Universidad Nacional de Rosario

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura.
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales.
Departamento de Física

Tesina de Licenciatura en Física

Entropía de entrelazamiento de gravitones linealizados

Tesinista:
Valentin Benedetti

Director:
Dr. Horacio Casini

Marzo de 2019

Resumen

En este trabajo se realiza un estudio, en el contexto de la teoría de cuántica de campos, de la entropía de geométrica asociada a una región espacial definida. En particular, se calcula la entropía de entrelazamiento del campo de gravitones linealizados en $d = 4$ dimensiones. Para una región encerrada entre dos placas paralelas infinitas se obtiene que dicha entropía será igual a la del campo de Maxwell, es decir, dos veces la entropía escalar. Para la región comprendida en el interior de una esfera se tiene que la entropía del campo gravitatorio lineal será equivalente a la de dos campos escalares libres sin aporte de los modos correspondientes a momentos angulares $l = 0$ y $l = 1$. Bajo este contexto, se calcula numéricamente el coeficiente universal logarítmico de la entropía geométrica asociado a este caso obteniéndose

$$c_{\log}^{LG} = 2\left(c_{\log}^{S} - c_{\log}^{S_{l=0}} - c_{\log}^{S_{l=1}}\right) \approx -1{,}34644.$$

Previamente, se detalla sobre cálculos ya realizados en la bibliografía para la entropía del campo escalar y el campo de Maxwell, abordando a partir de este ultimo la problemática relacionada con la fijación de gauge y la localidad de los grados de libertad.

Índice general

1. Introducción **4**

2. Entropía de entrelazamiento **6**
2.1. Matriz densidad 6
2.1.1. Definición y propiedades 6
2.1.2. Estados Puros y mixtos 7
2.1.3. Matriz densidad reducida 8
2.2. Entrelazamiento Cuántico 9
2.3. Entropía de Entrelazamiento 10
2.3.1. Entropia de Shanon 10
2.3.2. Entropía de von Neumann 10
2.3.3. Entropía de von Neumann como medida de entrelazamiento 11
2.3.4. Subaditividad de la entropía de entrelazamiento 11
2.4. Entropía en teoría cuántica de campos 13
2.4.1. Entropía de entrelazamiento de una región del espacio 13
2.4.2. Entropía geométrica 15
2.4.3. Entropía y el flujo del grupo de renormalización 17

3. Entropía de entrelazamiento de un campo escalar libre **20**
3.1. Cálculos de la entropía de entrelazamiento para campos libres 20
3.2. Entropía de entrelazado para Estados Gaussianos 20
3.2.1. Estados Gaussianos y el Teorema de Wick 20
3.2.2. Funciones de dos puntos X_{ij}, P_{ij}, D_{ij} y sus propiedades 21
3.2.3. Obtención de correladores para un Estado Gaussiano particular . . . 22
3.2.4. La matriz densidad reducida de una región V y su escritura en función de operadores de creación y destrucción de Bogoliubov 23
3.2.5. Normalización de la matriz densidad reducida y descomposición del problema en modos normales 24
3.2.6. Funciones de dos puntos en la región V 24
3.2.7. Entropía de cada modo normal y entropía total de la región V . . . 25
3.2.8. Restricciones sobre los autovalores ν_k de C^V 26
3.3. Entropía de un campo escalar libre entre placas paralelas 26
3.3.1. Cálculo de la entropía por reducción dimensional 26

3.3.2. Cálculo numérico de la constante $\mathcal{K}$ 28
3.4. Aplicación a un campo escalar libre en una esfera 29
3.4.1. Discretización del campo en base de ondas esféricas 29
3.4.2. Cálculo Numérico del la Entropía 31
3.4.3. Ley de área para el campo escalar libre 32
3.4.4. Cómputo de los coeficientes universales 33

4. Entropía de entrelazamiento de un campo de gauge 35
4.1. Introducción al problema 35
4.2. Campos de gauge abelianos sobre una red discreta 36
4.3. Álgebras locales y descomposición del espacio de Hilbert 38
4.4. Centro trivial para el caso electromagnético 39
4.5. Elección de álgebra por fijación de gauge 41

5. Entropía de entrelazamiento de un campo de Maxwell 42
5.1. Modalidad de trabajo 42
5.2. Entropía de entrelazamiento de un campo de Maxwell entre placas paralelas 42
5.3. Entropía de entrelazamiento de un campo de Maxwell en una esfera 43
5.3.1. Descomposición de los campos eléctricos y magnéticos en armónicos esféricos vectoriales 43
5.3.2. Reescritura del Hamiltoniano del campo de Maxwell 45
5.3.3. Condiciones para campos libres sin fuentes 45
5.3.4. Inclusión de los vínculos en el Hamiltoniano 46
5.3.5. Entropía y coeficiente logarítmico 48

6. Gravedad Linealizada 49
6.1. Ecuaciones de campo de Einstein 49
6.2. Gravedad linealizada 50
6.2.1. Ecuaciones de campo y lagrangiano 50
6.2.2. Transformaciones e invariantes de gauge 51

7. Resultados 53
7.1. Modalidad de trabajo 53
7.2. Entropía de entrelazamiento de un campo de Maxwell entre placas paralelas 54
7.2.1. Base utilizada y fijación de gauge 54
7.2.2. Construcción del hamiltoniano y entropía 54
7.3. Entropía de entrelazamiento de un campo de Maxwell en una esfera 56
7.3.1. Base utilizada y fijación de gauge 56
7.3.2. Construcción del hamiltoniano y Entropía 57
7.4. Entropía de entrelazamiento de gravitones linealizados entre placas paralelas 59
7.4.1. Base utilizada y fijación de gauge 59
7.4.2. Lagrangiano 60
7.4.3. Hamiltoniano del modo I 61
7.4.4. Hamiltoniano del modo II 62

7.4.5. Hamiltoniano Total y entropía 64
7.5. Entropía de entrelazamiento de gravitones linealizados en una esfera 64
7.5.1. Armónicos esféricos tensoriales 64
7.5.2. Descomposición del problema 66
7.5.3. Fijación de gauge para la parte espacial 66
7.5.4. Fijación de gauge para la parte temporal 67
7.5.5. Construcción del lagrangiano 68
7.5.6. Hamiltoniano del modo I para $l \geq 2$ 70
7.5.7. Hamiltoniano del modo II para $l \geq 2$ 71
7.5.8. Análisis del modo $l = 0$ 73
7.5.9. Análisis del modo $l = 1$ 74
7.6. Análisis de la fijación de gauge 75
7.6.1. Entropía y coeficiente logarítmico 75

8. Conclusiones y perspectivas futuras **77**

A. Programas en Mathematica para el cálculo numérico de las entropías **79**
A.1. Función c bosónica en $(1 + 1)$ dimensiones 79
A.2. Ley de área para la entropía de un campo escalar en una esfera (momento angular maximo y cutoff finitos) 82
A.3. Coeficientes universales para la entropía en una esfera (momento angular máximo y cutoff infinitos) 84

B. Propiedades de los armónicos esféricos vectoriales y tensoriales **87**
B.1. Armónicos esféricos vectoriales 87
B.2. Armónicos esféricos tensoriales 89

C. Programa en Mathematica para el estudio del gauge en la esfera **91**

Capítulo 1

Introducción

Cuando el estado global de un sistema cuántico que incluye dos o más subsistemas no es una combinación clásica de estos, se dice que dicho estado presenta entrelazamiento. La clasificación y cuantificación de estas correlaciones estadísticas, que tienen características propias en el caso cuántico, es objeto actualmente de un gran interés, tanto en el área de la teoría de la información, como de la computación cuánticas [1]. Para hacer cuantitativo el grado de entrelazamiento entre dos subsistemas se han propuesto varias medidas, entre las que tiene especial importancia la llamada entropía de entrelazamiento, la cual, cuando el estado global del sistema es puro, se corresponde con la entropía de von Neumann de la matriz densidad reducida ρ del subsistema en consideración,

$$S(\rho) = -Tr\left(\rho \log \rho\right) . \tag{1.1}$$

Bajo este contexto en el capítulo 2 de este se trabajo se desarollan tanto las propiedades de la matriz densidad y la matriz densidad reducida como de la entropía de von Neumann.

En la segunda parte de dicho capítulo se exploran los requerimientos para definir la entropía de entrelazamiento en teoría cuántica de campos de manera que pueda utilizarse como medida de las correlaciones entre una región del espacio V y su complemento $\overline{V}$ [2]. Por otro lado, la entropía es una herramienta muy útil para investigar propiedades no perturbativas, en particular, se analiza como la propiedad subaditividad fuerte conduce a una demostración de los teoremas C, F y A relacionados con la irreversibilidad del flujo de renormalización para $d = 2, 3, 4$ [3, 4, 5, 6].

Posteriormente, en el capítulo 3, se desarrolla en método de Peschel [7] para obtener la entropía de entrelazamiento de estados tipo gaussianos. Dicho procedimiento, es luego aplicado para realizar el cálculo numérico (en tiempo real) de la entropía de un campo escalar libre no masivo entre placas paralelas y en una esfera reduciendo ambos problemas a una torre de modos unidimensionales en la dirección perpendicular a las correspondientes superficies [8] . Para el caso de la esfera se computa término universal logarítmico de la entropia siguiendo el método numérico enunciado en [9] obteniéndose un valor coherente con lo esperado analíticamente a partir del estudio de anomalía de traza del tensor de

energía-momento para teorias conformes en $(3+1)$ dimensiones [10], es decir

$$c_{\log}^{S} = -\frac{1}{90}\,. \tag{1.2}$$

Por otra parte, para considerar esta entropía asociada a una región V y su complemento $\overline{V}$ una medida de las correlaciones en la superficie ∂V es necesario poder descomponer en espacio de Hilbert global de la forma

$$H = H_V \otimes H_{\overline{V}}\,. \tag{1.3}$$

En una teoría de gauge, esto no es siempre posible pero puede ser solucionado teniendo en cuenta ciertas sutilezas en la elección de los operadores pertenecientes al álgebra de la región V. Sin embargo, la fijación de gauge resultante no siempre permite relacionar la región V con una región espacial clara. Esta problemática, es explorada sobre un red discreta en el capítulo 4 siguiendo [11] con el objetivo de generar un mayor entendimiento del cómputo de la entropía del campo de Maxwell capítulo 5. Dicho cálculo se realiza en función de los operadores invariantes de gauge $\overline{E}$ y $\overline{B}$ de forma análoga a [12]. Para el caso de placas paralelas se concluye que la entropía del campo de Maxwell será igual a la de dos campos escalares. En cambio, para la esfera las teorías difieren para momento angular $l = 0$, de manera se producen cambios en el coeficiente universal logarítmico. A partir de aquí, se comprueba numéricamente el resultado

$$c_{\log}^{M} = 2\left(c_{\log}^{S} - c_{\log}^{S_{l=0}}\right) = -\frac{16}{45}\,, \tag{1.4}$$

el cual se corresponde con el resultado analítico obtenido por Dowker en [13] y no al de Solodukhin [10].

En el capítulo 6, a partir perturbación débil $h_{\mu\nu}$ sobre un espacio de Minkowski, se introduce el formalismo de gravedad linealizada que permite describir con $h_{\mu\nu}$ el campo asociado a partículas de helicidad 2 y (-2) (gravitones). Se realiza particular enfoque en las libertades de gauge que presenta dicho campo y se analizan las propiedades del tensor de Riemmann $R_{\mu\nu\rho\theta}$ como invariante de gauge de esta teoría.

Finalmente, en el capítulo 7, se presentan los resultados propios de este trabajo. En primer lugar, nuevamente se aborda el problema de la entropía para un campo de Maxwell, esta vez, a partir del campo A_μ requiriéndose en este caso emplear las fijaciones de gauge adecuadas. Luego de obtener por este procedimiento resultados análogos a los presentados en el capítulo 5, se trabaja el cálculo de la entropía de entrelazamiento para el campo de los gravitones linealizados $h_{\mu\nu}$. Para el caso de placas paralelas obtiene que la entropía no distingue entre el campo escalar, el de Maxwell o el gravitatorio lineal. En contraste, para la esfera se comprueba que la entropía será correspondiente a la de dos campos escalares sin aporte de los momentos angulares $l = 0$ y $l = 1$. Obteniéndose así, numéricamente, que

$$c_{\log}^{LG} = 2\left(c_{\log}^{S} - c_{\log}^{S_{l=0}} - c_{\log}^{S_{l=1}}\right) \approx -1{,}34644. \tag{1.5}$$

Es importante destacar que en todos los casos trabajados se encuentra una fijación de gauge que permite conservar la localidad de los grados de libertad permitiendo calcular adecuadamente la entropía de las regiones espaciales definidas.

Capítulo 2

Entropía de entrelazamiento

2.1. Matriz densidad

Para comprender el entrelazamiento cuántico se requiere de una descripción de la mecánica cuántica que permita entender el comportamiento de distintos subsistemas pertenecientes a un sistema global. En este marco es de utilidad introducir el operador matriz densidad y a partir de ella la matriz densidad reducida.

2.1.1. Definición y propiedades

Si se requiere caracterizar un sistema cuántico $\mathcal{S}$ en un estado $|\psi\rangle$ que puede escribirse como una mezcla estadística de los estados $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$, ..., $|\psi_n\rangle$ del espacio de Hilbert $H_{\mathcal{S}}$ con probabilidades λ_1,λ_2,...λ_n es posible definir la la matriz densidad ρ como

$$\rho = \sum_{m=1}^{n} \lambda_m \left|\psi_m\right\rangle \left\langle\psi_m\right| . \tag{2.1}$$

La propiedad más interesante del operador matriz densidad es que si se requiere calcular el valor medio de un operador $\mathcal{O}$ arbitrario autoadjunto (observable) en el estado $|\psi\rangle$ vale que

$$\left\langle\mathcal{O}\right\rangle_{\psi} = \sum_{m=1}^{n} \lambda_m \left\langle\psi_m|\mathcal{O}|\psi_m\right\rangle = Tr\left(\rho\mathcal{O}\right) . \tag{2.2}$$

La ecuación (2.2) usarse como definición alternativa de la matriz densidad. A partir de aquí, emergen otras propiedades de interés:

1. Dado que el valor medio de todo operador autoadjunto debe ser real, se tiene que la matriz densidad es un operador autoadjunto

$$\rho^{\dagger} = \rho\,. \tag{2.3}$$

2. El valor medio del operador identidad $\mathbb{I}$ es igual a 1 por ende la traza de la matriz densidad es igual a 1
$$Tr\left(\rho\right) = \left\langle \mathbb{I} \right\rangle_{\psi} = 1\,, \tag{2.4}$$
lo cual es coherente con que la suma de las probabilidades de los estados de la mezcla estadística en (2.1) debe ser 1 es decir
$$\sum_{m=1}^{n} \lambda_m = 1\,. \tag{2.5}$$

3. El valor medio de un operador sin autovalores negativos debe ser positivo por ende la matriz densidad debe ser definida positiva. En particular, los elementos de su diagonal deben ser positivos
$$\rho_{jj} = \delta_{ij}\rho_{ij} \geq 0\,. \tag{2.6}$$

4. La matriz densidad puede ser diagonalizada a partir de una transformación unitaria de la forma
$$\rho \quad \longrightarrow \quad U^{\dagger}\rho U\,, \tag{2.7}$$
Obtenidos los elementos $p_1, p_2, ..., p_n$ de la diagonal es posible ver que $Tr\left(\rho^2\right) \leq 1$ a partir de (2.4) y (2.6), en efecto
$$Tr\left(\rho^2\right) = \sum_{m=1}^{n} p_{mm}^2 \leq \left(\sum_{m=1}^{n} p_{mm}\right)^2 = Tr^2(\rho) = 1\,. \tag{2.8}$$

2.1.2. Estados Puros y mixtos

Otras propiedades de la matriz densidad emergen en estudio de un clase especial de estados, los estados puros. Puede decirse que un estado $|\psi\rangle$ para el cual existe un experimento que entregue resultados que pueden ser predichos con certeza si el sistema se encuentra únicamente en dicho estado es puro [14]. Sin embargo, de una forma más general, si se tiene un conjunto $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, ..., |\phi_n\rangle\}$ de autoestados de un conjunto completo de operadores, un estado será puro si puede escribirse como una combinación lineal de los mismos de la forma
$$|\psi\rangle = \sum_{m} c_m |\phi_m\rangle \;,\; \langle\psi|\psi\rangle = 1\,. \tag{2.9}$$

Una matriz densidad ρ representa un estado puro si existe un elemento normalizado $|\psi\rangle \in H_{\mathcal{S}}$ de manera que ρ es igual a la proyección ortogonal en el subespacio generado por $|\psi\rangle$ [16] valiendo así que
$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|\;. \tag{2.10}$$
En otras palabras ρ será proyector unidimensional y por ende vale que
$$\rho^2 = \rho\,. \tag{2.11}$$

Entonces, para estados puros, es válido el caso límite de la ecuación (2.8), es decir que

$$Tr\left(\rho^2\right) = 1\,, \tag{2.12}$$

donde es posible ver que (2.12) es una condición necesaria y suficiente de los estados puros.

Si $|\psi\rangle$ no es un estado puro, es decir se encuentra en una mezcla estadística de estados se dice que es un estado mixto. Es destacable que si bien las ecuaciones (2.10) y (2.11) pierden su validez en el caso mixto, la expresión (2.2) puede seguir siendo usada para calcular los valores medios de los observables.

2.1.3. Matriz densidad reducida

Si se considera que el sistema $\mathcal{S}$ esta compuesto de los subsistemas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ el espacio de Hilbert del sistema global será $H_{\mathcal{S}} = H_{\mathcal{A}} \otimes H_{\mathcal{B}}$, por ende es deseable definir la matriz densidad reducida $\rho_{\mathcal{A}}$ para el subsistema $\mathcal{A}$ de manera que

$$\langle \mathcal{O}_{\mathcal{A}} \rangle = Tr\left(\rho_{\mathcal{A}} \mathcal{O}_{\mathcal{A}}\right)\,, \tag{2.13}$$

donde $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ es observable arbitrario definido sobre el subsistema $\mathcal{A}$. A partir de aquí es posible tomar el operador autoadjunto $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ sobre $\mathcal{S}$ de manera que $\mathcal{O}_{\mathcal{S}} = \mathcal{O}_{\mathcal{A}} \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{B}}$ para el cual, a partir de (2.2) vale que

$$\langle \mathcal{O}_{\mathcal{S}} \rangle = Tr\left(\rho \mathcal{O}_{\mathcal{S}}\right) = Tr\left(\rho(\mathcal{O}_{\mathcal{A}} \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{B}})\right)\,. \tag{2.14}$$

Para mantener la consistencia física los valores medios obtenidos a partir de (2.13) y (2.14) deben ser iguales y entonces valdrá que $Tr\left(\rho_{\mathcal{A}} \mathcal{O}_{\mathcal{A}}\right) = Tr\left(\rho(\mathcal{O}_{\mathcal{A}} \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{B}})\right)$ implicando que la matriz densidad reducida $\rho_{\mathcal{A}}$ para el subsistema $\mathcal{A}$ puede calcularse como la traza parcial de la matriz densidad ρ sobre el subsistema $\mathcal{B}$

$$\rho = Tr_{\mathcal{B}}(\rho)\,. \tag{2.15}$$

A partir de aquí, es interesante ver que toda matriz densidad que describa un estado mixto puede ser interpretada como la traza parcial de una matriz densidad que describa un estado puro en un sistema que abarque al original. En efecto, si se considera una base completa ortonormalizada $\{|\alpha_m\rangle_{\mathcal{A}}\}$ para un espacio de Hilbert $H_{\mathcal{A}}$ se puede escribir la matriz densidad de un estado mixto como

$$\rho_{\mathcal{A}} = \sum_m \lambda_m \left|\alpha_m\right\rangle_{\mathcal{A}} \left\langle\alpha_m\right|_{\mathcal{A}}\,. \tag{2.16}$$

Sin embargo, existe un espacio de Hilbert $H_{\mathcal{B}}$ isomorfo a $H_{\mathcal{A}}$ con base $\{|\alpha_m\rangle_{\mathcal{B}}\}$ de manera que es posible tomar un estado puro $|\psi\rangle \in H_{\mathcal{A}} \otimes H_{\mathcal{B}}$ tal que

$$|\psi\rangle = \sum_m \sqrt{\lambda_m}\left(|\alpha_m\rangle_{\mathcal{A}} \otimes |\alpha_m\rangle_{\mathcal{B}}\right)\,. \tag{2.17}$$

La matriz densidad asociada a este estado será

$$\rho_{\mathcal{AB}} = |\psi\rangle\langle\psi| = \sum_{mn} \sqrt{\lambda_m \lambda_n}\left(|\alpha_m\rangle\langle\alpha_n|\right)_{\mathcal{A}} \otimes \left(|\alpha_m\rangle\langle\alpha_n|\right)_{\mathcal{B}}\,, \tag{2.18}$$

pudiendo recuperarse a partir de (2.15) la ecuación (2.16).

2.2. Entrelazamiento Cuántico

Clásicamente, cuando un sistema puede ser separado en partes no interactuantes, estas pueden ser estudiadas por separado y luego recombinadas para obtener un adecuado entendimiento del sistema global. Sin embargo, esta afirmación no es cierta cuando se trabaja con sistemas cuánticos, en estos casos, el estado global de un sistema que incluye dos o más subsistemas no es necesariamente el producto de los estados de cada subsistema por separado o bien una combinación clásica de este tipo de estados. Cuando esto sucede se dice que dicho estado presenta entrelazamiento.

Formalmente el espacio de Hilbert de un sistema $\mathcal{S}$ compuesto de n subsistemas $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, ..., $\mathcal{S}_n$ no interactuantes puede ser escrito por

$$H_{\mathcal{S}} = H_{\mathcal{S}_1} \otimes H_{\mathcal{S}_2} \otimes ... \otimes H_{\mathcal{S}_n} \,. \tag{2.19}$$

La matriz densidad ρ correspondiente a $\mathcal{S}$ viene dada por la definición (2.1) mientras que la matrices densidad reducida $\rho_{\mathcal{S}_1}$,$\rho_{\mathcal{S}_2}$,...,$\rho_{\mathcal{S}_n}$ de los subsistemas vienen dadas a partir de esta por (2.15). Se dice que un estado de $H_{\mathcal{S}}$ descripto por ρ es separable si puede escribirse como

$$\rho = \sum_m p_m \rho^m_{\mathcal{S}_1} \otimes \rho^m_{\mathcal{S}_2} \otimes ... \otimes \rho^m_{\mathcal{S}_n} \quad , \quad \sum_m p_m = 1 \,, \tag{2.20}$$

es decir, una superposición clásica probabilística de estados separables en producto tensorial. Estados separables como el (2.20) pueden ser construidos por distintos laboratorios que tienen acceso a cada uno de los subsistemas y solo se pueden contruir clasicamente. Si el estado en cuestión no puede ser dado de la forma (2.20) no será separable y presentara entrelazamiento [1].

Bajo este contexto, la Paradoja Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) introducida en [15] evidencia que si se realizan mediciones sobre un subsistema que forma parte de un sistema global con entrelazamiento, el efecto de estas se manifiesta instantáneamente en los demás subsistemas del mismo. Para ilustrar este concepto, supóngase un sistema $\mathcal{S}$ compuesto de dos subsistemas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ con estados posibles $|0\rangle$ y $|1\rangle$ para el cual se confecciona el estado de Bell (o par EPR):

$$|\beta_{01}\rangle_{\mathcal{S}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|0\rangle_{\mathcal{A}} \otimes |1\rangle_{\mathcal{B}} + |1\rangle_{\mathcal{A}} \otimes |0\rangle_{\mathcal{B}} \right] , \tag{2.21}$$

y se separan los subsistemas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ una distancia lo suficiente grande para asegurar que la interacción entre los mismos sea nula. Si un observador realiza una medición sobre el subsistema $\mathcal{A}$ y obtiene el estado $|0\rangle_{\mathcal{A}}$, el colapso inmediato de la función de onda produce que el subsistema $\mathcal{B}$ se encuentre en el estado $|1\rangle_{\mathcal{B}}$. En resumen, la realización de una medición en $\mathcal{A}$ produce efectos inmediatos en $\mathcal{B}$, de manera que suprimir la interacción entre ambas partículas no elimina el entrelazamiento del sistema .

Sin embargo, se nota que un observador con acceso solo a observables en $\mathcal{B}$ no puede deducir si se ha hecho una medición en $\mathcal{A}$ observando si el subsistema $\mathcal{B}$ esta en el estado $|0\rangle_{\mathcal{B}}$ o en $|1\rangle_{\mathcal{B}}$. Esto es porque la matriz densidad reducida en $\mathcal{B}$ es $\rho_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}\mathbb{I}$ y la mitad

de veces que se mida tendrá cada uno de los estados. El hecho de medir $|1\rangle_{\mathcal{B}}$ no permite inferir si se ha medido algo en $\mathcal{A}$ y por ende no es posible transmitir información entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ usando entrelazado. En palabras de Schrödinger: Lo extraño del entrelazado cuántico es que el conocimiento completo del estado global $\mathcal{S} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, o sea el estado puro $|\beta_{01}\rangle_{\mathcal{S}}$, no da un conocimiento completo en las partes del sistema ya que el estado $|\beta_{01}\rangle_{\mathcal{S}}$ es mezclado.

2.3. Entropía de Entrelazamiento

La cuantificación las correlaciones estadísticas obtenidas a partir del entrelazamiento son de notable interés en el área de la información cuántica [1]. En particular, para hacer cuantitativo el grado de entrelazado entre dos subsistemas existen varias medidas, entre las que se destaca la entropía, dado que permite medir la cantidad de incertidumbre en un sistema físico cualquiera.

2.3.1. Entropia de Shanon

Como primera aproximación es relevante el estudio de la entropía definida en la teoría de información clásica, la entropía de Shanon. Esta variable puede ser entendida una medida de la incertidumbre antes de medir el valor de una variable cualquiera X o como la cantidad de información ganada después de obtener dicho valor. Es posible imponer las siguientes condiciones minimas para esta medida de incertidumbre:

- La información de un evento debe ser función suave de la probabilidad del evento
- La información ganada cuando dos eventos independientes ocurren con probabilidades individuales debe ser la suma de la información ganada en cada evento por separado

A partir de aquí la entropía de Shanon puede ser escrita formalmente [1, 17] como función de las probabilidades p_1^X, p_2^X,..., p_n^X de cada uno de los valores que puede tomar la variable X de la siguiente forma

$$H(X) = H(p_1^X, p_2^X, ..., p_n^X) = -\sum_{\alpha} p_\alpha^X \log\left(p_\alpha^X\right), \tag{2.22}$$

donde es necesario definir que $0\log(0) = \lim_{p\to 0} p\log(p) = 0$ para eliminar posibles inconsistencias.

2.3.2. Entropía de von Neumann

La definición entropía de Shanon en teoría de la información clásica puede ser ampliada de forma que permita cuantificar la incerteza en un distribución de probabilidad asociada a estados cuánticos. Bajo este contexto se define la entropía de von Neumann a partir de la matriz densidad como

$$S(\rho) = -Tr\left(\rho \log \rho\right). \tag{2.23}$$

La entropía de von Neumann no es un observable, es decir, no existe un operador autoadjunto cuyo valor medio para un estado dado sea la entropía para correspondiente al mismo. Además, es claro a parir de la definición (2.23) que la entropía será una función del estado, en este caso descripto por la matriz densidad.

Por otro lado, dados los autovalores λ_m de ρ la definición (2.23) puede ser expresada nuevamente como

$$S(\rho) = -\sum_m \lambda_m \log , \tag{2.24}$$

donde la correspondencia entre (2.22) y (2.24) es evidente. También, se destaca que nuevamente es necesario tomar que $0 \log(0) = 0$.

Para estados puros, es válida la ecuación (2.10), de manera que la matriz densidad tendrá un único autovalor no nulo de valor 1. Esto implica, a partir de la expresión (2.24), que la entropía asociada a un estado puro es nula.

2.3.3. Entropía de von Neumann como medida de entrelazamiento

Supóngase nuevamente un sistema bipartito $\mathcal{S}$ en el estado dado por la matriz densidad ρ y compuesto de los subsistemas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ cuyos estados están representados por las matrices densidad reducida $\rho_\mathcal{A}$ y $\rho_\mathcal{B}$ respectivamente. La entropía del sistema global estará dada por ρ en base a la ecuación (2.23) mientras que las entropías de los subsistemas vendrán dadas por las entropías de von Neumann correspondientes de la forma:

$$S_\mathcal{A}(\rho_\mathcal{A}) = -Tr\left(\rho_\mathcal{A} \log \rho_\mathcal{A}\right), \quad \rho_\mathcal{A} = Tr_\mathcal{B}\left(\rho\right) , \tag{2.25}$$

$$S_\mathcal{B}(\rho_\mathcal{B}) = -Tr\left(\rho_\mathcal{B} \log \rho_\mathcal{B}\right), \quad \rho_\mathcal{B} = Tr_\mathcal{A}\left(\rho\right) . \tag{2.26}$$

Si el estado global es puro, es posible obtener que los autovalores no nulos de las matrices densidad reducidas $\rho_\mathcal{A}$ y $\rho_\mathcal{B}$ son iguales. Aplicando esta idea en (2.25) y (2.26) es claro que las entropías de ambos subsistemas son iguales, permitiendo asi usar una de ellas como medida del entrelazamiento entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ [1].

Si el estado del sistema global $\mathcal{S}$ y el del subsistema $\mathcal{A}$ son puros, el estado del subsistema restante $\mathcal{B}$ debe ser puro y por ende el estado global será separable (no presentara entrelazamiento). Esto es coherente con que al trabajar sobre estado puro vale que $S_\mathcal{A}(\rho_\mathcal{A}) = 0$.

2.3.4. Subaditividad de la entropía de entrelazamiento

La entropía de entrelazamiento definida a partir de la matriz densidad reducida como (2.25) y (2.26) cumple con la propiedades de sudaditividad y subaditividad fuerte [17, 18, 2] que tienen un gran interés practico. Más especificamente, para dos subsistemas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ separables vale que $\rho_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}} = \rho_\mathcal{A} \otimes \rho_\mathcal{B}$ y por ende

$$S_\mathcal{A}(\rho_\mathcal{A}) + S_\mathcal{B}(\rho_\mathcal{B}) = S_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}}(\rho_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}}) . \tag{2.27}$$

No obstante, sin la necesidad de imponer la separabilidad entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ vale la propiedad de subaditividad de la entropía dada por

$$S_{\mathcal{A}}(\rho_{\mathcal{A}}) + S_{\mathcal{B}}(\rho_{\mathcal{B}}) \geq S_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}}(\rho_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}})\,. \tag{2.28}$$

Por otro lado, esta desigualdad puede ser aplicada a los complementos $\overline{\mathcal{A}}$ y $\overline{\mathcal{B}}$ de los subsistemas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de manera que

$$S_{\overline{\mathcal{A}}}(\rho_{\overline{\mathcal{A}}}) + S_{\overline{\mathcal{B}}}(\rho_{\overline{\mathcal{B}}}) \geq S_{\overline{\mathcal{A}}\cup\overline{\mathcal{B}}}(\rho_{\overline{\mathcal{A}}\cup\overline{\mathcal{B}}})\,. \tag{2.29}$$

Dado que el complemento de la unión de los complementos de los subsistemas es la intersección de los últimos y que si el sistema global es puro la entropía de cada subsistema es igual a la de su complemento se tiene

$$S_{\mathcal{A}}(\rho_{\mathcal{A}}) + S_{\mathcal{B}}(\rho_{\mathcal{B}}) \geq S_{\mathcal{A}\cap\mathcal{B}}(\rho_{\mathcal{A}\cap\mathcal{B}})\,. \tag{2.30}$$

Bajo este contexto, las ecuaciones (2.28) y (2.30) pueden generalizarse en la propiedad de subaditividad fuerte [18]

$$S_{\mathcal{A}}(\rho_{\mathcal{A}}) + S_{\mathcal{B}}(\rho_{\mathcal{B}}) \geq S_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}}(\rho_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}}) + S_{\mathcal{A}\cap\mathcal{B}}(\rho_{\mathcal{A}\cap\mathcal{B}})\,. \tag{2.31}$$

Si la desigualdad satura para un estado en particular, dicho estado es llamado Markoviano y vale la igualdad (Ver figura 2.1):

$$S_{12}(\rho_{12}) + S_{13}(\rho_{13}) = S_{123}(\rho_{123}) + S_2(\rho_2)\,, \tag{2.32}$$

donde tomando la traza sobre el espacio 2 se tiene que 1 y 3 son separables [19], es decir

$$\rho_{13} = \sum_m p_m \rho_1^m \otimes \rho_3^m\,. \tag{2.33}$$

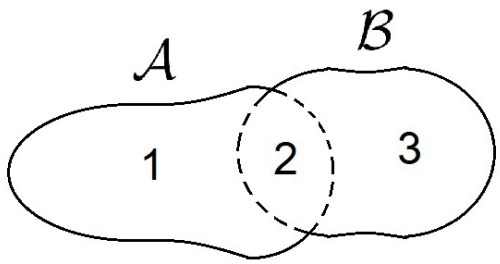


Figura 2.1: Subsistemas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ que definen los subsistemas 1,2 y 3

2.4. Entropía en teoría cuántica de campos

A una región del espacio V se le puede asignar una entropía ya sea esta una entropía térmica o producida por fluctuaciones del vacío. Para el segundo caso, dicha entropía puede obtenerse a partir de la entropía de von Neumann correspondiente a la región V y actuará como medida de las correlaciones del sistema. Además, si el estado global es puro esta magnitud se podrá considerar una medición del entrelazamiento entre la región V y su complemento $\overline{V}$.

Por otro lado, la propiedad de subaditividad fuerte de la entropía conduce a una demostración de los teoremas C, F y A en teoría de campos relativistas de dimensiones (1+1), (2+1) y (3+1) respectivamente. Siendo estos teoremas los que muestran la irreversibilidad del flujo del grupo de renormalización y dan una interpretación precisa de este fenómeno en términos de medidas de información.

2.4.1. Entropía de entrelazamiento de una región del espacio

Antes de de estudiar el caso continuo de infinitos grados de libertad es útil formalizar la entropía de una región V sobre una red discreta. Cada punto de esta red puede ser considerado un grado de libertad y por ende puede ser asociado con un espacio de Hilbert H_m. Bajo este contexto, es válido suponer la existencia en un estado puro $|\psi\rangle$ perteneciente al espacio de Hilbert global, de manera que para el sistema global que abarca toda la red se tiene la matriz densidad

$$\rho = |\psi\rangle \langle\psi| , \quad |\psi\rangle \in \otimes_m H_m . \tag{2.34}$$

Por otro lado, luego de definir una región V arbitraria sobre la red el espacio de Hilbert global puede ser obtenido como

$$H_V \otimes H_{\overline{V}} = \otimes_m H_m . \tag{2.35}$$

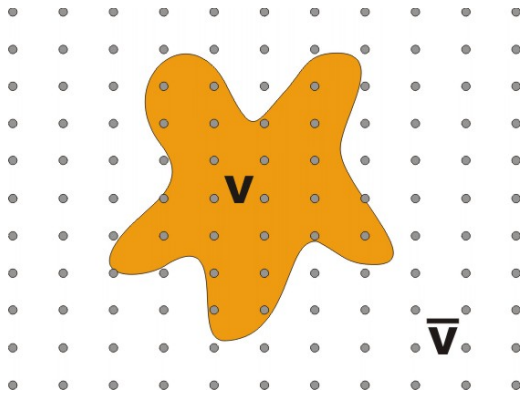


Figura 2.2: Una región V arbitraría y su completo $\overline{V}$ definidos sobre una red discreta

Luego, es válido tomar la matriz densidad reducida correspondiente a la región V a partir de la traza parcial de la matriz densidad sobre la región $\overline{V}$

$$\rho_V = Tr_{\overline{V}}(\rho) = Tr_{\overline{V}}(|\psi\rangle\langle\psi|) \ , \tag{2.36}$$

siendo posible a partir de (2.36) calcular tanto la entropía de entrelazamiento S_V de la región V así como el valor medio de los observables $\mathcal{O}_V$ en dicha región

$$S(V) = -Tr(\rho_V \log \rho_V) \ , \tag{2.37}$$

$$\langle \mathcal{O}_V \rangle = Tr(\rho_V \mathcal{O}_V) \ . \tag{2.38}$$

El límite continuo puede recuperarse haciendo tender a cero el espacio entre los distintos puntos de la red discreta siendo válido suponer que ahora se trabaja con una teoría cuántica de campos d-dimensional en un espacio-tiempo de Minkowski[1] que describe el comportamiento de los campos cuánticos ϕ.

