con respecto al coche será

$$(x+v) - (y+v) = x - y$$

y tendremos que agregar la ecuación

$$x - y = v \quad (9)$$

Con la anterior (8), ella nos da

$$x = v \frac{M}{M+m}, \quad y = -v \frac{m}{M+m}.$$

Aplicando, como dijimos, el principio del baricentro, según el cual, a no actuar fuerzas exteriores al sistema, el baricentro debe mantener constante su velocidad v respecto a la tierra, concluimos que la velocidad final de la piedra respecto a la tierra es en realidad

$$v \left(1 + \frac{M}{M+m} \right) = \frac{M+m}{2M+m} v \quad \text{en vez de } 2v.$$

En cuanto al viajero, podemos suponerlo fijo en el baricentro para empujar la piedra con la velocidad x y el coche con la velocidad y ; para eso empleará una energía

$$\frac{1}{2} m x^2 + \frac{1}{2} M y^2 = \frac{1}{2} \frac{m M v^2}{M+m},$$

un poco menor de la supuesta.

Si después de todo miramos a la energía cedida por la piedra a la tierra, ella será

$$\frac{1}{2} m v^2 \left(\frac{2M+m}{M+m} \right)^2$$

mientras que la energía final del tren será:

$$\frac{1}{2} \frac{M^3 v^2}{(M+m)^2}.$$

BIBLIOGRAFIA

Theodore v. KÁRMÁN and Maurice A. BIOT. *Mathematical Methods in Engineering. An Introduction to the Mathematical Treatment of Engineering Problems.* McGraw-Hill Book Co. New York a. London 1940.

He aquí un libro que se señala a la consideración del estudioso por muchos títulos. Primero por la autoridad del nombre de v. Kármán; segundo por la manifiesta voluntad de hacer obra nueva, de señalar una ruta. Encabezan los AA. el prefacio con un epígrafe sacado del tratado de filosofía natural de Thomson y Tait (cada capítulo está caracterizado por un epígrafe): "No entramos en los problemas ni para buscar, ni para evitar ejercitaciones matemáticas, sino sólo en vista de su posible aplicación para las ciencias físicas"; y afirman más adelante que lo necesario para la formación de los ingenieros no es *más matemática* sino una mejor comprensión de la potencialidad de su aplicación. Concordamos con plena convicción en uno y otro lema; sin embargo la misma lectura del libro nos ha refirmado en la convicción que la cultura es práctica precisamente y sólo en cuanto es cultura y que la potencialidad de su aplicación sólo se comprende con el perfecto entendimiento de los postulados sobre los cuales esta última se apoya.

Notan los AA. que dos métodos se proponen para enseñar el arte de aplicar la matemática a problemas de ingeniería; el uno consistiendo en un curso sistemático sobre ramas adaptadas de la matemática, incluyendo ejemplos apropiados de aplicación; el segundo consistiendo en elegir ciertos grupos representativos de problemas de ingeniería para mostrar el acceso matemático hacia su resolución; el libro presente quiere ser un experimento en esta segunda dirección. En nuestra opinión uno y otro procedimiento pueden llamarse de alguna manera los métodos de la prisa y por esta razón nos parece justo dudar que no representen las vías más recomendables. Hay un tercer método que consistiría en el exacto conocimiento de las ramas de la matemática que se estiman necesarias y de su potencialidad matemática, sin bordados de lujo, después del cual vendría a continuación el conocimiento de las hipótesis y de los postulados sobre los cuales se funda la aplicación. Porque la ecuación que traduce un determinado problema es un símbolo vacío mientras no se conoce la teoría física y práctica que está incluida en esa traducción (y ésta nunca puede encontrar lugar en el momento en el cual la preocupación principal está dirigida hacia al ejemplo matemático); mientras al contrario, una vez planteada la ecuación, sólo el conocimiento del propio instrumento matemático puede aconsejar el manejo más conveniente para lograr un resultado dentro de los límites fijados por aquellos postulados y por aquellas hipótesis. Hay que pensar en efecto que, cuando el interés que tiene la práctica en la resolución de determinado problema matemático encuentre respuesta en un procedi-

miento de resolución regularmente reproducible sólo con variar números, ella no es más matemática sino rutina fácilmente sustituible con pocas fórmulas y pocas tablas, por lo cual bien puede decirse que una ecuación particular, una vez que haya sido resuelta, nunca se presentará nuevamente fuera que en los ejercicios de un texto.

