UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesina de Licenciatura en Matemática

Grupos de isometrías de grupos de Lie tridimensionales

Ana Cosgaya

Director: Dr. Silvio Reggiani

28 de mayo de 2021
ROSARIO

Resumen

Dado un grupo de Lie G, una métrica invariante a izquierda g en G queda determinada por la elección de un producto interno en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G, que usualmente se denota también por g. Si g' es otra métrica invariante a izquierda en G, decimos que g' es equivalente a g si existe un automorfismo $\phi \in \text{Aut}\, G$ tal que $\phi{*}g = g'$. El problema de la determinación de todas las métricas invariantes a izquierda en G salvo automorfismo isométrico es un problema abierto y muy difícil en el área de la geometría homogénea. De hecho, incluso en dimensiones bajas no se conoce la solución por completo y cualquier resultado parcial resulta interesante.

En este trabajo se estudian los contenidos básicos para plantear el problema de forma precisa. Estos tópicos en general no forman parte de los planes de estudio de las licenciaturas en matemática e incluyen: los conceptos de variedad diferenciable y grupo de Lie, el concepto de álgebra de Lie de un grupo de Lie y la correspondencia subgrupo/ subálgebra.

Índice general

1 Preliminares

Vamos a empezar definiendo algunos conceptos básicos para desarrollar los resultados que se desean estudiar.

Vale mencionar que todos los espacios vectoriales refieren a espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$.

1.1. Álgebras de Lie

Comencemos entonces por definir aquellos conjuntos con los que se trabajarán y las operaciones que actúan en ellos.

Definición: Un *álgebra de Lie* es un espacio vectorial junto con una operación bilineal:

$$[.,.] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

que cumple con las siguientes propiedades:

- Antisimetría: $[X, Y] = -[Y, X]$.
- Identidad de Jacobi: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

(a $[.,.]$ lo llamamos "corchete de Lie").

Subálgebra.

$\mathfrak{h}$ es un subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ si $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ para todos $X, Y \in \mathfrak{h}$.

Ideal.

$\mathfrak{h}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$ si $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ para todos $X \in \mathfrak{h}$, $Y \in \mathfrak{g}$.

Morfismos de álgebras de Lie.

Si $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ son dos álgebras de Lie, una transformación lineal $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ es un *morfismo de álgebras de Lie* si se verifica:

$$\varphi([X,Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)] \text{ para todos } X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Es decir que se preserva la estructura, esto es que φ es lineal y respeta el corchete.

Si φ es biyectiva, diremos que es un *isomorfismo* de álgebras de Lie.

Un isomorfismo de álgebras de Lie donde $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$ es un *automorfismo* de $\mathfrak{g}$.

El *grupo de automorfismos* de $\mathfrak{g}$ es

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) = \{\phi \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g}) : \phi \text{ es un automorfismo de } \mathfrak{g}\}.$$

Notar que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ es un grupo con la composición. Aquí estamos denotando por $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ al grupo de isomorfismos lineales de $\mathfrak{g}$. Si $\dim \mathfrak{g} = n$, fijando una base de $\mathfrak{g}$ podemos identificar $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ con $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Como la condición de respetar el corchete está dada por un sistema de ecuaciones polinomiales, tenemos que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ es un subgrupo cerrado de $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ y por lo tanto $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ es un grupo de Lie.

Representación adjunta.

El corchete de Lie es una aplicación bilineal y una forma natural de estudiar aplicaciones bilineales es fijando una coordenada y obteniendo una aplicación lineal de la otra variable. Más precisamente, si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie y $X \in \mathfrak{g}$, definimos $\mathrm{ad}_X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ por

$$\mathrm{ad}_X Y = [X, Y], \; Y \in \mathfrak{g}.$$

Como ad_X es lineal para cada X, o dicho de otra forma, $\mathrm{ad}_X \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ (el álgebra de Lie de transformaciones lineales de $\mathfrak{g}$) podemos definir la llamada *representación adjunta* $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ que a cada X le asigna la transformación ad_X.

Como el corchete de Lie es bilineal, tenemos que ad es una transformación lineal. Más aún, tanto $\mathfrak{g}$ como $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ son álgebras de Lie y la identidad de Jacobi nos dice que ad es un morfismo de álgebras de Lie.

Es conveniente definir entonces ahora: Un álgebra de Lie es *unimodular* si y sólo si $\mathrm{tr}\, \mathrm{ad}_X = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$.

Derivaciones.

Otro concepto importante asociado a cualquier álgebra es el de derivación (transformaciones lineales que satisfacen la regla de Leibniz). En nuestro caso esto es importante porque, como veremos más adelante, las derivaciones de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ forman el álgebra de Lie del grupo de automorfismos de $\mathfrak{g}$. Más precisamente, si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie, una transformación lineal $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ es una derivación de $\mathfrak{g}$ si satisface

$D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY]$ para todos $X, Y \in \mathfrak{g}$. El conjunto de todas las derivaciones de $\mathfrak{g}$ se suele denotar por $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ y forma una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

Coeficientes de estructura.

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie de dimensión n y $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de $\mathfrak{g}$, los *coeficientes de estructura* c_{ij}^k de $\mathfrak{g}$ asociados a dicha base se definen por:

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k e_k.$$

Estos coeficientes son necesarios para hacer ciertos cómputos, por ejemplo, es muy fácil recuperar la matriz de ad_{e_i} a partir de los coeficientes de estructura. En este sentido, uno siempre trata de encontrar una base de $\mathfrak{g}$ tal que haya muchos ceros entre los c_{ij}^k pues esto en teoría simplifica las cuentas. Sin embargo, la principal limitación es que no son un invariante del álgebra de Lie, por lo que no son demasiado útiles para distinguir si dos álgebras de Lie son isomorfas o no. Es decir, es claro que dos álgebras de Lie son isomorfas si y sólo si existen una base de cada una con los mismos coeficientes de estructura. Pero también es cierto que si uno hace un cambio de base, en general los coeficientes de estructura van a cambiar.

Ejemplos de álgebras de Lie.

1. Si consideramos, $\mathbb{R}^n$ con el corchete definido por $[A, B] = 0 \ \forall A, B \in \mathbb{R}$, obtenemos el álgebra de Lie abeliana.

2. El álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ son las matrices $n \times n$ con el corchete definido por $[A, B] = AB - BA$. Tiene dimensión n^2. (También podemos considerar $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ con un corchete análogo).

3. El álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) : \operatorname{tr} A = 0\}$ está dado por el corchete conmutador (es decir, el corchete de las matrices es cerrado si nos restringimos al subespacio de matrices de traza nula), con $\dim \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) = 3$.

   Este álgebra tiene una base $\{e, f, h\}$ tal que

   $$[e, f] = h. \qquad [e, h] = -2e, \qquad [f, h] = 2f$$

   y consecuentemente

   $$\mathrm{ad}_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{ad}_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{ad}_h = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Todas con traza cero por lo que $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ es unimodular.

4. El álgebra de Lie de Heisenberg $\mathbb{H}_1$. Existe una base $\{X, Y, Z\}$ tal que $[X, Y] = Z$ (y los demás corchetes en la base son nulos). En esta base se verifica que
$$\mathrm{ad}_X = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&1&0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{ad}_Y = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\-1&0&0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{ad}_Z = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}.$$
5. El conjunto $\mathfrak{e}(2)$ es álgebra de Lie con el corchete dado a partir de una base $\{E_1, E_2, E_3\}$:

   $[E_1, E_2] = E_3 \qquad [E_1, E_3] = -E_2 \qquad [E_2, E_3] = 0$ y por ende,
$$\mathrm{ad}_{E_1} = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{ad}_{E_2} = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\-1&0&0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{ad}_{E_3} = \begin{pmatrix} 0&0&0\\1&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}.$$
6. El conjunto $\mathfrak{e}(1,1)$ con el corchete definido a partir de una base $\{F_1, F_2, F_3\}$:

   $[F_1, F_2] = F_3 \qquad [F_1, F_3] = F_2 \qquad [F_2, F_3] = 0$ y por ende,
$$\mathrm{ad}_{F_1} = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&1\\0&1&0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{ad}_{F_2} = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\-1&0&0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{ad}_{F_3} = \begin{pmatrix} 0&0&0\\-1&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}.$$
7. $\mathfrak{su}(2) = \{A \in \mathfrak{gl}(2,\mathbb{C}) : A + A^* = 0 \text{ y } \operatorname{tr} A = 0\} = \mathfrak{u}(2) \cap \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ es un álgebra de Lie real y $\dim \mathfrak{su}(2) = 3$. En la base
$$X_1 = \begin{pmatrix} 0&1\\-1&0 \end{pmatrix} \qquad X_2 = \begin{pmatrix} i&0\\0&-i \end{pmatrix} \qquad X_3 = \begin{pmatrix} 0&i\\i&0 \end{pmatrix}.$$
   Se tiene que
$$\mathrm{ad}_e = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&2\\0&-2&0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{ad}_f = \begin{pmatrix} 0&0&-2\\0&0&0\\2&0&0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{ad}_h = \begin{pmatrix} 0&2&0\\-2&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}.$$
8. El álgebra de Lie $\mathfrak{so}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) : A + A^T = 0\}$ es el subespacio de matrices antisimétricas de tamaño $n \times n$ con el conmutador.

   Notar que $\mathfrak{so}(n) \subset \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ y $\dim \mathfrak{so}(n) = n(n-1)/2$, en particular $\dim \mathfrak{so}(3) = 3$.

Forma de Killing

Esta forma que se presenta ahora junto a sus propiedades resulta ser una herramienta muy útil al momento de hacer clasificaciones de álgebras según isomorfismos.

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, la *forma de Killing* de $\mathfrak{g}$ es la forma bilineal:
$$\begin{aligned} B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\to \mathbb{R} \\ (X, Y) &\to B(X, Y) = \operatorname{tr}(\mathrm{ad}_X \cdot \mathrm{ad}_Y). \end{aligned}$$

La forma de Killing posee las siguientes propiedades:

1. Simétrica: $B(X, Y) = B(Y, X)$.
2. Bi-invariante: $B([X, Y], Z) = B(X, [Y, Z])$.
3. Invariante por automorfismo.

Más aún, si $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ es un isomorfismo de álgebras de Lie, con B, B' formas de Killing de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}'$ respectivamente, entonces:

$$B'(\varphi(X), \varphi(Y)) = B(X, Y) \ \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Lo que resulta muy útil para distinguir en qué casos dos álgebras de Lie **no** son isomorfas.

Por ejemplo: $\mathfrak{e}(2) \not\simeq \mathfrak{e}(1,1)$. Es fácil ver que $\mathfrak{e}(2)$ tiene una base $\{X_1, X_2, X_3\}$ tal que

$$[X_1, X_2] = X_3 \qquad [X_1, X_3] = -X_2 \qquad [X_2, X_3] = 0.$$

Equivalentemente, si escribimos ad_{X_i} en esta base tendremos que

$$\mathrm{ad}_{X_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{ad}_{X_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{ad}_{X_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y por ende } B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Análogamente, $\mathfrak{e}(1,1)$ tiene una base $\{X_1', X_2', X_3'\}$ tal que

$$[X_1', X_2'] = X_3', \qquad [X_1', X_3'] = X_2', \qquad [X_2', X_3'] = 0,$$

por lo que en esta base la forma de Killing es $B' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Como B es semidefinida positiva y B' es semidefinida negativa, no puede haber ningún isomorfismo de álgebras de Lie que lleve B en B'. Concluimos que $\mathfrak{e}(2)$ no es isomorfa a $\mathfrak{e}(1,1)$.

Álgebras de Lie solubles.

Asociada a cualquier álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, tenemos la serie derivada $\mathfrak{g}^0 \rhd \mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \rhd \mathfrak{g}^2 = [[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] \rhd \mathfrak{g}^3 = [[[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]], [[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]]] \rhd \ldots$ es decir $\mathfrak{g}^i = [\mathfrak{g}^{i-1}, \mathfrak{g}^{i-1}]$ (usamos la notación $\mathfrak{a} \rhd \mathfrak{b}$ para decir que $\mathfrak{b}$ es un ideal de $\mathfrak{a}$). Decimos que $\mathfrak{g}$ es *soluble* si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{g}^k = \{0\}$. También suele decirse que $\mathfrak{g}$ es k-pasos soluble si $\mathfrak{g}^k = \{0\}$ pero $\mathfrak{g}^{k-1} \neq \{0\}$.

Algunos ejemplos: El álgebra de Lie abeliana; $\mathbb{H}_1$; $\mathfrak{e}(2)$; $\mathfrak{e}(1,1)$ las matrices triangulares superiores (o inferiores).

Álgebras de Lie nilpotentes.

Similarmente a la serie derivada, si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie, definimos la serie central descendente $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g} \rhd \mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \rhd \mathfrak{g}_2 = [\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] \rhd \mathfrak{g}_3 = [\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]]] \rhd \dots$ es decir $\mathfrak{g}_i = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{i-1}]$. Decimos que $\mathfrak{g}$ es *nilpotente* si $\mathfrak{g}_k = \{0\}$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Se dice que $\mathfrak{g}$ es k-pasos nilpotente si $\mathfrak{g}_k = \{0\}$ pero $\mathfrak{g}_{k-1} \neq \{0\}$.

Algunos ejemplos: El álgebra de Lie abeliana; las matrices triangulares estrictas $t_0(n) = \{A \in t(n) : A_{ii} = 0 \text{ para todo } i\}$, además tenemos que si un álgebra de Lie es nilpotente, también es soluble. La recíproca no es válida.

Otra aplicación de la forma de Killing: Si $\mathfrak{g}$ es nilpotente, entonces $B = 0$.

En efecto, si $\mathfrak{g}$ es k pasos nilpotente, entonces $[X_1, [X_2, \dots, [X_k, X_{k+1}]]] = 0$ para todos $X_1, \dots, X_k, X_{k+1} \in \mathfrak{g}$. En particular si tomamos $X_i = X$ para i impar y $X_i = Y$ para i par concluimos que $\mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y$ es nilpotente para todos $X, Y \in \mathfrak{g}$. Por la forma de Jordan sabemos que un operador nilpotente tiene traza cero, por ende $0 = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y) = B(X, Y)$.