Para proseguir es necesario destacar que puede tomarse que en un momento de simultaneidad toda la descripción esta dada sobre una superficie a tiempo constante[2] Σ_{d-1}. Luego, de forma análoga al caso anterior, al definir una región V del espacio en Σ_{d-1} es posible calcular la matriz densidad reducida correspondiente a dicha región tomando la traza parcial sobre su complemento

$$\rho_V = Tr_{\overline{V}}\left(\rho_{\Sigma_{d-1}}\right) \ . \tag{2.39}$$

La única dificultad agregada es que al trabajar con un continuo de grados de libertad, la matriz densidad $\rho_{\Sigma_{d-1}}$ debe ser construida a partir del funcional de onda $\psi[\phi]$.

Una vez realizado este proceso el cálculo de la entropía, así como el de los observables, puede hacerse de forma directa a partir de la versión análoga de las ecuaciones (2.37) y (2.38).

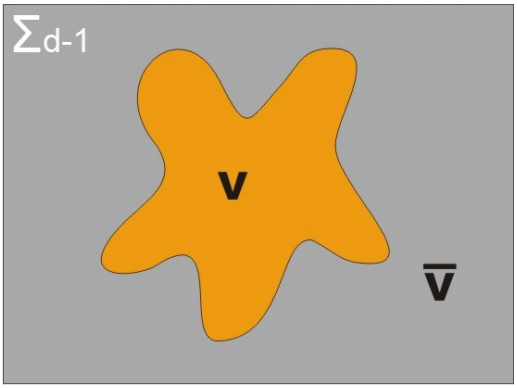


Figura 2.3: Una región V arbitraría y su complemento $\overline{V}$ definidos sobre una una superficie de Cauchi Σ_{d-1}

[1] Este desarrollo puede ser generalizado a espacios curvos arbitrarios.

[2] Más generalmente, puede tomarse sobre cualquier superficie de Cauchy $(d-1)$-dimensional.

Para ambos casos, como extensión de la propiedad enunciada para sistemas bipartitos en base a la puridad del estado global es válido que $S(V) = S(\overline{V})$ de manera que, a diferencia de la entropía termodinámica, la entropía de entrelazamiento de un estado puro no es extensiva.

2.4.2. Entropía geométrica

Definir una región V sobre la superficie a tiempo constante requiere introducir una superficie de entrelazamiento sobre la frontera de dicha región (∂V). La entropía de entrelazamiento correspondiente dependerá de las correlaciones entre la región definida y su complemento. En este marco, es de esperar que la entropía de entrelazamiento tenga una gran contribución proporcional al área de ∂V debido a las fuertes correlaciones que presenta una teoría de campos a distancia corta, entre ambos lados de la frontera. De hecho, para una teoría de campos, en la ausencia de un regulador, es coherente suponer que entropía de entrelazamiento correspondiente a una región del espacio V será divergente ultravioleta, siendo estas divergencias proporcionales a integrales locales en ∂V. A partir de estas consideraciones es válido que en presencia de un regulador ε con unidades de distancia :

$$S(V) = \frac{g_{d-2}[\partial V]}{\varepsilon^{d-2}} + \frac{g_{d-4}[\partial V]}{\varepsilon^{d-4}} + ... , \tag{2.40}$$

donde los coeficientes $g_{d-2}, g_{d-4}, ...$ dependen de las características de la teoría en cuestión, por ejemplo, de la cantidad de grados de libertad y de la regularización. Más precisamente, introduciendo L como una medida del tamaño de la región, la entropía puede escribirse[3] para un numero de dimensiones d par como

$$S(V) = c_{d-2}\left(\frac{L}{\varepsilon}\right)^{d-2} + c_{d-4}\left(\frac{L}{\varepsilon}\right)^{d-4} + ... + (-1)^{\frac{d-2}{2}} c_{\text{univ}} \log\left(\frac{L}{\varepsilon}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^0) , \tag{2.41}$$

y para d impar

$$S(V) = c_{d-2}\left(\frac{L}{\varepsilon}\right)^{d-2} + c_{d-4}\left(\frac{L}{\varepsilon}\right)^{d-4} + ... + c_1\left(\frac{L}{\varepsilon}\right) + (-1)^{\frac{d-1}{2}} c_{\text{univ}} + \mathcal{O}(\varepsilon) . \tag{2.42}$$

En este caso los coeficientes $c_{d-2}, c_{d-4}, ...$ dependen del esquema que se utiliza para regularizar la teoría, pero el coeficiente c_{univ} permite extraer información universal que solo depende del límite continuo y está relacionada con las anomalías conformes presentes en la teoría [20].

Normalmente el término $\sim (L/\varepsilon)^{d-2}$ es conocido como ley de área, en contraposición con la dependencia usual de los estados térmicos $\sim (L/\varepsilon)^{d-1}$ que se conoce como ley de volumen. Es destacable que para sistemas $(1+1)$ dimensionales la entropía tendrá un único término logarítmico [21, 22] que representa la ley de área para $d = 2$ pero también permitirá extraer información de carácter universal.

[3] Esta expresión exclusivamente en potencias de ε corresponde a un teoría sin escalas. Si este no fuera el caso pueden cambiarse por potencias de otros parámetros, por ejemplo masas.

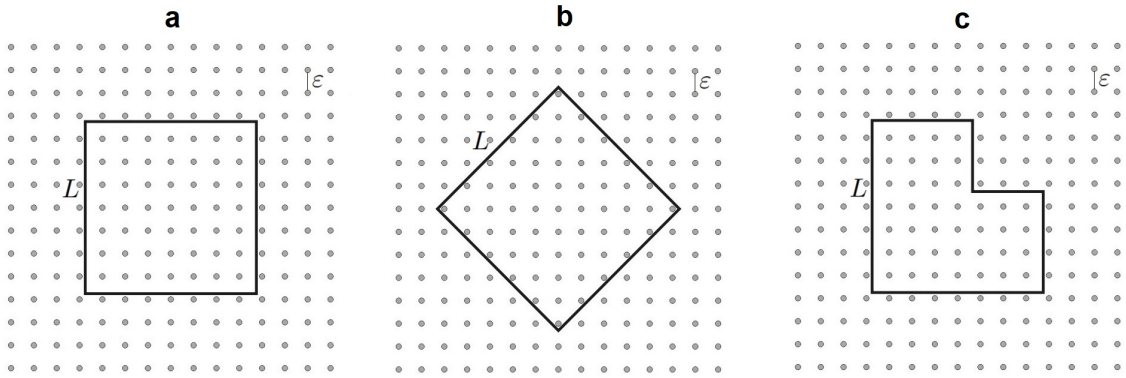


Figura 2.4: Tres regiones distintas definidas sobre un red discreta en (2+1) dimensiones

Para ilustrar el comportamiento del términos de área y del término universal logarítmico es útil considerar un campo escalar no masivo en (2+1) dado por el hamiltoniano:

$$H = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left(\dot{\phi}^2 + (\nabla\phi)^2\right) , \tag{2.43}$$

o bien, sobre una red discreta introduciendo un regulador ultravioleta ε:

$$H = \frac{1}{2}\sum_i \varepsilon^2 \left(\dot{\phi}_i + \sum_{j<i} \frac{(\phi_i - \phi_j)^2}{\varepsilon^2}\right) . \tag{2.44}$$

Si ahora se define una región sobre la red delimitada por un cuadrado de lado L (Ver Figura 2.4.a) es posible obtener que la entropía de dicha región será

$$S(1) = 0{,}75\left(\frac{\text{Perímetro}}{\epsilon}\right) - 0{,}047\log\left(\frac{L}{\varepsilon}\right) + \text{Constante}\,, \tag{2.45}$$

donde se observa tanto un término de área proporcional al perímetro del cuadrado como el término logarítmico para el cual se espera que sea universal.

Sin embargo, al rotar el cuadrado (Ver Figura 2.4.b) o la red y calcular de nuevo la entropía se tiene

$$S(2) = 0{,}85\left(\frac{\text{Perímetro}}{\epsilon}\right) - 0{,}047\log\left(\frac{L}{\varepsilon}\right) + \text{Constante}\,, \tag{2.46}$$

donde el coeficiente de área ha cambiado porque la red no tiene simetría de rotación, pero el coeficiente logarítmico permanece invariante debido a que es una propiedad que solo depende del continuo de la teoría y por ende no es afectado por como se define la red o se toma el límite continuo.

Por otro lado si en vez de rotar la región se agregan vértices a la frontera sin variar los ángulos de los mismos como en (Ver Figura 2.4.c) puede obtenerse que

$$S(3) = 0{,}75\left(\frac{\text{Perímetro}}{\epsilon}\right) - 0{,}047\left(\frac{6}{4}\right)\log\left(\frac{L}{\varepsilon}\right) + \text{Constante}\,, \tag{2.47}$$

donde puede verse que el término de área no varia mientras que el logarítmico si lo hace en un factor de (6/4). Este valor puede ser relacionado con que se paso de figuras con 4 vértices en (2.4.a) y (2.4.b) a una figura de 6 vértices en (2.4.c) implicando el coeficiente logarítmico esta relacionado con esta característica geométrica de la región. En efecto es válida la forma genérica:

$$S = c_{\text{Área}} \left(\frac{\text{Perímetro}}{\epsilon} \right) - \sum_{\text{Vértices}} c_{\log}(\theta) \log \left(\frac{L}{\varepsilon} \right) + \text{Constante} \,, \tag{2.48}$$

donde θ es el ángulo correspondiente a cada uno de los vértices. Nuevamente puede verse que los términos divergentes son locales: en este caso el término logarítmico es inducido por los vértices.

Se destaca que si bien en esta sección no se desarrolla como computar las entropías en cuestión, en el próximo capítulo se establecerá un método para obtener las mismas.

2.4.3. Entropía y el flujo del grupo de renormalización

Para una teoría de campos en $(1+1)$-dimensional la entropía de entrelazamiento esta directamente relacionada con el flujo del grupo de renormalización, en particular es posible llegar a una demostración entropica del teorema C [3, 4] . Más en detalle, considerando la subaditividad fuerte lorenziana a partir de (2.28) para una superficie de Cauchy[4] unidimensional dividida en dos regiones A y B (Ver Figura 2.5), vale que

$$S(A) + S(B) \geq S(A \cup B) + S(A \cap B) \,. \tag{2.49}$$

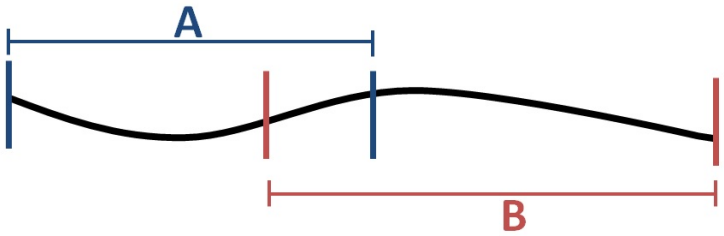


Figura 2.5: Regiones A y B con intersección no nula definidas sobre una superficie de Cauchy unidimensional

Más específicamente, considerando las regiones $A = a \cup b$ y $B = b \cup c$ definidas sobre la superficie de Cauchy $a \cup b \cup c$ (Ver figura 2.6), la ecuación (2.49) se escribe como

$$S(a \cup b) + S(b \cup c) \geq S(a \cup b \cup c) + S(b) \,. \tag{2.50}$$

[4]Una superficie de Cauchy es una región del espacio-tiempo, en este caso de dimensión $d = 2$, sobre la cual un conjunto de condiciones iniciales determinan unívocamente la evolución causal.

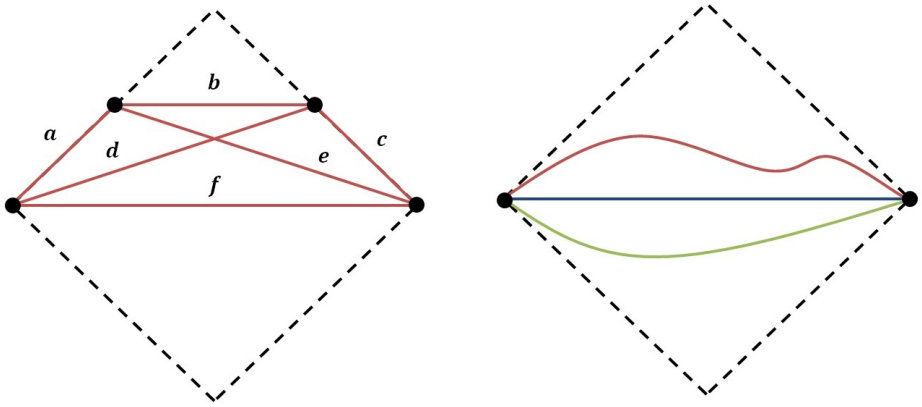


Figura 2.6: Regiones a,b,c,d,e y f (izquierda) y distintas regiones con la misma entropía (derecha) definidas sobre el diamante causal

Sin embargo, dentro del diamante causal todas las superficies de Cauchy definidas con mismo punto inicial y final poseen la misma entropía dado que solo se diferencian por una trasformación causal unitaria (Ver figura 2.6). Bajo este contexto (2.50) se reduce a

$$S(d) + S(e) \geq S(f) + S(b)\,. \tag{2.51}$$

O bien, escribiendo la entropía en función del tamaño de la región (distancia entre los puntos inicial y final)

$$S(r_d) + S(r_e) \geq S(r_f) + S(r_b)\,. \tag{2.52}$$

Mediante consideraciones geométricas sobre el trapecio $abcf$ se tiene que $r_d r_e = r_f r_b$. Por ende, utilizando la arbitrariedad de las regiones definidas para tomar $r_d = r_e$ se tiene $r_d = r_e = \sqrt{r_f r_b}$ de manera que

$$2S(\sqrt{r_f r_b}) \geq S(r_f) + S(r_b)\,. \tag{2.53}$$

El trapecio $abcf$ puede deformarse lo suficiente para considerar $r_b = r$ y $r_f = r + \delta$ con $0 < \delta << r$. Siendo así r_b muy similar a r_f pero manteniendo la relación geométrica $r_b < r_f$. Bajo este análisis, se realiza una expansión en Taylor sobre r en función de δ y considerando el primer término no nulo se tiene

$$rS''(r) + S'(r) \leq 0\,. \tag{2.54}$$

A partir de aquí definiendo una nueva función $C(r)$ es posible obtener

$$c(r) = rS'(r)\,,\; c'(r) \leq 0\,. \tag{2.55}$$

A distancia suficientemente pequeñas todas la partículas poseen muy alta energía y sus masas pueden ser despreciadas y distancias suficientemente grandes las partículas masivas

ya han desaparecido, obteniéndose así en ambos extremos teorías sin en escalas. Para dichos casos en $(1+1)$ dimensiones la entropía esta compuesta por un único término logarítmico [23, 24] de la forma

$$S(r) = \frac{c}{3} \log\left(\frac{r}{\varepsilon}\right), \tag{2.56}$$

donde C es una constante conocida como carga central de Virasoro y ε es un regulador. Bajo este contexto se tiene que

$$C(r) = \frac{c}{3}. \tag{2.57}$$

Considerando el carácter universal de la entropía en $(1+1)$ dimensiones, esto implica que para cualquier teoría existe una función universal y adimensional de la distancia $C(r)$ que es no creciente ante dilataciones y toma valores finitos en los puntos fijos. Este resultado es equivalente[5] al Teorema C demostrado por Zamolodchikov en [25] a partir del estudio del tensor energía momento en una formulación euclídea.

Adicionalmente, esto implica que una teoría cuántica de campos puede ser vista como un flujo entre dos teorías conformes (sin escalas) en los puntos fijos, una en el límite ultravioleta y otra en el infrarrojo. Las cargas centrales de Virasoro para las dos teorías en los limites deben cumplir que $c_{UV} > c_{IR}$.

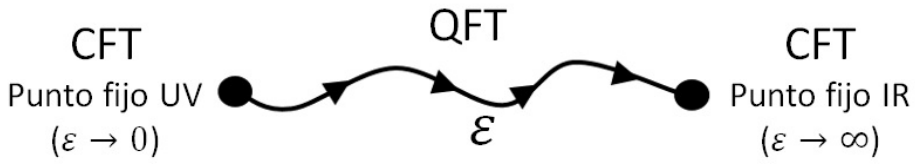


Figura 2.7: Esquema del flujo del grupo de renormalización entre dos teorías conformes (sin escalas) para una teoría con regulador ε.

El teorema C también puede ser enunciado de la siguiente manera: *Dados los parámetros de acoplamiento λ_i existe una función universal adimensional $C(\lambda_i)$ que es no creciente sobre las trayectorias del grupo de renormalización y estacionaria en los puntos fijos.* Siendo a partir de aquí es posible interpretar que la función C mide una especie de entropía relacionada con la información que se pierde bajo las transformaciones del grupo de renormalización.

Es importante destacar que la propiedad de subaditividad fuerte también conduce a los teoremas de irreversibilidad del flujo del grupo de renormalización en más dimensiones. Para $d = 3$ (teorema F) la prueba puede realizarse a partir del término universal constante de la entropía [5, 26] y para $d = 4$ (teorema A) alcanza al término universal logarítmico [6].

[5] Si bien las implicancias de ambas demostraciones son las mismas, las funciones C definidas no son iguales entre si.

Capítulo 3

Entropía de entrelazamiento de un campo escalar libre

3.1. Cálculos de la entropía de entrelazamiento para campos libres

Los cálculos de la entropía de entrelazamiento para campos libres pueden realizarse tanto en tiempo euclídeo como en tiempo real. Los primeros suelen ser utilizados para trabajos puramente analíticos y suelen ser mediante el método de réplicas a partir de la formulación de integrales de camino [2, 8]. En cambio, los cómputos en tiempo real se realizan primero sobre una teoría de campos discreta y después se toma el límite continuo.

Los cálculos en tiempo real apuntan a calcular de forma directa la matiz densidad reducida en la región de interés a partir de los correladores, estos procedimientos fueron realizados por [7, 27, 28] para el caso bosónico y de forma similar para el caso fermiónico por [7, 22]. Este tipo de cálculos también puede extenderse a casos interactuantes a partir de métodos perturbativos [29].

En este capítulo se presentara de forma detallada una versión similar del cálculo presentado en [7]. Se deducirá una expresión genérica para la entropía de entrelazamiento de estados gaussianos que luego será aplicada al caso de un campo escalar bosónico libre entre placas paralelas y en una región esférica [8, 28, 31].

3.2. Entropía de entrelazado para Estados Gaussianos

3.2.1. Estados Gaussianos y el Teorema de Wick

Dados los operadores de coordenadas ϕ_i y de momento conjugado π_i puede definirse un álgebra de conmutación canónica de la teoría a partir de las relaciones:

$$[\phi_i, \pi_j] = i\delta_{ij}, \qquad [\phi_i, \phi_j] = 0, \qquad [\pi_i, \pi_j] = 0\,. \tag{3.1}$$

En este marco, normalmente el Teorema de Wick [30] puede ser enunciado de la siguiente manera: *Para cualquier colección de campos* $\phi_1 = \phi(x_1)$,..., $\phi_k = \phi(x_k)$ *se tiene*

$$T(\phi_1, \phi_2, ..., \phi_k) =: \phi_1, \phi_2, ..., \phi_k : + : \Xi : , \tag{3.2}$$

donde T *es la prescripción de orden temporal,* :: *el orden normal y* Ξ *simboliza todas las contracciones posibles*

Sin embargo, para ciertos casos particulares el teorema de Wick se reduce simplemente a la expresion

$$\langle \mathcal{O} f_{i1} f_{i2} ... f_{i2k} \rangle = \frac{1}{2^k k!} \sum_{\sigma} \langle \mathcal{O} f_{i\sigma(1)} f_{i\sigma(2)} \rangle ... \langle \mathcal{O} f_{i\sigma(2k-1)} f_{i\sigma(2k)} \rangle \ , \tag{3.3}$$

donde la suma se realiza sobre todas las permutaciones σ de los índices, f_i representa tanto a las coordenadas ϕ_i como a los momentos π_i, los valores de expectación son tomados en el estado fundamental y es $\mathcal{O}$ una prescripción de orden. A partir de esta ecuación puede decirse que todos los correladores posibles pueden obtenerse a partir de correladores de dos puntos facilitándose así notablemente el cálculo de los mismos. A su vez, todo estado que satisfaga la ecuación (3.3) es llamadado Gaussiano.

3.2.2. Funciones de dos puntos X_{ij}, P_{ij}, D_{ij} y sus propiedades

Las propiedades de la ecuación (3.3) llevan a definir las funciones de correlación de dos puntos X_{ij}, P_{ij}, D_{ij} de manera que

$$X_{ij} = \langle \phi_i \phi_j \rangle \, , \qquad P_{ij} = \langle \pi_i \pi_j \rangle \, , \qquad \langle \phi_i \pi_j \rangle = \langle \pi_j \phi_i \rangle^* = \frac{i}{2} \delta_{ij} + D_{ij} \, . \tag{3.4}$$

A partir de estas definiciones es fácil estudiar algunas de sus propiedades generales de las funciones mencionadas. Para empezar, es sencillo ver que X_{ij} es hermítico, en efecto

$$\langle \phi_i \phi_j \rangle^* = \langle \phi_j \phi_i \rangle = \langle \phi_i \phi_j \rangle \ . \tag{3.5}$$

Además X_{ij} es definido positivo,

$$a_j^* X_{jj} a_j = a_j^* = \langle 0 | a_j^* \phi_j^* a_j \phi_j | 0 \rangle = || a_j \phi_j \, | 0 \rangle \, || \geq 0 \, . \tag{3.6}$$

Análogamente puede verse que P_{ij} también es hermítico y definido positivo:

$$\langle \pi_i \pi_j \rangle^* = \langle \pi_j \pi_i \rangle = \langle \pi_i \pi_j \rangle \ , \tag{3.7}$$

$$a_j^* P_{jj} a_j = a_j^* = \langle 0 | a_j^* \pi_j^* a_j \phi_j | 0 \rangle = || a_j \pi_j \, | 0 \rangle \, || \geq 0 \, . \tag{3.8}$$

Por otra parte, a partir de las relaciones de conmutación (3.1) y la definición (3.4) se tiene que para D_{ij} es válido que

$$\langle \phi_i \pi_j \rangle^* = \langle \phi_i \pi_j \rangle - i \delta_{ij} = -\frac{i}{2} \delta_{ij} + D_{ij} \, , \tag{3.9}$$

o bien, conjugando dicha definición

$$\langle \phi_i \pi_j \rangle^* = -\frac{i}{2} \delta_{ij} + D_{ij}^* \, . \tag{3.10}$$

Entonces, igualando (3.9) y (3.10) se evidencia claramente que D_{ij} es real.

3.2.3. Obtención de correladores para un Estado Gaussiano particular

Puede verse a partir del Teorema de Wick (3.3) que el estado fundamental un Hamiltoniano de la forma

$$H = \frac{1}{2}\sum_i \pi_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{ij} \phi_i K_{ij} \phi_j \tag{3.11}$$

es un Estado Gaussiano. A partir de aquí trabajando dicho Hamiltoniano en el contexto de las definiciones (3.4) puede obtenerse que:

$$X_{ij} = \frac{1}{2}(K^{-\frac{1}{2}})_{ij}\,, \qquad P_{ij} = \frac{1}{2}(K^{\frac{1}{2}})_{ij}\,, \qquad D_{ij} = 0\,. \tag{3.12}$$

Para demostrar este enunciado se introduce las transformaciones unitarias:

$$\phi'_i = \sum_k U_{ik}\phi_k\,, \qquad \pi'_i = \sum_k U_{ik}\pi_k\,. \tag{3.13}$$

Considerando que U es una matriz real unitaria si se multiplica a ambos miembros por su adjunta se obtienen las transformaciones inversas

$$\phi_i = \sum_k U^\dagger_{ik}\phi'_k\,, \qquad \pi_i = \sum_k U^\dagger_{ik}\pi'_k\,. \tag{3.14}$$

Luego, operando sobre el Hamiltoniano (3.11) a partir de (3.14) se llega a la expresion

$$H = \frac{1}{2}\sum_k \pi'^2_k + \frac{1}{2}\sum_{kl} \phi'_k W_{kl} \phi'_l\,, \qquad W_{kl} = \sum_{ij} U_{ik} K_{ij} U^\dagger_{jl}\,, \tag{3.15}$$

donde tomando U como la matriz de autovectores de K se tiene que W es una matriz diagonal y por ende vale

$$H = \frac{1}{2}\sum_k \pi'^2_k + \frac{1}{2}\sum_k W_{kk}\phi'^2_k\,. \tag{3.16}$$

Así en el sistema primado se tiene el Hamiltoniano (3.16) que corresponde a un conjunto de osciladores desacoplados, por lo que es claro que

$$\langle \phi'_k \phi'_l \rangle = \frac{1}{2\sqrt{W_{kk}}}\delta_{kl}\,, \qquad \langle \pi'_k \pi'_l \rangle = \frac{\sqrt{W_{kk}}}{2}\delta_{kl}\,. \tag{3.17}$$

Pudiéndose de esta manera calcular a partir de (3.17) los correladores del sistema inicial

$$X_{ij} = \langle \phi_i \phi_j \rangle = \sum_{kl} U^\dagger_{ik} \langle \phi'_k \phi'_l \rangle U_{lj} = \sum_{kl} U^\dagger_{ik} \frac{1}{2\sqrt{W_{kk}}} U_{kj} = \frac{1}{2}(K^{-\frac{1}{2}})_{ij}\,, \tag{3.18}$$

$$P_{ij} = \langle \pi_i \pi_j \rangle = \sum_{kl} U^\dagger_{ik} \langle \pi'_k \pi'_l \rangle U_{lj} = \sum_{kl} U^\dagger_{ik} \frac{\sqrt{W_{kk}}}{2} U_{kj} = \frac{1}{2}(K^{\frac{1}{2}})_{ij}\,. \tag{3.19}$$

En lo que respecta a D_{ij} es necesario recurrir a la simetría de inversión temporal usando el operador T como representación de una transformación temporal antiunitaria $T : t \to -t$. Dicho operador, permite manifestar la paridad de ϕ ($T\phi T^{-1} = \phi$) y la imparidad de π ($T\pi T^{-1} = -\pi$), entonces:

$$\langle T\phi_i\pi_j\rangle = -\langle\phi_i\pi_j\rangle \ . \tag{3.20}$$

Sin embargo, de la antiunitariedad de T vale:

$$\langle T\phi_i\pi_j\rangle = \langle\phi_i\pi_j\rangle^* \ . \tag{3.21}$$

Luego a partir de (3.20) y (3.21) se tiene $\langle\phi_i\pi_j\rangle^* = -\langle\phi_i\pi_j\rangle$ y aplicando definición (3.4) vale $D_{ij} = 0$ para el estado fundamental.

3.2.4. La matriz densidad reducida de una región V y su escritura en función de operadores de creación y destrucción de Bogoliubov

Si ahora se reduce el problema al estudio de una región V con un número finito N de grados de libertad dados por los pares $\phi_i, \pi_i, i \in V$, por definición, vale la ecuación (2.38) para cada operador $\mathcal{O}_V$ localizado en el interior de V, es decir, cualquier para combinación polinómica de $\phi_i, \pi_i, i \in V$. Por ende, la matriz densidad reducida debe ser tal que permita obtener los valores de expectación correctos y que satisfaga el Teorema de Wick (3.3) en la región V. En este marco se propone que la matriz densidad reducida cumpla con

$$\rho_V = \Gamma e^{-\mathcal{H}} = \Gamma e^{\sum_l \epsilon_l a_l^\dagger a_l}, \quad [a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij} \, , \tag{3.22}$$

donde $\mathcal{H}$ es el Hamiltoniano modular, Γ es una constante de normalización y a_i, a_j son una generalización de los operadores de creación y destrucción para los cuales valen las transformaciones de Bogoliubov:

$$\phi_i = \alpha_{ij}a_j^\dagger + \alpha_{ij}a_j \, , \qquad \pi_i = -i\beta_{ij}a_j^\dagger + i\beta_{ij}a_j \, . \tag{3.23}$$

Si se usan las relaciones (3.22) y (3.23) para calcular la relación de conmutación canónica entre ϕ_i y π_j se tiene:

$$[\phi_i, \pi_j] = [\alpha_{ik}a_k^\dagger + \alpha_{ik}a_k, -i\beta_{jl}a_l^\dagger + i\beta_{jl}a_l] = -2i\alpha_{ik}\beta_{jk} = -2i(\alpha\beta^T)_{ij} \, . \tag{3.24}$$

Pero como la relación de conmutación canónica (3.1) vale en todo el espacio, en consecuencia también vale en V con lo que se tiene $(\alpha\beta^T)_{ij} = \delta_{ij}/2$ o bien de forma matricial

$$\alpha\beta^T = \frac{1}{2} \, . \tag{3.25}$$

3.2.5. Normalización de la matriz densidad reducida y descomposición del problema en modos normales

A partir de la ecuación (3.22) es posible ver que el problema puede descomponerse en un conjunto de osciladores independientes con operadores de creación y destrucción $a_l^\dagger$ y a_l, es decir

$$\rho_V = \prod_l \rho_V^l \,, \qquad \rho_V^l = \Gamma_l e^{\epsilon_l a_l^\dagger a_l} \,, \tag{3.26}$$

donde Γ es una constante de normalización.

En este contexto, es sabido que la matriz densidad reducida ρ_V^l en el espacio V es diagonal con autovalores $e^{-n\epsilon_l}$ si se trabaja en la base de números de ocupación. Luego dado que se esta operando con bosones, es decir, $n = 0, 1, 2, ..., \infty$ se tiene

$$\Gamma_l^{-1} = tr(\rho_V^l) = \sum_n^\infty e^{-n\epsilon_l} = \sum_n^\infty (e^{-\epsilon_l})^n = \frac{1}{1 - e^{-\epsilon_l}} \tag{3.27}$$

quedando determinada la constante Γ de la forma

$$\Gamma = \prod_l \Gamma_l = \prod_l \left(1 - e^{-\epsilon_l}\right) \,. \tag{3.28}$$

Además, el problema queda reducido al estudio de estados térmicos de osciladores independientes con matriz densidad reducida:

$$\rho_V^l = (1 - e^{-\epsilon_l}) e^{\epsilon_l a_l^\dagger a_l} \,. \tag{3.29}$$

3.2.6. Funciones de dos puntos en la región V

Para reducir las funciones de dos puntos X_{ij} y P_{ij} definidas en (3.4) a la región V es necesario basarse en la definición de matriz densidad reducida dada en (2.37), en efecto se tiene

$$X^V = \langle \phi_i \phi_j \rangle_V = tr(\rho_V \phi_i \phi_j) \,, \qquad P^V = \langle \pi_i \pi_j \rangle_V = tr(\rho_V \pi_i \pi_j) \,. \tag{3.30}$$

A partir de aquí, utilizando las transformaciones de Bogoliubov (3.23) es posible obtener más restricciones para las matrices α y β, siendo estas de la forma

$$\langle \phi_i \phi_j \rangle = \alpha_{ik} \left(2 \langle a_k^\dagger a_l \rangle + \delta_{kl}\right) \alpha_{lj}^T \,, \qquad \langle \pi_i \pi_j \rangle = \beta_{ik} \left(2 \langle a_k^\dagger a_l \rangle + \delta_{kl}\right) \beta_{lj}^T \,. \tag{3.31}$$

Pero $\langle a_k^\dagger a_l \rangle = 0$ si $k \neq l$ y la matriz diagonal de los números de ocupación n puede ser escrita como $n_{kk} = \langle a_k^\dagger a_k \rangle = (e^{\epsilon_k} - 1)^{-1}$ puediendo obtenerse así que

$$X^V = \alpha(2n+1)\alpha^T \,, \qquad P^V = \beta(2n+1)\beta^T \,, \tag{3.32}$$

Finalmente,trabajando el producto entre las dos matrices y usando la ecuación (3.25) puede obtnerse que

$$X^V P^V = \alpha \left[\frac{(2n+1)^2}{4}\right] \alpha^{-1} \,. \tag{3.33}$$

Para facilitar la obtención de una expresión para la entropía de entrelazamiento en la región V (por razones que luego serán evidentes) se propone definir la matriz

$$C^V = \sqrt{X^V P^V}\,. \tag{3.34}$$

En particular, si se trabaja con ν_k autovalores de C^V a partir de (3.33) se obtiene:

$$\nu_k^2 = \frac{(2n_k+1)^2}{4} = \frac{1}{2}\coth\frac{\epsilon_k}{2}\,. \tag{3.35}$$

3.2.7. Entropía de cada modo normal y entropía total de la región V

Para el caso que se viene trabajando el espectro de la matriz densidad esta dado, a partir de la ecuación (3.26), por todos los productos posibles de autovalores de cada modo de oscilación. También, la entropía es la suma de las entropías de cada oscilador, formalmente

$$S_V(\rho_V) = \sum_k S_V^k(\rho_V^k)\,. \tag{3.36}$$

Por otra parte como ya se mencionó anteriormente la matriz densidad ρ_V^k tiene autovalores $\lambda_{kn} = (1-e^{-\epsilon_k})e^{-n\epsilon_k}$. Entonces se procede a calcular las entropías S_V^k de cada modo de la forma

$$S_V^k(\rho_V^k) = -\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{kn}\log\left(\lambda_{kn}\right) = -\log\left(1-e^{-\epsilon_k}\right) + \frac{\epsilon_k e^{-\epsilon_k}}{1-e^{-\epsilon_k}}\,. \tag{3.37}$$

A partir de la ecuación (3.35) utilizando la definición de cotangente hiperbólica es posible notar que los autovalores ν_k de C^V vienen dados por

$$\nu_k + \frac{1}{2} = \frac{1}{1-e^{-\epsilon_k}} \qquad \nu_k - \frac{1}{2} = \frac{e^{-\epsilon_k}}{1-e^{-\epsilon_k}}\,. \tag{3.38}$$

Entonces, remplazando en la ecuación (3.37) se tiene que la entropía de un modo definido en la región V será

$$S_V^k = \left(\nu_k+\frac{1}{2}\right)\log\left(\nu_k+\frac{1}{2}\right) - \left(\nu_k-\frac{1}{2}\right)\log\left(\nu_k-\frac{1}{2}\right). \tag{3.39}$$

Finalmente, en vista de la expresión (3.36) y dado que ν_k son los autovalores de C^V, se obtiene para la entropía total de la región V

$$S_V = tr\left[\left(C^V+\frac{1}{2}\right)\log\left(C^V+\frac{1}{2}\right) - \left(C^V-\frac{1}{2}\right)\log\left(C^V-\frac{1}{2}\right)\right]. \tag{3.40}$$

Lo interesante de esta expresión (3.40) es que para calcular la entropía de entrelazamiento de un sistema solo se necesita conocer las matrices funciones de dos puntos X^V y P^V y aplicar dicha ecuación [7, 22]. Inclusive, para un estado gaussiano dado por el hamiltoniano (3.11) solo se requiere saber la matriz K pudiéndose construir X^V y P^V a partir de (3.12).

3.2.8. Restricciones sobre los autovalores ν_k de C^V

A priori se espera que la entropía de la región V sea real y positiva, sin embargo la expresión (3.40) parece ser conflictiva para autovalores de C^V menores que $1/2$. No obstante, es posible probar que para los autovalores en cuestión vale que $\nu_k \geq 1/2$, o $\epsilon_k \geq 0$.

En efecto, para obtener la entropía de un modo normal fue supuesto que $e^{-\epsilon_k} < 1$. Por ende si se trabaja la desigualdad en la ecuación (3.35) se obtiene fácilmente que $\nu_k \geq 1/2$. A partir de aquí, para significado físico a la desigualdad se puede partir de la definición (3.34) para extender este resultado a la notación matricial de la forma

$$X^V P^V \geq \frac{1}{4}\,. \tag{3.41}$$

La desigualdad (3.41) puede ser considerada una extensión del principio de incertidumbre dado que la función de dos puntos X^V depende de producto de dos campos de coordenadas y P^V depende de producto de dos momentos conjugados.

Si se interpreta las coordenadas de forma similar a la posición de mecánica cuántica y se hace lo propio con el momento conjugado y el momento lineal es evidente la similitud de las expresiones. Una demostración más formal de la desigualdad (3.41) se puede realizar de forma similar a la del principio de incertidumbre de Heisenberg.