Los autores de nuestro libro suponen en el lector una cultura matemática previa que llegue a la integración, sin incluir a ésta. El primer capítulo está por lo tanto destinado a la noción de la integral de una función o de una ecuación diferencial ordinaria; se exponen unas reglas para la reducción a cuadraturas de ecuaciones diferenciales simples y se desarrolla con bastante amplitud el método de Adams, para la integración numérica de ecuaciones diferenciales de primer orden resueltas respecto a la derivada. Un ejemplo numérico para mostrar una conveniente disposición de los cálculos ha sido elegido de manera a permitir la comparación de los resultados aproximados con los que ofrece la resolución analítica de la ecuación; quizás podría observarse que la extrema particularidad poco permite inducir sobre la aproximación obtenible en casos más generales.

Para sistemas de ecuaciones y para ecuaciones de orden superior se dan algunas indicaciones muy generales, dejando, en particular, completamente de lado el problema de la integración numérica. Bastante amplitud se da al estudio de las ecuaciones diferenciales lineales, particularmente en el caso de los coeficientes constantes, las que encontrarán aplicación todo a lo largo del libro; pero se presenta acá una laguna singular relativa al caso de las ecuaciones no homogéneas, la cual va a reflejarse en varias partes de los desarrollos sucesivos; se hace notar que la solución general se obtiene sumando a una solución particular la solución general de la ecuación (o sistema) homogénea correspondiente; pero no se da ninguna idea general sobre el modo en que aquella solución particular se puede encontrar. Cuando, más tarde, el problema se presentará efectivamente, se trata al principio de un término constante o igualmente simple (generalmente un seno) como para poder adivinar sin más la solución, pero se llega finalmente a las págs. 323-324, donde el caso general se impone y se observa entonces que, si este segundo miembro es un polinomio, existirá siempre un polinomio del mismo grado que representa una solución particular. Pero, si se trata de una función más complicada o dada gráficamente, *resulta imposible el conjeturar la solución particular que necesita* (it is impossible to "guess" the particular solution needed); por lo que el lector está enderezado a considerar el problema como resoluble sólo a través de un desarrollo en serie de Fourier.

Algo curiosa también esta otra observación sin efectiva importancia en un libro de matemática aplicada; se cree necesario señalar la posibilidad de *soluciones singulares*, para ecuaciones diferenciales de primer orden, considerando como ejemplo la ecuación $y' = \sqrt{1-y}$; se concluye con la explícita enunciaci3n (p. 14): "Las ecuaciones de primer orden pueden tener soluciones singulares sólo si la funci3n $f(x,y)$ que determina $dy:dx$ es multivalente". Todos saben que el ejemplo citado se repite con cualquier ecuaci3n $y' = f(y)$ tal que, para un c conveniente, $f(c)$ sea infinitésimo de orden < 1 .

El segundo capítulo trata con bastante amplitud las funciones de Bessel;

el tercero contiene las nociones fundamentales de la dinámica del punto y de los sistemas rígidos con los necesarios elementos de la teoría de los vectores; finalmente en el cuarto, bajo el título de “problemas elementales de la dinámica” se tratan problemas clásicos de movimiento de un punto bajo la acción de fuerzas dependientes de la posición y de la velocidad. Se estudia aquí la ecuación del péndulo, tomando esa oportunidad para dar una mirada rápida en la teoría de las funciones elípticas, la ecuación de los movimientos amortiguados bajo la acción de una fuerza casi elástica y de una función sinusoidal del tiempo, el movimiento de un proyectil y de un aeroplano en un medio resistente. Estamos todavía en el dominio de la mecánica racional, más que de la ingeniería porque las ecuaciones diferenciales derivan directamente de datos globales sobre las fuerzas actuantes sobre el baricentro. Pero deseamos detenernos un momento sobre el problema del figoide ⁽¹⁾ — el que más se aproxima al dominio de las aplicaciones — para explicar sobre el ejemplo algún punto de vista personal.

