

# Instituto Politécnico

Universidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de

## Óptica Geométrica

**Tec. Univ. en Óptica  
y Contactología**

Cód. 7002-26

E. Benatti  
F. Pricco



Dpto. de Física

Masterización: RECURSOS PEDAGÓGICOS



# Índice

<b>Introducción.....</b>	<b>3</b>
Diferencias de esta versión respecto de la versión 2020.....	4
<b>Capítulo 0: Repaso.....</b>	<b>5</b>
0.1. Ecuación de Gauss y potencia de sistemas ópticos simples.....	5
Convenio de signos para la Ecuación (0.1).....	5
Cálculo de la potencia de sistemas ópticos simples.....	6
0.2. Focos y planos focales.....	9
0.2.1. Determinación de la potencia de un sistema óptico a partir de la distancias focales.....	12
0.2.2. Aumento lateral de una imagen.....	13
0.3. Determinación gráfica de imágenes.....	14
Objeto puntual ubicado en el eje óptico del sistema (Lentes).....	15
Objeto puntual ubicado en el eje óptico del sistema (Espejos).....	16
Objeto puntual ubicado fuera del eje óptico del sistema (objeto extenso) (Lentes).....	17
Objeto puntual ubicado fuera del eje óptico del sistema (objeto extenso) (Espejos).....	18
Objeto puntual que se encuentra frente a una superficie refringente plana.....	19
Objeto puntual que se encuentra frente a un espejo plano.....	20
0.4. Propiedades de las imágenes.....	20
0.5. Resumen de Fórmulas.....	23
0.6. Cuestiones.....	24
0.7. Ejercicios.....	25
<b>Capítulo 1: Lentes Gruesas.....</b>	<b>27</b>
1.1. Focos y puntos principales.....	27
1.1.1. Determinación de Focos y Puntos Principales por el método gráfico.....	30
1.1.2. Determinación de Focos y Puntos Principales por el método analítico.....	32
1.1.3. Determinación de imágenes a partir de la modelización de una lente gruesa.....	40
1.2. Puntos nodales y centro óptico.....	43
1.3. Resumen de Fórmulas.....	48
1.4. Cuestiones.....	49
1.5. Ejercicios.....	50
1.6. Apéndice A: Demostración de la expresión 1.18.....	54
<b>Capítulo 2: Combinaciones de Lentes.....</b>	<b>55</b>
2.1. Combinación de Lentes Delgadas.....	55
2.2. Combinación de Lentes Gruesas.....	57
2.3. Resumen de Fórmulas.....	63
2.4. Cuestiones.....	64
2.5. Ejercicios.....	65
<b>Capítulo 3: Espejos Gruesos.....</b>	<b>68</b>
3.1. Determinación del foco y punto principal para el caso de una Lente Delgada separada de un Espejo Simple.....	70

3.2. Determinación del foco y punto principal para el caso de una Lente Gruesa con una Superficie Plateada.....	75
3.3. Determinación del foco y punto principal para el caso de una Lente Gruesa separada de un Espejo Simple.....	77
3.4. Métodos gráficos.....	79
3.4.1. Lente Delgada con un Espejo Simple.....	80
3.4.2. Lente Gruesa con una Superficie Plateada.....	82
3.4.3. Lente Gruesa con un Espejo Simple.....	83
3.5. Determinación de imágenes a partir de un sistema modelado.....	85
3.6. Resumen de Fórmulas.....	86
3.7. Cuestiones.....	88
3.8. Ejercicios.....	89
<b>Capítulo 4: Diafragmas.....</b>	<b>93</b>
4.1. Diafragmas de apertura y diafragmas de campo.....	94
4.2. Espacio Objeto y Espacio Imagen.....	96
4.3. Pupila de entrada y pupila de salida.....	98
4.3.1. Determinación del Diafragma de Apertura, la Pupila de Entrada, la Pupila de Salida de algunos sistemas ópticos.....	100
4.3.1.1. Caso 1: Una lente delgada con un diafragma frontal.....	101
4.3.1.2. Caso 2: Una lente delgada con diafragma posterior.....	108
4.3.1.3. Caso 3: Dos lentes delgadas sin diafragma.....	114
Resumen de casos posibles para sistemas de dos elementos.....	123
4.3.1.4. Caso 4: Un diafragma entre dos lentes delgadas.....	124
Resumen de casos posibles para sistemas de tres elementos.....	131
4.4. Campo Visual.....	132
4.4.1. Lumbrera de entrada y lumbrera de salida.....	133
4.4.2. Determinación del Campo Visual de sistemas ópticos sencillos.....	135
4.4.2.1. Campo Visual de una ventana.....	135
4.4.2.2. Campo Visual de un espejo plano.....	137
4.4.2.3. Campo Visual de un espejo convexo.....	139
4.4.2.4. Campo Visual de una lente convergente.....	141
4.5. Ejercicios.....	144
<b>Capítulo 5: Trazado Estricto de Rayos.....</b>	<b>149</b>
5.1. Trazado estricto de rayos que inciden oblicuos al eje óptico.....	151
5.2. Trazado estricto de rayos que inciden paralelos al eje óptico.....	154
5.3. Ejemplo: Trazado estricto de rayos para una lente gruesa de potencia positiva.....	156
3.9. Resumen de Fórmulas.....	161
5.4. Cuestiones.....	163
5.5. Ejercicios.....	165
<b>Bibliografía.....</b>	<b>167</b>



# Introducción

El presente es un apunte para la materia Óptica Geométrica de la carrera de Técnico Universitario en Óptica y Contactología que se dicta en el Instituto Politécnico Gral. San Martín de la Universidad Nacional de Rosario. En éstas páginas profundizaremos los conceptos de Óptica Geométrica tratados en la materia Física de la misma carrera, estudiando sistemas ópticos más complejos que los tratados anteriormente. También trataremos los límites de la aproximación paraxial sobre la que se sustentan las ecuaciones de uso cotidiano de la óptica, el uso de diafragmas para la formación de imágenes, así como conceptos de iluminación y colorimetría.

El contenido de estas páginas está basado en el apunte que en su momento escribiera el Ing. Osvaldo Godino, aunque hemos modificado algunos aspectos del contenido con el fin de adaptarlo a los programas de la materia sobre los que trabajamos actualmente.

Los capítulos del apunte están organizados de manera tal que los conceptos que se desarrollan en uno son necesarios para desarrollar los conceptos del siguiente, por lo que es preciso que antes de concluir cada capítulo se tengan en claro las expresiones finales y las suposiciones que deben cumplirse para que dichas expresiones sean aplicables.

El apunte inicia con el [Capítulo 0](#), donde se repasan los conceptos fundamentales de óptica geométrica aplicados a espejos simples y lentes delgadas, así como los métodos fundamentales para la construcción de imágenes, analíticos y gráficos. Puede considerar a este capítulo como el repaso de los contenidos de Física que debe dominar para poder llevar adelante el cursado de esta asignatura.

Los contenidos de la materia propiamente dicha inician en el [Capítulo 1](#), donde se estudian aquellas lentes cuyo espesor no es despreciable con respecto a su distancia focal, denominadas lentes gruesas. En este capítulo se trabajan expresiones que permiten modelar a este sistema más complejo por uno más sencillo. Esto se logra a partir de determinar los denominados puntos y planos principales de un sistema óptico. Los planos principales son planos de aumento lateral unitario, que permiten reducir el conjunto de desvíos que se da en la totalidad del sistema a un único desvío que se da en dichos planos. A su vez se trata el concepto de puntos nodales de un sistema óptico, que son puntos de aumento angular unitario, es decir, puntos que no producen un desvío de los rayos que ingresan al sistema.

En el [Capítulo 2](#) se aplican algunos de los métodos del capítulo anterior a sistemas compuestos con varias lentes, que podrían ser gruesas o delgadas. Demostraremos que, sin importar la

cantidad de lentes que conformen un sistema óptico, el mismo también puede ser modelado a partir de dos **planos principales** que condensan la totalidad de los desvíos que se dan en el sistema.

El apunte sigue en el [Capítulo 3](#), donde trataremos la combinación de espejos con lentes de diferentes tipos, sistema óptico que denominaremos **espejo grueso**. En esta sección veremos que las imágenes formadas por tal sistema, sin importar su complejidad, pueden determinarse a partir de un sistema modelo que consta de un único foco y un plano ficticio en el que ocurre la reflexión. Denominaremos a dicho plano ficticio **plano principal** del espejo grueso.

En el [Capítulo 4](#) abordaremos estudiaremos como el tamaño finito de lentes y espejos influye en el tamaño de la imagen, que llamamos **campo visual**, pero también en el brillo de la misma.

Por último, en el [Capítulo 5](#), estudiaremos cómo es el trazado de rayos cuando se prescinde de la aproximación paraxial. Este estudio, que haremos de forma completamente analítica nos permitirá entender el origen de algunas de las aberraciones de las lentes, como la aberración esférica y la coma.

Como toda obra que tiene fines didácticos, la misma estará en permanente revisión, por lo cual se incentiva a lector a ser un lector activo, que además de buscar de apropiarse de los contenidos que aquí figuran, encuentre y reporte errores e inconsistencias, y proponga y discuta nuevas formas de abordaje de cada uno de los temas.

### Diferencias de esta versión respecto de la versión 2020

Esta obra tiene numerosas diferencias con respecto a la versión editada en 2020. Entre las más importantes podemos mencionar:

- Se han incorporado las expresiones para calcular el aumento de una imagen en el Capítulo 0.
- Se han corregido errores de tipeo en la escritura de algunas fórmulas. La corrección más importante es la relacionada al espejo grueso constituido por una lente gruesa separada de un espejo simple.
- Se han incorporado las respuestas numéricas a todos los ejercicios.
- Al final de cada Capítulo se incorporó una sección en donde figuran las fórmulas más relevantes del mismo.
- Se han distinguido las fórmulas finales de las demostraciones (en color azul), de aquellas que funcionan como pasos intermedios de las mismas (en color rojo).



# Capítulo 0: Repaso

## 0.1. Ecuación de Gauss y potencia de sistemas ópticos simples

La determinación analítica de la posición y naturaleza de las imágenes creadas por cualquier sistema óptico se realiza empleando la **Ecuación de Gauss**:

$$\frac{n}{s} + \frac{n''}{s''} = P \quad (0.1)$$

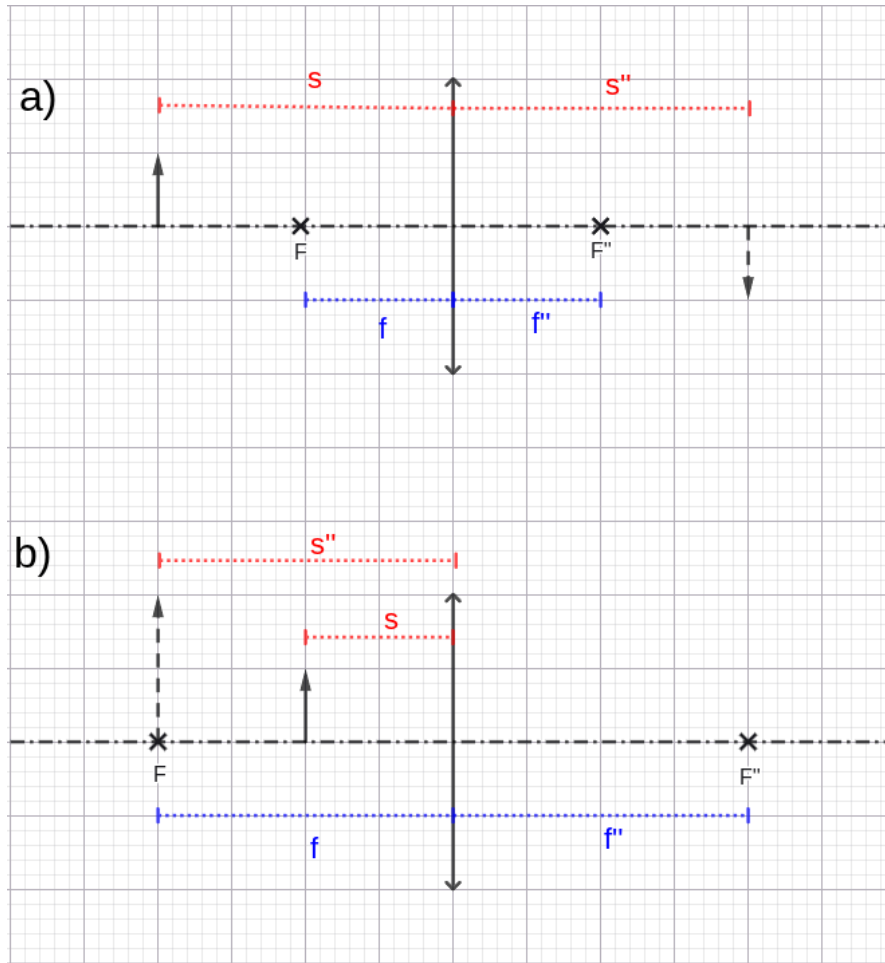
donde  $P$  es la **potencia** del sistema en cuestión. En esta ecuación  $n$  representa el índice de refracción del medio del que provienen los rayos y  $n''$  es el medio al que van los rayos luego de ser desviados por el sistema. Además,  $s$  representa la distancia a la que se encuentra el objeto del sistema óptico (distancia objeto), mientras que  $s''$  representa la distancia a la que se encuentra la imagen formada por el sistema, respecto del mismo (distancia imagen).

Debe recordarse que la [Ecuación \(0.1\)](#) es válida mientras todos los rayos que ingresen al sistema se encuentren próximos al eje del mismo, y sean aproximadamente paralelos al mismo. Los rayos que cumplen esta condición se denominan **paraxiales**, y la aproximación mencionada se denomina **aproximación paraxial**. Dicho de otro modo, decimos que la [Ecuación \(0.1\)](#) sólo es válida dentro de la aproximación paraxial.

### Convenio de signos para la [Ecuación \(0.1\)](#)

Vale mencionar en este punto el convenio de signos que emplearemos a lo largo del curso:

- Los sistemas ópticos convergentes, que son los que cierran los rayos que vienen de muy lejos, tienen potencia positiva. Estos sistemas tienen distancias focales positivas.
- Los sistemas ópticos divergentes, es decir los que abren los rayos que vienen de muy lejos, tienen potencia negativa. Estos sistemas tienen distancias focales negativas.
- Los objetos que se encuentran del lado del que provienen los rayos tienen distancia objeto positiva y se los llama objetos reales. De lo contrario, la distancia objeto es negativa y el objeto se llama virtual.
- Las imágenes que se encuentran del lado al que se dirigen los rayos tienen distancia imagen positiva, y se llama a la imagen correspondiente, imagen real. De lo contrario, la distancia imagen es negativa y la imagen se denomina virtual.



**Figura 1** Ejemplo del convenio de signos que se empleará en este curso de Óptica Geométrica.

En la [Figura 1](#) ejemplificamos este convenio para dos casos particulares de una lente convergente, es decir con distancia focal positiva, y por lo tanto potencia positiva. En ambos esquemas hemos representado a los objetos como flechas con línea continua y a las imágenes con flechas con línea de trazos. En relación al convenio de signos, en la [Figura 1-a](#) tanto la distancia objeto como la distancia imagen son positivas, mientras que en la [Figura 1-b](#) la distancia objeto es positiva mientras que la distancia imagen es negativa.

### Cálculo de la potencia de sistemas ópticos simples

La potencia de un sistema óptico es una magnitud que depende de la geometría de las superficies refractantes o reflejantes que lo constituyen, y, en el caso de las lentes y dioptras, depende de la relación que exista entre el índice de refracción del material del que están hechas las mismas y el medio en que se encuentran.

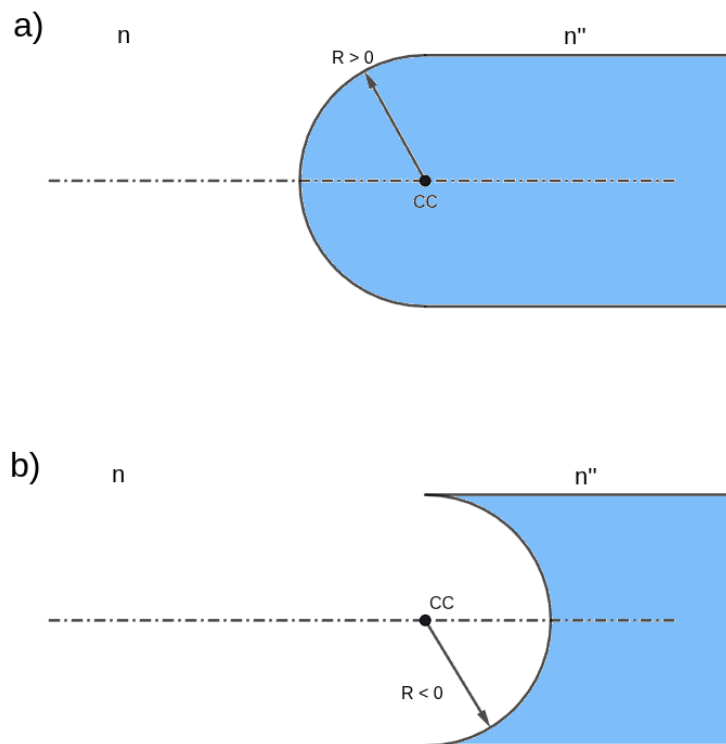


Hasta el momento, quien lee este apunte debería estar familiarizado con las expresiones que permiten calcular la potencia de los sistemas ópticos simples: la **dioptra**, la **lente delgada** y el **espejo simple**:

1. **Dioptra de índice de refracción  $n'$** : Si los rayos de luz van desde un medio de índice de refracción  $n$  hacia un medio de índice de refracción  $n'$ , la potencia de una dioptra se puede calcular como:

$$P_D = \frac{n' - n}{R_D} \quad (0.2)$$

donde  $R_D$  es el radio de curvatura de la dioptra.



**Figura 2** Convenio de signos que se empleará en este curso de Óptica Geométrica para realizar cálculos que involucran superficies esféricas.

Al igual que lo que ocurría con las distancias objeto e imagen, los radios de curvatura también deben respetar un convenio de signos a la hora de realizar cálculos. En la [Figura 2](#) se han representados los dos tipos de superficie que existen:

- las superficies convexas, su centro de curvatura (CC) a la derecha de la superficie propiamente dicha, y les corresponde un radio  $R$  positivo;

- las superficies cóncavas, por otro lado, tienen su centro de curvatura a la izquierda de la superficie, y les corresponde un radio de curvatura  $R$  negativo.
2. **Lente delgada de índice de refracción  $n'$ :** Una lente delgada se puede pensar como dos dioptras consecutivas, por lo que la potencia del sistema es simplemente la suma de la potencia de cada dioptra:

$$P_{LD} = P_{D1} + P_{D2} = \frac{n' - n}{R_1} + \frac{n'' - n'}{R_2} \quad (0.3)$$

donde  $R_1$  y  $R_2$  son los radios de curvatura de la primera y segunda superficie de la lente, respectivamente. Como una lente delgada se compone de dos dioptras, a cada cara de la lente delgada se le aplica el mismo convenio de signos que a las dioptras.

