



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO

TESINA DE GRADO
PARA LA OBTENCIÓN DEL GRADO DE
LICENCIADA EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

Brecha de Dualidad y límites de tipo Ramsey para familias de grafos de intersección de rectángulo

Autor:
Margarita Capretto

Director:
Dr. Parinya Chalermsook
Co-Director:
Dr. Pablo Torres

Departamento de Ciencias de la Computación
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Av. Pellegrini 250, Rosario, Santa Fe, Argentina

10 de marzo de 2021

Índice general

	Página
Índice general	II
1 Introducción	1
2 Preliminares	5
2.1. Parámetros de un grafo	7
2.2. Clases de grafos	10
2.3. Número de Ramsey	22
2.4. Algoritmos y complejidad	24
3 Preguntas extremales	27
3.1. Brecha de dualidad	27
3.2. Conjunto independiente máximo vs. límites de Ramsey	29
3.3. Conjunto independiente ponderado máximo vs. coloreo fraccional	31
4 Cotas para grafos de rectángulos libre de triángulos	35
4.1. Coloreo	36
4.2. Número de Ramsey	40
4.3. Brecha de dualidad	46
5 Cotas para grafos de rectángulos	51
5.1. Coloreo	51
5.2. Número de Ramsey	54
5.3. Brecha de dualidad	57
6 Conclusiones y trabajo futuro	61
Bibliografía	63

Capítulo 1

Introducción

Muchos problemas del mundo real se pueden representar mediante grafos, por lo que no es de extrañar que los algoritmos de grafos tengan aplicaciones en distintas áreas como informática, biología, lingüística, física, ciencias sociales, química, ingeniería eléctrica, entre otras.

Dos problemas clásicos en teoría de grafos son el problema de encontrar un *conjunto independiente máximo* (MIS, por su siglas en inglés) y el de encontrar un *conjunto de golpe mínimo* (MHS, por su siglas en inglés). Ambos problemas son *NP-difíciles*, lo que significa que no podemos esperar encontrar un algoritmo eficiente que resuelva exactamente a ninguno de ellos (a menos que $P = NP$). Un enfoque natural para manejar estos problemas de optimización NP-difíciles es encontrar un algoritmo eficiente cuya calidad de solución esté cerca de la óptima. A estos algoritmos los llamamos *algoritmos de aproximación*. Los algoritmos de aproximación se han estudiado ampliamente durante las últimas décadas, y estos estudios han producido hermosos resultados que conectan muchas áreas de la informática y las matemáticas, como algoritmia, optimización, combinatoria, geometría y probabilidad. Desafortunadamente, incluso los algoritmos de aproximación no pueden manejar MIS ni MHS en su totalidad: se sabe que son problemas extremadamente difíciles de aproximar (asumiendo $P = NP$) [24]. De nuevo, esto no es una sorpresa, ya que tanto MIS como MHS capturan muchos problemas de optimización del mundo real. Por lo tanto, es natural considerar una familia restringida de grafos, y una extensa lista de literatura se ha centrado en esto. De hecho, hay algunos casos restringidos, como los grafos perfectos [21], donde MIS se puede resolver exactamente en tiempo polinomial. Sin embargo, más allá de los grafos perfectos, no existe una teoría sistemática que caracterice instancias fáciles para MIS.

Una clase de grafos ampliamente estudiada, que es independiente de la clase de grafos perfectos, es aquella en la que los vértices representan a rectángulos en el plano con los lados paralelos a los ejes y hay una arista entre dos de ellos si sus correspondientes rectángulos se intersecan, esta clase de grafos se llama entonces *grafos de intersección de rectángulos* o simplemente *grafos de rectángulos*. Esta clase fue introducida por Roberts

[37] y tiene aplicaciones prácticas en diversas áreas, incluyendo la minería de datos [15, 28, 30], el etiquetado de mapas [1, 13] y controles de admisión de canales con reserva previa [31]. Un caso especialmente interesante (desde el punto de vista del estudio de la complejidad de los problemas geométricos) es cuando todos los rectángulos son cuadrados y, por lo tanto, esta clase se conoce como *grafos de intersección de cuadrados* o simplemente *grafos de cuadrados*. Otro caso interesante [8, 12, 26], que modela tanto relaciones entre fragmentos de ADN en estudios de asociación de todo el genoma, así como también problemas básicos de transmisión en telecomunicaciones [8], es cuando hay una recta no paralela a los lados de los rectángulos que contiene la esquina superior izquierda de cada rectángulo. Siguiendo [26], llamamos a esta clase *grafos de ganchos*.

El objetivo principal de esta tesis es estudiar las clases de grafos antes mencionadas, que son entradas relativamente fáciles para los problemas MIS y MHS, a través de la teoría de grafos extremales, que (en términos generales) estudia relaciones entre invariantes de grafos (por ejemplo, ¿cuál es número máximo de vértices en un grafo que no tiene ninguna clique ni ningún conjunto independiente de tamaño 10?). La teoría de grafos extremales es un campo antiguo y bien desarrollado de las matemáticas cuya historia se remonta a 1941¹. Muchos resultados algorítmicos fuertes sobre MIS y MHS (por ejemplo, algoritmos para grafos perfectos) se basan fundamentalmente en una hermosa conexión entre la optimización y los problemas extremales. En particular, nos centraremos en la *brecha de dualidad*, el *número de Ramsey* y la relación entre el *número cromático* y el *número de clique* para las familias de grafos de intersección de rectángulos nombradas anteriormente, dado que estudios matemáticos sobre estas preguntas extremales implican directamente algoritmos de aproximación para MIS y MHS [3, 11].

La *brecha de dualidad* es la relación entre el número de golpe y el número de independencia. Ha atraído una atención significativa desde los años sesenta, cuando Wegner [38] conjeturó que siempre está acotada superiormente por 2 para cualquier grafo de rectángulos. Hixon [26] y Correa et al. [12] demostraron, de forma independiente, que esto es cierto para los grafos de ganchos. Sin embargo, la cota inferior más grande conocida para la brecha de dualidad es de $\frac{3}{2}$ que se obtiene por el ciclo de longitud 5. Para los grafos de rectángulos, la cota superior más chica conocida hasta la fecha es de $\mathcal{O}((\log \log n)^2)$ y fue obtenido por Correa et al. [12] combinando los resultados previos de Chalermsook y Chuzhoy [10] y Aronov et al. [3]. También presentaron un conjunto infinito de grafos de rectángulos libres de triángulos cuya brecha de dualidad está arbitrariamente cerca de 2, que es la cota inferior más grande conocida para esta clase de grafos. Para los grafos de rectángulos, otra cuestión desafiante y aún sin resolver es la de encontrar una cota superior ajustado para el número cromático como función del número de clique. La cota superior más chica conocida hasta el momento es cuadrático en el número de clique [25] mientras que la cota inferior más grande se da en un grafo de rectángulos libres de triángulos que es 6-coloreable y fue presentado por Asplund y

¹Esto fue cuando Pál Turán demostró resultados sobre el número de aristas en grafos cuando el tamaño de la máxima clique está limitado.

Grünbaum [6]. En ese mismo paper, también demostraron que esta cota es ajustado para grafos de rectángulos libres de triángulos, al presentar un grafo de rectángulos libre de triángulos con 10^8 vértices que no es 5-coloreable. Hixon [26] demostró que para los grafos de ganchos el número cromático está acotado superiormente por $\mathcal{O}(\omega(G) \log \omega(G))$, donde $\omega(G)$ es el número de clique y que todos los grafos de ganchos libres de triángulos son 4-coloreables. Sin embargo, hasta la fecha, los ciclos de longitud impar son los grafos de ganchos donde la razón entre el número de clique es la mayor conocida, que es solo $3/2$. El *número de Ramsey* $R(s, t)$, correspondiente al mínimo n tal que cualquier grafo con n vértices contiene una clique de tamaño t o un conjunto independiente de tamaño s , no ha sido estudiado para estas clases de grafos aún. Lo incluimos en este trabajo, ya que como se explica en [11], está fuertemente relacionado con el problema del conjunto independiente máximo para los grafos de rectángulos, cuadrados y ganchos.

En los siguientes capítulos ofrecemos un tratamiento integral de estos problemas, presentando tanto resultados ya conocidos como resultados nuevos obtenidos durante el trabajo de esta tesis.

El resto de la tesis se divide en 5 capítulos. En el Capítulo 2 se proporcionan conocimientos básicos, definiciones y se fija la notación que se utilizará. El Capítulo 3 describe la relación entre MIS y MHS y cómo algunas preguntas extremales pueden conducir a algoritmos de aproximación para estos problemas cuando se restringen a grafos de intersección de rectángulos. En el Capítulo 4 se investigan estos problemas extremales para grafos de rectángulos, cuadrados y ganchos libres de triángulos, mientras que en el Capítulo 5 se trabaja sobre los mismos interrogantes pero sin limitar el número de clique. Finalmente, en el Capítulo 6 se presentan las conclusiones de la tesis y algunas posibles líneas de trabajo para seguir explorando.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo proporcionamos algunos preliminares básicos y fijamos la notación que se utilizará a lo largo de esta tesis.

Un *grafo* es un par $G = (V, E)$ donde V es un conjunto finito de elementos llamados *vértices* y E es un conjunto de pares de vértices, cuyos elementos se llaman *aristas*. Si $e = uv \in E$ decimos que e conecta v con u y que u y v son *adyacentes*. Usamos n y m para denotar el número de vértices y aristas respectivamente, es decir, $n = |V|$ y $m = |E|$. También usamos $|G|$ para denotar el número de vértices en G . En esta tesina trabajamos siempre con *grafos simples*, es decir, cada par de vértices distintos están conectados por a lo sumo una arista y no se permiten aristas que conecten a un vértice consigo mismo.

La forma habitual de representar un grafo G es dibujar un punto para cada vértice en V y cuando hay una arista entre dos vértices dibujar una curva que conecte ambos puntos. Por ejemplo, si $V = \{a, b, c, d, e\}$ y $E = \{ab, bc, cd, de, ea, ac, ce\}$, entonces G se puede dibujar como se muestra en la Figura 2.1:

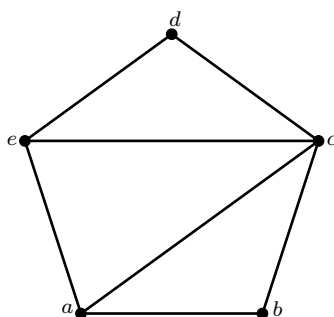


Figura 2.1: Representación de un grafo G con conjunto de vértices $V = \{a, b, c, d, e\}$ y conjunto de aristas $E = \{ab, bc, cd, de, ea, ac, ce\}$

Aunque esta es una forma muy natural de representar un grafo no se debe confundir un grafo con su dibujo, ya que un grafo puede tener diferentes representaciones.

Las propiedades de grafos que estudiamos aquí no dependen de los “nombres” de sus vértices sino de la estructura del grafo. Por esto definimos el isomorfismo entre grafos: dos grafos G y H son *isomorfos*, y lo denotamos como $G \simeq H$, cuando hay una biyección entre los conjuntos de vértices, $\phi : V(G) \rightarrow V(H)$, de manera que uv es una arista en G si y solo si $\phi(u)\phi(v)$ es una aristas en H .

Por ejemplo, el grafo G_1 que se muestra en la Figura 2.2 es isomorfo al grafo G de la Figura 2.1, ya que la biyección ϕ con $\phi(a) = v_2$, $\phi(b) = v_1$, $\phi(c) = v_3$, $\phi(d) = v_5$, $\phi(e) = v_4$ satisface la condición de isomorfismo. Mientras que el grafo G_2 en la Figura 2.2, a pesar de tener el mismo número de vértices y el mismo número de aristas, no es isomorfo a ellos.

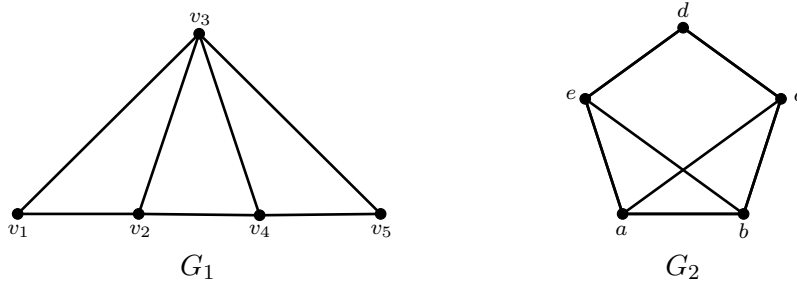


Figura 2.2: El grafo G_1 es isomorfo al grafo G representado en la Figura 2.1. Pero el grafo G_2 no es isomorfo a ellos.

Un *subgrafo* de un grafo G es un grafo H tal que $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. Por lo general, consideraremos subgrafos que difieren ligeramente del grafo original. En particular, nos interesará el subgrafo $G \setminus v$ que se obtiene al eliminar el vértice v y todas las aristas de G incidentes en v .

Si en lugar de eliminar solo un vértice eliminamos un conjunto de vértices, obtenemos un subgrafo que se conoce como *subgrafo inducido*. Formalmente, dado un grafo G y un subconjunto de vértices $U \subseteq V$, definimos el subgrafo de G inducido por U , $G[U]$ como resultado de eliminar todos los vértices en $V \setminus U$ y todas las aristas incidentes en los vértices removidos.

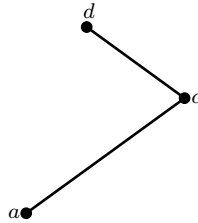


Figura 2.3: Subgrafo de G (Figura 2.1) inducido por $\{a,c,d\}$.

Si tenemos un grafo G y una partición de su conjunto de vértices en p subconjuntos $V = V_1 \cup \dots \cup V_p$, los subgrafos inducidos por cada uno de estos subconjuntos $G_i = G[V_i]$

generan lo que se conoce como una *partición por vértice* de G . Por otro lado, una *partición por aristas* de $G = G_1 \cup \dots \cup G_{p'}$ se obtiene mediante los subgrafos $G_i = (V, E_i)$ donde $E = E_1 \cup \dots \cup E_{p'}$ es una partición de su conjunto de aristas E .

Uno de los parámetros más importantes de un vértice es su vecindad y su grado, que se definen como sigue:

Dado un grafo G y un vértice $v \in V$, definimos el *vecindario* de v , denotado como $N(v)$, como el conjunto de todos los vértices adyacentes a v . El *grado* de v es el tamaño de su vecindario y lo denotamos con $d(v)$. El *grado máximo* de G , denotado como $\Delta(G)$, es el grado máximo de un vértice en G , mientras que el *grado mínimo* de G , $\delta(G)$, es el grado mínimo de un vértice en G , es decir, $\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V\}$ y $\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V\}$.

Por ejemplo, en el grafo G de la Figura 2.1, $N(a) = \{b, c, d\}$, $d(a) = d(e) = 3$, $\Delta(G) = 4 = d(c)$ y $\delta(G) = 2 = d(b) = d(d)$.

2.1. Parámetros de un grafo

En esta sección estudiamos 3 parámetros de grafos que tienen muchas aplicaciones prácticas y se han estudiado extensamente:

- Un *coloreo* de un grafo G es una función $f : V \rightarrow C$ que asigna a cada vértice de G un color en C . Un coloreo es *válido* si no hay dos vértices adyacentes que reciben el mismo color. Un *k-coloreo* es un coloreo válido en el que se usan no más de k colores, es decir, $|C| \leq k$. Se suele utilizar C como el conjunto que contiene los primeros $|C|$ naturales. Un grafo es *k-coloreable* si tiene un *k-coloreo*. El *número cromático* de un grafo G , denotado por $\chi(G)$, es el mínimo k tal que G es *k-coloreable*.
- Un *conjunto independiente* es un conjunto de vértices tal que cualesquiera dos vértices distintos del conjunto no son adyacentes. El *número de independencia* de un grafo G , denotado por $\alpha(G)$, es el tamaño máximo de un conjunto independiente de G .
- Una *clique* es un conjunto de vértices donde cada par de vértices distintos del conjunto son adyacentes. El *número de clique* de un grafo G , denotado por $\omega(G)$, es el tamaño máximo de una clique de G .
- Un *cubrimiento por cliques* de un grafo es una partición de su conjunto de vértices en cliques. El *número de cubrimiento por cliques* de un grafo G , denotado por $\theta(G)$ es el mínimo número de cliques que se necesitan para un cubrimiento por cliques.

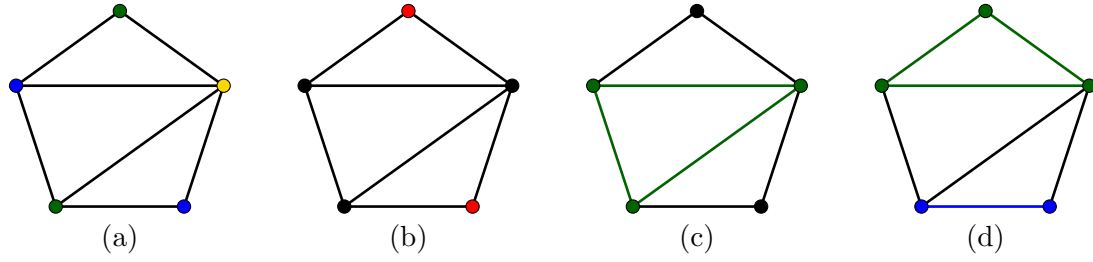


Figura 2.4: Ejemplo de (a) 3-coloreo, (b) conjunto independiente máximo (vértices en rojo), (c) clique (vértices en verde), (d) cubrimiento por cliques

Notemos que si un grafo tiene un conjunto independiente de tamaño k entonces se necesitan al menos k cliques para cubrir al grafo, una por cada vértice del conjunto independiente, ya que claramente ningún par de vértices del conjunto independiente están en una misma clique. Por lo tanto,

Lema 2.1.1 *Para cualquier grafo G , $\alpha(G) \leq \theta(G)$.*

También notemos que un coloreo de un grafo corresponde a una partición de sus vértices en conjuntos independientes. Más aún, cualquier partición de los vértices de un grafo en conjuntos independientes puede usarse para obtener un coloreo de un grafo. Por consiguiente,

Lema 2.1.2 *Un grafo G es k -coloreable si y solo si $V(G)$ se puede particionar en k conjuntos independientes.*

Prueba: ($\Rightarrow$) Podemos usar cualquier k -coloreo de G para particionar su conjunto de vértices en k subconjuntos de manera que dos vértices estén en el mismo subconjunto si y solo si se les asignó el mismo color. Dos vértices con el mismo color no pueden ser adyacentes y, por lo tanto, cada subconjunto es un conjunto independiente.

($\Leftarrow$) Consideremos una partición de V en k conjuntos independientes. A todos los vértices de un conjunto independiente se les puede asignar el mismo color, por lo que podemos tener un k -coloreo dándole simplemente un color diferente a cada subconjunto.

□

Entonces, por el principio del palomar, tenemos que el número de vértices en un grafo, su número de independencia y su número cromático están relacionados de la siguiente manera:

Corolario 2.1.3 *Para cualquier grafo G , $\alpha(G) \geq \frac{n}{\chi(G)}$.*

El número cromático de un grafo también está relacionado con su número de clique: cualquier coloreo de una clique C debe usar al menos $|C|$ colores, ya que no se puede asignar el mismo color a dos vértices de una clique, esto implica que el número de clique de un grafo es una cota inferior para su número cromático:

Lema 2.1.4 *Para cualquier grafo G , $\omega(G) \leq \chi(G)$.*

En la Figura 2.4 hay un grafo G que es 3-coloreable y tiene una clique de tamaño 3, lo que implica que $\chi(G) \leq 3 \leq \omega(G)$ y por el lema anterior, $\chi(G) = 3 = \omega(G)$. Esto muestra que esta cota es ajustada para algunos grafos.

Sin embargo, hay grafos para los que esta cota puede ser bastante amplia. De hecho, ya en 1955, Mycielski [35] dio una construcción que toma un grafo y devuelve un grafo más grande con el mismo número de clique, pero con el número cromático aumentado en 1, en otras palabras, dio una forma de convertir un grafo G en un grafo G' tal que $\omega(G') = \omega(G)$ pero $\chi(G') = \chi(G) + 1$. Por lo tanto, aplicando repetidamente esta construcción, es posible obtener un grafo donde la diferencia entre el número cromático y el número de clique es arbitrariamente grande.