Álgebras de Lie semisimples

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie.

Decimos que $\mathfrak{g}$ es *simple* si $\mathfrak{g}$ es no abeliana y sus únicos ideales son 0 y $\mathfrak{g}$.

Decimos que $\mathfrak{g}$ es *semisimple* si es una suma directa de ideales simples, es decir $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k$ con $\mathfrak{g}_\mathrm{i}$ simple para todo i (el corchete es coordenada a coordenada).

Las álgebras semisimples presentan las siguientes propiedades elementales:

1. $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$, pues el conmutador de $\mathfrak{g}$ es un ideal.
2. El centro de un álgebra de Lie semisimple es trivial (pues es un ideal abeliano).
3. En particular, la representación adjunta $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ es un monomorfismo de álgebras de Lie (recordar que el núcleo de la representación adjunta es el centro de $\mathfrak{g}$). Esto nos dice que cualquier álgebra de Lie semisimple puede representarse "fielmente" como una subálgebra de matrices, vía la representación adjunta y el isomorfismo $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \simeq \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. En realidad, hay un resultado general llamado Teorema de Ado que dice que cualquier álgebra de Lie puede representarse como una subálgebra de matrices (pero no siempre esta representación es la representación adjunta).

Algunos ejemplos: $\mathfrak{so}(3) \simeq \mathfrak{su}(2)$ es simple; $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ es semisimple y $\mathfrak{so}(4)$ es semisimple pero no simple.

1.2. Nociones de geometría riemanniana.

1.2.1. Variedades diferenciables y variedades riemannianas.

Estos conjuntos nos permiten generalizar espacios ya conocidos para estudiarlos en el sentido diferencial.

Definición: Una *variedad diferenciable de dimensión n* es un conjunto M junto con una familia de aplicaciones inyectivas $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$, U_α conjunto abierto tal que:

1. $\bigcup\limits_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$
2. $\forall \alpha, \beta / x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset, x_\alpha^{-1}(w), x_\beta^{-1}(w)$ son conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$ con $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ diferenciable.
3. La familia (U_α, x_α) es maximal respecto de (1) y (2).

Algunos ejemplos: $\mathbb{R}^3; \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4; \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

Espacio tangente a M en p.

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n, $p \in M$ y $c(t)$ es una curva diferenciable en M. Supongamos que $c(0) = v \in M$. El vector tangente a la curva c en $t = 0$ es una función definida por

$$\alpha'(0)f = \left.\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\right|_{t=0}$$

con f función diferenciable en p.

Un *vector tangente* a M en p se define como la velocidad de una curva que pasa por p. Más precisamente, v es un vector tangente a M en p si existe una curva (diferenciable) $c : \mathbb{R} \to M$ tal que $c(0) = p$ y $c'(0) = v$. El *espacio tangente* a M en p se define como $T_pM = \{v : v \text{ es un vector tangente a } M \text{ en } p\}$.

Sea $v \in T_pM$; $f : M \to \mathbb{R}$ función diferenciable, entonces $v(f) = \frac{d}{dt}|_0 f(c(t))$ es denominada *derivada direccional de f en dirección de v*, donde $c(t)$ es cualquier curva tal que $c'(0) = v$.

Usando vectores tangentes también podemos definir la *diferencial de una función* $f : M \to N$ entre dos variedades diferenciables: la diferencial de f en p es la transformación lineal $df|_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ tal que para todo $v \in T_pM$, $df|_p(v) \in T_{f(p)}N$ es el vector tangente tal que

$$df|_{p(v)}(g) = v(g \circ f) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 g(f(c(t)))$$

en donde $g : N \to \mathbb{R}$ es cualquier función diferenciable y $c(t)$ es cualquier curva en M con $c'(0) = v$.

Un campo X en una variedad diferenciable M es una asignación entre $p \in M$ y el vector tangente $X_p \in T_pM$ para cada $p \in M$. Es decir, $X : M \to T_pM$. Diremos que se trata de un *campo diferenciable* X cuando la aplicación lo sea. Si $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ son coordenadas locales de M podemos definir (localmente) los *campos coordenados* asociados a esas coordenadas locales como sigue: si p está en el dominio de φ, entonces $te_i + \varphi(p)$ es una curva en $\mathbb{R}^n$ con velocidad inicial e_i (el i-ésimo vector de la base canónica) que en $t = 0$ pasa por $\varphi(p)$. Luego, para t pequeño, $\varphi^{-1}(te_i + \varphi(p))$ es una curva de M que en $t = 0$ pasa por p. Definimos el i-ésimo campo coordenado en el punto p como

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \varphi^{-1}(te_i + \varphi(p)).$$

Cualquier campo X se escribe localmente como una combinación lineal de los campos coordenados (con coeficientes funcionales): $X_p = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(p) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$, de hecho, por definición, que X sea diferenciable, significa que las funciones $a_i : M \to \mathbb{R}$ son funciones diferenciables.

Una *métrica riemanniana* (o *estructura riemanniana*) sobre una variedad M, es una correspondencia que asocia a cada punto p de M un producto interno $\langle ., . \rangle_p$ (simétrico, lineal, definido positivo) en el espacio tangente T_pM que varía diferenciablemente de la siguiente forma:

Si $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ es un sistema de coordenadas para p, con $x(x_1, x_2, \dots, x_n) = q \in x(U)$ y $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx_q(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, entonces $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \rangle_q = g_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es una función diferenciable sobre U.

A partir de ahora llamaremos *variedades riemannianas* a aquellas variedades que presenten una métrica riemanniana

Lo importante de tener una métrica riemanniana es que podemos definir las nociones geométricas que tenemos definidas en un espacio euclídeo (de hecho, con nuestra definición todo espacio euclídeo es una variedad Riemanniana). Por ejemplo, el *ángulo* entre dos curvas que se cortan en un punto p se define como el ángulo entre sus velocidades en T_pM. También podemos definir una *distancia* de la siguiente forma. Si $c : [a, b] \to M$ es una curva diferenciable en M, definimos su longitud como

$$L(c) = \int_a^b |c'(t)|\mathrm{dt} = \int_a^b \sqrt{\langle c'(t), c'(t) \rangle_{c(t)}}\mathrm{dt},$$

y con esto definimos para p, $q \in M$,

$$d(p,q) = \text{ínf}\{L(c) : \ c : [0,1] \to M \text{ es una curva con } c(0) = p \text{ y } c(1) = q\}.$$

Si M es una variedad diferenciable, una *conexión afín* en M es un operador

$$\begin{array}{rcl} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) & \to & \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) & \mapsto & \nabla_X Y \end{array}$$

que satisface

1. ∇ es $\mathbb{R}$-bilineal
2. ∇ es tensorial en la primera variable: $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$
3. $\nabla_X fY = X(f)Y + f\nabla_X Y$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$.

Asociada a una conexión afín ∇ se tiene un operador de *derivación covariante* a lo largo de curvas. Si $c : I \subset \mathbb{R} \to M$ es una curva diferenciable y X es un campo a lo largo de c, es decir $X(t) \in T_{c(t)}M$, la derivada covariante de X a lo largo de c, denotada por

$$\frac{D^c X}{dt}$$

es un campo a lo largo de c con las siguientes propiedades:

1. $\frac{D^c}{dt}(V + W) = \frac{D^c}{dt} V + \frac{D^c}{dt} W$.
2. $\frac{D^c}{dt}(fV) = (\frac{D^c}{dt} f)V + f\frac{D^c}{dt} V$.
3. Si V es inducido por un campo vectorial $Y \in \mathfrak{X}(M)$, es decir, $V(t) = Y(c(t))$, entonces $\frac{D^c}{dt} V = \nabla_{\frac{d}{dt}c} Y$.

El campo X se dice *paralelo* a lo largo de c si $DX/dt = 0$ para todo $t \in I$.

Una conexión afín se dice *sin torsión* si $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$.

Si además M es riemanniana, decimos que una conexión afín es una *conexión métrica* si

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle.$$

En una variedad riemanniana M existe una única conexión métrica y sin torsión, llamada la *conexión de Levi-Civita de M*.

Sea M una variedad riemanniana y ∇ su conexión de Levi-Civita, decimos que una curva $\gamma(t) \in M$ es una *geodésica* si su velocidad es paralela:

$$\frac{D^\gamma \gamma'}{dt} = 0. \tag{1}$$

Dado $p \in M$ y $v \in T_pM$ existe una unica geodésica $\gamma(t)$ para t suficientemente pequeño tal que $\gamma(0) = 0$ y $\gamma'(0) = v$, la cual se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (1).

A partir de ahora sea M riemanniana y ∇ su conexión de Levi-Civita. El *tensor de curvatura* R de M es el tensor definido por

$$R_{X,Y}Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \in \mathfrak{X}(M)$$

para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Sea $\mathbb{V} \subset T_pM$ un subespacio de dimensión 2, la *curvatura seccional* $\kappa(\mathbb{V})$ se define como

$$\langle R_{u,v}v, u\rangle$$

en donde u, v es una base ortonormal de $\mathbb{V}$ (y esta definición es independiente de la base ortonormal elegida). Se dice que M es de *curvatura constante* si κ es independiente de $\mathbb{V}$ y también es independiente de p.

Espacios de curvatura constante (modelos completos y simplemente conexos):

- $\mathbb{R}^3$ con la métrica euclídea
- la esfera S^3 con la métrica inducida de $\mathbb{R}^4$: dados $v, w \in T_pS^3 \simeq \{p\}^\perp$,

$$\langle v, w\rangle_p = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 + v_4w_4$$

- El espacio hiperbólico $\mathbf{H}^3$. Como variedad diferenciable podemos considerar el modelo del semiespacio superior

$$H^3 = \{p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$$

  y en cada espacio tangente $T_pH^3 \simeq \mathbb{R}^3$ consideramos la métrica hiperbólica

$$\langle v, w\rangle_p = \frac{(v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3)}{z}$$

Un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ se dice un *campo de Killing* si su derivada covariante ∇X es antisimétrica, es decir,

$$\langle\nabla_Y X, Z\rangle + \langle Y, \nabla_Z X\rangle = 0.$$

Equivalentemente, el flujo local de X está dado por isometrías. Un campo de Killing queda completamente determinado por sus condiciones iniciales $v = X_p$ y $B = (\nabla X)_p \in \mathfrak{so}(T_pM)$ en un punto dado $p \in M$. En particular, si X es Killing, entonces $X = 0$ sii $X_p = 0$ y

$(\nabla X)_p = 0$.

1.2.2. Grupos de Lie y grupos de Lie con métricas invariantes a izquierda.

Ahora definiremos conjuntos con estructuras un poco más complejas e interesantes.

Grupo de Lie. Se trata de un grupo G que también es variedad diferenciable y resultan diferenciables:

$$\begin{array}{rccc} \text{prod}: & G\times G & \to & G \\ & (g,h) & \to & gh \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \text{inv}: & G & \to & G \\ & g & \to & g^{-1}. \end{array}$$

Los grupos de Lie de dimensión 3 con los que trabajaremos, pueden ser representados como subgrupos cerrados de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ para algún n. En el caso de los grupos que son simplemente conexos, son difeomorfos a $\mathbb{R}^3$, por lo que presentan las mismas estructuras diferenciables. Las excepciones son: $\mathrm{SU}(2)$ y $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

Álgebra de Lie de un grupo de Lie: álgebra de campos invariantes.

El conjunto de campos vectoriales en M se denota por $\mathfrak{X}(M)$. Los campos vectoriales se pueden "componer" de la siguiente manera: si $X,\ Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in C^\infty(M)$, entonces tiene sentido hacer $X(Y(f))$, ya que al ser $Y(f)$ una función diferenciable, podemos derivarla nuevamente en la dirección de X. Sin embargo, XY así definido no es un campo vectorial (en el sentido algebraico que definimos más arriba), pues no satisface necesariamente la regla de Leibniz.

Lema 1. *Si $X,\ Y \in \mathfrak{X}(M)$ entonces $[X,Y] = XY - YX \in \mathfrak{X}(M)$. Más aún, con este corchete, $\mathfrak{X}(M)$ es un álgebra de Lie real de dimensión infinita.*

Lema 2 (Teorema de Clairaut)**.** *Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y escribamos en coordenadas locales $X = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y = \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ entonces (localmente) $[X,Y] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j})\frac{\partial}{\partial x_i}$. Tenemos así que los campos coordenados conmutan: $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$.*

Sean G un grupo de Lie y $g \in G$. La traslación a izquierda $L_g : G \to G$ definida por $L_g(x) = gx$ es un difeomorfismo de G (es decir, es diferenciable y tiene inversa diferenciable $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$). En particular, para todo $x \in G$, la diferencial $dL_g|_x : T_xG \to T_{gx}G$ de L_g en el punto x es un isomorfismo lineal entre los respectivos espacios tangentes. Un campo X en G se dice *invariante a izquierda* si es invariante por traslaciones a izquierda, es decir, $dL_g|_x(X_x) = X_{gx}$ para todos $x, g \in G$. Ahora, tomando $x = e$ concluimos que un campo invariante a izquierda queda completamente determinado por su valor en la identidad $e \in G$.

Se puede probar que un campo invariante a izquierda es automáticamente diferenciable y que el corchete de Lie de dos campos invariantes a izquierda es nuevamente un campo invariante a izquierda. Es decir, los campos invariantes a izquierda forman un subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(G)$ llamada el *álgebra de Lie de G*, que usualmente se denota por $\mathfrak{g}$. Como acabamos de ver, hay un isomorfismo natural entre $\mathfrak{g}$ y T_eG dado por la identificación

$$X \in \mathfrak{g} \longleftrightarrow X_e \in T_eG \tag{2}$$

con lo cual $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie de dimensión finita. Es común también definir el álgebra de Lie de un grupo de Lie como el espacio tangente a la identidad (con la estructura de álgebra de Lie dada por la identificación (2)).

Informalmente, si el espacio tangente a una variedad diferenciable es el "objeto algebraico" que mejor aproxima a la variedad en un punto dado, cuando la variedad tiene una estructura adicional de grupo de Lie, el espacio tangente tiene una estructura adicional de álgebra de Lie. En otras palabras, las álgebras de Lie son las "versiones algebraicas infinitesimales" de los grupos de Lie. En general, en la teoría de grupos de Lie, la geometría de un grupo de Lie puede recuperarse localmente a partir de su álgebra de Lie. Más precisamente, si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie real de dimensión finita, existe (salvo isomorfismo) un único grupo de Lie G tal que el álgebra de Lie de G es (isomorfa a) $\mathfrak{g}$.