La nomenclatura elegida supone que la primer superficie de la lente está en contacto con un medio de índice de refracción  $n$ , mientras que la segunda superficie está en contacto con un medio de índice de refracción  $n''$ , y que los rayos van desde el medio de índice  $n$  a un medio de índice  $n''$ . Cuando la lente se encuentra sumergida en aire ( $n = n'' = 1$ ), la [Ecuación \(0.3\)](#) suele recibir el nombre de la fórmula del constructor de lentes:

$$P_{LD} = (n' - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (0.3')$$

3. **Espejo simple en un medio de índice de refracción  $n$ :** A diferencia de una lente o una dioptra, que son medios que desvían los rayos que inciden sobre ellas, un espejo es un sistema óptico que refleja los rayos que inciden sobre él. Esto significa que al aplicar la [Ecuación de Gauss \(0.1\)](#) siempre se cumple que  $n = n''$ . La expresión para calcular la potencia de un espejo simple es

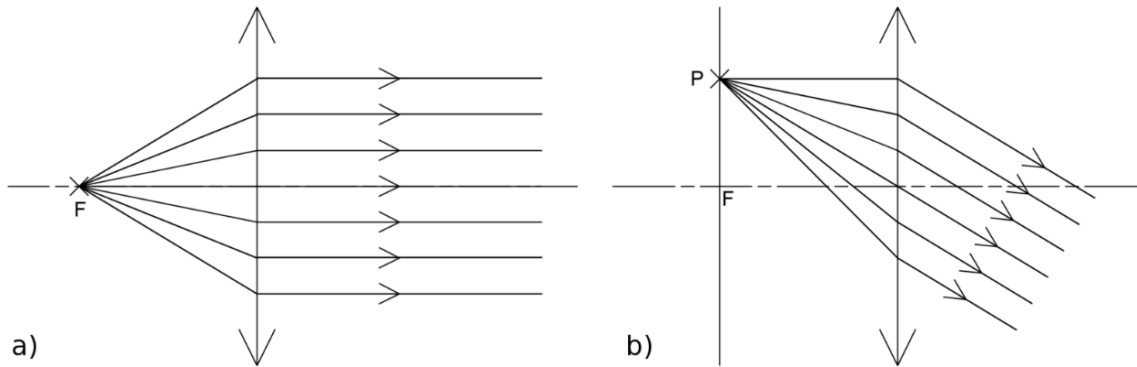
$$P_{ES} = - \frac{2n}{R_E} \quad (0.4)$$

donde  $R_E$  es el radio de curvatura del espejo. El radio de curvatura de los espejos debe considerarse con el mismo convenio de signos que las dioptras (ver [Figura 2](#)).



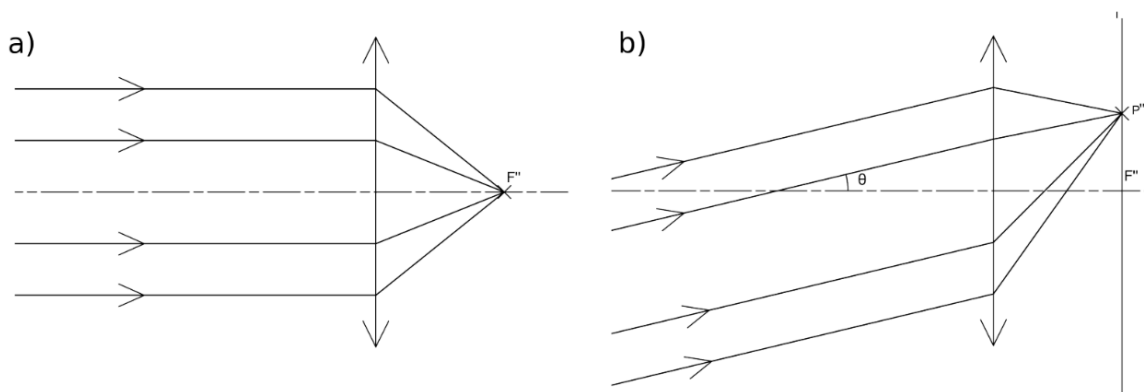
## 0.2. Focos y planos focales

Para cualquier sistema, puede definirse el **foco objeto** como el punto objeto situado sobre el eje cuya imagen se forma en el infinito. En el caso de una lente esto significa que los rayos que divergen desde el foco objeto son paralelos, después de la refracción, al eje de la lente, como indica la [Figura 3-a](#). El foco objeto lo representaremos con la letra F.



**Figura 3** (a) Si se coloca un objeto en el Foco F de un sistema óptico su imagen se formará en el infinito. (b) Cualquier conjunto de rayos que provengan del mismo punto del plano focal objeto emergerán paralelos entre sí luego de ser refractados por la lente.

El plano que pasa por el foco objeto y es perpendicular al eje se denomina **plano focal objeto**. La [Figura 3-b](#) representa un pincel de rayos que divergen desde un punto P situado en el plano focal objeto. Después de la refracción estos rayos son paralelos entre sí, pero no al eje de la lente.



**Figura 4** (a) El foco imagen  $F''$  es la imagen de un objeto situado en el infinito. (b) Si se tiene un conjunto de rayos que inciden paralelos entre sí, luego de pasar por la lente todos convergerán a (o divergen del) mismo punto sobre el del plano focal imagen.

Se define el **foco imagen** de un sistema óptico como la imagen de un punto infinitamente alejado sobre el eje del sistema. Para el caso de una lente, esto significa que si se tiene un conjunto de rayos paralelos al eje que inciden sobre la misma, después de la refracción todos ellos pasarán por (o divergirán) del foco imagen, según se ve en la [Figura 4-a](#). El foco imagen se designa por  $F''$ .

Se denomina **plano focal imagen** a el plano que pasa por el foco imagen y es perpendicular al eje. En la [Figura 4-b](#), un haz de rayos paralelos procedentes de un punto objeto infinitamente alejado, y no situado sobre el eje de la lente, converge para formar una imagen  $P'$ , situada en el plano focal imagen de la lente.

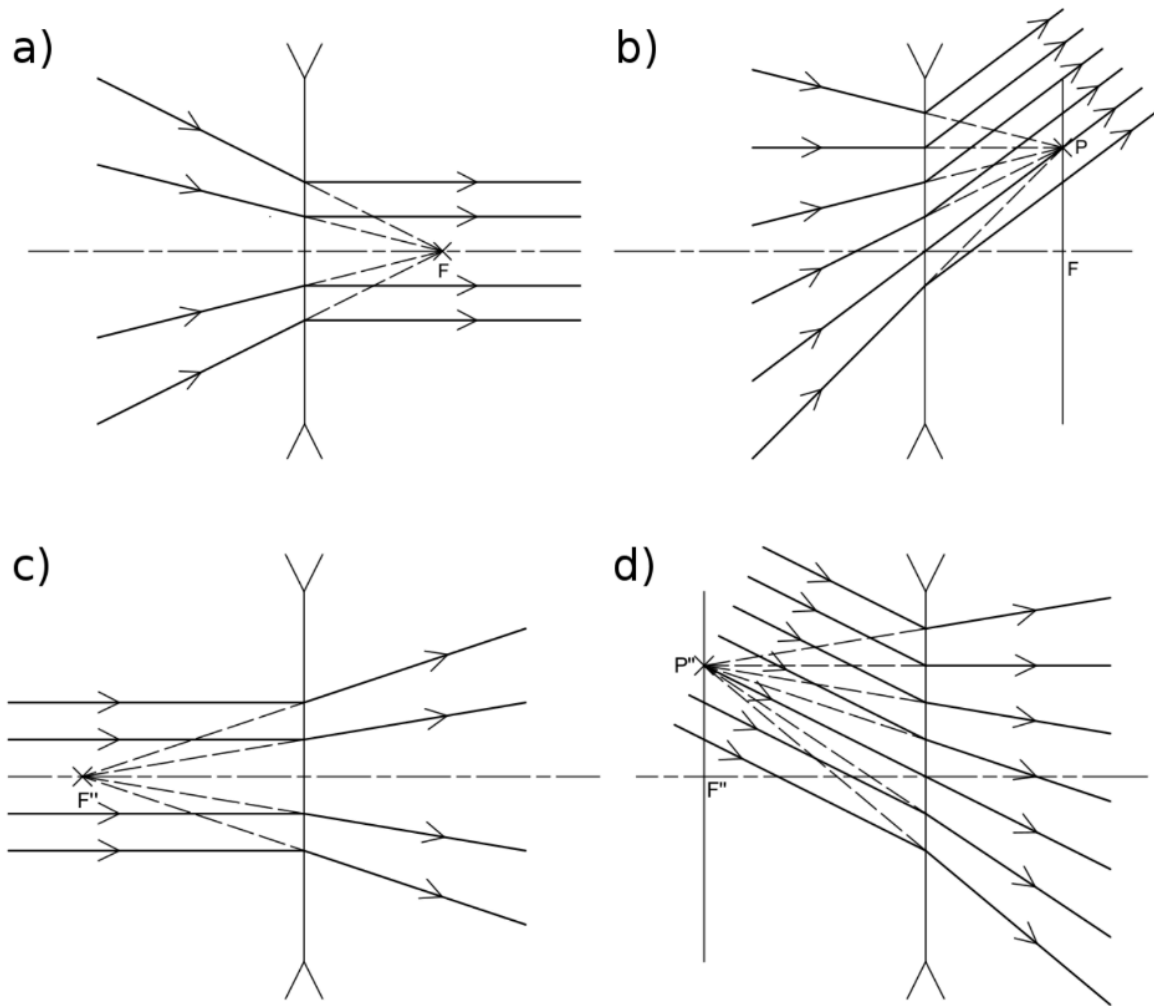
No es necesario que un rayo se origine realmente en el foco objeto de una lente para que su dirección, después de refractado, sea paralela al eje de la lente, basta simplemente que el mismo pase por el foco. Análogamente, cualquier rayo que incide sobre una lente paralelamente al eje de la misma, pasa después de la refracción por el foco imagen.

El trazado que involucra los focos objeto e imagen de una lente divergente es completamente análogo al ejemplificado hasta aquí para lentes convergentes, cambiando el hecho de que son las prolongaciones de los rayos las que pasan por los focos y los planos focales, y no los rayos propiamente dichos, como se ejemplifica en la [Figura 5](#)<sup>1</sup>.

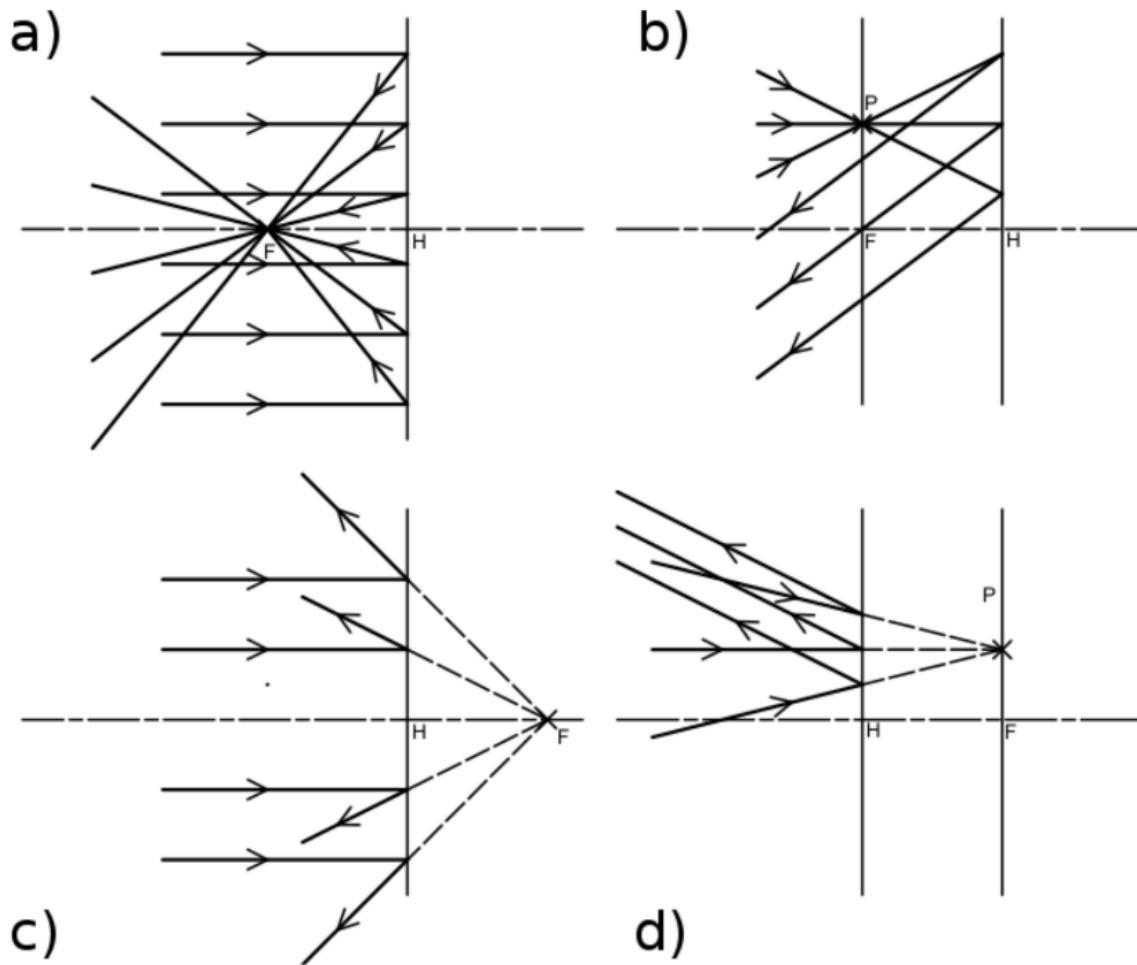
Para el caso de un espejo, las definiciones de foco objeto e imagen son las mismas, aunque puede demostrarse que para un espejo los focos objeto e imagen siempre coinciden. En la [Figura 6](#) se muestra como los rayos que inciden paralelos convergen a (o divergen de) el foco y plano focal de un espejo simple, ejemplificando el trazado tanto para un espejo de potencia positiva (a-b), como para uno de potencia negativa (c-d). En la imagen se ha reemplazado a cada espejo por su correspondiente plano tangente, cuya intersección con el eje se ha designado con la letra H, por razones que serán explicadas en el Capítulo 1.

---

<sup>1</sup> Recordar que las prolongaciones de rayos se representan con líneas de trazos.



**Figura 5** Ejemplo de los focos y planos focales para una lente divergente. (a) Foco Objeto (b) Plano focal objeto (c) Foco imagen (d) Plano focal imagen.



**Figura 6** Foco y plano focal para un espejo simple. (a) Foco de un espejo positivo (b) Plano focal de un espejo positivo (c) Foco de un espejo negativo (d) Plano focal de un espejo negativo.

### 0.2.1. Determinación de la potencia de un sistema óptico a partir de la distancias focales

Si bien la potencia es una propiedad del sistema óptico estudiado, la misma puede determinarse experimentalmente a partir de analizar las imágenes que genera cada sistema a partir de objetos ubicados a diferentes distancias del mismo. Por ejemplo, si se tiene un objeto ubicado a una distancia muy grande de un dado sistema óptico de potencia  $P$ , en la evaluación de la [Ec. 0.1](#) deberá hacerse  $s = \infty$  y  $s = f''$  por definición de foco imagen, lo que implica que

$$\frac{n''}{f''} = P \quad (0.5)$$



Por otro lado, si el objeto se encuentra en el foco objeto del sistema se tendrá que  $s = f$  y su imagen se formará en el infinito, es decir,  $s'' = \infty$ , por lo que

$$\frac{n}{f} = P \quad (0.6)$$

En función de las igualdades [0.5](#) y [0.6](#) se puede obtener una forma alternativa de escribir la [Ecuación \(0.1\)](#) que incluye las distancias focales de un sistema óptico:

$$\frac{n}{s} + \frac{n''}{s''} = \frac{n}{f} = \frac{n''}{f''} \quad (0.7)$$

Como es común que los fabricantes de lentes y espejo provean la distancias focales en aire de sus instrumentos, es muy común trabajar la Ec. de Gauss en su forma [\(0.7\)](#), sin embargo, no debe olvidarse que la potencia es la propiedad del sistema óptico que determina la distancia focal, y no al revés.

### 0.2.2. Aumento lateral de una imagen

Si el objeto cuya imagen se quiere determinar se encuentra a una distancia  $s$  del sistema tiene una altura  $y$ , forma una una imagen a una distancia  $s''$  que tiene una altura  $y''$ , se tiene que el cociente  $y''/y$  se denomina aumento de la imagen, y se lo representa con la letra  $m$ . Puede demostrarse que el aumento puede determinarse también a partir de conocer las distancias objeto e imagen, es decir se cumplen las siguientes igualdades:

$$m = \frac{y''}{y} = - \frac{n}{n''} \cdot \frac{s''}{s} \quad (0.8)$$

El procedimiento que suele seguirse para determinar analíticamente la imagen de un objeto extenso suele seguir los siguientes pasos:

- Conociendo los índices de refracción  $n$  y  $n''$ , la potencia  $P$  del sistema óptico y la distancia focal objeto  $s$ , se determina la distancia focal imagen  $s''$  empleando la [Ecuación \(0.1\)](#)<sup>2</sup>.
- Una vez conocida  $s''$ , se determina el aumento  $m$  empleando la [Ecuación \(0.7\)](#).
- Conociendo el aumento  $m$  y la altura  $y$  del objeto se calcula la altura  $y''$  de la imagen haciendo  $y'' = m \cdot y$ .

---

<sup>2</sup> La potencia  $P$  puede conocerse por el fabricante, a partir de parámetros constructivos del sistema, o a partir de conocer las distancias focales y empleando alguna de las Ecuaciones [\(0.5\)](#) o [\(0.6\)](#).

De la definición de aumento lateral se puede deducir inmediatamente que cuando  $|m| < 1$ , la imagen se ve reducida, cuando  $|m| > 1$  la imagen se ve ampliada y que cuando  $|m| = 1$ , el aumento es unitario, es decir, la imagen tiene el mismo tamaño que el objeto que la formó.

Adicionalmente, dentro del convenio de signos adoptado por la cátedra se tiene que si  $m > 0$  la imagen es directa, mientras que si  $m < 0$  la imagen está invertida (ver [Figura 1](#)). Este convenio de signos vale tanto para imágenes reales como virtuales y es independiente del sistema óptico que produce la imagen.

Finalmente, si se tiene un conjunto de  $N$  sistemas ópticos en serie, cada uno de ellos con respectivos aumentos  $m_1, m_2, \dots, m_N$ , se puede demostrar que el aumento total del conjunto estará dado por el producto de todos los aumentos, es decir:

$$m_{Total} = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_N \quad (0.9)$$

### 0.3. Determinación gráfica de imágenes

La determinación de la imagen de un objeto por el método gráfico se realiza a partir de trazar dos rayos que pasen por el objeto, y determinando en qué lugar del espacio se intersecan los rayos desviados (o sus prolongaciones).