3.3. Entropía de un campo escalar libre entre placas paralelas

3.3.1. Cálculo de la entropía por reducción dimensional

Considérese un campo escalar libre no masivo en $(3+1)$ dimensiones descripto por el Hamiltoniano y las relaciones de conmutación:

$$H = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3\overline{x}\left[\pi^2(\overline{x}) + (\nabla\phi(\overline{x}))^2\right], \quad [\phi(\overline{x}), \pi(\overline{y})] = i\delta(\overline{x}-\overline{y})\,. \tag{3.42}$$

Ahora, para dicho campo a partir e la fórmula para estados gaussianos bosónicos (3.40), se buscara obtener la entropía de entrelazamiento asociada a la región entre dos placas paralelas infinitas separadas una distancia L (Ver Figura 3.1). Formalmente, para un sistema cartesiano donde $\overline{x} = (x^1, x^2, x^3)$ la región V para cual se quiere calcular la entropía vendrá dada por

$$V = \left\{x = (x^1, x^2, x^3)/0 < x^1 < L\right\}\,. \tag{3.43}$$

Bajo este contexto, es conveniente descomponer el campo ϕ y el momento π en una base de ondas planas usando la suma de Fourier sobre las dos direcciones paralelas a las placas. Para esto se compactan las direcciones x^2 y x^3 a grandes tamaños R_2 y R_3 con condiciones de contorno periódicas, de manera que se tiene que

$$\phi(x^1, x^2, x^3) = \sum_{\overline{k}} N e^{i\overline{k}\cdot\overline{x}}\phi(x^1, k), \quad \pi(x^1, x^2, x^3) = \sum_{\overline{k}} N e^{i\overline{k}\cdot\overline{x}}\pi(x^1, k), \tag{3.44}$$

donde es válido que $\phi^\dagger(x^1,k) = \phi(x^1,-k)$ y $\pi^\dagger(x^1,k) = \pi(x^1,-k)$. Además, N es una constante definida como

$$N = \left[\sqrt{2\pi R_2 R_3}\right]^{-1}, \tag{3.45}$$

y el vector $\overline{k}$ puede escribirse para $n^2, n^3 = 0, \pm1, \pm2, ..., \pm\infty$ de la forma

$$\overline{k} = (0, \frac{2\pi n^2}{R_2}, \frac{2\pi n^3}{R_3}). \tag{3.46}$$

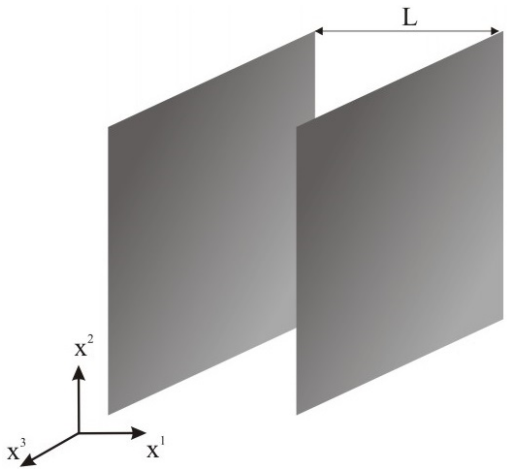


Figura 3.1: Esquema de la región definida entre placas paralelas infinitas

Sin embargo, es posible facilitar la resolución del problema definiendo el sistema de cordenadas (x_1, x_2, x_3) de manera que $\hat{x}_1 = \hat{x}^1$, $\hat{x}_2 = \hat{k}$ y $\hat{x}_3 = \hat{x}^1 \times \hat{k}$ reduciendo así la expresión (3.44) a

$$\phi(x_1,x_2) = \sum_k N e^{ikx_2}\phi(x_1,k), \quad \pi(x_1,x_2) = \sum_k N e^{ikx_2}\pi(x_1,k). \tag{3.47}$$

A partir de aquí, remplazando (3.47) en (3.42) se tiene que

$$H = \frac{1}{2}\sum_{\overline{k}} \int_0^\infty dx_1 \left[\pi^\dagger(x_1,k)\pi(x_1,k) + \partial_1\phi^\dagger(x_1,k)\partial_1\phi(x_1,k) + k\phi^\dagger(x_1,k)\phi(x_1,k)\right] \tag{3.48}$$

entonces, es válido escribir la entropía buscada $S(V)$ como la suma de entropías correspondientes a campos escalares unidimensionales de masa $m = k$,

$$S(V) = \sum_{\overline{k}} S(L,k). \tag{3.49}$$

Para el límite de R_2 y R_3 suficientemente grande es válido transformar la sumatoria en (3.49) a una integral de la forma

$$S(V) = \frac{\mathbb{A}}{2\pi}\int_0^\infty dk\, kS(L,k) \tag{3.50}$$

donde $\mathbb{A} = R_2 R_3$ es el área de la región transversal. También, es esperable que el término predominante de la entropía sea proporcional al área de la superficie de la región V siendo válido introducir que

$$\delta S(V) = -\mathcal{K}\frac{\mathbb{A}}{L^2} \tag{3.51}$$

donde $\mathcal{K}$ es una constante adicional y el factor L^{-2} es incluido para adimensionalizar la expresión.

Considerando (2.55), es claro que la función c estará dada para el caso unidimensional por la expresión

$$c(L,k) = L\frac{dS(L,k)}{dL}\,. \tag{3.52}$$

Por ende, operando a partir de (3.50), (3.51) y (3.52) es válido despejar la constante $\mathcal{K}$ de la forma

$$\mathcal{K} = \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty dt\, t\, c(t), \quad t = kL\,. \tag{3.53}$$

3.3.2. Cálculo numérico de la constante $\mathcal{K}$

Para calcular numéricamente la constante $\mathcal{K}$ presente en la entropía (3.51) es necesario computar la integral (3.53). Con este propósito se utilizara la expresión (3.52) para obtener valores correspondientes a la función c a partir de la fórmula para estados gaussianos (3.40) de forma similar a [8, 31].

El primer paso en este camino es discretizar el hamiltoniano (3.48) para esto se lo coloca en una caja finita unidimensional de manera que x_1 toma valores $n = 0, 1, 2, 3..., M-1$ con M el cutoff que define el tamaño de dicha caja. Para cada valor de k se tiene

$$H_k = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{M-1}\left[\pi_n^2 + (\phi_{n+1} - \phi_n)^2 + k\phi_n^2\right]\,. \tag{3.54}$$

Entonces, comparando (3.53) con el hamiltoniano gaussiano (3.11) se puede obtener facilmente la matiz K_{nm} y de aquí utilizando (3.12) para el en el límite continuo se tienen las funciones de dos puntos

$$X_{nm} = \langle\phi_n\phi_m\rangle = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dy\,\frac{e^{iy(n-m)}}{\sqrt{2(1-\cos y)}}\,, \tag{3.55}$$

$$P_{nm} = \langle\pi_n\pi_m\rangle = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dy\, e^{iy(n-m)}\sqrt{2(1-\cos y)}\,. \tag{3.56}$$

Una vez calculadas X_{nm} y P_{nm} solo resta calcular la matriz $C^V = \sqrt{X^V P^V}$ para distintas longitudes de la región entre las placas L y aplicar la ecuación (3.40). Luego, se deriva numéricamente la entropía a para obtener la funcion c segun L. Finalmente, se realiza el mismo procedimiento para distintos valores de masas (momentos del campo inicial) y se calcula numéricamente la integral (Ver Anexo A.1) obteniéndose

$$\mathcal{K} = 0,0052 \tag{3.57}$$

lo cual es coherente con lo reportado en [8].

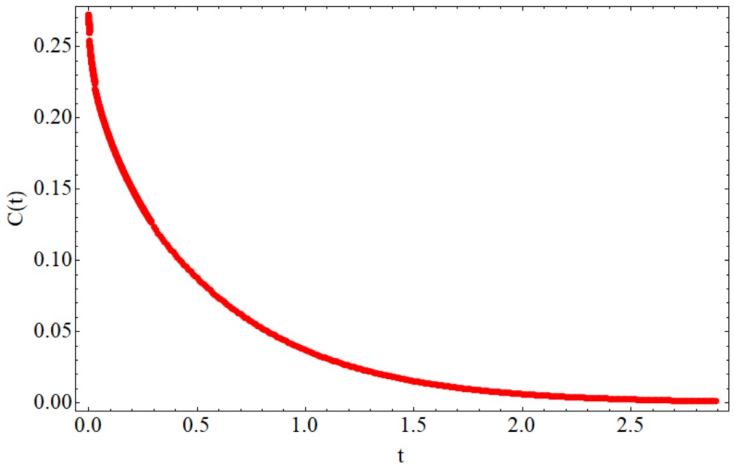


Figura 3.2: Función $c(t)$ obtenida numéricamente para diferentes productos $t = kL$

3.4. Aplicación a un campo escalar libre en una esfera

3.4.1. Discretización del campo en base de ondas esféricas

A partir de aquí, se desarrollará un método similar al de la sección anterior para la entropía de entrelazamiento de un campo escalar libre no masivo en el vacío asociada a una región esférica. Para realizar esto se utilizará nuevamente la fórmula de la entropía para estados gaussianos bosónicos (3.40), aplicada a un campo con discretización radial.

Para empezar, considérese nuevamente el campo escalar libre no masivo dado por (3.42), siendo sencillo ver que dicho campo puede ser expandido en una base de ondas esféricas usando las expresiones

$$\phi(\overline{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{\phi_{lm}(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sum_{lm} \frac{\phi_{lm}(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi)\,, \tag{3.58}$$

$$\pi(\overline{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{\pi_{lm}(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sum_{lm} \frac{\pi_{lm}(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi)\,, \tag{3.59}$$

donde $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ son los armónicos esféricos y $\phi_{lm}(r), \pi_{lm}(r)$ son los coeficientes de Fourier de la expansión en dicha base, es decir,

$$\phi_{lm}(r) = r\int d\Omega\, \phi(\overline{x})Y_{lm}(\theta,\varphi), \quad \pi_{lm}(r) = r\int d\Omega\, \pi(\overline{x})Y_{lm}(\theta,\varphi)\,. \tag{3.60}$$

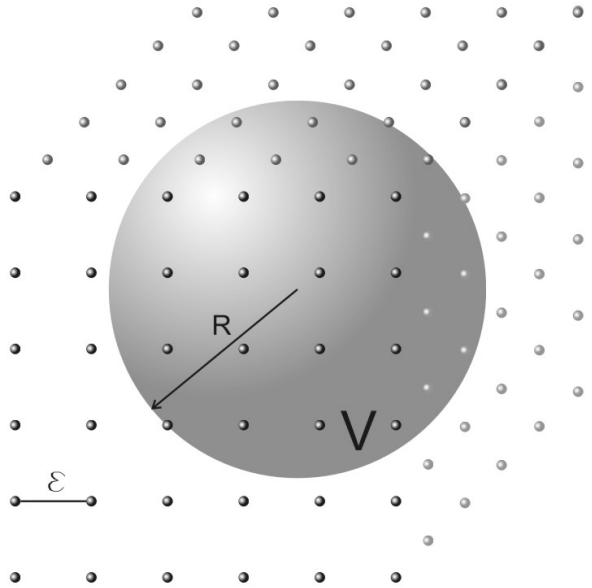


Figura 3.3: Región esférica definida sobre una red discreta

En este marco, es posible reemplazar las ecuaciones (3.58),(3.59), y (3.60) en (3.42) para descomponer el problema en modos dependientes de l y m con el hamitoniano

$$H = \sum_{lm} H_{lm}\,,\; H_{lm} = \frac{1}{2}\int_0^\infty dr\left[\pi_{lm}^2(r) + r^2\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\phi_{lm}(r)}{r}\right)^2 + \frac{l(l+1)}{r^2}\phi_{lm}^2(r)\right] \tag{3.61}$$

y las relaciones de conmutación

$$[\phi_{lm}(r), \pi_{l'm'}(r')] = i\delta_{ll'}\delta_{mm'}\delta(r-r')\,. \tag{3.62}$$

Finalmente, para discretizar la variable radial r en números enteros se necesita colocar el sistema en una caja con el proposito de hacerlo finito. En este caso, es posible considerar que el radio r puede tomar valores de $j+1/2$ con $j = 0,1,2,3,...,M$ y M el tamaño de la caja. De esta manera se tiene

$$H_{lm} = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{M}\left[\pi_{lm,j}^2 + (j+\frac{1}{2})^2\left(\frac{\phi_{lm,j}}{j} - \frac{\phi_{lm,j+1}}{j+1}\right)^2 + \frac{l(l+1)}{j^2}\phi_{lm,j}^2\right] \tag{3.63}$$

con

$$[\phi_{lm,j}, \pi_{lm,j'}] = i\delta_{ll'}\delta_{mm'}\delta_{jj'}\,. \tag{3.64}$$

3.4.2. Cálculo Numérico del la Entropía

Se busca utilizar la fórmula de la entropia de entrlazamiento para estados Gaussianos de tipo (3.11) o bien para este caso

$$H_{lm} = \frac{1}{2}\sum_i \pi^2_{lm,i} + \frac{1}{2}\sum_{ij} \phi_{lm,i} K^{ij}_{(l)} \phi_{lm,j}\,. \tag{3.65}$$

Por ende, comparando las ecuaciones (3.63) y (3.65), se ve que la matriz $K^{ij}_{(l)}$ será la tridiagonal de dimensión MxM con diagonales

$$K^{jj}_{(l)} = \frac{(j+\frac{1}{2})^2 + l(l+1)}{j^2} + \frac{(j-\frac{1}{2})^2}{j^2}\,, \tag{3.66}$$

$$K^{jj+1}_{(l)} = K^{j+1j}_{(l)} = \frac{(j+\frac{1}{2})^2}{j(j+1)}\,, \tag{3.67}$$

pero con la excepción de la componente $K^{11}_{(l)}$, para la cual vale

$$K^{11}_{(l)} = \frac{(j+\frac{1}{2})^2 + l(l+1)}{j^2} = \frac{9}{4} + l(l+1)\,. \tag{3.68}$$

En base a lo mencionado, si se desea calcular la entropía en distintas regiones V de tipo esférico con diferentes radios R, se deben seguir los siguientes pasos:

1. Computar la matriz tridiagonal $K^{i,\,j}_{(l)}$ a partir de (3.66), (3.67), y (3.68) para un valor de l fijo ($l = 0,\ 1,\ 2, ...,\ l_{max}$).

2. Realizar un cálculo de autovalores y autovectores de $K^{i,\,j}_{(l)}$ para computar las matrices X y P en base a (3.12).

3. Reducir las matrices X y P a X^V y P^V de distintos tamaños $n \times n$, es decir, a distintas regiones esféricas V de diferentes radios R.

4. Para cada región V computar los autovalores de la matriz $C^V = \sqrt{X^V P^V}$ para obtener en cada caso $S(n, l)$.

5. Repetir el cálculo para los demás valores de l.

6. Para cada radio calcular $S(R)$ a partir de

$$S(R) = \sum_{l=0}^{l_{max}} (2l+1) S\,, \tag{3.69}$$

   donde se destaca que para la realización de los cálculos es conveniente escribir el radio R como $R = n + 1/2$.

Sin embargo, el algoritmo presentado posee ciertas fuentes de error si se busca replicar todas las características físicas del modelo introducido:

1. El modelo físico utilizado considera $(l = 0, 1, 2, ..., \infty)$ pero para un cálculo computacional no es posible sumar hasta infinito en la expresión (3.69), sin embargo puede verse que $(2l + 1)S(n, l) \to 0$ como $l^{-3} \log(l)$ cuando $l \to \infty$. En este marco es coherente decir que sumar hasta un numero suficientemente grande de l (por ejemplo 1000) alcanzará para obtener una buena aproximacion.

2. Un problema similar emerge de considerar un cutoff infrarrojo M finito en (3.63) produciendo la aparición de efectos de borde para radios lo suficiente cercanos a dicho cutoff. Con un valor de $M = 100$ deberían poder obtenerse valores de calidad para radios de hasta aproximadamente 60.

3. Otra advertencia numérica a considerar es que si los autovalores $\nu_k^{(l)}$ de $C_{(l)}^V$ son muy cercanos a $1/2$ el cálculo del término $\log(\nu_k^{(l)} - 1/2)$ puede dar números complejos por errores de rendeo. Sencillamente se puede eliminar los valores que producen estas anomalías o bien puede aumentarse la precisión del cálculo.

3.4.3. Ley de área para el campo escalar libre

Usando el procedimiento mencionado para los parámetros $M = 100$ y $l_{max} = 1000$ puede obtenerse (Ver Anexo A.2) que

$$S(R) = 0{,}292448R^2\,, \tag{3.70}$$

lo cual es coherente con lo obtenido por Srednicki en [28]. Sin embargo el método utilizado, debido a los errores por el carácter finito de M y l_{max}, no permite obtener información con precisión suficiente para obtener el coeficiente universal logarítmico.

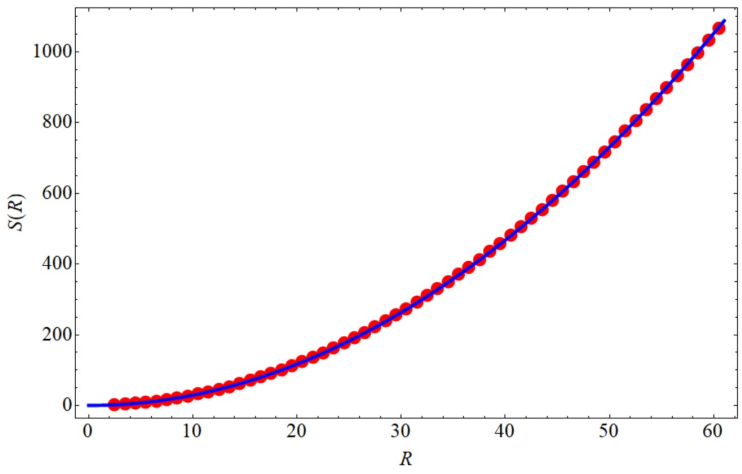


Figura 3.4: Entropía en función del radio de la esfera para $M = 100$ y $l_{max} = 1000$

Los resultados obtenidos, sin embargo, presentan una clara dependencia del cuadrado del radio de la esfera y por ende puede decirse que el campo real escalar libre no masivo es un ejemplo de la ley de área. A su vez, a entropía obtenida es muy similar a la correspondiente a agujeros negros siendo este el propósito inicial del estudio de la misma para estados Gaussianos [27]. En efecto, la entropia de Bekenstein-Hawking es proporcional al área del agujero negro [33, 34] a partir de la fórmula:

$$S_{BH} = \frac{1}{4} M_{Pl}^2 A \qquad A = 4\pi R^2 \tag{3.71}$$

donde M_{Pl} representa la masa de Plank y R el radio del agujero negro.

Por otro lado, es destacable que este método puede ser aplicable de forma similar a otros campos, por ejemplo fermiónicos [8] y de gauge [35], siempre y cuando sean libres o más precisamente tengan un hamiltoniano cuadrático. Además, es posible trabajar con otros estados gaussianos no necesariamente fundamentales, inclusive puede ser usado en estados térmicos o estados con potencial químico o bien estados sobre espacio-tiempos curvos. Sin embargo es importante notar que muchos de los estados de una teoría libre no son gaussianos de manera que no es posible aplicar (3.40). Por otro lado, como se ejemplificó en el capítulo 2 es posible trabajar con diferentes geometrías y diferente número de dimensiones [35] pero como se analiza en [32] es sabido que la suma sobre momentos angulares no converge para $d > 4$.

3.4.4. Cómputo de los coeficientes universales

Para calcular los coeficientes universales de la entropía en cuestión es necesario mejorar la precisión de los resultados obtenidos anteriormente. En particular es útil considerar cutoff infrarrojo (M) y l máximo (l_{max}) como ya fue realizado en [9] para el campo escalar y en [12] para el de Maxwell. La idea base de estas modificaciones es utilizar el algoritmo ya mencionado para calcular entropías para distintos valores de M y l_{max} finitos y luego ajustar y extrapolar:

1. Primero, para considerar $l_{max} = \infty$ dividimos el cálculo de la entropía para cada radio en dos partes, es decir

$$S(R) = \sum_{l=0}^{1000} (2l+1) S(n,l) + \sum_{l=1001}^{\infty} (2l+1) S(n,l) \tag{3.72}$$

   donde el primer término de la expresión puede ser obtenido de la misma manera que anteriormente y el segundo debe estimarse usando un ajuste sobre la asíntota de $S(n,l)$ para n fijo y l suficientemente grande propuesto en [28, 9], es decir de la forma

$$\sum_{l=1001}^{\infty} (2l+1) \left[\frac{C_1}{l^4} + \frac{C_2}{l^4} \log(l) + \frac{C_3}{l^6} + \frac{C_4}{l^6} \log(l) + \frac{C_5}{l^8} + \frac{C_6}{l^8} \log(l) \right] \tag{3.73}$$

con $C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5$ y C_6 constantes que pueden obtenerse ajustando la expresión

$$S(n,l) = \frac{C_1}{l^4} + \frac{C_2}{l^4}\log(l) + \frac{C_3}{l^6} + \frac{C_4}{l^6}\log(l) + \frac{C_5}{l^8} + \frac{C_6}{l^8}\log(l) \tag{3.74}$$

a valores de $S(n,l)$ calculados para $l = 1000,\ 1500,\ 2000,\ ...,\ 5000$.

2. Segundo, para eliminar la dependencia del cutoff M, es decir considerar $M = \infty$, es posible repetir el cálculo de la entropía $S(R)$ para l_{max} infinito y M finito utilizando valores $M = 200,\ 300,\ 400,\ 500,\ 600$. Luego a los resultados es posible ajustar la curva presentada en [12], dada por:

$$S(R,M) = B_1 + \frac{B_2}{M^2} \tag{3.75}$$

donde $S(R,M) \longrightarrow B_1$ cuando $M \longrightarrow \infty$, en otras palabras B_1 puede ser considerado el valor de S(R) para $M = \infty$.

Los valores de l_{max} y M presentados son útiles para calcular la entropía para radios de hasta 60 (Ver Anexo A.3) de manera que es posible obtener:

$$S(R) = 0{,}295432R^2 - 0{,}0111267\log(R) - 0{,}0344035\,, \tag{3.76}$$

siendo esto coherente con los valores computacionales informados por [9]. A su vez el coeficiente logarítmico es el asociado la anomalía de traza del tensor de energía-momento para teorías conformes en (3+1) dimensiones en una esfera, dado por [10] de la forma:

$$c_{log} = -\frac{1}{90} \approx -0{,}0111 \tag{3.77}$$

Por otro lado, es destacable, que si se desea considerar radios mayores para las regiones estudiadas puede utilizarse la misma técnica pero los valores de l y M usados para los ajustes deben aumentarse.

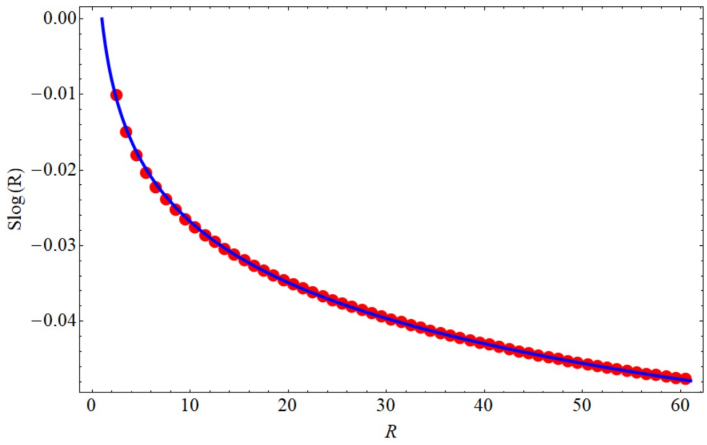


Figura 3.5: Parte logarítmica de entropía en función del radio de la esfera para $M \to \infty$ y $l_{max} \to \infty$

Capítulo 4

Entropía de entrelazamiento de un campo de gauge

4.1. Introducción al problema

La entropía de von Neumann de una región V puede ser definida para cualquier teoría de campos dados un estado y un álgebra particular. Bajo este contexto, es posible mencionar que la entropía no se relaciona con un operador particular de la teoría (como lo hacen los observables) sino que depende de un álgebra de operadores.

Sin embargo, para considerar esta entropía una medida del entrelazamiento entre la región V y su complemento $\overline{V}$ es necesario poder descomponer en espacio de Hilbert global como el producto de los correspondientes a ambas regiones de la forma (2.35). Si esto no fuera posible, la entropía puede seguir siendo definida pero no podrá ser interpretada como correlaciones dadas a partir de pares EPR sobre la superficie de entrelazamiento en la frontera de la región definida ∂V

Analizando el caso de la teoría regularizada sobre una red discreta, es posible utilizar una descomposición del espacio de Hilbert de la forma (2.35) mencionada si todos los grados de libertad que conforman el espacio de Hilbert global se corresponden con los sitios de la red. Si bien esto es cierto para muchos casos, entre los que se puede destacar el campo escalar libre o un campo fermiónico libre, esta afirmación no es válida para los campos de gauge. En efecto, los últimos mencionados presentan variables pertenecientes al grupo de simetría que se corresponden tanto con los sitios como otras con los links entre los mismos.

A continuación se presentara una breve introducción teorías de gauge sobre una red discreta y al comportamiento del álgebra de las mismas. Luego se desarrollara como las distintas elecciones de álgebra o fijaciones de gauge afectan a la entropía de entrelazamiento. La discusión realizada en este capítulo se desprende mayormente de [11].

4.2. Campos de gauge abelianos sobre una red discreta

Una teoría de gauge es un tipo de teoría de campos en la cual el lagrangiano es invariante ante ciertas transformaciones locales dadas a partir de un grupo de Lie $\mathbb{G}$ de dimensión $d_{\mathbb{G}}$. Las variables básicas de dicha teoría sobre una red discreta a tiempo fijo son las variables $U_l = U_{(ab)}$ pertenecientes al grupo $\mathbb{G}$ mencionado y asignadas a cada link $l = (ab)$ que une los vértices a y b. Al link con la orientación inversa $\bar{l} = (ba)$ se le asigna el elemento inverso del grupo, es decir $U_{(ba)} = U_{(ab)}^{-1}$. Las trasformaciones de gauge están dadas de la forma $U'_{(ab)} = g_a U_{(ab)} g_b^{-1}$ donde los elementos g_a y g_b también pertenecen al grupo $\mathbb{G}$ pero están asociado con los vértices de la red a y b.

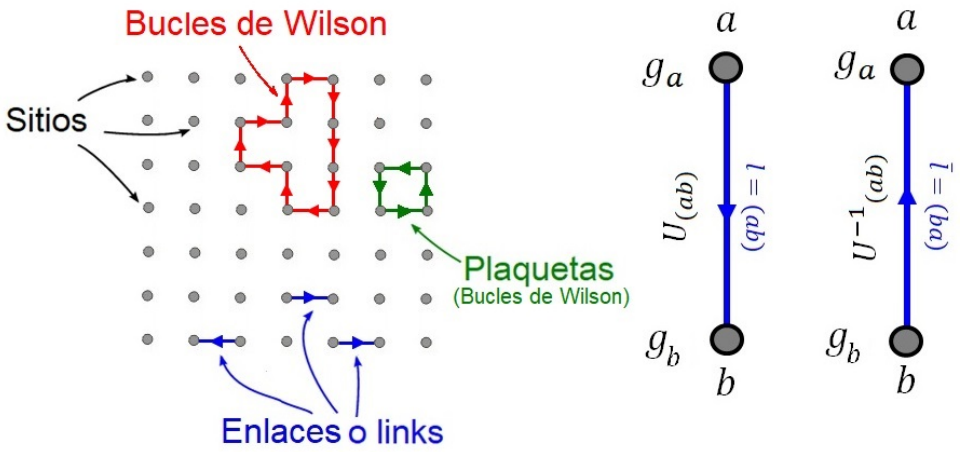


Figura 4.1: Esquema de los elementos de un campo de gauge sobre una red discreta

En este marco, es útil llamar $\mathcal{V}$ al espacio de todos los funcionales de onda complejos $\psi[U]$ donde $U = \{U\}$ representa una asignación de un elemento del grupo $\mathbb{G}$ a cada link l. Sin embargo, los funcionales de onda que describen estados físicos forman un espacio $\mathcal{H} \subset \mathcal{V}$ de funcionales invariantes de gauge $\psi[U^g]$ con $U^g = \left\{g_a U_{(ab)} g_b^{-1}\right\}$. Tanto $\mathcal{V}$ como su subespacio $\mathcal{H}$ forman un espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \sum_{U_1} \sum_{U_2} ... \sum_{U_{N_l}} \psi_1[U] \psi_2[U] \,. \tag{4.1}$$

Un conjunto generador del álgebra $\mathcal{A}(\mathcal{V})$ de todos los operadores puede ser construido de una forma muy sencilla si $\mathbb{G}$ es abeliano. En particular, el espacio $\mathcal{V}$ puede ser construido a partir del producto tensorial sobre todos los links de los espacios vectoriales complejos y $d_{\mathbb{G}}$ dimensionales $\mathbb{C}_l^{d_{\mathbb{G}}}$ asignados a cada link l. Por ende, el álgebra $\mathcal{A}(\mathcal{V})$ es el producto tensorial sobre todos los links del álgebra asociada al grupo general lineal $\mathrm{GL}(\mathbb{C}, d_{\mathbb{G}})_l$ de matrices $d_{\mathbb{G}} \times d_{\mathbb{G}}$ actuando sobre $\mathbb{C}_l^{d_{\mathbb{G}}}$.

Bajo este contexto, es útil encontrar los generadores del álgebra correspondiente a $\mathrm{GL}(\mathbb{C}, d_{\mathbb{G}})_l$ para cada link l para luego construir $\mathcal{A}(\mathcal{V})$. Para empezar, dado $g \in \mathbb{G}$ un

elemento arbitrario del grupo asociado al link l es posible definir los operadores unitarios $\hat{L}^l_g$ que actúan de la forma

$$\hat{L}^l_g \psi[U_1, U_2, ..., U_l, ...U_N] = \psi[U_1, U_2, ..., gU_l, ...U_N] \tag{4.2}$$

y por ende vale que $\hat{L}^l_g = \hat{L}^{\bar{l}}_{g^{-1}}$ y que $L^l_{g_1} L^l_{g_2} = L^l_{g_1 g_2}$, de manera para el caso abeliano los operadores $\hat{L}^l_g$ con mutan para diferentes g y l. Además, estos generan un álgebra abeliana para el link l que puede ser completada introduciendo los operadores $\hat{U}^r_l$ dados por

$$\hat{U}^r_l \psi[U_1, U_2, ..., U_l, ...U_N] = U^r_l \psi[U_1, U_2, ..., U_l, ...U_N]\,, \tag{4.3}$$

donde U^r_l es un valor numérico (para el caso abeliano) correspondiente a U_l en la representación unidimensional r. Nuevamente, los operadores $\hat{U}^r_l$ conmutan para distintos l y r de manera que en conjunción con los operadores $\hat{L}^l_g$ forman un conjunto de generadores completo de $\mathrm{GL}(\mathbb{C}, d_{\mathbb{G}})_l$.

Una vez obtenido un conjunto de generadores del álgebra $\mathcal{A}(\mathcal{V})$ es útil reducirlo para generar la subálgebra de operadores físicos $\mathcal{A}(\mathcal{H})$, siendo para esto es necesario obtener una versión invariante de gauge de los generadores ya encontrados. Los operadores $\hat{L}^l_g$ para el caso abeliano naturalmente cumplen con dicha propiedad, es decir, si $\psi[U]$ es invariante de gauge $\left(\hat{L}^l_g \psi\right)[U]$ también lo será. Resta simplemente estudiar los $\hat{U}^r_l$, para esto es útil introducir el operador T_{g_a} dado por la transformación de gauge g_a sobre el vértice a como

$$T_{ga}\psi[U] = \psi[U^{g_a}], \quad T_{ga} = \prod_b L^{(ab)}_{g_a}, \quad b \in \{\text{Primeros vecinos de } a\}\ . \tag{4.4}$$

Operando para un estado invariante de gauge $\psi[U] \in \mathcal{H}$ se tiene que

$$\left(T_{ga}\hat{U}^r_{(ab)}\psi\right)[U] = g^r U^r_{(ab)}\psi[U] \neq \left(\hat{U}^r_{(ab)}\psi\right)[U]\,, \tag{4.5}$$

$$\left(T_{ga}\hat{U}^r_{(ca)}\psi\right)[U] = U^r_{(ca)}\left(g^{-1}\right)^r \psi[U] \neq \left(\hat{U}^r_{(ca)}\psi\right)[U]\,, \tag{4.6}$$

es decir que los operadores $\hat{U}^r_{(ab)}$ y $\hat{U}^r_{(ca)}$ no son invariantes de gauge por separado pero $\hat{U}^r_{(ab)}\hat{U}^r_{(ca)}$ si lo es. Generalizado, todo operador de bucle de Wilson $\hat{W}^r_\Gamma$ construido como producto de operadores $\hat{U}^r_l$ sobre un camino cerrado y orientado Γ es invariante de gauge.

$$\hat{W}^r_\Gamma = U^r_{(a_1 a_2)} U^r_{(a_2 a_3)} ... U^r_{(a_{n-1} a_n)} U^r_{(a_n a_1)}, \quad \Gamma = a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n, a_1\,. \tag{4.7}$$

En resumen, el álgebra de operadores físicos $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ puede ser generada para el caso abeliano a partir de combinaciones de operadores L^l_g y bucles de Wilson $\hat{W}^r_\Gamma$ dados por productos de $\hat{U}^r_l$ sobre un camino cerrado y orientado.

En comparación con el oscilador armónico, es posible destacar la analogía entre los operadores $\hat{U}^r_l$ y L^l_g con los operadores de coordenadas y momento respectivamentemente. Además, en representación de Schrödinger todas las funciones de onda pueden obtenerse

actuando con funciones del operador de coordenadas, en este caso los mismo puede hacerse actuando con operadores de bucle de Wilson sobre el funcional de onda trivial $\phi^0[U] = 1$.

Se destaca que para un funcional de onda invariante de gauge $\psi[U] \in \mathcal{H}$ vale por (4.4) que $(T_{g_a}\psi[U]) = \psi[U]$. A partir de aquí, como todo operador perteneciente al álgebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ debe conmutar con todos los operadores T_{g_a} se tiene el vínculo

$$T_{ga} = \prod_b L_{g_a}^{(ab)} = 1\,, \tag{4.8}$$

lo que implica que no todos los operadores L_g^l son independientes. Dicho vínculo, es el análogo a la ley de Gauss para el caso electromagnético.

4.3. Álgebras locales y descomposición del espacio de Hilbert

Supóngase que para una teoría sobre una red discreta se define una región V de manera que queda definida el álgebra $\mathcal{A}_V$ compuesta de todos los operadores que pueden ser construidos a partir de los elementos en el interior y sobre el borde de V. Si se llama $(\mathcal{A}_V)'$ al álgebra dada por todos los operadores que conmutan con todos los pertenecientes a $\mathcal{A}_V$, para el caso más general, se tiene que

$$\mathcal{A}_V \cap (\mathcal{A}_V)' = \mathcal{Z}_V\,, \tag{4.9}$$

donde $\mathcal{Z}_V$ es llamado centro del álgebra $\mathcal{A}_V$ y esta compuesto por el conjunto de operadores que conmutan con todos los demás, ya estén presentes en $\mathcal{A}_V$ o $(\mathcal{A}_V)'$.

En algunos casos, como el campo escalar, donde los elementos de la teoría pertenecen a los sitios de la red y todo los operadores se pueden escribir como polinomios en potencias del campo y los momentos en cada uno de los sitio, se tiene que

$$\mathcal{A}_V = \left(\mathcal{A}_{\overline{V}}\right)'\,,\ \mathcal{A}_{\overline{V}} = \left(\mathcal{A}_V\right)'\,, \tag{4.10}$$

donde $\mathcal{A}_{\overline{V}}$ es el álgebra de operadores definidos sobre la región $\overline{V}$ complementaria a V. También vale que el centro es trivial, es decir esta dado por conjunto de operadores $\mathbf{1}$ proporcionales a la identidad

$$\mathcal{A}_V \cap (\mathcal{A}_V)' = \mathcal{A}_V \cap \mathcal{A}_{\overline{V}} = \mathbf{1}\,. \tag{4.11}$$

Esto implica que el espacio de Hilbert global esta asociado con dos álgebras, siendo estas el álgebra $\mathcal{A}_V$ de los operadores $\mathcal{O}_V \otimes \mathbf{1}_{\overline{V}}$ y el álgebra $\mathcal{A}_{\overline{V}}$ de los operadores $\mathbf{1}_V \otimes \mathcal{O}_{\overline{V}}$. Bajo este contexo es válida la descomposición

$$H = H_V \otimes H_{\overline{V}}\,. \tag{4.12}$$

Para las teorías de gauge un centro no trivial aparece naturalmente. Esto puede deberse a la presencia de links $l \in V$ que no pertenecen a ningún bucle de Wilson y por ende el operador $\hat{L}_g^l$ asociado forma parte del centro. O bien, de forma más general, la existencia

de un centro no trivial se debe a que gracias al vínculo (4.8) siempre existe producto de operadores de $\mathcal{A}_V$ ubicados en el interior de V pero cerca de la frontera ∂V que puede escribirse como producto de operadores correspondientes al álgebra $\mathcal{A}_{\overline{V}}$ definida sobre la región complementaria (Ver figura 4.2) . Sin embargo, como se verá a continuación mediante la fijación de gauge pueden realizarce distintas elecciones de álgebras sobre el borde de la región V que permiten generar un centro trivial.