Otra forma de limitar el número cromático de un grafo es particionando al grafo, ya sea por vértices o aristas, calcular el número cromático en cada partición y luego combinarlos como se presenta en los siguientes lemas:

Lema 2.1.5 *Si particionamos un grafo $G = G_1 \cup G_2$ por vértices, entonces $\chi(G) \leq \chi(G_1) + \chi(G_2)$*

Prueba: Dado un $\chi(G_1)$ -coloreo c_1 de G_1 y un $\chi(G_2)$ -coloreo c_2 de G_2 podemos construir un coloreo c de G que asigne a cada vértice $v \in V(G_1)$ el mismo color que c_1 y a cada vértice $v \in V(G_2)$ le asigna $\chi(G_1) + c_2(v)$, luego c usa como máximo $\chi(G_1) + \chi(G_2)$ colores diferentes. Claramente, c es un coloreo válido de G dado que si a dos vértices se les asigna el mismo color entonces pertenecen a la misma partición y también deben haber recibido el mismo color en el coloreo de esa partición y, por lo tanto, no son adyacentes. $\square$

Lema 2.1.6 *Si particionamos un grafo $G = G_1 \cup G_2$ por aristas, entonces $\chi(G) \leq \chi(G_1)\chi(G_2)$*

Prueba: Dado un $\chi(G_1)$ -coloreo c_1 de G_1 y un $\chi(G_2)$ -coloreo c_2 de G_2 podemos construir un coloreo c de G que asigne a cada vértice v un par de colores donde la primera componente es el color asignado por el coloreo c_1 y la segunda es el asignado por c_2 , es decir, $c(v) = (c_1(v), c_2(v))$. Para ver que c es efectivamente un coloreo de G , consideremos dos vértices v y u que son vecinos en G , también deben ser vecinos en G_1 o G_2 , entonces $c_1(v) \neq c_1(u)$ o $c_2(v) \neq c_2(u)$, lo que implica que $c(v) = (c_1(v), c_2(v)) \neq (c_1(u), c_2(u)) = c(u)$, como deseamos. Por lo tanto, c es un $\chi(G_1)\chi(G_2)$ -coloreo de G . $\square$

Veamos como podemos utilizar el lema anterior y su prueba para obtener un coloreo válido del grafo G representado en la Figura 2.1. Consideremos, por ejemplo, la partición del conjunto de aristas en $E_1 = \{ae, bc, cd\}$ y $E_2 = \{ab, ac, ce, de\}$ y los subgrafos $G_1 = (V, E_1)$ y $G_2 = (V, E_2)$ que esta partición genera. Ambos grafos son 2-coloreables ya que en G_1 podemos asignarle el mismo color a e y c , y otro distinto a a , b y d (ver

Figura 2.5.a) mientras que en G_2 podemos asignarle un color a a y e , y otro a b, c y d (ver Figura 2.5.b). De esta forma, como los únicos vértices que recibieron el mismo color en ambas coloraciones son b y d , una coloración válida para G es asignarle el mismo color a ambos y un color diferente a cada uno de los vértices restantes (ver Figura 2.5.c).

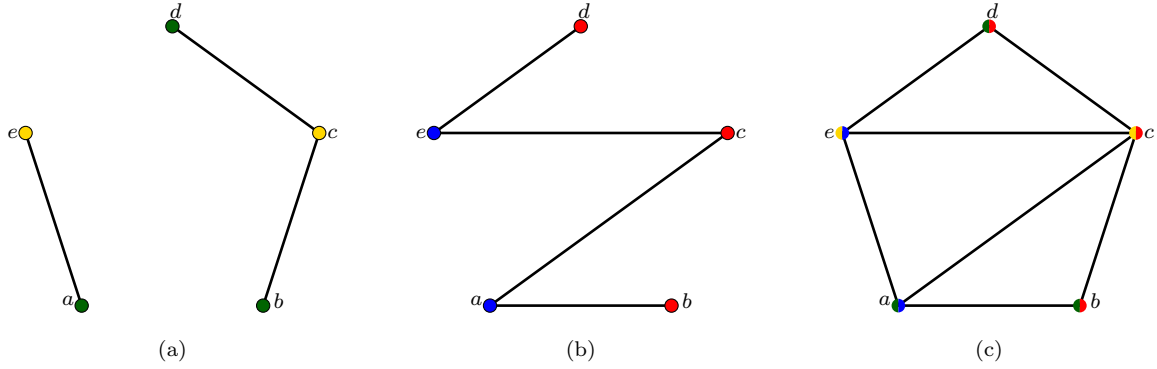


Figura 2.5: (a) 2-coloreo de G_1 , (b) 2-coloreo de G_2 , (c) 4-coloreo de G generado a partir de los 2-coloreo de G_1 y G_2

2.2. Clases de grafos

En esta sección presentaremos algunas clases de grafos y propiedades sobre ellas que serán útiles más adelante.

Ciclo Para $n \geq 3$, un *ciclo* C_n es un grafo con n vértices $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ tal que $E = \{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i < n\} \cup \{v_n v_1\}$.

Observemos que C_3 es isomorfo a una clique de tamaño 3 y, por tanto, $\omega(C_3) = 3$. Este grafo se conoce como *grafo triángulo* y si un grafo G no contiene ningún subgrafo que sea isomorfo a C_3 , es decir, $\omega(G) = 2$, es entonces un grafo *libre de triángulos*. Como ejemplo, todo C_n con $n > 3$ está libre de triángulos.

Ahora, analizaremos el número cromático para ciclos. Tendremos dos casos diferentes dependiendo de la paridad de n :

- n es par: si hay una arista entre dos vértices v_i y v_j entonces i y j deben tener distinta paridad y, por lo tanto, podemos asignar un color a cada vértice de la forma v_{2k} y otro color para cada vértice de la forma v_{2k+1} , lo que da un 2-coloreo para C_n .
- n es impar: Asumamos que hay un 2-coloreo de C_n . Entonces, si tenemos dos colores c_1 y c_2 , sin pérdida de generalidad, supongamos que se le asigna el color c_1 a v_1 , esto implica que a v_2 se le asigna c_2 y luego a v_3 se le asigna c_1 , y así sucesivamente. En general, a v_{2k+1} se le asigna el color c_1 y a v_{2k} se le asigna el color c_2 . Como n es impar, se asignó c_1 tanto a v_1 como a v_n pero $v_1 v_n \in E$ y, por

lo tanto, no existe un 2-coloreo válido para C_n . Obtener un 3-coloreo es fácil: para los vértices $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ asignamos solo dos colores alternativamente y luego asignamos un nuevo color a v_n .

Como consecuencia,

Lema 2.2.1 *Para un ciclo C_n :*

$$\begin{aligned}\chi(C_n) &= 2 \text{ si } n \text{ es par} \\ \chi(C_n) &= 3 \text{ de lo contrario}\end{aligned}$$

La Figura 2.6 muestra ejemplos sobre cómo colorear un ciclo con una longitud par y un ciclo con una longitud impar.

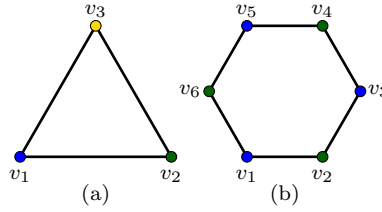


Figura 2.6: (a) Ciclo C_3 con un 3-coloreo, (b) 2-coloreo de un ciclo C_6 .

Grafos degenerados Un grafo G es k -degenerado si en cada subgrafo inducido de G hay un vértice con grado no mayor a k . Además, es posible encontrar un orden de sus vértices $v_1, v_2, \dots, v_n$ tal que para $1 \leq i \leq n$: $d(v_i) \leq k$ en $G[V_i]$ donde $V_i = \{v_1, v_2, \dots, v_i\}$.

Este concepto fue introducido por Lick y White en 1970 [32] y ampliamente estudiado en [7]. En 1983, Matula y Beck [33] describen un algoritmo que calcula en tiempo lineal el mínimo k para el cual un grafo es k -degenerado (ver Sección 2.4). Esto resulta muy útil ya que, como mostramos en el siguiente lema, este concepto puede utilizarse para obtener un límite superior del número cromático de un grafo k -degenerado.

Lema 2.2.2 *Si G es un grafo k -degenerado, entonces es $(k + 1)$ -coloreable.*

Prueba: Lo demostraremos por inducción en n , el número de vértices en G .

Si $n \leq k + 1$ entonces G es claramente $(k + 1)$ -coloreable, ya que podemos asignar un color diferente a cada vértice.

Ahora, supondremos que cada grafo k -degenerado con menos de n vértices es $(k + 1)$ -coloreable. Como G es k -degenerado, hay un vértice v con un grado no mayor a k . Consideremos el grafo $G \setminus v$: debido a que cada subgrafo inducido de éste es también un subgrafo inducido de G , tenemos que $G \setminus v$ es k -degenerado y, luego, por hipótesis inductiva, es $(k + 1)$ -coloreable. Dado un $(k + 1)$ -coloreo de $G \setminus v$ podemos obtener un $(k + 1)$ -coloreo de G simplemente asignando a v uno de los colores que no se usó en

ninguno de sus vecinos. □

Observemos que cualquier grafo G es $\Delta(G)$ -degenerado, en consecuencia:

Corolario 2.2.3 *Todo grafo G es $(\Delta(G) + 1)$ -coloreable.*

Por ejemplo, si consideramos el grafo G de la Figura 2.1, este resulta 2-degenerado, como puede verse por el orden $\{b, d, e, a, c\}$. Además, la Figura 2.4 muestra un 3-coloreo para este grafo.

Grafos perfectos Un grafo se llama *grafo perfecto* cuando su número cromático es igual a su número de clique, no solo en el mismo grafo, sino en todos sus subgrafos inducidos. Curiosamente, algunos problemas que son “difíciles” de resolver para grafos generales se pueden resolver de manera eficiente para grafos perfectos: encontrar el número cromático, el número de clique o el número de independencia se puede hacer en tiempo polinomial en grafos perfectos [21].

A continuación mencionamos algunas clases de grafos conocidas que son perfectos:

- *grafos completos*: un grafo se dice *completo* si cada par de vértices está conectado por una arista. Denotamos por K_n el grafo completo con n vértices. K_n es isomorfo a una clique de tamaño n , entonces $\omega(K_n) = n$ y, por Lema 2.1.4, $\chi(K_n) \geq n$. Asignando simplemente un color diferente a cada vértice se obtiene un n -coloreo, por lo tanto, $\chi(K_n) = n = \omega(K_n)$. Claramente, cualquier subgrafo inducido de un grafo completo es también un grafo completo. Lo que implica que los grafos completos son grafos perfectos.
- *grafos bipartitos* es la clase de grafos que contiene todos los grafos cuyo conjunto de vértices V puede particionarse en dos conjuntos disjuntos A y B de modo que cada arista en E conecta un vértice en A con un vértice en B . Además, cuando $E = A \times B$ se conoce como *grafo bipartito completo* y se denota por $K_{a,b}$, donde $a = |A|$ y $b = |B|$.

Como antes, cualquier subgrafo inducido de un grafo bipartito (completo) es también un grafo bipartito (completo). Luego, para ver que un grafo bipartito (completo) G es un grafo perfecto, solo necesitamos mostrar que su número cromático es igual a su número de clique. Si G no tiene aristas, entonces $\chi(G) = \omega(G) = 1$, por lo que asumiremos que $|E| > 1$ y, por lo tanto, $\omega(G) \geq 2$ y $\chi(G) \geq 2$. Según el Lema 2.1.2, G es 2-coloreable y, entonces, $\chi(G) = 2$. Luego, solo tenemos que demostrar que G es libre de triángulos. Esto sigue inmediatamente por la caracterización dada por König: un grafo es bipartito si y solo si no contiene ciclos de longitud impar.

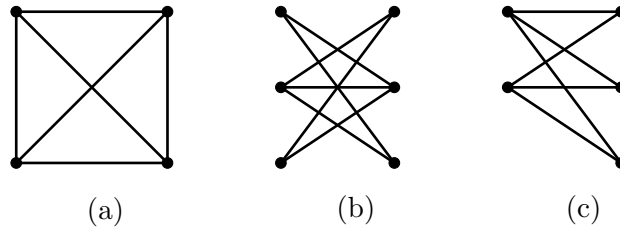


Figura 2.7: Ejemplo de (a) grafo completo K_4 , (b) grafo bipartito, (c) grafo bipartito completo $K_{2,3}$.

Grafos planares Un grafo es *planar* si se puede dibujar en el plano de tal manera que sus aristas solo se crucen en los puntos finales. Una definición más formal se puede encontrar en [29].

El teorema de Kuratowski da una condición necesaria y suficiente para la planaridad de un grafo que nos resultará útil más adelante. Pero antes de presentarla necesitamos definir subdivisión. Una *subdivisión* de un grafo G es el grafo obtenido mediante la aplicación de una secuencia de subdivisiones de aristas a G . Una *subdivisión de arista* para un arista $e = uv$ es la operación que elimina e de G y agrega un vértice w y las aristas uw y wv a G , como muestra la Figura 2.8



Figura 2.8: Una arista y su subdivisión

Ahora sí estamos en condiciones de enunciar el Teorema de Kuratowski.

Teorema 2.2.4 [29] *Un grafo es planar si y solo si no contiene un subgrafo que sea isomorfo a una subdivisión de K_5 o $K_{3,3}$.*

Un resultado famoso sobre los grafos planares es el teorema conocido como *Teorema de los cuatro colores* [2]. Ya se había conjeturado en la década de 1850, pero permaneció abierto hasta 1976, cuando Appel y Haken presentaron una prueba asistida por computadora. Fue el primer teorema importante que se demostró utilizando una computadora. Inicialmente, no fue ampliamente aceptado porque no se podía controlar a mano. Más tarde, en 1997, Robertson, Sanders, Seymour y Thomas presentaron una prueba más simple, pero aún dependía de las computadoras.

Teorema 2.2.5 [2] *Todo grafo planar es 4-coloreable.*

Otra propiedad sobre los grafos planares, que usaremos en el Capítulo 4 y fue probada por Grötzsch en 1959, es la siguiente.

Teorema 2.2.6 [22] *Todo grafo planar libre de triángulos es 3-coloreable.*

2.2.1. Grafos de intersección

Sea X un conjunto base, definimos un *grafo de intersección* como un grafo que se forma a partir de una familia de conjuntos $S_1, S_2, \dots, S_n \subseteq X$ creando un vértice v_i para cada conjunto S_i y conectando dos vértices v_i y v_j siempre que los dos conjuntos correspondientes tengan intersección no vacía.

Consideremos, por ejemplo, el conjunto base $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ luego el grafo de intersección G generado por los subconjuntos $S_1 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $S_2 = \{2, 4, 6, 8\}$, $S_3 = \{2, 3, 5, 7\}$, y $S_4 = \{1, 2, 3, 5, 8\}$ tiene cuatro vértices v_1, v_2, v_3 y v_4 , uno por cada conjunto y para saber cuáles son las aristas de G tenemos que ver cuando la intersección de dos de los conjuntos anteriores es no vacía:

$$\begin{array}{ll} S_1 \cap S_2 = \emptyset & \text{entonces } v_1 v_2 \notin E(G) \\ S_1 \cap S_3 = \{3, 5, 7\} \neq \emptyset & \text{entonces } v_1 v_3 \in E(G) \\ S_1 \cap S_4 = \{1, 3, 5\} \neq \emptyset & \text{entonces } v_1 v_4 \in E(G) \\ S_2 \cap S_3 = \{2\} \neq \emptyset & \text{entonces } v_2 v_3 \in E(G) \\ S_2 \cap S_4 = \{2, 8\} \neq \emptyset & \text{entonces } v_2 v_4 \in E(G) \\ S_3 \cap S_4 = \{2, 3, 5\} \neq \emptyset & \text{entonces } v_3 v_4 \in E(G) \end{array}$$

En la Figura 2.9 se puede ver una representación del grafo G descrito anteriormente.

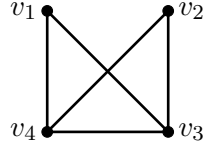


Figura 2.9: Grafo de intersección generado por los conjuntos $S_1 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $S_2 = \{2, 4, 6, 8\}$, $S_3 = \{2, 3, 5, 7\}$ y $S_4 = \{1, 2, 3, 5, 8\}$

Observemos que cualquier grafo G es un grafo de intersección: sea E el conjunto base y para cada vértice v_i defina un conjunto S_i que contenga todas las aristas de las cuales uno de sus extremos es v_i , entonces la intersección de dos de tales conjuntos es no vacía si y solo si los dos vértices correspondientes son adyacentes.

En esta tesis nos centraremos en un tipo particular de grafos de intersección conocidos como *grafos de intersección geométrica*, que se obtienen cuando la familia de conjuntos corresponde a objetos geométricos en el plano ($X = \mathbb{R}^2$), como puede ser segmentos en una línea o rectángulos en el plano.

Un *grafo de intervalos* es un grafo de intersección de intervalos en la línea real, es decir, dado un conjunto de intervalos en la línea real $I_1, I_2, \dots, I_n$ el grafo se obtendría creando un vértice v_i por cada intervalo I_i y agregando una arista $v_i v_j$ si el intervalo I_i se interseca con el intervalo I_j . En la Figura 2.10 se puede ver un ejemplo de un grafo de intersección generado a partir de un conjunto de intervalos. Esta clase de grafos fue estudiada por primera vez por Hajos [23] en 1957 y ha atraído el interés de los investigadores durante varias décadas. Una de las principales razones de este interés es que muchas aplicaciones del mundo real implican la resolución de problemas en grafos

que son grafos de intervalos en sí mismos o están relacionados de manera natural con grafos de intervalos [20].



Figura 2.10: Conjunto de intervalos en una recta y el grafo de intervalos que generan. Cada vértice tiene el mismo color que el intervalo que representa, hay una arista entre dos vértices si los correspondientes intervalos se intersecan.

Un *grafo de intersección de rectángulos* es un grafo de intersección de rectángulos en el plano con los lados paralelos a los ejes. También llamamos a estos grafos simplemente *grafos de rectángulos*. Así, dado un conjunto de rectángulos $R_1, R_2, \dots, R_n$ el grafo se obtendría creando un vértice v_i por cada rectángulo R_i y agregando una arista $v_i v_j$ si el rectángulo R_i se interseca con el rectángulo R_j . En la Figura 2.11 se puede ver un ejemplo de un grafo de intersección generado a partir de un conjunto de rectángulos. Esta clase de grafos fue introducida por primera vez por Roberts [37] en 1969, y desde entonces ha sido ampliamente estudiada. Entre otras cosas, esto se debe a que ciertos problemas, como el de encontrar el máximo conjunto independiente, cuando se restringen a esta clase de grafos tienen aplicaciones prácticas en diversas áreas [1, 13, 15, 28, 30, 31].

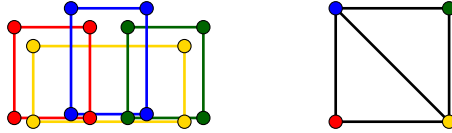


Figura 2.11: Conjunto de rectángulos y el grafo de rectángulos que generan. Cada vértice tiene el mismo color que el rectángulo que representa, hay una arista entre dos vértices si los correspondientes rectángulos se intersecan.

Notemos que los grafos de rectángulos son una generalización de los grafos de intervalos: dada una representación con intervalos de un grafo, podemos obtener directamente una representación con rectángulos simplemente considerando que cada intervalo es el lado inferior de un rectángulo, como se muestra en el ejemplo de la Figura 2.12

Sin embargo, hay grafos que son grafos de rectángulos pero no grafos de intervalos. Por ejemplo, C_5 es un grafo de rectángulo (ver la Figura 2.13) pero no un grafo de intervalos. Recordemos que C_5 no es un grafo perfecto (su número cromático es 3 pero su número de clique es 2), por lo que para demostrar que C_5 no es un grafo de intervalos, demostraremos que los grafos de intervalos son grafos perfectos.

Lema 2.2.7 [19] *Todo grafo de intervalos es un grafo perfecto.*

Prueba: Sea G un grafo de intervalos y sea $\mathcal{I}$ un conjunto de intervalo en la línea real que representa el grafo G , demostraremos que $\chi(G) = \omega(G)$. Como todo subgrafo

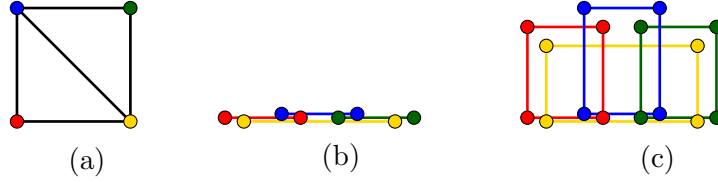


Figura 2.12: (a) Dibujo de un grafo, (b) Representación con intervalos de un grafo, (c) Representación con intervalos de un grafo extendida a una representación con rectángulos.

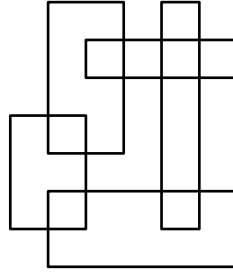


Figura 2.13: Representación con rectángulos del grafo C_5

inducido de un grafo de intervalos es también un grafo de intervalos, el lema está probado.

Enumeremos el conjunto de colores con el conjunto de números naturales.

Consideremos el algoritmo voraz de coloración que consiste en ordenar los vértices de G de acuerdo con los extremos izquierdos de la representación del intervalo, y luego, siguiendo este orden, para cada vértice elegir el mínimo color no usado por ninguno de sus vecinos izquierdos (es decir, los vecinos que están a la izquierda en el orden).