Es conveniente observar además que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ es grupo de Lie con el álgebra de Lie de $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Si D es derivación, e^D resulta automorfismo.

Algunos ejemplos de álgebras de Lie de grupos de Lie:

1. $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. En este caso el espacio tangente a G en la matriz identidad I_n es el espacio de todas las matrices $n \times n$, que hemos llamado $gl(n, \mathbb{R})$. No es difícil ver que el corchete de campos invariantes a izquierda en G se identifica con el corchete usual de $gl(n, \mathbb{R})$ (dado por el conmutador). Más generalmente, si G es un subgrupo de Lie de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ siempre podremos identificar el álgebra de Lie de G con un subálgebra de Lie de $gl(n, \mathbb{R})$.

2. G= $\mathrm{SO}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) : AA^T = I_n \text{ y } \det A = 1\}$. Podemos encontrar el álgebra de Lie de G de la siguiente manera: Sea $c(t) \in G$ una curva tal que $c(0) = I_n$. Derivando la condición $c(t)c(t)^T = I_n$ obtenemos $0 = \frac{d}{dt}\big|_0 (c(t)c(t)^T) = c'(0)c(0)^T + c(0)c'(0)^T = c'(0) + c'(0)^T$ es decir, la velocidad inicial de cualquier curva en $G = \mathrm{SO}(n)$ que en $t = 0$ pasa por la identidad es una matriz antisimétrica, con lo cual el espacio tangente a $G = \mathrm{SO}(n)$ en la identidad es $\mathfrak{so}(n)$.

3. Si $G = \mathrm{SU}(n) = \{A \in \mathrm{GL}_n(n, \mathbb{C}) : AA^* = I_n \text{ y } \det A = 1\}$ se puede usar un argumento similar para probar que su álgebra de Lie es $\mathfrak{su}(n)$.

4. El álgebra de Lie de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) : \det A = 1\}$ es $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$. En efecto, tomamos una curva $c(t)$ tal que $\det(c(t)) = 1$ para todo t y derivamos en $t = 0$:
$$0 = \frac{d}{dt}\bigg|_0 \det(c(t)) = \mathrm{tr}(c'(0)).$$

Si X es un campo en una variedad diferenciable M, una *curva integral de X por el punto $p \in M$* es una curva $c(t)$ tal que $c(0) = p$ y $c'(t) = X(c(t))$ para todo t. O sea, la velocidad de $c(t)$ está dada por el campo X en todo el dominio de definición de la curva. Usando el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias, se puede probar que cualquier campo X tiene una curva integral por p, para todo $p \in M$. Los campos cuyas curvas integrales están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$, se llaman *campos completos*. Si G es un grupo de Lie y $X \in \mathfrak{g}$ es un campo invariante a izquierda en G, entonces X es completo y la curva integral de X por la identidad $e \in G$ se denota por $t \mapsto \mathrm{Exp}(tX)$.

Es decir, $\frac{d}{dt}\mathrm{Exp}(tX) = X_{\mathrm{Exp}(tX)}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. En particular, tomando $t = 1$, la asignación $X \mapsto \mathrm{Exp}(X)$ define una función $\mathrm{Exp} : \mathfrak{g} \to G$, llamada la *función exponencial* de G. Se puede probar que en todo grupo de Lie, la función exponencial es un difeomorfismo de un entorno del origen $0 \in \mathfrak{g}$ en un entorno de la identidad $e \in G$.

Algunas propiedades de $\mathrm{Exp} : \mathfrak{g} \to G$.

1. $\mathrm{Exp}(0) = e$.
2. $\mathrm{Exp}((s + t)X) = \mathrm{Exp}(sX)\,\mathrm{Exp}(tX)$, para todo $X \in \mathfrak{g}$, para todo $s, t \in \mathbb{R}$.
3. $\mathrm{Exp}(-X) = \mathrm{Exp}(X)^{-1}$ para todo $X \in \mathfrak{g}$.
4. Sigue de 2 y 3 que $\{\mathrm{Exp}(tX) : t \in \mathbb{R}\}$ es un subgrupo monoparamétrico de G. Más aún, todo subgrupo de Lie de dimensión 1 de G es de esta forma.
5. Si $[X, Y] = 0$ entonces $\mathrm{Exp}(X + Y) = \mathrm{Exp}(X)\,\mathrm{Exp}(Y)$.

Observación: si G es un subgrupo de matrices, digamos $G \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ y $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ es el álgebra de Lie de G, entonces la función exponencial de G coincide con la restricción de la exponencial de matrices a $\mathfrak{g}$. Es decir,
$$\mathrm{Exp}(tX) = e^{tX} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} X^k = I_n + tX + \frac{t^2}{2}X^2 + \frac{t^3}{3!}X^3 + ...$$

Esto es muy útil porque nos permite conocer quiénes son los grupos de Lie asociados a un subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$.

Correspondencia entre subálgebras y subgrupos de Lie.

Si G y K son dos grupos de Lie, una función $\varphi : G \to K$ es un *morfismo de grupos de Lie* si

φ es un morfismo de grupos y es diferenciable, o sea, φ preserva tanto la estructura algebraica de grupo como la estructura diferenciable. A veces, cuando uno dice que $\varphi : G \to K$ es un morfismo, se sobreentiende que estamos hablando de un morfismo de grupos de Lie. Si $\varphi : G \to K$ es un morfismo de grupos de Lie, entonces su diferencial preserva la estructura algebraica de los espacios tangentes. Más precisamente, si $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{k}$ son las álgebras de Lie de G y K respectivamente, y las identificamos como es usual con los espacios tangentes a la identidad, entonces la diferencial

$$d\varphi|_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{k}$$

resulta un morfismo de álgebras de Lie. O sea que los morfismos de álgebras de Lie son la contraparte algebraica de los morfismos de grupos de Lie. Una propiedad importante es que se puede recuperar (localmente) un morfismo de grupos de Lie a partir del correspondiente morfismo de álgebras de Lie:

Teorema 1. *Sean G y K dos grupos de Lie con álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{k}$ respectivamente. Sea $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{k}$ un morfismo de álgebras de Lie. Si G es simplemente conexo, entonces existe un único morfismo de grupos de Lie $\varphi : G \to K$ tal que $d\varphi|_e = I$. Más aún, para todo $X \in \mathfrak{g}$ se tiene*

$$\varphi(\mathrm{Exp}(X)) = \mathrm{Exp}(I(X)).$$

Si G es un grupo de Lie, decimos que H es un *subgrupo de Lie* de G si:

- H es subgrupo de G (subconjunto no vacío de G que es cerrado para la multiplicación y la inversión),
- H es un grupo de Lie, es decir que tiene una estructura diferenciable tal que las operaciones del ítem anterior son suaves y
- H es una subvariedad de G. En nuestro caso podemos trabajar con la siguiente definición: que H sea subvariedad de G significa que la inclusión $i : H \to G$ es diferenciable (monomorfismo de grupos de Lie) y que su diferencial $di|_h : T_hH \to T_hG$ es inyectiva para todo $h \in H$.

En particular, este último punto nos dice que $di|_e : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ es un monomorfismo de álgebras de Lie. Luego, podemos identificar $\mathfrak{h}$ con un subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$.

Teorema 2. *Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Entonces, para cada subálgebra de Lie $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ existe un único subgrupo de Lie conexo H de G tal que el álgebra de Lie de H es $\mathfrak{h}$ (vía la identificación que mencionamos en el párrafo anterior).*

Una familia muy importante de subgrupos de Lie son los subgrupos cerrados de un grupo de Lie.

Teorema 3. *Sea G un grupo de Lie y sea H un subgrupo cerrado de G. Entonces H tiene una única estructura diferenciable que lo hace un subgrupo de Lie de G.*

Este resultado es muy fuerte ya que nos dice que hay una única manera posible de hacer que H sea un subgrupo de Lie de G. Además, como la mayoría (por no decir todos) de los subgrupos de Lie con los que vamos a trabajar van a aparecer como subgrupos cerrados de otros grupos de Lie, este teorema resulta muy importante. En particular, observemos que los ejemplos de grupos de Lie que hemos visto hasta ahora, pueden pensarse como subgrupos cerrados de $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ para algún n.

Métricas invariantes a izquierda en grupos de Lie

Para el caso en que $M = G$ es un grupo de Lie, definimos una métrica riemanniana de la siguiente forma: se define un producto interno en el espacio tangente a $e \in G$ y luego se lo aplica en cada elemento del grupo usando traslaciones a izquierda (o a derecha, lo que se prefiera). Más precisamente, una métrica riemanniana $\langle ., . \rangle$ en G se dice *invariante a izquierda* si L_g es una isometría para todo $g \in G$. En particular, si X, Y son dos campos invariantes a izquierda tenemos que la función $\langle X, Y \rangle$ es constante en G. Usando la forma cuadrática de la métrica y las identidades de polarización, esto es equivalente a decir que los campos invariantes a izquierda tienen norma constante.

Es decir que, para conocer una métrica invariante a izquierda en un grupo de Lie, es suficiente con saber cuánto vale en un punto. Como el espacio tangente T_eG se identifica naturalmente con el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G tenemos el siguiente resultado:

Teorema 4. *Existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de métricas invariantes a izquierda en G y el conjunto de productos internos en $\mathfrak{g}$.*

Al igual que los morfismos preservan la estructura de las álgebras de Lie, si M y N son dos variedades riemannianas (de la misma dimensión), decimos que un difeomorfismo $f : M \to N$ es una *isometría* si f preserva la métrica en cada punto. Es decir, para cada $p \in M$, la diferencial

$$df|_p : T_pM \to T_{f(p)}N$$

es una isometría lineal. Equivalentemente, para cada $p \in M$ y para cada par de vectores $v, w \in T_pM$ tenemos que

$$\langle df(v), df(w) \rangle_f(p) = \langle v, w \rangle_p.$$

El grupo de isometrías de M está dado por

$$I(M) = \{f : M \in M : f \text{es una isometría}\}.$$

Teorema 5. *El grupo de isometrías es un grupo de Lie.[MS39]*

Grupo de Lie unimodular.

Sea G un grupo de Lie, consideraremos las medidas de Haar que son medidas invariantes a izquierda y son únicas salvo múltiplos positivos.

Sea μ una medida de Haar invariante a izquierda y $f \in C_c(G) = \{$Funciones continuas a soporte compacto de G en $\mathbb{R}\}$ entonces f es integrable con respecto a μ y se cumple:

$$\int_G f(gx)d\mu(x) = \int_G f(x)d\mu(x) \text{ para todo } g \in G.$$

Se puede ver que cuando se hace una traslación a derecha de una medida invariante a izquierda, se obtiene una medida invariante a izquierda nuevamente. Por ser las medidas de Haar a izquierda únicas salvo múltiplos positivos, se cumple:

$$\int_G f(xg^{-1})d\mu(x) = \Delta(g)\int_G f(x)d\mu(x) \text{ para toda } f \in C_c(G),$$

donde $\Delta : G \to \mathbb{R}^+$ es la llamada función modular, y es un morfismo de grupos de Lie.

Diremos que G es un grupo de Lie *unimodular*, cuando $\Delta(g) = 1$ para todo $g \in G$

Una definición equivalente de grupo de Lie unimodular puede hacerse a través de la representación adjunta $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$. (Esta es la representación adjunta del grupo de Lie G. Está relacionada con la representación adjunta del álgebra de Lie $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ ya que con ciertas identificaciones naturales, ad no es otra cosa que la diferencial de Ad en la identidad $e \in G$.) Más precisamente,

$$G \text{ es unimodular si y sólo si } |\det(\mathrm{Ad}_g)| = 1 \text{ para todo } g \in G.$$

Lo bueno de esta definición es que uno puede "derivar" esta condición para obtener una caracterización algebraica: usando que la diferencial de la función det en la matriz identidad es la función traza, se ve que

$$|\det(\mathrm{Ad}_g)| = 1 \text{ para todo } g \in G \Leftrightarrow \mathrm{tr}\,\mathrm{ad}_X = 0 \text{ para todo } X \in \mathfrak{g}.$$

Se tiene el siguiente resultado:

Teorema 6. *Un grupo de Lie es unimodular si y sólo si su álgebra de Lie es unimodular.*

Los grupos de Lie de dimensión 3 unimodulares simplemente conexos salvo isomorfismo, son 6:

- $\mathbb{R}^3$ es un grupo de Lie abeliano (con la suma usual y la estructura diferenciable usual) simplemente conexo de dimensión 3. Es el único con estas características.

- Con respecto a la estructura diferenciable de

$$\begin{aligned}\mathrm{SU}(2) &= \mathrm{U}(2)\cap \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) = \\ &= \{A\in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) : AA^* = I_2 \ y \ \det A = I\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha}\end{pmatrix} : \alpha,\beta\in\mathbb{C}, |\alpha|^2+|\beta|^2 = 1\right\},\end{aligned}$$

  hay una estructura natural por ser subgrupo cerrado de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$. Además, si M es una variedad diferenciable, cualquier función diferenciable $f : M \to \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ (o sea tal que los coeficientes de la matriz $f(x)$ sean funciones diferenciables de x) y cuya imagen esté contenida en SU(2),resulta una función diferenciable $f : M \to \mathrm{SU}(2)$.

- SL(2,$\mathbb{R}$)= $\{A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R}) : \det A = 1\}$ Acá también se considera la estructura diferenciable de subgrupo cerrado, en este caso, de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$.

  Por simplicidad, trabajaremos con $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ aunque no sea simplemente conexo.

- El grupo de Heisenberg tridimensional es:

  $H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} : x, y, x \in \mathbb{R}\right\}$.

  Éste es un grupo de Lie nilpotente.

- $E_0(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & a \\ \sin\theta & \cos\theta & b \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} : a, b, \theta \in \mathbb{R}\right\}$

  Nuevamente, por conveniencia, trabajaremos con este grupo aunque no sea simplemente conexo.