La existencia de un centro no trivial para el álgebra impide la descomposición de álgebras en términos de productos tensoriales sobre el espacio de Hilbert y por ende la forma usual de cómputo de la matriz densidad reducida no puede ser aplicada. Independientemente de este hecho puede definirse una entropía invariante de gauge [11, 36] pero la misma no puede ser interpretada como correlaciones entre V y $\overline{V}$ dadas por pares EPR sobre ∂V destilados a partir del estado definido por la matriz densidad.

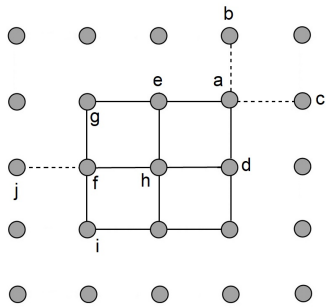


Figura 4.2: A partir de la aplicación del vínculo (4.8) se tiene que $\left(\hat{L}_g^{(ae)}\hat{L}_g^{(ad)}\right) = \left(\hat{L}_g^{(ba)}\hat{L}_g^{(ca)}\right)$ y $\left(\hat{L}_g^{(fg)}\hat{L}_g^{(fh)}\hat{L}_g^{(fi)}\right) = \hat{L}_g^{(jf)}$ de manera que $\left(\hat{L}_g^{(ba)}\hat{L}_g^{(ca)}\right)$ y $\hat{L}_g^{(jf)}$ conmutan con los demás operadores en el interior del cuadrado.

4.4. Centro trivial para el caso electromagnético

Para el caso electromagnético $U(1)$ las variables de link pueden parametrizarse de la forma $U_l = e^{iaA_l}$ donde A_l representa el potencial vector y a el espaciado de la red. En el continuo esto puede ser asimilado a $A_\mu dx_\mu$ donde el diferencial dx_μ describe el desplazamiento a lo largo del link. Para el caso d-dimensional, dado el tensor electromagnético $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, se tienen los vínculos

$$\nabla_i F^{0i} = 0\,,\ \partial_{i_1} F_{i_2 i_3} + \partial_{i_2} F_{i_3 i_1} + \partial_{i_3} F_{i_1 i_2} = 0\,. \tag{4.13}$$

Integrando la primera ecuación de (4.13) sobre un volumen W d-dimensional encerrado por una superficie $(d-1)$-dimensional Σ se tiene

$$\int_W d^d x \quad \nabla \cdot \overline{E} = \int_\Sigma d\sigma \quad \overline{\eta} \cdot \overline{E} = 0 \tag{4.14}$$

Luego, para cualquier superficie Σ que intersecte la región de estudio V, es posible generar operador que posiblemente pertenezca al centro $\mathcal{A}_V$

$$\int_{\Sigma\cap V} d\sigma \quad \overline{\eta}\cdot\overline{E} = -\int_{\Sigma\cap\overline{V}} d\sigma \quad \overline{\eta}\cdot\overline{E}\,. \tag{4.15}$$

Esta ecuación puede obtenerse sobre la red discreta multiplicando los vínculos de tipo (4.8) sobre todos los vértices de la región W:

$$\prod_{a\in W} T_{g_a} = \prod_{a\in W}\left[\prod_b L^{ab}_{g_a}\right] = 1\,. \tag{4.16}$$

Pero los operadores $L^{ab}_{g_a}$ entre dos puntos de la región W se cancelan al realizar el producto. De esta manera, definiendo ∂W_{out} como el conjunto de links l con un solo vértice en W apuntando hacia afuera, la ecuación (4.16) se reduce a

$$\prod_{l\in\partial W_{out}} L^l_g = 1\,. \tag{4.17}$$

Análogamente a partir de la segunda ecuación de (4.13) se tiene que

$$\int_{\Sigma\cap V} d\sigma_{ij}F^{ij} = \oint_{\partial V\cap\Sigma} A_\mu.dx^\mu = \int_{\Sigma\cap\overline{V}} d\sigma_{ij}F^{ij} \tag{4.18}$$

que puede reducirse a la red discreta como producto de plaquetas orientadas.

Ya conociendo los posibles elementos del centro, es posible determinar las consideraciones necesarias para obtener un álgebra con centro trivial [11]. Llamando ∂V^+ y ∂V^- los elementos de la frontera ∂V de V incluidos y no incluidos como generadores del álgebra $\mathcal{A}_V$ respectivamente se tiene que:

- Para que el vínculo eléctrico no sea usado para formar un elemento del centro es necesario evitar tener un conjunto de operadores en la frontera que sean unidos y exteriores a un lado de la superficie $(d-2)$-dimensional en la frontera $(d-1)$-dimensional ∂V. En otras palabras, el conjunto ∂V^- ser conexo. Además, ∂V^+ no debe contener todos los operadores de link correspondiente a un único sito, o bien, ∂V^- debe tocar todos los sitios contenidos en ∂V.

- El vínculo magnético implica que ∂V^- no puede formar un camino cerrado, dado que esto implica que existe un Bucle de Wilson que pertenece al centro del álgebra.

Ambas condiciones combinadas permiten asegurar que para obtener un álgebra con centro trivial, es necesario que ∂V^- forme un árbol maximal[1] sobre la frontera ∂V (Ver Figura 4.3).

[1] Un árbol maximal es un conjunto de links que no incluye ningún bucle cerrado pero la inclusión de cualquier otro link produce al menos uno.

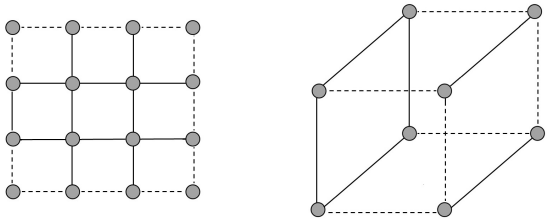


Figura 4.3: Algunos arboles maximales posibles (en lineas de puntos) sobre el la frontera para $d = 2$ (izquierda) y $d = 3$ (derecha). La linea punteada representa los elementos de ∂V^- mientas las no puntuadas representan los links pertenecientes al álgebra $\mathcal{A}_V$

4.5. Elección de álgebra por fijación de gauge

Es importante destacar que cada variable $U_{(ab)}$ puede ser fijada a 1 ($A_{(ab)} = 0$) sacrificando la libertad de gauge en alguno de los sitios a o b. Sin embargo, no todos los links U_l de un camino cerrado pueden ser fijados a 1 porque se contradice la invariancia de gauge del producto de las variables de link a lo largo del camino.

A diferencia de lo que sucede con los caminos cerrados, siempre puede fijarse a 1 todos los links correspondientes a un árbol maximal $\mathcal{T}$. De esta forma es posible mapear una teoría de gauge a una teoría sin invariancia local de gauge donde $U_l \in \mathbb{G}$ representan las variables físicas para los links l que forman parte del complemento del árbol maximal $\overline{\mathcal{T}}$. Bajo esta fijación de gauge, el álgebra de operadores de Wilson queda reducida a la generada por los operadores de coordenada de la forma

$$\hat{U}_l^r \psi[U_1, U_2, ..., U_l, ...U_N] = U_l^r \psi[U_1, U_2, ..., U_l, ...U_N]\,, \tag{4.19}$$

donde N representa la cantidad de links en $\overline{\mathcal{T}}$.

En esta representación invariante de gauge es sencillo definir una entropía de entrelazamiento. Simplemente es necesario elegir un subconjunto $V \subset \overline{\mathcal{T}}$ de links no fijados y su complemento $\overline{V}$ de manera que la descomposición en producto tensorial de la forma $H = H_V \otimes H_{\overline{V}}$ de las funciones en $\overline{\mathcal{T}}$ permiten obtener la entropía de entrelazamiento de la región V.

El inconveniente con este desarrollo es que la región V no necesariamente se corresponde con una región espacial. En efecto, los grados de libertad dados por los links invariantes de gauge en $\overline{\mathcal{T}}$ pueden ser altamente no locales. Para resolver este inconveniente es necesario lograr que el al cerrar un árbol maximal $\mathcal{T}$ con un link perteneciente a $\overline{\mathcal{T}} \cap V$ el bucle generado debe estar totalmente contenido en V. Esto puede lograrse, nuevamente, eligiendo un árbol máximo sobre la frontera de la región V de manera que cada link $\overline{\mathcal{T}} \cap \partial V$ que se elija cierra un bucle contenido en ∂V .

De esta forma, se logra dividir los grados de libertad en dos, los que son incluidos en la región V y los que no. Si bien la distribución de grados de libertad en el exterior y en el interior de dicha región pueden ser confusos esta se relaciona con una región espacial bien definida permitiéndose así calcular correctamente la entropía de entrelazamiento de la misma.

Capítulo 5

Entropía de entrelazamiento de un campo de Maxwell

5.1. Modalidad de trabajo

En principio la entropía de entrelazamiento para un campo de Maxwell podría ser obtenida a partir del método de Peschel [7] expuesto en el capítulo anterior de manera similar a [35], sin embargo es interesante obtener este resultado descomponiendo el campo en cuestión en campos escalares libres como en [12].

Para el caso plano entre placas paralelas infinitas es posible describir al campo de Maxwell como dos campos escalares libres, esto implica que la entropía de entrelazamiento no distingue entre las dos teorías mencionadas de manera que los coeficientes universales serán iguales. Al analizar el caso de la esfera puede verse que esto no es totalmente cierto dado que las teorías difieren para momento angular cero, produciéndose así diferencias en la anomalía (término logarítmico de la entropía).

5.2. Entropía de entrelazamiento de un campo de Maxwell entre placas paralelas

Considérese, al igual que en el capítulo 3 , que se desea calcular la entropía de entrelazamiento de una región V dada por el espacio entre dos placas paralelas infinitas separaras una distancia L. Para el caso de Maxwell, tendremos el hamiltoniano y las relaciones de conmutación

$$H = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3x(E^2 + B^2), \qquad [E_i(\overline{x}), B_j(\overline{y})] = -i\sum_k \varepsilon_{ikj}\partial_k \delta(\overline{x} - \overline{y}) \ . \tag{5.1}$$

Expandiendo los campos vectoriales $\overline{E}$ y $\overline{B}$ en modos de Fourier de manera análoga a (3.47) se tiene

$$E_i(x_1, x_2, x_3) = \sum_k N e^{ikx_2} E_i(x_1, k)\,,\ i = 1, 2, 3\,, \tag{5.2}$$

$$B_i(x_1, x_2, x_3) = \sum_k N e^{ikx_2} B_i(x_1, k)\,,\ i = 1, 2, 3\,, \tag{5.3}$$

donde $\hat{x}_1$ es perpendicular a las placas paralelas, $\hat{x}_2 = \hat{k}$ y $\hat{x}_3 = \hat{k} \times \hat{x}_1$.

Luego, remplazando (5.2) y (5.3) en los vínculos del caso sin fuentes $\nabla \cdot \overline{E} = 0$ y $\nabla \cdot \overline{B} = 0$ es posible obtener que valen las relaciones

$$E_2 = \frac{i}{|k|}\partial_1 E_1\,,\ B_2 = \frac{i}{|k|}\partial_1 B_1\,. \tag{5.4}$$

Esto lleva a introducir los campos

$$\phi_1 = -\frac{i}{|k|}\partial_1 B_1\,,\ P_1 = E_2\,, \tag{5.5}$$

$$\phi_2 = -\frac{i}{|k|}\partial_1 E_1\,,\ P_2 = B_2\,, \tag{5.6}$$

de manera que remplazando en (5.1) se tiene el hamiltoniano

$$H = \sum_k \int dx_1 \left(P_1^\dagger P_1 + P_1^\dagger P_1 + k^2 \phi_1^\dagger \phi_1 + k^2 \phi_2^\dagger \phi_2 + \partial\phi_1^\dagger \partial\phi_1 + \partial\phi_2^\dagger \partial\phi_2\right) \tag{5.7}$$

con las relaciones de conmutación no triviales

$$\left[\phi_1(x_1, k), P_1(x_1', k')\right] = \left[\phi_2(x_1, k), P_2(x_1', k')\right] = i\delta(x_1 - x_1')\delta_{kk'}\,. \tag{5.8}$$

Esto significa que la entropía de entrelazamiento de un campo de Maxwell entre placas paralelas será simplemente el doble de la obtenida para un campo escalar implicando que la entropía no distingue las dos teorías bajo esta geometría.

5.3. Entropía de entrelazamiento de un campo de Maxwell en una esfera

5.3.1. Descomposición de los campos eléctricos y magnéticos en armónicos esféricos vectoriales

Sea un campo vectorial arbitrario $\overline{V}$ es posible descomponerlo en armónicos esféricos vectoriales [12, 37, 38] a partir de la expresión

$$\overline{V}_{lm} = V_{lm}^r(r)\overline{Y}_{lm}^r(\theta, \varphi) + V_{lm}^e(r)\overline{Y}_{lm}^e(\theta, \varphi) + V_{lm}^m(r)\overline{Y}_{lm}^m(\theta, \varphi)\,, \tag{5.9}$$

donde vale que

$$\overline{V} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} \overline{V}_{lm} = \sum_{lm} \overline{V}_{lm} \tag{5.10}$$

y los armónicos esféricos vectoriales $\overline{Y}^r_{lm}$, $\overline{Y}^e_{lm}$ y $\overline{Y}^m_{lm}$ están definidos a partir de los armónicos esféricos escalares usuales Y_{lm} como :

$$\overline{Y}^r_{lm}(\theta,\varphi) = Y_{lm}(\theta,\varphi)\hat{r} \qquad l \geq 0, \quad -l \leq m \leq 0\,, \tag{5.11}$$

$$\overline{Y}^e_{lm}(\theta,\varphi) = \frac{r\nabla Y_{lm}(\theta,\varphi)}{\sqrt{l(l+1)}} \qquad l > 0, \quad -l \leq m \leq 0\,, \tag{5.12}$$

$$\overline{Y}^m_{lm}(\theta,\varphi) = \frac{\overline{r} \times \nabla Y_{lm}(\theta,\varphi)}{\sqrt{l(l+1)}} \qquad l > 0, \quad -l \leq m \leq 0\,, \tag{5.13}$$

siendo $\overline{Y}^r_{lm}$ correspondiente a la parte radial, $\overline{Y}^e_{lm}$ a la eléctrica y $\overline{Y}^m_{lm}$ a la magnética de cada modo V_{lm} de campo vectorial $\overline{V}$.

A su vez, es útil introducir el índice $s = r, e, m$ de manera que se satisface que:

$$\int \overline{Y}^s_{lm} {\overline{Y}^s_{lm}}^* d\Omega = \delta_{ss'}\delta_{ll'}\delta_{mm'}\,, \tag{5.14}$$

sugiriendo que los armónicos esféricos definidos en (5.11), (5.12) y (5.13) son una posible base ortonormal para expandir un campo vectorial arbitrario $\overline{V}$ de la forma (5.9), o bien reescribiendo

$$\overline{V} = \sum_{slm} V^s_{lm}(r)\overline{Y}^s_{lm}(\theta,\varphi)\,, \tag{5.15}$$

con $V^s_{lm}(r)$ dados por la expresión para los coeficientes de Fourier

$$V^s_{lm}(r) = \int \overline{V} \cdot \overline{Y}^{s^*}_{lm} d\Omega\,. \tag{5.16}$$

En particular si se utilizan las ecuaciones (5.15) y (5.16) para el campo eléctrico se obtiene que

$$\overline{E} = \sum_{slm} E^s_{lm}(r)\overline{Y}^s_{lm}(\theta,\varphi), \quad E^s_{lm}(r) = \int \overline{E} \cdot \overline{Y}^{s*}_{lm} d\Omega \tag{5.17}$$

y análogamente para el campo magnético:

$$\overline{B} = \sum_{slm} B^s_{lm}(r)\overline{Y}^s_{lm}(\theta,\varphi), \quad B^s_{lm}(r) = \int \overline{B} \cdot \overline{Y}^{s*}_{lm} d\Omega\,. \tag{5.18}$$

5.3.2. Reescritura del Hamiltoniano del campo de Maxwell

El Hamiltoniano y las relaciones de conmutación no triviales del campo de Maxwell vienen dados a partir de los campos físicos $\overline{E}$ y $\overline{B}$ en (5.1) de manera que remplzando (5.17) y (5.18) en dicha expresion se tiene

$$H = \frac{1}{2}\sum_{slm}\sum_{s'l'm'}\int_0^\infty r^2\left(E^s_{lm}E^{s'*}_{l'm'} + B^s_{lm}B^{s'*}_{l'm'}\right)\left(\int \overline{Y}^s_{lm}\overline{Y}^{s'*}_{l'm'}d\Omega\right)dr\,, \tag{5.19}$$

o bien, aplicando la ortonormalidad de los armónicos esféricos vectoriales dada por (5.14) es válido[1]

$$H = \frac{1}{2}\sum_{slm}\int_0^\infty r^2\left[(E^s_{lm})^2 + (B^s_{lm})^2\right]dr\,. \tag{5.20}$$

Por ende nuevamente es de utilidad introducir la notación

$$H = \sum_{lm} H_{lm} \tag{5.21}$$

donde se considera que

$$H_{lm} = \frac{1}{2}\int_0^\infty r^2 \sum_{s=r,e,m}[(E^s_{lm}(r))^2 + (B^s_{lm}(r))^2]dr \qquad l \geq 1 \tag{5.22}$$

$$H_0 = \frac{1}{2}\int_0^\infty r^2[(E^r_0(r))^2 + (B^r_0(r))^2]dr \qquad l = 0 \tag{5.23}$$

Desde un punto de vista matemático, interesante destacar que la diferencia para momento angular cero proviene de la imposibilidad de definir los armónicos esféricos eléctrico y magnético en dicho caso, de manera que solo se puede considerar aporte radial.

De la misma manera para las relaciones de conmutación remplzando (5.17) y (5.18) en (5.1) vale que

$$[E^r_{lm}, B^m_{l'm'}] = -\,[E^m_{lm}, B^r_{l'm'}] = \frac{\sqrt{l(l+1)}}{r^3}\delta(r-r')\delta_{ll'}\delta_{mm'}\,. \tag{5.24}$$

5.3.3. Condiciones para campos libres sin fuentes

Para el caso sin fuentes es claro que es válida la ley de Gauss electrica de la forma $\nabla\cdot\overline{E} = 0$ que puede ser reescrita en vista de (5.17) de la forma

$$\sum_{slm}\nabla\cdot\left(E^s_{lm}\overline{Y}^s_{lm}\right) = \sum_{slm}\left(\overline{Y}^s_{lm}\cdot\hat{r}\frac{\partial E^s_{lm}}{\partial r} + E^s_{lm}(r)\nabla\cdot\overline{Y}^s_{lm}\right) = 0\,. \tag{5.25}$$

[1]Considerando que cada modo m debe producir el mismo aporte a la entropía, es posible simplificar el cálculo suponiendo $m = 0$. Bajo este contexto, E^s_{lm} y B^s_{lm} son variables reales para todo l y s.

Entonces, es útil analizar cada término de (5.25) a partir de las propiedades de los armónicos esfericos vectoriales (Ver anexo B.1) obteniéndose así que

$$\sum_{lm} Y_{lm} \left[\frac{\partial E^r_{lm}(r)}{\partial r} + \frac{2}{r} E^r_{lm}(r) - \frac{\sqrt{l(l+1)}}{r} E^e_{lm}(r) \right] = 0 \,. \tag{5.26}$$

Sin embargo, dado que los armónicos esféricos son linealmente independientes, que la expresión (5.26) se anule implica que deben anularse todos los coeficientes de la sumatoria, por ende vale que

$$\frac{\partial E^r_{lm}(r)}{\partial r} + \frac{2}{r} E^r_{lm}(r) = \frac{\sqrt{l(l+1)}}{r} E^e_{lm}(r) \,. \tag{5.27}$$

Es importante destacar nuevamente que para momento angular cero $l = 0$ solo está definida la componente radial de manera que puede obtenerse de manera análoga que

$$\frac{\partial E^r_{l=0}(r)}{\partial r} + \frac{2}{r} E^r_{l=0}(r) = 0 \,. \tag{5.28}$$

Esto implica que necesariamente

$$E^r_{l=0}(r) = \frac{\text{Constante}}{r^2} \,, \tag{5.29}$$

pero al no haber cargas presentes la única solución consiste en el origen será $E^r_{l=0}(r) = 0$

De forma similar para el campo magnético remplazando (5.18) en la ley de Gauss magnética $\nabla \cdot \overline{B} = 0$ vale que para $l \geq 1$:

$$\frac{\partial B^r_{lm}(r)}{\partial r} + \frac{2}{r} B^r_{lm}(r) = \frac{\sqrt{l(l+1)}}{r} B^e_{lm}(r) \tag{5.30}$$

y para $l = 0$ que $B^r_{l=0}(r) = 0$.

5.3.4. Inclusión de los vínculos en el Hamiltoniano

Ahora se presenta la forma de reescribir el Hamiltoniano para cada l y m (H_{lm}) de la ecuación (5.21) incluyendo las restricciones dadas para el campo sin fuentes. En particular, para $l = 0$ se obtuvo que $E^r_{l=0} = 0$ y $B^r_{l=0} = 0$ de manera que remplazando en (5.23) vale que $H_{l=0} = 0$. Para $l \geq 1$ a partir de (5.27) y (5.30) es posible despejar E^e_{lm} y B^e_{lm} en función de E^r_{lm} y B^r_{lm} respectivamente

$$E^e_{lm}(r) = \frac{r}{\sqrt{l(l+1)}} \frac{\partial E^r_{lm}(r)}{\partial r} + \frac{2}{\sqrt{l(l+1)}} E^r_{lm}(r) \,, \tag{5.31}$$

$$B^e_{lm}(r) = \frac{r}{\sqrt{l(l+1)}} \frac{\partial B^r_{lm}(r)}{\partial r} + \frac{2}{\sqrt{l(l+1)}} B^r_{lm}(r) \,. \tag{5.32}$$

Remplazando (5.31) y (5.32) en (5.22) se obtiene

$$H_{lm} = \frac{1}{2}\int_0^\infty r^2 \left[(E^r_{lm})^2 + (E^e_{lm})^2 + (E^m_{lm})^2 + (B^r_{lm})^2 + (B^e_{lm})^2 + (B^m_{lm})^2\right] dr =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty r^2 \left[(E^r_{lm})^2 + \left(\frac{r}{\sqrt{l(l+1)}}\frac{\partial E^r_{lm}}{\partial r} + \frac{2}{\sqrt{l(l+1)}}E^r_{lm}\right)^2 + (B^m_{lm})^2\right] dr +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^\infty r^2 \left[(B^r_{lm})^2 + \left(\frac{r}{\sqrt{l(l+1)}}\frac{\partial B^r_{lm}}{\partial r} + \frac{2}{\sqrt{l(l+1)}}B^r_{lm}\right)^2 + (E^m_{lm})^2\right] dr\,. \tag{5.33}$$

Es decir que el Hamiltoniano H_{lm} puede escribirse a partir de dos modos compuestos de los pares de variables canónicas conjugadas (E^r_{lm}, B^m_{lm}) y (E^m_{lm}, B^r_{lm}), lo cual es consistente con los conmutadores calculados.

De forma similar al caso de placas paralelas, la escritura del Hamiltoniano y los conmutadores puede simplificarse definiendo nuevas variables:

$$\widetilde{E}^m_{lm} = rE^m_{lm}, \quad \widetilde{B}^m_{lm} = rB^m_{lm}, \quad \widetilde{E}^r_{lm} = \frac{r^2E^r_{lm}}{\sqrt{l(l+1)}}, \quad \widetilde{B}^r_{lm} = \frac{r^2B^r_{lm}}{\sqrt{l(l+1)}}\,. \tag{5.34}$$

En este caso es trivial probar la validez de las relaciones

$$(\widetilde{E}^m_{lm})^2 = r^2(E^m_{lm})^2, \quad (\widetilde{B}^m_{lm})^2 = r^2(B^m_{lm})^2\,, \tag{5.35}$$

$$\frac{l(l+1)}{r^2}(\widetilde{E}^r_{lm})^2 = r^2(E^r_{lm})^2, \quad \frac{l(l+1)}{r^2}(\widetilde{B}^r_{lm})^2 = r^2(B^r_{lm})^2\,, \tag{5.36}$$

y también se tiene que

$$\left(\frac{\partial\widetilde{E}^r_{lm}}{\partial r}\right)^2 = r^2\left(\frac{r}{\sqrt{l(l+1)}}\frac{\partial E^r_{lm}}{\partial r} + \frac{2}{\sqrt{l(l+1)}}E^r_{lm}\right)^2, \tag{5.37}$$

$$\left(\frac{\partial\widetilde{B}^r_{lm}}{\partial r}\right)^2 = r^2\left(\frac{r}{\sqrt{l(l+1)}}\frac{\partial B^r_{lm}}{\partial r} + \frac{2}{\sqrt{l(l+1)}}B^r_{lm}\right)^2. \tag{5.38}$$

Entonces, aplicando las sustituciones (5.34) en (5.33)

$$H_{lm} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[\frac{l(l+1)}{r^2}(\widetilde{E}^r_{lm})^2 + \left(\frac{\partial\widetilde{E}^r_{lm}}{\partial r}\right)^2 + (\widetilde{B}^m_{lm})^2\right] dr + (\widetilde{E}_{lm} \leftrightarrow \widetilde{B}_{lm})\,. \tag{5.39}$$

De manera similar para los conmutadores se obtiene que

$$\left[\widetilde{E}^r_{lm}, \widetilde{B}^m_{l'm'}\right] = \left[\widetilde{E}^m_{lm}, \widetilde{B}^r_{l'm'}\right] = i\delta(r-r')\delta_{ll'}\delta_{mm'}\,. \tag{5.40}$$

En resumen, introduciendo los vínculos impuestos por las leyes de Gauss (5.27) y (5.30) junto con las sustituciones (5.34) se ha demostrado Hamiltoniamo de Mawell es semejante a dos campos escalares que no interactúan entre sí para $l \geq 1$ y se anula para $l = 0$.

5.3.5. Entropía y coeficiente logarítmico

En resumen, para el caso de una region esferica de radio R, se tiene que la entropía para el campo de Maxwell $S^M(R)$ vendrá dada a partir de la del campo escalar $S^S(R)$ de la forma

$$S^M(R) = 2\left(S^S(R) - S^S_{l=0}(R)\right) . \tag{5.41}$$

Donde debido al balance entre operadores eléctricos y magnéticos en (5.39) se considera la entropía obtenida corresponde a un álgebra sin centro.

Bajo este contexto, utilizando un cálculo numérico análogo al citado para el campo escalar (Ver Anexo A.3) sin el modo de momento angular nulo ($l = 0$) se obtiene que

$$c^M_{\log} = 2\left(c^S_{\log} - c^{S_{l=0}}_{\log}\right) = -0{,}355376\,, \tag{5.42}$$

siendo este valor coherente con lo obtenido por este mismo método en [12].

A su vez realizando el calculo numérico solamente para el modo de momento angular cero se tiene que

$$c^{S_{l=0}}_{\log} = 0{,}166665 \approx \frac{1}{6}\,, \tag{5.43}$$

es decir, que el aporte del modo $l = 0$ es igual al de un campo $(1+1)$-dimensional con condiciones de contorno de Dirichlet en el origen. A partir de aqui, puede verse que el valor

$$c^M_{\log} = 2\left(c^S_{\log} - c^{S_{l=0}}_{\log}\right) = 2\left(-\frac{1}{90} - \frac{1}{6}\right) = -\frac{16}{45} \approx 0{,}3555 \tag{5.44}$$

coincide con el de [13] obtenido analiticamente en base a argumentos termodinámicos en el espacio de Siter . En este caso el valor no coincide con los resultados obtenidos a partir de multiplicar la densidad de Euler en la anomalía de traza del tensor de energía-momento de $-\frac{31}{45}$ siendo este un problema abierto del área. Posiblemente las diferencias observadas se deben a contribuciones anómalas sobre la superficie de la esfera.

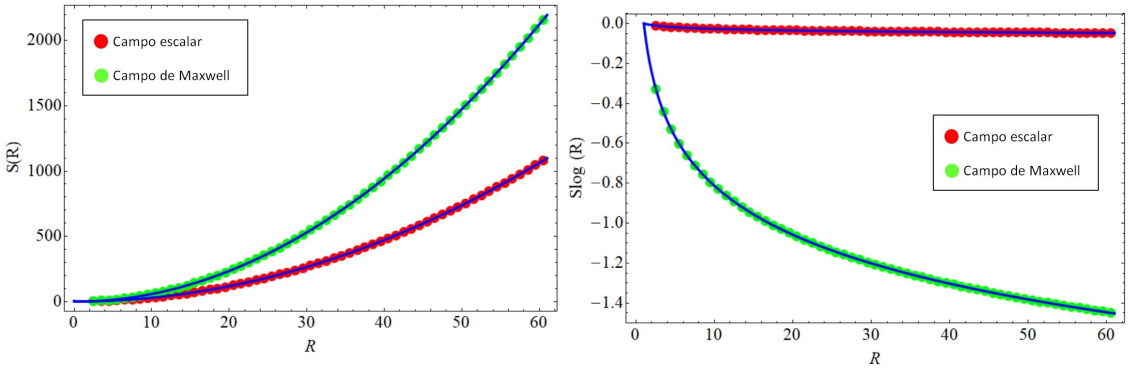


Figura 5.1: Entropía (izquierda) y parte logarítmica de la misma (derecha) en función del radio de la esfera para un campo escalar y un campo de Maxwell en una esfera.

Capítulo 6

Gravedad Linealizada

6.1. Ecuaciones de campo de Einstein

En Relatividad General es posible describir la interacción gravitatoria como resultado de la curvatura del espacio tiempo producida por la masa y la energía. Esto se resume en las ecuaciones de campo de Einstein dadas para $c = 1$ y $G = 1$ como

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}\,, \tag{6.1}$$

donde $T_{\mu\nu}$ es el tensor Energia-Momento $G_{\mu\nu}$ el tensor de curvatura de Einstein, que se forma a partir de derivadas segundas del tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Formalmente el tensor de Einstein puede ser escrito como

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\,, \tag{6.2}$$

siendo $R_{\mu\nu}$ el tensor de Ricci que es obtenido a partir de la contracción de un índice covariante y otro contravariante del tensor de Riemann y R es el escalar de Ricci se calcula como la contracción de el tensor del mismo nombre. Es decir,

$$R_{\mu\nu} = R^{\sigma}{}_{\mu\sigma\nu}, \qquad R = R^{\mu}{}_{\mu}\,. \tag{6.3}$$

A su vez el tensor de Riemann se escribe en en función de los símbolos de Christoffel Γ como

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^{\rho}{}_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma}\,, \tag{6.4}$$

de manera que los símbolos de Christoffel pueden obtenerse a partir de la métrica del espacio $g_{\mu\nu}$ como

$$\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho n}\left(\frac{\partial g_{n\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{n\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^n}\right)\,. \tag{6.5}$$

Si a partir de las ecuaciones de Einstein (6.1) se quiere obtener como solución un espacio-tiempo plano basta con requerir que el tensor Energía-Momento sea nulo, es decir, $T_{\mu\nu} = 0$. Para dicho caso, es sencillo ver que las ecuaciones en cuestión se transforman en $R_{\mu\nu} = 0$ y la métrica del espacio de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ es una solución[1].

[1] Existen soluciones a $R_{\mu\nu} = 0$, por ejemplo, pueden describir ondas gravitacionales.

6.2. Gravedad linealizada

6.2.1. Ecuaciones de campo y lagrangiano

Es posible realizar una aproximación de la gravedad de Einstein donde el espacio-tiempo es caracterizado por una métrica de Minkowski de fondo ($\eta_{\mu\nu}$) más una perturbación débil ($h_{\mu\nu}$) que genera solo correcciones pequeñas sobre el campo inicial [39, 40, 41]. Matemáticamente es válido escribir

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \qquad ||h_{\mu\nu}|| << 1\,. \tag{6.6}$$

En esta aproximación de campo débil es posible expandir las ecuaciones de campo en potencias de $h_{\mu\nu}$ y sin perder mucha exactitud es válido eliminar todos los términos no lineales. El formalismo resultante es llamado gravedad linealizada y es la teoría que se obtiene al buscar el campo clásico correspondiente a partículas de spin 2 y (-2) en un espacio-tiempo plano.

Al trabajar con gravedad linealizada, dado que $||h_{\mu\nu}|| << 1$, es correcto asumir que la subida y bajada de índices se realiza con la métrica de Minkowski ($\eta_{\mu\nu}$) y no con la métrica total de la teoría ($g_{\mu\nu}$). Luego, a partir de (6.5) calculamos los símbolos de Christoffel

$$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\eta^{\mu n} + h^{\mu n})\left(\frac{\partial \eta_{n\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial \eta_{n\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial \eta_{\alpha\beta}}{\partial x^{n}} + \frac{\partial h_{n\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial h_{n\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x^{n}}\right) =$$

$$\approx \frac{1}{2}\eta^{\mu n}\left(h_{n\alpha,\beta} + h_{n\beta,\alpha} - h_{\alpha\beta,n}\right) = \frac{1}{2}(h_{\alpha}{}^{\mu}{}_{,\beta} + h_{\beta}{}^{\mu}{}_{,\alpha} - h_{\alpha\beta},^{\mu})\,. \tag{6.7}$$

Análogamente al construir el tensor de Riemann a partir (6.4)

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \Gamma^{\rho}{}_{\nu\sigma,\mu} - \Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma,\nu} + \Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma} \approx \Gamma^{\rho}{}_{\nu\sigma,\mu} - \Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma,\nu}\,, \tag{6.8}$$

donde se eliminan los términos $\Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma}$ y $\Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma}$ porque solo involucran términos no lineales de $h_{\mu\nu}$. Desde aquí, remplazando (6.7) en (6.8), vale que

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial_{\mu}\eta^{\rho n}\left(h_{n\nu,\sigma} + h_{n\sigma,\nu} - h_{\nu\sigma,n}\right) - \frac{1}{2}\partial_{\nu}\eta^{\rho n}\left(h_{n\mu,\sigma} + h_{n\sigma,\mu} - h_{\mu\sigma,n}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(h_{\nu}{}^{\rho}{}_{,\sigma\mu} + h_{\mu\sigma},^{\rho}{}_{\nu} - h_{\nu\sigma},^{\rho}{}_{\mu} - h_{\mu}{}^{\rho}{}_{,\sigma\nu}\right)\,. \tag{6.9}$$

Además, contrayendo el tensor de Riemann en función de (6.3) y (6.8) se tiene el tensor y el escalar de Ricci de la forma

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(h_{\mu}{}^{\sigma}{}_{,\nu\sigma} + h_{\nu}{}^{\sigma},_{\mu\sigma} - h_{\mu\nu},^{\sigma}{}_{\sigma} - h^{\sigma}{}_{\sigma,\mu\nu}) \tag{6.10}$$

$$R = h_{\rho\sigma},^{\rho\sigma} - h^{\rho}{}_{\rho,\sigma}{}^{\sigma}\,. \tag{6.11}$$

Por otro lado, para el caso de la gravedad linealizada podemos ver que la definición del tensor de curvatura de Einstein (6.2) se transforma en

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R \tag{6.12}$$

entonces remplazando (6.10) y (6.11) en (6.12) se tiene

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[h_{\mu}{}^{\sigma},_{\nu\sigma} + h_{\nu}{}^{\sigma},_{\mu\sigma} - h_{\mu\nu},_{\sigma}{}^{\sigma} - h^{\sigma}{}_{\sigma},_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}(h_{\rho\sigma},^{\rho\sigma} - h^{\rho}{}_{\rho},_{\sigma}{}^{\sigma})\right] \tag{6.13}$$

reduciendo las ecuaciones de Einstein (6.1) a

$$h_{\mu}{}^{\sigma},_{\nu\sigma} + h_{\nu}{}^{\sigma},_{\mu\sigma} - h_{\mu\nu},_{\sigma}{}^{\sigma} - h^{\sigma}{}_{\sigma},_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}(h_{\rho\sigma},^{\rho\sigma} - h^{\rho}{}_{\rho},_{\sigma}{}^{\sigma}) = 16\pi T_{\mu\nu} \tag{6.14}$$

será de utilidad para el desarrollo de este trabajo conocer un lagrangiano que describa el campo de gravedad linealizada $h_{\mu\nu}$. Una forma de este fue obtenido en [42, 43] donde se prueba que el lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\alpha h^{\alpha}{}_{\nu} + \frac{1}{2}\partial^\alpha h_{\mu\nu}\partial_\alpha h^{\mu\nu} + \partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\nu h^{\alpha}{}_{\alpha} - \frac{1}{2}\partial_\alpha h^{\mu}{}_{\mu}\partial^\alpha h^{\nu}{}_{\nu} + h^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} \tag{6.15}$$

produce las ecuaciones de campo (6.14) como sus ecuaciones de Euler-Lagrange.