Después de unas transformaciones elementales, se trata de integrar la ecuación lineal

$$\frac{d}{d\zeta} (\cos \vartheta) + \frac{1}{2\zeta} \cos \vartheta = \frac{1}{2}; \quad (1)$$

ϑ es el ángulo de la tangente a la trayectoria con el eje horizontal, ζ es, salvo un factor, la distancia vertical, considerada como creciente hacia abajo; se escribe sin dificultad la solución en la forma

$$\cos \vartheta = \frac{\zeta}{3} + \frac{A}{\sqrt{\zeta}} \quad (A \text{ constantes de integración}); \quad (2)$$

un diagrama presenta en el libro las curvas representadas por (2), para distintos valores de A , tomando como coordenadas ζ y $\cos \vartheta$, y agregando las palabras siguientes: “notamos que solamente la faja $\zeta > 0$, $-1 < \cos \vartheta < 1$ tiene significado físico”.

Creemos que la primera educación que se debe impartir al principiante para que adquiera confianza en la potencialidad de la matemática en relación a las aplicaciones esté en enseñar que un problema, cuando sea bien puesto, no puede pedir todavía el recurso al significado físico para juzgar de la validez del resultado matemático. En el caso presente las ecuaciones han sido escritas considerando ϑ como una variable real — creciendo o decreciendo con el tiempo t , — y no tienen sentido matemático fuera de este dominio. Podía hacerse en (1) una sustitución $\cos \vartheta = \eta$ como artificio gráfico para la comparación con la forma típica de la ecuación lineal, pero observando que la nueva ecuación equivalía a la (1) sólo internamente al campo en que la sustitución tiene sentido (en los extremos del campo no hay equivalencia entre las derivadas

⁽¹⁾ La palabra *phygoid*, para señalar una esquematización del aeroplano se debe a LANCHESTER (*Aerodnetics*), derivándola del griego $\varphi\upsilon\gamma\eta$; cabe observar, como lo hace Runge en la traducción alemana del libro, (*Aerodynamik* - Teubner - Leipzig n. Berlin - 1909) que el nombre y la derivación son impropios, significando $\varphi\upsilon\gamma\eta$ fuga y no vuelo.

de $\cos \vartheta$ y de η , y la validez de la solución sigue sólo de una razón de continuidad); pero la solución tenía sentido sólo en cuanto la variable es ϑ y sin más $\cos \vartheta$ varía entonces entre -1 y 1 y ζ toma (periódicamente) los valores correspondientes.

Si entonces $A \neq 0$, resulta sin más que no puede ζ pasar por el valor 0 , por lo cual será efectivamente siempre > 0 , si tal se ha puesto su valor inicial. Si al contrario $A = 0$, se presenta efectivamente un caso de excepción en el cual es necesario adentrarse más en el análisis mecánico; en efecto la ecuación (2) no dice más nada sobre el comportamiento de ϑ y ζ , o mejor diría que, pasando ϑ por el valor $\frac{\pi}{2}$, podría seguir creciendo y ζ pasaría a valores negativos; pero se debe notar que la ecuación diferencial y su solución dejan en este momento de representar el fenómeno físico, porque, para pasar de las ecuaciones iniciales a la (1) se hizo una multiplicación por la velocidad v que en este momento toma el valor 0 ; además la misma ecuación (1) adquiere en este momento una segunda solución, $\cos \vartheta = \text{const.} = 0$; no es cierto en efecto que el figoide recorra a continuación otra semicircunferencia por debajo del eje $\zeta = 0$, como aparecería de la figura siguiente (10.2) del libro, sino que se caería verticalmente.