Sea k el número de colores utilizados por el algoritmo voraz y v un vértice que recibió el color k -ésimo. Luego, cada uno de los primeros colores $k - 1$ debió asignarse a uno de los vecinos izquierdos de v . Pero, dado que el extremo izquierdo del intervalo correspondiente a v también pertenece a los intervalos correspondientes a los vecinos izquierdos de v , tenemos que todos forman una clique de tamaño k . Esto implica que $\chi(G) \leq k \leq \omega(G)$. Usando el Lema 2.1.4, probamos que $\chi(G) = \omega(G)$. $\square$

Ahora, definiremos dos clases de grafos que son superclases de los grafos de intervalos y subclases de los grafos de rectángulos:

- Un *grafo de intersección de cuadrados* es un grafo de intersección de cuadrados en el plano con los lados paralelos a los ejes. También llamamos a estos grafos simplemente *grafos de cuadrados*.
- Un *grafo de ganchos* es un grafo de rectángulos en el que la esquina superior izquierda de todos los rectángulos son puntos diferentes en una recta no paralela a los ejes. En [26] se dio una definición combinatoria de los grafos de ganchos que

es útil para determinar si un grafo dado es o no un grafo de ganchos: Un grafo es un grafo de ganchos si y solo si existe un orden de los vértices que satisface la *propiedad de cruce completo*. Dado un grafo G , se dice que un orden de sus vértices $v_1, v_2, \dots, v_n$ satisface la *propiedad de cruce completo* si para todo $i < j < k < l$ si $v_i v_k \in E \wedge v_j v_l \in E$ entonces $v_j v_k \in E$.

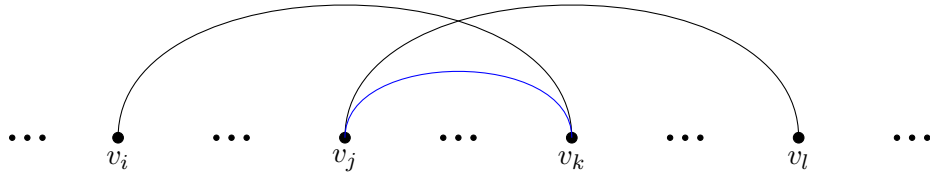


Figura 2.14: Un orden de vértices satisface la propiedad de cruce completo si cuando están las dos aristas negras también esta la arista azul.

Para ver que los grafos de cuadrados son una generalización de los grafos de intervalos, dada una representación de intervalos de un grafo podemos considerar que cada intervalo es el lado inferior de un cuadrado. Para los grafos de ganchos, también podemos considerar que cada intervalo es el lado inferior de un rectángulo, pero ahora la esquina superior izquierda de cada rectángulo debe pertenecer a una diagonal. Esto se puede lograr fácilmente si consideramos una diagonal que esté arriba y a la izquierda de todos los intervalos.

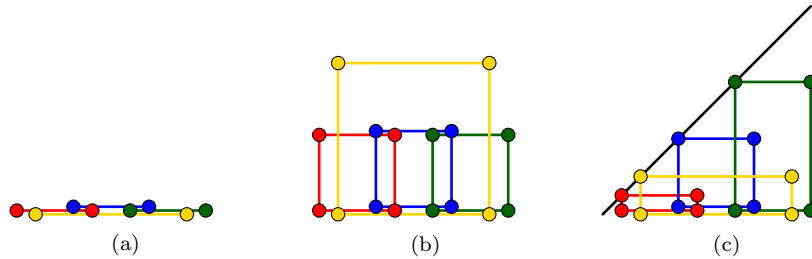


Figura 2.15: (a) Representación con intervalos de un grafo (b) Extensión de la representación con intervalos de un grafo a la representación con cuadrados (c) Extensión de la representación con intervalos de un grafo a la representación de ganchos.

La Figura 2.16 muestra que C_5 es tanto un grafo de cuadrados como un grafo de ganchos y, por lo tanto, los grafos de intervalos están estrictamente contenidos en las clases de grafos de cuadrados y ganchos.

A continuación, veremos que los grafos de ganchos no son una subclase de los grafos de cuadrados ni viceversa:

Grafos de ganchos $\not\subset$ Grafos de cuadrados Debemos mostrar que hay grafos de ganchos que no son grafos de cuadrados. Para esto, demostraremos que los grafos

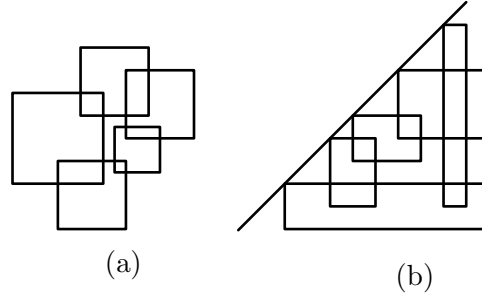


Figura 2.16: (a) C_5 como grafo de cuadrados (b) C_5 como grafo de ganchos

bipartitos completos $K_{n,m}$ son grafos de ganchos pero no grafos de cuadrados para $n \geq 3$ y $m \geq 3$:

Lema 2.2.8 *Los grafos bipartitos completos son grafos de ganchos.*

Prueba: Sea $G = (A \cup B, A \times B)$ un grafo bipartito completo. Mostraremos que cualquier orden de los vértices $<$ donde todos los vértices de A están antes de todos los vértices de B satisface la propiedad de cruce completo. Consideremos 4 vértices $v < u < w < z$ tales que $vw \in E$ y $uz \in E$. Como $vw \in E$ y $v < w$ tenemos que $w \in B$ y como $uz \in E$ y $u < z$ tenemos que $u \in A$, lo que implica que $uw \in E$. $\square$

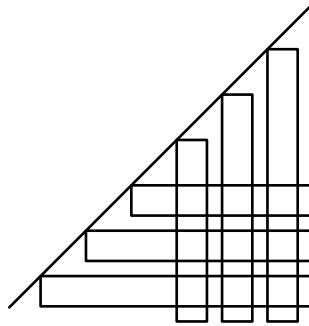


Figura 2.17: Representación de ganchos del grafo $K_{3,3}$

Como los grafos bipartitos completos $K_{n,m}$ con $n \geq 3$ y $m \geq 3$ son libre de triángulos pero no son planares, demostraremos que no son grafos de cuadrados demostrando que los grafos de cuadrados libre de triángulos sí son planares.

Primero, mostraremos un resultado más fuerte y para ello diferenciaremos entre 4 tipos de intersecciones entre rectángulos:

- Si un rectángulo contiene las 4 esquinas del otro, es una *intersección de contención*.
- Si un rectángulo contiene exactamente 2 esquinas del otro, es una *intersección superpuesta*.

- Si un rectángulo contiene exactamente una esquina del otro, es una *intersección de esquina*.
- Si ninguna de las esquinas de cualquiera de los rectángulos está contenida en el otro, es una *intersección de cruce*.

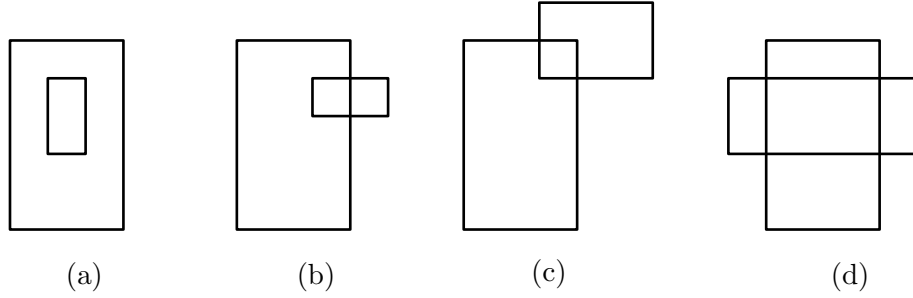


Figura 2.18: Tipos de intersecciones entre rectángulos: (a) intersección de contención, (b) intersección superpuesta, (c) intersección de esquina, (d) intersección de cruce

Teorema 2.2.9 *Los grafos de rectángulos libre de triángulos que tienen una representación rectangular sin cruces son planares.*

Prueba: Sea G un grafo de rectángulos libre de triángulos y $\mathcal{R}$ un conjunto de rectángulos alineados con los ejes sin intersecciones de cruce que representan al grafo G . Daremos una representación planar de G .

Para esto, supondremos primero que no hay intersección de contención en G . Por lo tanto, para cada rectángulo R_i en $\mathcal{R}$, el conjunto de puntos $S_i = R_i - \bigcup_{j \neq i} R_j$ no es vacío, lo que significa que hay al menos un punto p_i en R_i que no está contenido en ningún otro rectángulo. Además, dado que no hay cruces en $\mathcal{R}$, el conjunto S_i es una sola región conectada.

Ahora, para cada par de rectángulos R_i y R_j que se cruzan, sea p_{ij} un punto de intersección entre un lado de R_i con un lado de R_j . Observemos que, debido a que el grafo es libre de triángulos, p_{ij} no está contenido en ningún otro rectángulo. Luego, podemos dibujar una curva c_j^i desde p_i a p_{ij} , tal que $c_j^i \subseteq S_i \cup \{p_{ij}\}$ y $c_j^i \cap c_k^i = \{p_i\}$. Estas dos condiciones garantizan que si dos curvas se cruzan solo lo hacen en los extremos. Finalmente, la curva $c_{ij} = c_j^i \cup c_i^j$ corresponde a una arista entre R_i y R_j .

Queda por agregar los rectángulos que están contenidos en otros rectángulos. Pero esto se puede hacer fácilmente: recordemos que G es un grafo libre de triángulos, por lo que si R_i está contenido en R_j , entonces R_j es el único vecino de R_i y luego podemos tomar cualquier punto p_i y conectarlo con p_j mediante una curva que no se cruza con ninguna otra curva previamente dibujada. $\square$

En los grafos de cuadrados no hay intersecciones de cruce, por lo tanto

Corolario 2.2.10 *Los grafos de cuadrados libre de triángulos son planares.*

Por el Lema 2.2.8 el grafo bipartito completo $K_{n,m}$ es un grafo de ganchos. Pero, si $n > 2$ y $m > 2$, según el Teorema de Kuratowski (2.2.4), $K_{n,m}$ no es planar, lo que, junto con el Corolario 2.2.10, implica que $K_{n,m}$ no es un grafo de cuadrados. Lo que prueba que hay grafos de ganchos que no son grafos de cuadrados.

Grafos de cuadrados $\not\subset$ Grafos de ganchos Ahora mostraremos que los grafos de cuadrados no están contenidos en los grafos de ganchos. Para esto, consideremos el grafo $K_{2,3}^\bullet$ que se obtiene al subdividir cada arista en el grafo $K_{2,3}$, como se muestra en la Figura 2.19 (a)

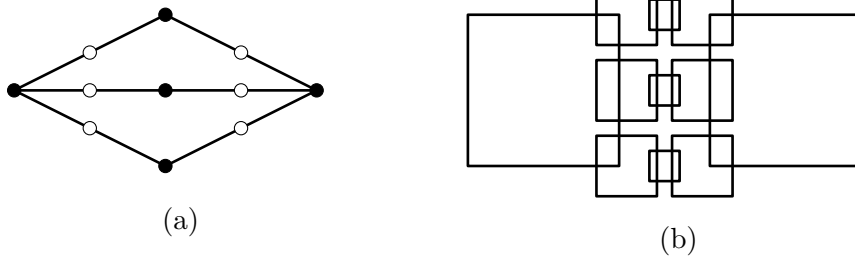


Figura 2.19: (a) $K_{2,3}^\bullet$ (b) $K_{2,3}^\bullet$ como grafo de cuadrados

La Figura 2.19 (b) muestra que es un grafo de cuadrados. En [26], Hixon demuestra que este grafo no es un grafo de ganchos al probar que no hay un orden de sus vértices que satisfaga la propiedad de cruce completo. Luego, $K_{2,3}^\bullet$ es un ejemplo de un grafo de cuadrados que no es un grafo de ganchos.

Inclusión La Figura 2.20 resume las relaciones de inclusión entre los grafos de intervalos, rectángulos, cuadrados y ganchos discutidas anteriormente.

Problema del conjunto de golpe

Aquí presentamos un parámetro de los grafos de intersección geométrica, que tiene aplicaciones en dominios tan diversos como el álgebra booleana, la biología computacional y la minería de datos (ver [16] y referencias allí mencionadas).

Sea G un grafo de intersección geométrica formado a partir de una familia $\mathcal{F}$ de objetos geométricos en $\mathbb{R}^2$. Un *conjunto de golpe* es un conjunto de puntos $H \subset \mathbb{R}^2$ que interseca (“golpea”) cada objeto en $\mathcal{F}$, es decir, cada objeto en $\mathcal{F}$ debe contener al menos un punto en H . El tamaño del conjunto de golpe mínimo de G se conoce como *número de golpe* y se denota con $\mu(G)$.

Claramente, si un grafo de intersección geométrica tiene un conjunto independiente de tamaño k , entonces se requieren al menos k puntos para golpear todos los objetos geométricos en el conjunto independiente, un punto por objeto. Por lo tanto,

Lema 2.2.11 Para cualquier grafo de intersección geométrica G , $\alpha(G) \leq \mu(G)$.

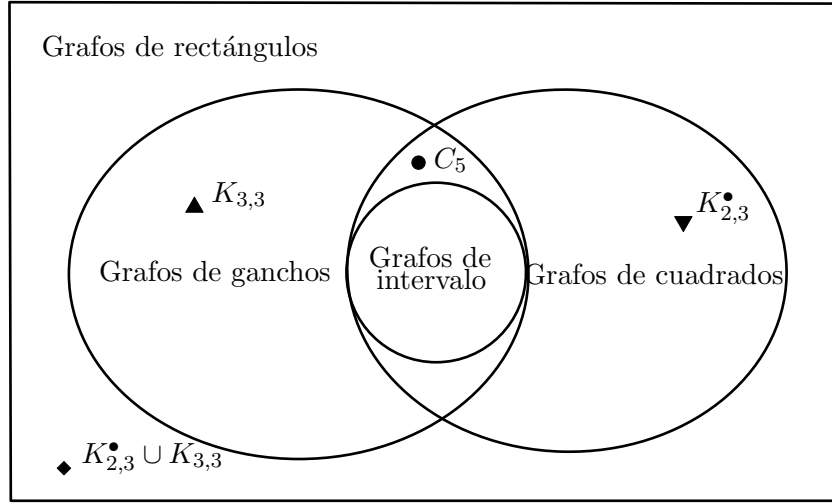


Figura 2.20: Un diagrama de la relación entre clases de grafos de intersección geométricos con las que trabajamos en esta tesis. Los grafos de rectángulos es la clase más general mientras que la clase de grafos de intervalos es la más restrictiva.

Como veremos a continuación esta cota es ajustada para los grafos de intervalos:

Lema 2.2.12 *Para cualquier grafo de intervalos G , $\alpha(G) = \mu(G)$.*

Prueba: Sean G un grafo de intervalos y $\mathcal{I}$ una representación de intervalos del mismo. Por el Lema 2.2.11 es suficiente con mostrar que $\alpha(G) \geq \mu(G)$. Para esto, consideremos el siguiente algoritmo que, dado un grafo de intervalos, devuelve un conjunto independiente I y un conjunto de golpe H :

Algoritmo 1: Computa conjunto independiente máximo y conjunto de golpe mínimo de un grafo de intervalos

entrada: Un grafo de intervalos G y una representación de intervalos del mismo $\mathcal{I}$

salida : Un conjunto independiente I y un conjunto de golpe H para G

```

1  $H \leftarrow \emptyset$ ;
2  $I \leftarrow \emptyset$ ;
3 mientras  $\mathcal{I} \neq \emptyset$  hacer
4    $v \leftarrow$  intervalo que termina primero en  $\mathcal{I}$ ;
5    $p \leftarrow v$  extremo derecho;
6    $N \leftarrow$  intervalos en  $\mathcal{I}$  que contienen  $p$ ;
7    $I \leftarrow I \cup \{v\}$ ;
8    $H \leftarrow H \cup \{p\}$ ;
9    $\mathcal{I} \leftarrow \mathcal{I} \setminus (N \cup \{v\})$ ;
10 devolver  $I, H$ ;
```

En cada iteración del ciclo agregamos un punto a H y un intervalo a I , por lo que $|H| = |I|$. H es un conjunto de golpe porque un intervalo se elimina de G solo si contiene un punto que se agregó a H . Además, dado que v es el intervalo que termina primero en $\mathcal{I}$, cada vecino de v debe contener su extremo derecho p y, por lo tanto, está en N y se elimina de $\mathcal{I}$ cuando v se agrega a I , luego I es un conjunto independiente. En consecuencia, $\alpha(G) \geq |I| = |H| \geq \mu(G)$ como se desea. $\square$

Observemos que el número de independencia para C_5 es solo 2, mientras que su número de golpe es 3 (cualquier punto en el plano puede golpear como máximo a dos rectángulos). Este ejemplo muestra que para los grafos de rectángulos, cuadrados y ganchos la cota presentada en el Lema 2.2.11 no es ajustada. En los próximos capítulos estudiaremos que tan grande puede ser la brecha entre el número de independencia y el número de golpe para estas clases de grafos.

Vale la pena notar que en el caso de los grafo de rectángulos el número de golpe es equivalente al número de cubrimiento por cliques.

Lema 2.2.13 *Si G es un grafo de rectángulos entonces $\theta(G) = \mu(G)$.*

Prueba: Sea $\mathcal{R}$ una representación rectangular de G .

Por un lado, para cualquier punto del plano todos los rectángulos de $\mathcal{R}$ que lo contienen forman una clique en G . Luego, dado un conjunto de golpe H de G si para cada punto $p \in H$ consideramos la clique formada por los rectángulos en $\mathcal{R}$ que lo contienen, obtenemos un cubrimiento por cliques de G , ya que cada rectángulo en $\mathcal{R}$ contiene al menos un punto de H y por lo tanto, el vértice correspondiente forma parte de alguna de las cliques consideradas. Entonces, obtenemos que $\theta(G) \leq \mu(G)$ (1).

Por el otro lado, dada una clique C de G definimos $\mathcal{R}_C \subseteq \mathcal{R}$ como el conjunto de los rectángulos que representan un vértice que está en C . Como la intersección de cualesquiera dos rectángulos de $\mathcal{R}_C$ es no vacía tenemos que la intersección de todos los rectángulos de $\mathcal{R}_C$ es no vacía (observemos que esto no es verdad para cualquier familia de objetos geométricos. Por ejemplo, si consideramos los arcos de circunferencia de la Figura 2.21 la intersección dos a dos es no vacía pero la intersección de todos los arcos es vacía). Luego, dado un cubrimiento por cliques de G para cada clique C podemos considerar un punto p_C que está en la intersección de todos los rectángulos de $\mathcal{R}_C$ y por lo tanto, el conjunto que contiene estos puntos es un conjunto de golpe de G . De modo que, $\theta(G) \geq \mu(G)$ (2)

Al combinar (1) y (2) se deduce que $\theta(G) = \mu(G)$. $\square$

2.3. Número de Ramsey

Para dos enteros positivos cualesquiera s y t , el *número de Ramsey* $R(s, t)$ es el mínimo n tal que cualquier grafo con n vértices tiene un conjunto de tamaño independiente s o una clique de tamaño t . En 1930, Ramsey [36] demostró que ese número siempre

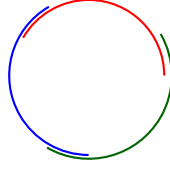


Figura 2.21: Si consideramos que los arcos rojo, verde y azul pertenecen a la misma circunferencia se puede notar que la intersección de dos de ellos es siempre no vacía pero la intersección de los tres arcos es vacía.

existe y que, de hecho, $R(s, t) \leq R(s, t-1) + R(s-1, t)$. Este teorema, conocido como Teorema de Ramsey, es un resultado fundamental en combinatoria.

Antes de probarlo, veamos un ejemplo introductorio:

R (3,3) = 6 Primero, consideremos el grafo C_5 . Como se discutió anteriormente, tanto su número de clique como su número de independencia son 2, por lo tanto $R(3, 3) > 5$. Ahora, sea G un grafo con 6 vértices. Demostraremos que tiene una clique de tamaño 3 o un conjunto independiente de tamaño 3. Para esto, consideremos un vértice v . Según el principio del palomar, hay tres vértices v_1, v_2, v_3 de modo que los tres están conectados a v o ninguno de ellos está conectado a v . Sin pérdida de generalidad, supondremos lo primero. Si alguna de las aristas v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1 está en G , entonces tendremos una clique de tamaño 3; de lo contrario, ninguno de estas aristas estará en G y, por lo tanto, $\{v_1, v_2, v_3\}$ es un conjunto independiente.

Ahora sí, veamos el Teorema de Ramsey:

Teorema 2.3.1 [36] $R(s, t)$ existe para todos los enteros positivos s y t . Además, $R(s, t) \leq R(s, t-1) + R(s-1, t)$.