6.2.2. Transformaciones e invariantes de gauge

Es claro que no es correcto esperar que la ecuación de campo (6.14) entregue soluciones únicas, ya que para cada solución posible siempre pueden generarse otras a partir de cambios de coordenadas. Bajo este contexto, las libertades de gauge del campo gravitatorio linealizado provienen de dichos cambios de coordenadas pudiéndose así escribir la transformación más general posible sobre x^μ, que mantiene el carácter débil del campo, como

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x) \tag{6.16}$$

donde $\partial\xi^\mu/\partial x^\nu$ es del mismo orden que $h_{\mu\nu}$, es decir,

$$\mathcal{O}\left(\frac{\partial\xi^\mu}{\partial x^\nu}\right) = \mathcal{O}\left(h_{\mu\nu}\right) . \tag{6.17}$$

Puede demostrarse fácilmente que el tensor de Riemann a nivel linealizado es invariante ante transformaciones del tipo (6.16). Para comenzar, es sabido que el tensor métrico $g^{\mu\nu}$ transforma como tensor contravariante al realizar un cambio de coordenadas, luego

$$g'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\rho}g^{\lambda\rho} . \tag{6.18}$$

A partir de (6.6) es posible considerar $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ en (6.18) de manera que

$$h'^{\mu\nu} = -\eta^{\mu\nu} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\rho}\eta^{\lambda\rho} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\rho}h^{\lambda\rho} , \tag{6.19}$$

en efecto, para las derivadas considerando (6.17) se tiene

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\rho}} = \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}\right)\left(\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial \xi^{\nu}}{\partial x^{\rho}}\right) \approx \delta^{\mu}_{\lambda}\delta^{\nu}_{\rho} + \delta^{\mu}_{\lambda}\frac{\partial \xi^{\nu}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}\delta^{\nu}_{\rho}\,. \tag{6.20}$$

Remplazando (6.20) en (6.19) y eliminando los términos de segundo orden y superiores de $h^{\mu\nu}$ y $\partial\xi^{\mu}$ se tiene

$$h'^{\mu\nu} = -\eta^{\mu\nu} + (\eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}) + \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}\eta^{\lambda\nu} + \frac{\partial \xi^{\nu}}{\partial x^{\rho}}\eta^{\mu\rho} =$$

$$= h^{\mu\nu} + \xi^{\mu}{}_{,\lambda}\,\eta^{\lambda\nu} + \xi^{\nu}{}_{,\rho}\,\eta^{\mu\rho} = h^{\mu\nu} + \xi^{\mu,\nu} + \xi^{\nu,\mu}\,. \tag{6.21}$$

Utilizando (6.7), (6.19) y (6.21) es posible recalcular los símbolos de Christoffel

$$\Gamma'^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta^{\mu n}\left(h'_{n\alpha,\beta} + h'_{n\beta,\alpha} - h'_{\alpha\beta,n}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\eta^{\mu n}\left(h_{n\alpha,\beta} + h_{n\beta,\alpha} - h_{\alpha\beta,n}\right) + \frac{1}{2}\eta^{\mu n}\left(\xi_{n,\alpha\beta} + \xi_{\alpha,n\beta} + \xi_{n,\beta\alpha} + \xi_{\beta,n\alpha} - \xi_{\alpha,\beta n} - \xi_{\beta,\alpha n}\right) =$$

$$= \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\eta^{\mu n}\left(\xi_{n,\alpha\beta} + \xi_{n,\beta\alpha}\right) = \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} + \eta^{\mu n}\xi_{n,\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} + \xi^{\mu}{}_{,\alpha\beta}\,, \tag{6.22}$$

siendo, a partir de (6.8) y (6.22), sencillo computar nuevamente el tensor de Riemann

$$R'^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \Gamma'^{\rho}{}_{\nu\sigma,\mu} - \Gamma'^{\rho}{}_{\mu\sigma,\nu} = \partial_{\mu}\left(\Gamma^{\rho}{}_{\nu\sigma} + \xi^{\rho}{}_{,\nu\sigma}\right) - \partial_{\nu}\left(\Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma} + \xi^{\rho}{}_{,\mu\sigma}\right)$$

$$\left(\Gamma^{\rho}{}_{\nu\sigma,\mu} + \xi^{\rho}{}_{,\nu\sigma\mu}\right) - \left(\Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma,\nu} + \xi^{\rho}{}_{,\mu\sigma\nu}\right) = R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} + \left(\xi^{\rho}{}_{,\nu\sigma\mu} - \xi^{\rho}{}_{,\mu\sigma\nu}\right) = R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}\,. \tag{6.23}$$

En resumen, el tensor de Riemann es invariante de gauge y por ende sus contracciones, el tensor y el escalar de Ricci, también lo serán. De aquí se deduce también que las ecuaciones de campo permanecen independientes de la elección de gauge, valiendo que para cada solución $h_{\mu\nu}$ existen infinitas soluciones equivalentes (6.21).

El campo gravitatorio lineal puede ser cuantizado bajo distintas elecciones de gauge de forma similar al caso de Maxwell [44, 45]. Sin embargo, en los próximos capítulos trabajaremos con elecciones de gauge menos convencionales que permitan trabajar con las geometrías de interés.

Capítulo 7

Resultados

7.1. Modalidad de trabajo

El propósito de este trabajo es obtener la entropía de entrelazamiento para el campo de gravitones linealizados entre placas paralelas y en una esfera. Una posibilidad seria proceder de forma similar a lo realizado para el campo de Maxwell en [12] desarrollado en el capítulo 5 a partir de los campos $\overline{E}$ y $\overline{B}$ componentes del tensor invariante de gauge $F_{\mu\nu}$. Para el caso gravitatorio esto implicaría la necesitad de trabajar con el tensor Riemmann de cuarto orden $R_{\mu\nu\theta\rho}$ y por ende, se considera más sencillo trabajar con el campo $h_{\mu\nu}$. La dificultad que se introduce con este tipo de cálculos es la necesidad de fijar un gauge adecuado para la obtención de la entropía de la región espacial definida.

Por propósitos didácticos, en este capítulo primero se abordará nuevamente el problema de la entropía para un campo de Maxwell, esta vez, a partir del campo A_μ. Una vez, realizado esto, habiendo obtenido una mejor compresión de las fijaciones de gauge adecuadas, se trabajará el caso del gravitón lineal a partir de $h_{\mu\nu}$.

Para cada caso, con el propósito de comprobar que la entropía calculada bajo cierta fijación de gauge se corresponde con la región espacial V requerida, se buscará escribir el campo correspondiente en función de invariantes de gauge sobre las superficies ∂V. Dichas expresiones pueden ser algebraicas simples o bien ecuaciones diferenciales a derivadas parciales paralelas a la superficie. Sin embargo, no deben incluir derivadas perpendiculares a ∂V dado que integrar las mismas implicaría trabajar fuera de V.

Otro punto a destacar, es que en los casos de simetría esférica se trabajara nuevamente con expansiones de los campos en armonicos esféricos suponiendo que $m = 0$ de manera que los coeficientes de Fourier sean siempre reales. Esta suposición no afecta el resultado final correspondiente a cada caso dado que cada modo m debe producir el mismo aporte a la entropía.

7.2. Entropía de entrelazamiento de un campo de Maxwell entre placas paralelas

7.2.1. Base utilizada y fijación de gauge

Para comenzar, se expande en modos de Fourier el campo A_μ utilizando la expresión (3.47) de la forma

$$A_\mu(x_1, x_2, x_3) = \sum_k N e^{ikx_2} A_\mu(x_1, k)\,,\ \mu = 0, 1, 2, 3\,. \tag{7.1}$$

Considerando que se tiene la libertad de gauge $\overline{A}' \to \overline{A} + \nabla\chi$ y expandiendo χ en la misma base de ondas planas de la forma

$$\chi(x_1, x_2, x_3) = \sum_k N e^{ikx_2} \chi(x_1, k)\,, \tag{7.2}$$

se obtiene

$$A_1{}' = \sum_k N e^{ikx_2} \left[A_1(x_1, k) + \partial_1\chi(x_1, k)\right]\,, \tag{7.3}$$

$$A_2{}' = \sum_k N e^{ikx_2} \left[A_2(x_1, k) + ik\chi(x_1, k)\right]\,, \tag{7.4}$$

$$A_3{}' = \sum_k N e^{ikx_2} A_3(x_1, k)\hat{x}_3\,. \tag{7.5}$$

A partir de (7.4) puede fijarse el gauge de manera que se anule la componente de A_μ paralela a $\hat{k}$ sobre las placas. Con esta fijación se tiene que $A_2 = 0$ y por ende para el tensor $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ vale que

$$F_{2\nu} = \partial_2 A_\nu - \partial_\nu A_2 = ikA_\nu\,, \tag{7.6}$$

es decir, A_ν puede escribirse en función del invariante de gauge $F_{\mu\nu}$ sobre las placas.

7.2.2. Construcción del hamiltoniano y entropía

Para obtener la entropía se comienza a partir del lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3\overline{x}\left[(\dot{\overline{A}}(\overline{x}) + \nabla A_0(\overline{x}))^2 - (\nabla \times \overline{A}(\overline{x}))^2\right] \tag{7.7}$$

donde remplazando a partir de la ecuación (7.1) y utilizando la fijación de gauge propuesta $A_2 = 0$ se tiene

$$L = \sum_k \int_0^\infty dx_1 \mathcal{L}_k\,, \tag{7.8}$$

donde se usa la notación

$$\mathcal{L}_k = 1/2 \Big[\dot{A}_1^\dagger(x_1,k)\dot{A}_1(x_1,k) + \dot{A}_3^\dagger(x_1,k)\dot{A}_3(x_1,k) - k^2 A_1^\dagger(x_1,k)A_1(x_1,k)$$

$$-k^2 A_3^\dagger(x_1,k)A_3(x_1,k) - \partial_1 A_3^\dagger(x_1,k)\partial_1 A_3(x_1,k) - k^2 A_0^\dagger(x_1,k)A_0(x_1,k)$$

$$-\partial_1 A_0^\dagger(x_1,k)\partial_1 A_0(x_1,k) - A_0^\dagger(x_1,k)\partial_1 \dot{A}_1(x_1,k) - \partial_1 \dot{A}_1^\dagger(x_1,k)A_0(x_1,k)\Big] \,. \tag{7.9}$$

Es posible calcular los momentos canónicos conjugados de la forma

$$\pi_1 = \frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial \dot{A}_1} = \frac{\dot{A}_1^\dagger}{2} + \frac{\partial_1 A_0^\dagger}{2} \ , \ \pi_3 = \frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial \dot{A}_3} = \frac{\dot{A}_3^\dagger}{2} \tag{7.10}$$

$$\pi_1^\dagger = \frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial \dot{A}_1^\dagger} = \frac{\dot{A}_1}{2} + \frac{\partial_1 A_0}{2} \ , \ \pi_3^\dagger = \frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial \dot{A}_3^\dagger} = \frac{\dot{A}_3}{2} \tag{7.11}$$

y luego calcular el hamiltoniano correspondiente al lagrangiano (7.9) mediante la tranformada de Legendre

$$H = \sum_k \int_0^\infty dx_1 \mathcal{H}_k \,, \quad , \mathcal{H}_k = \pi_1 \dot{A}_1 + \pi_1^\dagger \dot{A}_1^\dagger + \pi_3 \dot{A}_3 + \pi_3^\dagger \dot{A}_3^\dagger - \mathcal{L}_k \,, \tag{7.12}$$

obteniéndose así en esquema canónico que vale

$$\mathcal{H}_k = 2\pi_1^\dagger \pi_1 + 2\pi_3^\dagger \pi_3 + \frac{k^2}{2} A_1^\dagger A_1 + \frac{k^2}{2} A_3^\dagger A_3 +$$

$$+ \frac{1}{2}\partial_1 A_3^\dagger \partial_1 A_3 + \frac{k^2}{2} A_0^\dagger A_0 + A_0^\dagger \partial_1 \pi_1^\dagger + A_0 \partial_1 \pi_1 \tag{7.13}$$

con las relaciones de conmutación

$$\big[A_1(x_1,k), \pi_1(x_1',k')\big] = \big[A_3(x_1,k), \pi_3(x_1',k')\big] = i\delta(x_1 - x_1')\delta_{kk'} \,. \tag{7.14}$$

Puede verse claramente en la ecuación (7.13) que el campo A_0 no posee dinámica y por ende puede ser trabajado como un multiplicador de Lagrange. Derivando se tienen los vínculos

$$\partial_1 \pi_1 = -\frac{k^2}{2} A_0^\dagger \ , \ \partial_1 \pi_1^\dagger = -\frac{k^2}{2} A_0 \,. \tag{7.15}$$

Remplazando (7.15) en (7.13) se tiene

$$\mathcal{H}_k = 2\pi_1^\dagger \pi_1 + 2\pi_3^\dagger \pi_3 + \frac{k^2}{2} A_1^\dagger A_1 + \frac{k^2}{2} A_3^\dagger A_3 +$$

$$+ \frac{1}{2}\partial_1 A_3^\dagger \partial_1 A_3 + \frac{2}{k^2}\partial_1 \pi_1 \partial_1 \pi_1^\dagger \tag{7.16}$$

entonces redefiniendo las variables

$$\phi_1 = \frac{\sqrt{2}\pi_1}{|k|}\,,\; P_1 = \frac{|k|A_1}{\sqrt{2}} \tag{7.17}$$

$$\phi_3 = \frac{A_3}{\sqrt{2}}\,,\; P_3 = \sqrt{2}\pi_3 \tag{7.18}$$

se tiene hamiltoniano correspondiente a dos campos escalares

$$\mathcal{H}_k = P_1^\dagger P_1 + P_3^\dagger P_3 + \partial_1\phi_1^\dagger\partial_1\phi_1 + \partial_1\phi_3^\dagger\partial_1\phi_3 + k^2\phi_1^\dagger\phi_1 + k^2\phi_3^\dagger\phi_3 \tag{7.19}$$

acompañado de las relaciones de conmutación canónicas

$$\left[\phi_1(x_1,k), P_1(x_1',k')\right] = \left[\phi_3(x_1,k), P_3(x_1',k')\right] = i\delta(x_1-x_1')\delta_{kk'}\,. \tag{7.20}$$

En resumen, la entropía del campo de Maxwell para la región comprendida entre dos placas paralelas infinitas equivale a la contribución de dos campos escalares independientes. Obteniéndose así, el mismo resultado que a partir de los campos $\overline{E}$ y $\overline{B}$ en el capítulo 5.

7.3. Entropía de entrelazamiento de un campo de Maxwell en una esfera

7.3.1. Base utilizada y fijación de gauge

Para trabajar el campo de Maxwell a partir del campo A_μ con simetría esférica se introduce nuevamente la expansión en armónicos esféricos escalares y vectoriales de la forma

$$A_0 = \sum_{lm} A^0_{lm}(r)Y_{lm}(\theta,\phi)\,, \tag{7.21}$$

$$\overline{A} = \sum_{slm} A^s_{lm}(r)\overline{Y}^s_{lm}(\theta,\phi)\,. \tag{7.22}$$

Además, dada la libertad de gauge correspondiente al campo de Maxwell $\overline{A}' \to \overline{A} + \nabla\chi$ se utiliza la expansión en armónicos esféricos escalares para la función χ a fijar

$$\chi = \sum_{lm} \chi_{lm}(r)Y_{lm}(\theta,\phi)\,. \tag{7.23}$$

Luego, calculando se tiene que

$$\nabla\chi = \sum_{lm} \chi_{lm}\nabla Y_{lm} + Y_{lm}\partial_r\chi_{lm}\hat{r} = \sum_{lm} \partial_r\chi_{lm}\overline{Y}^r_{lm} + \frac{\chi_{lm}}{r}\overline{Y}^e_{lm}\,, \tag{7.24}$$

o bien, de (7.24) en (7.22)

$$\overline{A}' = \sum_{lm} \left(A^r_{lm} + \partial_r\chi_{lm}\right)\overline{Y}^r_{lm} + \left(A^e_{lm} + \frac{\chi_{lm}}{r}\right)\overline{Y}^e_{lm} + A^m_{lm}\overline{Y}^m_{lm}\,. \tag{7.25}$$

En este contexto, es posible fijar χ_{lm} de manera que ${A'}^e_{lm}$ se anule para todo l y m obteniéndose así que

$$\overline{A}' = \sum_{lm} {A'}^r_{lm} \overline{Y}^r_{lm} + {A'}^m_{lm} \overline{Y}^m_{lm} \,. \tag{7.26}$$

Es importante ver que esta fijación permite escribir el campo A_μ en función de invariantes de gauge sobre la superficie de la esfera, en efecto:

$$F_{e\mu} = e^\nu \left(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu\right) = e^\nu \left(\partial_\nu A_\mu\right) - e^\nu \left(\partial_\mu A_\nu\right) =$$

$$= \left(e^\nu \partial_\nu\right) A_\mu - \partial_\mu \left(e^\nu A_\nu\right) + \left(\partial_\mu e^\nu\right) A_\nu = \left(e^\nu \partial_\nu\right) A_\mu + \left(\partial_\mu e^\nu\right) A_\nu \tag{7.27}$$

donde las contracciones $e^\nu A_\nu$ y $e^\nu \partial_\nu$ representan la componente del vector A_ν que se anula con la fijación de gauge y la derivada en la dirección electrica respectivamente. A diferencia de lo obtenido en el caso de placas paralelas en (7.6) la ecuación (7.27) presenta un término no local de la forma $\left(\partial_\mu e^\nu\right) A_\nu$ pero esto no es impedimento para futuros cálculos.

7.3.2. Construcción del hamiltoniano y Entropía

Una expresión útil para el lagrangiano puede ser construida remplazando (7.21) y (7.26) en (7.7) obteniéndose así de la ortonormalidad de los armónicos esféricos que

$$L = \sum_{lm} \int_0^\infty dr \mathcal{L}_{lm} \tag{7.28}$$

donde para $l \geq 1$ vale

$$\mathcal{L}_{lm} = 1/2 \Big[r^2 \dot{A}^r_{lm} \dot{A}^r_{lm} + r^2 \dot{A}^m_{lm} \dot{A}^m_{lm} - l(l+1) A^r_{lm} A^r_{lm} -$$

$$- l(l+1) A^m_{lm} A^m_{lm} - \left(A^m_{lm} + r \partial_r A^m_{lm}\right)^2 + r^2 \partial_r A^0_{lm} \partial_r A^0_{lm} +$$

$$+ l(l+1) A^0_{lm} A^0_{lm} - 2r^2 A^0_{lm} \partial_r \dot{A}^r_{lm} + 4r A^0_{lm} \dot{A}^r_{lm} \Big] \,. \tag{7.29}$$

A partir de aquí, derivando $\mathcal{L}_{lm}$ en funcion de las velocidades $\dot{A}^r_{lm}$ y $\dot{A}^m_{lm}$ se tienen los momentos canónicos conjugados asociados a cada una de ellas de la forma

$$\pi^r_{lm} = \frac{\partial \mathcal{L}_{lm}}{\partial \dot{A}^m_{lm}} = r^2 \left(\dot{A}^r_{lm} + \partial_r A_0\right) \,, \quad \pi^m_{lm} = \frac{\partial \mathcal{L}_{lm}}{\partial \dot{A}^m_{lm}} = r^2 \dot{A}^m_{lm} \,. \tag{7.30}$$

Trabajando en el esquema canónico se introduce la tranformada de Legendre

$$H = \sum_{lm} \int_0^\infty dr \mathcal{H}_{lm} \,, \quad \mathcal{H}_{lm} = \pi^r_{lm} \dot{A}^r_{lm} + \pi^m_{lm} \dot{A}^m_{lm} - \mathcal{L}_{lm} \,, \tag{7.31}$$

que permite obtener el hamiltoniano

$$\mathcal{H}_{lm} = \frac{\pi^r_{lm} \pi^r_{lm}}{2r^2} + \frac{\pi^m_{lm} \pi^m_{lm}}{2r^2} + l(l+1) A^r_{lm} A^r_{lm} + l(l+1) A^m_{lm} A^m_{lm} +$$

$$+ (A^m_{lm} + r\partial_r A^m_{lm})^2 - \pi^r_{lm}\partial_r A^0_{lm} - \frac{l(l+1)}{2} A^0_{lm} A^0_{lm} \tag{7.32}$$

con las relaciones de conmutación canónicas no triviales

$$\left[A^r_{lm}(r), \pi^r_{l'm'}(r')\right] = \left[A^m_{lm}(r), \pi^m_{l'm'}(r')\right] = i\delta(r-r')\delta_{ll'}\delta_{mm'} \,. \tag{7.33}$$

Nuevamente, observando que A^0_{lm} se comporta como multiplicador de Lagrange se obtiene el vínculo

$$\partial_r \pi^r_{lm} = l(l+1) A^0_{lm} \tag{7.34}$$

que puede ser facilmente remplazado en hamiltoniano (7.32) de manera que se tiene

$$\mathcal{H}_{lm} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi^r_{lm}\pi^r_{lm}}{r^2} + \frac{\partial_r \pi^r_{lm}\partial_r \pi^r_{lm}}{l(l+1)} + l(l+1)A^r_{lm}A^r_{lm}\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{\pi^r_{lm}\pi^r_{lm}}{r^2} + 2\left(A^m_{lm} + r\partial_r A^m_{lm}\right)^2 + l(l+1)A^m_{lm}A^m_{lm}\right] . \tag{7.35}$$

Por ende es posible redefinir las variables de la teoría de la forma

$$\phi^r_{lm} = \frac{\pi^r_{lm}}{\sqrt{l(l+1)}} \,,\; P^r_{lm} = \sqrt{l(l+1)} A^r_{lm} \tag{7.36}$$

$$\phi^m_{lm} = r A^r_{lm} \,,\; P^m_{lm} = \frac{\pi^m_{lm}}{r} \tag{7.37}$$

y utilizando (7.36) y (7.37) en (7.32) y (7.33) se reduce nuevamente el hamiltoniano (7.31) a el correspondiente a dos campos escalares libres , es decir

$$\mathcal{H}_{lm} = \frac{1}{2}\left[P^r_{lm}P^r_{lm} + \partial_r\phi^r_{lm}\partial_r\phi^r_{lm} + \frac{l(l+1)}{r^2}\phi^r_{lm}\phi^r_{lm}\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[P^m_{lm}P^m_{lm} + \partial_r\phi^m_{lm}\partial_r\phi^m_{lm} + \frac{l(l+1)}{r^2}\phi^m_{lm}\phi^m_{lm}\right] , \tag{7.38}$$

con las relaciones de conmutación canónicas dadas de la forma

$$\left[\phi^r_{lm}(r), P^r_{l'm'}(r')\right] = \left[\phi^m_{lm}(r), P^m_{l'm'}(r')\right] = i\delta(r-r')\delta_{ll'}\delta_{mm'} \,. \tag{7.39}$$

Sin embargo el lagrangiano (7.29) no incluye el modo de momemento angular cero dado que los armónicos vectoriales eléctricos y magnéticos no están definidos para dicho caso. Realizando el procedimiento análogo solo con el armónico esférico vectorial radial el hamiltoniano equivalente a (7.32) para $l = 0$ se escribe como

$$\mathcal{H}_{l=0} = \frac{\pi^r_0\pi^r_0}{2r^2} + A^0_0\partial_r\pi^r_0 \,, \tag{7.40}$$

de manera que derivando en A^0_0 se tiene el vínculo $\partial_r\pi^r_{l=0} = 0$, o bien, el hamiltoniano

$$\mathcal{H}_{l=0} = \frac{\pi^r_0\pi^r_0}{2r^2} \,, \tag{7.41}$$

implicando que el modo de momento angular cero, al no tener dinámica propia, no genera aportes a la entropía.

Para concluir, nuevamente se recuperan los resultados del capítulo 5 . En este caso la entropía del campo de Maxwell será equivalente a a de dos campos escalares libres sin el modo de momento angular cero ($l = 0$). Además, el coeficiente logarítmico será el mismo al obtenido y discutido en (5.42).

7.4. Entropía de entrelazamiento de gravitones linealizados entre placas paralelas

7.4.1. Base utilizada y fijación de gauge

Una vez verificado el método de trabajo para el campo de Maxwell, se introduce el cálculo de la entropía de entrelazamiento de gravitones linealizados entre placas paralelas. Para esto recurrimos nuevamente a la base de ondas planas (3.47), siendo válido que

$$h_{\mu\nu}(x_1, x_2, x_3) = \sum_k N e^{ikx_2} h_{\mu\nu}(x_1, k)\,. \tag{7.42}$$

Fue mencionado que para la Gravedad Linealizada las transformaciones de Gauge, provenientes de cambios de coordenadas se escriben sobre $h_{\mu\nu}$ a partir de (6.21) como

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \partial_\nu \xi_\mu + \partial_\mu \xi_\nu\,. \tag{7.43}$$

A su vez aplicando la descomposición (7.42) sobre la función arbitraria ξ de la forma

$$\xi_\mu(x_1, x_2, x_3) = \sum_k N e^{ikx_2} \xi_\mu(x_1, k) \tag{7.44}$$

se tiene que

$$\partial_0 \xi_\mu(x_1, x_2, x_3) = \dot{\xi_\mu}(x_1, x_2, x_3) \tag{7.45}$$

$$\partial_1 \xi_\mu(x_1, x_2, x_3) = \sum_k N e^{ikx_2} \partial_1 \xi_\mu(x_1, k) \tag{7.46}$$

$$\partial_2 \xi_\mu(x_1, x_2, x_3) = \sum_k iNk e^{ikx_2} \xi_\mu(x_1, k) \tag{7.47}$$

$$\partial_3 \xi_\mu(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{7.48}$$

Combinando las ecuaciones (7.42), (7.43), (7.44), (7.45), (7.46), (7.47) y (7.48) se observa claramente que

$$h'_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} h_{00} + 2\dot{\xi_0} & h_{01} + \dot{\xi_1} + \partial_1\xi_0 & h_{02} + \dot{\xi_2} + ik\xi_0 & h_{03} + \dot{\xi_3} \\ h_{01} + \dot{\xi_1} + \partial_1\xi_0 & h_{11} + 2\partial_1\xi_1 & h_{12} + \partial_1\xi_2 + ik\xi_2 & h_{13} + \partial_1\xi_3 \\ h_{02} + \dot{\xi_2} + ik\xi_0 & h_{12} + \partial_1\xi_2 + ik\xi_2 & h_{22} + 2ik\xi_2 & h_{23} + ik\xi_3 \\ h_{03} + \dot{\xi_3} & h_{13} + \partial_1\xi_3 & h_{23} + ik\xi_3 & h_{33} \end{bmatrix} \tag{7.49}$$

Donde es posible ver que es válido anular las componentes h'_{02}, h'_{20}, h'_{12}, h'_{21}, h'_{22}, h'_{23}, y h'_{32} anular si fijamos todas las libertades de gauge. Es decir, pueden hacerse cero todas las componentes del tensor $h'_{\mu\nu}$ cuya contracción de un índice en la dirección paralela a $\hat{k}$ sea no nula. Entonces, al trabajar el caso sin fuentes se espera ver que el tensor resultante sea simétrico y de la forma

$$h_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} h'_{00} & h'_{01} & 0 & h'_{03} \\ h'_{10} & h'_{11} & 0 & h'_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ h'_{00} & h'_{31} & 0 & h'_{33} \end{bmatrix} . \tag{7.50}$$

Por otra parte, a partir del tensor de Riemann, utilizando (6.9) se obtiene que

$$2R_{2\mu 2\nu} = h_{\nu 2,\mu 2} + h_{2\mu,2\nu} - h_{\nu\mu,22} - h_{22,\mu\nu} = -h_{\nu\mu,22} = k^2 h_{\nu\mu} \tag{7.51}$$

es decir que, bajo la fijación de gauge realizada, es posible escribir $h_{\nu\mu}$ a partir del tensor de Riemann (invariante de gauge) sobre las placas. Esto nos dice que el álgebra de los $h_{\nu\mu}$ con el gauge fijado entre las placas coincide con el álgebra de los $R_{\nu\mu}$ entre las placas.

7.4.2. Lagrangiano

Es posible escribir el Lagrangiano de un campo gravitatorio linealizado libre sin fuentes a partir de (6.15) como

$$\mathcal{L} = -\partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\alpha h^\alpha{}_\nu + \frac{1}{2}\partial^\alpha h_{\mu\nu}\partial_\alpha h^{\mu\nu} + \partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\nu h^\alpha{}_\alpha - \frac{1}{2}\partial_\alpha h^\mu{}_\mu \partial^\alpha h^\nu{}_\nu \,. \tag{7.52}$$

Separando las componentes espaciales de las temporales, bajando todos los índices e integrando por partes se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = 1/2(\dot{h_{ij}}\dot{h_{ij}} - \dot{h_{ii}}\dot{h_{jj}}) - 1/2(\partial_n h_{ij}\partial_n h_{ij} - \partial_n h_{ii}\partial_n h_{jj}) - 1/2(\partial_n h_{00}\partial_n h_{jj} + \partial_n h_{jj}\partial_n h_{00}) \\ -(\dot{h_{0i}}\partial_n h_{ni} + \partial_n h_{ni}\dot{h_{0i}}) + (\dot{h_{0i}}\partial_i h_{nn} + \partial_i h_{nn}\dot{h_{0i}}) + \partial_j h_{ij}\partial_n h_{in} - \partial_j h_{oj}\partial_n h_{0n} + \\ + \partial_n h_{oi}\partial_n h_{0i} - \partial_j h_{ij}\partial_i h_{nn} + \partial_j h_{ij}\partial_i h_{00} \,. \end{aligned} \tag{7.53}$$

Trabajando (7.53) en la base de ondas planas como en (7.42) bajo la elección de Gauge permitida por (7.50) se obtiene el lagrangiano para cada k fijo de la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k = \dot{h_{13}}\dot{h_{13}}^\dagger - \frac{1}{2}(\dot{h_{11}}\dot{h_{33}}^\dagger + \dot{h_{33}}\dot{h_{11}}^\dagger) - k^2 h_{13}h_{13}^\dagger + \frac{k^2}{2}(h_{11}h_{33}^\dagger + h_{33}h_{11}^\dagger) \\ -\frac{k^2}{2}h_{00}(h_{11}^\dagger + h_{33}^\dagger) - \frac{k^2}{2}(h_{11}+h_{33})h_{00}^\dagger - h_{01}\partial_1\dot{h_{33}}^\dagger - \partial_1\dot{h_{33}}h_{01}^\dagger + h_{03}\partial_1\dot{h_{13}}^\dagger + \\ + \partial_1\dot{h_{13}}h_{03}^\dagger + k^2 h_{03}h_{03}^\dagger + k^2 h_{01}h_{01}^\dagger + \partial_1 h_{03}\partial_1 h_{03}^\dagger - \frac{1}{2}\partial_1 h_{33}\partial_1 h_{00}^\dagger - \frac{1}{2}\partial_1 h_{00}\partial_1 h_{33}^\dagger \end{aligned} \tag{7.54}$$

donde para recuperar el lagrangiano total es válido que

$$L = \sum_k \int_0^\infty dx_1 \mathcal{L}_k \tag{7.55}$$

Es claro que podemos separar el lagrangiano (7.54) obtenido en dos modos, uno que contenga el campo h_{13} y el multiplicador de Lagrange h_{03}

$$\mathcal{L}_I = \dot{h_{13}}\dot{h_{13}}^\dagger - k^2 h_{13}{h_{13}}^\dagger - \partial_1 h_{03}\dot{h_{13}}^\dagger - \dot{h_{13}}\partial_1 h_{03}^\dagger + k^2 h_{03}h_{03}^\dagger + \partial_1 h_{03}\partial_1 h_{03}^\dagger \tag{7.56}$$

y otro con los campos h_{11} y h_{33} y los multiplicadores h_{01} y h_{00}

$$\mathcal{L}_{II} = -\frac{1}{2}(\dot{h_{11}}\dot{h_{33}}^\dagger + \dot{h_{33}}\dot{h_{11}}^\dagger) + \frac{k^2}{2}(h_{11}{h_{33}}^\dagger + h_{33}{h_{11}}^\dagger) - \frac{k^2}{2}h_{00}({h_{11}}^\dagger + {h_{33}}^\dagger) - \frac{k^2}{2}(h_{11}+h_{33})h_{00}^\dagger +$$

$$+ \partial_1 h_{01}\dot{h_{33}}^\dagger + \dot{h_{33}}\partial_1 h_{01}^\dagger + k^2 h_{01}h_{01}^\dagger - \frac{1}{2}\partial_1 h_{33}\partial_1 h_{00}^\dagger - \frac{1}{2}\partial_1 h_{00}\partial_1 h_{33}^\dagger \tag{7.57}$$

donde la ecuación (7.55) se transforma en

$$L = \sum_k \int_0^\infty dx_1 \left(\mathcal{L}_I + \mathcal{L}_{II}\right) \tag{7.58}$$

A continuación para facilitar el manejo de las ecuaciones se trabajará en el esquema canónico el hamiltoniano correspondiente a cada modo por separado.