La discusión de la ecuación (2) lleva a otra observación interesante. Se ve fácilmente que para $A < 0$, variando ζ de 0 a ∞ el segundo miembro varía de $-\infty$ a $+\infty$ ⁽¹⁾; por lo tanto hay siempre un intervalo de valores positivos de ζ para los cuales este segundo miembro toma valores entre -1 y $+1$; al contrario, si $A > 0$, dicho segundo miembro alcanza a un mínimo para $\zeta = \left(\frac{3A}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ y este mínimo es $\left(\frac{3A}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$; para que existan valores de ζ para los cuales este segundo miembro sea ≤ 1 es necesario que $A \leq \frac{2}{3}$; cuando esta condición está satisfecha con el signo $<$, se ve fácilmente que, al variar ζ dentro de cierto intervalo que comprende siempre el valor $\zeta = 1$ dicho segundo miembro toma valores comprendidos entre aquel mínimo y 1 ; al contrario, cuando $A = \frac{2}{3}$, sólo para $\zeta = 1$ toma el valor 1 y para los demás valores de ζ resulta > 1 . La ecuación (2) no representa pues en este caso una curva, sino que hay que discutir el sentido de la solución $\vartheta = 0$, $\zeta = 1$. Evidentemente no se puede más hablar entonces de solución de la ecuación (1); pero, debemos recordar que en cualquier problema mecánico la variable cierta es el tiempo t ; nuestra ecuación (1) se obtuvo eliminando tácitamente el t por medio de un cambio de variables, admisible sólo si la supuesta variable era verdaderamente tal. Si entonces se remonta a las ecuaciones primitivas, se reconoce que efectivamente ellas se pueden realizar con

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} = 0 ;$$

pero esta hipótesis, significando vuelo a altura constante, incluye que el valor

⁽¹⁾ Nótese que también para $\sqrt{\zeta}$ hay que considerar siempre la determinación positiva.

constante de ϑ debe ser 0, de donde sigue también $\zeta = 1$; se trata pues de los valores límite de ϑ y ζ encontrados arriba ⁽¹⁾.

En el libro se habla dos veces (p. 148, 149) de “puntos singulares de la ecuación diferencial”, señalando como tales los caracterizados por $\zeta = 0$, $\vartheta = 0$, y por $\zeta = 1$, $\vartheta = 0$; pero pensamos que difícilmente el lector desprevenido va a entender el sentido de la indicación, primero porque ella está justificada sólo en un párrafo sucesivo (p. 190), cuyo valor es absolutamente abstracto y no encuentra aplicación aquí, ni en lo sucesivo; segundo porque falta la discusión mecánica que arriba hemos esbozado, la cual es la única que justifica un interés particular para estos valores; tercero porque los dos “puntos singulares” no son tales para la misma ecuación, sino para dos distintas, transformadas la una de la otra por un cambio de variables, casi para mostrar que el concepto es contingente a las variables elegidas y no esencial ⁽²⁾.

Pedimos disculpa si el análisis de un problema particular nos ha llevado a desarrollos por cierto exorbitantes del examen crítico del libro. Seguiremos ahora en un rápido informe sobre el contenido de ello.

El capítulo V trata de las pequeñas oscilaciones de los sistemas conservativos; el hecho de tratarse de *pequeñas* oscilaciones alrededor de una posición de equilibrio, permite de tratar la función potencial como una forma cuadrática de las coordenadas de Lagrange a coeficientes constantes y la energía cinética como forma cuadrática a coeficientes constantes de las derivadas; las ecuaciones de Lagrange se reducen a un sistema de ecuaciones lineales de segundo orden, bien conocido, del cual se hace un estudio general cuyos particulares sobrepasan posiblemente el programa práctico del volumen. Entre estos desarrollos merece cierta atención el concepto de oscilaciones principales y de su ortogonalidad, más que todo porque dejando olvidada una muy conocida propiedad algebraica relativa a la reducción a forma normal de los pares de formas cuadráticas, estas propiedades se reencuentran con un procedimiento que tiene cierto interés por vincularse directamente a la resolución del sistema diferencial. Se aprovecha la oportunidad de tener que resolver la ecuación característica para hablar de la resolución numérica de ecuaciones algebraicas según los métodos de iteración y de Graeffe; se da cierta importancia al mecanismo del cálculo de matrices que se utiliza para calcular por iteración las

⁽¹⁾ Notamos que el vuelo a altura constante no era necesario admitirlo como posible a priori, en cuanto todo procede en la deducción independientemente de eso; ello resulta de lo dicho.