Prueba: Lo probaremos por inducción en $s + t$.

Claramente, $R(1, n) = R(n, 1) = 1$ para cualquier n .

Para el paso inductivo, supondremos que tanto $R(s, t-1)$ como $R(s-1, t)$ existen y demostraremos que $R(s, t)$ también existe demostrando que $R(s, t) \leq R(s, t-1) + R(s-1, t)$: sea G un grafo con $R(s, t-1) + R(s-1, t)$ vértices y sea v un vértice de G . Definimos G_n como el subgrafo de G inducido por $N(v)$ y G_m como el subgrafo inducido por los vértices $(V \setminus (N(v) \cup \{v\}))$. Así, $R(s, t-1) + R(s-1, t) - 1 = |G_n| + |G_m|$. Por lo tanto, $|G_n| \geq R(s, t-1)$ o $|G_m| \geq R(s-1, t)$. En el primer caso, por hipótesis inductiva tenemos que existe un número natural $r = R(s, t-1)$ y luego, por definición, cualquier grafo con r vértices contiene un conjunto independiente de tamaño s o una clique de tamaño $t-1$, entonces cualquier subgrafo inducido de G_n con r vértices contiene un conjunto independiente de tamaño s , en cuyo caso hemos terminado; o bien contiene una clique C de tamaño $t-1$ y por lo tanto, por definición de G_n , $C \cup \{v\}$ es una clique en G con t vértices. El último caso es análogo. $\square$

Al usar la inducción y la regla de Pascal, se puede derivar la siguiente fórmula cerrada:

Teorema 2.3.2 *Para todos los enteros positivos s y t , $R(s, t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}$.*

Prueba: Nuevamente, haremos inducción en $s + t$.

Cuando $s = 1$ tenemos que $R(1, t) = 1 = \binom{t-1}{0}$ y para $t = 1$ se cumple que $R(s, 1) = 1 = \binom{s-1}{s-1}$.

Para el paso inductivo, asumiremos que la desigualdad vale para $R(s, t-1)$ y $R(s-1, t)$, es decir, nuestras hipótesis inductivas son $R(s, t-1) \leq \binom{s+t-3}{s-1}$ y $R(s-1, t) \leq \binom{s+t-3}{s-2}$. Luego, tenemos que:

$$R(s, t) \leq R(s, t-1) + R(s-1, t) \leq \binom{s+t-3}{s-1} + \binom{s+t-3}{s-2} \leq \binom{s+t-2}{s-1}$$

Donde la primer desigualdad se debe al teorema anterior, la segunda a las hipótesis inductivas y la última es consecuencia de la regla de Pascal [34]. $\square$

Dada una clase de grafo $\mathcal{G}$ podemos pensar en el número de Ramsey restringido a esta clase de grafo $R_{\mathcal{G}}(s, t)$ como el mínimo número n tal que cada grafo en $\mathcal{G}$ tiene un conjunto independiente de tamaño s o una clique de tamaño t . Como era de esperar, se conocen mejores cotas superiores cuando lo restringimos a clases de grafos específicas. Por ejemplo, en el Capítulo 5 mostraremos que para la clase de grafos de rectángulos, el número de Ramsey está acotado por $\min\{\mathcal{O}(st^2), \mathcal{O}(\log(st)st)\}$, mientras que para los grafos de cuadrados y ganchos está delimitado por $\mathcal{O}(st)$.

En el Capítulo 3 discutiremos cómo el número de Ramsey se relaciona con el problema de encontrar el máximo conjunto independiente en grafos de rectángulos.

2.4. Algoritmos y complejidad

La teoría de la complejidad computacional se centra en la clasificación de los problemas de acuerdo a la dificultad que conlleva resolverlos. A continuación presentaremos algunos conceptos básicos de esta teoría que utilizaremos en los próximos capítulos, una descripción más detallada junto a resultados clásicos del área se pueden encontrar en los libros [4, 17].

Un algoritmo es una lista de instrucciones bien definidas que se pueden utilizar para resolver un problema. La complejidad algorítmica es una métrica que describe qué tan rápido o lento se desempeña un algoritmo en particular. Para medir la complejidad de un algoritmo se define una función del tamaño de entrada (y, a veces, más parámetros) y mide el tiempo de ejecución empleado por el algoritmo en el peor caso. La notación $\mathcal{O}$ se utiliza para comparar los algoritmos a partir de las definiciones de éstas funciones, permite capturar una noción intuitiva de “orden de crecimiento” una función f tiene el orden de g , anotado como $f = \mathcal{O}(g)$, si hay una constante $c \in \mathbb{R}$ y una constante $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) \leq cg(n) \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0$. Si la función de complejidad f de un

algoritmo tiene el orden g , entonces se dice que su tiempo de ejecución es $\mathcal{O}(g)$. Si g es lineal/polynomial/exponencial, entonces el algoritmo es lineal/polynomial/exponencial. Cuando un algoritmo es polinomial, se dice que es *eficiente*.

La *clase P* es la clase de problemas que se pueden resolver en tiempo polinomial, es decir, contiene todos los problemas que pueden ser resueltos de manera eficiente. La *clase NP* contiene aquellos problemas cuyas soluciones se pueden verificar en tiempo polinomial. Claramente, cualquier problema que esté en P también está también en NP pero la pregunta de si $P = NP$ o no permanece abierta y se encuentra entre los problemas más importantes de la matemática. Se cree ampliamente que $P \neq NP$. Como consecuencia, habría problemas para los que no existe un algoritmo polinomial que los resuelva. En otras palabras, algunos problemas serían más difíciles de resolver que otros.

La clase *NP -difícil* es la clase de problemas que son al menos tan difíciles como el problema más difícil de NP .

Esto significa que para los problemas NP -difícil no se puede esperar un algoritmo eficiente que los resuelva exactamente, a menos que $P = NP$. Por lo tanto, un enfoque natural para manejar los problemas de optimización NP -difícil es encontrar un algoritmo eficiente cuya solución esté cerca de la óptima. A estos algoritmos los llamamos *algoritmos de aproximación*. Formalmente, dado un problema de optimización $\mathcal{P}$, se dice que un algoritmo $\mathcal{A}$ es un α -algoritmo de aproximación para $\mathcal{P}$ si para cualquier instancia dada I , devuelve una solución factible y

$$\begin{cases} \text{OPT}(I) \leq \mathcal{A}(I) \leq \alpha \cdot \text{OPT}(I), & \text{si } \mathcal{P} \text{ es un problema de minimización} \\ \mathcal{A}(I) \leq \text{OPT}(I) \leq \alpha \cdot \mathcal{A}(I), & \text{si } \mathcal{P} \text{ es un problema de maximización} \end{cases}$$

donde $\text{OPT}(I)$ es una solución óptima para el problema $\mathcal{P}$ en la instancia I y $\alpha > 1$. O sea, un algoritmo $\mathcal{A}$ es un α -algoritmo de aproximación si el valor de su solución está siempre dentro de un factor de α del óptimo.

Los algoritmos de aproximación se han estudiado ampliamente durante las últimas décadas, y estos estudios han producido hermosos resultados que conectan muchas áreas de la informática y la matemática, como algoritmia, optimización, combinatoria, geometría y probabilidad. Presentaremos algunos de ellos en los próximos capítulos.

Capítulo 3

Preguntas extremales

Los problemas de encontrar un conjunto máximo independiente (MIS, por sus siglas en inglés) y un conjunto de golpe mínimo (MHS, por sus siglas en inglés) capturan muchos problemas de optimización del mundo real y, por lo tanto, no es una sorpresa que sean NP-difíciles. Entonces, a menos que $P = NP$, no existe un algoritmo eficiente para encontrar una solución óptima para ninguno de estos problemas. Desafortunadamente, incluso los algoritmos de aproximación no pueden manejar MIS ni MHS en su totalidad: se sabe que son extremadamente difíciles de aproximar (suponiendo $P = NP$) [24]. Por lo tanto, es natural considerar una familia restringida de grafos, y una extensa literatura se ha centrado en eso.

En este capítulo mostraremos cómo se relacionan estos dos problemas y discutiremos cómo algunas preguntas extremales pueden conducir a algoritmos de aproximación para estos problemas cuando se restringen a grafos de intersección de rectángulos, dado que incluso con esta restricción los problemas siguen siendo NP-difíciles [5, 14].

3.1. Brecha de dualidad

En esta sección mostraremos una relación interesante entre el problema del conjunto máximo independiente en grafos de rectángulos (MISR, por sus siglas en inglés) y el problema del conjunto de golpe mínimo en grafos de rectángulos (MHSR, por sus siglas en inglés).

Sea $\mathcal{R} = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ un conjunto de rectángulos alineados con los ejes dibujados en $\mathbb{R}^2$. Formularemos un programa lineal en enteros 0-1 para el problema MISR, para lo cual definimos las variables de decisión $x_i \in \{0, 1\}$ correspondientes a cada rectángulo $r_i \in \mathcal{R}$ que será 1 si el rectángulo r_i es elegido en nuestro conjunto independiente y 0 en caso contrario. Entonces, un conjunto independiente válido se puede describir mediante una asignación de valores a las variables de decisión que satisfacen las restricciones:

$$x_i \in \{0, 1\} \quad \forall r_i \in \mathcal{R}$$

y que cada punto en el plano está contenido en como máximo uno de los rectángulos seleccionados en nuestro conjunto independiente (no hay intersección entre los rectángulos

en el conjunto independiente):

$$\sum_{i:p \in r_i} x_i \leq 1 \quad \forall p \in \mathbb{R}^2$$

El conjunto independiente máximo corresponde a la asignación de variables de decisión que satisfacen estas restricciones y a su vez maximizan la función objetivo:

$$\text{máx} \quad \sum_{r_i \in \mathcal{R}} x_i$$

Resolver este programa lineal entero es NP-difícil, ya que es equivalente a resolver MISR. Sin embargo, si lo relajamos reemplazando las restricciones $x_i \in \{0, 1\}$ con las restricciones $x_i \geq 0$, obtenemos el siguiente programa lineal (LP) que se puede resolver en tiempo polinomial [27]¹:

$$\text{LP-MISR} \begin{cases} \text{maximizar} & \sum_{r_i \in \mathcal{R}} x_i \\ \text{sujeto a} & \sum_{i:p \in r_i} x_i \leq 1 \quad \forall p \in \mathbb{R}^2 \\ \text{y} & 0 \leq x_i \quad \forall r_i \in \mathcal{R} \end{cases}$$

Toda solución factible para el programa lineal entero original es también una solución factible para este programa lineal, sin embargo, lo contrario no es necesariamente cierto. No obstante, el programa lineal se puede utilizar para obtener información útil sobre la solución del programa lineal entero original. Concretamente, en la siguiente sección, mostraremos cómo se puede usar el programa lineal LP-MISR para derivar un algoritmo de aproximación para el problema MISR.

Ahora, consideremos su programa lineal dual que tiene una variable de decisión y_p por cada punto p en el plano:

$$\text{DUAL-LP-MISR} \begin{cases} \text{minimizar} & \sum_{p \in \mathbb{R}^2} y_p \\ \text{sujeto a} & \sum_{p \in r_i} y_p \geq 1 \quad \forall r_i \in \mathcal{R} \\ \text{y} & 0 \leq y_p \quad \forall p \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Si reemplazamos las restricciones $0 \leq y_p$ por las restricciones $y_p \in \{0, 1\}$ obtenemos el programa lineal entero 0-1 correspondiente al problema de encontrar el conjunto de golpe mínimo para la instancia $\mathcal{R}$, ya que buscamos minimizar los puntos que elegimos (mín $\sum_{p \in \mathbb{R}^2} y_p$) mientras que queremos que cada rectángulo en $\mathcal{R}$ contenga al menos uno de los puntos elegidos ($\sum_{p \in r_i} y_p \geq 1 \quad \forall r_i \in \mathcal{R}$). Por ende, el dual del programa lineal correspondiente a MISR (DUAL-LP-MISR) es equivalente al programa lineal correspondiente al problema MHSR (LP-MHSR).

Denotemos por G al grafo de intersección de rectángulos inducido por $\mathcal{R}$, con $\text{OPT}_{\text{LP-MISR}}(\mathcal{R})$ el valor óptimo de LP-MISR para la instancia $\mathcal{R}$ y con $\text{OPT}_{\text{LP-MHSR}}(\mathcal{R})$ el valor óptimo de LP-MHSR para la instancia $\mathcal{R}$. Entonces, podemos concluir que

¹Notemos que aunque el programa lineal LP-MISR tiene infinitas restricciones, ya que considera todos los puntos del plano, es suficiente con considerar un solo punto por cada región del plano formada por los rectángulos, lo cual es polinomial en el número de rectángulos.

$$\alpha(G) \leq \text{OPT}_{LP-MISR}(\mathcal{R}) = \text{OPT}_{LP-MHSR}(\mathcal{R}) \leq \mu(G)$$

donde la primera desigualdad se cumple porque cualquier conjunto independiente es una solución factible para LP-MISR, la igualdad sigue del Teorema de dualidad fuerte [18] y la última desigualdad se debe nuevamente a que cualquier conjunto de golpe es una solución factible para LP-MHSR.

Debido a esta dualidad entre los problemas de MISR y MHSR, la relación entre el número de golpe y el número de independencia, $\frac{\mu(G)}{\alpha(G)}$, se conoce como *brecha de dualidad*. Se puede utilizar para acotar tanto la brecha de integralidad para MISR ($\frac{\text{OPT}_{LP-MISR}}{\alpha(G)}$) y la brecha de integralidad para MHSR ($\frac{\mu(G)}{\text{OPT}_{LP-MHSR}}$), por lo que ha atraído una atención significativa, especialmente desde los años sesenta, cuando Wegner [38] conjeturó que estaba acotada por una constante universal. En los Capítulos 4 y 5 analizaremos la brecha de dualidad para los grafos de rectángulos, cuadrados y ganchos.

Veamos ahora un ejemplo sencillo. Consideremos nuevamente el grafo C_5 junto a la representación rectangular de la Figura 2.13. Como ya vimos en el Capítulo 2 su número de independencia es 2 mientras que su número de golpe es 3. A continuación, analizaremos los programas lineales LP-MISR y LP-MHSR para esta entrada.

Para LP-MISR consideremos la asignación de las variables de decisión $x_i = \frac{1}{2}$. Dado que el grafo es libre de triángulos cada punto p en el plano esta contenido en a lo sumo dos rectángulos, luego la restricción $\sum_{i:p \in r_i} x_i \leq 2 \cdot \frac{1}{2} \leq 1$ se satisface para todo punto, lo que implica que la asignación definida es una solución válida y en consecuencia $\text{OPT}_{LP-MISR}(C_5) \geq \sum_{r_i \in \mathcal{R}} x_i = 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ (1).

Para LP-MHSR por cada región que se encuentra en la intersección de dos rectángulos tomamos un único punto p y a la variable de decisión de cada uno de estos puntos le asignamos $y_p = \frac{1}{2}$ y a la del resto de los puntos en el plano le asignamos cero. Entonces, como cada rectángulo r tiene dos vecinos tenemos que la restricción $\sum_{p \in r} y_p = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ se satisface para todo rectángulo y, por lo tanto, la asignación definida es una solución válida. Debido a que solo las variables de decisión de exactamente 5 puntos fueron asignadas con el valor $\frac{1}{2}$ sabemos que $\text{OPT}_{LP-MHSR}(C_5) \leq \sum_{p \in \mathbb{R}^2} y_p = 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ (2).

Luego, usando el Teorema de dualidad fuerte junto a las ecuaciones (1) y (2) concluimos que $\text{OPT}_{LP-MISR}(C_5) = \text{OPT}_{LP-MHSR}(C_5) = \frac{5}{2}$.

En resumen,

$$\alpha(C_5) = 2 < \frac{5}{2} = \text{OPT}_{LP-MISR}(C_5) = \text{OPT}_{LP-MHSR}(C_5) = \frac{5}{2} < 3 = \mu(C_5)$$

3.2. Conjunto independiente máximo vs. límites de Ramsey

En esta sección probaremos una relación entre la brecha de integralidad para LP para el problema MISR y el número de Ramsey $R(s, t)$ para la clase de grafo de intersección de rectángulos.

Sea $\mathcal{R} = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ cualquier conjunto de rectángulos alineados con los ejes dibujados en $\mathbb{R}^2$, sea $\text{OPT}_{LP}(\mathcal{R})$ el valor óptimo de LP-MISR para la instancia $\mathcal{R}$ y sea $\text{OPT}(\mathcal{R})$ el valor óptimo del conjunto independiente máximo para $\mathcal{R}$. Definimos la brecha de integralidad para LP-MISR como $\beta = \max_{\mathcal{R}} \frac{\text{OPT}_{LP}(\mathcal{R})}{\text{OPT}(\mathcal{R})}$, luego

Teorema 3.2.1 [11] *Para la clase de grafos de intersección de rectángulos, para todo $c \in \mathbb{R}$ y para todo $s, t \geq 3$ $R(s, t) \leq cs(t-1)$ si y solo si $\beta \leq c$.*

Prueba:

($\Rightarrow$) Sea G un grafo de rectángulos y $\mathcal{R} = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ una representación rectangular del mismo. Sea x^* una solución óptima racional de LP-MISR para esta instancia (tal solución existe ya que A, b en las restricciones $Ax \leq b$ son racionales). Por lo tanto, podemos representar cada $x_i^* = \frac{k_i}{k}$ para algún $k \in \mathbb{N}$ y $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{N}$.

Ahora creemos otro grafo G' que tiene k_i copias superpuestas $\mathcal{R}'_i$ correspondientes a cada rectángulo r_i . Observemos que $\omega(G') \leq k$: sea C' una clique en G' y consideremos el conjunto $C = \{r_i : \mathcal{R}'_i \cap C' \neq \emptyset\}$ que es una clique en G . Sea p un punto en la intersección de todos los rectángulos en C , las restricciones del programa lineal LP-MISR garantizan que $\sum_{i:r_i \in C} x_i^* = \sum_{i:p \in r_i} x_i^* \leq 1$ y por lo tanto $|C'| = \sum_{i:r_i \in C} |\mathcal{R}'_i| = \sum_{i:r_i \in C} k_i \leq k$.

Dado que el número de vértices en G' es $\sum_i k_i = k \text{OPT}_{LP}(\mathcal{R})$ y no tiene una clique de tamaño $k+1$, el límite de Ramsey implica que G' tiene un conjunto independiente de tamaño $\frac{k \text{OPT}_{LP}(\mathcal{R})}{k+1} = \frac{\text{OPT}_{LP}(\mathcal{R})}{c}$. Como cualquier conjunto independiente en G' se puede asignar a un conjunto independiente en G tenemos que $\text{OPT}(\mathcal{R}) \geq \frac{\text{OPT}_{LP}(\mathcal{R})}{c}$.

($\Leftarrow$) Supongamos que la brecha de integralidad es como máximo c y consideremos un grafo de intersección de rectángulos G con $cs(t-1)$ vértices y ninguna clique de tamaño t (de lo contrario habremos terminado).

Necesitamos mostrar que existe un conjunto independiente de tamaño s . Para esto, consideremos el programa lineal para MISR (LP-MISR) y la siguiente asignación a las variables de decisión $x_i = 1/(t-1), \forall r_i \in \mathcal{R}$. Observemos que, como $\omega(G) < t$, en cualquier punto p hay como máximo $t-1$ rectángulos que se cruzan y, entonces la restricción de LP-MISR $\sum_{i:p \in r_i} x_i \leq \frac{t-1}{t-1} = 1$ se satisface para todo punto p , por lo tanto la asignación definida es una solución válida para el programa lineal.

Luego, el valor de la solución óptima es al menos el valor de esta solución, de modo que $\text{OPT}_{LP}(\mathcal{R}) \geq cs(t-1)/(t-1) = cs$. Ahora, dado que $\frac{\text{OPT}_{LP}(\mathcal{R})}{\text{OPT}(\mathcal{R})} \leq \beta \leq c$, tenemos que $\frac{cs}{\text{OPT}(\mathcal{R})} \leq c$, y como consecuencia $\text{OPT}(\mathcal{R}) \geq s$. □

Una consecuencia interesante de este teorema es que si el número de Ramsey para la clase de grafos de rectángulos (o cualquiera de sus subclases) está acotado superiormente por $R(s, t) \leq cs(t-1)$ entonces la brecha de integralidad del programa lineal para el problema MISR está acotada superiormente por c , y por lo tanto, para cualquier grafo de rectángulos LP-MISR es una c -aproximación de MISR. Esta es la principal motivación para estudiar en los Capítulos 4 y 5 el número de Ramsey para los grafos de rectángulos, cuadrados y ganchos.