- $E(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t & a \\ \sinh t & \cosh t & b \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} : a, b, t \in \mathbb{R}\right\}$

  Es el grupo de los movimientos rígidos del plano de Minkowski.

Sobre los **no unimodulares** podemos decir que los de dimensión 3 son solubles. Vale decir también que hay grupos de Lie solubles y que también son unimodulares: $\mathbb{R}^3$ que es abeliano y por lo tanto es nilpotente y soluble; $\mathbb{H}_1$ es nilpotente y por lo tanto soluble y, E(2) y E(1, 1) que son solubles aunque no nilpotentes.

Hay un resultado muy útil que nos dice que los grupos de Lie solubles que son simplemente conexos de dimensión n son difeomorfos a $\mathbb{R}^n$, por lo que la estructura diferenciable es la ya conocida de $\mathbb{R}^3$.

En el siguiente capítulo estaremos clasificando las álgebras de Lie unimodulares.

2 Clasificación de Álgebras de Lie de dimensión 3.

Toda álgebra de Lie de dimensión 3 puede presentarse mediante una estructura de álgebra de Lie en $\mathbb{R}^3$ con el corchete dado por

$$[x, y] = L(x \times y), \tag{1}$$

donde $x \times y$ es un producto vectorial y $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una transformación lineal unívocamente determinada por el corchete.

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión 3 y supongamos que tenemos definido un producto interno en $\mathfrak{g}$. Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base ortonormal para dicho producto interno y elijamos la orientación tal que esta base está positivamente orientada.

Definimos L tal que $L(e_1) = [e_2, e_3]$, $L(e_2) = [e_3, e_1]$ y $L(e_3) = [e_1, e_2]$. Claramente se satisface que $L(e_i \times e_j) = [e_i, e_j]$ y por linealidad tenemos (1). Si representamos matricialmente a L, sus coeficientes están estrechamente relacionados con los coeficientes de estructura de $\mathfrak{g}$ en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Lema 3. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, $\mathfrak{g}$ es unimodular si y solo si L es simétrica.*

Teorema 7. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, $\mathfrak{g}$ es unimodular si y solo si es isomorfa a una de las siguientes álgebras: $\mathfrak{so}(3), \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}), \mathfrak{e}(2), \mathfrak{e}(1, 1), \mathfrak{h}_1$ o $\mathbb{R}^3$.*

Idea de la Demostración. Como L es simétrica, es diagonalizable con autovalores reales. Más aún, L se puede diagonalizar conjugando por una matriz ortogonal. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ los autovalores de L. Notar que una transformación ortogonal manda bases ortonormales en bases ortonormales, y si elegimos esa transformación en $SO(3)$, también preserva la orientación. También es fácil ver que por medio de una transformación ortogonal se pueden cambiar simultáneamente los signos de los λ_i. Luego, podemos suponer que $L(e_i) = \lambda_i e_i$ para todo $i = 0, 1, 2$, o equivalentemente, que los corchetes no triviales son

$$[e_1, e_2] = \lambda_0 e_0 \qquad [e_2, e_0] = \lambda_1 e_1 \qquad [e_0, e_1] = \lambda_2 e_2. \tag{2}$$

Luego, cambiando la base inicial de $\mathbb{R}^3$ se puede llevar a que los λ_i, $i = 0, 1, 2$ sean $0, -1$ o 1 y como la clase de isomorfismos sólo depende de su "signo", a partir de los ejemplos vistos se pueden determinar cuáles son los isomorfismos:

$$(sg\lambda_1, sg\lambda_2, sg\lambda_3) = \begin{cases} (+,+,+) & \Rightarrow \quad \mathfrak{g} \simeq \mathfrak{so}(3) \\ (+,+,-) & \Rightarrow \quad \mathfrak{g} \simeq \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \\ (+,+,0) & \Rightarrow \quad \mathfrak{g} \simeq \mathfrak{e}(2) \\ (+,-,0) & \Rightarrow \quad \mathfrak{g} \simeq \mathfrak{e}(1,1) \\ (+,0,0) & \Rightarrow \quad \mathfrak{g} \simeq \mathfrak{h}_1 \\ (0,0,0) & \Rightarrow \quad \mathfrak{g} \simeq \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

Se pueden construir los isomorfismos de álgebras de Lie entre un álgebra dada por (2) y las álgebras correspondientes. Además existen argumentos suficientes para probar que estas seis álgebras de Lie no son isomorfas dos a dos.

$\square$

Ahora presentamos el caso no unimodular:

Teorema 8. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie real, entonces $\mathfrak{g}$ es no unimodular si y solo si existe una base $\{e_0, e_1, e_2\}$ de $\mathfrak{g}$ tal que*

$$[e_0, e_1] = 0 \qquad [e_2, e_0] = \alpha e_0 + \beta e_1 \qquad [e_2, e_1] = \gamma e_0 + \delta e_1 \tag{3}$$

donde la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ (matriz transpuesta de la matriz de ad_{e_2} cuando nos restringimos al subálgebra generada por e_1, e_2) tiene traza $\alpha + \delta = 2$.

Además, a excepción del álgebra de Lie donde A es la matriz identidad, el número $c = \det A$ es un invariante completo de isomorfismo.

A partir de ahora llamaremos:

- *$\mathfrak{g}_I$ al álgebra de Lie con $A = I$ y*
- *$\mathfrak{g}_c$ al álgebra de Lie con $A = \begin{pmatrix} 0 & -c \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.*

El *núcleo unimodular* de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se define por $u = \{X \in \mathfrak{g} : \mathrm{tr}\ \mathrm{ad}_X = 0\}$. Notar que $\mathfrak{g}$ es unimodular si y sólo si $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}$ y que $\mathfrak{u}$ es un ideal unimodular de $\mathfrak{g}$ que contiene a $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Para demostrar el último teorema presentado, usaremos el resultado siguiente:

Lema 4. *Hay salvo isomorfismo dos álgebras de Lie de dimensión 2. Más aún, si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie de dimensión 2 entonces o bien $\mathfrak{g}$ es abeliana, o bien $\mathfrak{g}$ admite una base X, Y tal que $[X, Y] = X$.*

Demostración del Teorema 8. Consideremos un álgebra de Lie tridimensional $\mathfrak{g}$ que no es unimodular. Ahora para probar que su núcleo unimodular $\mathfrak{u}$ es un ideal abeliano, ya sabemos que tiene dimensión 2 y es unimodular, entonces usando el lema 4 concluimos que es abeliano ya que la otra posibilidad sería que no sea unimodular.

Elegimos $e_2 \in \mathfrak{g}$ para que $\operatorname{tr}\operatorname{ad}(e_2) = 2$. Como $\mathfrak{u}$ es conmutativa, la transformación lineal

$$L(\mathfrak{u}) = [e_2, \mathfrak{u}]$$

de $\mathfrak{u}$ en sí mismo, con traza 2, es independiente de la elección particular de e_2.

Si L asigna cada vector a un múltiplo de sí mismo, entonces, de hecho L debe ser la identidad, en caso contrario, $\det L = D$ proporciona un invariante de isomorfismo completo. Podemos elegir e_0 de modo que los vectores e_0 y $L(e_0) = e_1$ sean linealmente independientes, las condiciones $\operatorname{tr}(L) = 2$, $\det(L) = D$ implican que

$$\begin{aligned} L(e_0) &= e_1 \\ L(e_1) &= -De_0 + 2e_1 \end{aligned}$$

Así el corchete queda unívocamente determinado.

Tomemos un producto interno en $\mathfrak{g}$ y sea $\{e_0, e_1, e_2\}$ una base ortonormal de $\mathfrak{g}$ tal que $\{e_0, e_1\}$ es una base de $\mathfrak{u}$. Como $\mathfrak{u}$ es ad_{e_2}-invariante tenemos que $\operatorname{ad}_{e_2}(e_0) = [e_2, e_0] = \alpha e_0 + \beta e_1$, $\operatorname{ad}_{e_2}(e_1) = [e_2, e_1] = \gamma e_0 + \delta e_1$. Más aún, modificando este producto interno en la dirección de e_2 podemos suponer que $\operatorname{tr}\operatorname{ad}_{e_2} = \alpha + \delta = 2$.

Con un argumento similar al que se usa en [HL09] con los ejemplos no unimodulares, podemos probar que si $X \in \mathfrak{g}$ es tal que $\operatorname{tr}\operatorname{ad}_X = 2$, entonces $\det \operatorname{ad}_X|_u = \alpha\delta - \beta\gamma$. Luego este número es un invariante del álgebra de Lie (o sea, si $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}'$, entonces $\alpha\delta - \beta\gamma = \alpha'\delta' - \beta'\gamma'$).

Para terminar, se puede probar que si $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ es distinta de la identidad, entonces $\det A$ es un invariante completo del álgebra de Lie (o sea, si $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}'$ son tales que $A \neq I_2$, $A' \neq I_2$ y $\det A = \det A'$ entonces $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$).

Para eso se muestra que si A es diagonal, $A = I_2$. Suponemos ahora que A no es diagonal, y sin perder generalidad, podemos considerar $\gamma \neq 0$. Así definimos una nueva base de $\mathfrak{g}$ tal que:

$$e_2' = e_2, \qquad e_0' = e_0, \qquad e_1' = Ae_0 = \alpha e_0 + \gamma e_1.$$

En esta nueva base, tenemos que que $\mathfrak{u}$ está generado por e_0', e_1' y la matriz de $\mathrm{ad}_{e_2'}|_{\mathfrak{u}}$ en la base e_0', e_1' es

$$\begin{pmatrix} 0 & -\det A \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

O sea que pudimos encontrar una base apropiada de $\mathfrak{g}$ tal que el corchete depende solo de $\det A$.

Basta entonces con verificar que el álgebra de Lie con $A = I_2$ no es isomorfa al álgebra con $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ya que sabemos que no es isomorfa a ninguna de las otras porque el determinante de A tiene que ser igual a 1.

$\square$

3 Clasificación de métricas invariantes a izquierda en dimensión 3

El espacio de productos internos en un espacio vectorial.

Consideremos en $\mathbb{R}^n$ el producto interno canónico $\langle ., . \rangle_{can}$ definido por:

$$\langle v, w \rangle_{can} = v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n,$$

es decir, el producto interno tal que la base canónica es una base ortonormal. Como ya vimos, cualquier otro producto interno $\langle ., . \rangle$ se identifica con una matriz simétrica y definida positiva:

$$\langle ., . \rangle \longleftrightarrow P$$

en donde $P_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$.

Bajo esta correspondencia, la matriz de $\langle ., . \rangle_{can}$ es la matriz identidad. En general, cuando se tiene especificada una base, es común identificar el conjunto de productos internos de $\mathbb{R}^n$, denotado por $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, con el conjunto de matrices simétricas y definidas positivas de tamaño $n \times n$, que denotaremos por Sym_n^+. Observemos que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ actúa en $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ por cambio de base. En efecto, si $\langle ., . \rangle$ es un producto interno en $\mathbb{R}^n$ y $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ se define el producto interno $\langle ., . \rangle'$ como sigue: si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base ortonormal con respecto a $\langle ., . \rangle$, entonces $\langle ., . \rangle'$ es el producto interno tal que $\{Av_1, \dots, Av_n\}$ es una base ortonormal (en particular, A es una isometría entre estos dos productos internos). Es importante notar que esto define una acción a derecha de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^n$, por lo cual se suele denotar $\langle ., . \rangle \cdot A = \langle ., . \rangle'$. Si miramos esta misma acción pero ahora vía la identificación de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \simeq \mathrm{Sym}_n^+$ nos queda algo más sencillo:

si la matriz de $\langle ., . \rangle$ (en la base canónica) es P, entonces la matriz de $\langle ., . \rangle'$ (en la base canónica) es

$$P' = P \cdot A = A^T P A \tag{1}$$

donde $\cdot$ representa la acción a derecha de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

Ahora, cualquier base de $\mathbb{R}^n$ puede llevarse a la base canónica por un isomorfismo lineal.

Es conveniente ahora entonces enunciar el siguiente:

Proposición 1. *Toda matriz simétrica y definida positiva $P \in \mathrm{Sym}_n^+$ es de la forma*

$$P = A^T A$$

para alguna matriz $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

El análisis anterior de los productos internos en $\mathbb{R}^n$ puede hacerse de manera abstracta en cualquier espacio vectorial de dimensión finita $\mathbb{V}$, es decir, siempre tenemos que $\mathcal{M}(\mathbb{V}) \simeq \mathrm{GL}(\mathbb{V})/\,\mathrm{O}(\mathbb{V}) \simeq \mathrm{Sym}_n^+$. La única sutileza es que para que tenga sentido hablar de $\mathrm{O}(\mathbb{V})$ uno tiene que pensar que este es el grupo ortogonal con respecto a algún producto interno arbitrario pero fijo en $\mathbb{V}$ (para $\mathbb{R}^n$ habíamos elegido el producto escalar usual). Equivalentemente, también tendría sentido pensar en $\mathrm{O}(\mathbb{V})$ si tenemos elegida y fija una base de $\mathbb{V}$. Este será el enfoque que vamos a usar para analizar cómo son los productos internos en las álgebras de Lie de dimensión 3, salvo automorfismo.

Espacio de móduli de métricas invariantes a izquierda en grupos de Lie.

Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Recordemos las siguientes propiedades:

1. Hay una biyección entre las métricas invariantes a izquierda en G, que se denotan por $\mathcal{M}(G)$ y los productos internos en $\mathfrak{g}$, los cuales ya denotamos por $\mathcal{M}(\mathfrak{g})$. Luego, podemos trabajar al nivel del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.
2. Si G es simplemente conexo, entonces $Aut(G) \simeq Aut(\mathfrak{g})$ (o sea, para conocer un automorfismo del grupo de Lie G, es suficiente con conocer cuanto vale su diferencial en la identidad).
3. Dos métricas invariantes a izquierda en G son *equivalentes* si existe un automorfismo que lleva una en la otra. A nivel del álgebra de Lie, tendremos dos productos internos como en (1) pero en donde A no es cualquier elemento de $GL(\mathfrak{g})$, sino que es un automorfismo, es decir, es un elemento del subgrupo $Aut(\mathfrak{g})$.