⁽²⁾ En el libro se observa que en el punto singular la derivada de la función incógnita resulta indeterminada, lo que la experiencia misma del problema demuestra que no es. Si tuviésemos que aplicar el concepto de Lie de la ecuación diferencial $f(x, y, y') = 0$ según el cual ella determina en el espacio de tres coordenadas x, y, y' una doble infinidad de elementos, la afirmación sería exacta; pero el mismo concepto sigue diciendo que soluciones de la ecuación diferencial son aquellos sistemas de elementos que, además de realizar la ecuación, realizan la condición $y' = dy/dx$ y hay casos como el presente (y, si fuera necesario, caracterizables con bastante generalidad) en los cuales esta condición elimina la indeterminación. No vale la pena agregar que no consideramos el concepto de Lie como perteneciente a la matemática aplicada elemental.

raíces de la ecuación característica. De la convergencia del procedimiento de iteración no se da demostración, correspondiendo esto al programa práctico del libro.

Esencialmente la misma teoría prosigue en el siguiente cap. VI, donde, bajo el título de “pequeñas oscilaciones de sistemas no conservativos”, se estudian primero las condiciones de estabilidad del ala batiente, luego se pasa a los sistemas disipativos donde las fuerzas dependen linealmente, además que de las coordenadas, también de las velocidades, poniendo de relieve (aquí y también en oportunidades que se presentaran en los capítulos siguientes) la analogía entre sistemas amortiguados mecánicos y sistemas eléctricos oscilantes.

El cap. VII “las ecuaciones diferenciales de la teoría de las estructuras” es posiblemente aquel donde más completamente se trata un problema de ingeniería, el problema estático y dinámico de las cuerdas y barras elásticas. Tratando, máximamente para el caso de la barra, las varias hipótesis de apoyo en las extremidades y sobre un suelo elástico, se estudia largamente dos conocidas ecuaciones lineales de segundo y de cuarto orden, con aplicación al estudio de la deformación de un tubo sujetado a presión desde el interior, al equilibrio del puente colgante, a la flexión de una columna bajo su propio peso, etc. El capítulo termina con algunas noticias sobre autovalores y su determinación por iteración. Con el capítulo VIII volvemos a consideraciones más generales, tratándose de las series de Fourier y su aplicación a problemas estructurales análogos a los anteriores. El capítulo termina con algunos ejemplos de aplicación del método de Rayleigh-Ritz a la resolución de problemas de contorno por aproximación mediante polinomios trigonométricos.

El volumen termina con tres capítulos de carácter más que todo complementario sobre la representación compleja de los fenómenos periódicos, las integrales de Fourier y el cálculo operacional y el cálculo por diferencias finitas.

Al término de cada capítulo una colección de problemas sirve muy útilmente para atraer la atención del lector sobre los temas desarrollados, complementando en el mismo tiempo la orientación hacia las aplicaciones. En este sentido no podría dejarse de recalcar la importancia del libro, sea para los lectores adiestrados en los capítulos fundamentales del análisis que desean informaciones sobre los problemas proporcionados por la práctica, sea para señalar a los que se dirigen a la práctica los capítulos del análisis que mayormente tendrán que interesarlos; uno y otro programa responden plenamente al título del libro.

B. LEVI

MARIO O. GONZÁLEZ. *Introducción al Análisis Matemático*. Matanzas, 1940.