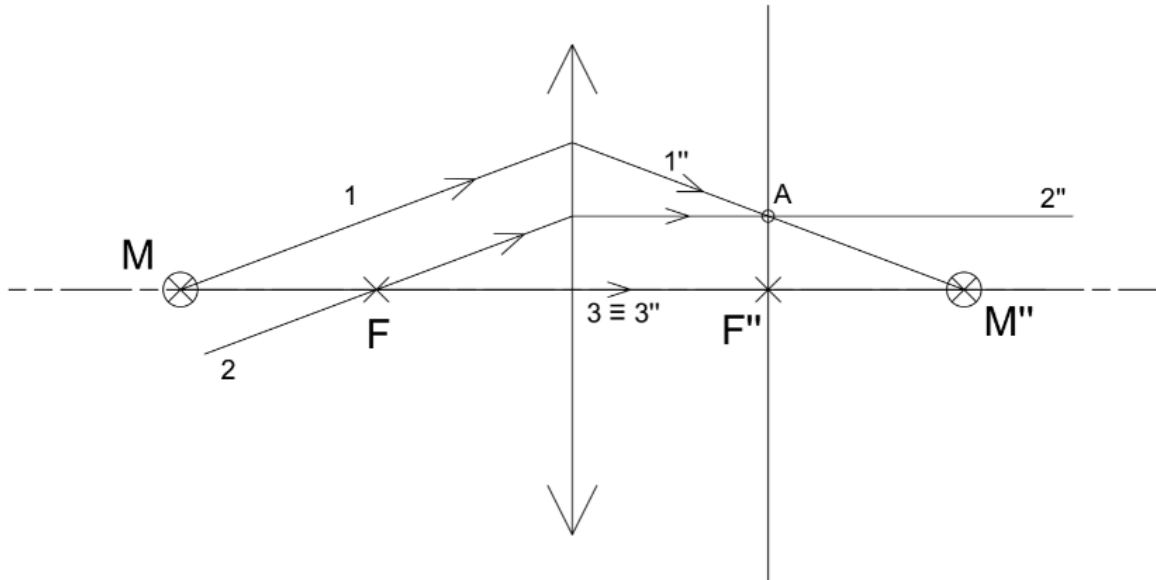
La determinación de la trayectoria de los rayos después de la refracción se realiza a partir de los llamados rayos de marcha conocida, cuya trayectoria se basa en los siguientes principios, válidos para cualquier sistema óptico, siempre que se cumpla la aproximación paraxial:

- I. Todo rayo que pasa por el foco objeto ([Fig. 3-a](#)), o apunta a el mismo ([Fig. 5-a](#)), emerge paralelo al eje después de la refracción o de la reflexión ([Figs. 6-a y c](#)).
- II. Todo rayo que incide paralelo al eje del sistema, pasa por el foco imagen ([Figura 4-a](#)), o diverge del mismo ([Fig. 5-c](#)) después de la refracción o de la reflexión ([Figs. 6-a y c](#)).
- III. Cualquier conjunto de rayos (o prolongaciones) que se intersecan en algún punto del plano focal objeto ([Fig. 3-b](#) o [Fig.5-b](#)) cruzan al plano focal imagen paralelos entre sí ([Figs. 6-b y d](#)).
- IV. Cualquier conjunto de rayos (o prolongaciones) que cruzan paralelos entre sí al plano focal objeto, formando un ángulo  $\theta$  respecto al eje óptico, se intersecan en el mismo punto sobre el plano focal imagen ([Fig. 4-b](#) o [Fig. 5-d](#)) luego de la refracción o de la reflexión ([Figs. 6-b y d](#)).



### Objeto puntual ubicado en el eje óptico del sistema (Lentes).

En la [Figura 7](#) se muestra el método para determinar la imagen de un objeto puntual M que se encuentra sobre el eje óptico del sistema, en este caso una lente delgada convergente.



**Figura 7.** La determinación de la imagen de un objeto puntual ubicado en el eje óptico de una lente se realiza empleando el método del rayo auxiliar.

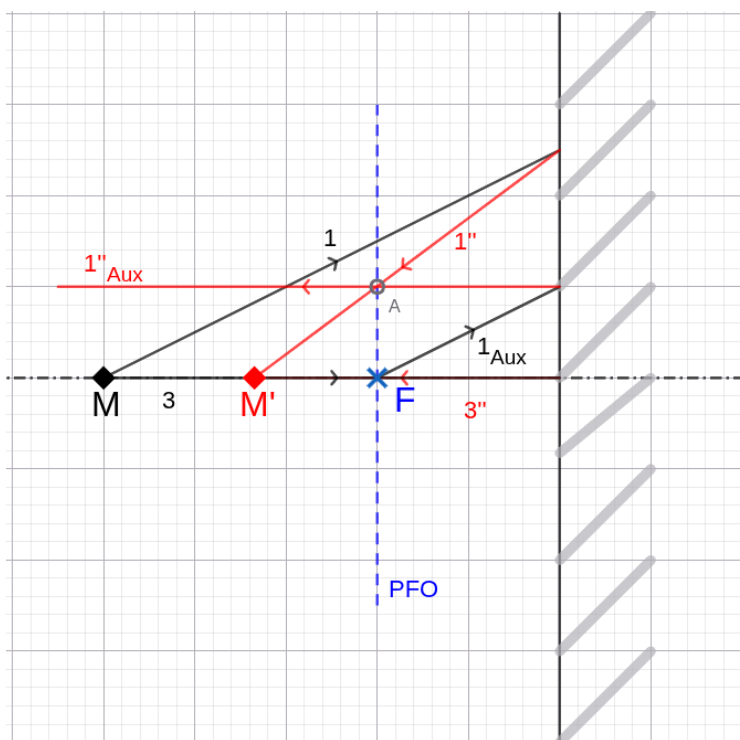
La imagen  $M''$  es la que se obtiene de la intersección de los rayos  $1''$  y  $3''$ . Mientras que el rayo  $3''$  es de marcha trivial, ya que es un rayo que no se desvía al pasar por el eje de la lente, la determinación de la dirección de  $1''$  requiere un poco más de trabajo y la aplicación del principio **IV** enunciado anteriormente.

Primero se traza el rayo 1 oblicuo al eje (cualquier rayo oblicuo al eje servirá). Como el rayo 1 no es de marcha conocida, para determinar su dirección después de la refracción se requiere emplear el rayo auxiliar 2. El rayo 2 es paralelo a 1, y pasa por el foco objeto F de la lente, por lo que en virtud del principio I, el rayo  $2''$  debe emerger paralelo al eje después de refractarse. Por otro lado, dado que 1 y 2 inciden de manera paralela a la lente, por el principio IV, después de la refracción, ambos rayos deben intersectarse en un punto que se encuentra sobre el plano focal imagen, que en la [Figura 5](#) se ha denominado con la letra A. De esta manera, la dirección del rayo  $1''$  será determinada por la recta que pasa por A y por el punto donde 1 se interseca con la lente.

Una vez determinada la dirección del rayo  $1''$ , se continúa el trazado el mismo hasta que se interseca con el rayo  $3''$ , lo que determina el punto imagen  $M''$ .

### Objeto puntual ubicado en el eje óptico del sistema (Espejos).

En la [Figura 8](#) se muestra el método para determinar la imagen de un objeto puntual M que se encuentra sobre el eje óptico del sistema, en este caso un espejo simple cóncavo que se ha representado por su plano tangente.



**Figura 8.** La determinación de la imagen de un objeto puntual ubicado en el eje óptico de un espejo también se realiza empleando el método del rayo auxiliar.

La imagen  $M''$  es la que se obtiene de la intersección de los rayos  $1''$  y  $3''$  (superpuesto con el eje óptico). Mientras que el rayo  $3''$  es de marcha trivial, ya que es un rayo que no se desvía al pasar por el eje del espejo, la determinación de la dirección de  $1''$  requiere un poco más de trabajo y la utilización del llamado rayo auxiliar.

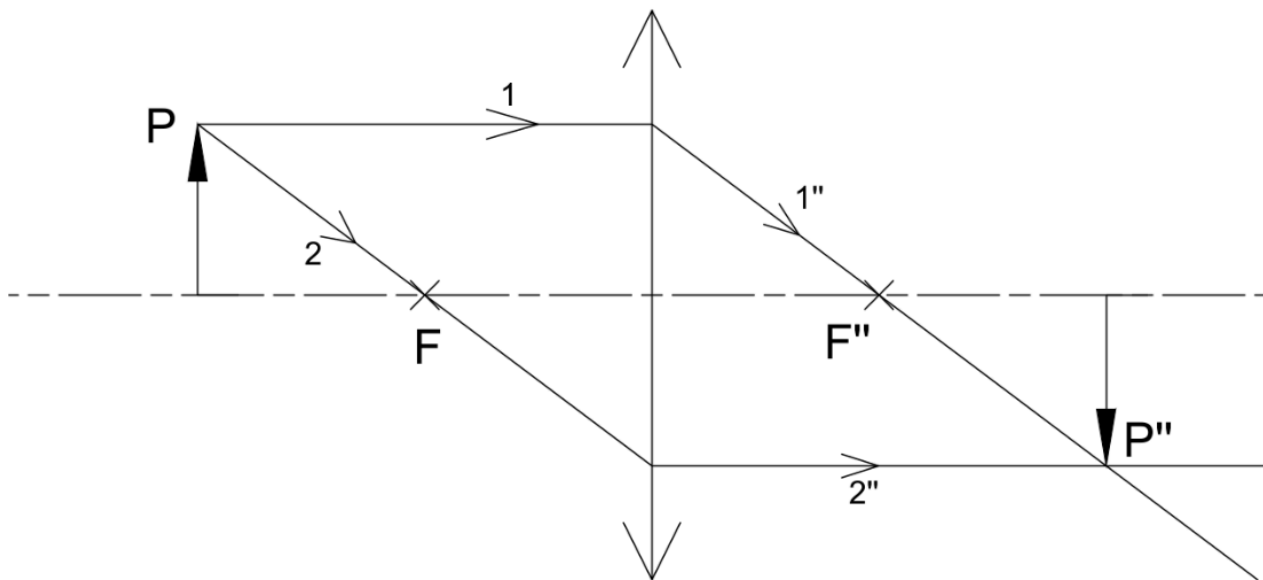
Primero se traza el rayo 1 oblicuo al eje (cualquier rayo oblicuo al eje servirá). Como el rayo 1 no es de marcha conocida, para determinar su dirección después de la refracción se requiere emplear el rayo auxiliar  $1_{Aux}$ . El rayo  $1_{Aux}$  es paralelo a 1, y pasa por el foco objeto F del espejo, por lo que en virtud del principio I, el rayo  $1''_{Aux}$  debe emerger paralelo al eje después de reflejarse. Por otro lado, dado que 1 y  $1_{Aux}$  se cruzan paralelos en el plano focal objeto (PFO), por el principio IV, después de la reflexión, ambos rayos deben intersectarse en un punto que se encuentra sobre el plano focal imagen (que coincide con el PFO), que en la [Figura 8](#) se ha denominado con la letra A. De esta manera, la dirección del rayo  $1''_{Aux}$  será determinada por la recta que pasa por A y por el punto donde 1 se interseca con el espejo.



Una vez determinada la dirección del rayo 1", se continúa el trazado el mismo hasta que se interseca con el rayo 3", lo que determina el punto imagen M".

### **Objeto puntual ubicado fuera del eje óptico del sistema (objeto extenso) (Lentes).**

La determinación de la imagen de un objeto puntual que se encuentra fuera del eje de la lente puede considerarse más sencilla que la expuesta anteriormente, ya que no requiere el trazado de ningún rayo auxiliar. A su vez, la determinación de la imagen de objetos que se encuentran fuera del eje de la lente es de gran importancia porque permite la determinación de la imagen de objetos extensos, como se muestra en la [Figura 9](#).



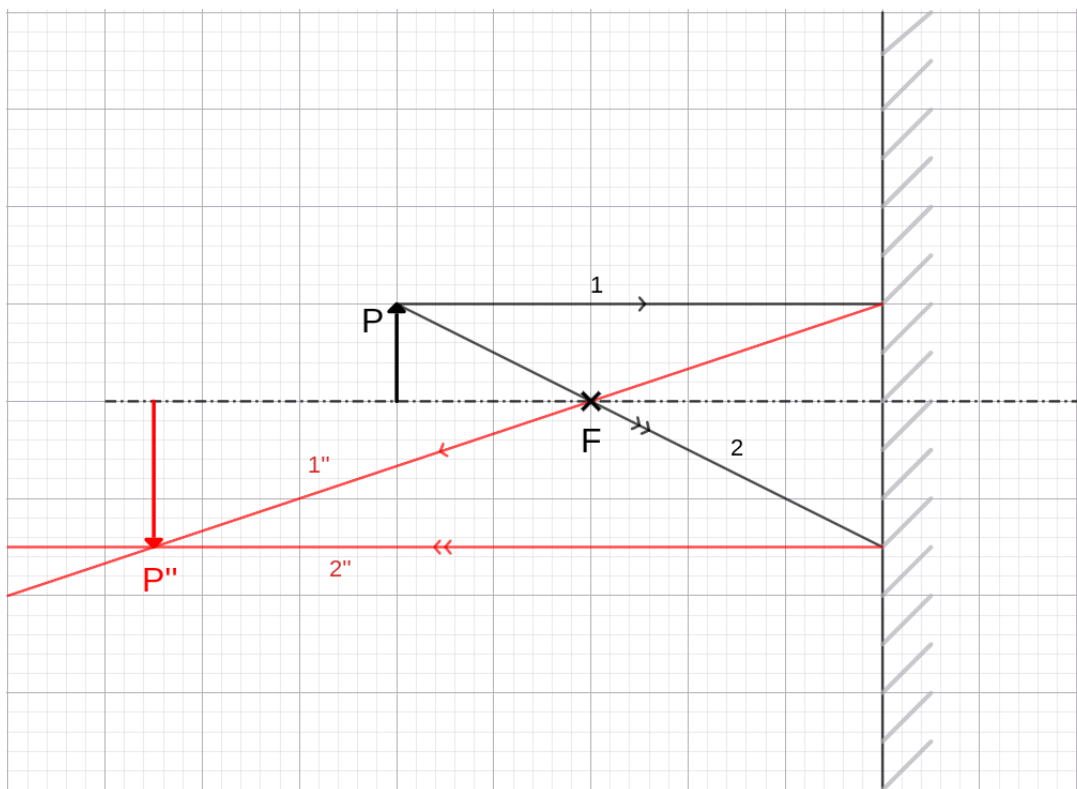
**Figura 9.** La determinación de la imagen de un objeto puntual ubicado fuera del eje óptico de una lente se realiza con dos rayos: uno que pase por el objeto y sea paralelo al eje y otro que pase por el objeto y por el foco objeto del sistema.

Para determinar la imagen del punto P se deben emplear dos rayos que cumplen los principios I y III. El rayo 1 pasa por P y es paralelo al eje óptico, por lo que en virtud del principio I, después de pasar por la lente el rayo 1" debe pasar por el foco imagen F". Por otro lado, el rayo 2, que pasa por P y por el foco objeto F, luego de ser desviado por la lente debe, en virtud del principio III, emerger paralelo al eje óptico, tal como lo hace el rayo 2".

La intersección de los rayos 1" y 2" determinan la posición del punto imagen P". Si se extiende una flecha perpendicularmente al eje se determina a su vez la imagen del objeto extenso<sup>3</sup>.

### Objeto puntual ubicado fuera del eje óptico del sistema (objeto extenso) (Espejos)

Al igual que en el caso de la lente, la determinación de la imagen de un objeto puntual que se encuentra fuera del eje de un espejo tampoco requiere el trazado de un rayo auxiliar, y se encuentra ejemplificada en la [Figura 10](#).



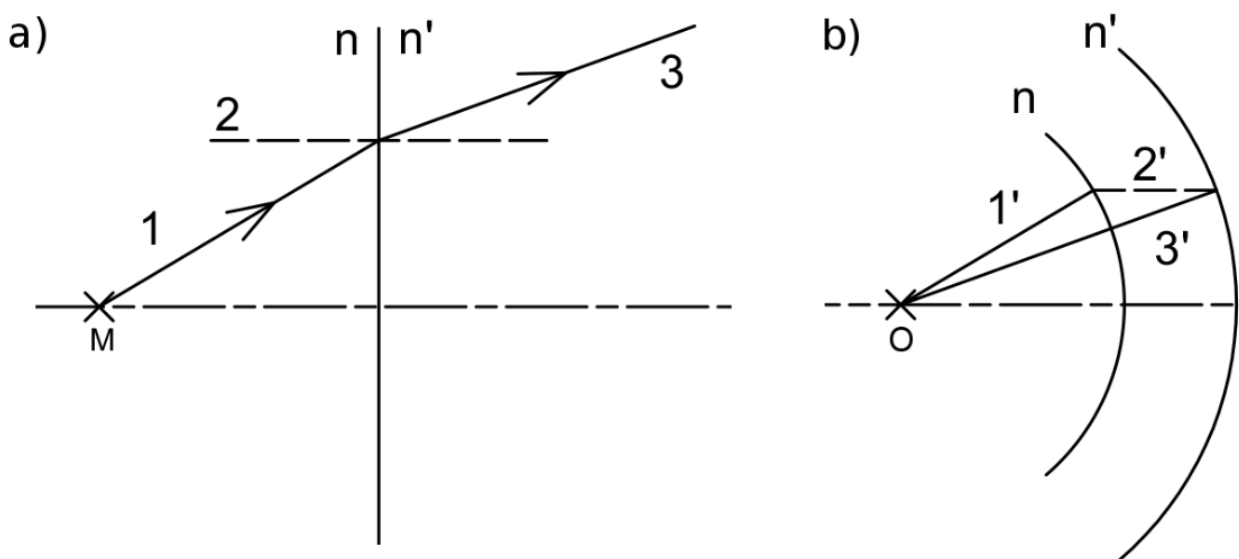
**Figura 10.** La determinación de la imagen de un objeto puntual ubicado fuera del eje óptico de un espejo se realiza con dos rayos: uno que pase por el objeto y sea paralelo al eje y otro que pase por el objeto y por el foco objeto del sistema.

<sup>3</sup> Estrictamente hablando, se debería trazar la imagen de la base de la flecha, empleando el método para determinar imágenes de objetos ubicados en el eje óptico. Si todos los trazados son correctos, y no hay errores de paralaje en el trazado, el resultado debería ser una flecha perpendicular al eje óptico.



### Objeto puntual que se encuentra frente a una superficie refringente plana.

Cuando un rayo pasa de un medio de índice de refracción  $n$  a un medio con índice de refracción  $n'$  a través de una interfaz plana ( $R = \infty$ ), los métodos expuestos anteriormente no pueden emplearse, ya que cuando la superficie que separa los medio es plana, los focos correspondientes se encuentran en infinito. En una situación así, la determinación gráfica de la dirección de salida de un rayo dado se realiza por medio del método del rayo oblicuo con diagrama auxiliar, que se ejemplifica en la [Figura 11](#).



**Figura 11:** (a) Cuando un rayo incide sobre una superficie plana (reflectante o refractante), la determinación de la marcha de los rayos no se puede hacer empleando los focos del sistema, ya que éstos se encuentran en el infinito. La determinación de la dirección del rayo saliente se hace empleando el método del rayo oblicuo que requiere la realización de un dibujo auxiliar (b).