En general, el subgrupo $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ no es transitivo en $\mathcal{M}(\mathfrak{g})$ y dos productos internos en $\mathfrak{g}$ son equivalentes si viven en la misma órbita de $Aut(\mathfrak{g})$. Para encontrar el espacio de *móduli* $\mathcal{M}(\mathfrak{g})/\sim$ (esta es la relación de equivalencia de métricas invariantes a izquierda que definimos más arriba, en el ítem 3), tenemos que encontrar un representante de cada órbita de la acción de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ en $\mathcal{M}(\mathfrak{g})$. Para eso, primero hay que conocer los grupos de automorfismos, ya que sabemos que el álgebra de Lie de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ es el álgebra de derivaciones

$\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ y el problema se reduce a encontrar cuantas componentes conexas tiene $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, pero además hay que entender cómo es la acción del grupo $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ en $\mathcal{M}(\mathfrak{g})$. Cuanto más grande sea la dimensión de G, más complicado se vuelve este problema, no solo que la acción de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ puede no ser transitiva, sino que las órbitas pueden ser muy extrañas (por ejemplo, lo común es que tengan distinta dimensión).

Comenzamos entonces, buscando cuáles son los grupos de automorfismos.

Grupos de automorfismos de álgebras de Lie de dimensión 3.

Presentamos la clasificación de los productos internos de todas las álgebras de Lie de dimensión 3 salvo automorfismo isométrico, luego, determinaremos el espacio de móduli de métricas invariantes a izquierda para grupos de Lie tridimensionales.

En el caso del álgebra de Lie abeliana, es isomorfa a $\mathbb{R}^3$. Tenemos entonces los siguientes resultados:

Proposición 2. *El grupo de Lie* $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^3)$ *es isomorfo a* $\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$.

En $\mathbb{R}^3$ todas las métricas invariantes a izquierda son equivalentes. En efecto, si tenemos dos productos internos en $\mathbb{R}^3$, cualquier transformación lineal φ que mande una base ortogonal con respecto al primero, en una base ortogonal con respecto al segundo es una isometría. Como cualquier automorfismo lineal preserva el corchete de un álgebra de Lie abeliana, tenemos que $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^3) = \mathrm{GL}(3;\mathbb{R})$ y resulta que φ es un automorfismo isométrico.

Proposición 3. *El grupo de Lie* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{h}_1)$ *is isomorfo a*
$$\left\{ \begin{bmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ * & * & ad-bc \end{bmatrix} / a,b,c,d,* \in \mathbb{R}, ad-bc \neq 0 \right\}.$$

Demostración. Un automorfismo en $\mathfrak{h}_1$ debe llevar el centro en sí mismo, por lo que debe llevar la base $\{X_1, X_2, X_3\}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} X_1 &\longrightarrow aX_1 + bX_2 + kX_3, \\ X_2 &\longrightarrow cX_1 + dX_2 + lX_3, \\ X_3 &\longrightarrow rX_3. \end{aligned}$$

Luego resulta, $\varphi[X_i, X_j] = [\varphi X_i, \varphi X_j]$ si y sólo si $r = ad - bc \neq 0$.

$\square$

Teorema 9. $\mathrm{Aut}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})) \simeq \mathrm{SO}(2,1)$.

Demostración. Daremos algunas identificaciones que serán convenientes para el análisis que haremos.

La forma de Killing de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ es semidefinida de signatura $(2,1)$. De hecho, si consideramos la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ tal que

$$[e_2, e_3] = e_1, \qquad [e_3, e_3] = e_2, \qquad [e_1, e_2] = -e_3,$$

podemos ver que la forma bilineal $\langle ., . \rangle_{2,1}$ inducida por la matriz $I_{2,1}$ es ad-invariante (o sea, ad_X es antisimétrica con respecto a esta forma bilineal para todo $X \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$). Por unicidad, debe ser un múltiplo de la forma de Killing. Luego, debe ser invariante por automorfismos, de donde sigue que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})) \subset \mathrm{O}(2,1)$.

Como $\mathrm{O}(2,1)$ tiene dimensión 3, $\ker \mathrm{ad} = \{0\}$ y $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$, concluimos que $\dim \mathrm{Aut}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})) \geq 3$. Luego, el grupo de automorfismos debe tener dimensión 3.

O sea, que solamente nos faltaría identificar cuántas componentes conexas tiene.

Notar que ningún automorfismo puede tener determinante negativo. De lo contrario tendríamos que $-\,\mathrm{id}$ es un automorfismo, pero esto no puede ser ya que $[-X, -Y] = -[X, Y]$ implica que $[X, Y] = 0$ para todos X, Y. Por lo tanto, concluimos que

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})) \subset \mathrm{SO}(2,1), \text{ siendo que } \mathrm{SO}(2,1) \text{ presenta 2 componentes conexas.}$$

Ahora veamos que esta contención en realidad es una igualdad. En efecto, sabemos que las componentes conexas de la identidad de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}))$ y $\mathrm{SO}(2,1)$ coinciden. Para probar la igualdad, basta con verificar que hay un automorfismo de $\mathfrak{sl}(2, R)$ que no está en la componente conexa de la identidad de $\mathrm{SO}(2,1)$. Por ejemplo, podemos tomar

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

Teorema 10. $\mathrm{Aut}(\mathfrak{su}(2)) \simeq \mathrm{SO}(3)$.

Demostración. Con la misma idea anterior en mente probaremos que, con las identificaciones usuales, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{su}(2)) \simeq \mathrm{O}(3)$. Notar que $\mathrm{O}(3)$ tiene dos componentes conexas en una de las cuales vive la identidad I_3 y en la otra $-I_3$. Como $-\,\mathrm{id}$ no es un automorfismo de $\mathfrak{su}(2)$ resulta que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{su}(2))$ debe ser conexo y por lo tanto coincide con la componente conexa $\mathrm{SO}(3)$. Para justificar que el grupo de automorfismos tiene dimensión 3, se procede de igual manera a lo que hicimos para $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$). □

Una vez conocidos cuáles son los grupos de automorfismos, pasamos a clasificar las métricas.

Teorema 11. *Toda métrica invariante a izquierda en $\mathbb{R}^3$ es equivalente vía automorfismo, a la métrica cuya matriz asociada es la matriz identidad.*

Demostración. Sea A una matriz simétrica definida positiva real 3×3. Como A es simétrica, existe $T \in \mathrm{O}(3)$ tal que $T^T A T = D$ matriz diagonal. Como A es definida positiva, las entradas de la diagonal son positivas y por lo tanto existe $S \in \mathrm{GL}(3)$ tal que $S^T A S = I$. $\square$

Teorema 12. *Toda métrica invariante a izquierda en $\mathbb{H}_1$ es equivalente salvo automorfismo a una métrica cuya matriz asociada es de la forma:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \textit{ donde } \lambda > 0.$$

Demostración. Para describir todas las métricas salvo automorfismo isométrico, sea $\langle .,. \rangle$ la métrica "canónica" para la cual $\{X, Y, Z\}$ es una base ortonormal. Sea $\langle .,. \rangle'$ otro producto interno en $\mathfrak{h}_1$, y tomemos $\{X', Y', Z'\}$ una base ortonormal con respecto a $\langle .,. \rangle'$ tal que $Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{h}_1)$. Esto implica que $Z' = \lambda Z$ para algún $\lambda \neq 0$. Sin perder generalidad, podemos suponer que $\lambda > 0$. Luego, tendremos que:

$$X' = a_{11}X + a_{21}Y + xZ$$
$$Y' = a_{12}X + a_{22}Y + yZ.$$

Por otro lado, si $\phi : (\mathfrak{h}_1, \langle .,. \rangle) \to (\mathfrak{h}_1, \langle .,. \rangle')$ es un automorfismo isométrico, entonces $\phi(Z) = \pm Z'$ (pues ϕ preserva el centro). Más aún, podemos suponer que $\phi(X) = X'$ y $\phi(Y) = Y'$ (esto se puede hacer ya que cualquier cambio de base en $\mathfrak{h}_1$ que deje fijo Z es un automorfismo). Luego,

$$\pm\lambda Z = \pm Z' = \phi(Z) = \phi([X, Y]) = [X', Y'] = (\det A)Z.$$

Esto impone la restricción $\det A = \pm\lambda$. O sea, no cualquier métrica invariante a izquierda es isométrica a la métrica canónica vía un automorfismo. Más aún, modificando ligeramente este argumento, es posible probar que cualquier métrica invariante a izquierda es equivalente a una única métrica de la familia $\{\langle .,. \rangle_\lambda\}_{\lambda>0}$, en donde estas métricas son las métricas tales que $\{X, Y, \lambda Z\}$ es una base ortonormal.

$\square$

Teorema 13. *Toda métrica invariante a izquierda en* $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ *es equivalente, vía un* *automorfismo, a una única métrica, que en la base* $\{e_0, e_1, e_2\}$ *tiene la forma*

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

en donde $\mu \geq \nu$ *y* $\lambda > 0$.

Demostración. Como siempre, hay que analizar la acción de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{sl}(2;\mathbb{R}))$ en Sym_3^+, que con nuestras identificaciones resulta ser la acción $A^T PA$ con $A \in SO(2,1)$ y $P \in \mathrm{Sym}_3^+$. El primer paso es probar que para toda $P \in \mathrm{Sym}_3^+$ existe $A \in SO(2,1)$ tal que $A^T PA$ es diagonal. En [HL09] lo hacen resolviendo las ecuaciones $A^T PA = D$, con D diagonal, directamente. Hay un argumento geométrico para probar esto de otra manera:

Sym_3^+ es una variedad diferenciable de dimensión 6. En efecto tiene la estructura de un abierto en un espacio vectorial de dimensión 6 (las matrices simétricas).

Si Σ es el subconjunto de Sym_3^+ formado por las matrices diagonales con entradas positivas en la diagonal, entonces Σ es una subvariedad de dimensión 3 de Sym_3^+.

El grupo $SO(2,1)$ también tiene dimensión 3. Por lo tanto si probamos que

$SO(2,1) \cdot \Sigma = \{A^T PA : A \in SO(2,1), P \in \Sigma\}$

es una variedad de dimensión 6, entonces $SO(2,1) \cdot \Sigma = \mathrm{Sym}_3^+$ como queríamos ver.

Para probar esto, es suficiente ver que el espacio tangente $T_P(SO(2,1)\cdot\Sigma)$ en $P \in \Sigma$ tiene dimensión 6. Para calcular el espacio tangente, hacemos algo que ya hicimos antes: tomamos una curva $A(t) \in SO(2,1)$ tal que $A(0) = I_3$ y calculamos la velocidad inicial de $A(t)^T PA(t)$ (la cual es una curva en $SO(2,1)\cdot\Sigma$ que en $t = 0$ pasa por P):

$$\frac{d}{dt}|_0 A(t)^T PA(t) = A'(0)^T P + PA'(0). \tag{2}$$

Observando que $\mathfrak{so}(2,1) = \{X \in \mathfrak{gl}(3;\mathbb{R}) : X^T I_{2,1} + I_{2,1}X = 0\}$. Obtenemos la siguiente base para $\mathfrak{so}(2,1)$:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En particular, si hacemos $X_i^T P + PX_i$, para $i = 1, 2, 3$, en (2), obtenemos que las direcciones

$$\begin{pmatrix} 0 & \mu-\nu & 0 \\ \mu-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu+\lambda \\ 0 & \nu+\lambda & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu+\lambda \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu+\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

son direcciones tangentes a la órbita $\mathrm{SO}(2,1)\cdot\Sigma$ en $P = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Como además tenemos las tres direcciones tangentes que nos da hacer las derivadas de P con respecto a μ, ν y λ, concluimos que $\mathrm{SO}(2,1)\cdot\Sigma$ tiene dimensión 6.

Bastará entonces con probar que se puede elegir μ, ν y λ con las propiedades deseadas.

□

Teorema 14. *Toda métrica invariante a izquierda en* $\mathrm{SU}(2)$ *es equivalente, vía un automorfismo, a una única métrica que en la base* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *tiene la forma*

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

en donde $0 < \mu \leq \nu \leq \lambda$.

Idea de la Demostración. Por el teorema espectral, toda matriz simétrica (definida positiva en nuestro caso) se puede diagonalizar conjugando por una matriz en $\mathrm{SO}(3)$. La cual resulta única si ordenamos las entradas de menor a mayor. □

Teorema 15. *Toda métrica invariante a izquierda en* $E(2)$ *es equivalente, vía un automorfismo, a una única métrica, que en la base* $\{e_0, e_1, e_2\}$ *tiene la forma:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}, \; 0 < \mu \leq 1, \nu > 0.$$

Demostración. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz simétrica y positiva definida real 3×3. Como $\begin{bmatrix} \mathrm{SO}(2) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^2) \rtimes \mathfrak{so}(2)$, se puede asumir que $a_{12} = 0$.

Sea $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} & 0 & -\frac{a_{13}}{a_{11}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} & -\frac{a_{23}}{a_{22}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^2) \rtimes \mathfrak{so}(2)$.

Entonces $B^TAB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$ donde $\mu, \nu > 0$. Si $\mu > 1$, entonces $C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{\mu}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{\mu}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^2 \rtimes \mathfrak{so}(2))$ y $C^TBABC = \mathrm{diag}(1, \frac{1}{\mu}, \nu)$. Luego, podemos tomar $\mu \leq 1$. Por lo tanto, A es equivalente salvo automorfismo a una matriz $\mathrm{diag}(1, \mu, \nu)$ donde $0 < \mu \leq 1$ y $\nu > 0$.

Se puede probar que dos matrices de la forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$ donde $0 < \mu \leq 1$ y $\nu > 0$ son equivalentes si y sólo si son iguales. $\square$

Teorema 16. *Toda métrica invariante a izquierda en* $\mathrm{E}(1,1)$ *es equivalente, vía un automorfismo, a una única métrica, que en la base* $\{e_0, e_1, e_2\}$ *tiene la forma*

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} \tag{3}$$

donde $0 < \mu \leq 1$ *y* $\nu > 0$.