Se trata de una exposición muy prolija del desarrollo de la noción de número, en sus etapas de número natural, racional, relativo y complejo (ordinario), a lo que se agrega, en el Cap. V, el *cálculo con números aproximados*, pero teniendo en cuenta casi exclusivamente la representación decimal. Como método, el autor da preferencia a las teorías cardinales; particularmente en el primer capítulo la teoría de los números enteros se basa sobre la noción de con-

junto finito; no hay duda que los conceptos expuestos son claros, y dentro de la orientación elegida están lógicamente expuestos, pero entendemos que dado los fines eminentemente didácticos de la obra, las disquisiciones filosóficas que es necesario realizar para precisar aquellos, carecen de una importancia real inmediata para el estudiante, contribuyendo grandemente a que lo árido del tema le haga considerar el mismo y lo que sigue, poco accesible, con la consiguiente pérdida de cariño a la materia. Por eso creemos que podrían haberse agregado dichas consideraciones a las Notas, al final del Capítulo. En éstas observamos que, con todo acierto, se completa el tema con una exposición de las diversas teorías divergentes con los nombres de sus autores; es así como arranca desde la escuela pitagórica, hasta llegar a Dedekind, Capelli, B. Russell y Enriques, citando igualmente la teoría axiomática de Peano, a nuestro juicio lógicamente la más acertada. Más adelante se ocupa brevemente del método de Hilbert, exponiendo los axiomas sobre los cuales aquel fundamenta la Aritmética. Termina el Capítulo con una ejercitación adecuada a los temas desarrollados.

El Cap. II trata del número racional, cuya introducción realiza apoyándose en la teoría de la medición de magnitudes, para lo cual se ocupa de precisar previamente los conceptos de magnitud y cantidad, pasando a continuación a definir el número racional como representante de una cantidad lineal, concluyendo por estudiar las propiedades fundamentales, y definir las operaciones con los nuevos entes. En las Notas, luego de desarrollar brevemente una reseña histórica de los números racionales, se ocupa de las teorías modernas, citando entre las teorías analíticas (esto es, aquellas que aspiran a desligar el concepto de número de la intuición de cantidad), la teoría de los pares de números enteros debida a Hankel y desarrollada por Tannery, Stolz, etc., la teoría operatoria de Méray-Peano, la de B. Russell, y la de Kronecker, por medio de congruencias. Entre las teorías sintéticas (es decir aquellas que consideran los entes numéricos en su relación con las magnitudes), cita los trabajos de Capelli, sobre las equivalencias, de F. Panizza, y la de Burali Forti, análoga por muchos conceptos a la de Méray-Peano citada. Termina el Capítulo, luego de citar algunos trabajos del autor, con el planteamiento de numerosos ejercicios sobre la teoría desarrollada.

En el Cap. III, se ocupa del número relativo, basando su definición en la teoría de las magnitudes, desarrollando luego en las Notas, tal como lo hace en las anteriores, una reseña histórica del tema, como así también las diversas teorías analíticas existenciales, comenzando por la teoría formal de Weierstrass, continuando luego con la teoría de los pares de números racionales, ocupándose luego de la teoría operatoria de Méray-Peano, de B. Russell y de las congruencias de Kronecker, completando la primera parte de estas teorías con una exposición de la axiomática de Padoa, quien, haciendo abstracción del conocimiento previo de los números naturales, considera como ideas primitivas las de número entero relativo, sucesivo de un número, y simétrico de un número enunciando los correspondientes postulados. Se ocupa a continuación de las teorías sintéticas modernas, citando a Capelli, Burali-Forti, y, a los efectos de considerar a los números relativos como una ampliación del campo numérico racional desarrolla el concepto de conjuntos isomorfos, introducido por Cipolla.

Completa las Notas con una digresión sobre la justificación lógica de empleo los signos $+$ y $-$, aplicando el concepto de isomorfismo, terminando el capítulo con el planteo de ejercicios adecuados.