3.3. Conjunto independiente ponderado máximo vs. coloreo fraccional

En esta sección consideramos el problema del conjunto independiente máximo ponderado (MWIS, por sus siglas en inglés), que es una generalización del problema del conjunto independiente máximo. En este caso, consideramos un grafo G junto con una función de peso $w : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ y queremos encontrar un conjunto independiente S tal que la suma del peso de sus vértices sea máxima. En otras palabras, nuestro objetivo es maximizar $w(S) = \sum_{v \in S} w(v)$ donde S es un conjunto independiente. Denotamos a este valor con $\alpha(G, w)$.

Formularemos un programa lineal entero para el problema MWIS, que es similar al de MISR formulado en la Sección 3.1. Definimos las variables de decisión $x_v \in \{0, 1\}$ que indican si el vértice v está incluido en el conjunto independiente o no. También tendremos la restricción de que para cada clique C en G como máximo se elige un vértice: $\sum_{v \in C} x_v \leq 1 \quad \forall \text{ clique } C \text{ en } G$. Y el objetivo es maximizar la suma del peso de los vértices elegidos: $\max \sum_{v \in V} x_v w(v)$. Como antes, resolver este programa lineal entero es NP-difícil, por lo que volveremos a relajar la restricción $x_v \in \{0, 1\}$ para obtener un programa lineal:

$$\text{LP-MWIS} \begin{cases} \text{maximizar} & \sum_{v \in V} x_v w(v) \\ \text{sujeto a} & \sum_{v \in C} x_v \leq 1 \quad \forall \text{ clique } C \text{ en } G \\ \text{y} & 0 \leq x_i \quad \forall v \in V \end{cases}$$

Denotamos con $\text{OPT}_{LP}(G, w)$ el valor óptimo del LP-MWIS para el grafo G y la función de peso w y con $\alpha' = \max_{G, w} \frac{\text{OPT}_{LP}(G, w)}{\alpha(G, w)}$ la brecha de integralidad para MWIS para la clase de grafos de rectángulos.

En el próximo teorema mostraremos cómo la brecha de integralidad para MWIS está estrechamente relacionada con el problema de coloreo fraccional. Un coloreo fraccional para un grafo G es una función $\sigma : \mathcal{P}(V) \rightarrow [0, 1]$ tal que (i) el soporte de σ contiene solo conjuntos independientes, y (ii) para cada $v \in V$, tenemos que $\sum_{I: v \in I} \sigma(I) \geq 1$. El número cromático fraccionario $\chi_f(G)$ es el mínimo número real k tal que existe un coloreo fraccional válido σ para el cual $\sum_I \sigma(I) \leq k$.

Teorema 3.3.1 [11] *Para cualquier grafo de intersección de rectángulos G , $\chi_f(G) \leq c\omega(G)$ si y solo si $\alpha' \leq c$.*

Prueba:

($\Rightarrow$) Sea G un grafo de rectángulos, $\mathcal{R} = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ una representación rectangular del mismo y w una función de peso. Sea x^* una solución óptima racional de LP-MWIS para esta instancia (tal solución existe ya que A, b en las restricciones $Ax \leq b$ son racionales). Por lo tanto, podemos representar cada $x_i^* = \frac{k_i}{k}$ para algún $k \in \mathbb{N}$ y $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{N}$.

Ahora, creemos otro grafo G' que tiene k_i copias superpuestas $\mathcal{R}'_i$ correspondientes a

cada rectángulo r_i . Observemos que, al igual que en la demostración anterior (Teorema 3.2.1), $\omega(G') \leq k$.

Como G' es un grafo de intersección de rectángulos, tenemos que $\chi_f(G') \leq ck$. Dado que cualquier conjunto independiente en G' puede asignarse a un conjunto independiente en G , mostraremos que hay un conjunto independiente en G' con un peso de al menos $\frac{\text{OPT}_{LP}(G,w)}{c}$. Con este fin, se muestrea un conjunto independiente I tal que cada $I \subseteq V(G')$ se muestrea con probabilidad $\frac{\sigma(I)}{\chi_f(G')}$, donde σ es un coloreo fraccional óptimo de G' . Por lo tanto, cada vértice $v \in V(G')$ se muestrea con probabilidad $\sum_{I:v \in I} \frac{\sigma(I)}{\chi_f(G')} \geq \frac{1}{\chi_f(G')}$. Por ende, para la función de peso $w' : V(G') \rightarrow \mathbb{R}^+$ que para cada copia v' de v asigna el peso $w'(v') = w(v)$, el peso esperado del conjunto independiente I que obtenemos es $\mathbb{E}[w'(I)] = \sum_{v \in V(G')} w'(v) \Pr[v \in I] \geq \frac{1}{\chi_f(G')} \sum_{v \in V(G')} w'(v) \geq \frac{1}{ck} \sum_{v \in V(G')} w'(v) = \frac{1}{ck} \sum_{v \in V(G)} w(v)k_v = \frac{\text{OPT}_{LP}(G,w)}{c}$.

($\Leftarrow$) Sea G cualquier grafo de rectángulos, demostraremos que $\chi_f(G) \leq c\omega(G)$. Pero primero mostraremos que:

Afirmación 3.3.2 *Para cualquier función de peso w , G tiene un conjunto independiente I con un peso de al menos $w(I) \geq \frac{w(V)}{c\omega(G)}$.*

Prueba: Consideremos el programa lineal para MWIS: al establecer $x_v = \frac{1}{\omega(G)}$ para todo $v \in V$ obtenemos una solución válida ($\sum_{v \in C} x_v = \frac{|C|}{|\omega(G)|} \leq 1$) con peso $\frac{1}{\omega(G)} \sum_{v \in V} w(v)$. Por lo tanto, hay una solución entera con un peso de al menos $\frac{1}{c\omega(G)} \sum_{v \in V} w(v) = \frac{w(V)}{c\omega(G)}$, en otras palabras, hay un conjunto independiente con el peso deseado. $\square$

Ahora, por reducción al absurdo, supongamos que $\chi_f(G) > c\omega(G)$. Consideremos el programa lineal dual (DUAL-FC) correspondiente al problema de coloreo fraccional:

$$\text{DUAL-FC} \begin{cases} \text{maximizar} & \sum_{v \in V} y_v \\ \text{sujeto a} & \sum_{v \in I} y_v \leq 1 \quad \forall \text{ conjunto independiente } I \text{ en } G \\ & 0 \leq y_v \quad \forall v \in V \end{cases}$$

Sea y una solución óptima para DUAL-FC y establezcamos $w(v) = y_v$. Entonces, por la afirmación 3.3.2, tenemos que en G hay un conjunto independiente I con un peso de al menos $w(I) \geq \frac{\sum_{v \in V} y_v}{c\omega(G)}$ que, debido al Teorema de dualidad fuerte [18], es igual a $\frac{\chi_f(G)}{c\omega(G)}$. Luego, tenemos que:

$$\sum_{v \in I} y_v = w(I) \geq \frac{\sum_{v \in V} y_v}{c\omega(G)} = \frac{\chi_f(G)}{c\omega(G)} > \frac{c\omega(G)}{c\omega(G)} = 1$$

lo cual contradice la restricción del programa lineal $\sum_{v \in I} y_v \leq 1$. De esto se sigue que la suposición $\chi_f(G) > c\omega(G)$ debe ser falsa y, por lo tanto, podemos concluir que

$$\chi_f(G) \leq c\omega(G).$$

□

Como no existe ninguna técnica conocida que diferencie el coloreo fraccional del problema de coloreo en general, es muy común trabajar con el número cromático en lugar del número cromático fraccional. Observemos que $\chi_f(G) \leq \chi(G)$, de hecho si $\chi(G) = k$ entonces podemos particionar V en k conjuntos independientes disjuntos (ver Lema 2.1.2) $I_1, I_2, \dots, I_k$, por lo tanto, la función σ definida como 1 en cada uno de estos conjuntos y 0 en los restantes es un coloreo fraccional válido de valor k . Así, si para todo grafo de rectángulos (resp. grafo de cuadrados/grrafo de ganchos) G su número cromático está acotado superiormente por $\chi(G) \leq c\omega(G)$ entonces su número cromático fraccional también está acotado superiormente por $\chi_f(G) \leq c\omega(G)$ y luego, por el Teorema anterior, la brecha de integralidad para MWIS para la clase de los grafos de rectángulos (resp. grafo de cuadrados/grrafo de ganchos) es a lo sumo c y en consecuencia el programa lineal LP-MWIS es una c -aproximación de MWIS en esa clase de grafos.

Por este motivo, en los Capítulos 4 y 5 intentaremos limitar la brecha entre el número cromático y el número clique para las clases de grafos de rectángulos, cuadrados y ganchos.

Capítulo 4

Cotas para grafos de rectángulos libre de triángulos

En este capítulo estudiaremos la relación entre el número cromático y el número de clique, el número de Ramsey y la brecha de dualidad para los grafos de rectángulos, cuadrados y ganchos **libres de triángulos**. Comenzamos solo con grafos libres de triángulos para ganar un poco de intuición y comprender mejor estos problemas y las relaciones entre ellos.

En las siguientes secciones, usaremos las propiedades geométricas de estas clases de grafos para acotar superiormente los problemas combinatorios extremales mencionados anteriormente, que, como se discutió en el Capítulo 3, conducen a algoritmos de aproximación para MISR y MHS, ambos problemas NP-difíciles. También presentaremos ejemplos donde se alcanzan la mayor cota inferior conocida, que muestran cuán ajustadas son estas cotas. Estos resultados se resumen en la Tabla 4.1 donde los textos marcados con un asterisco “*” son originales de esta tesina.

$\mathcal{G}$ Cota	Rectángulos		Cuadrados		Ganchos	
	Sup	Inf	Sup	Inf	Sup	Inf
$\max_{G \in \mathcal{G}} \chi(G)/2$	3 T. 4.1.4	3 T. 4.1.5	$3/2^*$ T. 4.1.7	$3/2$ T. 4.1.8	2 T. 4.1.4	2^* T. 4.1.6
$R_{\mathcal{G}}(s, 3)/2s$	3 T. 4.2.1	2 T. 4.2.2	$3/2^*$ T. 4.2.1	$3/2^*$ T. 4.2.3	2 T. 4.2.1	$3/2^*$ T. 4.2.3
$\max_{G \in \mathcal{G}} \mu(G)/\alpha(G)$	4^* T. 4.3.1	2 T. 4.3.7	3^* T. 4.3.5	$3/2$ T. 4.3.6	2 T. 4.3.1	$3/2$ T. 4.3.6

Cuadro 4.1: Tabla con los resultados conocidos actualmente para la relación entre el número cromático y el número de clique, el número de Ramsey y la brecha de integralidad para grafos de rectángulos, cuadrados y ganchos libres de triángulos. Los resultados marcados con un asterisco “*” son originales de esta tesina.

4.1. Coloreo

4.1.1. Grafos de rectángulos y ganchos libre de triángulos

En [6], Asplund y Grünbaum demostraron que todo grafo de rectángulos libre de triángulos es 6-coloreable y que esta cota es ajustada. En esta sección vamos a mostrar esa prueba y también la adaptaremos para demostrar que los grafos de ganchos libre de triángulos son 4-coloreable.

Siguiendo a [6], decimos que un grafo de rectángulos G es *horizontalmente (verticalmente) simple* si hay una representación rectangular de G tal que ningún rectángulo interseca ambos lados verticales (horizontales) de otro rectángulo. Es decir, una representación donde no hay intersecciones de cruce ni intersecciones superpuestas donde un lado horizontal (vertical) de un rectángulo está contenido en otro rectángulo.

La Figura 4.2 muestra las intersecciones que están prohibidas en grafos horizontalmente simples.

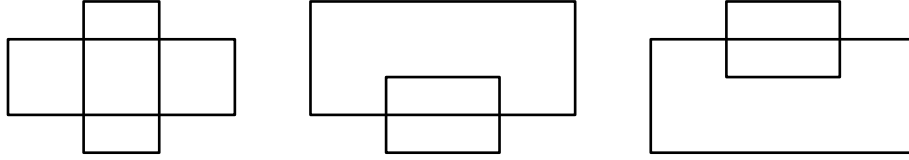


Figura 4.2: Intersecciones prohibidas en grafos horizontalmente simples.

Entonces, tenemos el siguiente lema:

Lema 4.1.1 *Cualquier grafo de rectángulos libre de triángulos G puede partitionarse por vértices en dos subgrafos G_1 y G_2 de manera que G_1 sea horizontalmente simple y G_2 verticalmente simple.*

Prueba: Sea $\mathcal{R}$ una representación rectangular de G , dividimos G de la siguiente manera: un rectángulo $R \in \mathcal{R}$ está en G_1 si y solo si hay otro rectángulo en $\mathcal{R}$ que cruce sus dos lados horizontales.

Por definición tenemos que G_2 es verticalmente simple y demostraremos por contradicción que G_1 es horizontalmente simple. Supongamos que no es así, entonces debe haber dos rectángulos R_1 y R_2 en G_1 de manera que R_1 interseque ambos lados verticales de R_2 . Pero, dado que R_2 está en G_1 , debe haber otro rectángulo R_3 en G que interseque ambos lados horizontales de R_2 y, por lo tanto, R_3 también interseque R_2 formando un triángulo en G , lo que es una contradicción que sale de suponer que G_1 no es horizontalmente simple. $\square$

Veamos como aplicar este lema en un grafo G que tiene una representación rectangular como se muestra en la Figura 4.3.

Ambos lados horizontales de v_2 y v_4 son cruzados por v_5 , y ambos lados horizontales de v_3 son cruzados por v_6 mientras que no hay ningún rectángulo que cruce ambos lados horizontales de v_1 , v_5 ni v_6 , por lo tanto, tenemos que $G_1 = G[\{v_2, v_3, v_4\}]$ y

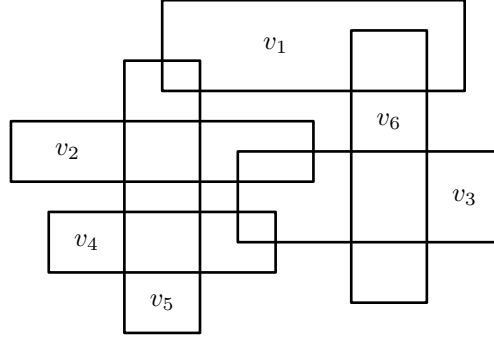


Figura 4.3

$G_2 = G[\{v_1, v_5, v_6\}]$. Como se puede ver en la Figura 4.4 G_1 es horizontalmente simple (de hecho, en este caso también es verticalmente simple) y G_2 es verticalmente simple (aunque no horizontalmente simple dado que v_1 cruza ambos lados verticales de v_6).

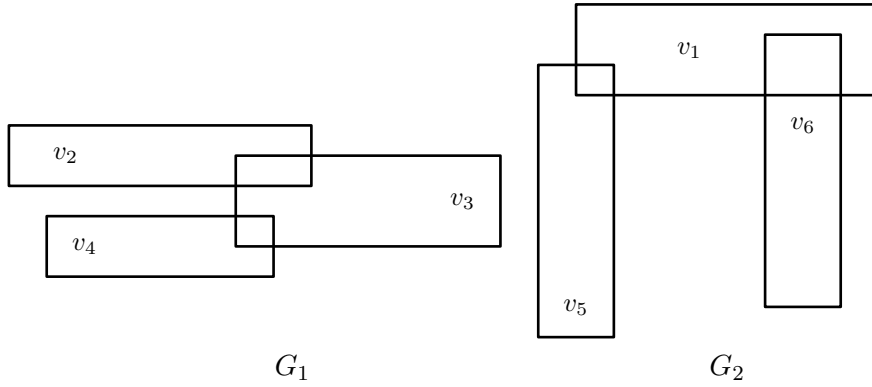


Figura 4.4: El grafo G_1 es horizontalmente simple mientras que el grafo G_2 es verticalmente simple.

Una buena propiedad de los grafos simples horizontalmente (verticalmente) es que tienen una degeneración baja:

Lema 4.1.2 *Cada grafo horizontalmente (verticalmente) simple libre de triángulos G es 2-degenerado. Además, si G también es un grafo de ganchos, entonces es 1-degenerado.*

Prueba: Lo probaremos solo para grafos horizontalmente simples, la prueba para grafos verticales simples es análoga.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que en la representación rectangular del grafo que consideraremos aquí ninguna línea vertical u horizontal contiene más de un lado de rectángulo en ella: si hay una representación donde esto sucede, simplemente podemos mover un rectángulo ligeramente hacia arriba/hacia la derecha y obtener una nueva representación del mismo grafo donde cada lado de rectángulo se encuentra en una línea diferente a todos los demás lados de los rectángulos.

Sea $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_n\}$ una representación rectangular de G que es horizontalmente simple. Para cualquier $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}$, sea $R \in \mathcal{R}'$ tal que su lado superior está más bajo que el lado superior de cualquier otro rectángulo en $\mathcal{R}'$. Entonces, cada rectángulo que se cruza con R debe contener al menos una de las esquinas superiores de R . Y, dado que G no tiene triángulos, R tiene como máximo dos vecinos.

Recordemos que en los grafos de ganchos, la esquina superior izquierda de cada rectángulo está en la diagonal por lo que no es parte de ningún otro rectángulo, de modo que en este caso R puede tener como máximo un vecino. $\square$

Los dos lemas anteriores implican que:

Corolario 4.1.3 *Cada grafo de rectángulos libre de triángulos se puede particionar por vértices en dos subgrafos 2-degenerados y cada grafo de ganchos libre de triángulos se puede particionar por vértices en dos subgrafos 1-degenerados.*

Por lo tanto, al usar los lemas 2.2.2 y 2.1.5, podemos concluir que:

Teorema 4.1.4 *Todos los grafos de rectángulos libres de triángulos son 6-coloreables y todos los grafos de ganchos libres de triángulos son 4-coloreables.*

Ambas cotas superiores son ajustadas, ya que hay un grafo de rectángulos libre de triángulos que no es 5-coloreable y un grafo de ganchos libre de triángulos que no es 3-coloreable:

Teorema 4.1.5 [6] *Existe un grafo de rectángulos que no es 5-coloreable.*

Prueba: En [6] Asplund y Grünbaum también presentaron un grafo de rectángulos libre de triángulos con 10^8 vértices que no tiene un 5-coloreo. $\square$

Como estamos estudiando el coloreo de grafos libres de triángulos una pregunta natural es si los grafos de Mycielski [35] son grafos de ganchos. Los grafos de Mycielski forman una secuencia de grafos libres de triángulos que tiene la particularidad de que el número cromático es incrementado en uno en cada paso. En especial, a nosotros nos interesa saber si M_4 , el primer grafo de la secuencia que no es 3-coloreable, es un grafo de ganchos. Como el grafo tiene solo 11 vértices y 20 aristas pudimos usar un simple programa computacional que descartó esta idea al verificar que no existe ningún orden de los vértices que satisfaga la propiedad de cruce completo.

Sin embargo, pudimos encontrar un grafo libre de triángulos que no es 3-coloreable pero que si es un grafo de ganchos. El grafo junto a un 4-coloreo se encuentra la Figura 4.5 mientras que una representación de ganchos del mismo se muestra en la Figura 4.6.

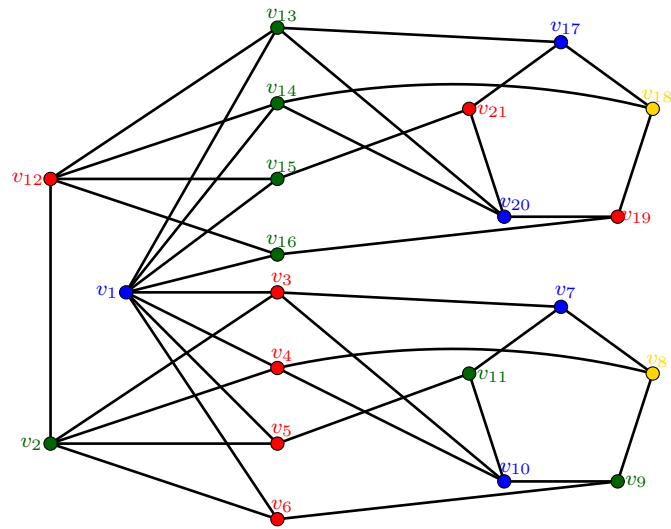


Figura 4.5: Grafo libre de triángulos que no es 3-coloreable

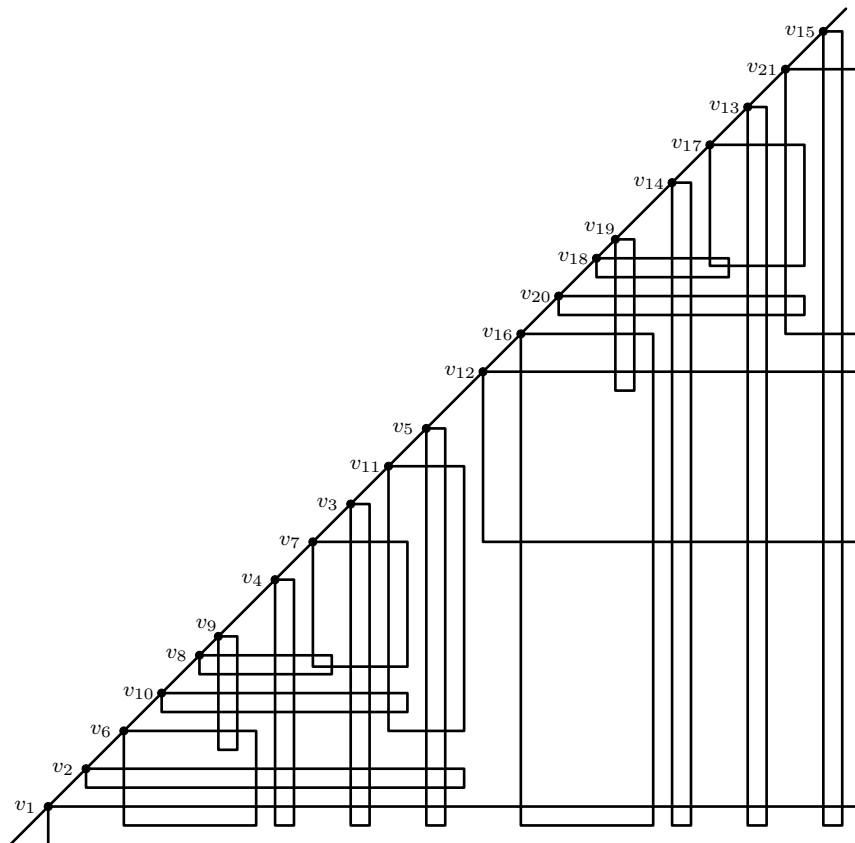


Figura 4.6: grafo de ganchos libre de triángulos que no es 3-coloreable

Demostraremos que no es 3-coloreable por contradicción.