Supóngase que se tiene un rayo 1 que parte de un objeto puntual M y que incide sobre la interfaz entre los medios  $n$  y  $n'$  con  $n' > n$  ([Fig. 11-a](#)). Por la ley de Snell, la dirección de salida del rayo 3 estará determinada por el ángulo que forme el rayo 1 con la normal 2:

$$n \sin(\theta_1) = n' \sin(\theta_3)$$

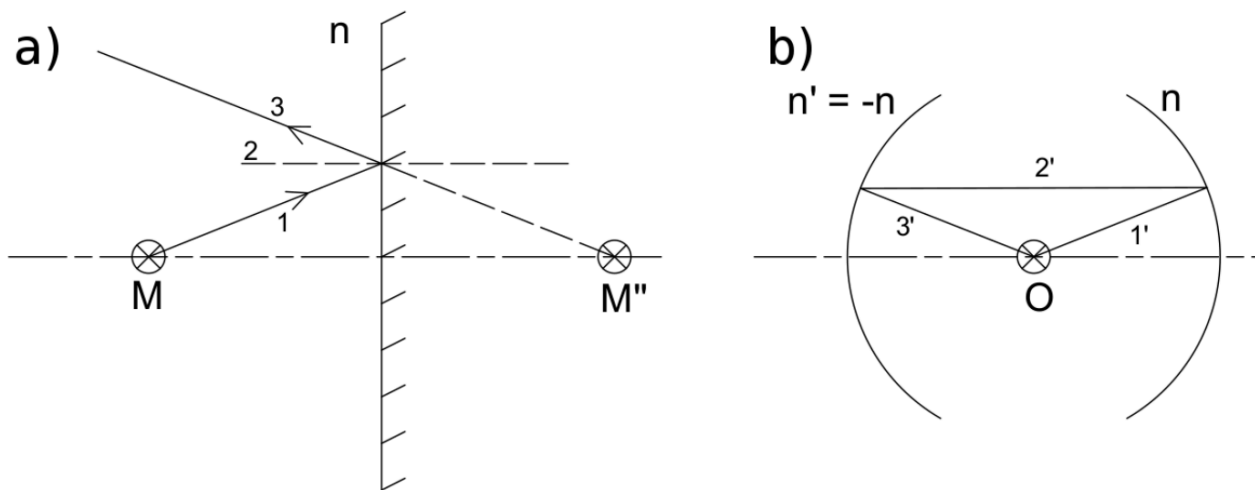
$$\sin(\theta_3) = \frac{n}{n'} \sin(\theta_1)$$

Para determinar gráficamente la dirección del rayo 3 se realiza un dibujo auxiliar en el que se trazan dos arcos de circunferencia con radios proporcionales a los medios  $n$  y  $n'$ , y se traza un rayo 1' paralelo a 1 que pase por un punto O arbitrario, como se muestra en la [Fig. 11-b](#), hasta

que se interseca con el arco  $n$ . Luego, el punto de intersección entre  $1'$  el arco  $n$  se traslada hasta el arco  $n'$  por medio del rayo  $2'$ , que es paralelo a la normal  $2$ . Finalmente, se une la intersección del rayo  $2'$  con el punto  $O$ , trazando el rayo  $3'$ . Se puede ver que dada la construcción realizada, la dirección del rayo  $3'$  será la que corresponde a la ley de Snell, por lo que si se traza en el dibujo original un rayo  $3$  paralelo a  $3'$ , se tendrá el rayo deseado. Si se prolonga el rayo  $3$  se puede encontrar la imagen del objeto puntual  $M$ .

### Objeto puntual que se encuentra frente a un espejo plano.

En caso de que se tenga que determinar la dirección de un rayo que incide sobre un espejo plano, el procedimiento es muy similar, sólo que como el rayo vuelve al medio del que provino originalmente, se tiene que  $n' = n$ , aunque en este caso la marcha del rayo emergente es opuesta a la del incidente. En términos del método esto significa que la normal debe invertir la marcha del rayo, lo que se logra suponiendo que  $n' = -n$ , es decir, el arco que representa a  $n'$  se debe trazar en el sentido opuesto al que se usó para trazar  $n$ , como se muestra en la [Figura 12](#).



**Figura 12:** (a) Cuando un rayo incide sobre una superficie reflectante plana, la determinación de la marcha de los rayos también se hace empleando el método del rayo oblicuo, suponiendo  $n' = -n$ .

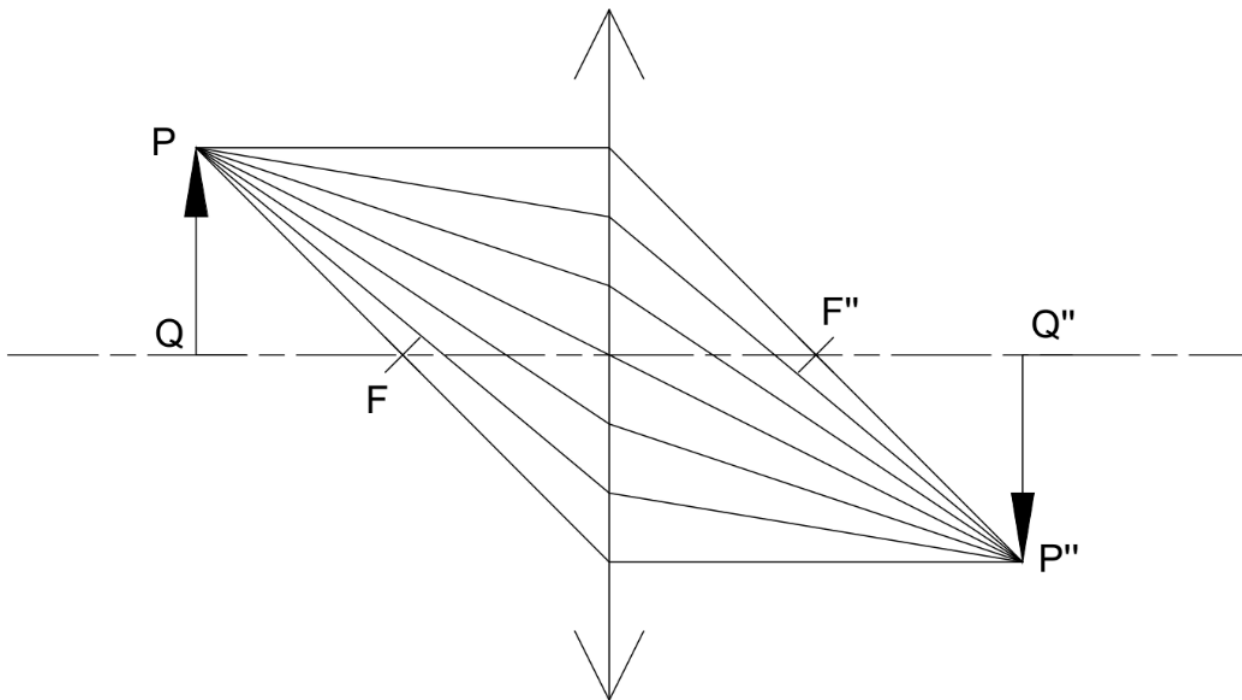
### 0.4. Propiedades de las imágenes

**Imágenes reales y virtuales.** La imagen  $\overline{P''Q''}$  de la [Figura 13](#) es una imagen formada por un conjunto de rayos que convergen hacia ella. Esto significa que si se pone una pantalla en el lugar de convergencia de los rayos se podrá ver la imagen propiamente dicha. En este sentido se dice que la imagen es **real**.

Sin embargo, no todos los sistemas ópticos forman imágenes reales. Por ejemplo, en la [Figura 14](#) se ve claramente como ninguno de los rayos converge luego de pasar por la lente. Se observa, no



obstante, que todos los rayos parecen divergir de los puntos  $\overline{P''Q''}$ . En este caso, si se coloca una pantalla en lugar de donde parecen divergir los rayos, no se observará ninguna imagen. Por otro lado, para un observador ubicado a la derecha de la imagen, los rayos emitidos desde P parecerán provenir desde el punto  $P''$ , y una observación análoga se puede hacer respecto al punto  $Q''$ . Como la imagen no proviene de intersección de rayos, sino que lo hace de prolongaciones de los mismos, se dice que la imagen es **virtual**.



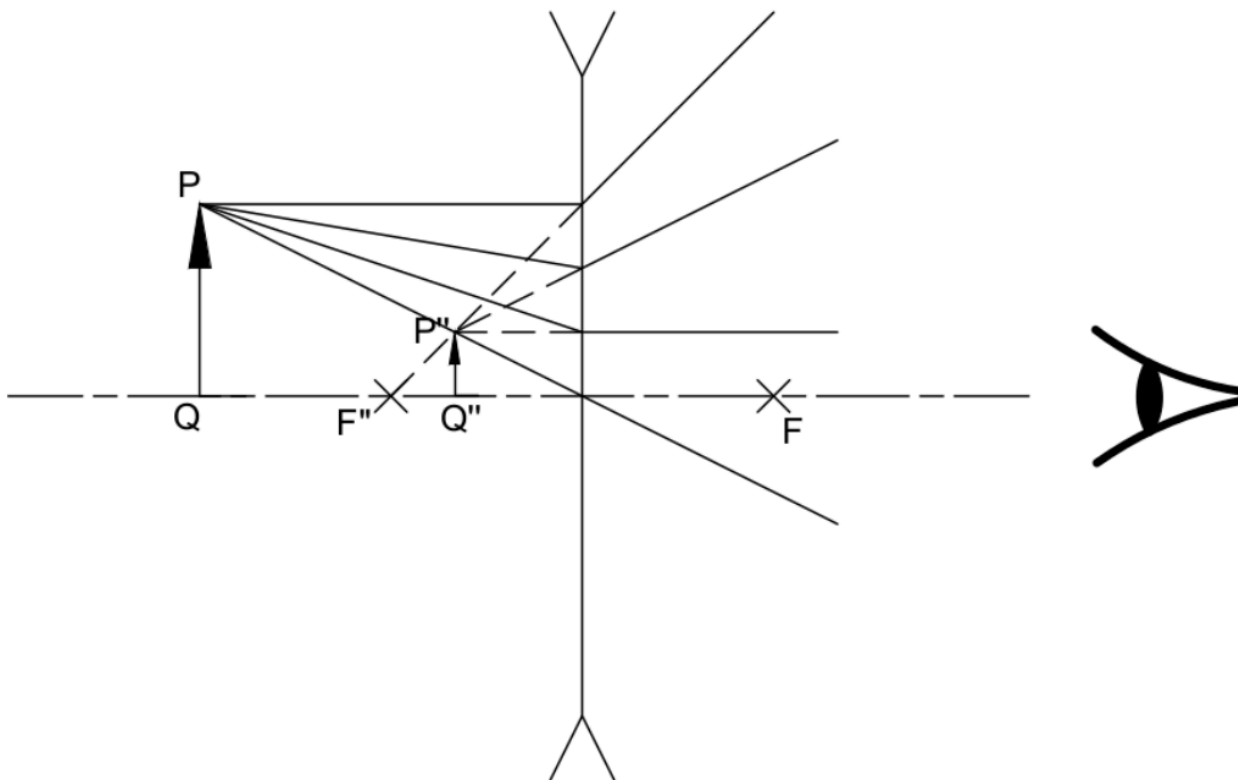
**Figura 13:** Cuando los rayos desviados convergen a un único punto, la imagen resultante es real. Esto significa que si se coloca una pantalla, se verá una proyección del objeto con las características de la imagen.

**Reversibilidad de los rayos.** Una consecuencia interesante de la ley de Snell, sobre la cual se basan todas las expresiones empleadas en la óptica geométrica, es que si se modifica el sentido de marcha de cualquier rayo, reflejado o refractado, el mismo volvería sobre su camino original, es decir, la marcha de los rayos es **reversible**. Este hecho tiene otra consecuencia importante y es que para cualquier sistema óptico, el objeto y la imagen del mismo son **conjugados**.

# Óptica Geométrica (parte I)

## Tec. Univ. En Óptica y Contactología

Que objeto e imagen sean conjugados significa que si, por ejemplo, si se reemplazase la imagen  $\overline{P''Q''}$  de la [Figura 13](#) por un objeto de iguales características, la imagen que formaría la lente se encontraría en  $\overline{PQ}$ , y también sería real e invertida. De la misma manera, si en la [Figura 14](#) se colocase un objeto en  $\overline{P''Q''}$  su imagen (directa y virtual) se encontraría en  $\overline{PQ}$ .



**Figura 14:** Cuando los rayos desviados no convergen a un único punto, sino que divergen de él, la imagen se denomina virtual. Bajo estas condiciones un observador que se encuentre a la salida de los rayos no verá el objeto con sus características, sino que verá un objeto aparente que es la imagen producida por el sistema óptico.



### 0.5. Resumen de Fórmulas

Nombre	Expresión	Número
Ecuación de Gauss	$\frac{n}{s} + \frac{n''}{s''} = P$	(0.1)
Potencia de una Dioptra	$P_D = \frac{n' - n}{R_D}$	(0.2)
Potencia de una lente delgada	$P_{LD} = \frac{n' - n}{R_1} + \frac{n'' - n'}{R_2}$	(0.3)
Fórmula del constructor de lentes	$P_{LD} = (n' - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$	(0.3')
Potencia de un espejo simple	$P_{ES} = - \frac{2n}{R_E}$	(0.4)
Relación de la potencia con las distancias focales	$P = \frac{n}{f} = \frac{n''}{f''}$	(0.5) (0.6)
Aumento lateral de un único sistema óptico	$m = \frac{y''}{y} = - \frac{n}{n''} \cdot \frac{s''}{s}$	(0.8)
Aumento lateral de un conjunto de N sistemas ópticos	$m_{Total} = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_N$	(0.9)

### 0.6. Cuestiones

0.6.1. Para un sistema óptico de potencia positiva y los objetos ubicados a las siguientes distancias, indique si la imagen es real o virtual, directa o invertida, y reducida, aumentada o de aumento unitario:

a.  $s = \frac{f}{2}$

b.  $s = f$

c.  $s = 2f$

d.  $s = 3f$

0.6.2. Para un sistema óptico de potencia negativa y los objetos ubicados a las siguientes distancias, indique si la imagen es real o virtual, directa o invertida, y reducida, aumentada o de aumento unitario:

a.  $s = \frac{f}{2}$

b.  $s = f$

c.  $s = 2f$

0.5.3. ¿Bajo qué condiciones un sistema de potencia positiva puede generar una imagen real? ¿Y una imagen virtual?

0.5.4. ¿Es posible tener una imagen real a partir de un sistema de potencia negativa? ¿Por qué?



## 0.7. Ejercicios

1. Encontrar, analítica y gráficamente, la imagen formada por una lente positiva de distancia focal  $f = 4$  cm para un objeto extenso de altura 1 cm, ubicado a las siguientes distancias de la lente: 2 cm; 6 cm; 8 cm; 12 cm; 4 cm. Todo el sistema se encuentra en aire.

**Respuestas:**  $s''_1 = -4$  cm;  $m_1 = 2$ ;  $s''_2 = 12$  cm;  $m_2 = -2$ ;

$$s''_3 = 8$$
 cm;  $m_3 = -1$ ;  $s''_4 = 6$  cm;  $m_4 = -0.5$ ;  $s''_5 = \infty$

2. Se tiene una lente de potencia  $P = 33,333$  D. La lente se encuentra rodeada por aire ( $n = 1$ ) a un lado y por agua ( $n'' = \frac{4}{3}$ ) al otro. Encuentre, analítica y gráficamente, la imagen de un objeto extenso de altura 1 cm que se encuentra del lado en que hay aire. Resuelva para las siguientes distancias objeto: 2 cm; 6 cm; 8 cm.

**Respuestas:**  $s''_1 = -8$  cm;  $m_1 = 3$ ;  $s''_2 = 8$  cm;  $m_2 = -1$ ;  $s''_3 = 6,4$  cm;  $m_3 = -0,6$ ;

3. Encontrar, analítica y gráficamente, la imagen formada por la lente del ejercicio 0.6.4. para un objeto puntual, ubicado a las siguientes distancias: 2 cm; 6 cm; 8 cm.

**Respuestas:**  $s''_1 = -4$  cm;  $s''_2 = 12$  cm;  $s''_3 = 8$  cm;  $s''_4 = 6$  cm;  $s''_5 = \infty$

4. Encontrar, analítica y gráficamente, la imagen formada por una lente de distancia focal  $f = -4$  cm para un objeto extenso de altura 1 cm, ubicado a las siguientes distancias de la lente: 2 cm; 4 cm; 6 cm.

**Respuestas:**

$$s''_1 = -1,333$$
 cm;  $m_1 = 0,667$ ;  $s''_2 = -2$  cm;  $m_2 = 0,5$ ;  $s''_3 = -2,4$  cm;  $m_3 = 0,4$ ;

5. Se tiene una lente cuya distancia focal objeto es -3 cm y cuya distancia focal imagen es -4 cm. Determinar, analítica y gráficamente, la imagen formada por dos objetos extensos de 1 cm de altura, ubicados a 2 cm y 6 cm, respectivamente, de la lente.

**Respuestas:**  $s''_1 = -1,6$  cm;  $m_1 = 0,6$ ;  $s''_2 = -2,667$  cm;  $m_2 = 0,3333$

6. Resolver el ejercicio 0.6.7, pero para dos objetos puntuales, ubicados a 2 cm y 8 cm de la lente.

**Respuestas:**  $s''_1 = -1,333$  cm;  $s''_2 = -2,667$  cm;

7. Para un espejo cuyo radio de curvatura es  $R = -4$  cm, determinar, analítica y gráficamente, la posición y naturaleza de un objeto extenso de altura 1 cm, ubicado a las siguientes distancias del espejo: 1 cm; 3 cm; 4 cm; 5 cm; 2 cm.

**Respuestas:**  $s''_1 = -2$  cm;  $m_1 = 2$ ;  $s''_2 = 6$  cm;  $m_2 = -2$ ;  $s''_3 = 4$  cm;  $m_3 = -1$ ;

$$s''_4 = 3,333$$
 cm;  $m_5 = -0,6667$ ;  $s''_6 = \infty$ ;  $m_6 = -\infty$ ;

8. Para un espejo cuyo radio de curvatura es  $R = 4$  cm, determinar, analítica y gráficamente, la posición y naturaleza de un objeto extenso de altura 1 cm, ubicado a las siguientes distancias: 1 cm; 2 cm; 4 cm.

**Respuestas:**

$$s''_1 = 0,667 \text{ cm}; m_1 = 0,667; s''_2 = 1 \text{ cm}; m_2 = 0,5; s''_3 = 1,333 \text{ cm}; m_3 = 0,333;$$

9. Repetir el ejercicio 7 considerando que el objeto es puntual y está ubicado en el eje óptico.

10. Repetir el ejercicio 8 considerando que el objeto es puntual y está ubicado en el eje óptico.

11. Se tiene un sistema que consiste en dos lentes delgadas de distancias focales  $f_1 = 2$  cm y  $f_2 = 1,5$  cm, separadas 5 cm. Determinar la posición y naturaleza de la imagen formada por un objeto extenso de altura 1 cm, ubicado a 4 cm de la primera lente.

**Respuestas:**  $s'' = -3$  cm (respecto de la segunda lente);  $m_{Total} = -3$ ;

12. Se tiene un sistema que consiste en dos lentes delgadas de distancias focales  $f_1 = 3$  cm y  $f_2 = -1,5$  cm, separadas a 10,5 cm. Determinar la posición y naturaleza de la imagen formada por un objeto extenso de altura 1 cm, ubicado a 5 cm de la primera lente.

**Respuestas:**  $s'' = -1$  cm (respecto de la segunda lente);  $m_{Total} = 0,5$ ;

13. Considere una lente delgada con distancia focal 10 cm, que se encuentra 6 cm delante de un espejo cuya distancia focal es de 5 cm. Si se coloca un objeto puntual a 2 cm de la lente, determine la posición y naturaleza de su imagen.

**Respuestas:**  $s'' = 3,8$  cm a la izquierda de la lente;  $m_{Total} = -1,107$ ;

14. Considere una lente delgada con distancia focal -4 cm, que se encuentra 6 cm delante de un espejo cuya distancia focal es de 3 cm. Si se coloca un objeto puntual a 1 cm de la lente, determine la posición y naturaleza de su imagen.