Idea de la Demostración. Se considera una métrica invariante a izquierda arbitraria, la cual la representamos en la base $\{e_0, e_1, e_2\}$ por una matriz simétrica y definida positiva P. Luego, con argumentos de álgebra matricial se modifica la matriz P vía transformaciones de la forma A^TPA, en donde A es la matriz de un automorfismo, hasta llegar a algo de la forma (3). Finalmente hay que probar que las estas métricas no son isométricas dos a dos por medio de un automorfismo. $\square$

Existen seis clases de isomorfismos de álgebras de Lie unimodulares e innumerables clases de isomorfismos de álgebras de Lie no unimodulares, las últimas se pueden parametrizar de la siguiente manera:

Sea un álgebra de Lie real no unimodular de dimensión 3. Entonces existe una base $\{e_0, e_2, e_2\}$ en $\mathfrak{g}$ tal que:

$$[e_0, e_1] = 0, \qquad [e_2, e_0] = \alpha e_0 + \beta e_1 \qquad [e_2, e_1] = \gamma e_0 + \delta e_1, \tag{4}$$

donde la matriz $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ tiene $tr = 2$.

Los productos internos de álgebras de Lie tridimensionales se clasifican según el automorfismo isométrico y por lo tanto, determinan el espacio móduli de métricas invariantes izquierdas para grupos de Lie tridimensionales.

Estos productos internos son presentados mediante la matriz correspondiente en la base $\{e_0, e_1, e_2\}$.

Observemos que la expresión de los productos internos cuando $0 < c < 1$ es bastante complicada ya que involucra la acción de la matriz

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1+\sqrt{1-c}}{2c\sqrt{1-c}} & -\frac{1}{2c\sqrt{1-c}} & 0 \\ \frac{1+\sqrt{1-c}}{2c\sqrt{1-c}} & \frac{1}{2c\sqrt{1-c}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(3, \mathbb{R}^3) \tag{5}$$

en una matriz simétrica definida positiva no diagonal.

Denotaremos por G_I y G_c a los grupos de Lie simplemente conexos con álgebra de Lie $\mathfrak{g}_I$ y $\mathfrak{g}_c$, respectivamente. Dado que estas álgebra de Lie son solubles, G_I y G_c son difeomorfos a $\mathbb{R}^3$.

Podemos describir las estructuras correspondientes al grupo de Lie de la siguiente manera:

En todos los casos, el grupo de Lie será un producto semidirecto $\mathbb{R}^2 \rtimes_\varphi \mathbb{R}$ donde la representación $\varphi : \mathbb{R} \to GL_2(\mathbb{R})$ está dada por

$$\varphi(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} & \text{para } G_I \\ e^t \left(\cosh t\sqrt{1-c} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\sinh t\sqrt{1-c}}{\sqrt{1-c}} \begin{pmatrix} -1 & -c \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) & \text{para } G_c \end{cases}$$

por lo que el producto en G_c viene dado por:

$$(v, t)(w, s) = (v + \varphi(t)w, t + s). \tag{6}$$

Observemos que la fórmula dada para φ incluso tiene sentido para $c > 1$.

Las métricas invariantes a izquierda en $G_\bullet$, donde $\bullet \in \{I, c\}$, asociadas con los productos internos en $\mathfrak{g}_\bullet$ serán denominados con el mismo símbolo $g \in \{g_\nu, g_{\mu,\nu}, g'_{\lambda,\nu}\}$. Esto presenta cierta ambigüedad ya que g_ν y $g_{\mu,\nu}$ tienen distinto significado para diferentes álgebras de Lie, pero tal ambigüedad desaparece cuando se especifica el valor de $\bullet$.

La clásificación de las métricas invariantes a izquierda salvo automorfismo isométrico en grupos de Lie tridimensionales no unimodulares es la siguiente:

Teorema 17. *Toda métrica invariante a izquierda en $\mathfrak{g}_I$ es equivalente, vía automorfismo isométrico a una única métrica que en la base $\{e_0, e_1, e_2\}$ tiene la forma:*

$$g_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}, \nu > 0.$$

Teorema 18. *Toda métrica invariante a izquierda en $\mathfrak{g}_c$, $c < 0$ es equivalente, vía automorfismo isométrico a una única métrica que en la base $\{e_0, e_1, e_2\}$ tiene la forma:*

$$g_{\mu,\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}, \nu > 0 \text{ y } 0 < \mu < |c|.$$

Teorema 19. *Toda métrica invariante a izquierda en $\mathfrak{g}_c$, $c = 0$ es equivalente, vía automorfismo isométrico a una de las dos métricas que en la base $\{e_0, e_1, e_2\}$ tienen la forma:*

$$g_{\mu,\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}, \mu, \nu > 0. \qquad g_\nu = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}, \nu > 0.$$

Teorema 20. *Toda métrica invariante a izquierda en $\mathfrak{g}_c$, $0 < c < 1$ es equivalente, vía automorfismo isométrico a una única métrica que en la base $\{e_0, e_1, e_2\}$ tiene la forma:*

$$g_{\mu,\nu} = P^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} P,$$

siendo P como en (5), $0 \leq \mu < 1$ y $\nu > 0$.

Teorema 21. *Toda métrica invariante a izquierda en $\mathfrak{g}_c$, $c = 1$ es equivalente, vía automorfismo isométrico a una de las dos métricas que en la base $\{e_0, e_1, e_2\}$ tienen la forma:*

$$g_{\mu,\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}, 0 \leq \mu < 1 \text{ y } \nu > 0. \qquad g'_{\lambda,\nu} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}, 0 < \lambda < 1 \text{ y } \nu > 0.$$

Teorema 22. *Toda métrica invariante a izquierda en $\mathfrak{g}_c$, $c > 1$ es equivalente, vía automorfismo isométrico a una única métrica que en la base $\{e_0, e_1, e_2\}$ tiene la forma:*

$$g_{\mu,\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}, 1 \leq \mu < c \text{ y } \nu > 0.$$

4 Grupos de isometrías

4.1. Unimodulares.

En esta sección mostramos los resultados para el caso unimodular. Las demostraciones se pueden encontrar en [HL12]. La idea general de ésta es: primero se busca para cada métrica riemanniana invariante a izquierda g en un grupo de Lie unimodular tridimensional simplemente conexo G, el subgrupo de isotropía $\mathrm{Aut}(G)_g$ en g y luego se determina el grupo completo de isometrías $\mathrm{Isom}(G, g)$. En este trabajo sólo veremos la demostración para el caso $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

Ya vimos que toda métrica riemanniana invariante a izquierda en $\mathbb{R}^3$ es equivalente salvo automorfismo a la métrica g cuya matriz asociada es la matriz identidad I_3. Para $\theta \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^3)$, se tiene que $[\theta] \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ y como,

$$\mathrm{Aut}(G)g = \{\theta \in \mathrm{Aut}(G)/[g] = [\theta_*]^T[g][\theta_*]\},$$

resulta:

$$\theta \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^3)_g \Leftrightarrow [\theta]^T I_3[\theta] = I_3 \Leftrightarrow [\theta] \in \mathrm{O}(3).$$

Presentamos entonces el siguiente:

Lema 5. *El grupo $\ell(G)$ de las traslaciones a izquierda en G es un subgrupo normal de* $\mathrm{Isom}(G; g)$ *si y sólo si* $\mathrm{Isom}(G, g)_e = \mathrm{Aut}(G)_g$,.

Gracias a este lema podemos definir los productos semidirectos ya que precisamos de la normalidad, así:

Teorema 23. *Para toda métrica invariante a izquierda g de $\mathbb{R}^3$, se tiene:*

- $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^3) \cap \mathrm{O}(3) \simeq \mathrm{O}(3)$.
- $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3, g) \simeq \mathbb{R}^3 \rtimes \mathrm{O}(3)$.

Ahora veremos el caso del grupo de Heisenberg

Teorema 24. *Para toda métrica invariante a izquierda g de $\mathfrak{h}_1$, se tiene:*

- $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}_1) \cap \mathrm{O}(\mathfrak{h}_1) \simeq \mathrm{O}(2)$.
- $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}_1, g) \simeq \mathbb{H}_1 \rtimes \mathrm{O}(2)$.

Teorema 25. *Para toda métrica invariante a izquierda g en* SU(2)*, se tiene:*

- $\mathrm{Aut}(\mathrm{SU}(2)) \cap \mathrm{O}(\mathfrak{su}(2)) \simeq \begin{cases} (\mathbb{Z}_2)^2 & \text{si} \quad \lambda < \mu < \nu; \\ \mathrm{O}(2) & \text{si} \quad \lambda = \mu > \nu \vee \lambda > \mu = \nu; \\ \mathrm{SO}(3) & \text{si} \quad \lambda = \mu = \nu. \end{cases}$
- $\mathrm{Isom}(\mathrm{SU}(2), g) \simeq \begin{cases} \mathrm{SU}(2) \rtimes (\mathbb{Z}_2)^2 & \text{si} \quad \lambda < \mu < \nu; \\ \mathrm{SU}(2) \rtimes \mathrm{O}(2) & \text{si} \quad \lambda = \mu > \nu \vee \lambda > \mu = \nu; \\ \mathrm{SU}(2) \rtimes \mathrm{O}(3) & \text{si} \quad \lambda = \mu = \nu. \end{cases}$

Teorema 26. *Para toda métrica invariante a izquierda g de* $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$*, se tiene:*

- $\mathrm{Aut}(\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})) \cap \mathrm{O}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})) \simeq \begin{cases} (\mathbb{Z}_2)^3 & \text{si} \quad \mu > \nu; \\ \mathrm{O}(2) \times \{\pm I\} & \text{si} \quad \mu = \nu. \end{cases}$
- $\mathrm{Isom}(\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}), g) \simeq \begin{cases} \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \rtimes (\mathbb{Z}_2)^3 & \text{si} \quad \mu > \nu; \\ \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \rtimes (\mathrm{O}(2) \times \{\pm I\}) & \text{si} \quad \mu = \nu. \end{cases}$

Antes de la demostración, se enuncia un resultado que será útil.

Lema 6. *Si* $\mathrm{Isom}(G, g)_e$ *es un grupo finito, entonces* $\mathrm{Isom}(G, g)_e = \mathrm{Aut}(G)_g$.

Demostración del Teorema 26. Sea $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Se tiene que

$$A \in \mathrm{SO}(1, 2) \Leftrightarrow A^T I_{1,2} A = I_{1,2} \text{ y } \det A = 1 \text{ donde } I_{1,2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para $\theta \in \mathrm{Aut}(G)$ con $[G] \in \mathrm{SO}(1, 2)$ y dado que
$\mathrm{Aut}(G)_g = \{\theta \in \mathrm{Aut}(G) / [g] = [\theta_*]^T [g][\theta_*]\}$, obtenemos que

$$\theta \in \mathrm{Aut}(G)_g \Leftrightarrow [\theta]^T \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{bmatrix} [\theta] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{bmatrix} \text{ y}$$

$$[\theta]^T I_{1,2} [\theta] = I_{1,2} \Leftrightarrow [\theta] \in \begin{cases} \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{O}(2) \end{bmatrix} \right\} \simeq \mathrm{O}(2) \rtimes \langle \tau \rangle, & \text{si} \quad \mu = \nu, \\ \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix} \right\} \simeq (\mathbb{Z}_2)^3, & \text{si} \quad \mu > \nu. \end{cases}$$

Entonces, $\mathrm{Isom}_0(G, g)_g = \mathrm{Aut}_0(G)_g$. Además si $\mu = \nu$ resulta
$\mathrm{Isom}(G, g)_e = \mathrm{Aut}(G)_g = \mathrm{O}(2) \rtimes \langle \tau \rangle$; si $\mu > \nu$ entonces $\mathrm{Isom}(G, g)_e$ es un grupo finito de

$\mathrm{O}(3)$ y por lo tanto por el Lema 6, $\mathrm{Isom}(G,g)_e = \mathrm{Aut}(G)_g = (\mathbb{Z}_2)^3$. En ambos casos mostramos que $\mathrm{Isom}(G,g)_e = \mathrm{Aut}(G)_g$ por lo que $\mathrm{Isom}(G,g) = I(G) \rtimes \mathrm{Aut}(G)_g$. □

Teorema 27. *Para toda métrica invariante a izquierda g de* $\mathrm{E}(2)$*, se tiene:*

- $\mathrm{Aut}(\mathrm{E}(2)) \cap \mathrm{O}(\mathfrak{e}(2)) \simeq \begin{cases} (\mathbb{Z}_2)^2 & \text{si} \quad 0<\mu<1; \\ \mathrm{SO}(2) \rtimes \mathbb{Z}_2 & \text{si} \quad \mu = 1. \end{cases}$
- $\mathrm{Isom}(\mathrm{E}(2), g) \simeq \begin{cases} \mathrm{E}(2) \rtimes (\mathbb{Z}_2)^2 & \text{si} \quad 0<\mu<1; \\ \mathrm{E}(2) \cdot \mathrm{O}(3) & \text{si} \quad \mu = 1. \end{cases}$

Teorema 28. *Para toda métrica invariante a izquierda g de* $\mathrm{E}(1,1)$*, se tiene:*

- $\mathrm{Aut}(\mathrm{E}(1,1)) \cap \mathrm{O}(\mathfrak{e}(1,1)) \simeq \begin{cases} (\mathbb{Z}_2)^2 & \text{si} \quad g \sim g_{\mu,\nu}; \\ D(4) & \text{si} \quad g \sim g_{\nu}. \end{cases}$
- $\mathrm{Isom}(\mathrm{E}(1,1), g) \simeq \begin{cases} \mathrm{E}(1,1) \rtimes (\mathbb{Z}_2)^2 & \text{si} \quad g \sim g_{\mu,\nu}; \\ \mathrm{E}(1,1) \rtimes D(4) & \text{si} \quad g \sim g_{\nu}. \end{cases}$

4.2. No unimodulares.

Sea $\mathbb{V}$ un espacio euclideano y sea T un tensor algebraico de tipo (s,t) en $\mathbb{V}$. La acción natural del álgebra de Lie ortogonal $\mathfrak{so}(\mathbb{V})$ en T se define por

$$(A \cdot T)(w_1, \dots, w_s, v_1, \dots, v_t) = \sum_{i=1}^{s} T(w_1, \dots, w_{i-1}, w_i \circ A, w_{i+1}, \dots, w_s, v_1, \dots, v_t) + \sum_{j=1}^{t} T(w_1, \dots, w_s, v_1, \dots, v_{j-1}, Av_j, v_{j+1}, \dots, v_t)$$

donde $A \in \mathfrak{so}(\mathbb{V})$, $w_1, \dots, w_s \in \mathbb{V}^*$ y $v_1, \dots, v_t \in \mathbb{V}$. En [Sin60], Singer analiza bajo qué condiciones una familia de tensores algebraicos $R^s, s \geq 0$ de tipo $(1, s+3)$ sobre $\mathbb{V} = T_pM$, coincide con las derivadas covariantes de orden s en p del tensor de curvatura de alguna métrica de Riemann homogénea en M. En particular, si s oscila entre 0 y cierto entero k, teóricamente se puede recuperar el álgebra de Lie del grupo de isometrías de M de la acción de $\mathfrak{so}(T_pM)$ sobre los tensores algebraicos $R_p, (\nabla R)_p, \dots, (\nabla^{k+1}R)_p$. Nos resulta útil reformular dicho teorema para dar un procedimiento para encontrar el álgebra de Lie del subgrupo de isotropía del grupo de isometría completo de M.