Supongamos que es posible colorearlo con tres colores c_1, c_2 y c_3 .

Como v_2 y v_{12} son vecinos, deben colorearse con colores diferentes, por lo que uno de ellos debe tener un color diferente al asignado a v_1 . Entonces, como los grafos inducidos por $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{11}\}$ y $\{v_1, v_{12}, v_{13}, \dots, v_{21}\}$ son isomorfos, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que v_1 está coloreado con c_1 y que v_2 está coloreado con c_2 . Los vértices v_3, v_4, v_5 y v_6 , son todos vecinos de v_1 y v_2 por lo que necesitaremos un color diferente para colorearlos, c_3 . Ahora consideramos los vértices v_7, v_8, v_9, v_{10} y v_{11} : todos tienen un vecino en $\{v_3, v_4, v_5, v_6\}$ por lo que no podemos usar c_3 para colorear ninguno de ellos, por lo que debe haber un 2-coloreo para el grafo inducido por $\{v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}$. Pero, como ese grafo es isomorfo a C_5 , esto contradice el Lema 2.2.1. De ello se deduce que nuestra suposición es falsa y, por lo tanto, el grafo no es 3-coloreable.

Como consecuencia de lo discutido anteriormente tenemos que:

Teorema 4.1.6 *Existe un grafo de ganchos que no es 3-coloreable.*

4.1.2. Grafos de cuadrados libre de triángulos

Teorema 4.1.7 *Todo grafo de cuadrados libre de triángulos es 3-coloreable.*

Prueba: Esto sigue inmediatamente del Corolario 2.2.10 y del Teorema de Grötzsch (2.2.6). □

Dado que C_5 es un grafo de cuadrados libre de triángulos que no es 2-coloreable, tenemos que esta cota superior es ajustada. Luego,

Teorema 4.1.8 *Existe un grafo de cuadrados que no es 2-coloreable.*

4.2. Número de Ramsey

4.2.1. Cotas superiores

Todos las cotas superiores para el número de Ramsey $\frac{R_G(s,3)}{2s}$ para las clases de grafos de rectángulos, cuadrados y ganchos actualmente conocidos siguen directamente de las cotas superiores para el problema de coloreo explicado en la sección anterior y el Corolario 2.1.3, que establece que si un grafo tiene sk vértices y es k -coloreable, entonces debe tener un conjunto independiente de tamaño s . Luego, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 4.2.1 *Para la clase de grafos de rectángulos $\frac{R_G(s,3)}{2s}$ es como máximo 3, para la clase de grafo de cuadrados está acotado superiormente por $\frac{3}{2}$ y para la clase de los grafos de ganchos 2 es cota superior.*

Prueba: Lo probaremos solo para grafos de rectángulos ya que la prueba para grafos de cuadrados y ganchos es análoga. Entonces, nuestro objetivo es mostrar que todo grafo de rectángulos con $6s$ vértices tiene una clique de tamaño 3 o un conjunto

independiente de tamaño s . Sea G un grafo de rectángulos con $6s$ vértices que es libre de triángulos (en caso contrario, ya hemos terminado), debemos demostrar que tiene un conjunto independiente de tamaño s . Por el Teorema 4.1.4 sabemos que G es 6-coloreable, luego usando el Corolario 2.1.3, podemos concluir que $\alpha(G) \geq \frac{6s}{6} = s$. $\square$

4.2.2. Cotas inferiores

En esta sección vamos a presentar dos familias de grafos de rectángulos libres de triángulos. La primera, introducida en [12], muestra que para cada $n > 1$ hay un grafo de rectángulos libre de triángulos con $4n$ vértices sin un conjunto independiente de tamaño $n + 3$, como consecuencia $R_{\mathcal{G}}(s, 3)/2s \geq 2$ para cualquier clase de grafos $\mathcal{G}$ que contenga esta familia de grafos.

Teorema 4.2.2 *Para la clase de grafos de intersección de rectángulos, $2 \leq \frac{R(s, 3)}{2s}$.*

Prueba: En [12] Correa et al. definieron una secuencia de grafos de rectángulos libres de triángulos $\{R_k\}_{k \in \mathbb{Z}^+}$ tal que cada R_k tiene $4k$ vértices y su número de independencia es igual a $k + 2$, por lo tanto, $\frac{|V(R_k)|}{\alpha(R_k)} = \frac{4k}{k+2}$ que está arbitrariamente cerca de 4.

La secuencia está definida como sigue.

Para $i \in \mathbb{Z}^+$, se define la i -ésima capa como $\mathcal{L}_i = \{U(i), D(i), L(i), R(i)\}$, y para $k \in \mathbb{Z}^+$, se define la k -ésima instancia como $V(R_k) = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{L}_i$, donde:

- $U(i) = [2i, 2i + 1] \times [-(2i + \frac{1}{3}), +\infty)$,
- $D(i) = [2i + \frac{2}{3}, 2i + \frac{5}{3}] \times (-\infty, -2i]$,
- $L(i) = (-\infty, 2i + \frac{1}{3}] \times [-2i - 1, -2i]$,
- $R(i) = [2i, \infty) \times [-(2i + \frac{5}{3}), -(2i + \frac{2}{3})]$.

Entonces tenemos que:

- $E(R_1) = E_1$
 - para $i > 1$, $E(R_i) = E(R_{i-1}) \cup E_i \cup \bigcup_{j=1}^{i-1} \{(L(i), D(j))\} \cup \bigcup_{j=1}^{i-1} \{(U(i), R(j))\}$
- donde $E_i = \{L(i)U(i), U(i)D(i), D(i)R(i), R(i)L(i)\}$.

Observemos que incluso si los rectángulos que definimos aquí son infinitos, es fácil transformar cada R_k en una familia de rectángulos finitos considerando una caja delimitadora lo suficientemente grande.

Ahora, sea I un conjunto independiente en R_k , probaremos que $|I| \leq k + 2$. Para esto, definimos i_D como el mínimo i tal que $D(i) \in I$ o $k + 1$ si tal i no existe, i_R se define de forma análoga. Si $i_D = i_R = k + 1$ entonces $|I| \leq k$ porque para cada capa

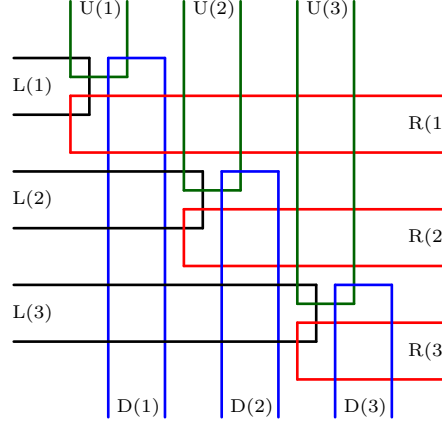


Figura 4.7: Representación rectangular del grafo R_3

i solo uno entre $L(i)$ o $U(i)$ puede estar en I y ni $D(i)$ ni $R(i)$ está en I . Observemos que, dado que $D(i)$ se cruza con $R(i)$, no es posible que $i_D = i_R < k + 1$, y por lo tanto podemos asumir sin pérdida de generalidad que $i_D < i_R$. Luego, sigue que:

- Para $1 \leq i < i_D$ ni $D(i)$ ni $R(i)$ están en I y como $(L(i), U(i)) \in E(R_k)$ entonces solo un rectángulo por cada capa L_i puede estar en I .
- I contiene como máximo 2 rectángulos de la capa $\mathcal{L}_{i_D}$ (sabemos que $D(i_D) \in I$, luego $R(i_D)$ y $U(i_D)$ no están en I). Análogo para la capa i_R .
- Para $i_D < i < i_R$ ni $R(i)$ ni $L(i)$ están en I y, dado que $(D(i), U(i)) \in E(R_k)$, solo un rectángulo por cada capa L_i puede estar en I .
- Para $i_R < i \leq k$ ni $U(i)$ ni $L(i)$ están en I , y ya que $(D(i), R(i)) \in E(R_k)$ solo un rectángulo por cada capa L_i puede estar en I .

Por lo tanto, tenemos que $|I| \leq (i_D - 1) + 2 + 2 + (i_R - i_D - 1) + (k - i_R) = k + 2$, que concluye la demostración. □

Esta familia de grafos no está contenida en la clase de los grafos de cuadrados, dado que en el Teorema 4.2.1 probamos que para esta clase de grafos el número de Ramsey $R(s, 3)$ está acotado superiormente por $3s$, es decir, todo grafo de cuadrados tiene una clique de tamaño 3 o un conjunto independiente que incluye a al menos un tercio de sus vértices, sin embargo en la familia descrita anteriormente los grafos R_k con $k > 6$ no cumplen esta condición. Esta familia tampoco está contenida en la clase de los grafos de ganchos ya que a partir de $k \geq 3$ no es posible encontrar un orden de los vértices que satisfaga la propiedad de cruce completo.

Sin embargo, probaremos que una familia de grafos $G_0, \dots, G_n$ con $|V(G_i)| = 3i + 2$ y $\alpha(G_i) = i + 1$, que fue introducida por Chalermsook y Chuzhoy en [10], son grafos de

cuadrados y ganchos libres de triángulos. Esto implica que para estas clases de grafos, $R_G(s, 3)/2s$ debe ser al menos $3/2$.

Teorema 4.2.3 *Para la clase de grafos de cuadrados y ganchos, $\frac{3}{2} \leq \frac{R(s,3)}{2s}$.*

Prueba: Siguiendo a Chalermsook y Chuzhoy en [10], definimos G_0 isomorfo a la clique de tamaño 2, G_1 isomorfo a C_5 con vértices $V(G_1) = \{P_1, T_1, Q_1, u, v\}$ y aristas $E(G_1) = \{\{P_1, T_1\}, \{T_1, Q_1\}, \{P_1, u\}, \{u, v\}, \{v, Q_1\}\}$.

Ahora, para cada $i \in \mathbb{Z}^+$ definimos G_{i+1} de la siguiente manera:

- $V(G_{i+1}) = V(G_i) \cup \{P_{i+1}, T_{i+1}, Q_{i+1}\}$
- $E(G_{i+1}) = E(G_i) \cup \{\{P_{i+1}, T_{i+1}\}, \{T_{i+1}, Q_{i+1}\}, \{P_{i+1}, T_i\}, \{Q_i, Q_{i+1}\}, \{P_i, Q_{i+1}\}\}$

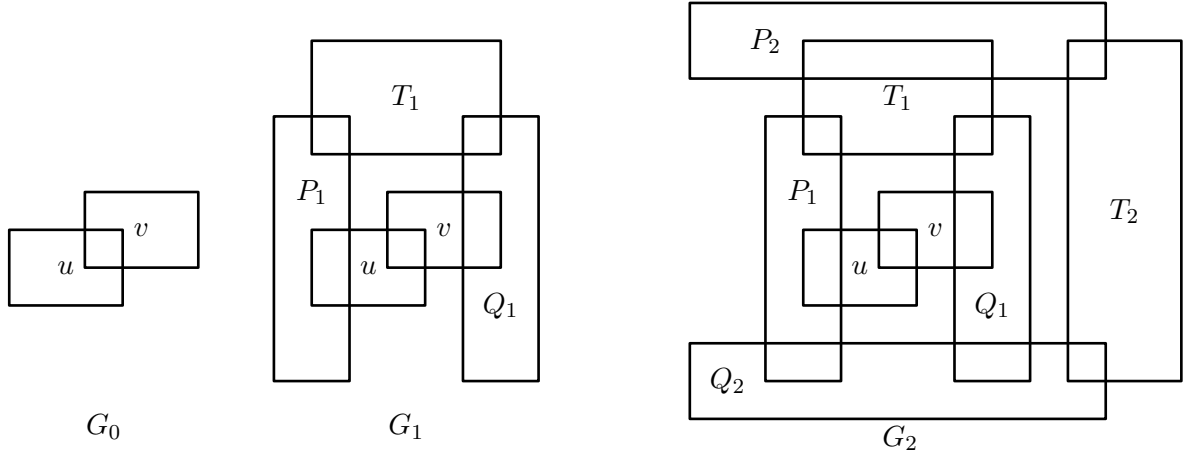


Figura 4.8: Representación rectangular de G_0 , G_1 y G_2

Mostraremos algunas propiedades interesantes sobre esta familia de grafos:

Afirmación 4.2.4 *Para cada $i \in \mathbb{N}$:*

- $|V(G_i)| = 3i + 2$
- $\omega(G_i) = 2$
- $\alpha(G_i) = i + 1$

Podemos probar esto por inducción:

Casos base:

- $\alpha(G_0) = 1 = 0 + 1$
- $\alpha(G_1) = 2 = 1 + 1$.

Paso inductivo: Lo probaremos para $2 \leq i$, suponiendo que $\alpha(G_{i'}) = i' + 1$ para $i' < i$:

Sea I un conjunto independiente de G_i , tenemos cuatro casos:

1. Si $Q_i \in I$:

- $\{Q_{i-1}, P_{i-1}, T_i\} \cap I = \emptyset$ (todos son vecinos de Q_i).
- $|\{P_i, T_{i-1}\} \cap I| \leq 1$ (son vecinos).
- $G_i \setminus \{Q_i, Q_{i-1}, P_{i-1}, T_i, P_i, T_{i-1}\} = G_{i-2}$

Entonces $|I| \leq 1 + 0 + 1 + \alpha(G_{i-2}) = 2 + i - 2 + 1 = i + 1$.

2. Si $T_i \in I$:

- $\{Q_i, P_i\} \cap I = \emptyset$ (ambos son vecinos de T_i).
- $G_i \setminus \{T_i, Q_i, P_i\} = G_{i-1}$

Entonces $|I| \leq 1 + 0 + \alpha(G_{i-1}) = 1 + i - 1 + 1 = i + 1$.

3. Si $P_i \in I$:

- $\{T_i, T_{i-1}\} \cap I = \emptyset$ (ambos son vecinos de P_i).
- $G_i \setminus \{P_i, T_i, T_{i-1}\} \simeq G_{i-1}$

Entonces $|I| \leq 1 + 0 + \alpha(G_{i-1}) = 1 + i - 1 + 1 = i + 1$.

4. If $\{Q_i, T_i, P_i\} \cap I = \emptyset$:

Entonces I es un conjunto independiente en G_{i-1} y, por hipótesis inductiva, $|I| \leq i - 1 + 1 \leq i + 1$.

Como consecuencia de esta afirmación, cada grafo G_i es un grafo libre de triángulos con $\frac{|V(G_i)|}{\alpha(G_i)} = \frac{3i+2}{i+1}$ que está arbitrariamente cerca de 3.

Solo queda probar que estos grafos son grafos de cuadrados y ganchos:

Afirmación 4.2.5 Para cada $i \in \mathbb{Z}^+$, G_i es un grafo de ganchos.

Prueba:

Para esta prueba, utilizaremos la propiedad de cruce completo de los grafo de ganchos (un orden $<$ de $V(G_i)$ la satisface si para $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V(G_i)$ si $v_1 < v_2 < v_3 < v_4$ y $\{v_1v_3, v_2v_4\} \subseteq E(G_i)$ luego $v_2v_3 \in E(G_i)$).

Para cada grafo G_i definimos σ_i un orden de sus vértices como $P_i < P_{i-1} < \dots < P_1 < v < u < Q_1 < T_1 < Q_2 < T_2 < \dots < Q_i < T_i$ y demostraremos que este orden satisface la propiedad de cruce completo por inducción. Pero antes de eso vamos a introducir un poco de notación: dado un orden σ y un elemento v denotamos con $v < \sigma$ (resp. $\sigma < v$) el orden en el que v es el elemento más pequeño (resp. más grande) y los demás elementos respetan el mismo orden que en σ .

Ahora, analizamos los dos casos de la prueba inductiva:

Caso base: Para $i = 1$ es fácil ver que se cumple la propiedad cruce completo.

Paso inductivo: Lo probaremos para $i > 1$ suponiendo que es cierto para $i - 1$. Tenemos que σ_{i-1} satisface la propiedad de cruce completo entonces $P_i < \sigma_{i-1}$ también satisface la propiedad de cruce completo porque el único vecino de P_i es T_{i-1} .

Para ver que la propiedad de cruce completo se satisface con $P_i < \sigma_{i-1} < Q_i$ solo tenemos que analizar cuando $v_4 = Q_i$ y v_2 es vecino de Q_i . Tenemos 2 casos:

- $v_2 = Q_{i-1}$. En este caso, el único valor posible para v_3 es T_{i-1} pero $Q_{i-1}T_{i-1} \in E(G_{i-1}) \subset E(G_i)$
- $v_2 = P_{i-1}$. Aquí v_1 solo puede ser P_i y por lo tanto v_3 es T_{i-1} pero $P_{i-1}T_{i-1} \in E(G_{i-1}) \subset E(G_i)$.

Dado que los únicos vecinos de T_i son P_i y Q_i tenemos que $P_i < \sigma_{i-1} < Q_i < T_i = \sigma_i$ también satisface la propiedad de cruce completo. $\square$

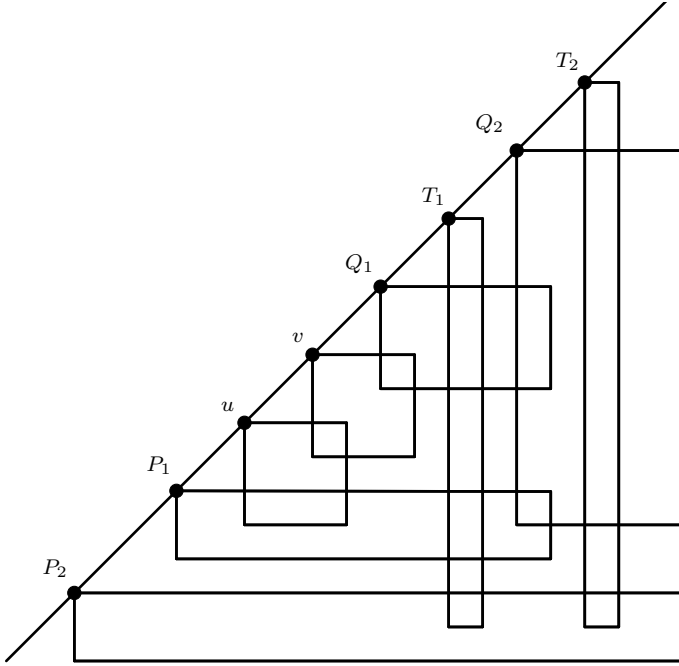


Figura 4.9: Representación de ganchos de G_2

Afirmación 4.2.6 Para cada $i \in \mathbb{Z}^+$, G_i es un grafo de cuadrados.