**Respuestas:**  $s'' = 0,545$  cm a la derecha de la lente;  $m_{Total} = -0,545$ ;



# Capítulo 1: Lentes Gruesas

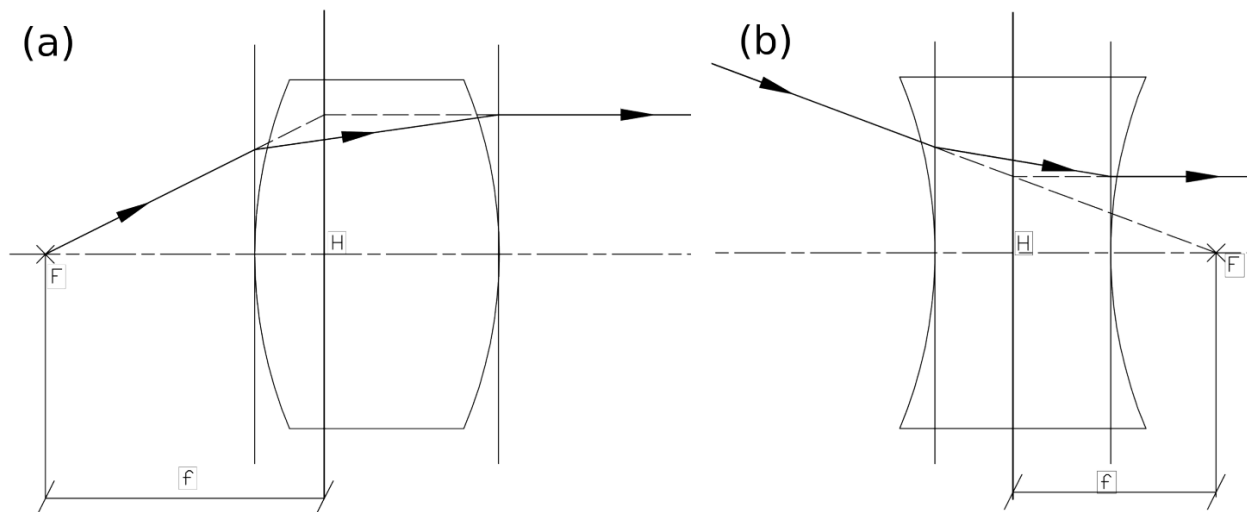
Cuando el espesor de una lente no es despreciable frente a su distancia focal, a esta se la considera una **lente gruesa**. Una lente gruesa está compuesta por dos superficies esféricas, o bien, una esférica y otra plana, en donde cada una de las superficies contribuye a la formación de la imagen final del objeto dado. En este capítulo estudiaremos las similitudes y diferencias que existen entre las lentes gruesas y las lentes delgadas estudiadas anteriormente, y desarrollaremos métodos analíticos y gráficos que nos permitirán determinar las magnitudes ópticas relevantes a partir de la información que tengamos de la lente.

Conceptualmente, la diferencia de una lente delgada y una lente gruesa es el desarrollo del rayo en el interior del sistema. En una lente delgada se supone que los rayos no se desarrollan en el interior de la misma, lo que da como resultado que la potencia del sistema sea simplemente la suma de las potencias de cada dioptra como se vio en la [Ecuación 0.3](#). Por otro lado, en una lente gruesa el rayo sí se desarrolla en el interior del sistema, lo que da lugar a que la potencia del sistema no sea simplemente la suma de las potencias de cada dioptra, sino que haya que incluir un término que incluya el desvío de los rayos en el interior de la misma.

## 1.1. Focos y puntos principales

Al igual que una lente delgada, la lente gruesa cuenta con un foco objeto y un foco imagen. El foco objeto  $F$  es un punto axial tal que cualquier rayo procedente de él o que se dirija hacia él, se propaga paralelamente al eje una vez refractado en las dos superficies. Análogamente, el foco imagen  $F''$  es un punto axial tal que cualquier rayo paralelo al eje, se dirige hacia él o diverge de él una vez refractado en las dos superficies. A su vez, los focos objeto e imagen permiten determinar experimentalmente la existencia de los que denominaremos planos principales de la lente.

En la [Figura 1.1-a](#) se ve como un rayo parte del foco objeto  $F$  de una lente gruesa convergente, para luego salir paralelo al eje de la lente, mientras que en la [Figura 1.1-b](#) se tiene la situación análoga para una lente divergente. En ambos casos se puede trazar una prolongación imaginaria del rayo que ingresa a la lente y del que sale de la misma. Si se traza un plano perpendicular al eje de la lente por el punto de intersección de las dos prolongaciones, se habrá determinado lo que se denomina el plano principal objeto, que corta el eje de la lente en el punto principal objeto  $H$ . Nótese que como el plano principal objeto se construye a partir de la prolongación del rayo que ingresa y, aún no fue desviado, y del rayo que sale del sistema, se puede interpretar el plano principal objeto como el plano en que todos los rayos que ingresan al sistema parecen iniciar su desvío.



**Figura 1.1:** Definición del Foco Objeto y Plano Principal Objeto de una lente gruesa para una lente convergente (a) y una lente divergente (b). Puede verse en el esquema que la dirección de salida de los rayos después de dos desvíos es la misma que si se considerase que el rayo concluye su desvío en el plano principal objeto.

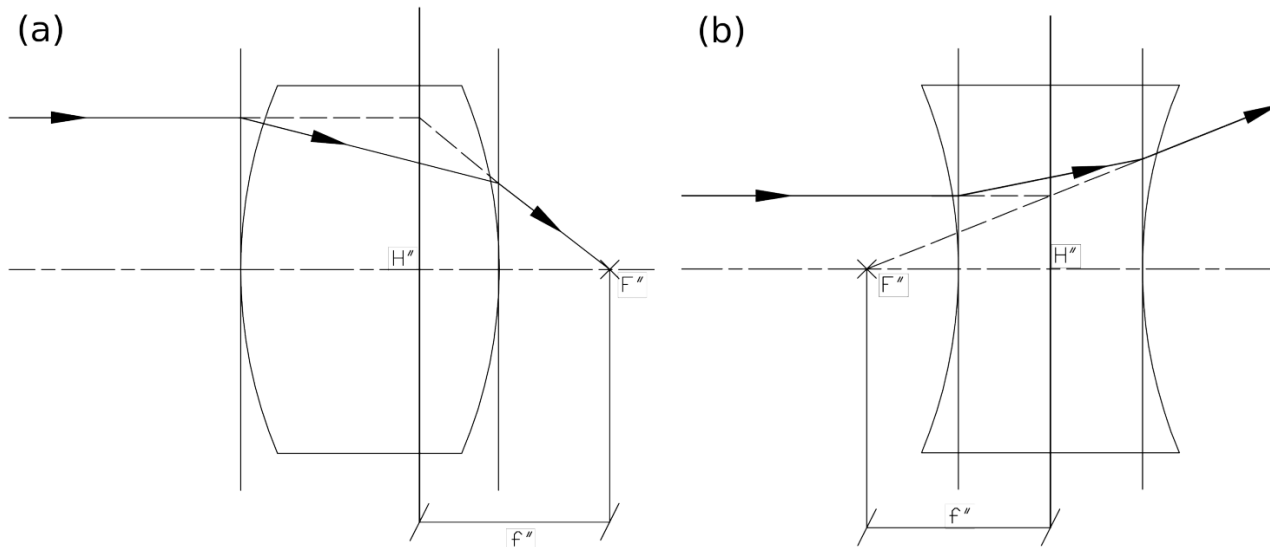
La determinación del plano principal imagen se puede construir de una manera similar, sólo que en este caso deberemos trabajar con el foco imagen  $F''$  de la lente. En la [Figura 1.2-a](#) se muestra un rayo paralelo al eje de una lente convergente que proviene del infinito, y que luego de desviarse en cada superficie pasa por el foco imagen  $F''$ , mientras que en la [Figura 1.2-b](#) se tiene la situación análoga para una lente divergente. Si, como se hizo anteriormente, se extienden los rayos ingresantes y salientes hasta que se intersequen, y se traza una perpendicular al eje de la lente por el punto de intersección, se habrá determinado el plano principal imagen, que corta el eje de la lente en el punto principal imagen  $H''$ . De manera similar a lo analizado en el caso del plano principal objeto, como el plano principal imagen se construye a partir de la prolongación del rayo desviado y del rayo que ingresó al sistema, se puede interpretar al plano principal imagen como el plano del que parecen provenir todos los rayos desviados.

A partir de las interpretaciones anteriores de los planos principales objeto e imagen, es posible concluir que una lente gruesa se puede modelar a partir de sus planos principales, de modo tal que los rayos que ingresen al sistema, en vez de desviarse en el inicio físico del mismo, iniciarán su desvío en el plano principal objeto, para luego trasladarse de manera horizontal hasta el plano principal imagen, y desde dicho plano continuar su marcha fuera del sistema. Una consecuencia de aplicar este modelo es que las distancias focales se miden desde cada uno de los focos al plano principal correspondiente, por lo que se tiene que



$$\overline{HF} = f \text{ y } \overline{H''F''} = f'' \quad (1.1)$$

A partir de lo dicho anteriormente, también se puede concluir que los planos principales son dos planos que tienen un aumento lateral unitario y positivo, es decir, cualquier objeto que se encuentre en el plano principal objeto tendrá su imagen en el plano principal imagen, con una imagen directa y de aumento unitario.



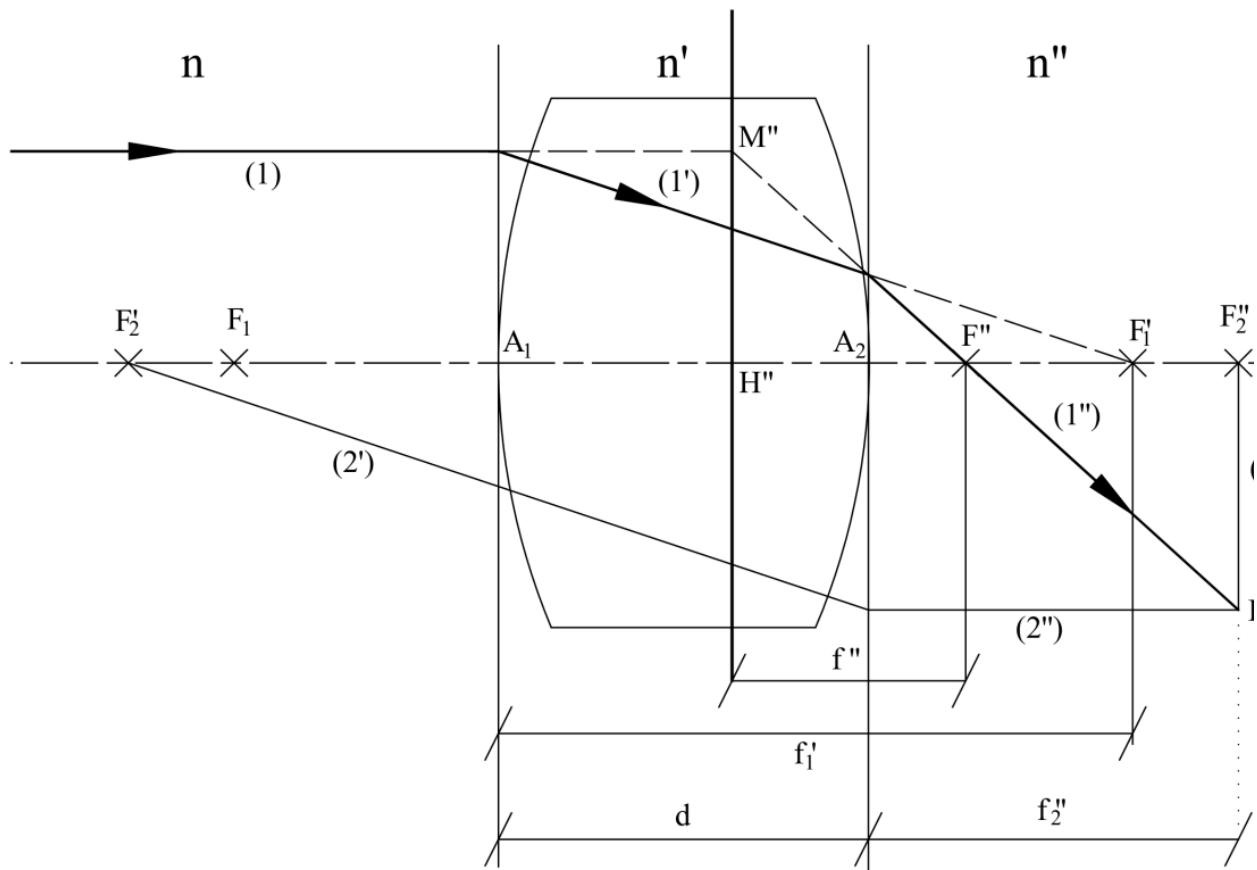
**Figura 1.2:** Definición del Foco Imagen y Plano Principal Imagen de una lente gruesa para una lente

convergente (a) y una lente divergente (b). Puede verse en el esquema que la dirección de salida de los rayos después de dos desvíos es la misma que si se considerase que el rayo inicia su desvío en el plano principal objeto.

En función de todo lo explicado anteriormente, es claro que la construcción de imágenes producidas por una lente gruesa se puede simplificar enormemente si en vez de analizar la refracción de los rayos en cada una de las superficies, se supone que el desvío ocurre en los planos principales. A este fin, será preciso entonces determinar la relación que existe entre la posición de los focos y puntos principales, con los parámetros que determinan la construcción de la lente gruesa, es decir, los radios de curvaturas de cada una de sus superficies refractantes, su espesor e índice de refracción. Tal como cuando se trabajó con lentes delgadas en el curso anterior, la determinación de la potencia de la lente gruesa, así como la posición de su focos, se puede realizar tanto gráfica como analíticamente.

### 1.1.1. Determinación de Focos y Puntos Principales por el método gráfico

La determinación de los focos y puntos principales de una lente gruesa requiere el trazado de rayos que cumplan con la definición escrita en la sección anterior, es decir, para determinar el foco imagen, se debe trazar un rayo que ingrese al sistema desde el espacio objeto y determinar su marcha hasta que egrese del sistema, tal como se mostró en la [Figura 1.2](#). De esta manera, el punto de intersección del rayo de salida con el eje óptico determinará la posición del foco imagen  $F''$ , mientras que la intersección del rayo que ingresa con el rayo que egresa, dará la posición del plano principal imagen y del punto principal imagen  $H''$ , consecuentemente. Desde luego, el trazado inverso se puede emplear para determinar el foco y punto principal objeto,  $F$  y  $H$ , respectivamente.



**Figura 1.3:** Determinación del Foco Imagen y Plano Principal Imagen de una lente gruesa por el método gráfico. El método inicia trazando un rayo que incide a la lente paralelo al eje. Dicho rayo, al desviarse en la primera superficie, apunta al foco imagen de la misma, y sufre un segundo desvío en la segunda superficie. La dirección del desvío del rayo en la segunda superficie debe determinarse empleando un rayo auxiliar. Finalmente, la intersección del rayo emergente con el eje determina la posición del foco imagen, y la intersección de las prolongaciones de los rayos incidentes y emergentes determina la posición del plano principal imagen.



Supóngase que se tiene una lente gruesa con superficies esféricas de radios  $R_1$  y  $R_2$ , construida de un material con índice de refracción  $n'$  y entre dos medios de índice  $n$  y  $n''$ , como se muestra en la [Figura 1.3](#), y que se quiere determinar la posición del foco y punto principal imagen.

Para lograr esto se debe primeramente determinar las distancias focales objeto e imagen de cada superficie esférica, que se notarán como  $f_1$ ;  $f'_1$ ;  $f_2$ ;  $f'_2$ <sup>4</sup>.

Para la primera superficie se cumple:

$$\frac{n}{f_1} = \frac{n' - n}{R_1} \quad \text{y} \quad \frac{n'}{f'_1} = \frac{n' - n}{R_1} \quad (1.2)$$

Por otro lado, para la segunda superficie se tiene:

$$\frac{n'}{f_2} = \frac{n'' - n'}{R_2} \quad \text{y} \quad \frac{n''}{f'_2} = \frac{n'' - n'}{R_2} \quad (1.3)$$

Calculadas las distancias focales, se traza el eje del sistema como se indica en la [Figura 1.3](#), y sobre él se dibuja la lente con los focos de cada superficie. Para determinar el foco y punto principal imagen se parte de un rayo (1) que proviene del infinito y por lo tanto es paralelo al eje. Luego de desviarse en la primera superficie, que se ha aproximado por el plano tangente que pasa por  $A_1$ , el rayo sigue una trayectoria (1'), dirigiéndose al foco imagen  $F'_1$  de la primera dioptra.

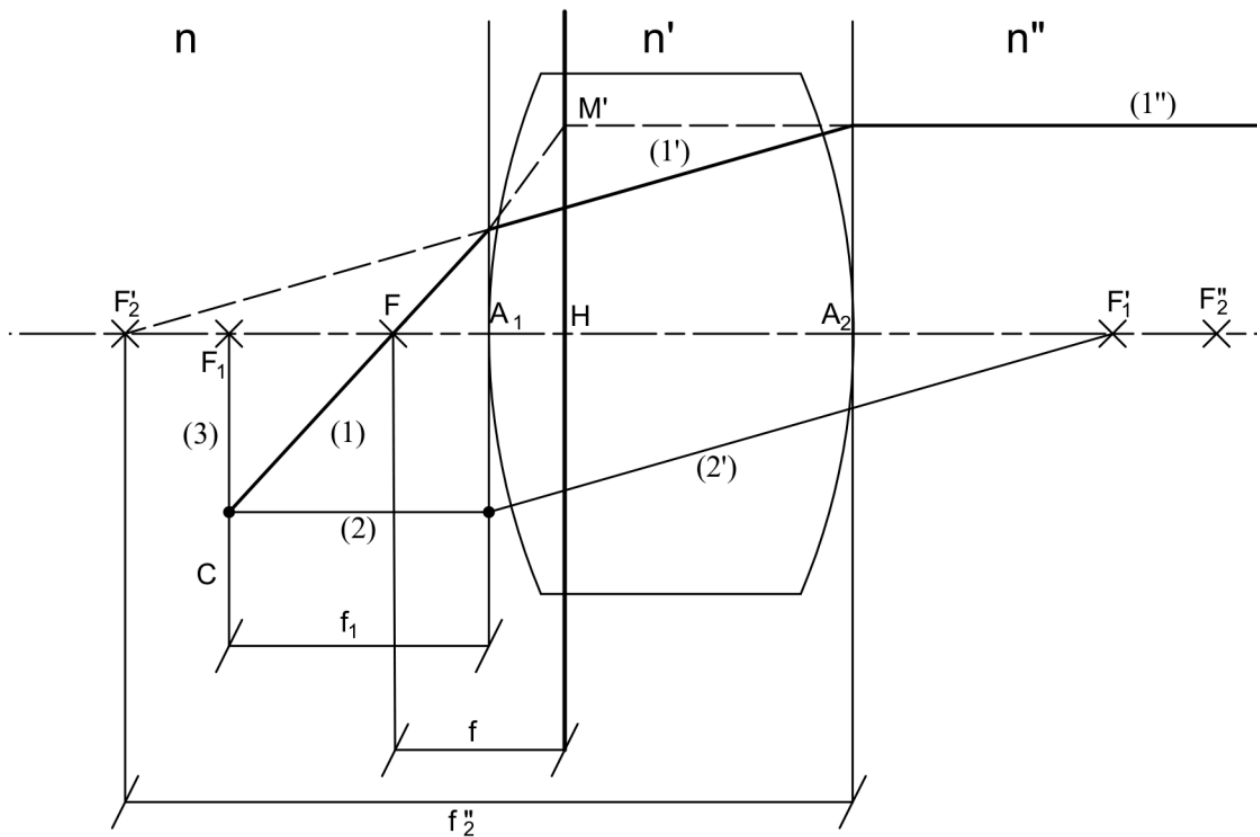
Como el rayo (1') incide de manera oblicua a la segunda superficie, su marcha no es conocida, por lo que se deberá emplear un rayo auxiliar para determinar su trayectoria. El rayo auxiliar (2') es paralelo a (1') y pasa por el foco objeto  $F'_2$  de la segunda superficie. Como dicho rayo pasa por el foco objeto, el rayo auxiliar saliente (2'') emergerá paralelo al eje después de refractarse. Dado que (1') y (2') inciden en la segunda superficie de forma paralela, ambos rayos se intersecan en el punto B del plano focal imagen de la superficie 2, de modo que la trayectoria del rayo (1'') se determina a desde la intersección de (1') con el plano tangente definido por  $A_2$  y el punto B, que es la intersección del rayo (2'') con el plano focal (3).