El Cap. IV está dedicado al número real, para definir el cual utiliza la clásica definición de Dedekind, por medio de cortaduras en el campo de los números racionales, que luego sustituye, por su interés práctico, con la introducción de clases contiguas, demostrando sucesivamente las propiedades fundamentales de los números reales. Más adelante se ocupa detalladamente de las operaciones aritméticas con los números reales, con claridad y precisión, utilizando, cuando el interés didáctico lo exige, bien la definición por clases contiguas o bien por cortaduras en el campo de los números racionales. A continuación, se ocupa de las cortaduras en el conjunto de los números reales, y de las nociones sobre la potencia de los conjuntos infinitos. Creemos más bien que estas últimas consideraciones, precisamente por razones didácticas, dado el carácter de la obra y la importancia que tiene modernamente el concepto de potencia, numerabilidad, etc., debían figurar en un capítulo aparte. Con todo ello, los conceptos expuestos proveen dichas nociones fundamentales en forma clara. En las Notas, desarrolla en forma breve la historia del número irracional, llamando oportunamente la atención sobre las erróneas definiciones del mismo, que se dan aún en libros recientes, y luego pasa a ocuparse de las distintas definiciones que dieron origen a las modernas teorías. Se ocupa en una primera parte de las teorías analíticas, citando la de Weierstrass, en la que se define a los números reales por la consideración de conjuntos aditivos de números racionales. Luego cita las definiciones de Méray y Cantor, mediante la consideración de sucesiones convergentes de números racionales, como así la ya citada de Dedekind, y la de éste modificada por Cipolla, quién utiliza el concepto de segmentos numéricos, introducido por Pasch, en vez de cortaduras. Luego cita los trabajos de Arzela y Bachmann, quienes desarrollan la teoría del número real mediante la consideración de sucesiones monótonas convergentes de números racionales. Luego se ocupa del método desarrollado por Capelli, quien utiliza las clases contiguas y el de las congruencias de Kronecker para definir los irracionales algebraicos. En una segunda parte de estos comentarios se ocupa de la teoría lógico-formal desarrollada por Burali-Forti, y de los estudios realizados por Grassmann, Hankel, Bettazzi, etc., sobre la teoría de las magnitudes. Termina el capítulo, tal como los anteriores, con numerosos problemas sobre los tópicos tratados en el mismo.

El Cap. V trata del cálculo con números decimales aproximados, sin duda todo un acierto, dado el carácter de la obra, pues con ello contribuye a inculcar en el estudiante la necesidad de restringir los cálculos al mínimo indispensable, de acuerdo a las necesidades del problema planteado, a la vez que influye intensamente para precisar conceptos ya enunciados.

El último Capítulo, se refiere al estudio de los números complejos, cuya teoría desarrolla en forma completa y precisa, efectuándose la introducción de los mismos, desde un punto de vista abstracto, el de Hamilton precisamente, sin otra guía que los principios de permanencia de Hankel. Luego estudia las operaciones con estos entes, llamando oportunamente la atención sobre la subsistencia de muchas propiedades de las demostradas para los números rea-

les. En las Notas al final del capítulo, se expone brevemente, tal como en los anteriores, una síntesis de la historia, por muchos motivos interesante, de los números complejos. Entre las teorías analíticas modernas cita la adoptada en el texto, de Hamilton y Hankel, y entre las geométricas, las originadas con los trabajos de Wessel, Gauss y Argand, y desarrolladas por Bellavitis, Grassmann y Hamilton, que introducen el número complejo utilizando el concepto de vector y definiendo operaciones con vectores, para pasar luego a la representación analítica correspondiente. Cita igualmente la teoría analítica de Peano, desarrollada por Catania, y la de las congruencias de Kronecker. Más adelante se ocupa de mencionar los problemas a que ha dado lugar la consideración de los números complejos de orden superior, deteniéndose particularmente en la teoría de los cuaterniones. Termina el capítulo con numerosos ejercicios cuidadosamente seleccionados.

En resumen, se puede concluir que, tal como afirmamos al principio, la obra comentada es un excelente trabajo, accesible a los estudiantes, para el conocimiento de las nociones fundamentales sobre los números, permitiéndoles, con la lectura de las Notas, formar un terreno propicio para una profundización ulterior.

E. GASPÁR

Las "Mathematicae Notae" publican artículos, cuestiones, ejercicios, soluciones y correspondencia. La resolución de las cuestiones propuestas será publicada en números sucesivos de la revista al cabo de un tiempo razonable, a juicio del Director del Instituto, para obtener contestaciones de los lectores; de las cuestiones publicadas bajo el título de ejercicios la dirección se reserva la decisión, en cada caso, de publicar o no las respuestas.