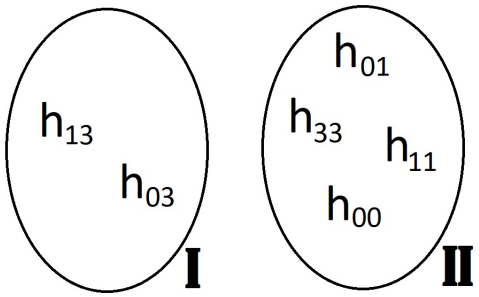


Figura 7.1: Esquema de dos modos que pueden verse en $\mathcal{L}_k$

7.4.3. Hamiltoniano del modo I

Es posible calcular los momentos canónicos π_{13} y $\pi_{13}^\dagger$ derivando el lagrangiano (7.56) en función de las velocidades $\dot{h_{13}}$ y $\dot{h_{13}}^\dagger$ respectivamente de la forma

$$\pi_{13} = \frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial \dot{h_{13}}} = \dot{h_{13}}^\dagger - \partial_1 h_{03}^\dagger \quad , \quad \pi_{13}^\dagger = \frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial \dot{h_{13}}^\dagger} = \dot{h_{13}} - \partial_1 h_{03}\,. \tag{7.59}$$

Además, es correcto obtener hamiltoniano $\mathcal{H}_I$ correspondiente a (7.56) a partir de la transformada de Legendre

$$H_I = \sum_k \int_0^\infty dx_1 \mathcal{H}_I \quad , \quad \mathcal{H}_I = \pi_{13}\dot{h_{13}} + \pi_{13}^\dagger \dot{h_{13}}^\dagger - \mathcal{L}_I \tag{7.60}$$

donde remplazando (7.56) y (7.59) vale que

$$\mathcal{H}_I = \pi_{13}\pi_{13}^\dagger + k^2 h_{13}{h_{13}}^\dagger - h_{03}\partial_1\pi_{13} - h_{03}^\dagger\partial_1\pi_{13}^\dagger - k^2 h_{03}h_{03}^\dagger \,. \tag{7.61}$$

Puede observarse fácilmente en (7.61) que el campo h_{03} no posee dinámica propia. Tomando al campo mencionado y trabajandolo como multiplicador de Lagrange se derivan las expresiones

$$h_{03} = \frac{\partial_1\pi_{13}^\dagger}{k^2} \quad , \quad h_{03}^\dagger = \frac{\partial_1\pi_{13}}{k^2} \,, \tag{7.62}$$

que pueden ser utilizadas en (7.61) para obtener

$$\mathcal{H}_I = \pi_{13}\pi_{13}^\dagger + k^2 h_{13}{h_{13}}^\dagger + \frac{\partial_1\pi_{13}\partial_1\pi_{13}^\dagger}{k^2} \,. \tag{7.63}$$

Para este caso, si se desea reescribir el hamiltoniano (7.63) como un campo escalar, es de utilidad introducir los remplazos

$$\phi_I = \frac{\pi_{13}}{|k|} \quad , \quad P_I = |k|h_{13} \tag{7.64}$$

$$\phi_I^\dagger = \frac{\pi_{13}^\dagger}{|k|} \quad , \quad P_I^\dagger = |k|h_{13}^\dagger \tag{7.65}$$

reduciéndose así (7.63), por la sustitucion de (7.64) y (7.65), a la forma

$$\mathcal{H}_I = P_1P_1^\dagger + k^2\phi_1{\phi_1}^\dagger + \partial_1\phi_1\partial_1\phi_1^\dagger \,. \tag{7.66}$$

Además, en el marco del esquema canónico, es claro que son válidas la relaciones de conmutación canónicas

$$\left[h_{13}(x_1,k), \pi_{13}(x_1',k')\right] = \left[h_{13}^\dagger(x_1,k), \pi_{13}^\dagger(x_1',k')\right] = i\delta(x_1-x_1')\delta_{kk'} \tag{7.67}$$

y por ende remplazando las definiciones (7.64) y (7.65) en (7.67) se recupera

$$\left[\phi_1(x_1,k), P_1(x_1',k')\right] = \left[\phi_1^\dagger(x_1,k), P_1^\dagger(x_1',k')\right] = i\delta(x_1-x_1')\delta_{kk'} \,. \tag{7.68}$$

7.4.4. Hamiltoniano del modo II

Analizando la dinámica h_{00} y $h_{00}^\dagger$ en (7.57) es evidente que ambos pueden ser considerados multiplicadores de Lagrange dando origen a las ecuaciones

$$\partial_1\partial_1 h_{33} = k^2(h_{11}+h_{33}) \quad , \quad \partial_1\partial_1 h_{33}^\dagger = k^2({h_{11}}^\dagger + {h_{33}}^\dagger) \,. \tag{7.69}$$

Remplazando (7.69) en (7.57) se tiene

$$\mathcal{L}_{II} = \dot{h_{33}}\dot{h_{33}}^{\dagger} - k^2 h_{33}h_{33}^{\dagger} + \frac{\partial_1 \dot{h_{33}}\partial_1 \dot{h_{33}}^{\dagger}}{k^2} -$$

$$- \partial_1 h_{33}\partial_1 h_{33}^{\dagger} - h_{01}\partial_1 \dot{h_{33}}^{\dagger} - \partial_1 \dot{h_{33}} h_{01}^{\dagger} + k^2 h_{01}h_{01}^{\dagger}\,. \tag{7.70}$$

Es interesante ver que la sustitución produjo la aparición del término de alta derivada $k^{-2}\partial_1 \dot{h_{33}}\partial_1 \dot{h_{33}}^{\dagger}$. Sin embargo se destaca que es posible eliminar dicha complicación mediante el remplazo de las ecuaciones de movimiento de los multiplicadores de Lagrange h_{01} y $h_{01}^{\dagger}$ en el lagrangiano. Estas son:

$$h_{01} = \frac{\partial_1 \dot{h_{33}}}{k^2} \quad , \quad h_{01}^{\dagger} = \frac{\partial_1 \dot{h_{33}}^{\dagger}}{k^2}\,, \tag{7.71}$$

en efecto, utilizando (7.71) en (7.70) se tiene

$$\mathcal{L}_{II} = \dot{h_{33}}\dot{h_{33}}^{\dagger} - k^2 h_{33}h_{33}^{\dagger} - \partial_1 h_{33}\partial_1 h_{33}^{\dagger}\,. \tag{7.72}$$

Trabajando en el marco del esquema canónico observamos que los momentos correspondientes al lagrangiano (7.72) son

$$\pi_{33} = \frac{\partial \mathcal{L}_{II}}{\partial \dot{h_{33}}} = \dot{h_{33}}^{\dagger} \quad , \quad \pi_{33}^{\dagger} = \frac{\partial \mathcal{L}_{II}}{\partial \dot{h_{33}}^{\dagger}} = \dot{h_{33}}\,. \tag{7.73}$$

Luego, es posible que calcular el hamiltoniano usando la transformación de Legendre

$$H_{II} = \sum_k \int_0^{\infty} dx_1 \mathcal{H}_{II} \quad , \quad \mathcal{H}_{II} = \pi_{33}\dot{h_{33}} + \pi_{33}^{\dagger}\dot{h_{33}}^{\dagger} - \mathcal{L}_{II} \tag{7.74}$$

de manera que se tiene el hamiltoniano de campo escalar

$$\mathcal{H}_{II} = \pi_{33}\pi_{33}^{\dagger} + k^2 h_{33}h_{33}^{\dagger} + \partial_1 h_{33}\partial_1 h_{33}^{\dagger} \tag{7.75}$$

que realizando el cambio de notación

$$\phi_{II} = h_{33} \quad , \quad P_{II} = \pi_{13} \tag{7.76}$$

$$\phi_{II}^{\dagger} = h_{33}^{\dagger} \quad , \quad P_{II}^{\dagger} = \pi_{13}^{\dagger} \tag{7.77}$$

se escribe de la forma analoga a (7.66) como

$$\mathcal{H}_{II} = P_{II}P_{II}^{\dagger} + k^2 \phi_{II}\phi_{II}^{\dagger} + \partial_1 \phi_{II}\partial_1 \phi_{II}^{\dagger}\,. \tag{7.78}$$

Análogamente al modo anterior es claro que son válidas la relaciones de conmutación canónicas dadas por

$$[h_{33}(x_1,k), \pi_{33}(y)] = \left[h_{33}^{\dagger}(x_1,k), \pi_{33}^{\dagger}(x_1',k')\right] = i\delta(x_1 - x_1')\delta_{kk'} \tag{7.79}$$

luego remplazando las definiciones (7.76) y (7.77) en (7.79) y (7.80) se tiene

$$\left[\phi_{II}(x_1,k), P_{II}(x_1',k')\right] = \left[\phi_{II}^{\dagger}(x_1,k), P_{II}^{\dagger}(x_1',k')\right] = i\delta(x_1 - x_1')\delta_{kk'} \tag{7.80}$$

7.4.5. Hamiltoniano Total y entropía

En base a las ecuaciones (7.60), (7.66), (7.74) y (7.78) se tiene para $H = H_I + H_{II}$ que

$$H = \sum_k \int_0^\infty dx_1 \left(\mathcal{H}_I + \mathcal{H}_{II}\right) = \sum_k \int_0^\infty dx_1 \Big(P_I P_I^\dagger + P_{II} P_{II}^\dagger$$

$$+k^2 \phi_I {\phi_I}^\dagger + k^2 \phi_{II} {\phi_{II}}^\dagger + \partial_1 \phi_I \partial_1 \phi_I^\dagger + \partial_1 \phi_{II} \partial_1 \phi_{II}^\dagger \Big) \tag{7.81}$$

y a partir de (7.68) y (7.80) para $i = I, II$ y $j = I, II$ es posible deducir las relaciones de conmutación

$$\left[\phi_i(x_1, k), \phi_j(x_1', k')\right] = 0 \tag{7.82}$$

$$\left[P_i(x_1, k), P_j(x_1', k')\right] = 0 \tag{7.83}$$

$$\left[\phi_i(x_1, k), P_j(x_1', k')\right] = i\delta(x_1 - x_1')\delta_{ij}\delta_{kk'} \tag{7.84}$$

Es decir, se tiene el hamiltoniano (7.81) de dos campos escalares ϕ_I y ϕ_{II} independientes con relaciones de conmutación canónicas (7.82), (7.83) y (7.84).

En este marco es posible concluir que la entropía de entrelazamiento del campo de un gravitón linealizado entre placas paralelas puede ser calculada como la entropía de dos campos escalares, es decir, la entrpia será igual a la de un campo de Maxwell. Formalmente

$$S^{LG}(L) = S^M(L) = 2S^S(L)\,, \tag{7.85}$$

donde L es la separación entre las placas y S^{LG}, S^M y S^{LG} son las entropías asociadas al campo gravitatorio lineal, el de Maxwell y el escalar respectivamente. Bajo este contexto, se destaca también que los coeficientes universales serán los mismos en los tres casos.

7.5. Entropía de entrelazamiento de gravitones linealizados en una esfera

7.5.1. Armónicos esféricos tensoriales

Los armónicos esféricos tensoriales [37, 38] son una generalización del concepto de los armónicos esféricos escalares y vectoriales que pueden utilizarse como base de el espacio de tensores simétricos de dimensión seis. Es decir para un tensor arbitrario X vale

$$X = \sum_{Jslm} X_{lm}^{Js}(r) T_{lm}^{Js} \tag{7.86}$$

donde $Js = 0l, 0t, 1e, 1m, 2e, 2m$, $l = 0, \pm 1, \pm 2, ... \pm \infty$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, ... \pm l$ y los armónicos esféricos tensoriales T_{lm}^{Js} vienen dados por

$$T^{0l}_{lm} = \hat{r} \otimes \hat{r} Y_{lm} \,, \;\; T^{0t}_{lm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\delta - \hat{r} \otimes \hat{r} \right) Y_{lm} \,, \tag{7.87}$$

$$T^{1e}_{lm} = \sqrt{\frac{2}{l(l+1)}} r \left[\hat{r} \otimes \nabla Y_{lm} \right]^S \,, \;\; T^{1m}_{lm} = \sqrt{\frac{2}{l(l+1)}} \left[\hat{r} \otimes \overline{r} \times \nabla Y_{lm} \right]^S \,, \tag{7.88}$$

$$T^{2e}_{lm} = \sqrt{2\frac{(l-2)!}{(l+2)!}} \left[r^2 \nabla \nabla Y_{lm} \right]^{STT} \,, \;\; T^{2m}_{lm} = \sqrt{2\frac{(l-2)!}{(l+2)!}} \left[r \nabla \left(\overline{r} \times \nabla Y_{lm} \right) \right]^{STT} \,. \tag{7.89}$$

Es importante que destacar que los armónicos esféricos de spin 0 están definidos para $l \geq 0$, los de spin 1 para $l \geq 1$ y los de spin 2 para $l \geq 2$. Además los subíndices S hacen referencia a la parte simétrica y TT a la parte trasversal a versor $\hat{r}$ sin traza tomada para un tensor arbitrario X_{ij} de la forma

$$X^{TT}_{ij} = \left(\delta_{ik} - \hat{r}_i \hat{r}_k \right) \left(\delta_{jn} - \hat{r}_j \hat{r}_n \right) X_{kn} - \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \hat{r}_i \hat{r}_j \right) \left[\left(\delta_{kn} - \hat{r}_k \hat{r}_n \right) X_{nk} \right] \,. \tag{7.90}$$

Además, así definidos, los armónicos esféricos tensoriales son ortonormales entre sí, en otras palabras,

$$\int Tr \left(T^{JS}_{lm} T^{*J'S"}_{l'm'} \right) d\Omega = \delta J J' \delta s s' \delta l l' \delta m m' \tag{7.91}$$

donde $T^{*JS}_{lm} = (-1)^m T^{JS}_{l-m}$ es el complejo conjugado.

Por otro lado, los armónicos esféricos tensoriales pueden escribirse en función de los vectoriales a partir de las expresiones

$$T^{0l}_{lm} = \left[\hat{r} \otimes \overline{Y}^r_{lm} \right]^S \quad , \quad T^{0t}_{lm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\delta Y_{lm} - \hat{r} \otimes \overline{Y}^r_{lm} \right) \,, \tag{7.92}$$

$$T^{1e}_{lm} = \sqrt{2} \left[\hat{r} \otimes \overline{Y}^e_{lm} \right]^S \quad , \quad T^{1m}_{lm} = c_1 \left[\hat{r} \otimes \overline{Y}^m_{lm} \right]^S \,, \tag{7.93}$$

$$T^{2e}_{lm} = c_2 \left[r^2 \nabla \frac{1}{r} \overline{Y}^e_{lm} \right]^{STT} \quad , \quad T^{2m}_{lm} = c_2 \left[r \nabla \overline{Y}^m_{lm} \right]^{STT} \,, \tag{7.94}$$

donde vale que $c_0 = 1/\sqrt{2}$, $c_1 = \sqrt{2}$ y $c_2 = \sqrt{2/(l-1)(l+2)}$. Además, trabajando (7.94) a partir de (7.90) se tiene

$$T^{2e}_{lm} = c_2 \left\{ \left[r \nabla \overline{Y}^e_{lm} \right]^S + \frac{1}{\sqrt{2}} T^{1e}_{lm} + \sqrt{\frac{l(l+1)}{2}} T^{0t}_{lm} \right\} \,, \tag{7.95}$$

$$T^{2m}_{lm} = c_2 \left\{ \left[r \nabla \overline{Y}^m_{lm} \right]^S + \frac{1}{\sqrt{2}} T^{1m}_{lm} \right\} \,. \tag{7.96}$$

7.5.2. Descomposición del problema

Para trabajar de forma mas sencilla el problema cuando se tiene simetría esférica en el problema es util descomponer el campo $h_{\mu\nu}$ y el gauge ξ_μ en diferentes tensores, vectores y escalares . En este marco se introduce la notacion:

$$h_E = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \ , \ h_T = \begin{bmatrix} h_{01} \\ h_{02} \\ h_{03} \end{bmatrix} \ , \ h_0 = h_{00} \ , \ \xi_E = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} \ , \ \xi_T = \xi_0 \, . \tag{7.97}$$

Primero se trabajará la parte espacial del problema para lo que expandiremos h_E en armónicos esféricos tensoriales y e ξ_E en armónicos vectoriales. Luego se estudiará las componentes temporales h_T y el gauge ξ_T expandiendo dichas variables de forma vectorial y escalar respectivamente.

7.5.3. Fijación de gauge para la parte espacial

Como ya fue mencionado, expandiremos h_E y ξ_E a partir de (7.86) y (5.15) de la forma

$$h_E = \sum_{Jslm} h^{Js}_{lm}(r) T^{Js}_{lm} \quad , \quad \xi_E = \sum_{slm} \xi^s_{lm}(r) \overline{Y}^s_{\ lm} \, . \tag{7.98}$$

Por otro lado, a libertad de gauge de este problema viene dada por (6.21) y (7.43), o bien matricialmente

$$h'_E = h_E + \nabla \xi_E + \left[\nabla \xi_E\right]^T = h_E + 2 \left[\nabla \xi_E\right]^S \, . \tag{7.99}$$

Combinando (7.98) y (7.99) se tiene

$$h'_E = \sum_{Jslm} h^{Js}_{lm}(r) T^{Js}_{lm} + 2 \sum_{slm} \left[\xi^s_{lm} \nabla \overline{Y}^s_{\ lm} + \overline{Y}^s_{\ lm} \otimes \partial_r \xi^s_{lm} \hat{r} \right]^S \tag{7.100}$$

donde se utiliza que

$$\nabla \xi_E = \sum_{slm} \nabla \left(\xi^s_{lm} \overline{Y}^s_{\ lm} \right) = \sum_{slm} \xi^s_{lm} \nabla \overline{Y}^s_{\ lm} + \overline{Y}^s_{\ lm} \otimes \partial_r \xi^s_{lm} \hat{r} \, . \tag{7.101}$$

Calculando $\xi^s_{lm} \nabla \overline{Y}^s_{\ lm} + \overline{Y}^s_{\ lm} \otimes \partial_r \xi^s_{lm} \hat{r}$ a partir de las propiedades de los armónicos esféricos vectoriales (Ver anexo B.1) para cada $s = r$, e, m por separado y sumando sobre dicho índice se tiene

$$\begin{aligned} \sum_s \left[\xi^s_{lm} \nabla \overline{Y}^s_{\ lm} + \overline{Y}^s_{\ lm} \otimes \partial_r \xi^s_{lm} \hat{r} \right]^S &= \frac{\xi^r_{lm}}{r} \left(\delta - \hat{r} \otimes \hat{r} \right) Y_{lm} + \\ + \partial_r \xi^r_{lm} \left[\hat{r} \otimes \overline{Y}^r_{\ lm} \right] + \left(\sqrt{l(l+1)} \frac{\xi^r_{lm}}{r} + \partial_r \xi^e_{lm} \right) \left[\hat{r} \otimes \overline{Y}^e_{\ lm} \right]^S + \\ + \partial_r \xi^m_{lm} \left[\hat{r} \otimes \overline{Y}^m_{\ lm} \right]^S + \frac{\xi^e_{lm}}{r} \left[r \nabla \overline{Y}^e_{\ lm} \right]^S + \frac{\xi^m_{lm}}{r} \left[r \nabla \overline{Y}^m_{\ lm} \right]^S \, . \end{aligned} \tag{7.102}$$

A su vez remplazando (7.92), (7.93), (7.95) y (7.96) en (7.102) y recontruyendo la ecuación (7.100) se tiene que

$$h'_E = \sum_{lm} \left(h^{0l}_{lm} + 2\partial_r \xi^r_{lm}\right) T^{0l}_{lm} + \left(h^{0t}_{lm} + \frac{2\sqrt{2}}{r}\xi^r_{lm} - \frac{\sqrt{2l(l+1)}}{r}\xi^e_{lm}\right) T^{0t}_{lm} +$$

$$+ \left(h^{1e}_{lm} + \frac{\sqrt{2l(l+1)}}{r}\xi^r_{lm} + \sqrt{2}\partial_r \xi^e_{lm} - \frac{\sqrt{2}}{r}\xi^e_{lm}\right) T^{1e}_{lm} + \left(h^{1m}_{lm} + \sqrt{2}\partial_r \xi^m_{lm} - \frac{\sqrt{2}}{r}\xi^m_{lm}\right) T^{1m}_{lm}$$

$$+ \left(h^{2e}_{lm} + \frac{\sqrt{2(l-1)(l+2)}}{r}\xi^e_{lm}\right) T^{2e}_{lm} + \left(h^{2m}_{lm} + \frac{\sqrt{2(l-1)(l+2)}}{r}\xi^m_{lm}\right) T^{2m}_{lm} \,. \quad (7.103)$$

En este caso, a diferencia de los anteriores estudiados, pueden verse fácilmente varias fijaciones de gauge posibles, sin embargo, no todas nos permitirán calcular la entropía de entrelazamiento correspondiente a la esfera. Más específicamente, puede verse que

- La fijación de ξ_r nos permite anular las componente que acompañan T^{0t}_{lm} o T^{1e}_{lm} o una combinación lineal de los mismos.
- La fijación de ξ_e nos permite anular las componente que acompañan T^{0t}_{lm} o T^{2e}_{lm} o una combinación lineal de los mismos.
- La fijación de ξ_m nos permite anular las componente que acompañan a T^{2m}_{lm}.

Para empezar, se utiliza libertad asociada a ξ_m para anular las componentes 'eléctricas-magnéticas' es decir se toma $h'^{2m}_{lm} = 0$ para todo l y m. Como la fijación para ξ_r y ξ_e no es sencilla de visualizar se fijarán a cero distintas combinaciones lineales de T^{0t}_{lm}, T^{1e}_{lm} y T^{2e}_{lm} de manera que solo se conserve un grado de libertad h^{te}_{lm} también asociado a una combinación lineal de los mismos dada por coeficientes a determinar. Formalmente:

$$h'_E = \sum_{lm} h'^{0l}_{lm} T^{0l}_{lm} + h^{te}_{lm} \left(\alpha T^{0t}_{lm} + \beta T^{1e}_{lm} + \gamma T^{2e}_{lm}\right) + h'^{1m}_{lm} T^{1m}_{lm} \quad (7.104)$$

donde α, β y γ son las constantes que depende de la fijación de ξ_r y ξ_e.

7.5.4. Fijación de gauge para la parte temporal

También, es necesario fijar el gauge asociado a la parte temporal. Para esto se expandirá el vector h_T y el escalar ξ_T de la forma:

$$h_T = \sum_{slm} h^{0s}_{lm}(r) \overline{Y}^s_{lm} \quad , \quad \xi_0 = \sum_{lm} \xi^0_{lm}(r) Y_{lm} \,. \quad (7.105)$$

Además a partir de (7.43) tenemos para cada componente de h_T vale que $h'_{0i} = h_{0i} + \partial_0 \xi_i + \partial_i \xi_0$ o de forma matricial

$$h'_T = h_T + \dot{\xi}_E + \nabla \xi_0 \,, \quad (7.106)$$

donde el gradiente de ξ_0 viene dado a partir de (7.105) como

$$\nabla\xi_0 = \sum_{lm} \xi^0_{lm} \nabla Y_{lm} + Y_{lm}\partial_r \xi^0_{lm}\hat{r} = \sum_{lm} \partial_r \xi^0_{lm} \overline{Y}^r_{lm} + \frac{\xi^0_{lm}}{r}\overline{Y}^e_{lm}\,. \tag{7.107}$$

Remplazando (7.105) y (7.107) en (7.106) se obtiene que

$$h'_T = \sum_{lm} \left(h^{0r}_{lm} + \dot{\xi}^r_{lm} + \partial_r \xi^0_{lm}\right)\overline{Y}^r_{lm} + \left(h^{0e}_{lm} + \dot{\xi}^e_{lm} + \frac{\xi^0_{lm}}{r}\right)\overline{Y}^e_{lm} + \left(h^{0m}_{lm} + \dot{\xi}^m_{lm}\right)\overline{Y}^m_{lm}\,. \tag{7.108}$$

Entonces, de manera análoga al campo de Maxwell podemos fijar ξ_0 de manera que h'^{0e}_{lm} se anule para todo l y m valiendo así que

$$h'_T = \sum_{lm} h'^{0r}_{lm}\overline{Y}^r_{lm} + h'^{0m}_{lm}\overline{Y}^m_{lm}\,. \tag{7.109}$$

7.5.5. Construcción del lagrangiano

Como se obtuvo en el caso del gravitón linealizado entre placas paralelas, el lagrangiano que describe el campo puede escribirse con sus componentes espaciales y temporales separadas a partir de (7.53). Utilizando la descomposición del tensor $h_{\mu\nu}$ dada en (7.97) e integrando por partes y reagrupando se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\dot{h_E}\cdot\cdot\dot{h_E} - Tr\left(\dot{h_E}\right)Tr\left(\dot{h_E}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(\nabla^2 h_E \cdot\cdot h_E + \nabla Tr\left(h_E\right)\cdot\nabla Tr\left(h_E\right)\right) - \\ + \left(\nabla\cdot h_E\right)\cdot\left[\left(\nabla\cdot h_E\right) - \nabla Tr\left(h_E\right)\right] + \nabla h_{00}\left[\left(\nabla\cdot h_E\right) - \nabla Tr\left(h_E\right)\right] - \\ - 2\dot{h_T}\cdot\left[\left(\nabla\cdot h_E\right) - \nabla Tr\left(h_E\right)\right] - \left(\nabla\cdot h_T\right)\cdot\left(\nabla\cdot h_T\right) - \nabla^2 h_T\cdot h_T\end{aligned} \tag{7.110}$$

donde vale que

$$L = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\overline{x}\,\mathcal{L} = \int_0^\infty dr\, r^2 \left(\int d\Omega\,\mathcal{L}\right)\,. \tag{7.111}$$

Remplazando para $l \geq 2$ en los distintos términos de (7.110) las expresiones (7.104) y (7.109) obtenidas luego de la fijación de gauge y considerando las propiedades de los armónicos esféricos vectoriales y tensoriales (Ver anexo B.1 y B.2) se tiene que

- $Tr\left(h_E\right) = \sum_{lm}\left(h^{0l}_{lm} + \sqrt{2}\alpha h^{te}_{lm}\right)Y_{lm}$
- $\nabla Tr\left(h_E\right) = \sum_{lm}\left(\partial_r h^{0l}_{lm} + \sqrt{2}\alpha\partial_r h^{te}_{lm}\right)\overline{Y}^r_{lm} + \frac{\sqrt{l(l+1)}}{r}\left(h^{0l}_{lm} + \sqrt{2}\alpha h^{te}_{lm}\right)\overline{Y}^e_{lm}$
- $\nabla\cdot h_E = \sum_{lm}\left[\partial_r h^{0l}_{lm} + \frac{2}{r}h^{0l}_{lm} - \left(\sqrt{2}\alpha + \sqrt{\frac{l(l+1)}{2}}\beta\right)\frac{1}{r}h^{te}_{lm}\right]\overline{Y}^r_{lm} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\beta\partial_r h^{te}_{lm} + \left(\sqrt{l(l+1)}\alpha + 3\beta - \sqrt{(l-1)(l+2)}\gamma\right)\frac{1}{r}h^{1e}_{lm}\right]\overline{Y}^e_{lm} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\partial_r h^{1m}_{lm} + \frac{3}{r}h^{1m}_{lm}\right]\overline{Y}^m_{lm}$

- $\nabla^2 h_E = \sum_{lm} \frac{1}{r^2}\left[\partial_r\left(r^2\partial_r h^{0l}_{lm}\right) - (l(l+1)+4)h^{0l}_{lm} + 2\left(\sqrt{2}\alpha + \sqrt{2l(l+1)}\beta\right)h^{te}_{lm}\right]T^{0l}_{lm} +$
  $+\frac{1}{r^2}\left[\alpha\partial_r\left(r^2\partial_r h^{te}_{lm}\right) + 2\sqrt{2}h^{0l}_{lm} - \left((l(l+1)+2)\alpha + 2\sqrt{l(l+1)}\beta\right)h^{te}_{lm}\right]T^{0t}_{lm} +$
  $+\frac{1}{r^2}\left[\beta\partial_r\left(r^2\partial_r h^{te}_{lm}\right) + 2\sqrt{2l(l+1)}h^{0l}_{lm} + \left(-2\sqrt{l(l+1)}\alpha - (l(l+1)+4)\beta + \right.\right.$
  $\left.\left.+2\sqrt{(l-1)(l+2)}\gamma\right)h^{te}_{lm}\right]T^{1e}_{lm} + \frac{1}{r^2}\left[\gamma\partial_r\left(r^2\partial_r h^{te}_{lm}\right) + \left(\sqrt{(l-1)(l+2)}\beta\right.\right.$
  $\left.\left.-(l-1)(l+2)\gamma\right)h^{te}_{lm}h^{1e}_{lm}\right]T^{2e}_{lm} + \frac{1}{r^2}\left[\partial_r\left(r^2\partial_r h^{1m}_{lm}\right) - (l(l+1)+4)h^{1m}_{lm}\right]T^{1m}_{lm} +$
  $+\frac{2}{r^2}\sqrt{(l-1)(l+2)}h^{1m}_{lm}T^{2m}_{lm}$
- $\nabla \cdot h_T = \sum_{lm}(\partial_r h^{0r}_{lm} + \frac{2}{r}h^{0r}_{lm})Y_{lm}$
- $\nabla^2 h_T = \sum_{lm}\frac{1}{r^2}\left[\partial_r\left(r^2\partial_r h^{0r}_{lm}\right) - (l(l+1)+2)h^{0r}_{lm}\right]\overline{Y}^{r}_{lm} + \frac{2}{r^2}\sqrt{l(l+1)}h^{0r}_{lm}\overline{Y}^{e}_{lm} +$
  $+\frac{1}{r^2}\left[\partial_r\left(r^2\partial_r h^{0m}_{lm}\right) - l(l+1)h^{0m}_{lm}\right]\overline{Y}^{m}_{lm}$
- $\nabla h_{00} = \sum_{lm}\partial_r h^{00}_{lm}\overline{Y}^{r}_{lm} + \frac{\sqrt{l(l+1)}}{r}h^{00}_{lm}\overline{Y}^{e}_{lm}$

Luego, utilizando las expresiones citadas en (7.110), se tiene que nuevamente es válido separar el lagrangiano en dos modos independientes para cada l y m de la forma

$$L = \sum_{lm}\int_0^\infty dr\ \left(\mathcal{L}^I_{lm} + \mathcal{L}^{II}_{lm}\right)\ . \tag{7.112}$$

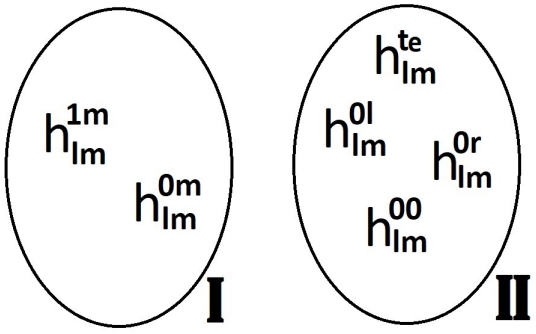


Figura 7.2: Esquema de dos modos que pueden verse en el lagrangiano

Donde el primer modo esta dado a partir de la variables h^{1m}_{lm} y h^{0m}_{lm} de la forma

$$\mathcal{L}^I_{lm} = \frac{r^2}{2}\dot{h}^{1m}_{lm}\dot{h}^{1m}_{lm} - \frac{(l-1)(l+2)}{2}h^{1m}_{lm}h^{1m}_{lm} + r^2\partial_r h^{0m}_{lm}\partial_r h^{0m}_{lm} +$$
$$+ l(l+1)h^{0m}_{lm}h^{0m}_{lm} + \sqrt{2}\dot{h}^{1m}_{lm}\left(rh^{0m}_{lm} - r^2\partial_r h^{0m}_{lm}\right) \tag{7.113}$$

y el segundo modo se escribe en función de h^{0l}_{lm}, h^{te}_{lm}, h^{0r}_{lm} y h^{00}_{lm} como

$$\mathcal{L}^{II}_{lm} = \frac{r^2}{2}\left(\beta^2-\alpha^2+\gamma^2\right)\dot{h^{te}_{lm}}\dot{h^{te}_{lm}} - \sqrt{2}r^2\alpha\dot{h^{0l}_{lm}}\dot{h^{te}_{lm}} + \frac{r^2}{2}\left(\alpha^2-\gamma^2\right)\partial_r h^{te}_{lm}\partial_r h^{te}_{lm} +$$

$$+\sqrt{2}\alpha r h^{te}_{lm}\partial_r h^{0l}_{lm} + h^{0l}_{lm}h^{0l}_{lm} + \left(\beta^2 - \frac{\sqrt{l(l+1)}}{2}\alpha\beta - \frac{\sqrt{(l-1)(l+2)}}{2}\beta\gamma\right)h^{te}_{lm}h^{te}_{lm} +$$

$$\sqrt{2}\left(\frac{l(l+1)}{2}\alpha - \sqrt{l(l+1)}\beta + \frac{\sqrt{(l-1)l(l+1)(l+2)}}{2}\gamma\right)h^{0l}_{lm}h^{te}_{lm} + l(l+1)h^{0r}_{lm}h^{0r}_{lm}$$

$$+h^{0r}_{lm}\left[4r\dot{h^{0l}_{lm}} - 2\sqrt{2}\alpha r^2\partial_r\dot{h^{te}_{lm}} - \sqrt{2}\left(2\alpha+\sqrt{l(l+1)}\beta\right)r\dot{h^{te}_{lm}}\right] + h^{00}_{lm}\left[-2r\partial_r h^{0l}_{lm}\right.$$

$$-(l(l+1)+2)h^{0l}_{lm} + \sqrt{2}\alpha r^2\partial_r\partial_r h^{te}_{lm} + \sqrt{2}\left(3\alpha+\sqrt{l(l+1)}\beta\right)r\partial_r h^{te}_{lm}$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-(l-1)(l+2)\alpha + 4\sqrt{l(l+1)}\beta - \sqrt{(l-1)l(l+1)(l+2)}\gamma\right)h^{te}_{lm}\right]. \qquad (7.114)$$

A continuación, al igual que en el caso de placas paralelas, se trabajara ambos modos por separado tratando de reducir para $l \geq 2$ cada uno de ellos a un campo escalar.