---

<sup>4</sup> En lo que sigue siempre se denotará con el subíndice 1 a las magnitudes que corresponden a la primera dioptra y con el subíndice 2 a las magnitudes correspondientes para la segunda dioptra. De manera parecida, el índice de refracción del lugar de donde provienen los rayos se simboliza  $n$ , mientras que el índice de refracción a donde van los rayos se simboliza  $n''$ , y el índice de refracción de la lente será  $n'$ .

Una vez completado el trazado, se tendrá que la intersección del rayo saliente (1'') con el eje óptico determinará la posición del foco imagen de la lente gruesa, mientras que si se prolongan (1) y (1'') hasta su intersección, se habrá determinado la posición del plano principal imagen definido por  $H''$ .

La determinación del foco y del plano principal objeto se hacen de manera análoga, iniciando el trazado a partir de un rayo (1'') emergente paralelo al eje, continuando el método hacia atrás, como se muestra en la [Figura 1.4](#).



**Figura 1.4:** Para determinar el foco y plano principal objeto de una lente gruesa se aplica un método análogo al empleado para determinar la posición del foco y plano principal imagen, sólo que en este caso el rayo incide paralelo desde la derecha del sistema, y el trazado de rayo se hace "hacia atrás".

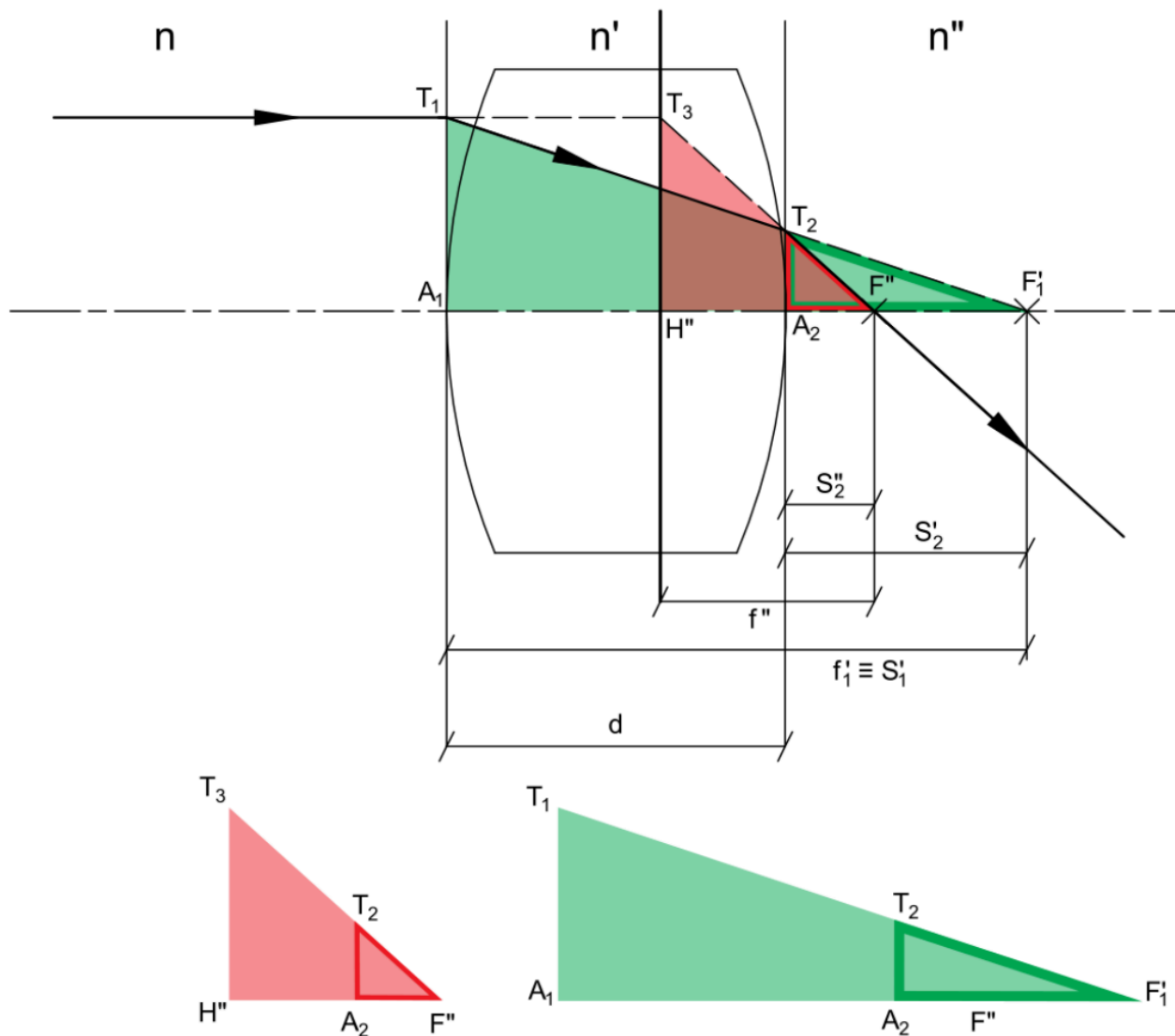
### 1.1.2. Determinación de Focos y Puntos Principales por el método analítico

Recordando lo discutido en el Capítulo 0, la potencia de un sistema óptico es una cantidad que depende de las características geométricas del mismo, así como del material que fue construido. Asimismo, la potencia es la cantidad que determina la formación de imágenes de cualquier sistema óptico a partir de la ley de Gauss, [Ec \(0.1\)](#):



$$\frac{n}{s} + \frac{n''}{s''} = P \quad (0.1)$$

siendo  $P$  una cantidad que en el caso particular de la lente gruesa debe depender de los radios de curvatura de cada una de las superficies, del índice de refracción  $n'$  del que está hecha la lente y de su espesor.



**Figura 1.5:** La determinación de la potencia de una lente gruesa de forma analítica descansa en el empleo sucesivo de la [Ec. de Gauss](#) para cada superficie, así como en la comparación de triángulos semejantes que permiten expresar la potencia de la lente sólo en función de sus parámetros constructivos.

En lo que sigue se determinará la potencia de una lente gruesa partiendo de un sistema como el que empleó en la sección anterior, es decir, una lente gruesa cuyas superficies tienen radios de curvatura  $R_1$  y  $R_2$ , y que está construida de un material con índice de refracción  $n'$ , y que tiene a la

izquierda un medio de índice  $n$  y a la derecha un medio de índice  $n'$ , como se muestra en la [Figura 1.5](#). Se supondrá además que la lente gruesa tiene un espesor  $d$ .

Para determinar la potencia de la lente gruesa, se deberá plantear un sistema de ecuaciones del cual se despejará la potencia y la posición de los puntos principales en función de los parámetros constructivos de la lente. En particular, la posición de los puntos principales y focos se realizará en función de los vértices de la lente, que en la [Figura 1.5](#) se han denominado  $A_1$  y  $A_2$ .

El primer conjunto de ecuaciones que se plantearán será a partir de la aplicación sucesiva de la ecuación de Gauss para un objeto que se encuentra en el infinito ( $s_1 = \infty$ )<sup>5</sup>:

$$\frac{n}{s_1} + \frac{n'}{s'_1} = P_1$$

$$\frac{n}{\infty} + \frac{n'}{s'_1} = P_1$$

$$0 + \frac{n'}{s'_1} = P_1$$

$$\frac{n'}{s'_1} = P_1$$

$$\frac{n'}{s'_1} = \frac{n'}{f'_1}$$

$$s'_1 = f'_1 \quad (1.4)$$

Donde en los últimos tres pasos se utilizó el hecho de que  $P_1 = \frac{n'}{f'_1}$ , en virtud de la [Ecuación \(0.5\)](#).

Para la segunda superficie se debe aplicar una ecuación similar, teniendo en cuenta que la imagen de la primera superficie será el objeto de la segunda, por lo que

$$s'_2 = -(s'_1 - d) = -(f'_1 - d) \quad (1.5)$$

---

<sup>5</sup> Se parte de un objeto que se encuentra en infinito ya que la imagen del dicho objeto deberá estar ubicada en el foco imagen  $F''$  del sistema por definición. El lector puede considerar que este es el equivalente analítico al método gráfico que se empleó en la sección anterior.



En función de esto, la Ec. de Gauss para la segunda superficie queda

$$\frac{n'}{s'_2} + \frac{n''}{s''_2} = P_2$$

$$- \frac{n'}{f'_1 - d} + \frac{n''}{s''_2} = P_2$$

$$\frac{n''}{s''_2} = P_2 + \frac{n'}{f'_1 - d} \quad (1.6)$$

Debe notarse en este punto, que la Ecuación 1.6 involucra a la cantidad  $s''_2$ , que indica la posición de la imagen producida por la lente gruesa de un objeto ubicado en el infinito, pero medida desde la segunda superficie, por lo que no es equivalente a la distancia focal imagen. Esto nos indica que debemos plantear una ecuación que nos permita vincular a las cantidades  $s''_2$  y  $f''$ , para poder eliminar la variable  $s''_2$  de la Ec. 1.6.

Para lograr esto, se debe volver a la Figura 1.5 y observar que  $s''_2$  es un lado del triángulo rectángulo<sup>6</sup>  $\Delta(T_2A_2F'')$ , que es semejante al triángulo rectángulo  $\Delta(T_3H''F'')$ , por lo que

$$\frac{\overline{T_3H''}}{\overline{T_2A_2}} = \frac{f''}{s''_2} \quad (1.7)$$

A su vez, se tiene otra semejanza entre  $\Delta(T_1A_1F'_1)$  y  $\Delta(T_2A_2F'_1)$ , lo que implica que:

$$\frac{\overline{T_1A_1}}{\overline{T_2A_2}} = \frac{f'_1}{f'_1 - d} \quad (1.8)$$

<sup>6</sup> En realidad los triángulos que se emplearán en esta demostración lo son porque se considera que los rayos se desvían en el plano tangente de cada superficie, lo cual es cierto mientras los rayos se mantengan dentro de la aproximación paraxial. Más adelante, cuando se trabaje el trazado estricto de rayos, se desarrollarán los métodos para determinar bajo qué condiciones dicha aproximación es adecuada.

De la [Figura 1.5](#) se puede ver que  $\overline{T_1 A_1} = \overline{T_3 H''}$ , lo que implica que los términos del lado derecho de las Ecs. [1.7](#) y [1.8](#) son iguales, por lo que se los puede igualar entre sí para obtener una igualdad que involucre magnitudes que sólo estén asociadas a la lente gruesa:

$$\frac{f'_1}{f'_1 - d} = \frac{f''}{s''_2}$$
$$s''_2 = f'' \frac{f'_1 - d}{f'_1} \quad (1.9)$$

Si se elimina  $s''_2$  de las Ecs. [1.6](#) y [1.9](#) y se toma en cuenta que la potencia  $P$  de la lente gruesa se puede igualar al cociente  $\frac{n''}{f''}$  se puede determinar, luego de un poco de álgebra, que:

$$P = P_1 + P_2 - C \cdot P_1 \cdot P_2 \text{ con } C = \frac{d}{n'} \quad (1.10)$$

Además de la potencia de lente gruesa, es preciso poder ubicar el punto principal imagen  $H''$  y el foco imagen  $F''$  de la misma. Esto es una operación sencilla si se nota que  $s''_2 = \overline{A_2 F''}$ , por lo que  $\overline{A_2 F''}$  está implícito en la [Ec. 1.9](#):

$$\overline{A_2 F''} = f'' \left( 1 - \frac{d}{f'_1} \right) \quad (1.11)$$

Por otro lado, de la [Figura 1.5](#) se puede ver que  $\overline{H'' A_2} = \overline{H'' F''} - \overline{A_2 F''}$ , por lo tanto:

$$\overline{H'' A_2} = \overline{H'' F''} - \overline{A_2 F''}$$
$$\overline{H'' A_2} = f'' - f'' \left( 1 - \frac{d}{f'_1} \right)$$
$$\overline{H'' A_2} = f'' \frac{d}{f'_1}$$

$$\overline{A_2 H''} = - f'' \frac{d}{f'_1} \quad (1.12)$$



Donde, en el último paso se utilizó el hecho de que  $\overline{H''A_2} = -\overline{A_2H''}$ .

Con consideraciones matemáticas y geométricas similares, pero considerando un objeto ubicado en el foco de la lente gruesa, cuya imagen se encuentra en el infinito se puede demostrar que:

$$\boxed{\overline{A_1F} = -f \left( 1 - \frac{d}{f'_2} \right)} \quad (1.13)$$

$$\boxed{\overline{A_1H} = f \frac{d}{f'_2}} \quad (1.14)$$

Vale la pena aclarar que las magnitudes determinadas por las Ecuaciones [\(1.11\)](#), [\(1.12\)](#), [\(1.13\)](#) y [\(1.14\)](#) deben ser medidas y utilizadas empleando un convenio de signos **geométrico**<sup>7</sup> y no óptico.

---

<sup>7</sup> Que el convenio de signos sea geométrico, significa que si se tiene, por ejemplo, dos segmentos  $AB = 1 \text{ cm}$  y  $CD = -2 \text{ cm}$ , en el primer caso, el punto B se encuentra 1 cm **a la derecha** de A, mientras que en el segundo caso el punto D se encuentra 2 cm **a la izquierda** de C.

**Ejemplo: Lente Gruesa Divergente** Sea una lente gruesa bicóncava de 4 cm de espesor, hecha de un material de índice de refracción 1.5, y rodeada de aire. Sabiendo además que el radio de curvatura de cada superficie es  $|R| = 5 \text{ cm}$ , determine su potencia, así como la posición de los focos y puntos principales.

Método analítico: Dado que el enunciado afirma que la lente es bicóncava, se sabe entonces que  $R_1 = -5 \text{ cm}$  y que  $R_2 = 5 \text{ cm}$ . Para completar los datos de la lente, se tiene que  $n' = 1,5$  y  $d = 4 \text{ cm}$ . Finalmente, como la lente está rodeada de aire vale que  $n = n'' = 1$ .

Como para aplicar las Ecs. [1.11](#), [1.12](#), [1.13](#) y [1.14](#) es necesario conocer las distancias focales objeto e imagen, el cálculo se inicia por la Ecs. [0.2](#) y [1.10](#), que permiten determinar en la potencia de cada una de las dioptros que constituyen la lente, para luego determinar la potencia de todo el sistema.

$$P_1 = \frac{n'-n}{R_1} = \frac{1,5-1}{-5 \text{ cm}} = -10 \text{ Dp} \Rightarrow f_1 = \frac{n}{P_1} = \frac{1}{-10 \text{ Dp}} = -10 \text{ cm} \wedge f'_1 = \frac{n'}{P_1} = \frac{1,5}{-10 \text{ Dp}} = -15 \text{ cm}$$

$$P_2 = \frac{n''-n'}{R_2} = \frac{1-1,5}{5 \text{ cm}} = -10 \text{ Dp} \Rightarrow f'_2 = \frac{n'}{P_2} = \frac{1,5}{-10 \text{ Dp}} = -15 \text{ cm} \wedge f''_2 = \frac{n''}{P_2} = \frac{1}{-10 \text{ Dp}} = -10 \text{ cm}$$

$$P = P_1 + P_2 - CP_1P_2 = (-10 \text{ Dp}) + (-10 \text{ Dp}) - \frac{0,04 \text{ m}}{1,5} (-10 \text{ Dp})(-10 \text{ Dp}) = 22,67 \text{ Dp}$$

$$f = \frac{n}{P} = \frac{1}{-22,67 \text{ Dp}} = -4,41 \text{ cm} \wedge f'' = \frac{n''}{P} = \frac{1}{-22,67 \text{ Dp}} = -4,41 \text{ cm}$$

Conocida la potencia de la lente gruesa y las distancias focales se puede calcular la posición de los focos y puntos principales aplicando las Ecs. [1.11](#), [1.12](#), [1.13](#) y [1.14](#):

$$\overline{A_1F} = -f \left(1 - \frac{d}{f'_2}\right) = -(-4,41 \text{ cm}) \left(1 - \frac{4 \text{ cm}}{-15 \text{ cm}}\right) = 5,59 \text{ cm}$$

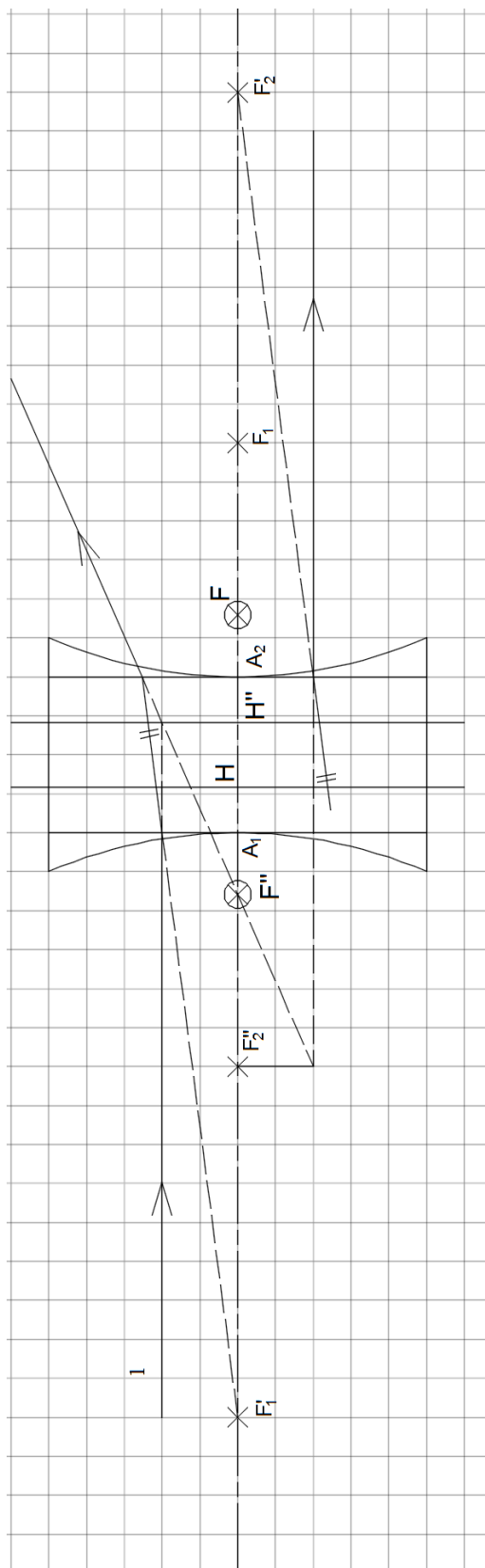
$$\overline{A_2F''} = f'' \left(1 - \frac{d}{f'_1}\right) = -(-4,41 \text{ cm}) \left(1 - \frac{4 \text{ cm}}{-15 \text{ cm}}\right) = -5,59 \text{ cm}$$

$$\overline{A_1H} = f \frac{d}{f'_2} = -(-4,41 \text{ cm}) \frac{4 \text{ cm}}{-15 \text{ cm}} = 1,18 \text{ cm}$$

$$\overline{A_2H''} = -f'' \frac{d}{f'_1} = -(-4,41 \text{ cm}) \frac{4 \text{ cm}}{-15 \text{ cm}} = -1,18 \text{ cm}$$

Una vez determinados los puntos principales y los focos, los mismos pueden ubicarse en un esquema como el mostrado en la [Figura 1.6](#), donde se ha representado la lente gruesa en una escala tal que cada cuadrado equivale a 1 cm. En la imagen se muestra el trazado que debe realizarse para ubicar el foco y plano principal imagen, indicando el inicio del trazado con el rayo 1. Se deja como ejercicio al lector determinar la posición del foco y punto principal objeto realizando el trazado inverso. Notar que se han marcado las posiciones del foco y punto principal objeto a modo de comprobación<sup>8</sup>.