En esta sección se quiere hallar los grupos de isometría totales de $(G_\bullet, g)$ siendo $\bullet \in \{I\} \cup \mathbb{R}$ y g una métrica invariante a izquierda en $G_\bullet$. Se analizan varios casos según la estructura del álgebra de Lie de $G_\bullet$ y el espacio de móduli de métricas invariantes a izquierda. Antes de entrar en el análisis caso por caso, esbozamos la idea general para tratar el caso genérico. Supongamos que la métrica invariante a izquierda g en $G_\bullet$ no es simétrica, y sea $G = \mathrm{Isom}(G_\bullet, g)$. Observemos que, $\dim G \leq 4$. De hecho, el grupo de isotropía de G en cualquier punto es isomorfo, a través de la representación de isotropía, a un subgrupo compacto de $O(3)$. Sea $e \in G_\bullet$ el elemento identidad. Si $\varphi \in G$ y $\varphi(e) = x$, entonces $\varphi = L_x \circ (L_{x^{-1}} \circ \varphi)$, donde $L_x \in G$ es la traslación a izquierda de x. Entonces, el grupo de isometría total se descompone como

$$G \simeq G_\bullet \cdot G_e \tag{1}$$

donde G_e es el subgrupo de isotropía de G en e y estamos identificando $G_\bullet$ con $L \cdot G_\bullet$. En general, (1) no es un producto semidirecto. De hecho, según [Shi97], $G_\bullet$ es un subgrupo normal de la componente conexa de G si y solo si la componente conexa de G_e está contenido en $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}_\bullet$, con las identificaciones habituales. Sin embargo, uno puede recuperar la estructura algebraica de G de la estructura de grupo de $G_\bullet$ y G_e y la geometría de la métrica g. De hecho, identificar el álgebra de Lie de G con el álgebra de Lie de campos de Killing $\mathcal{K}(G_\bullet, g)$. Tenemos de (1) que cada elemento de $\mathcal{K}(G_\bullet, g)$ se puede escribir como $X + Y$ donde X es un campo invariante a derecha en $G_\bullet$ e Y es un campo Killing tal que $Y_e = 0$. Por otro lado, si X, X' son dos campos de Killing con condiciones iniciales $X_e = v, X'_e = v'$ y $\nabla X_e = B$, $\nabla X'_e = B'$, entonces las condiciones iniciales del corchete de Lie $[X, X']$ son

$$[X, X']_e = B'v - Bv', \qquad (\nabla[X, X'])_e = R_{v,v'} - [B, B'].$$

La primera condición se deriva de que la conexión Levi-Civita es sin torsión, y la segunda puede deducirse de la llamada ecuación afín de Killing (ver [CO09] o [Reg18] para más detalles). De ello se deduce que para calcular el grupo de isometría total solo se necesita calcular G_e. Identificamos G_e, a través de la representación isotrópica, con un subgrupo $O(\mathfrak{g}_{\bullet,g}) \simeq O(3)$. Al nivel de álgebra de Lie, se puede recuperar el componente conexo de G_e de su álgebra de Lie $\mathfrak{g}_e \subset \mathfrak{so}(\mathfrak{g}_\bullet, g) \simeq \mathfrak{so}(3)$. Para simplificar algunos cálculos, resulta útil señalar que un elemento de G_e debe conservar el tensor de Ricci. En la mayoría de los casos, el tensor de Ricci de $G_\bullet$ es semidefinido y por lo tanto si un elemento $A \in \mathfrak{so}(\mathfrak{g}_\bullet, g)$ es inducido por un subgrupo de un parámetro G_e, entonces A pertenece a un subálgebra de Lie $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_\bullet)$ que es isomorfo a $\mathfrak{so}(2, 1)$. Esto reduce la complejidad del problema, solo necesitamos buscar $A \in \mathfrak{so}(\mathfrak{g}_\bullet, g) \cap \mathfrak{h}$, que en el caso genérico tiene dimensión como máximo 1. En el caso de que esta dimensión sea positiva, luego podemos verificar si A es de hecho inducido por isometrías usando el siguiente:

Teorema 29 (Singer). *Sea M un espacio de Riemann homogéneo de dimensión n. Sea $p \in M$ y $A \in \mathfrak{so}(T_pM)$. Entonces, existe un campo de Killing X en M tal que $X_p = 0$ y $(\nabla X_p) = A$ si y solo si $A \cdot (\nabla^s R)_p = 0$ para todo $0 \leq s < \frac{n(n-1)}{2}$, donde R denota el tensor de curvatura de Riemann de M.*

Procedemos ahora al estudio de todos los casos posibles. Primero nos ocupamos de los casos aislados.

Teorema 30. *Sea g una métrica invariante a izquierda de G_I, entonces:*

$$\mathrm{Isom}(G_I, g) \simeq \mathrm{SO}(3,1).$$

Demostración. Para el álgebra de Lie $\mathfrak{g}_I$ los corchetes son:

$$[e_0, e_1] = 0, \qquad [e_2, e_0] = e_0, \qquad [e_2, e_1] = e_1$$

por lo que, $\mathfrak{g}_I$ es isomorfo al álgebra de Lie del espacio hiperbólico $\mathbf{H}^3$. Es decir, el álgebra de Lie del grupo transitivo soluble de isometrías de $\mathbf{H}^3$. Nótese que este grupo de Lie admite una métrica invariante a izquierda que la hace isométrica a $\mathbf{H}^3$. De hecho, esta es la única métrica invariante a izquierda posible para G_I salvo automorfismo.

□

Observación 1. *Se deduce que si tomamos $g = g_\nu$ en el teorema anterior, luego (G_I, g_ν) es isométrico al espacio hiperbólico de curvatura $-\frac{1}{\nu}$ en tres dimensiones.*

Veamos ahora el caso de G_0: De acuerdo a (6), la estructura de grupo de Lie de $G_0 \simeq \mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{R}$ está dada por:

$$(x_0, x_1, x_2)(y_0, y_1, y_2) = (x_0 + y_0, x_1 + \frac{e^{2x_2}}{2}(y_0 + 2y_1) - \frac{y_0}{2}, x_2 + y_2)$$

y la estructura canónica de los campos vectoriales invariantes izquierda está dado por

$$e_0 = \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{e^{2x_2} - 1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad e_1 = e^{2x_2}\frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad e_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}$$

También tenemos la expresión explícita para los correspondientes campos vectoriales invariantes a derecha:

$$r_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \qquad r_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad r_2 = (x_0 + 2x_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Teorema 31. *Con la misma notación que venimos utilizando, se tiene:*

- $\mathrm{Isom}(G_0, g_{\mu,\nu}) \simeq G_0 \cdot \mathrm{SO}(2)$ *donde su álgebra de Lie tiene base $\{r_0, r_1, r_2, A\}$ tal que:*

$$\begin{array}{lll} [r_0, r_1] = 0, & [r_0, r_2] = r_1, & [r_1, r_2] = 2r_1, \\ [r_0, A] = r_2, & [r_1, A] = 2r_2, & [r_2, A] = -\nu r_0 - \frac{2\nu}{\mu} r_1 + 2A. \end{array}$$

- $\mathrm{Isom}(G_0, g_\nu) \simeq \mathrm{E}(1) \times \mathrm{SO}(2,1)$ *donde* $E(1)$ *es el grupo euclídeo de una dimensión.*

Demostración. Primero consideraremos el caso en que $g = g_{\mu,\nu}$. Se puede ver que si X es un campo invariante a izquierda en G_0, también es un campo de Killing. Por lo tanto X debe ser múltiplo de $e_0 - \frac{1}{2}e_1 = r_0 - \frac{1}{2}r_1$, que también es invariante a derecha. Entonces no hay otros campos de Killing que surjan como diferencia de campos invariantes a izquierda y derecha que tomen el mismo valor en la identidad.

Para calcular el grupo de isometría, primero calculamos el álgebra de Lie ortogonal

$$\mathfrak{so}(\mathfrak{g}_0, g_{\mu,\nu}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -a_{10}\mu & -a_{20}\nu \\ a_{10} & 0 & -\frac{a_{21}\nu}{\mu} \\ a_{20} & a_{21} & 0 \end{pmatrix} : a_{10}, a_{20}, a_{21} \in \mathbb{R} \right\}. \tag{2}$$

Ahora, el tensor de Ricci de la métrica, que en la base $\{e_0, e_1, e_2\}$ queda

$$\mathrm{Ric} = \begin{pmatrix} -\frac{\mu}{2\nu} & -\frac{2\mu}{\nu} & 0 \\ -\frac{2\mu}{\nu} & \frac{\mu(\mu-8)}{2\nu} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\mu+8}{2} \end{pmatrix}$$

que induce una forma bilineal simétrica semidefinida no degenerada en $\mathfrak{g}_0$. La componente conexa del grupo de isotropía está entonces identificado con la intersección

$$\mathfrak{so}(\mathfrak{g}_0, g_{\mu,\nu}) \cap \mathfrak{so}(\mathfrak{g}_0, \mathrm{Ric}) = \mathbb{R}A, \tag{3}$$

donde A es la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\nu \\ 0 & 0 & -\frac{2\nu}{\mu} \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Denotemos por R el tensor de curvatura de Riemann de $g_{\mu,\nu}$. Es relativamente fácil ver que $A \cdot R_e = 0$ y después de algunos cálculos pesados (con SageMath) podemos comprobar que $A \cdot (\nabla R)_e = 0$ y $A \cdot (\nabla^2 R)_e = 0$. Por lo tanto, según el Teorema 29, $A = (\nabla Z)_e$ para algún campo de Killing tal que $Z_e = 0$. Esto implica que el componente conexo del grupo de isotropía es un subgrupo de $\mathrm{SO}(\mathfrak{g}_0, g_{\mu,\nu})$ isomorfo a $\mathrm{SO}(2)$. Dado que $\dim G_0 = 3$ y la métrica no es simétrica, obtenemos que el grupo de isotropía es conexo y así $\mathrm{Isom}(G_0, g_{\mu,\nu}) \simeq G_0 \cdot \mathrm{SO}(2)$. De lo contrario, habría isometrías no triviales en las dos componentes conexas de $\mathrm{O}(g_0, g_{\mu,\nu})$, lo que implicaría que la simetría geodésica es una isometría. Para determinar la estructura del grupo de Lie del grupo de isometría, identificamos $\mathcal{K}(G_0, g_{\mu,\nu}) \simeq \mathfrak{g}_0' \oplus \mathbb{R}Z$ (suma directa de espacios vectoriales), donde $\mathfrak{g}_0'$ es el álgebra de Lie del campo invariante a izquierda en G_0. Sean $\{r_0, r_1, r_2\}$ la base del campo invariante a derecha definido antes. Para calcular los corchetes $[r_i, Z]$, usamos las identidades 4.2 y el hecho de que

$$(\nabla r_0)_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\mu}{2\nu} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\nabla r_1)_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2}\mu \\ 0 & 0 & -2 \\ \frac{\mu}{2\nu} & \frac{2\mu}{\nu} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\nabla r_2)_e = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\mu & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora, para la métrica $g = g_\nu$, si definimos

$$\hat{e}_0 = 2e_0 - e_1, \qquad \hat{e}_1 = \frac{1}{2}e_2, \qquad \hat{e}_2 = e_1,$$

entonces $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0) = \mathbb{R}\hat{e}_0$ y $[\hat{e}_1, \hat{e}_2] = \hat{e}_2$. Así $\mathfrak{g}_0 = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{g}_{\mathbb{R}H^2}$ (suma directa de álgebras de Lie), donde $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}H^2}$ es el álgebra del espacio hiperbólico real $\mathbb{R}H^2$. Más aún, la métrica invariante a izquierda g_ν toma así la forma

$$g_\nu = 3\hat{e}^0 \otimes \hat{e}^0 + \frac{1}{4}\nu\hat{e}^1 \otimes \hat{e}^1 + \hat{e}^2 \otimes \hat{e}^2.$$

Por lo tanto, g_ν se divide de su centro y (G_0, g_ν) es isométrico a (un múltiplo de) el producto de Riemann $\mathbb{R} \times \mathbb{R}H^2$. De hecho, como dijimos en la demostración del teorema 30, la restricción de g_ν a $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}H^2}$ es único salvo automorfismo. Por lo tanto, el grupo de isometría de (G_0, g_ν) es isomorfo a $E(1) \times \mathrm{SO}(2,1)$.