Prueba: Para cada $i \in \mathbb{Z}^+$, donde vamos a dar una representación cuadrada de G_i . Para eso, primero introduciremos un poco de notación: dado un cuadrado S , denotamos l_S a la longitud del lado S , x_S a la coordenada x del centro de S y y_S a su coordenada y . Ahora, definimos G_i de la siguiente manera:

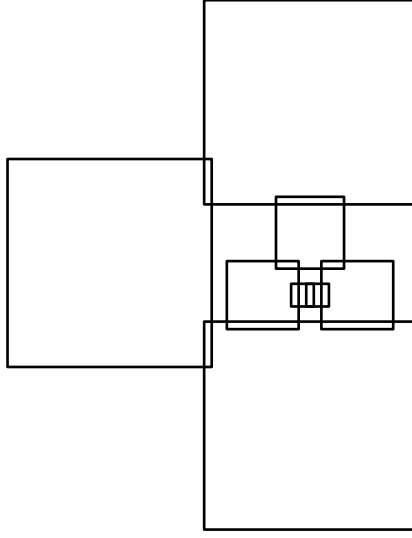
- para $i = 0$:

- $l_u = l_v = 3$
- $x_v = -1, y_v = 0$
- $x_u = 1, y_u = 0$
- para $i = 1$:
 - $l_{Q_1} = l_{P_1} = l_{T_1} = 9$
 - $x_{P_1} = -6, y_{P_1} = 0$
 - $x_{Q_1} = 6, y_{Q_1} = 0$
 - $x_{T_1} = 0, y_{T_1} = 8$
- para $i > 1$ y i par:
 - $l_{Q_i} = l_{P_i} = l_{T_i} = 3^{i+1}$
 - $x_{P_i} = x_{T_{i-1}}, y_{P_i} = y_{T_{i-1}} + \frac{l_{T_{i-1}} + l_{P_i}}{2} - 1$
 - $x_{Q_i} = x_{T_{i-1}}, y_{Q_i} = y_{Q_{i-1}} - (\frac{l_{Q_{i-1}} + l_{Q_i}}{2} - 1)$
 - $x_{T_i} = x_{P_i} - (\frac{l_{P_i} + l_{T_i}}{2} - 1), y_{T_i} = \frac{y_{P_i} + y_{Q_i}}{2}$
- para $i > 1$ y i impar:
 - $l_{Q_i} = l_{P_i} = l_{T_i} = 3^{i+1}$
 - $x_{P_i} = x_{T_{i-1}} - (\frac{l_{T_{i-1}} + l_{P_i}}{2} - 1), y_{P_i} = y_{T_{i-1}}$
 - $x_{Q_i} = x_{Q_{i-1}} + (\frac{l_{Q_{i-1}} + l_{Q_i}}{2} - 1), y_{Q_i} = y_{T_{i-1}}$
 - $x_{T_i} = \frac{x_{P_i} + x_{Q_i}}{2}, y_{T_i} = y_{T_{i-1}} + \frac{l_{P_i} + l_{T_i}}{2} - 1$

Con esto concluye nuestra prueba. □

4.3. Brecha de dualidad

En esta sección apuntamos a obtener las cotas para la brecha de dualidad de los grafos de rectángulos, cuadrados y ganchos libre de triángulos. Como se presentó en la Sección 3.1, la brecha de dualidad es la relación entre el número de golpe y el número de independencia y cualquier cota superior para este parámetro es también una cota superior para la brecha de integralidad para los problemas MISR y MHSR para los grafos libre de triángulos de las clases antes mencionadas.

Figura 4.10: Representación cuadrada de G_2

4.3.1. Cotas superiores

Grafos de rectángulos y ganchos libre de triángulos

En esta sección probaremos que para los grafos de rectángulos libres de triángulos la brecha de dualidad es como máximo 4 y para los grafos de ganchos libres de triángulos es como máximo 2. Recordemos que (Corolario 4.1.3) cualquier grafo de rectángulos libre de triángulos se puede particionar por vértices en dos subgrafos que son 2-degenerados y cualquier grafo de ganchos libre de triángulos en dos subgrafos que son 1-degenerados. En el Lema 4.3.2 mostraremos que la degeneración de los grafos de rectángulos coincide con la brecha de dualidad y en el Lema 4.3.3 probaremos que podemos acotar superiormente la brecha de dualidad de un grafo al sumar las brechas de dualidad de una partición por vértices del mismo, por lo tanto:

Teorema 4.3.1 *Para cada grafo de rectángulos libre de triángulos su brecha de dualidad es como máximo 4 y para los grafos de ganchos libres de triángulos es como máximo 2.*

Ahora, demostraremos los dos lemas que nombramos anteriormente

Lema 4.3.2 *Si un grafo de rectángulos es k -degenerado, entonces su brecha de dualidad es como máximo k .*

Prueba: El siguiente algoritmo genera un conjunto independiente I y un conjunto de golpe H tal que $|H| \leq k|I|$ para un grafo de rectángulos k -degenerado:

Algoritmo 2: Encuentra un conjunto independiente I y un conjunto de golpe H de un grafo de rectángulos k -degenerado, tal que $|H| \leq k|I|$

entrada: Un grafo de rectángulos k -degenerado G con una representación rectangular $\mathcal{R}$

salida : Un conjunto independiente I y un conjunto de golpe H de G con $|H| \leq k|I|$

```

1  $H \leftarrow \emptyset$ ;
2  $I \leftarrow \emptyset$ ;
3 mientras  $G \neq \emptyset$  hacer
4   Elija  $v$  de  $V(G)$  de modo que  $d(v) \leq k$ ;
5    $I \leftarrow I \cup \{v\}$ ;
6    $H_v \leftarrow \emptyset$ ;
7   para cada  $u \in N(v)$  hacer
8     Elija  $p$  de  $R_v \cap R_u$  ;
9      $H_v \leftarrow H_v \cup \{p\}$  ;
10   $H \leftarrow H \cup H_v$ ;
11   $G \leftarrow G \setminus (N(v) \cup \{v\})$ ;
12 devolver  $I, H$ ;
```

Observemos que cuando agregamos un vértice a I lo eliminamos de G junto a todos sus vecinos y, por lo tanto, I es efectivamente un conjunto independiente. Además, como el ciclo termina cuando G está vacío, tenemos que I es maximal.

Para probar que H es un conjunto de golpe de G , mostraremos que el ciclo de las líneas 3-11 satisface la invariante de que H es un conjunto de golpe de $I \cup N(I)$. De hecho, cuando se agrega un vértice v a I , construimos H_v de tal manera que sea un conjunto de golpe de $\{v\} \cup N(v)$, esto implica que si H es un conjunto de golpe de $I \cup N(I)$ entonces $H \cup H_v$ es un conjunto de golpe de $(I \cup \{v\}) \cup N(I \cup \{v\})$. Después del ciclo I es un conjunto independiente maximal, por lo tanto $I \cup N(I) = V(G)$ y como resultado, en ese punto, H es un conjunto de golpe de $V(G)$.

Además, por construcción, también tenemos que $|H_v| = |N(v)|$ que es como máximo k , entonces $|H| \leq k|I|$. Como consecuencia, $\mu(G) \leq |H| \leq k|I| \leq k\alpha(G)$. Por lo tanto, $\frac{\mu(G)}{\alpha(G)} \leq k$.

□

Lema 4.3.3 *Dada una partición por vértices de un grafo $G = G_1 \cup G_2$ de modo que la brecha de dualidad para G_1 sea como máximo k_1 y la brecha de dualidad de G_2 sea como máximo k_2 , entonces la brecha de dualidad para G es como máximo $(k_1 + k_2)$.*

Prueba: Dado que cada conjunto independiente en G_1 o G_2 también es un conjunto independiente en G , tenemos ese $\alpha(G_1) \leq \alpha(G)$ y $\alpha(G_2) \leq \alpha(G)$. Además, si H_1 es un

conjunto de golpe de G_1 y H_2 es un conjunto de golpe de G_2 , entonces $H_1 \cup H_2$ es un conjunto de golpe de G .

Por lo tanto, podemos concluir que:

$$\mu(G) \leq \mu(G_1) + \mu(G_2) \leq k_1\alpha(G_1) + k_2\alpha(G_2) \leq k_1\alpha(G) + k_2\alpha(G) \leq (k_1 + k_2)\alpha(G). \quad \square$$

Grafos de cuadrados libre de triángulos

Aquí demostraremos que para los grafos de cuadrados libres de triángulos la brecha de dualidad es como máximo 3. Para esto, primero mostraremos un resultado más genérico:

Lema 4.3.4 *Si un grafo es k -coloreable, entonces su brecha de dualidad es como máximo k .*

Prueba: Sea G un grafo de k -coloreable con n vértices. Por el Corolario 2.1.3, $\alpha(G) \geq n/k$. Por otro lado, es obvio que $n \geq \mu(G)$.

Por lo tanto, $\alpha(G) \geq \mu(G)/k$ como queríamos. $\square$

Combinando el lema anterior con el hecho de que los grafos de cuadrados libre de triángulos son 3-coloreables (Teorema 4.1.7), tenemos que

Teorema 4.3.5 *Para la clase de grafos de cuadrados libre de triángulos la brecha de dualidad es como máximo 3.*

4.3.2. Cotas inferiores

Desafortunadamente, por lo que se sabe ninguno de estas cotas superiores es ajustada.

Recordemos que, como se explica en la Sección 2.2.1, para C_5 la brecha de dualidad es $\frac{3}{2}$. Para los grafos de cuadrados y ganchos no se conoce ningún grafo libre de triángulos con mayor brecha de dualidad.

Teorema 4.3.6 *Hay un grafo de cuadrados y ganchos libre de triángulos para el cual su brecha de dualidad es $\frac{3}{2}$.*

Para los grafos de rectángulos libre de triángulos la brecha de dualidad para la secuencia definida en la prueba del Teorema 4.2.2 es una sucesión que tiende a 2, lo que da el siguiente teorema:

Teorema 4.3.7 *Hay grafos de rectángulos libres de triángulos para el cual su brecha de dualidad es arbitrariamente cercana a 2.*

Prueba: Consideremos la secuencia de grafos de rectángulos libre de triángulos definida en la demostración del Teorema 4.2.2. Allí ya mostramos que para cada $k \in \mathbb{Z}^+$, $\alpha(R_k) \leq k + 2$ y para $k > 1$ el conjunto $\{L(1), D(1), U(2), \dots, U(k)\}$ muestra que

existe un conjunto independiente de ese tamaño.

Ahora, mostraremos que $\mu(R_k) = 2k$:

Primero, observemos que, como el grafo es libre de triángulos, cada punto del plano puede golpear a dos rectángulos como máximo, lo que implica que $\mu(R_k) \geq \frac{|V(R_k)|}{2} = 2k$ (1).

Por otro lado, para cada capa i podemos elegir dos puntos lr_i en la intersección de $L(i)$ y $R(i)$, y ud_i en la intersección de $U(i)$ y $D(i)$ que golpean cada rectángulo en la capa $\mathcal{L}_i$, por lo tanto $H_k = \bigcup_{i=1}^k \{lr_i, ud_i\}$ es un conjunto de golpe de R_k con tamaño $2k$, luego $\mu(R_k) \leq 2k$ (2).

Al combinar (1) y (2) tenemos que $\mu(R_k) = 2k$, por ende $\frac{\mu(R_k)}{\alpha(R_k)} = \frac{2k}{k+2}$ que se acerca arbitrariamente a 2.

□

Capítulo 5

Cotas para grafos de rectángulos

En este capítulo estudiaremos la relación entre el número cromático y el número de clique, el número de Ramsey y la brecha de dualidad para grafos de rectángulos, cuadrados y ganchos. Como se mencionó en el Capítulo 3, estos problemas combinatorios extremales son de importancia porque una cota superior conduce a un algoritmo de aproximación para los problemas MISR y MHSR, ambos problemas NP-difíciles [24] que representan muchas situaciones del mundo real incluso cuando está restringido a grafos de rectángulos, cuadrados y ganchos, incluyendo aplicaciones en la minería de datos [15, 28, 30], el etiquetado de mapas [1, 13], controles de admisión de canales con reserva anticipada [31], modelado de relaciones entre fragmentos de ADN en estudios de asociación de genoma completo y problemas básicos de transmisión en telecomunicaciones [8], entre otros.

En las siguientes secciones, como en el capítulo anterior, utilizaremos las propiedades geométricas de estas clases de grafos para acotar los problemas mencionados anteriormente. Estos resultados se resumen en la Tabla 4.1 donde los textos marcados con un asterisco ‘*’ son originales de esta tesina. Vale la pena notar que todos las cotas inferiores se derivan del caso libre de triángulos, que nos enfocamos en el Capítulo 4, ya que no se sabe cómo aprovechar las cliques más grandes.

5.1. Coloreo

En esta sección nos centraremos en la relación entre el número cromático y el número de clique para las clases de grafos de rectángulos, cuadrados y ganchos. Como se explica en la Sección 3.3, una cota superior de c para esta relación en estas clases de grafos conduce a un algoritmo de aproximación de c para el problema de hallar el conjunto independiente ponderado máximo, una generalización del problema MIS.

5.1.1. Grafos de rectángulos

En 1960, Asplund y Grünbaum [6] presentaron un teorema que relaciona el número cromático de los grafos de rectángulos con su número de clique:

$\mathcal{G}$	Rectángulos		Cuadrados		Ganchos	
Cota	Sup	Inf	Sup	Inf	Sup	Inf
$\max_{G \in \mathcal{G}} \chi(G)/\omega(G)$	$3\omega(G)$ T. 5.1.2	3 T. 4.1.5	4^* T. 5.1.4	$3/2$ T. 4.1.8	$\mathcal{O}(\log \omega(G))$ T. 5.1.5	2^* T. 4.1.6
$R_{\mathcal{G}}(s, t)/s(t-1)$	$\min\{\mathcal{O}(t), \mathcal{O}(\log(st))\}$ T. 5.2.1 y 5.2.2	2 T. 4.2.2	4^* T. 5.2.4	$3/2^*$ T. 4.2.3	2 T. 5.2.5	$3/2^*$ T. 4.2.3
$\max_{G \in \mathcal{G}} \mu(G)/\alpha(G)$	$\mathcal{O}((\log \log \alpha(G))^2)$ T. 5.3.1	2 T. 4.3.7	4^* T. 5.3.2	$3/2$ T. 4.3.6	2 T. 5.3.3	$3/2$ T. 4.3.6

Cuadro 5.1: Tabla con los resultados conocidos actualmente para la relación entre el número cromático y el número de clique, el número de Ramsey y la brecha de integridad para grafos de rectángulos, cuadrados y ganchos. Los resultados marcados con un asterisco “*” son originales de esta tesina.

Teorema 5.1.1 [6] $\chi(G) \leq 4(\omega(G))^2 - 3\omega(G)$ para todos los grafos de rectángulos G .

Prueba: Sea $G = (V, E)$ un grafo de rectángulos y $\mathcal{R}$ una representación rectangular del mismo. Particionamos E en dos conjuntos $E_1 = \{e \in E \mid e \text{ corresponde a una intersección de cruce en } \mathcal{R}\}$ y $E_2 = E \setminus E_1$; y definimos la partición de G por aristas como $G_1 = (V, E_1)$ y $G_2 = (V, E_2)$. Mostraremos lo siguiente:

- (1) $\chi(G_1) = \omega(G_1)$
- (2) $\chi(G_2) \leq 4\omega(G_2) - 3$

Luego, por el Lema 2.1.6, el número cromático de G es como máximo $\omega(G_1)(4\omega(G_2) - 3)$, y dado que el número de clique en cada uno de G_1 y G_2 es a lo sumo el número de clique de G , tenemos que G es $(4(\omega(G))^2 - 3\omega(G))$ -coloreable.

Solo queda probar (1) y (2):

Mostraremos (1) por inducción en el número de clique. Claramente, si el número de clique de un grafo es 1, cada vértice forma un conjunto independiente y, por lo tanto, su número cromático también es 1. Ahora, supongamos que $\omega(G_1) = t > 1$ y consideremos el conjunto $S \subset \mathcal{R}$ que contiene el rectángulo más delgado de cada clique de tamaño t . Dado que todas las intersecciones en G_1 son intersecciones de cruce, S es un conjunto independiente y, como consecuencia, podemos definir un coloreo que les asigne a todos un mismo color. Si miramos a los vértices restantes, tenemos que $\omega(G_1 \setminus S) = t - 1$, luego por hipótesis inductiva $\chi(G_1 \setminus S) = t - 1$ y por lo tanto, usando el Lema 2.1.5, $\chi(G_1) = t = \omega(G_1)$.

Para demostrar (2), primero mostraremos que G_2 es $(4\omega(G_2) - 4)$ -degenerado. Con ese fin, consideraremos un subgrafo inducido G' de G_2 y contaremos dos veces el número de pares P de la forma (e, c) donde e es una arista en G' y c es la esquina de un rectángulo que está contenida en ambos rectángulos de e :

- cada esquina de un rectángulo aparece en no más de $\omega(G') - 1$ pares. Por consiguiente, $4|V|(\omega(G') - 1) \geq |P|$

- debido a que no hay intersecciones de cruce en G' , cada arista está en al menos dos pares. Entonces tenemos que $|P| \geq 2|E(G')|$.

Combinando las observaciones anteriores tenemos que:

$$4|V(G')|(\omega(G') - 1) \geq 2|E(G')| \text{ por lo tanto}$$

$$4\omega(G') - 4 \geq \frac{2|E(G')|}{|V(G')|} = \frac{\sum_{v \in V(G')} d(v)}{|V(G')|} \geq \delta(G')$$

Por lo tanto, hay un vértice v en G' con grado no mayor a $4\omega(G') - 4 \leq 4\omega(G_2) - 4$. Esto implica, por definición, que G_2 es $(4\omega(G_2) - 4)$ -degenerado y, por el Lema 2.2.2, podemos concluir que $\chi(G_2) \leq 4\omega(G_2) - 3$. $\square$

Aunque este teorema tiene 60 años y la cota inferior más grande conocida para el número cromático de un grafo de rectángulos es $3\omega(G)$, el mejor avance para el resultado de Asplund y Grünbaum es de Hendler [25] que solo reduce la constante:

Teorema 5.1.2 [25] $\chi(G) \leq 3(\omega(G))^2 - 2\omega(G) - 1$ para todos los grafos de rectángulos G

5.1.2. Grafos de cuadrados

Aquí demostraremos que cualquier grafo de cuadrados G es $4\omega(G)$ -coloreable. Para eso, primero utilizaremos las propiedades geométricas de los cuadrados para probar que es $4(\omega(G) - 1)$ -degenerado y luego, por el Lema 2,2,2, podemos concluir que es $4\omega(G)$ -coloreable, como se desea.

Lema 5.1.3 *Todo grafo de cuadrados G es $4(\omega(G) - 1)$ -degenerado.*

Prueba: Sea G' un subgrafo inducido de G . Para probar que G es $4(\omega(G) - 1)$ -degenerado encontraremos un vértice en G' que no tiene más de $4(\omega(G) - 1)$ vecinos. Como G' también es un grafo de cuadrados, podemos considerar una representación cuadrada del mismo y tomar el cuadrado s con tamaño mínimo. Así, cualquier vecino de s debe contener al menos una de las cuatro esquinas de s . Debido a que todos los cuadrados que contienen un punto dado forman una clique en G' , cada esquina de s está contenida como máximo en $\omega(G') - 1$ cuadrados (sin incluir a s) esto implica que el vértice representado por s tiene como máximo $4(\omega(G') - 1) \leq 4(\omega(G) - 1)$ vecinos, lo que concluye la demostración. $\square$

Combinando el lema anterior con el Lema 2.2.2, que establece que cualquier grafo k -degenerado es $(k + 1)$ -coloreable, obtenemos que cualquier grafo de cuadrados G es $(4\omega(G) - 3)$ -coloreable que implica inmediatamente que es $4\omega(G)$ -coloreable. En consecuencia, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 5.1.4 *Cualquier grafo de cuadrados G es $4\omega(G)$ -coloreable.*

5.1.3. Grafos de ganchos

Hixon [26] ha demostrado que $\chi(G) = \mathcal{O}(\omega(G) \log(\omega(G)))$ para cualquier grafo de ganchos G . Esto sigue de un resultado más general para grafos de rectángulos probado por Chalermsook [9]. Antes de presentar este teorema, necesitamos introducir algunas definiciones.

Sea G un grafo de rectángulos y $\mathcal{R}$ una representación rectangular del mismo, entonces dado un rectángulo $R \in \mathcal{R}$, definimos la *profundidad de contención* de R , denotada con $d(R)$, como el número de rectángulos $R' \in \mathcal{R}$ que contienen a R y definimos $d(\mathcal{R})$ como $\max\{d(R) : R \in \mathcal{R}\}$.

Sea $h(\mathcal{R})$ el tamaño del conjunto más grande de rectángulos independientes I que satisface:

1. $\exists R \in \mathcal{R}$ tal que R' está contenido en R para todos los $R' \in I$.
2. Existe una línea horizontal que interseca todos los rectángulos en $R' \in I$

Finalmente, definimos $\sigma(\mathcal{R})$ como $\min\{d(\mathcal{R}), h(\mathcal{R})\} + 1$ y $\sigma(G)$ como el mínimo $\sigma(\mathcal{R})$ para cualquier representación rectangular $\mathcal{R}$ de G .

Ahora, podemos enunciar el teorema:

Teorema 5.1.5 [9] *Para cualquier grafo de rectángulos G se cumple que $\chi(G) = \mathcal{O}(\sigma(G)\omega(G) \log(\omega(G)))$.*

Se puede encontrar una prueba completa de este teorema en [9], mientras que un bosquejo de la misma se presenta en [26].