<sup>8</sup> ¡Cuidado con los errores de paralaje!



**Figura 1.6:** Ejemplo del trazado de rayos para encontrar el Foco y Plano Principal Imagen de una lente gruesa

### 1.1.3. Determinación de imágenes a partir de la modelización de una lente gruesa

Una vez modelizada cualquier lente gruesa, es decir, una vez encontrados los focos y puntos principales, los mismos se pueden utilizar para encontrar imágenes de objetos puntuales y extensos. Los métodos que se emplean para encontrar imágenes son muy similares a los conocidos, y que fueron tratados en el Capítulo 0.

#### **Determinación de la imagen de un objeto puntual ubicado en el eje óptico del sistema**

Supóngase que se ha determinado la posición de los focos y puntos principales de un sistema convergente y se lo ha representado en la [Figura 1.7](#). Nótese que en este caso también se han representado los vértices del sistema. Si bien la ubicación de los vértices no es necesaria para el trazado de rayos, es importante guardar la referencia de la extensión de la lente física.

En cualquier caso, para encontrar gráficamente la imagen de un objeto puntual que se encuentra en el eje óptico del sistema, se debe emplear el método del rayo auxiliar. Primero, se traza un rayo oblicuo que va desde el objeto  $M$  hasta el plano principal objeto (rayo 1, que interseca al plano principal en el punto  $A$ ).

Ahora bien, como los planos principales son planos de aumento lateral unitario, el rayo que llega a  $A$  debe trasladarse horizontalmente hasta el plano principal imagen (punto  $B$ ). Dado que el rayo 1 no es de marcha conocida, para determinar su dirección de salida se debe emplear un rayo auxiliar, que pase por el foco objeto  $F$  y que sea paralelo a 1 (rayo 2, que interseca al plano principal objeto en  $C$ ). Una vez más, este rayo debe trasladarse horizontalmente hasta llegar al plano principal imagen (punto  $D$ ). Como el rayo 2 pasa por el foco objeto, luego de salir del sistema, el mismo debe ser paralelo al eje óptico (rayo 2").

Ahora bien, como los rayos 1 y 2 ingresan paralelos entre sí, ambos deben cruzarse en el plano focal imagen de la lente gruesa al emerger, por lo tanto la extensión del rayo 2" hasta su intersección con el plano focal imagen (punto  $E$ ), determinará el punto de salida del rayo 1", que va desde  $B$  hasta  $E$ . Finalmente, la intersección del rayo 1" con el eje óptico determina la posición de la imagen  $M''$ .

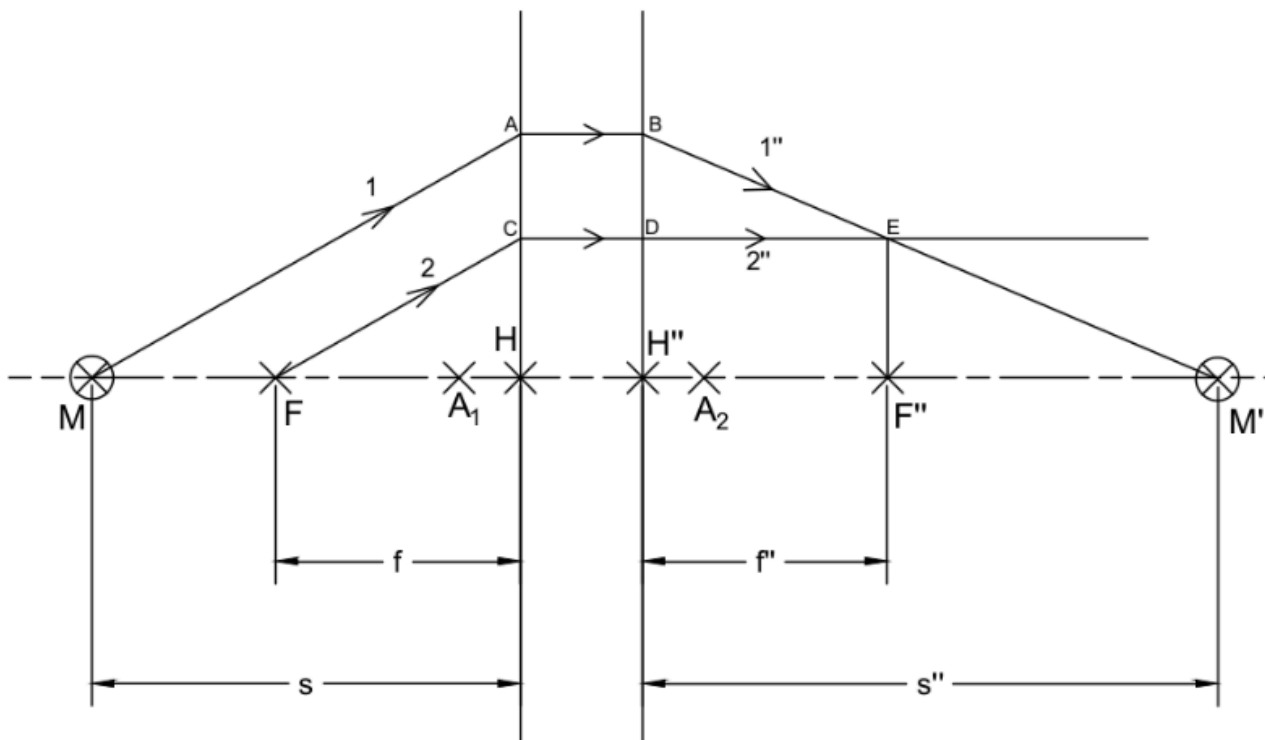
La determinación analítica de la posición de la imagen del objeto se realiza empleando la [Ec. de Gauss 0.1](#), teniendo en consideración que la distancia objeto  $s$  debe medirse desde el objeto  $M$  hasta el punto principal objeto  $H$  y la distancia focal objeto se mide desde el foco objeto  $F$  hasta el punto principal objeto  $F$ , como se muestra en la [Fig. 1.7](#). Una vez despejada la distancia



imagen  $s''$ , para ubicar a la imagen es preciso medir la distancia desde el plano principal imagen  $s''$ . Escrito en símbolos, lo dicho hasta ahora se puede expresar de la siguiente manera:

$$s = \overline{MH}; s'' = \overline{H''M''}; f = \overline{FH}; f'' = \overline{H''F''}$$

Es importante tener en cuenta que mientras  $s$ ,  $s''$ ,  $f$  y  $f''$  se miden empleando el convenio **óptico** de signos, los segmentos  $\overline{MH}$ ,  $\overline{H''M''}$ ,  $\overline{FH}$  y  $\overline{H''F''}$  se miden empleando el convenio de signos **geométrico**.



**Figura 1.7:** Determinación gráfica de la imagen de un objeto puntual a partir de la modelización de una lente gruesa. La determinación de la imagen del objeto M se realiza empleando el método del rayo auxiliar, siempre teniendo en cuenta que cualquier rayo que llega al plano principal objeto debe trasladarse horizontalmente hasta el plano principal imagen, para luego continuar con su correspondiente marcha.

### Determinación de la imagen de un objeto puntual ubicado fuera del eje óptico del sistema

La determinación de la posición de la imagen de un objeto situado fuera del eje, o, equivalentemente, la de un objeto extenso se ejemplifica en la [Figura 1.8](#), y se realiza empleando el método del rayo paralelo<sup>9</sup>.

Primero se traza el rayo 1, paralelo al eje y que pase por el objeto  $Q$ . Una vez que dicho rayo interseca el plano principal objeto (punto  $A$ ), el mismo debe trasladarse horizontalmente hasta el plano principal imagen (punto  $B$ ), después de lo cual continuará su marcha hacia el foco imagen  $F''$  (rayo 1").

El segundo rayo parte desde  $Q$  y pasa por el foco objeto  $F$ , hasta intersecar al plano principal objeto (punto  $C$ ), luego de lo cual se traslada horizontalmente hasta el plano principal imagen (punto  $D$ ), para emerger paralelamente al eje óptico (rayo 2"). Una vez trazados los rayos 1" y 2", se encuentra la imagen  $Q''$  en la intersección de ambos rayos.

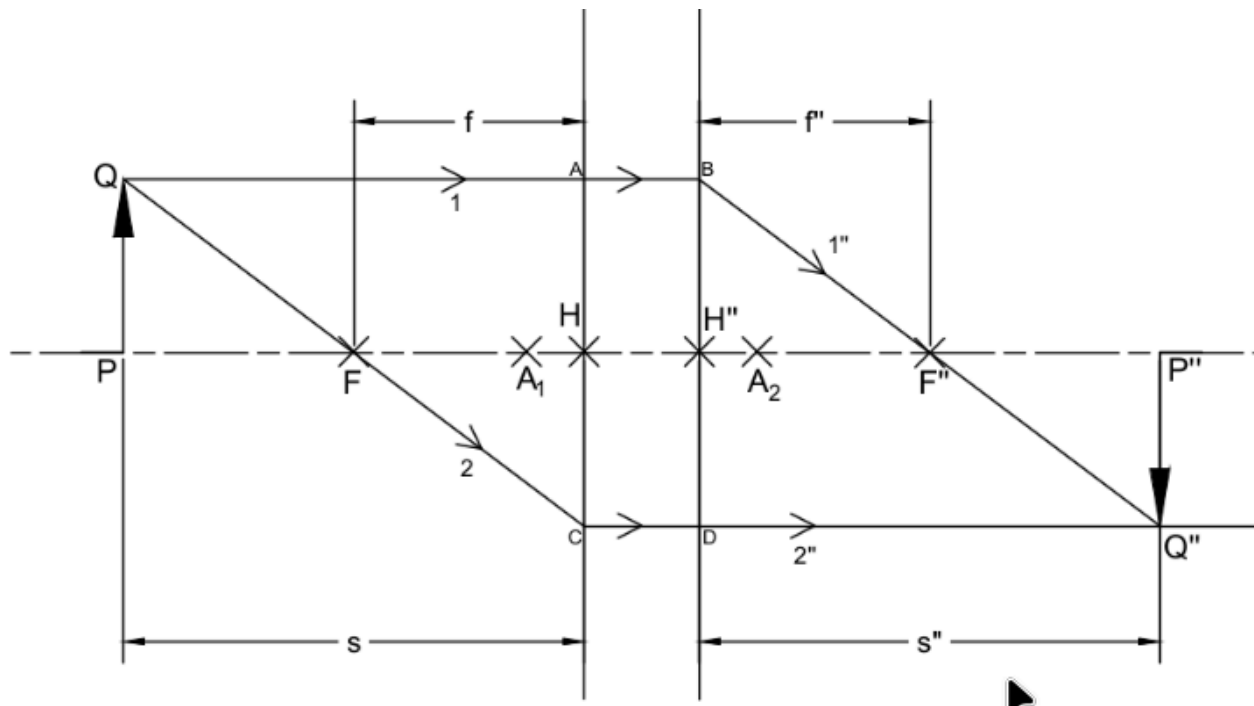
La determinación analítica de la posición, aumento y naturaleza directa o invertida de la imagen se realiza empleando las Ecs. [0.1](#) y [0.8](#), midiendo las distancias objeto e imagen respecto de los puntos principales objeto e imagen, respectivamente<sup>10</sup>.

La determinación de la naturaleza real o virtual de la imagen es un poco más complicada, ya que, en el caso más general, puede darse que la modelización indique la imagen se forme a partir de la intersección de rayos, pero en un lugar en que los rayos no puedan cruzarse efectivamente, por ejemplo, en el interior de la lente gruesa. Debido a esto es necesario que siempre se tengan como referencia los límites físicos del sistema (los puntos  $A_1$  y  $A_2$  en las Figuras [1.7](#) y [1.8](#)). Si, por ejemplo, la modelización indica que los rayos que formarán la imagen se intersectan dentro de la lente gruesa, la imagen que se formará será en realidad virtual, a pesar de que provino de la intersección de los rayos salientes.

---

<sup>9</sup> Cuando se trazan rayos para encontrar las imágenes producidas por una lente delgada, y el índice de refracción a ambos lados de la lente es el mismo, se puede emplear un tercer rayo, que es el rayo que no se desvía, que pasa por el centro óptico de la lente. Notar que cuando se trabaja con modelizaciones, no se puede hablar de centro óptico en el sentido usual, por lo que para la construcción de imágenes de lentes gruesas, no se puede emplear el rayo que no se desvía de la misma manera que se hacía con las lentes delgadas.

<sup>10</sup> Dado que los planos principales son planos de aumento lateral unitario, los mismos no inciden en el aumento lateral total de un objeto extenso.

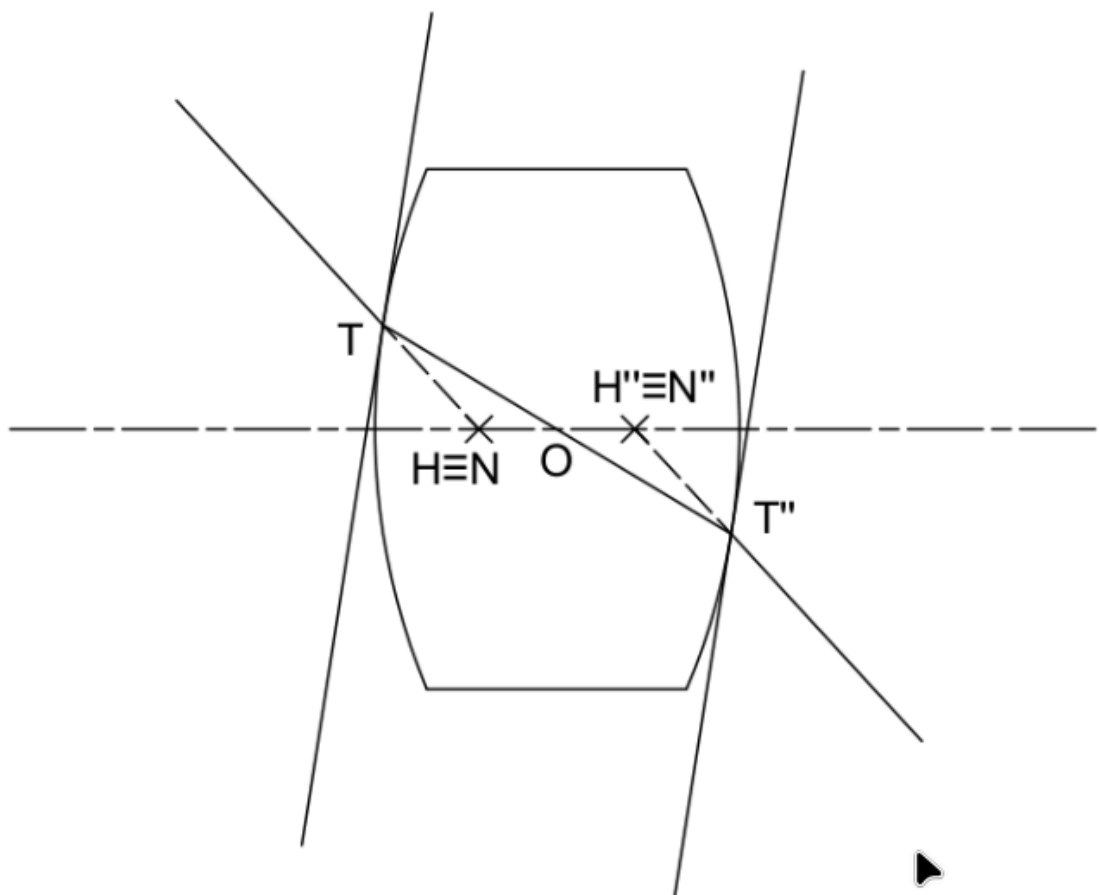


**Figura 1.8:** Determinación gráfica de la imagen de un objeto extenso a partir de la modelización de una lente gruesa. La determinación de la imagen del objeto  $\overline{PQ}$  se realiza empleando los rayos de marcha conocida foco-paralelo y paralelo-foco, siempre teniendo en cuenta que cualquier rayo que llega al plano principal objeto debe trasladarse horizontalmente hasta el plano principal imagen, para luego continuar con su correspondiente marcha.

## 1.2. Puntos nodales y centro óptico

De todos los rayos que atraviesan una lente gruesa procedentes de un punto objeto situado fuera del eje, habrá siempre uno cuya dirección luego de emerger de la lente sea la misma que la que tenía al incidir sobre dicha lente. Los puntos en que las prolongaciones de dichos rayos cortan al eje principal se llaman puntos nodales y los planos transversales a los que ellos pertenecen se denominan planos nodales. Todos los sistemas ópticos tienen dos puntos nodales, que se denominan puntos nodales objeto e imagen, y se representan con  $N$  y  $N''$ , respectivamente.

En la [Figura 1.9](#) se ha dibujado una lente gruesa rodeada del mismo medio a ambos lados, es decir,  $n = n''$ . En este caso los puntos nodales objeto e imagen coinciden respectivamente con los puntos principales objeto e imagen. Como el rayo incidente y emergente forman ángulos iguales con el eje óptico, los puntos nodales se llaman puntos conjugados de aumento angular unitario.