7.5.6. Hamiltoniano del modo I para $l \geq 2$

A partir de (7.113) puede verse con claridad que h^{0m}_{lm} no posee dinámica propia, y por ende podemos tratado como multiplicador de Lagrange. De esta manera se tiene

$$-2r^2\partial_r\partial_r h^{0m}_{lm} - 4r\partial_r h^{0m}_{lm} + 2l(l+1)h^{0m}_{lm} + \sqrt{2}r^2\partial_r\dot{h^{1m}_{lm}} + 3\sqrt{2}r\dot{h^{1m}_{lm}} = 0 \qquad (7.115)$$

De manera analoga al caso de placas paralelas, la ecuación (7.115) presenta términos no locales que dificultan seguir trabajando la expresion en cuestión. Sin embargo si trabajando bajo el esquema canónico y luego estudiando el multiplicador se simplifica notablemente el proceso. Para comenzar, derivando (7.113) se calcula el momento conjugado

$$\pi^{1m}_{lm} = \frac{\partial\mathcal{L}^I_{lm}}{\partial\dot{h^{1m}_{lm}}} = r^2\dot{h^{1m}_{lm}} + \sqrt{2}\left(rh^{0m}_{lm} - r^2\partial_r h^{0m}_{lm}\right). \qquad (7.116)$$

Luego se calcula el hamiltoniano

$$H_I = \sum_{lm}\int_0^\infty dr\,\mathcal{H}^I_{lm} \quad , \quad \mathcal{H}^I_{lm} = \pi^{1m}_{lm}\dot{h^{1m}_{lm}} - \mathcal{L}^I_{lm} \qquad (7.117)$$

de manera que remplazando (7.113) y (7.116) se tiene

$$\mathcal{H}^I_{lm} = \frac{\pi^{1m}_{lm}\pi^{1m}_{lm}}{2r^2} + \frac{(l-1)(l+2)}{2}h^{1m}_{lm}h^{1m}_{lm}$$

$$- (l-1)(l+2)h^{0m}_{lm}h^{0m}_{lm} - \sqrt{2}h^{0m}_{lm}\left(\partial_r\pi^{1m}_{lm} + \frac{\pi^{1m}_{lm}}{r}\right). \tag{7.118}$$

Ahora sí, trabajando con h^{0m}_{lm} como multiplicador de Lagrange en (7.118) se puede obtener el vínculo

$$- 2(l-1)(l+2)h^{0m}_{lm} - \sqrt{2}\left(\partial_r\pi^{1m}_{lm} + \frac{\pi^{1m}_{lm}}{r}\right) = 0\,. \tag{7.119}$$

Despejando, a partir de (7.119), h^{0m}_{lm} en función de π^{1m}_{lm} y remplazando en (7.118) se tiene para $l \geq 2$ que

$$\mathcal{H}^I_{lm} = \frac{l(l+1)}{2r^2}\frac{\pi^{1m}_{lm}\pi^{1m}_{lm}}{(l-1)(l+2)} + \frac{1}{2}\frac{\partial_r\pi^{1m}_{lm}\partial_r\pi^{1m}_{lm}}{(l-1)(l+2)} + \frac{1}{2}(l-1)(l+2)h^{1m}_{lm}h^{1m}_{lm}\,. \tag{7.120}$$

Entonces, definiendo las nuevas variables

$$\phi^I_{lm} = \frac{\pi^{1m}_{lm}}{\sqrt{(l-1)(l+2)}} \qquad P^I_{lm} = \sqrt{(l-1)(l+2)}h^{1m}_{lm}\,, \tag{7.121}$$

se reduce la expresión (7.120) a un hamiltoniano de campo escalar libre en una esfera

$$\mathcal{H}^I_{lm} = \frac{1}{2}\left(P^I_{lm}P^I_{lm} + \partial_r\phi^I_{lm}\partial_r\phi^I_{lm} + \frac{l(l+1)}{r^2}\phi^I_{lm}\phi^I_{lm}\right) \tag{7.122}$$

para el cual son válidas las relaciones de conmutación canónicas

$$\left[P^I_{lm}(r), \phi^I_{l'm'}(r')\right] = i\delta(r-r')\delta_{ll'}\delta_{mm'}\,, \tag{7.123}$$

obtenidas a partir de la validez de

$$\left[\pi^{1m}_{lm}(r), h^{1m}_{l'm'}(r')\right] = i\delta(r-r')\delta_{ll'}\delta_{mm'}\,. \tag{7.124}$$

7.5.7. Hamiltoniano del modo II para $l \geq 2$

Para el segundo modo se tiene el lagrangiano (7.114) donde derivando para el multiplicador h^{00}_{lm} se tiene el vínculo

$$-2r\partial_r h^{0l}_{lm} - (l(l+1)+2)h^{0l}_{lm} + \sqrt{2}\left(3\alpha + \sqrt{l(l+1)}\beta\right)r\partial_r h^{te}_{lm} + \sqrt{2}\alpha r^2\partial_r\partial_r h^{te}_{lm}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-(l-1)(l+2)\alpha + 4\sqrt{l(l+1)}\beta - \sqrt{(l-1)l(l+1)(l+2)}\gamma\right)h^{te}_{lm} = 0\,. \tag{7.125}$$

Dado que el vinculo (7.125) suele dar origen a términos no locales y no siendo posible solucionar dicho problema pasando al esquema canónico, se propone que

$$h^{0l}_{lm} = ah^{te}_{lm} + br\partial_r h^{te}_{lm} \tag{7.126}$$

con a y b contantes arbitrarias que serán fijadas para satisfacer (7.125). En efecto, remplazando (7.126) en (7.125) se tiene que:

$$\sqrt{2}\left(\alpha-\sqrt{2}b\right)r^2\partial_r\partial_r h^{te}_{lm}+\left(3\sqrt{2}\alpha+\sqrt{2l(l+1)}\beta-(l(l+1)+4)b-2a\right)r\partial_r h^{te}_{lm}+$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-(l-1)(l+2)\alpha+4\sqrt{l(l+1)}\beta-\sqrt{(l-1)l(l+1)(l+2)}\gamma-a\sqrt{2}(l(l+1)+2)\right)h^{te}_{lm}=0 \tag{7.127}$$

donde es posible fijar a, b y α en función de β y γ de manera que se anulen todos términos por separado, es decir

$$a=\sqrt{\frac{2}{l(l+1)}}\beta-\sqrt{\frac{(l-1)(l+2)}{2l(l+1)}}\gamma\,, \tag{7.128}$$

$$b=\sqrt{\frac{2}{l(l+1)}}\beta+\sqrt{\frac{2}{(l-1)l(l+1)(l+2)}}\gamma\,, \tag{7.129}$$

$$\alpha=\frac{2}{\sqrt{l(l+1)}}\beta+\frac{2}{\sqrt{(l-1)l(l+1)(l+2)}}\gamma\,. \tag{7.130}$$

Remplazando (7.126), (7.128), (7.129) y (7.130) en (7.114) y trabajando a h^{0r}_{lm} como multiplicador de Lagrange se tiene que

$$\mathcal{L}^{II}_{lm}=\frac{\gamma^2}{2}\left[\dot{h^{te}_{lm}}\dot{h^{te}_{lm}}-\partial_r h^{te}_{lm}\partial_r h^{te}_{lm}-l(l+1)h^{te}_{lm}h^{te}_{lm}\right]. \tag{7.131}$$

Trabajando nuevamente bajo el esquema canónico se tienen los momentos

$$\pi^{te}_{lm}=\frac{\partial\mathcal{L}^{II}_{lm}}{\partial\dot{h^{te}_{lm}}}=\gamma^2r^2\dot{h^{te}_{lm}} \tag{7.132}$$

y utilizando la transformada de Legendre

$$H_{II}=\sum_{lm}\int_0^\infty dr\mathcal{H}^{II}_{lm}\quad,\quad \mathcal{H}^{II}_{lm}=\pi^{te}_{lm}\dot{h^{te}_{lm}}-\mathcal{L}^{II}_{lm} \tag{7.133}$$

se tiene el hamiltoniano

$$\mathcal{H}^{II}_{lm}=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi^{te}_{lm}\pi^{te}_{lm}}{\gamma^2r^2}+\gamma^2r^2\partial_r h^{te}_{lm}\partial_r h^{te}_{lm}+\gamma^2l(l+1)h^{te}_{lm}h^{te}_{lm}\right] \tag{7.134}$$

para el cual son válidas las relaciones de conmutación canónicas

$$\left[\pi^{te}_{lm}(r),h^{te}_{l'm'}(r')\right]=i\delta(r-r')\delta_{ll'}\delta_{mm'}\,. \tag{7.135}$$

Definiendo las nuevas variables de la forma

$$\phi^{II}_{lm}=\gamma r h^{te}_{lm}\quad,\quad P^{II}_{lm}=\frac{\pi^{te}_{lm}}{r\gamma} \tag{7.136}$$

se recupera el hamitoniano de campo escalar

$$\mathcal{H}^{II}_{lm} = \frac{1}{2}\left[P^{II}_{lm}P^{II}_{lm} + \partial_r\phi^{II}_{lm}\partial_r\phi^{II}_{lm} + l(l+1)\phi^{II}_{lm}\phi^{II}_{lm}\right] \tag{7.137}$$

con las relaciones de conmutación

$$\left[P^{II}_{lm}(r), \phi^{II}_{l'm'}(r')\right] = i\delta(r-r')\delta_{ll'}\delta_{mm'}\,. \tag{7.138}$$

7.5.8. Análisis del modo $l = 0$

Para el caso $l = 0$ no se encuentran definidos los armónicos esféricos tensoriales de spin $J = 1$ y $J = 2$ de manera que el lagragiano (7.111) se reduce a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{l=0} = \mathcal{L}^{I}_{l=0} + \mathcal{L}^{II}_{l=0} = -\frac{r^2}{2}\alpha^2\dot{h^{te}_0}\dot{h^{te}_0} - \sqrt{2}r^2\alpha\dot{h^{0l}_0}\dot{h^{te}_0} + \frac{r^2}{2}\alpha^2\partial_r h^{te}_0\partial_r h^{te}_0 + \\ +\sqrt{2}\alpha r h^{te}_0\partial_r h^{0l}_0 + h^{0l}_0 h^{0l}_0 + 2\sqrt{2}h^{0r}_0\left[\sqrt{2}r\dot{h^{0l}_0} - \alpha r^2\partial_r\dot{h^{te}_0} - \alpha r\dot{h^{te}_0}\right] + \\ +\sqrt{2}h^{00}_0\left[-\sqrt{2}r\partial_r h^0_{lm}0l - \sqrt{2}h^{0l}_0 + \alpha r^2\partial_r\partial_r h^{te}_0 + 3\alpha r\partial_r h^{te}_0 + \alpha h^{te}_0\right]\,.\end{aligned} \tag{7.139}$$

Donde, a partir de las ecuaciones de movimiento del multiplicador h^{00}_0, se tiene el vínculo

$$-\sqrt{2}r\partial_r h^{0l}_0 - \sqrt{2}h^{0l}_0 + \alpha r^2\partial_r\partial_r h^{te}_0 + 3\alpha r\partial_r h^{te}_0 + \alpha h^{te}_0 = 0\,. \tag{7.140}$$

Si nuevamente se propone valida una relación de la forma (7.126) remplazando en (7.140) se tiene que las constantes a y b propuestas deben cumplir con la relación $a = b = \alpha/\sqrt{2}$ sin necesidad de fijar α, es decir, vale que

$$h^{0l}_0 = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\left(h^{te}_0 + r\partial_r h^{te}_0\right) \quad \forall\alpha\,. \tag{7.141}$$

Por otra parte, también trabajando h^{0r}_0 como multiplicador de Lagrange se tiene que

$$\sqrt{2}r\dot{h^{0l}_0} - \alpha r^2\partial_r\dot{h^{te}_0} - \alpha r\dot{h^{te}_0} = 0 \tag{7.142}$$

donde despejando vale que

$$\dot{h^{0l}_0} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\left(\dot{h^{te}_0} + r\partial_r\dot{h^{te}_0}\right) \tag{7.143}$$

siendo las ecuaciones (7.141) y (7.143) claramente consistentes entre sí. Remplazando ambas en (7.139) se tiene que

$$\mathcal{L}_{l=0} = 0 \tag{7.144}$$

concluyendo así que el modo $l = 0$ no produce aportes a la entropía bajo ninguna elección del gauge o bien de α.

7.5.9. Análisis del modo $l = 1$

Para el caso $l = 1$ solo los armónicos esféricos tensoriales de spin $J = 2$ no se encuentran definidos de manera que el lagrangiano del modo I (7.113) se reduce a

$$\mathcal{L}^I_{l=1} = \frac{r^2}{2} h_1^{\dot{1}m} h_1^{\dot{1}m} + r^2 \partial_r h_1^{0m} \partial_r h_1^{0m} + 2 h_1^{0m} h_1^{0m} + \sqrt{2} h_1^{\dot{1}m} \left(r h_1^{0m} - r^2 \partial_r h_1^{0m} \right) \tag{7.145}$$

En particular, de manera análoga a lo realizado para $l \geq 2$ se obtiene el momento $\pi_1^{1m} = r^2 h_1^{\dot{1}m} + \sqrt{2} \left(r h_1^{0m} - r^2 \partial_r h_1^{0m} \right)$ y el hamiltoniano

$$\mathcal{H}^I_{l=1} = \frac{\pi_1^{1m} \pi_1^{1m}}{2r^2} - \sqrt{2} h_1^{0m} \left(\partial_r \pi_1^{1m} + \frac{\pi_1^{1m}}{r} \right) . \tag{7.146}$$

Entonces, trabajando el multiplicador en h_1^{0m} vale que

$$\mathcal{H}^I_{l=1} = \frac{\pi_1^{1m} \pi_1^{1m}}{2r^2} , \;\; \pi_1^{1m} = r \partial_r \pi_1^{1m} . \tag{7.147}$$

Esto implica que el modo I no hará aportes a la entropía para $l = 1$ dado que para dicho valor de momento angular el campo, al igual que en el campo de Maxwell para $l = 0$, no presenta dinámica propia.

Por otro lado, el lagrangiano del modo II puede escribirse para $l = 1$ a partir de (7.114) de la forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{II}_{l=1} = \frac{r^2}{2} \left(\beta^2 - \alpha^2 \right) h_1^{\dot{te}} h_1^{\dot{te}} - \sqrt{2} r^2 \alpha h_1^{\dot{0l}} h_1^{\dot{te}} + \frac{r^2}{2} \alpha^2 \partial_r h_1^{te} \partial_r h_1^{te} \\
+ \sqrt{2} \alpha r h_1^{te} \partial_r h_1^{0l} + h_1^{0l} h_1^{0l} + \left(\beta^2 - \frac{\alpha \beta}{\sqrt{2}} \right) h_1^{te} h_1^{te} + \left(\sqrt{2} \alpha - 2 \beta \right) h_1^{0l} h_1^{te} \\
+ 2 h_1^{0r} h_1^{0r} + 2 h_1^{0r} \left[2 r h_1^{\dot{0l}} - \sqrt{2} \alpha r^2 \partial_r h_1^{\dot{te}} - \left(\sqrt{2} \alpha + \beta \right) r h_1^{\dot{te}} \right] + \\
h_1^{00} \left[-2 r \partial_r h_1^{0l} - 4 h_1^{0l} + \sqrt{2} \alpha r^2 \partial_r \partial_r h_1^{te} + \left(3 \sqrt{2} \alpha + 2 \beta \right) r \partial_r h_1^{te} + 4 \beta h_1^{te} \right] .
\end{aligned} \tag{7.148}$$

donde derivando en h_1^{00} se tiene el vínculo

$$- 2 r \partial_r h_1^{0l} - 4 h_1^{0l} + \sqrt{2} \alpha r^2 \partial_r \partial_r h_1^{te} + \left(3 \sqrt{2} \alpha + 2 \beta \right) r \partial_r h_1^{te} + 4 \beta h_1^{te} = 0 \tag{7.149}$$

Para dicho caso nuevamente se propone la relación (7.126). Si se remplaza dicha relacion en (7.149) se obtiene que para cualquier fijación del gauge dada partir de α y β la expresión (7.126) toma la forma

$$h_1^{0l} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} h_1^{te} + r \beta \partial_r h_1^{te} \quad \forall \, \alpha, \, \beta \, . \tag{7.150}$$

Utilizando (7.150) en (7.148) se tiene

$$\mathcal{L}^{II}_{l=1} = 0 \tag{7.151}$$

es decir que para $l = 1$ el campo tampoco genera aportes a la entropía.

7.6. Análisis de la fijación de gauge

Conociendo la restricción (7.130) es posible analizar si el tensor $h_{\mu\nu}$ o bien los campos resultantes para cada uno de los modos h^{1m}_{lm} y h^{te}_{lm} pueden escribirse a partir de invariantes de gauge sobre la esfera. Para esto se puede recurrir nuevamente a la ecuación (6.9) o bien para este caso

$$R^{lm}_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}\left[\partial_\nu\partial_\rho h^{lm}_{\mu\sigma} - \partial_\mu\partial_\rho h^{lm}_{\nu\sigma} + \partial_\mu\partial_\theta h^{lm}_{\nu\rho} - \partial_\nu\partial_\sigma h^{lm}_{\mu\rho}\right] . \tag{7.152}$$

Trabajando la ecuación (7.152) a partir de una manipulación algebraica por computadora (Ver anexo C) se tiene para el modo I que el campo h^{1m}_{lm} puede escribirse a partir de la contracción eléctrica-radial-eléctrica-magnética del tensor de Riemann como

$$R^{lm}_{erem} = e^\mu r^\nu e^\rho m^\sigma R^{lm}_{\mu\nu\rho\sigma} = F_{lm}(\theta,\phi) h^{1m}_{lm} \tag{7.153}$$

donde $F_{lm}(\theta,\phi)$ es una función fija de los ángulos θ y ϕ para cada l y m.

Para el modo II puede tomarse el caso particular de la fijación dada por (7.130) para $\alpha = 0$ o bien

$$\gamma = -\frac{\beta}{\sqrt{(l-1)(l+2)}} , \tag{7.154}$$

lo que implica que la ecuación (7.126) se reduce a la relación algebraica (sin derivadas) entre los campos h^{0l}_{lm} y h^{te}_{lm} de la forma

$$h^{0l}_{lm} = \sqrt{\frac{(l-1)(l+2)}{2}}\beta h^{te}_{lm} . \tag{7.155}$$

Desde aquí es posible obtener que el campo h^{te}_{lm} puede ser calculado a partir de la contracción eléctrica-magnética-eléctrica-magnética del tensor de Riemann. Es decir,

$$R^{lm}_{emem} = e^\mu m^\nu e^\rho m^\sigma R^{lm}_{\mu\nu\rho\sigma} = G_{lm}(\theta,\phi) h^{te}_{lm} \tag{7.156}$$

donde $G_{lm}(\theta,\phi)$ es otra una función fija de los ángulos θ y ϕ para cada l y m distinta de $F_{lm}(\theta,\phi)$.

7.6.1. Entropía y coeficiente logarítmico

En resumen, la entropía ascociada al interior de una esfera de radio R para gravitatorio lineal es equivalente a la de dos campos escalares sin los modos correspondientes a momento angular $l = 0$ y $l = 1$, es decir que

$$S^{LG}(R) = S^M(R) - S^M_{l=1}(R) = 2\left(S^S(R) - S^S_{l=0}(R) - S^S_{l=1}(R)\right) . \tag{7.157}$$

Bajo este contexto puede obtenerse un valor numérico para el coeficiente universal logarítmico de manera análoga a lo ya realizado en los capítulos 2 y 5 (Ver anexo A.3), siendo este

$$c^{LG}_{\log} = 2\left(c^S_{\log} - c^{S_{l=0}}_{\log} - c^{S_{l=1}}_{\log}\right) \approx -1{,}34644. \tag{7.158}$$

No se encuentran en la bibliografía valores ya reportados para este coeficiente logarítmico. Sin embargo, es posible destacar, que es coherente que su valor sea negativo y mayor en valor absoluto que el asociado al campo escalar y al de Maxwell dado que dicha propiedad debe aumentar con el valor del spin.

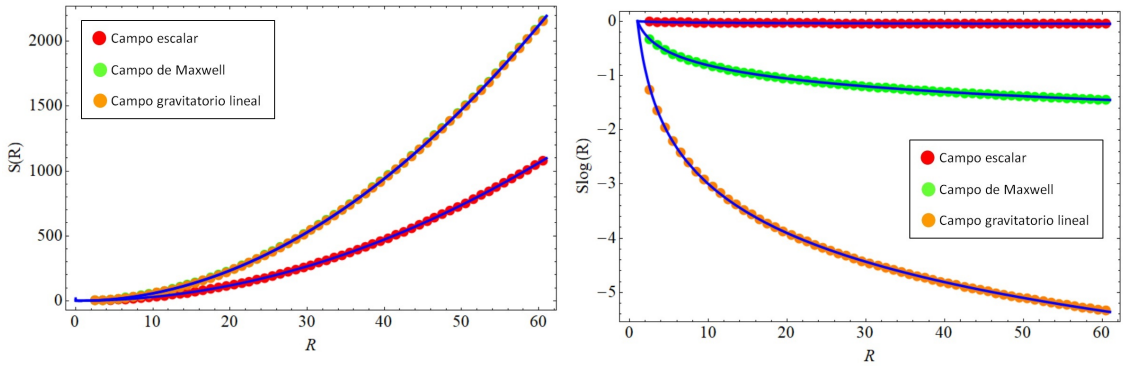


Figura 7.3: Entropía (izquierda) y parte logarítmica de la entropía (derecha) en función del radio de la esfera para un campo escalar y un campo de Maxwell en una esfera.

También, se destaca que dada la predominancia del término de área sobre logarítmico las entropías del campo de Maxwell y del campo gravitatorio lineal son muy similares (Ver figura 7.3) a pesar de su diferir para para $l = 1$. Sin embargo al graficar la parte logarítmica individualmente se observa claramente la diferencia evidenciada en los coeficientes.

Si se calcula numéricamente el aporte del modo de momento angular $l = 1$ aislado al coeficiente logarítmico se tiene que

$$c_{\log}^{S_{l=1}} = 0{,}499827\,, \tag{7.159}$$

pudiéndose conjeturar que dicho resultado se corresponde al valor analítico $1/2$. Si esto fuera así, de forma similar a (5.44), valdria que

$$c_{\log}^{LG} = 2\left(c_{\log}^{S} - c_{\log}^{S_{l=0}} - c_{\log}^{S_{l=1}}\right) = 2\left(-\frac{1}{90} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{61}{45} \tag{7.160}$$

lo cual es coherente con (7.158).

Capítulo 8

Conclusiones y perspectivas futuras

En este trabajo se obtuvo que la entropía de entrelazamiento correspondiente al campo de los gravitones linealizados asociada a la región entre dos placas paralelas infinitas es el doble de la correspondiente a un campo escalar libre no masivo. A su vez, para el caso de la esfera fue demostrado que la entropía del campo gravitatorio lineal también se reduce a dos campos escalares pero sin el aporte de los modos de momento angular $l = 0$ y $l = 1$. Siendo estos resultados similares a los ya presentados en [12] para el campo de Maxwell con diferencias en el modo $l = 1$ para el caso de la esfera.

El factor dos presente en el campo Maxwell y el gravitorio lineal es esperable dado que puede ser asociado a la cantidad de grados de libertad presentes en la teoría. En efecto, los fotones pueden presentar helicidades 1 y (-1) y los gravitones 2 y (-2) mientras que el campo escalar solo se corresponde a partículas de spin 0. Sin embargo, se destaca que los modos trabajados durante el capitulo 7 no se relacionan con una helicidad en particular sino que representan combinaciones lineales de las mismas. Para los casos con simetría esférica, los modos pueden asociarse a distintas paridades de forma similar a lo realizado en [46] obteniéndose así un modo radial-eléctrico o par de paridad $(-1)^l$ y un modo magnético o impar de paridad $(-1)^{l+1}$.

Los diferencia más relevante entre las entropías de los distintos campos analizados es la encontrada en los modos de momento angular $l = 0$ y $l = 1$. Aunque esto no produce diferencias en el término de área, si afecta propiedades del continuo como lo son coeficientes universales logarítmicos. En efecto, se comprobó numéricamente que

$$c_{\log}^{S} = -0{,}0111267 \approx -\frac{1}{90}\,, \tag{8.1}$$

$$c_{\log}^{M} = 2\left(c_{\log}^{S} - c_{\log}^{S_{l=0}}\right) = -0{,}355376 \approx -\frac{16}{45}\,, \tag{8.2}$$

$$c_{\log}^{LG} = 2\left(c_{\log}^{S} - c_{\log}^{S_{l=0}} - c_{\log}^{S_{l=1}}\right) = -1{,}34644 \approx -\frac{61}{45}\,, \tag{8.3}$$

donde, también, puede verse claramente que el coeficiente logarítmico crece en valor absoluto con el es spin asociado al campo.

Se espera, en el futuro, calcular el coeficiente logarítmico para el caso de los gravitones utilizando la anomalía del tensor energía-momento de forma a partir de [10]. De forma similar al caso de Maxwell, se supone que se encontraran diferencias con el valor (8.3) siendo dicha discrepancia un problema abierto en precencia de gravitación. Sin embargo, se espera poder explicar el origen del valor obtenido a partir de argumentos similares a los de Dowker en [13].

Por otro lado, el método utilizado para obtener las entropías en el capítulo 7 requiere encontrar la fijación de gauge adecuada para poder asociar el resultado obtenido a la región espacial definida. En particular, esto se asegura demostrando a partir de las ecuaciones (7.6), (7.6), (7.51), (7.153) y (7.156) que los campos pueden escribirse en función de invariantes de gauge sobre la superficie de las correspondientes regiones.

También, quedaría investigar las propiedades de la entropía de entrelazamiento en modelos de gravedad sobre una red discreta de forma similar a lo explorado para el caso electromagnético en el capítulo 4. Esperando así, entender de forma más clara la relación entre la fijaciones de gauge posibles y el álgebra de la teoría tanto para el caso lineal como para el no lineal.

Apéndice A

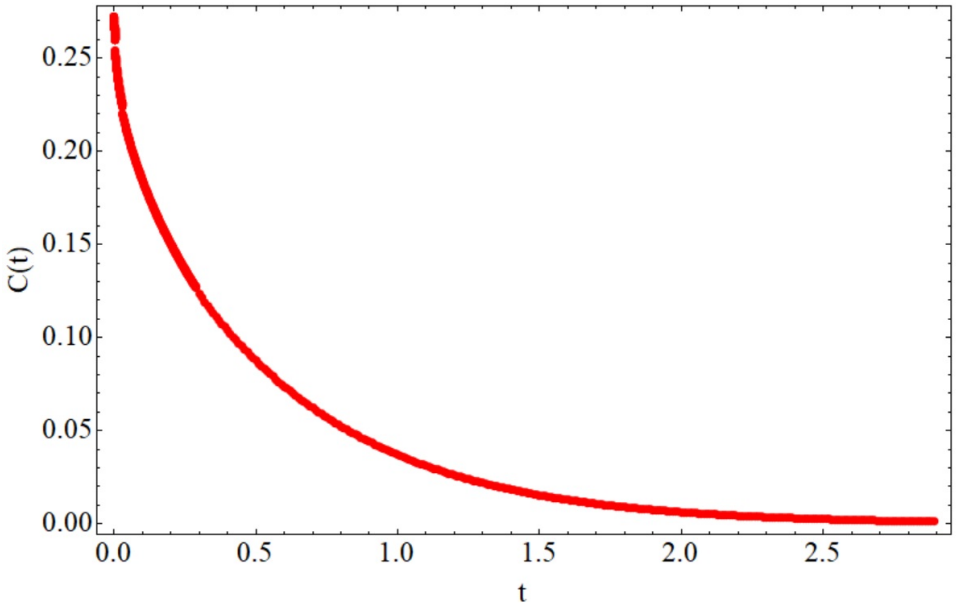
Programas en Mathematica para el cálculo numérico de las entropías

A.1. Función c bosónica en $(1+1)$ dimensiones

```
Este programa calcula la función c (mL) para un campo d=2 dimensional
a partir de fórmula de Peschel para estados Gaussianos. Integrando se
obtiene constante de proporcionalidad K para la entropía de un campo
escalar en d=4 entre placas paralelas

1) Se fija una masa m  y un tamaño  máximo de la región lmax

m=1/100; lmax=300;

2) Se computan  las intergrales de los correladores para distintos
valores un parámetro mudo k entre 0 y lmax

Xk=Table[NIntegrate[Exp[Ixk]/4/Pi/Sqrt[m^2+2(1-Cos[x])],{x,-Pi,Pi}],{k,0,lmax}];
Pk=Table[NIntegrate[Exp[Ixk]/4/Pi*Sqrt[m^2+2(1-Cos[x])],{x,-Pi,Pi}],{k,0,lmax}];

3) Se escribe un modulo para calcular la funciones de dos puntos X y P
a partir de Xk y Pk y luego calcular los autovalores de Sqrt[XP]
con su correspondiente aporte a la entropía

SS[l_]:=Module[{X,P,vk},X=Table[Xk[[Abs[i-j]+1]],{i,1,l},{j,1,l}];
P=Table[Pk[[Abs[i-j]+1]],{i,1,l},{j,1,l}];vk=Sqrt[Eigenvalues[X.P]];
Re[(vk+1/2).Log[vk+1/2]-(vk-1/2).Log[vk-1/2+10^(-10)]]]

4) Se calcula la entropía en una tabla para longitudes de la región
unidimensional l menores a lmax
```

```
entropia=Table[{L,SS[L]},{L,1,lmax-10}];

5) Se deriva la entropia numericamente para obtener la funcion c

cfunction100=Table[{m*entropia[[i,1]],entropia[[i,1]]
(entropia[[i+1,2]]-entropia[i,2]])},{i,30,Length[entropia]-1}];

6) Se repite el procedimiento con distintas masas  cada vez mas \
pequnias

m = 1/1000; lmax = 300;
Xk=Table[NIntegrate[Exp[Ixk]/4/Pi/Sqrt[m^2+2(1-Cos[x])],{x,-Pi,Pi}],{k,0,lmax}];
Pk=Table[NIntegrate[Exp[Ixk]/4/Pi*Sqrt[m^2+2(1-Cos[x])],{x,-Pi,Pi}],{k,0,lmax}];
entropia=Table[{L,SS[L]},{L,1,lmax-10}]; cfunction1000=Table[{m*entropia[[i,1]],
entropia[[i,1]](entropia[[i+1,2]]-entropia[i,2]])},{i,30,Length[entropia]-1}

m = 1/8000; lmax = 250;
Xk=Table[NIntegrate[Exp[Ixk]/4/Pi/Sqrt[m^2+2(1-Cos[x])],{x,-Pi,Pi}],{k,0,lmax}];
Pk=Table[NIntegrate[Exp[Ixk]/4/Pi*Sqrt[m^2+2(1-Cos[x])],{x,-Pi,Pi}],{k,0,lmax}];
entropia=Table[{L,SS[L]},{L,1,lmax-10}]; cfunction8000=Table[{m*entropia[[i,1]],
entropia[[i,1]](entropia[[i+1,2]]-entropia[i,2]])},{i,30,Length[entropia]-1}

m = 1/90000; lmax = 300;
Xk=Table[NIntegrate[Exp[Ixk]/4/Pi/Sqrt[m^2+2(1-Cos[x])],{x,-Pi,Pi}],{k,0,lmax}];
Pk=Table[NIntegrate[Exp[Ixk]/4/Pi*Sqrt[m^2+2(1-Cos[x])],{x,-Pi,Pi}],{k,0,lmax}];
entropia=Table[{L,SS[L]},{L,1,lmax-10}]; cfunction90000=Table[{m*entropia[[i,1]],
entropia[[i,1]](entropia[[i+1,2]]-entropia[i,2]])},{i,50,Length[entropia]-1}

7) Se hace el mismo cálculo para una masa muy pequeña.
  (Esto requiere aumentar la precisión del cálculo de correladores)

m = 10^(-10); lmax = 40;
Xk=Table[NIntegrate[Exp[Ixk]/4/Pi/Sqrt[m^2+2(1-Cos[x])],{x,-Pi,Pi}
WorkingPrecision->20,PrecisionGoal->10,MaxRecursion->20],{k,0,lmax}];
Pk=Table[NIntegrate[Exp[Ixk]/4/Pi*Sqrt[m^2+2(1-Cos[x])],{x,-Pi,Pi}
WorkingPrecision->20,PrecisionGoal->10,MaxRecursion->20],{k,0,lmax}];
entropia=Table[{L,SS[L]},{L,1,lmax-10}]; cfunctionsmall=Table[{m*entropia[[i,1]],
entropia[[i,1]](entropia[[i+1,2]]-entropia[i,2]])},{i,5,Length[entropia]-1}
```

```
8) Se combinan en una Lista todos los valores obtenidos para la función c(mL)

cfunction=Union[cfunction100,cfunction1000,
cfunction8000,cfunction90000,cfunctionsmall];

9) Se gráfica la función c(mL) para el caso d=2 dimensional

Show[ListPlot[cfunction,PlotStyle->{Red, PointSize[0.01]}],Frame->True,
FrameLabel->{"t", "C(t)"},LabelStyle->Directive[Black,Large]]
```

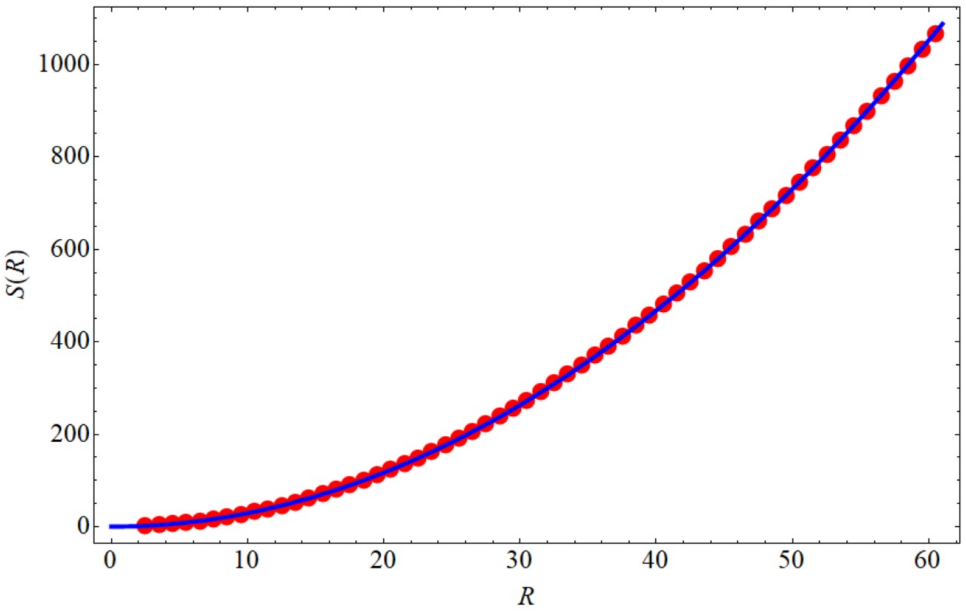



```
10) Dado que la función decae a cero, se integra numéricamente los valores
conocidos para obtener la constante K (se realiza  el integral aplicando un
spline de tercer orden entre los puntos)

mlc=Table[{cfunction[[j,1]],cfunction[[j,1]]*cfunction[[j,2]]},
{j,1,Length[cfunction]}]; Int=Integrate[Interpolation[mlc][x],
{x,cfunctionsmall[[1,1]],cfunction100[[259,1]]}];K=Int/4/Pi

0.00527481
```

A.2. Ley de área para la entropía de un campo escalar en una esfera (momento angular maximo y cutoff finitos)

```
El propósito de este programa es calcular la entropía de un campo escalar no
masivo (3+1)-dimensional en una esfera utilizando un cutoff m finito y un L
máximo (correspondiente a la expansión en armónicos esféricos) también finito

1) Se definen el cuoff (m), el L máximo (Lcota), y el radio máximo
a calcular (ncota). Observación: Rmax = ncota + 1/2

m=100; Lcota=1000; ncota=100;

2) Se calcula la entropía asociada a cada valor de radio y de L (Snl[ni,L]).
Para esto para cada valor de L entre 0 y Lcota:
  - Se computa la matriz tridiagonal Kij
  - Se buscan los  autovalores (EigenValuesVector) y autovectores
    (EigenVectorMatrix) de Kij
  - Se diagonaliza Kij y se computan las funciones de dos puntos Xij y Pij
  - Se reducen a esferas de distintos radios ni para obtener Xvij y Pvij
  - Se calculan los autovalores vk de Sqrt[Xvij.Pvij] y se usa la fórmula
    de estados gaussianos para tener Snl[ni, L]

Do[Kij=Table[0,{i,1,m},{j,1,m}];
Do[Kij[[j,j]]=N[(((j+0.5)^2+L(L+1))/(j^2))+((j-0.5)^2)/(j^2)],{j,2,m}];
Do[Kij[[j+1,j]]=N[(-1)*((j+0.5)^2)/(j^2+j)],{j,m-1}];
Do[Kij[[j,j+1]]=N[(-1)*((j+0.5)^2)/(j^2+j)],{j,m-1}];
Kij[[1,1]]=N[(((1+0.5)^2+L(L+1))/(1^2))];
EigenValuesVector = Eigenvalues[Kij];
EigenVectorMatrix = Eigenvectors[Kij];
Wlist = (1/Sqrt[EigenValuesVector])/2;
Zlist = (Sqrt[EigenValuesVector])/2;
Wij = DiagonalMatrix[Wlist]; Zij = DiagonalMatrix[Zlist];
Uij = EigenVectorMatrix; Udagaij = Transpose[EigenVectorMatrix];
Xij = Udagaij.Wij.Uij; Pij = Udagaij.Zij.Uij;
Xvij = Take[Xij, {1,ni}, {1,ni}];
Pvij = Take[Pij, {1,ni}, {1,ni}];
CvSquare = Xvij.Pvij; vkSquare = Eigenvalues[CvSquare];
vk = Sqrt[vkSquare];
Snl[ni,L]=(vk+0.5).Log[(vk+0.5)]-(vk-0.5+10^(-12)).Log[(vk-0.5+10^(-12))],
{ni,ncota},{L,0,Lcota}]

Observacion: Se agrega un fator de 10^(-12) al logaritmo para evitar problemas
con los vk muy cercanos a 1/2 (No deberia producir diferencias en el resultado)
```

```
3) Se confecciona la tabla de entropía total para cada radio ni+1/2
sumando (2*L+1)*Snl[ni,L] sobre todos los valores L calculados

Entropia=Table[{(ni+0.5),Sum[(2*L+1)*Snl[ni,L],{L,0,Lcota}]},{ni,2,60}];

4) Se fitea una cuadrática a los valores de entropía en función del radio
(comprobando los resultados esperados para la ley de area en base a Srednicki)

Fiteo = Fit[Entropia, {r^2}, r]

0.292448 r^2

5) Se grafican los datos y el fiteo para S(R)

Show[ListPlot[Entropia,PlotStyle->{Red,PointSize[0.02]}],
Plot[Fiteo,{r,0,61},PlotStyle->{Blue,Thickness[0.005]}],
Frame->True,FrameLabel->{R,S[R]},LabelStyle->Directive[Black,Large]]
```