A fin de año se adjudicarán dos premios:

1º Por concurso entre alumnos de la Facultad que contesten satisfactoriamente a cuestiones, problemas o ejercicios.

2º Por concurso entre todos los demás lectores del país o del extranjero que contesten en modo acertado a los mismos.

Los premios consistirán en tratados de extensión cultural o libros de especialización.

Las soluciones deben ser entregadas al Instituto en redacción clara y en hojas distintas para cada cuestión, problema o ejercicio. En cada hoja deberá señalarse el nombre del autor; los alumnos de la Facultad indicarán el año de estudios que cursan en la misma y, los de primer año, además la escuela media de la cual provienen. Estos elementos serán tenidos en cuenta para el juicio, conjuntamente con el valor intrínseco de las soluciones y la forma expositiva de las mismas, dándose por la Dirección la máxima importancia a la disposición por la cual se compararán sólo alumnos de igual preparación.

PUBLICACIONES
DEL
INSTITUTO DE MATEMATICAS
DE LA

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, FÍSICO-QUÍMICAS Y NATURALES
APLICADAS A LA INDUSTRIA
DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

Año 1939 - Vol. I.

	m\$n.
1 - B. LEVI — <i>Sobre el sistema $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xy)dx = p(y); \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xy)dy = q(x)$</i>	1.00
2 - L. A. SANTALÓ — <i>Geometría integral de figuras ilimitadas</i>	1.80
3 - F. AMODEO — <i>Origen y desarrollo de la Geometría proyectiva.</i> Trad. de Nicolás y José Babini	8.00
4 - B. LEVI — <i>Una teoría intuicionista de las funciones racionales enteras de una variable</i>	1.00

Año 1940 - Vol. II.

1 - P. MONTEL — <i>Funciones armónicas y subarmónicas</i>	1.00
2 - G. FUBINI — <i>La ley de la media para funciones no derivables.</i> B. LEVI — <i>Sobre un teorema de Weierstrass, el teorema de Rolle y el anterior teorema de Fubini</i>	1.00
3 - L. A. SANTALÓ — <i>Una demostración de la propiedad isoperimétrica del círculo</i>	1.20
4 - L. A. SANTALÓ — <i>Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas</i>	1.50
5 - I. Antecedentes de la creación del Instituto. II. Acto de inauguración oficial del Instituto. C. PLÁ — <i>Origen y propósitos del Instituto.</i> J. REY PASTOR — <i>La matemática italiana en el último medio siglo y la posición del Dr. Beppo Levi en ella.</i> B. LEVI — <i>Evolución del pensamiento matemático</i>	1.50
6 - E. GASPAR — <i>Fórmulas integrales referentes a intersección de una figura plana con bandas variables</i>	1.50
7 - A. ROSENBLATT — <i>Sobre el teorema de los grandes números en la teoría de la probabilidad</i>	1.00
8 - M. COTLAR — <i>Sobre conjuntos no medibles y generalización de la integral de Lebesgue</i> - Prólogo por B. Levi	1.50
9 - B. LEVI — <i>La noción de "dominio deductivo" como elemento de orientación en las cuestiones de fundamentos de las teorías matemáticas</i>	1.50

Año 1941 - Vol. III.

1 - Homenaje a la memoria de V. Volterra y J. J. Thomson. C. PLÁ — <i>Semblanza de Sir Joseph J. Thomson.</i> B. LEVI — <i>La personalidad de Vito Volterra</i>	1.00
2 - G. FUBINI — <i>Algunas propiedades de los grupos discontinuos finitos</i>	2.50
3 - B. LEVI — <i>Teoría de la integral de Lebesgue independiente de la noción de medida</i>	3.00
4 - B. LEVI — <i>Sobre la inversión de una integral definida</i>	1.20
5 - L. A. SANTALÓ — <i>Curvas extremales de la torsión total y curvas-D.</i>	2.00
6 - A. TERRACINI — <i>Orígenes de algunos conceptos geométricos</i>	2.00