Claramente, en cualquier representación rectangular de un grafo de ganchos G no hay intersecciones de contención, por lo tanto $\sigma(G) = 1$, sigue que

Teorema 5.1.6 [26] *Para cualquier grafo de ganchos G , $\chi(G) = \mathcal{O}(\omega(G) \log(\omega(G)))$.*

Esto, junto al Teorema 3.3 implica que para los grafos de ganchos el problema MWIS tiene un $\mathcal{O}(\log(\omega(G)))$ -algoritmo de aproximación. Además, Cantararo et al. [8] han demostrado que calcular el número cromático de un grafo de ganchos es NP-difícil, pero el teorema anterior también conduce a un $\mathcal{O}(\log(\omega(G)))$ -algoritmo de aproximación del número cromático ya que el número de clique también es una cota inferior para $\chi(G)$.

5.2. Número de Ramsey

En esta sección estudiaremos la razón $R_{\mathcal{G}}(s, t)/s(t-1)$ para la clase de grafos de rectángulos, cuadrados y ganchos dado que por lo expuesto en la Sección 3.2, sabemos que cualquier cota superior de esta razón conduce a un algoritmo de aproximación para el problema MISR con el mismo factor.

5.2.1. Grafos de rectángulos

Aquí presentaremos dos teoremas que muestran diferentes cotas superiores para la razón $\frac{R(s,t)}{s(t-1)}$, a saber $\mathcal{O}(t)$ y $\mathcal{O}(\log(st))$. El mínimo de estos, y el cual conduce a un mejor algoritmo de aproximación para el problema MISR, depende de los valores concretos de s y t .

El Teorema 5.1.2 establece que cualquier grafo de rectángulos G es $\mathcal{O}(\omega(G)^2)$ -coloreable y el Corolario 2.1.3 muestra que si un grafo tiene sk vértices y es k -coloreable, entonces debe tener un conjunto independiente de tamaño s , por lo tanto, obtenemos el siguiente resultado

Teorema 5.2.1 *Para la clase de grafos de intersección de rectángulos, $R(s,t) \leq \mathcal{O}(st^2)$.*

En el siguiente teorema aprovechamos las propiedades geométricas de los grafos de rectángulos para dar otra cota superior para el Número de Ramsey de esta clase de grafos. Este resultado es mencionado entre los expertos del área, pero no hemos hallado una referencia con la prueba del mismo. Es por esta razón que la desarrollamos a continuación.

Teorema 5.2.2 *Para la clase de grafos de rectángulos, $R(s,t) \leq \mathcal{O}(st \log(st))$.*

Prueba: Sea G un grafo de rectángulos con $n = \mathcal{O}(st \log(st))$ vértices y sea $\mathcal{R} = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ una representación rectangular del mismo.

Sea $altura(r)$ la altura del rectángulo r . Debido a que hay n rectángulos en $\mathcal{R}$, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $altura(r) \in [0, n], \forall r \in \mathcal{R}$.

Definimos $G_i = \{r \in \mathcal{R} : altura(r) \in [2^i, 2^{i+1}]\}$ para $0 \leq i \leq \log(n)$. Sea G_m el conjunto de tamaño máximo, luego $|G_m| \geq \mathcal{O}(st)$.

Si hay una clique de tamaño t en G_m , también será una clique en G y así pues, hemos terminado. De lo contrario, demostraremos que G_m es $3(t-2)$ -degenerado y, como consecuencia del Lema 2.2.2, que es $3t$ -coloreable, de lo que se deduce, al usar el Corolario 2.1.3, que en G_m hay un conjunto independiente de tamaño $\mathcal{O}(s)$ como queremos.

Afirmación 5.2.3 *Si en G_m no hay una clique de tamaño t entonces G_m es $3(t-2)$ -degenerado.*

Prueba: Sea G' un subgrafo inducido de G_m , mostraremos que hay un vértice en G' con grado no mayor a $3(t-1)$. De todos los rectángulos en $\mathcal{R}$ que representan un vértice de G' , sea r aquel cuyo lado derecho está más a la izquierda que el lado derecho de todos los otros rectángulos. Por lo tanto, cualquier rectángulo que interseque r debe intersecar su lado derecho. Por la definición de G_m , tenemos que la altura de cualquier rectángulo r' que lo interseca es de al menos $altura(r') \geq altura(r)/2$. Entonces, si r' no tiene ninguna de las esquinas derechas de r (p_s, p_i), debe contener el punto medio del lado derecho de r (p_m). Es decir, cualquier rectángulo en G' que interseque a r debe contener al menos uno de los 3 puntos mostrados en la Figura 5.2.

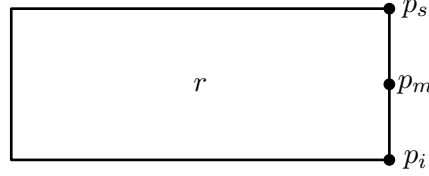


Figura 5.2: Cualquier rectángulo en G_m que interseca a r debe contener su esquina superior derecha (p_s), el punto medio de su lado derecho (p_m) o la esquina inferior derecha (p_i).

Por lo tanto, podemos cubrir a los vecinos de r con tres conjuntos, uno que tiene los rectángulos que contienen p_s , otro que tiene los que contienen p_m y el último que tiene los que contienen p_i . Debido a que cada uno de este conjunto junto con r forman una clique en G_m , tenemos que el tamaño de cada conjunto es como máximo $\omega(G') - 1 \leq \omega(G_m) - 1 \leq t - 2$. Esto implica que el vértice representado por r tiene como máximo $3(t - 2)$ vecinos.

□

Con esto concluye nuestra prueba.

□

5.2.2. Grafos de cuadrados

En el siguiente teorema demostraremos que cualquier grafo de cuadrados con $4s(t-1)$ vértices tiene una clique de tamaño t o un conjunto independiente de tamaño s lo cual, como consecuencia del Teorema 3.2.1, implica que hay un 4-algoritmo de aproximación para el problema MIS para esta clase de grafos.

Teorema 5.2.4 *Para la clase de grafos de cuadrados se cumple que $4s(t-1) \geq R(s, t)$.*

Prueba: Sea G un grafo de cuadrados con $4s(t-1)$ vértices tal que $\omega(G) \leq t-1$, de lo contrario, hemos terminado. Necesitamos mostrar que G tiene un conjunto independiente de tamaño s . Por el Teorema 5.1.4, sabemos que G es $4\omega(G)$ -coloreable y por el Corolario 2.1.3 tenemos que su número de independencia es al menos $\frac{4s(t-1)}{4\omega(G)} \geq \frac{4s(t-1)}{4(t-1)} = s$, por lo tanto G tiene conjunto independiente de tamaño s .

□

5.2.3. Grafos de ganchos

Aquí mostraremos que para la clase de grafos de ganchos, el número de Ramsey está acotado superiormente por $R(s, t) \leq 2s(t-1)$.

Correa et al. [12] han demostrado que para los grafos de ganchos la brecha de dualidad es como máximo 2 (ver Teorema 5.3.3) lo cual, como se discutió en la Sección 3.1,

es también una cota superior para el problema MISR que es de hecho, por el Teorema 3.2.1, una cota superior para el número de Ramsey para clases de grafos de rectángulos. Como consecuencia, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 5.2.5 *Para la clase de grafos de ganchos, $R(s, t) \leq 2s(t - 1)$.*

5.3. Brecha de dualidad

En esta sección nos centraremos en la brecha de dualidad para las clases de grafos de rectángulos, cuadrados y ganchos. Como se presentó en la Sección 3.1, la brecha de dualidad es la relación entre el número de golpe y el número de independencia, y cualquier cota superior también es una cota superior para la brecha de integralidad para los problemas MISR y MHSR.

5.3.1. Grafos de rectángulos

En [12] Correa et. al estudiaron la brecha de dualidad para distintas familias de grafos de rectángulos. En particular, combinaron el resultado de Chalermsook y Chuzhoy [10], donde se limita la brecha de integralidad para el problema MISR, con el de Aronov et al. [3], donde se limita la brecha de integralidad para el problema MHSR, para demostrar que:

Teorema 5.3.1 [12] *Para cualquier grafo de rectángulos G la brecha de dualidad está acotada superiormente por $\frac{\mu(G)}{\alpha(G)} \leq \mathcal{O}((\log \log \alpha(G))^2)$.*

5.3.2. Grafos de cuadrados

En el Lema 5.1.3 ya probamos que cualquier grafo de cuadrados G es $4\omega(G)$ -degenerado y en el Lema 4.3.2 mostramos que para cualquier grafo de rectángulos k -degenerado, su brecha de dualidad es como máximo k , como consecuencia

Teorema 5.3.2 *Para la clase de grafos de cuadrados la brecha de dualidad es como máximo 4.*

Por lo tanto, para la clase de grafos cuadrados, los programas lineales LP-MISR y LP-MHSR (ver Sección 3.1) son una 4-aproximación para los problemas MISR y MHSR, respectivamente.

5.3.3. Grafos de ganchos

Ha sido probado por Correa et al. [12] que para la clase de grafo de ganchos la brecha de dualidad es como máximo 2. Presentaremos su prueba a continuación

Teorema 5.3.3 [12] *Para la clase de grafos de ganchos la brecha de dualidad es como máximo 2.*

Prueba: Sea G un grafo de ganchos y $\mathcal{R}$ una representación de ganchos del mismo. Usamos $\mathcal{R}_x$ y $\mathcal{R}_y$ para denotar la proyección de los rectángulos de $\mathcal{R}$ en el eje x y en el eje y , respectivamente. Nos referimos con I_x y I_y al conjunto independiente máximo de $\mathcal{R}_x$ y $\mathcal{R}_y$, respectivamente, y con H_x y H_y a su conjunto de golpe mínimo. Tanto $\mathcal{R}_x$ como $\mathcal{R}_y$ se pueden considerar como grafos de intervalo, entonces, por el Lema 2.2.1, tenemos que $|H_x| = |I_x|$ y $|H_y| = |I_y|$.

Observemos que si las proyecciones de dos rectángulos en el eje x (resp. en el eje y) son disjuntas, entonces los dos rectángulos están separados, luego cualquier conjunto independiente en $\mathcal{R}_x$ (resp. en $\mathcal{R}_y$) corresponde a un conjunto independiente en $\mathcal{R}$, por lo tanto $\alpha(G) \geq \max(|I_x|, |I_y|)$.

Por otro lado, está claro que el conjunto $H = H_x \times H_y$ golpea cada rectángulo de $\mathcal{R}$. Además, dado que la esquina superior izquierda de todos los rectángulos que estamos considerando pertenecen a una diagonal, si solo consideramos el conjunto de puntos $H' \subseteq H$ que están por debajo de esa diagonal, es fácil ver que H' es también un conjunto de golpe de $\mathcal{R}$.

Ahora, consideremos el subconjunto de $H'' \subseteq H'$ definido como $H'' = \{p \in H' : \nexists q \in H', p_x > q_x \wedge p_y < q_y\}$. Mostraremos que H'' también es un conjunto de golpe de $\mathcal{R}$:

Sea R un rectángulo en $\mathcal{R}$ y sea p el punto de $H' \cap R$ que esté más cerca de la diagonal (en ℓ_1 -distancia). Argumentando hacia una contradicción, supongamos que p no está en H'' , entonces existe en H' un punto q tal que $p_x > q_x$ y $p_y < q_y$, es decir, q está más cerca a la diagonal que p y en consecuencia q no está en R , lo que a su vez implica que q está a la izquierda o arriba de R . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que es lo primero. Entonces, el punto $q' = (p_x, q_y)$ está en R pero, dado que H' es una cuadrícula, q' también pertenece a H' y además como $q'_y > p_y$ tenemos que q' está más cerca de la diagonal que p , lo que contradice la definición de p . Luego, p está en H'' y, por tanto, H'' es un conjunto de golpe de $\mathcal{R}$.

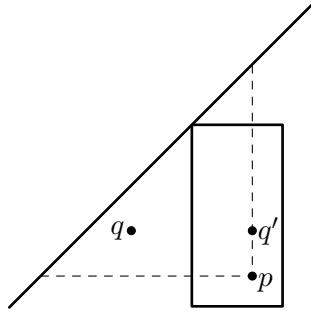


Figura 5.3: Si p y q son puntos en H' entonces q' también está en H'

Esto implica que $\mu(G) \leq |H''| \leq |H_x| + |H_y| - 1 = |I_x| + |I_y| - 1 \leq 2\alpha(G) - 1$, lo que concluye la prueba. $\square$

Como se discutió en la Sección 3.1, una consecuencia importante de este teorema es que los programas lineales LP-MISR y LP-MHSR restringidos a grafos de ganchos son

una 2-aproximación para los problemas MISR y MHSR, respectivamente.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo futuro

En esta tesis investigamos los problemas del máximo conjunto independiente y del conjunto de golpe mínimo para las clases de grafos de rectángulos, cuadrados y de ganchos. Dado que, incluso cuando se restringen a estas clases de grafos, estos problemas siguen siendo NP-difíciles, nos centramos en encontrar algoritmos de aproximación para ellos. Con este fin, en el Capítulo 3 describimos algunos problemas combinatorios extremos, a saber, la brecha de dualidad, el número de Ramsey y la relación entre el número cromático y el número de clique, y mostramos cómo al obtener una cota superior para estas preguntas también se obtienen algoritmos de aproximación para MIS y MHS para clases de grafos de rectángulos [11]. Luego, presentamos las cotas superiores conocidos para los problemas extremos mencionados anteriormente así como ejemplos que muestran cuán ajustados son estas cotas.

Primero, estudiamos grafos libres de triángulos (ver Capítulo 4) y con esta restricción pudimos cerrar la brecha entre la cota superior e inferior en algunos casos. Esto lo logramos mejorando la cota superior (por ejemplo, en el caso de la relación entre el número cromático y el número de clique para grafos de cuadrados), al encontrar un ejemplo que coincide con la cota superior ya conocida (en particular, para la relación entre el número cromático y el número de clique en los grafos de ganchos) o incluso haciendo ambas cosas (concretamente, cuando estudiamos el número de Ramsey para la clase de grafos de cuadrados).

Sin embargo, en el caso general (ver Capítulo 5), aunque pudimos mejorar algunas de las cotas superiores para grafos de cuadrados, todas las cotas conocidas son aún holgadas. Esto se debe principalmente a que la comprensión actual sobre el cota

inferior es muy restringida, en parte porque no sabemos cómo aprovechar las cliques de gran tamaño, es decir, todas las construcciones para la cota inferior dan grafos de rectángulos libres de triángulos. Esperamos que las técnicas y ejemplos descritos para los grafos de rectángulos, cuadrados y ganchos libres de triángulos ayuden a comprender mejor cómo se distingue el caso libre de triángulos del caso general.

Bibliografía

- [1] P. K. Agarwal, M. J. van Kreveld y S. Suri. “Label placement by maximum independent set in rectangles”. En: *Computational Geometry* 11(3-4) (1998), págs. 209-218.
- [2] K. Appel y W. Haken. “Solution of the Four Color Map Problem”. En: *Scientific American* (1977), págs. 108-121.
- [3] B. Aronov, E. Ezra y M. Sharir. “Small-size epsilon-nets for axis-Parallel rectangles and boxes”. En: *SIAM Journal on Computing* 39 (2010), págs. 3248-3282.
- [4] S. Arora y B. Barak. *Computational Complexity: A Modern Approach*. Cambridge University Press, 2009.
- [5] T. Asano y H. Imai. “Finding the connected components and a maximum clique of an intersection graph of rectangles in the plane”. En: *Journal of Algorithms* (1983), págs. 310-323.
- [6] E. Asplund y B. Grünbaum. “On a coloring problem”. En: *Discrete and Computational Geometry* 8 (1960), págs. 181-188.
- [7] A. Bickle. “The K-cores of a Graph”. Tesis doct. Western Michigan University, 2010.
- [8] D. Catanzaro, S. Chaplick, S. Felsner, B. V. Halldórsson, M. M. Halldórsson, T. Hixon y J. Stacho. “Max point-tolerance graphs”. En: *Discrete Applied Mathematics* 216 (2017), págs. 84-97.
- [9] P. Chalermsook. *Coloring and Maximum Independent Set of Rectangles. Lecture Notes in Computer Science*. 2011.
- [10] P. Chalermsook y J. Chuzhoy. “Maximum Independent Set of Rectangles”. En: *SODA09* (2009), págs. 892-901.
- [11] P. Chalermsook y D. Vaz. “A Note on The Integrality Ratio of Fractionally Clique-Constrained Independent Set Polytopes”. En: *Unpublished manuscript* (2019).
- [12] J. Correa, L. Feuilloley, P. Pérez-Lantero y J. A. Soto. “Independent and Hitting Sets of Rectangles Intersecting a Diagonal Line: Algorithms and Complexity”. En: *Discrete & Computational Geometry* 53.2 (2015), págs. 344-365.
- [13] J. S. Doerschler y H. Freeman. “A rule-based system for dense-map name placement”. En: *Communication of The ACM* 35 1 (1992), págs. 68-79.

- [14] R. Fowler, M. Paterson y S. Tanimoto. “Optimal Packing and Covering in the Plane are NP-Complete”. En: *Information Processing Letters* (1981), págs. 133-137.
- [15] T. Fukuda, Y. Morimoto, S. Morishita y T. Tokuyama. “Data Mining with optimized two-dimensional association rules”. En: *ACM Transactions on Database Systems* 26 (2001), págs. 179-213.
- [16] A. Gainer-Dewar y P. Vera-Licona. “The minimal hitting set generation problem: algorithms and computation”. En: *SIAM Journal on Discrete Mathematics* (2016).
- [17] M. R. Garey y D. S. Johnson. *Computers and Intractability; A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman & Co., 1990.
- [18] B. Gärtner y J. Matoušek. *Understanding and Using Linear Programming*. Springer, 2006.
- [19] M. C. Golumbic. *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*. Academic Press, 1980.
- [20] M. C. Golumbic. “Interval graphs and related topics”. En: *Discrete Mathematics* (1985), págs. 113-121.
- [21] M. Grötschel, L. Lovász y A. Schrijver. *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*. Springer-Verlag, 1988, págs. 273-303.
- [22] H. Grötzsch. “Zur Theorie der diskreten Gebilde, VII: Ein Dreifarbensatz für dreikreisfreie Netze auf der Kugel”. En: *Mathematical Review* (1959), págs. 109-120.
- [23] G. Hajos. “Über eine Art von Graphen”. En: *Intern. Math. Nachr.* (1957).
- [24] J. Håstad. “Some optimal inapproximability result”. En: *Journal of the ACM* 48 (4) (2001), págs. 798-859.
- [25] C. Hendler. “Graphenklassen mit durch Funktionen in der Cliquezahl beschränkter Färbungszahl”. Diplomarbeit. 1998.
- [26] T. Hixon. “Hook graphs and more: some contributions to geometric graph theory”. Tesis de maestría. Technische Universität Berlin, 2013.
- [27] L. Khachiyan. “A Polynomial Algorithm for Linear Programming”. En: *Proceedings of the USSR Academy of Sciences* (1979), págs. 1093-1096.
- [28] S. Khanna, S. Muthukrishnan y M. Paterson. “On approximating rectangle tiling and packing”. En: *ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms* (1998), págs. 384-393.
- [29] K. Kuratowski. “Sur le problème des courbes gauches en topologie”. En: *Fundamenta Mathematicae* (1930), págs. 271-283.
- [30] B. Lent, A. Swami y J. Widom. “Clustering association rules”. En: *Proceedings of the International Conference on Data Engineering* (1997), págs. 220-231.
- [31] L. Lewin-Eytan, J. Naor y A. Orda. “Routing and admission control in networks with advance reservations.” En: *Workshop on Approximation Algorithms for Combinatorial Optimization Problems (APPROX)* (2002), págs. 215-228.

- [32] D. R. Lick y A. T. White. “k-degenerate graphs”. En: *Canadian Journal on Mathematics* (1970), págs. 1082-1096.
- [33] D. W. Matula y L. L. Beck. “Smallest-last ordering and clustering and graph coloring algorithms”. En: *Canadian Journal on Journal of the ACM* (1983), págs. 417-427.
- [34] R. Merris. *Combinatorics*. John Wiley & Sons, 2003.
- [35] J. Mycielski. “Sur le coloriage des graphes”. En: *Colloq. Math.* (1955), págs. 161-162.
- [36] F. Ramsey. “On a problem of formal logic”. En: *Proc. London Math. Soc.* 2.^a ép. (1930), págs. 264-285.
- [37] F. Roberts. “On the boxicity and cubicity of a graph”. En: *Recent Progress in Combinatorics* (1969), págs. 301-310.
- [38] G. Wegner. “Über eine kombinatorisch-geometrische frage von hadwiger und debrunner”. En: *Israel H. of Mathematics* 3 (1965), págs. 187-198.