A.3. Coeficientes universales para la entropía en una esfera (momento angular máximo y cutoff infinitos)

```
1) Se incluyen las características del campo a estudiar a partir de las
variables DegreesFreedom y Lmin. Utilizar:
- para el campo escalar:  DegreesFreedom=1; Lmin=0;
- para el campo de Maxwell:  DegreesFreedom=2; Lmin=1;
- para el campo gravitatorio lineal:  DegreesFreedom=2; Lmin=2;

2) Se fijan el resto de las variables del programa.
- Se calculara la entropía para radios entre nmin y nmax con paso de nstep
- Se calculara el aporte inicial a la entropía de modos con valores de
  L entre Lmin y Lfinita con step de 1
- Se  aproximara el aporte de los modos con L entre Lfinita e infinito
  usando un ajuste sobre valores de L entre Lfinita y Lmax con paso Lstep
- Se extrapolara a cutoff infinito calculado para cutoff finitos entre
  Mmin y Mmax con un paso de Mstep

nmin = 1; nmax = 60; nstep = 1;
Lfinita = 1000; Lmax = 5000; Lstep = 500;
Mmin = 200; Mmax = 600; Mstep = 100;

3) Se calcula la entropía S1[ni,L,m] para momento angular maximo finito
Lfinita y diferentes cutoff entre Mmin y Mmax con un paso de Mstep para radios
entre nmin y nmax con paso de nstep usando el método del programa anterior.


Do[Kij=Table[0,{i,1,m},{j,1,m}]; Kij[[1,1]]=N[9/4+L(L+1)];
Do[Kij[[j,j]]=N[((j+1/2)^2+L(L+1))/j^2+(j-1/2)^2/j^2],{j,2,m}];
Do[{Kij[[j+1,j]]=N[-(j+1/2)^2/(j^2+j)],
Kij[[j,j+1]]=N[-(j+1/2)^2/(j^2+j)]},{j,1,m-1}];
EigenValuesVector = Eigenvalues[Kij]; EigenVectorMatrix = Eigenvectors[Kij];
Xij=Conjugate[Transpose[EigenVectorMatrix]].
DiagonalMatrix[1/Sqrt[EigenValuesVector]/2].EigenVectorMatrix;
Pij=Conjugate[Transpose[EigenVectorMatrix]].
DiagonalMatrix[Sqrt[EigenValuesVector]/2].EigenVectorMatrix;
Xvij=Take[Xij,{1,ni},{1,ni}]; Pvij=Take[Pij,{1,ni},{1,ni}];
vk=Sqrt[Eigenvalues[Xvij.Pvij]];
S1[ni,L,m]=(vk+1/2).Log[(vk+1/2)]-(vk-1/2).Log[(vk-1/2+10^(-13))],
{L,Lmin,Lfinita,1}, {ni,nmin,nmax,nstep}, {m,Mmin,Mmax,Mstep}];
```

```
4) Se suma sobre todos los valores de momento angular entre lmin y
Lfinita para cada radio ni y cutoff m guardando el resultado en
la variable Entropia1[ni,m]

Do[Entropia1[ni,m]=Sum[(2*L+1)*S1[ni,L,m],{L,Lmin,Lfinita,1}],
{ni,nmin,nmax,nstep}, {m,Mmin,Mmax,Mstep}];

5) Se calcula la entropía S2[ni,L,m] para momentos angulares entre
Lfinita y Lmax con paso Lstep para diferentes cutoff entre Mmin y Mmax
con un paso de Mstep para radios  y entre nmin y nmax con paso de nstep
usando el método del programa anterior

Do[Kij=Table[0,{i,1,m},{j,1,m}]; Kij[[1,1]]=N[9/4+L(L+1)];
Do[Kij[[j,j]]=N[((j+1/2)^2+L(L+1))/j^2+(j-1/2)^2/j^2],{j,2,m}];
Do[{Kij[[j+1,j]]=N[-(j+1/2)^2/(j^2+j)],
Kij[[j,j+1]]=N[-(j+1/2)^2/(j^2+j)]},{j,1,m-1}];
EigenValuesVector = Eigenvalues[Kij]; EigenVectorMatrix = Eigenvectors[Kij];
Xij=Conjugate[Transpose[EigenVectorMatrix]].
DiagonalMatrix[1/Sqrt[EigenValuesVector]/2].EigenVectorMatrix;
Pij=Conjugate[Transpose[EigenVectorMatrix]].
DiagonalMatrix[Sqrt[EigenValuesVector]/2].EigenVectorMatrix;
Xvij=Take[Xij,{1,ni},{1,ni}]; Pvij=Take[Pij,{1,ni},{1,ni}];
vk=Sqrt[Eigenvalues[Xvij.Pvij]];
S2[ni,L,m]=(vk+1/2).Log[(vk+1/2)]-(vk-1/2).Log[(vk-1/2+10^(-13))],
{L,Lfinita,Lmax,Lstep}, {ni,nmin,nmax,nstep}, {m,Mmin,Mmax,Mstep}];

6) Se ajusta una función a S2[ni,L,m] para los valores de L
calculados entre Lfinita y Lmax

Do[TableL=Table[{L,S2[ni,L,m]},{L,Lfinita,Lmax,Lstep}];
FITL = Fit[TableL,{1/xl^4, 1/xl^4 Log[xl], 1/xl^6, 1/xl^6 Log[xl],
1/xl^8, 1/xl^8 Log[xl]}, xl];

7) Utilizando la función ajustada en 6) se computa el aporte a la
entropía de modos de momento angular entre Lfinita+1 y infinito.
Su guarda el resultado de la suma para cada radio ni y cutoff m
en la variable CorreccionL[ni,m]

CorreccionL[ni,m]=NSum[(2xl+1)FITL/.xl->lg,{lg,Lfinita+1,Infinity}],
{ni,nmin,nmax,nstep}, {m,Mmin,Mmax,Mstep}];

8) Se suman los aportes de Entropia1[ni,m] y CorreccionL[ni,m] en
```

```
Entropia2[ni,m] obteniéndose para cada valor de ni y m el valor se
la entropía sumando momentos  angulares entre lmin y infinito

Do[Entropia2[ni,m]=Entropia1[ni,m]+CorreccionL[ni,m],
{ni,nmin,nmax,nstep}, {m,Mmin,Mmax,Mstep}];

9) Se ajusta a Entropia2[ni,m] una función de del cutoff extrayendo
del resultado el valor de la entropía para cutoff infinito S3[ni]
para cada radio

Do[{TableM=Table[{m,Entropia2[ni, m]},{m,Mmin,Mmax,Mstep}];
FITM=Fit[TableM, {1, 1/zm^2}, zm], S3[ni]=Coefficient[FITM,zm,0]},
{ni, nmin, nmax, nstep}]

10) Se computa en en una tabla en función del radio la entropía del
campo en cuestión para momento angular y cutoff infinitos

Entropia=Table[{(ni+1/2),DegreesFreedom*S3[ni]},{ni,2,nmax,nstep}]

11) Luego de correr el programa para los tres campos se confeccionan
las tablas EntropiaScalar, EntropiaMaxwell y EntropiaGraviton

12) Se realiza los ajustes apropiados a los datos de las tablas

Fit[EntropiaScalar, {1, Log[r], r^2}, r]
-0.0344035 + 0.295432 r^2 - 0.0115191 Log[r]

Fit[EntropiaScalar, {1, Log[r], r^2, 1/r^2}, r]
-0.0355427 + 0.00922889/r^2 + 0.295432 r^2 - 0.0111267 Log[r]

Fit[EntropiaMaxwell, {1, Log[r], r^2}, r]
-0.249668 + 0.590863 r^2 - 0.353117 Log[r]

Fit[EntropiaMaxwell, {1, Log[r], r^2, 1/r^2}, r]
-0.243109 - 0.0531363/r^2 + 0.590864 r^2 - 0.355376 Log[r]

Fit[EntropiaGraviton, {1, Log[r], r^2}, r]
0.0390411 + 0.590843 r^2 - 1.30346 Log[r]

Fit[EntropiaGraviton, {1, Log[r], r^2, 1/r^2}, r]
0.163825 - 1.01087/r^2 + 0.59086 r^2 - 1.34644 Log[r]
```

Apéndice B

Propiedades de los armónicos esféricos vectoriales y tensoriales

En este anexo se presentan algunas de las propiedades de los armonicos esfericos vectoriales y tensoriales, por ejemplo divergencias y laplacianos. Algunas de estas propiedades pueden ser encontradas en [12, 37, 38] otras fueron desarrolladas para este trabajo.

B.1. Armónicos esféricos vectoriales

Los armónicos esféricos vectoriales pueden ser definidos de la forma

$$\overline{Y}^{r}_{lm}(\theta,\varphi) = Y_{lm}(\theta,\varphi)\hat{r} \qquad l \geq 0, \quad -l \leq m \leq 0 \tag{B.1}$$

$$\overline{Y}^{e}_{lm}(\theta,\varphi) = \frac{r\nabla Y_{lm}(\theta,\varphi)}{\sqrt{l(l+1)}} \qquad l > 0, \quad -l \leq m \leq 0 \tag{B.2}$$

$$\overline{Y}^{m}_{lm}(\theta,\varphi) = \frac{\overline{r} \times \nabla Y_{lm}(\theta,\varphi)}{\sqrt{l(l+1)}} \qquad l > 0, \quad -l \leq m \leq 0 \tag{B.3}$$

donde vale la relación de ortogonalidad

$$\int \overline{Y}^{s}_{lm}\overline{Y}^{s'\ *}_{lm}\, d\Omega = \delta_{ss'}\delta_{ll'}\delta_{mm'} \tag{B.4}$$

siendo $\overline{Y}^{s\ *}_{lm}$ el conjugado de $\overline{Y}^{s}_{lm}$ dado por

$$\overline{Y}^{s\ *}_{lm} = (-1)^m \overline{Y}^{s}_{l(-m)}\,. \tag{B.5}$$

En este marco, los armónicos esféricos vectoriales pueden ser utilizados como base para expandir un vector $\overline{V}$ arbitrario de la forma

$$\overline{V} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\sum_{s=r,e,m} V^{s}_{lm}(r)\overline{Y}^{s}_{lm}(\theta,\varphi) \tag{B.6}$$

con $V^s_{lm}(r)$ fijados por la expresión para los coeficientes de Fourier

$$V^s_{lm}(r) = \int \overline{V} \cdot \overline{Y}^{s^*}_{lm} d\Omega \,. \tag{B.7}$$

Además, los armónicos esféricos vectoriales poseen la siguientes propiedades direccionales

$$\hat{r} \cdot \overline{Y}^r_{lm} = Y_{lm}, \quad \hat{r} \cdot \overline{Y}^e_{lm} = 0, \quad \hat{r} \cdot \overline{Y}^m_{lm} = 0 \,. \tag{B.8}$$

A su vez, las divergencias de los armónicos esféricos vectoriales estan dadas por

$$\nabla \cdot \overline{Y}^r_{lm} = \frac{2}{r} Y_{lm} \,, \tag{B.9}$$

$$\nabla \cdot \overline{Y}^e_{lm} = -\frac{\sqrt{l(l+1)}}{r} Y_{lm} \,, \tag{B.10}$$

$$\nabla \cdot \overline{Y}^m_{lm} = 0 \,, \tag{B.11}$$

mientras que sus rotores tienen la forma

$$\nabla \times \overline{Y}^r_{lm} = -\frac{\sqrt{l(l+1)}}{r} \overline{Y}^m_{lm} \,, \tag{B.12}$$

$$\nabla \times \overline{Y}^e_{lm} = \frac{1}{r} \overline{Y}^m_{lm} \,, \tag{B.13}$$

$$\nabla \times \overline{Y}^m_{lm} = -\frac{\sqrt{l(l+1)}}{r} \overline{Y}^r_{lm} - \frac{1}{r} \overline{Y}^e_{lm} \,, \tag{B.14}$$

y los laplacianos estan dados por las ecuaciones

$$\nabla^2 \overline{Y}^r_{lm} = -\frac{l(l+1)+2}{r^2} \overline{Y}^r_{lm} + \frac{2\sqrt{l(l+1)}}{r^2} \overline{Y}^e_{lm} \,, \tag{B.15}$$

$$\nabla^2 \overline{Y}^e_{lm} = \frac{2\sqrt{l(l+1)}}{r^2} \overline{Y}^r_{lm} - \frac{l(l+1)}{r^2} \overline{Y}^e_{lm} \,, \tag{B.16}$$

$$\nabla^2 \overline{Y}^m_{lm} = -\frac{l(l+1)}{r^2} \overline{Y}^m_{lm} \,. \tag{B.17}$$

B.2. Armónicos esféricos tensoriales

Los armónicos esféricos tensoriales pueden utilizarse como base de el espacio de tensores simétricos de dimensión seis. Es decir para un tensor arbitrario X puede utilizarse la expansión de la forma

$$X = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \sum_{Js} X_{lm}^{Js}(r) T_{lm}^{Js}, \quad Js = 0l, 0t, 1e, 1m, 2e, 2m \tag{B.18}$$

donde los armónicos esféricos tensoriales T_{lm}^{Js} pueden escribirse de la forma

$$T_{lm}^{0l} = \hat{r} \otimes \hat{r} Y_{lm}\,, \;\; T_{lm}^{0t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\delta - \hat{r} \otimes \hat{r}\right) Y_{lm}\,, \tag{B.19}$$

$$T_{lm}^{1e} = \sqrt{\frac{2}{l(l+1)}} r \left[\hat{r} \otimes \nabla Y_{lm}\right]^S \;, \;\; T_{lm}^{1m} = \sqrt{\frac{2}{l(l+1)}} \left[\hat{r} \otimes \overline{r} \times \nabla Y_{lm}\right]^S \;, \tag{B.20}$$

$$T_{lm}^{2e} = \sqrt{2\frac{(l-2)!}{(l+2)!}} \left[r^2 \nabla\nabla Y_{lm}\right]^{STT} \;, \;\; T_{lm}^{2m} = \sqrt{2\frac{(l-2)!}{(l+2)!}} \left[r \nabla \left(\overline{r} \times \nabla Y_{lm}\right)\right]^{STT} \;, \tag{B.21}$$

considerando que los armónicos esféricos de spin 0 están definidos para $l \geq 0$, los de spin 1 para $l \geq 1$ y los de spin 2 para $l \geq 2$. Los subíndices S hacen referencia a la parte simétrica y TT a la parte trasversal a versor $\hat{r}$ sin traza tomada para un tensor arbitrario X de la forma

$$X_{ij}^{TT} = \left(\delta_{ik} - \hat{r}_i \hat{r}_k\right) \left(\delta_{jn} - \hat{r}_j \hat{r}_n\right) X_{kn} - \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \hat{r}_i \hat{r}_j\right) \left[\left(\delta_{kn} - \hat{r}_k \hat{r}_n\right) X_{nk}\right] \,. \tag{B.22}$$

También, para los armónicos esféricos tensoriales vale la relación de ortogonalidad

$$\int Tr\left(T_{lm}^{JS} T^{*J'S''}_{l'm'}\right) d\Omega = \delta J J' \delta s s' \delta l l' \delta m m'\,, \tag{B.23}$$

donde T^{*JS}_{lm} es el complejo conjugado de T_{lm}^{JS} dado por.

$$T^{*JS}_{lm} = (-1)^m T^{JS}_{l-m}\,. \tag{B.24}$$

A su vez si se calculan las trazas de los tensores individualmente se tiene

$$\begin{aligned} Tr\left(T_{lm}^{0l}\right) &= Y_{lm}\,, \qquad Tr\left(T_{lm}^{0t}\right) = \sqrt{2} Y_{lm} \\ Tr\left(T_{lm}^{Js}\right) &= 0\,, \qquad Js = 1e, 1m, 2e, 2m\,. \end{aligned} \tag{B.25}$$

Además, es relevante tener en cuenta las direcciones de los armónicos esféricos a partir de las siguientes ecuaciones

$$\hat{r} \cdot T_{lm}^{0l} = \overline{Y}^r_{lm}\,, \qquad \hat{r} \cdot T_{lm}^{1e} = \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{Y}^e_{lm}\,, \qquad \hat{r} \cdot T_{lm}^{2e} = 0\,,$$

$$\hat{r}\cdot T^{0t}_{lm}=0\,,\qquad \hat{r}\cdot T^{1m}_{lm}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{Y}^{m}_{lm}\,,\qquad \hat{r}\cdot T^{2m}_{lm}=0\,. \tag{B.26}$$

Por último, divergencias de los armónicos esféricos tensoriales pueden ser escritas como

$$\nabla\cdot T^{0l}_{lm}=\frac{2}{r}\overline{Y}^{r}_{lm}\,, \tag{B.27}$$

$$\nabla\cdot T^{0t}_{lm}=-\frac{\sqrt{2}}{r}\overline{Y}^{r}_{lm}+\frac{1}{r}\sqrt{\frac{l(l+1)}{2}}\overline{Y}^{e}_{lm}\,, \tag{B.28}$$

$$\nabla\cdot T^{1e}_{lm}=-\frac{1}{r}\sqrt{\frac{l(l+1)}{2}}\overline{Y}^{r}_{lm}+\frac{1}{r}\frac{3}{\sqrt{2}}\overline{Y}^{e}_{lm}\,, \tag{B.29}$$

$$\nabla\cdot T^{1m}_{lm}=\frac{1}{r}\frac{3}{\sqrt{2}}\overline{Y}^{m}_{lm}\,, \tag{B.30}$$

$$\nabla\cdot T^{2e}_{lm}=-\frac{1}{r}\sqrt{\frac{(l-1)(l+2)}{2}}\overline{Y}^{e}_{lm}\,, \tag{B.31}$$

$$\nabla\cdot T^{2m}_{lm}=-\frac{1}{r}\sqrt{\frac{(l-1)(l+2)}{2}}\overline{Y}^{m}_{lm}\,, \tag{B.32}$$

y para los respectivos laplacianos vale que

$$\nabla^2 T^{0l}_{lm}=-\frac{l(l+1)+4}{r^2}T^{0l}_{lm}+\frac{2\sqrt{2}}{r^2}T^{0t}_{lm}+\frac{2\sqrt{2l(l+1)}}{r^2}T^{1e}_{lm}\,, \tag{B.33}$$

$$\nabla^2 T^{0t}_{lm}=\frac{2\sqrt{2}}{r^2}T^{0l}_{lm}-\frac{l(l+1)+2}{r^2}T^{0t}_{lm}-\frac{2\sqrt{l(l+1)}}{r^2}T^{1e}_{lm}\,, \tag{B.34}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 T^{1e}_{lm}=&\frac{2\sqrt{2l(l+1)}}{r^2}T^{0l}_{lm}-\frac{2\sqrt{l(l+1)}}{r^2}T^{0t}_{lm}\\&-\frac{l(l+1)+4}{r^2}T^{1e}_{lm}+\frac{2\sqrt{(l-1)(l+2)}}{r^2}T^{2e}_{lm}\,,\end{aligned} \tag{B.35}$$

$$\nabla^2 T^{1m}_{lm}=-\frac{l(l+1)+4}{r^2}T^{1m}_{lm}+\frac{2\sqrt{(l-1)(l+2)}}{r^2}T^{2m}_{lm}\,. \tag{B.36}$$

$$\nabla^2 T^{2e}_{lm}=\frac{2\sqrt{(l-1)(l+2)}}{r^2}T^{1e}_{lm}-\frac{(l-1)(l+2)}{r^2}T^{2e}_{lm}\,, \tag{B.37}$$

$$\nabla^2 T^{2m}_{lm}=\frac{2\sqrt{(l-1)(l+2)}}{r^2}T^{1m}_{lm}-\frac{(l-1)(l+2)}{r^2}T^{2m}_{lm} \tag{B.38}$$

Apéndice C

Programa en Mathematica para el estudio del gauge en la esfera

```
1) Se definen las coordenadas esféricas y gradiente en las mismas

rr={RSin[t]Cos[f], RSin[t]Sin[f], RCos[t]};
r={Sin[t]Cos[f], Sin[t]Sin[f], Cos[t]};
R1=Sqrt[x1^2+y1^2+z1^2]; t1=ArcTan[Sqrt[x1^2+y1^2]/z1];
f1=ArcTan[y1/x1]; a1={D[R1,x1],D[R1,y1],D[R1,z1]};
b1={D[t1,x1],D[t1,y1],D[t1,z1]};c1={D[f1,x1],D[f1,y1],D[f1,z1]};
x1=RCos[f]Sin[t]; y1=RSin[f]Sin[t]; z1=RCos[t];
a1=FullSimplify[PowerExpand[FullSimplify[a1]]];
b1=FullSimplify[PowerExpand[FullSimplify[b1]]];
c1=FullSimplify[PowerExpand[FullSimplify[c1]]];
grad[u_]:=a1 D[u,R]+b1 D[u,t]+c1 D[u,f]

2) Se hacen las suposiciones que permiten simplificar el calculo.
En particular las coordenadas R, t, y f son reales y l es entero
mayor o igual a 2. También se utiliza m = 0 (esto podría variarse).

$Assumptions=Element[f,Reals] && Element[t,Reals] && Element[R,Reals]
&& Element[l,Integers] && l >= 2 && Element[m,Integers]; m = 0;

3) Se definen los armónicos esféricos vectoriales

yr = FullSimplify[r SphericalHarmonicY[l, m, t, f]];
ye = FullSimplify[R/Sqrt[l (l + 1)] (grad[SphericalHarmonicY[l, m, t, f]])];
ym = FullSimplify[(LeviCivitaTensor[3].ye).r];
```

```
4) Se definen los armónicos esféricos  tensoriales

C0=1/Sqrt[2]; C1=Sqrt[2]; C2=Sqrt[2/(l-1)/(l+2)];
t0l=Simplify[1/2(Outer[Times,yr,r]+Outer[Times,r,yr])];
t0t=Simplify[C0(IdentityMatrix[3] SphericalHarmonicY[l,m,t,f]-t0l)];
t1e=Simplify[1/2 C1(Outer[Times,ye,r]+Outer[Times,r,ye])];
t1m=Simplify[1/2 C1(Outer[Times,ym,r]+Outer[Times,r,ym])];
tt2m=C2 Table[R/2(grad[ym[[i]]][[j]]+grad[ym[[j]]][[i]]),{i,1,3},{j,1,3}];
tt2e=C2 Table[R/2(grad[ye[[i]]][[j]]+grad[ye[[j]]][[i]]),{i,1,3},{j,1,3}];
t2m=Simplify[tt2m+(C2/Sqrt[2])t1m];
t2e=Simplify[tt2e+(C2/Sqrt[2])t1e+C2*Sqrt[l(l+1)/2]t0t];

5) Se agrega la componente temporal al vector de coordenadas
y se construye el operador gradiente cuadrivectorial

xx={T, RSin[t]Cos[f], RSin[t]Sin[f], RCos[t]};
d2=Table[0,{i,1,4}]; a2=Table[0,{i,1,4}];
b2=Table[0,{i,1,4}]; c2=Table[0,{i,1,4}];
Do[{a2[[i]]=a1[[i-1]]; b2[[i]]=b1[[i-1]];
c2[[i]]=c1[[i-1]]},{i,2,4}]; d2[[1]]=1;
cgrad[u_]:=d2 D[u,T]+a2 D[u,R]+b2 D[u,t]+c2 D[u,f]

6) Se fijan los parámetros del gauge beta y gamma a utilizar (de manera
que alfa=0) y se introduce el constraint obtenido a partir de h00

gamma=-Sqrt[(l-1)(l+2)]s; beta=s;
h0l[R,T]=Sqrt[l(l+1)/2]beta hte[R,T];

7) Se construye el tensor h a partir de sus partes escalar, vectorial
y tensorial con el gauge ya fijado

hs=h00[R,T];
ht=FullSimplify[h0r[R,T]*yr+h0m[R,T]*ym];
he=Simplify[h0l[R,T]*t0l+hte[R,T](beta*t1e+gamma*t2e)+h1m[R,T]*t1m];
h=Table[0,{i,1,4},{j,1,4}];
h[[1,1]]=hs; h[[1,2]]=ht[[1]]; h[[2,1]]=ht[[1]]; h[[1,3]]=ht[[2]];
h[[3,1]]=ht[[2]]; h[[1,4]]=ht[[3]]; h[[4,1]]=ht[[3]];
h[[2,2]]=he[[1,1]]; h[[3,3]]=he[[2,2]]; h[[4,4]]=he[[3,3]];
h[[2,3]]=he[[1,2]]; h[[3,2]]=he[[2,1]]; h[[2,4]]=he[[1,3]];
h[[4,2]]=he[[3,1]]; h[[3,4]]=he[[2,3]]; h[[4,3]]=he[[3,2]];
```

```
8) Se aplica el cgrad sobre h para construir el tensor de Riemann

Riemann1=Table[cgrad[cgrad[h[[a,d]]][[b]]][[c]],
{a,1,4},{b,1,4},{c,1,4},{d,1,4}];
Riemann2=Table[cgrad[cgrad[h[[b,d]]][[a]]][[c]],
{a,1,4},{b,1,4},{c,1,4},{d,1,4}];
Rieman=3Tablen[cgrad[cgrad[h[[b,c]]][[a]]][[d]],
{a,1,4},{b,1,4},{c,1,4},{d,1,4}];
Riemann4=Table[cgrad[cgrad[h[[a,c]]][[b]]][[d]],
{a,1,4},{b,1,4},{c,1,4},{d,1,4}];
Riemann=(Riemann1-Riemann2+Riemann3-Riemann4)/2;

9) Se arma lons cuadrivectores temporal, radial, electrico y magnetico

vr=Table[0,{i,1,4}]; ve=Table[0,{i,1,4}];
vm=Table[0,{i,1,4}]; vt=Table[0,{i,1,4}];
Do[vr[[i]]=yr[[i-1]]; ve[[i]]=ye[[i-1]];
vm[[i]]=ym[[i-1]], {i,2,4}]; vt[[1]]=1;

10) Se contrae el tensor de Riemann dos veces  en la direcion electrica

EE=Table[Sum[ve[[a]]*Riemann[[a,b,c,d]]*ve[[c]],
{a,1,4}, {c,1,4}],{b,1,4},{d,1,4}];

11) Se verifica que las contracciones con un tercer vector
eléctrico sean cero

Simplify[Sum[ve[[i]]*Ree[[i,j]]*ve[[j]],{i,1,4},{j,1,4}]]
0

Simplify[Sum[ve[[i]]*Ree[[i,j]]*ve[[j]],{i,1,4},{j,1,4}]]
0

Simplify[Sum[ve[[i]]*Ree[[i,j]]*ve[[j]],{i,1,4},{j,1,4}]]
0

12) Se calcula las contracciones eléctrica-radial-eléctrica-magnética
y eléctrica-magnética-eléctrica-magnética

EMEM=Sum[vm[[i]]*Ree[[i,j]]*vm[[j]],{i,1, 4},{j,1,4}];
EREM=Sum[vr[[i]]*Ree[[i,j]]*vm[[j]],{i,1,4},{j,1,4}];
```

```
13) Se extraen los coeficientes acompañando a h00, h0r, h0m, h1m, hte
y sus derivadas obteniéndose que son todos nulos excepto los que
acompañan a hte en EMEM y a h1men EREM. Aquí algunos ejemplos:

FullSimplify[Coefficient[EMEM, D[hte[R, T],R]]]
0

FullSimplify[Coefficient[EMEM, D[hte[R, T],T]]]
0

FullSimplify[Coefficient[EMEM,D[D[hte[R, T],T],R]]]
0

FullSimplify[Coefficient[EMEM, hte[R, T]]]
(1/(2 Sqrt[2] R^2 Sqrt[(2+l) Gamma[l] Gamma[3+l]]))Exp[-6If]s
SphericalHarmonicY[l,1,t,f]^4 (4 Exp[2If]Gamma[3+l]
SphericalHarmonicY[l,0,t,f]+(2+l+l^2) Sqrt[Gamma[l]Gamma[3+l]]
(2Exp[If]Sqrt[2+l]Cot[t] SphericalHarmonicY[l,1,t,f]+Sqrt[-1+l]
(2+l)SphericalHarmonicY[l,2,t,f]))

FullSimplify[Coefficient[EMEM, h1m[R, T]]]
0

FullSimplify[Coefficient[EREM, D[h1m[R, T],R]]]
0

FullSimplify[Coefficient[EREM, D[h1m[R, T],T]]]
0

FullSimplify[Coefficient[EREM,D[D[h1m[R, T],T],R]]]
0

FullSimplify[Coefficient[EREM, h1m[R, T]]]
(Exp[-6If]SphericalHarmonicY[l,0,t,f]SphericalHarmonicY[l,1,t,f]^3
(4Exp[If]Cot[t]Sqrt[Gamma[-2+l]Gamma[3+l]]SphericalHarmonicY[l,2,t,f]
+Sqrt[Gamma[-1+l]Gamma[4+l]]SphericalHarmonicY[l,3,t,f]))
/(2Sqrt[2] R^2 Sqrt[(Gamma[-2+l]Gamma[2+l])/(-1+l)])

FullSimplify[Coefficient[EREM, hte[R, T]]]
0
```

Agradecimientos

Para finalizar me gustaría agradecer a las personas cuya participación directa o indirecta hizo todo esto posible.

Principalmente a mi director, Horacio, por toda tu dedicación e infinita paciencia. No podría haber tenido mejor director.

A mi tío Celso que, a pesar de lo poco que nos vemos, es un gran guía para mi y una fuente interminable de consejos a la cual recurrir.

A mis amigos Apu, Churro, Chaco, Steve, Tincho, Tomi y Toni por todos los momentos compartidos y por aguantarme todos estos años.

Por ultimo, a las personas que más quiero, cuyo constante apoyo me permitió siempre alcanzar mis objetivos, mi Mamá y mi Papá.

Bibliografía

[1] M. Nielsen, I. Chuang, *Quantum computation and quantum information*, Cambridge University Press, Cambridge (2000).

[2] M. Rangamani, T. Takayanagi, *Holographic Entanglement Entropy*, Springer, Lecture Notes in Physics, volumen 931 (2016) [arXiv:1609.01287].

[3] H. Casini, M. Huerta, *A c-theorem for the entanglement entropy*, Journal of Physics A, volumen 40, número 25, páginas 7031-7036 (2007) [arXiv:cond-mat/0610375].

[4] H. Casini, M. Huerta, *A finite entanglement entropy and the c-theorem*, Physics Letters B, volumen 600, número 1-2, páginas 142-150 (2004) [arXiv:hep-th/0405111].

[5] H. Casini, M. Huerta, *On the RG running of the entanglement entropy of a circle*, Physical Review D, volumen 85, número 12, páginas 125016 (2012) [arXiv:1202.5650].

[6] H. Casini, E. Teste, G. Torroba, *Markov Property of the Conformal Field Theory Vacuum and the a Theorem*, Physical Review Letters, volumen 118, número 26, páginas 261602 (2017) [arXiv:1704.01870].

[7] I. Peschel, *Calculation of reduced density matrices from correlation functions*, Journal of Physics A, volumen 36, número 14, páginas 205-208 (2002) [arXiv:cond-mat/0212631].

[8] H.Casini, M.Huerta, *Entanglement entropy in free quantum field theory*, Journal of Physics A, volumen 42, número 50, páginas 504007 (2009) [arXiv:0905.2562].

[9] R. Lohmayer, H. Neuberger, A. Schwimmer, S. Theisen, *Numerical determination of entanglement entropy for a sphere*, Physics Letters B, volumen 685, número 2-3, páginas 222-227 (2010) [arXiv:0911.4283].

[10] S.N. Solodukhin, *Entanglement entropy, conformal invariance and extrinsic geometry*, Physics Letters B, volumen 665, número 4, páginas 305-309 (2008) [arXiv:0802.3117].

[11] H. Casini, M.Huerta, J.A. Rosabal, *Remarks on entanglement entropy for gauge fields*, Physical Review D, volumen 89, número 8, páginas 085012, (2014) [arXiv:1312.1183]

[12] H.Casini, M.Huerta, *Entanglement entropy of a Maxwell field on the sphere*, Physical Review D, volumen 93, número 10, páginas 105031 (2016) [arXiv:1512.06182].

[13] J.S. Dowker, *Entanglement entropy for even spheres* (2010) [arXiv:1009.3854].

[14] U. Fano, *Description of States in Quantum Mechanics by Density Matrix and Operator Techniques*, Reviews of Modern Physics, volumen 29, número 1, páginas 74-93 (1957).

[15] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*, Physical Review Letters, volumen 47, número 10, páginas 777-780 (1935).

[16] B.C. Hall, *Quantum Theory for Mathematicians*, *Capítulo 19:Systems and Subsystems, Multiple Particles*, Graduate Texts in Mathematics, Springer(2013).

[17] A. Wehrl, *General properties of entropy*, Reviews of Modern Physics, volumen 50, número 2, páginas 221-260 (1978).

[18] H. Casini, *Geometric entropy, area, and strong subadditivity* , Classical and Quantum Gravity, volumen 21, número 9, páginas 2351-2378 (2004) [arXiv:hep-th/0312238]

[19] H. Casini, E. Teste, G. Torroba, *Modular Hamiltonians on the null plane and the Markov property of the vacuum state*, Journal of Physics A, volumen 50, número 36, páginas 364001 [arXiv:1703.10656]

[20] H. Casini, M. Huerta, R.C. Myers, *Towards a derivation of holographic entanglement entropy*, Journal of High Energy Physics, 2011:36 (2011) [arXiv:1102.0440].

[21] M.B. Hastings, *An Area Law for One Dimensional Quantum Systems*, Journal of Statistical Mechanics, volumen 2007, número 8, páginas P08024 (2007) [arXiv:0705.2024]

[22] G. Vidal, J. I. Latorre, E. Rico, A. Kitaev, *Entanglement in quantum critical phenomena*, Physical Review Letters, volumen 90, número 22, páginas 227902 (2003) [arXiv:quant-ph/0211074].

[23] C. Holzhey, F. Larsen, F. Wilczek, *Geometric and renormalized entropy in conformal field theory*, Nuclear Physics B, volumen 424, número 3, páginas 443-467 (1994) [arXiv:hep-th/9403108].

[24] P. Calabrese, J.L. Cardy, *Entanglement entropy and quantum field theory*, Journal of Statistical Mechanics, volumen 2004, número 6, páginas P06002 (2004) [arXiv:hep-th/0405152];

[25] A.B. Zamolodchikov, *'Irreversibility' of the flux of the renormalization group in a 2D field theory*, JETP Letters, volumen 43, número 12, páginas 730-733 (1986).

[26] H. Casini, M. Huerta, R.C. Myers, A. Yale, *Mutual information and the F-theorem*, Journal of High Energy Physics 2015:3, (2015) [arXiv:1506.06195].

[27] L. Bombelli, R.K. Koul, J.H. Lee, R.D. Sorkin,*Quantum source of entropy for black holes*, Physical Review D, volumen 34, número 2, páginas 373-383 (1986).

[28] M. Srednicki, *Entropy and Area*, Physical Review Letters,, volumen 71, número 5, páginas 666-669 (1993) [arXiv:hep-th/9303048].

[29] T. Barthel, S. Dusuel, J. Vidal, *Entanglement Entropy beyond the Free Case*,Physical Review Letters, volumen 97, número 22, páginas 220402 (2006) [arXiv:cond-mat/0606436].

[30] D. Tong, *Lectures in theoretical physics: Quantum field Theory*, University of Cambridge Part III Mathematical Tripos, capítulo 3, página 58 (2006) [http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qft.html].

[31] H.Casini, M.Huerta, *Entanglement and alpha entropies for a massive scalar field in two dimensions*, Journal of Statistical Mechanics, volumen 2005, número 12, páginas P12012 (2005) [arXiv:cond-mat/0511014].

[32] A. Riera, J.I. Latorre, *Area law and vacuum reordering in harmonic networks*, Physical Review A, volumen 74, número 5, páginas 052326 (2006) [arXiv:quant-ph/0605112].

[33] J.D. Bekenstein, *Black Holes and Entropy*, Physical Review D, volumen 7, número 8, páginas 2333-2346 (1973).

[34] G.W. Gibbons, S.W. Hawking, *Action integrals and partition functions in quantum gravity*, Physical Review D, volumen 15, número 10, páginas 2752-2756 (1977).

[35] H. Casini, M. Huerta, *Entanglement entropy for a Maxwell field: Numerical calculation on a two dimensional lattice*, Physical Review D, volumen 90, número 10, páginas 105013 (2014) [arXiv:1406.2991].

[36] S. Ghosh, R.M. Soni, S.P. Trivedi, *On The Entanglement Entropy For Gauge Theories*, Journal of High Energy Physics, 2015:69 (2015) [arXiv:1501.02593]

[37] G. Compère, R. Oliveri, A. Seraj, *Gravitational multipole moments from Noether charges* Journal of High Energy Physics, 2018:54 (2018) [arXiv:1711.08806]

[38] K.S. Thorne, *Multipole expansions of gravitational radiation*, Review of Modern Physics, volumen 52, número 2, páginas 299-339 (1980).

[39] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler; *Gravitation*, Capítulo 18, W.H. Freeman and Company, San Francisco (1973).

[40] S. Weinberg; *Gravitation and Cosmology: Principles and applications of the General Theory of Relativity*, Capítulo 10, John Wiley & Sons, Nueva York (1972).

[41] Christopher M. Hirata; *Lecture VIII: Linearized gravity*; Caltech University (2012) [http://www.tapir.caltech.edu/~chirata/ph236/lec08.pdf]

[42] H. Casini, R. Montemayor, L.F. Urrutia, *Duality for symmetric second rank tensors. I: the massive case*, Physical Review D, volumen 66, número 8, páginas 085018 (2002) [arXiv:hep-th/0206129]

[43] H. Casini, R. Montemayor, L.F. Urrutia, *Duality for symmetric second rank tensors. II. The linearized gravitational field* , Physical Review D, volumen 68, número 6, páginas 065011 (2003) [arXiv:hep-th/0304228]

[44] S.N. Gupta, *Quantization of Einstein's Gravitational Field: Linear Approximation*, Proceedings of the Physical Society, Section A, volumen 65, número 3, páginas 161-169 (1952).

[45] L. Bracci, F. Strocchi, *Local and Covariant Quantization of Linearized Einstein's Equations*, Journal of Mathematical Physics, volumen 13, número 8 (1972).

[46] T.Regge, J.A.Wheeler, *Stability of a Schwarzschild Singularity* Physical Review Letters, volumen 108, número 4, páginas 1063-1069 (1957).