□

Observación 2. *Si dos métricas invariantes a izquierda en G_0 no son equivalentes salvo automorfismo isométrico, entonces los grupos de isometría correspondientes no son isomorfos. De hecho, en el caso que una de las métricas sea equivalente a alguna g_ν es trivial. Por lo tanto, solo debemos considerar las métricas de la forma $g_{\mu,\nu}$, y podemos suponer además que $\nu = 1$. En estas condiciones, la forma Killing permite distinguir las álgebras de Lie dadas en el primer ítem del Teorema 31. De hecho, se puede ver que si $\nu = 1$, los autovalores de la forma Killing del álgebra de Lie isométrica a $g_{\mu,1}$ son*

$$-\frac{-\mu + 4 \pm \sqrt{81\mu^2 + 8\mu + 16}}{\mu}, 0, 8.$$

Ahora, si en (6) tomamos $c = 1$, se obtiene podemos calcular expresiones explícitas para las estructuras de campos invariantes a izquierda y derecha, que se utilizarán en cálculos posteriores. La estructura de campo invariante a izquierda está dada por:

$$e_0 = (1-x_2)e^{x_2}\frac{\partial}{\partial x_0} + x_2 e^{x_2}\frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad e_1 = -x_2 e^{x_2}\frac{\partial}{\partial x_0} + (1+x_2)e^{x_2}\frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad e_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}$$

y la estructura correspondiente para los invariantes a derecha:

$$r_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \qquad r_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad r_2 = -x_1\frac{\partial}{\partial x_0} + (x_0+2x_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Teorema 32. *Sea g una métrica invariante en G_1 entonces*

$$\mathrm{Isom}(G_1, g) \simeq G_1.$$

Demostración. Sea $g = g_{\mu,\nu}$ la dada en (21). Notemos que en la base $\{e_0, e_1, e_2\}$ el álgebra de Lie ortonormal tiene la misma matriz de representación que en (2) pero con $0 < \mu \leq 1$.

El tensor de Ricci de $g_{\mu,\nu}$ está representado por la matriz

$$\mathrm{Ric} = \begin{pmatrix} -\frac{\mu^2-1}{2\mu\nu} & -\frac{2\mu}{\nu} & 0 \\ -\frac{2\mu}{\nu} & \frac{\mu^2-8\mu-1}{2\nu} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\mu^2+6\mu+1}{2\mu} \end{pmatrix}$$

Luego de hacer cálculos obtenemos que $A \in \mathfrak{so}(\mathfrak{g}_1, g_{\mu,\nu})$ también es un elemento de $\mathfrak{so}(\mathfrak{g}_1, \mathrm{Ric})$ si y sólo si $a_{10} = 0$ y

$$a_{20}(1+3\mu) - 2a_{21}\mu = 2a_{20}\mu + a_{21}(1-\mu) = 0$$

lo que implica que $a_{20} = a_{21} = 0$. Como la métrica es no simétrica, el grupo de isotropía de $\mathrm{Isom}(G_1, g_{\mu,\nu})$ es trivial.

Por último, para el caso de $g = g'_{\lambda,\nu}$, tenemos

$$\mathfrak{so}(\mathfrak{g}_1, g'_{\lambda,\nu}) = \left\{ \begin{pmatrix} -a_{11} & -\frac{a_{11}}{\lambda} & -\frac{(a_{21}\lambda - a_{20})\nu}{\lambda^2-1} \\ \frac{a_{11}}{\lambda} & a_{11} & -\frac{(a_{20}\lambda - a_{21})\nu}{\lambda^2-1} \\ a_{20} & a_{21} & 0 \end{pmatrix} : a_{11}, a_{20}, a_{21} \in \mathbb{R} \right\}$$

y

$$\mathrm{Ric} = \begin{pmatrix} -\frac{4\lambda}{(\lambda+1)\nu} & -\frac{2(\lambda^2+1)}{(\lambda+1)\nu} & 0 \\ -\frac{2(\lambda^2+1)}{(\lambda+1)\nu} & -\frac{4(\lambda^2-\lambda-1)}{(\lambda+1)\nu} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{\lambda+1} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Luego, $\mathfrak{so}(\mathfrak{g}_1, g'_{\lambda,\nu}) \cap \mathfrak{so}(\mathfrak{g}_1, \mathrm{Ric}) = 0$. Vale decir que se abusó de la notación ya que Ric en (5) es degenerado cuando $\lambda = \sqrt{5} - 2$. Usando de nuevo el hecho de que la métrica no es simétrica, concluimos que el grupo de isometría es isomorfo a G_1.

$\square$

Para simplificar la notación en el caso G_c, $c < 0$, tomamos:

$$c = 1 - c_1^2, \qquad c_1 > 1.$$

Hacer esto resulta muy útil al momento de verificar las cuentas con SageMath, ya que este software encuentra muy difícil simplificar ciertas expresiones donde aparece la expresión $\sqrt{1-c}$, que ahora reemplazamos por c_1. La estructura de invariante a izquierda en la que se han presentado las métricas está dada por:

$$\begin{aligned} e_0 &= e^{x_2}\left(\cosh(c_1x_2) - \frac{\sinh(c_1x_2)}{c_1}\right)\frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{e^{x_2}\sinh(c_1x_2)}{c_1}\frac{\partial}{\partial x_1}, \\ e_1 &= -\frac{ce^{x_2}\sinh(c_1x_2)}{c_1}\frac{\partial}{\partial x_0} + e^{x_2}\left(\cosh(c_1x_2) + \frac{\sinh(c_1x_2)}{c_1}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}, \\ e_2 &= \frac{\partial}{\partial x_2}. \end{aligned} \tag{6}$$

y la correspondiente estructura de invariante a derecha es:

$$r_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad r_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad r_2 = -cx_1\frac{\partial}{\partial x_0} + (x_0 + 2x_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}. \tag{7}$$

Teorema 33. *Si $c < 0$, entonces*

$$\mathrm{Isom}(G_c, g) \simeq G_c.$$

Demostración. Esta demostración es similar a una de las ya dadas. Asumiendo que $g = g_{\mu,\nu}$ podemos dar el álgebra de Lie ortogonal al igual que en el Teorema 31. Presentamos directamente el tensor de Ricci en términos de c (en lugar de c_1):

$$\mathrm{Ric} = \begin{pmatrix} \frac{c^2-\mu^2}{2\mu\nu} & -\frac{2\mu}{\nu} & 0 \\ -\frac{2\mu}{\nu} & -\frac{c^2+8\mu(1-\mu)}{2\nu} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{(c-\mu)^2-8\mu}{2\mu} \end{pmatrix}.$$

No es difícil ver ahora que $\mathfrak{so}(\mathfrak{g}_c, g_{\mu,\nu}) \cap \mathfrak{so}(\mathfrak{g}_c, \mathrm{Ric}) = 0$. En particular, esto muestra que la métrica no es simétrica y por lo tanto $\mathrm{Isom}(G_c, g_{\mu,\nu}) \simeq G_c$. $\square$

Seguimos ahora con el caso $G_c, 0 < c < 1$. Como antes, tomaremos $c = 1 - c_1^2$ y así resulta que la estructura de invariante a izquierda está dada como en (9) y (10) respectivamente, pero ahora con $0 < c_1 < 1$.

Teorema 34. *Si $0 < c < 1$ y g es una métrica invariante a izquierda en G_c, entonces*

$$\mathrm{Isom}(G_c, g) \simeq G_c.$$

Demostración. Sea $g = g_{\mu,\nu}$. Recordemos que en este caso los coeficientes de la métrica con respecto a $\{e_0.e_1, e_2\}$ se calculan usando la matriz P dada en 5. Luego de algunas simplificaciones se llega a que la métrica está dada por

$$g_{\mu,\nu} = \begin{pmatrix} \frac{c\mu+c-2}{2(c-1)c^2} & \frac{\mu-1}{2(c-1)c} & 0 \\ \frac{\mu-1}{2(c-1)c} & \frac{\mu-1}{2(c-1)} & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} \tag{8}$$

y el tensor de Ricci es

$$\mathrm{Ric} = \begin{pmatrix} \frac{(\mu^2+\mu)c^2+2\mu^2-(\mu^3+2\mu^2+1)}{(1-\mu^2)\nu(1-c)c^2} & \frac{\mu^2-c}{(\mu+1)\nu(1-c)c} & 0 \\ \frac{\mu^2-c}{(\mu+1)\nu(1-c)c} & -\frac{\mu^2+\mu t-\mu-1}{(\mu+1)\nu(t-1)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(\mu^2+c-2)}{(1-\mu^2)} \end{pmatrix}.$$

El mismo argumento que se usó previamente nos dice que $\mathfrak{so}(\mathfrak{g}_c, g_{\mu,\nu}) \cap \mathfrak{so}(\mathfrak{g}_c, \mathrm{Ric}) = 0$, y como la métrica es no simétrica, $\mathrm{Isom}(G_c, g_{\mu,\nu}) \simeq G_c$. $\square$

Sólo nos queda dar el caso G_c con $c > 1$. Para simplificar, hacemos $c = 1 + c_1^2$. Para dar el invariante a izquierda para $\mathfrak{g}_c$ de una manera más sencilla, renombramos $c = 1 - (ic_1)^2$ y reemplazamos c_1 por ic_1. Ahora de las igualdades $\cosh(iz) = \cos z$ y $\sinh(iz) = i \sin z$ resulta que

$$\begin{aligned} e_0 &= e^{x_2}\left(\cosh(c_1x_2) - \frac{\sin(c_1x_2)}{c_1}\right)\frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{e^{x_2}\sin(c_1x_2)}{c_1}\frac{\partial}{\partial x_1}, \\ e_1 &= -\frac{ce^{x_2}\sin(c_1x_2)}{c_1}\frac{\partial}{\partial x_0} + e^{x_2}\left(\cos(c_1x_2) + \frac{\sin(c_1x_2)}{c_1}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}, \\ e_2 &= \frac{\partial}{\partial x_2}. \end{aligned} \tag{9}$$

y la correspondiente invariante a derecha

$$r_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad r_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad r_2 = -cx_1\frac{\partial}{\partial x_0} + (x_0 + 2x_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}. \tag{10}$$

Teorema 35. *Si $c > 1$ y $g_{\mu,\nu}$ es la métrica invariante a izquierda en G_c dada, entonces*

$$\operatorname{Isom}(G_c, g_{\mu,\nu}) \simeq \begin{cases} G_c & \text{si } 1 < \mu < c, \\ \mathrm{SO}(3,1) & \text{si } \mu = c. \end{cases}$$

Demostración. El álgebra de Lie ortogonal de $g_{\mu,\nu}$ está dada por

$$\mathfrak{so}(\mathfrak{g}, g_{\mu,\nu}) = \left\{ \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{11}\mu & -\frac{(a_{20}\mu - a_{21})\nu}{\mu-1} \\ a_{11} & a_{11} & \frac{(a_{20}-a_{21})\nu}{\mu-1} \\ a_{20} & a_{21} & 0 \end{pmatrix} : a_{11}, a_{20}, a_{21} \in \mathbb{R} \right\} \tag{11}$$

en la base $\{e_0, e_1, e_2\}$. Como la matriz de representación del tensor de Ricci se vuelve bastante complejo, es preferible dar sus componentes respecto de la misma base:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ric}_{00} &= \frac{c_1^4 - \mu^2 - 2\mu + 3}{2(\mu-1)\nu} = \frac{(c-1)^2 - (\mu+1)^2 + 4}{2(\mu-1)\nu}, \\
\operatorname{Ric}_{01} &= \frac{c_1^4 + 2c_1^2\mu - 2c_1^2 - 3\mu^2 + 2\mu + 1}{2(\mu-1)\nu} = \frac{(c+\mu)^2 - 4(\mu^2 + t - 1)}{2(\mu-1)\nu}, \\
\operatorname{Ric}_{02} &= 0, \\
\operatorname{Ric}_{11} &= -\frac{c_1^4\mu - 2c_1^4 - 4c_1^2\mu - \mu^3 + 4c_1^2 + 12\mu^2 - 17\mu + 6}{2(\mu-1)\nu} = \\
&\quad \frac{(2-\mu)c^2 + (6\mu - 8)c + \mu(\mu^2 - 12\mu + 12)}{2(\mu-1)\nu}, \\
\operatorname{Ric}_{12} &= 0, \\
\operatorname{Ric}_{22} &= -\frac{c_1^4 - 2c_1^2\mu + 2c_1^2 + \mu^2 + 2\mu - 3}{2(\mu-1)} = -\frac{(c-\mu)^2 + 4(\mu-1)}{2(\mu-1)}.
\end{aligned}$$

Sea A definida como en (11). La condición $A \in \mathfrak{so}(\mathfrak{g}_c, \operatorname{Ric})$ o lo que es equivalente,

$$A^T \operatorname{Ric} + \operatorname{Ric} A = 0$$

está dada por las ecuaciones

$$\frac{2a_{11}(c-\mu)}{\nu} = \frac{(a_{20}(c-2) + a_{21})(\mu - c)}{\mu - 1} = \frac{(a_{20}(2\mu + c - 4) + a_{21}(2-\mu))(\mu - c)}{\mu - 1} = 0.$$

Observemos que si $\mu \neq c$, la única solución posible es $A = 0$. En este caso seguimos el mismo desarrollo previo que se usó para el caso $\operatorname{Isom}(G_c, g_{\mu,\nu}) \simeq G_c$. Asumimos finalmente, que $\mu = c$. Así vemos que $\operatorname{Ric} = -\frac{2}{\nu} g_{c,\nu}$ por lo que la métrica en G_c es Einstein. Más aún $(G_c, g_{\mu,\nu})$ es isométrica al espacio hiperbólico de curvatura $-\frac{1}{\nu}$, luego su grupo de isometría es isomorfo a $\mathrm{SO}(3,1)$. $\square$

Bibliografía

[CO09] Sergio Console and Carlos Olmos, *Curvature invariants, killing vector fields, connections and cohomogeneity*, Proceedings of the American Mathematical Society **137** (2009), no. 3, 1069–1072.

[HL09] Ku Yong Ha and Jong Bum Lee, *Left invariant metrics and curvatures on simply connected three-dimensional lie groups*, Mathematische Nachrichten **282** (2009), no. 6, 868–898.

[HL12] ______, *The isometry groups of simply connected 3-dimensional unimodular lie groups*, Journal of Geometry and Physics **62** (2012), no. 2, 189–203.

[MS39] S. B. Myers and N. E. Steenrod, *The group of isometries of a riemannian manifold.*, Annals of Mathematics **40** (1939), no. 2, 400–416.

[Reg18] Silvio Reggiani, *The index of symmetry of three-dimensional lie groups with a left-invariant metric*, Advances in Geometry **18** (2018), no. 4, 395–404.

[Shi97] Joonkook Shin, *Isometry groups of unimodular simply connected 3-dimensional lie groups*, Geometriae Dedicata **65** (1997), no. 3, 267–290.

[Sin60] Isadore M Singer, *Infinitesimally homogeneous spaces*, Communications on Pure and Applied Mathematics **13** (1960), no. 4, 685–697.