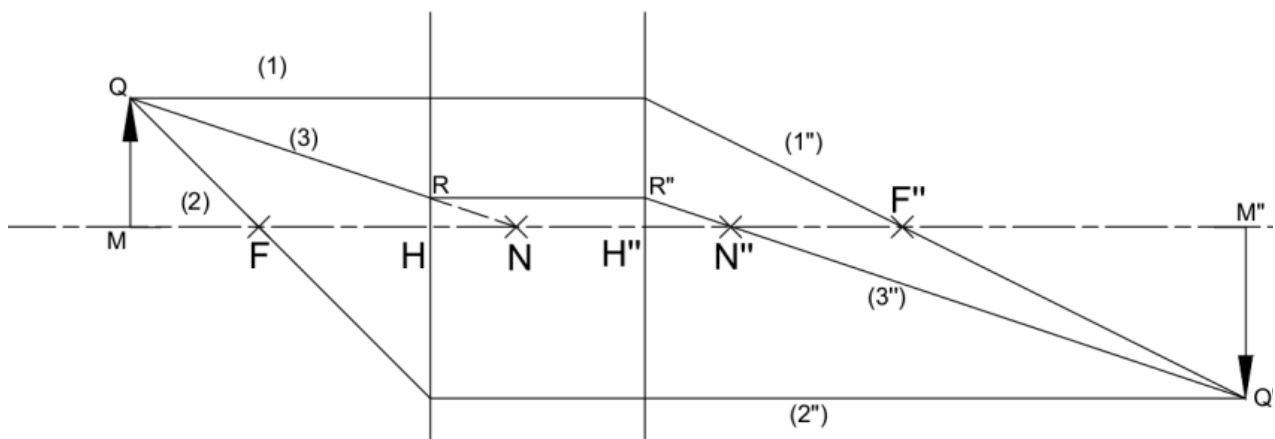
**Figura 1.9:** Cualquier sistema óptico posee dos puntos tales que cualquier rayo que incide sobre la lente y apunte a ellos no será desviado, sino simplemente trasladado en forma paralela. Dicho par de puntos se denominan nodales.

La dirección del rayo  $\overline{TT''}$  corta al eje óptico en el punto  $O$ , que es el centro óptico de la lente. Una propiedad importante del centro óptico es que todo rayo no desviado, al prolongarse pasa por dicho punto. Se puede demostrar que la posición de este punto depende de los radios de curvatura de cada superficie, así como del espesor de la lente, pero no del índice de refracción del material del que está hecha la lente, por lo tanto no variará con el color de la luz incidente. Esto hace que la determinación del centro óptico de una lente sea útil cuando se trata de corregir las aberraciones cromáticas producidas por las mismas.

En la [Figura 1.9](#) se han trazado además las tangentes a las superficies en  $T$  y  $T''$ , con lo cual se puede apreciar que el efecto que producen los puntos nodales sobre un rayo que luz que incide sobre una lente gruesa es el mismo que produce una lámina de caras paralelas, es decir, el efecto de trasladar el rayo incidente sin desviarlo.



A continuación se determinarán algunas expresiones generales que permiten ubicar a los puntos nodales en función de los parámetros constructivos de la lente. Para ello, se supondrá una lente gruesa dada, en la que se sabe la posición de los focos, los puntos principales y los puntos nodales. Se ha dispuesto además, un objeto arbitrario y su imagen, así como los rayos paralelo-foco (1-1''), foco-paralelo (2-2''), y de no desvío, que pasan por los puntos nodales  $N$  y  $N''$  (3-3''), como se muestra en la [Figura 1.10](#). Dado que los puntos nodales no coinciden con los puntos principales, se puede afirmar que  $n \neq n''$ .



**Figura 1.10:** Una propiedad interesante de los puntos nodales es que la distancia entre los mismos siempre es idéntica a la distancia que existe entre los puntos principales. A su vez, la distancia entre los puntos nodales y sus respectivos puntos principales es igual a la diferencia entre las distancias a ambos lados de la lente gruesa.

Por definición de punto nodal, los rayos 3 y 3'' deben ser paralelos. Adicionalmente, como los planos principales son de aumento unitario, los puntos  $R$  y  $R''$  se encuentran a la misma altura sobre el eje óptico. Esto implica que el cuadrilátero  $RR''N''N$  es un paralelogramo, lo significa que:

$$\overline{HH''} = \overline{NN''} \quad (1.15)$$

Por otro lado, y por la mismas razones, es claro que los triángulos  $\Delta(RHN)$  y  $\Delta(R''N''H)$  son congruentes, por lo tanto:

$$\overline{HN} = \overline{H''N''} \quad (1.16)$$

Finalmente, aunque el procedimiento es un poco más engorroso, se puede demostrar que la distancia entre cada punto principal y su respectivo punto nodal es igual a la diferencia entre las distancias focales imagen y objeto<sup>11</sup>, es decir:

<sup>11</sup> Un esbozo de la demostración se encuentra en un apéndice al final del capítulo.

$$\overline{HN} = \overline{H''N''} = f'' - f \quad (1.17)$$

Teniendo en cuenta las expresiones [1.15](#), [1.16](#) y [1.17](#), pueden obtenerse expresiones que permiten ubicar los puntos nodales en función de los vértices de la lente:

$$\overline{A_1N} = \overline{A_1H} + \overline{HN} = f \left( \frac{n''-n}{n} + \frac{d}{f'_2} \right) \quad (1.18)$$

$$\overline{A_2N''} = \overline{A_2H''} + \overline{H''N''} = -f'' \left( \frac{n-n''}{n''} + \frac{d}{f'_1} \right) \quad (1.19)$$

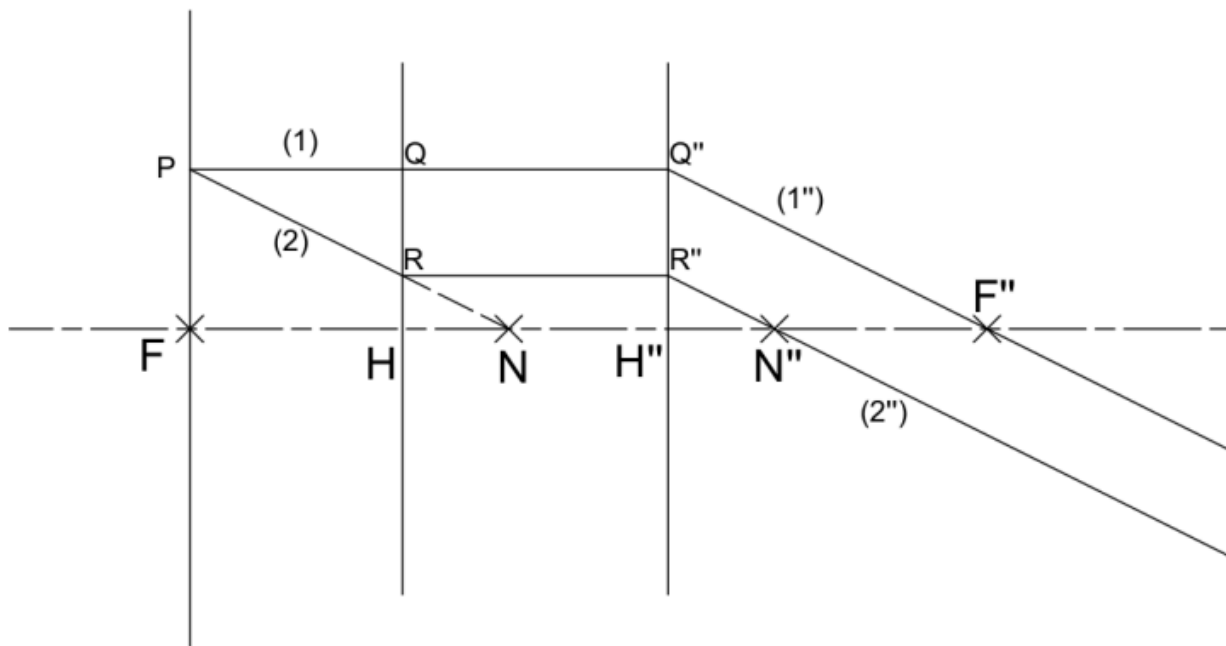
Por otro lado, dado que los puntos nodales definen puntos nodales de aumento angular unitario, puede definirse a partir de ellos una forma alternativa de calcular el aumento lateral:

$$m = \frac{y''}{y} = - \frac{s'' - \overline{H''N''}}{s - \overline{HN}} = - \frac{s'' - (f'' - f)}{s - (f'' - f)} \quad (1.20)$$

La determinación de los puntos nodales por el método gráfico se hace haciendo uso del principio óptico (III) mencionado en la sección 0.3, que estipula que todo conjunto de rayos que se intersecan en el mismo punto del plano focal objeto, emergen paralelos entre sí luego de la refracción.

El trazado que permite determinar la ubicación de los puntos nodales se muestra en la [Figura 1.11](#). Primeramente se traza un rayo (1) que pase por un cierto punto  $P$  ubicado en el plano focal objeto, que sea paralelo al eje óptico. Dicho rayo se trasladará desde el punto  $Q$  en el plano principal objeto hasta el punto  $Q''$  en el plano principal imagen, y deberá pasar por el foco imagen del sistema  $F''$  al salir del mismo, tal como lo hace el rayo (1'').

Ahora bien, **todos** los rayos que pasen por  $P$  deberán, luego de atravesar al sistema, ser paralelos al rayo (1''). En particular, si se traza un rayo (2), que sea paralelo a (1'') y que pase por  $P$ , luego de pasar por la lente, la dirección del rayo saliente (2''), será a la vez paralelo a (1'') y a (2). Como (2) y (2'') son paralelos, ambos deben pasar por los puntos nodales  $N$  y  $N''$  respectivamente. En el caso del rayo (2) se debe trazar una prolongación desde el punto  $R$  hasta cortar al eje óptico, mientras que en el caso del rayo (2''), el propio rayo ya interseca al eje óptico en el punto nodal imagen  $N''$ .



**Figura 1.11:** La determinación gráfica de la ubicación de los puntos nodales se realiza a partir de emplear un rayo que incide en la lente gruesa paralelo al eje, y usando el principio óptico que establece que dos rayos que emergen paralelos entre sí de cualquier sistema óptico se deben intersecar en el plano focal objeto.

Una vez determinados los puntos nodales de una lente gruesa, los mismos pueden emplearse para determinar la posición del centro óptico, como se muestra en la [Figura 1.10](#).

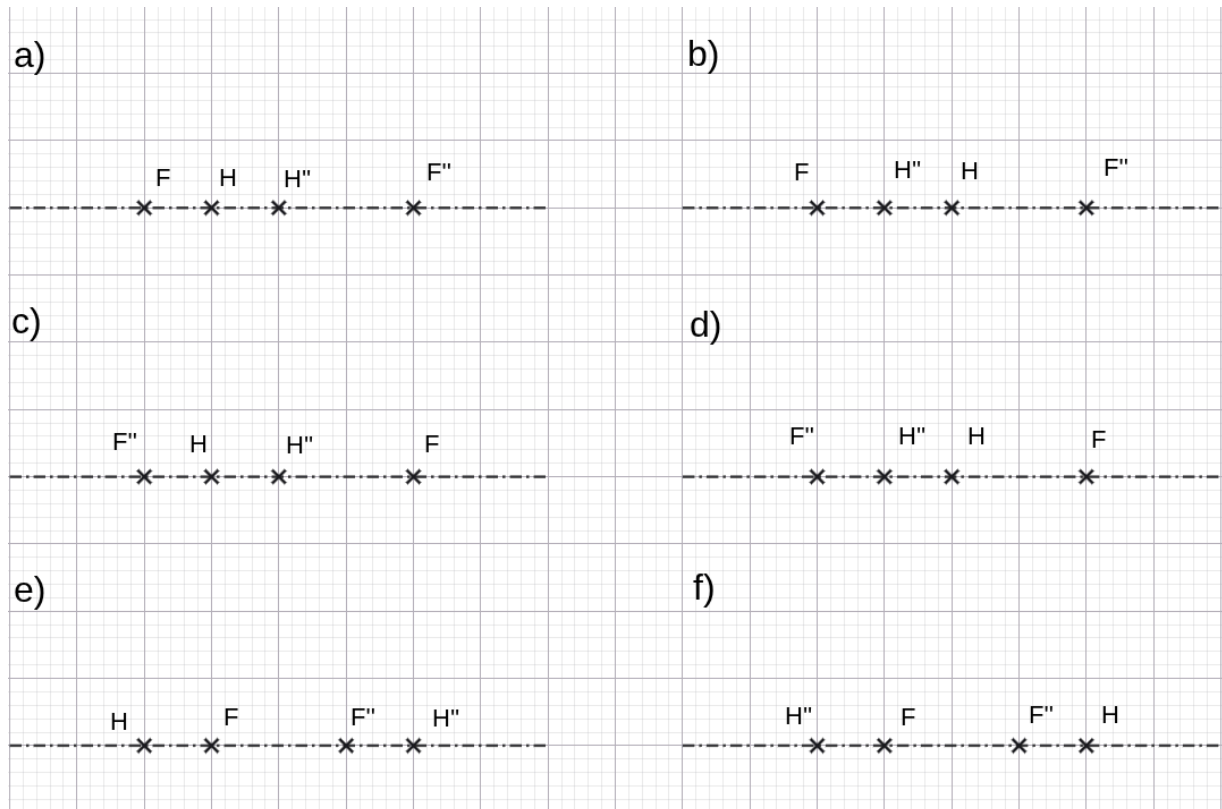
### 1.3. Resumen de Fórmulas

Nombre	Expresión	Número
Potencia de una lente gruesa	$P = P_1 + P_2 - C \cdot P_1 \cdot P_2$ <p>con <math>C = \frac{d}{n'}</math></p>	(1.10)
Posición de los planos principales de una lente gruesa	$\overline{A_1 H} = f \frac{d}{f'_2}$	(1.11)
	$\overline{A_2 H''} = - f'' \frac{d}{f'_1}$	(1.12)
Posición de los focos de una lente gruesa	$\overline{A_1 F} = - f \left( 1 - \frac{d}{f'_2} \right)$	(1.13)
	$\overline{A_2 F''} = f'' \left( 1 - \frac{d}{f'_1} \right)$	(1.14)
Separación de los puntos nodales	$\overline{H H''} = \overline{N N''}$	(1.15)
Ubicación de los puntos nodales respecto de los puntos principales	$\overline{H N} = \overline{H'' N''} = f'' - f$	(1.17)
Ubicación de los puntos nodales respecto de los vértices del sistema	$\overline{A_1 N} = f \left( \frac{n'' - n}{n} + \frac{d}{f'_2} \right)$	(1.18)
	$\overline{A_2 N''} = - f'' \left( \frac{n - n''}{n''} + \frac{d}{f'_1} \right)$	(1.19)
Aumento lateral a partir de los puntos nodales	$m = - \frac{s'' - \overline{H'' N''}}{s - \overline{H N}} = - \frac{s'' - (f'' - f)}{s - (f'' - f)}$	(1.20)



## 1.4. Cuestiones

1. Para los siguientes sistemas:
  - a. Copie los esquemas dados, y acote en cada uno las distancias focales de cada sistema
  - b. Determine el valor de las distancias focales
  - c. Sabiendo que uno de los medios es aire, determine el valor de  $n$  y  $n''$



*Nota: para cada esquema, considere que 1 cuadrado = 1 cm*

2. Para los sistemas modelados del ejercicio 1, determine la ubicación de los puntos nodales, de forma analítica y gráfica.

### 1.5. Ejercicios

1.5.1. Los radios de una lente equiconvexa de  $n' = 1,8$  miden 4 cm y su espesor es 3,6 cm. Determinar analítica y gráficamente:

- La potencia y la distancia focal.
- Las distancias entre los vértices a los correspondientes focos y puntos principales.
- ¿A partir de qué espesor esta lente tendrá una potencia negativa?
- ¿Cómo se ubican los planos principales si  $R_1 = R_2$ ?

**Respuestas:**

- $f_1 = 5 \text{ cm}; f'_1 = 9 \text{ cm}; f'_2 = 9 \text{ cm}; f''_2 = 5 \text{ cm}; P = 32 \text{ Dp}; f = f'' = 3,13 \text{ cm}$
- $\overline{A_1F} = -1,88 \text{ cm}; \overline{A_2F''} = 1,88 \text{ cm}; \overline{A_1H} = 1,25 \text{ cm}; \overline{A_2H''} = -1,25 \text{ cm}$
- 18 cm
- De forma simétrica respecto de los vértices

1.5.2. El espesor de una lente de vidrio es 3 cm y su índice de refracción es 1,5. Los radios de sus caras son:  $R_1 = 3 \text{ cm}$  y  $R_2 = 5 \text{ cm}$ . Calcúlese analítica y gráficamente:

- La potencia y la distancia focal.
- Las distancias entre los vértices y los correspondientes focos y puntos principales.
- Si  $R_1 < R_2 \wedge d = 3 \text{ cm} \Rightarrow P > 0$ . ¿Existe un espesor tal que  $P < 0$ ? Si existe, calcúlelo.

**Respuestas:**

- $f_1 = 6 \text{ cm}; f'_1 = 9 \text{ cm}; f'_2 = -15 \text{ cm}; f''_2 = -10 \text{ cm}; P = 10 \text{ Dp}; f = f'' = 10 \text{ cm};$
- $\overline{A_1F} = -12 \text{ cm}; \overline{A_2F''} = 6,67 \text{ cm}; \overline{A_1H} = -2 \text{ cm}; \overline{A_2H''} = -3,33 \text{ cm}$
- No existe

1.5.3. Una lente plano-convexa de 3,2 cm de espesor tiene un  $n' = 1,6$ . Si el radio de la segunda superficie mide 3,2 cm, calcúlese analítica y gráficamente:

- La potencia y la distancia focal.
- Las distancias entre los vértices a los correspondientes focos y puntos principales.
- Esquematice la ubicación de los planos principales de una lente convexa-plana ( $R_1 > 0; R_2 = \infty$ ).

**Respuestas:**

- $f_1 = \infty; f'_1 = \infty; f'_2 = 8,53 \text{ cm}; f''_2 = 5,33 \text{ cm}; P = 18,75 \text{ Dp}; f = f'' = 5,33 \text{ cm};$
- $\overline{A_1F} = -3,33 \text{ cm}; \overline{A_2F''} = 5,33 \text{ cm}; \overline{A_1H} = 2 \text{ cm}; \overline{A_2H''} = 0 \text{ cm}$



1.5.4. Los radios de una lente de  $n' = 1,5$  y espesor  $3\text{ cm}$  miden  $R_1 = 5\text{ cm}$  y  $R_2 = 2,5\text{ cm}$ . Calcúlese analítica y gráficamente:

- La potencia y la distancia focal.
- Las distancias entre los vértices y los correspondientes focos y puntos principales.
- Si  $R_1 > R_2 \wedge d = 3\text{ cm} \Rightarrow P < 0$ . ¿Existe un espesor tal que  $P > 0$ ?

**Respuestas:**

- $f_1 = 10\text{ cm}; f'_1 = 15\text{ cm}; f'_2 = -7,5\text{ cm}; f''_2 = -5\text{ cm}; P = -6\text{ Dp}; f = f'' = -16,67\text{ cm};$
- $\overline{A_1F} = 23,33\text{ cm}; \overline{A_2F''} = -13,33\text{ cm}; \overline{A_1H} = 6,67\text{ cm}; \overline{A_2H''} = 3,33\text{ cm}$
- Si existe.  $d = 7,5\text{ cm}$

1.5.5. Una lente gruesa se encuentra en el extremo de un tubo que contiene un aceite de  $n'' = 1,3$ . Los radios de la lente son  $R_1 = 4,2\text{ cm}$  y  $R_2 = -2\text{ cm}$ . Su espesor es de  $5,1\text{ cm}$  y  $n' = 1,7$ . Si  $R_2$  está en contacto con el aceite; calcúlese analítica y gráficamente:

- La potencia y la distancia focal.
- Las distancias entre los vértices y los correspondientes focos y puntos principales.

**Respuestas:**

- $f_1 = 6\text{ cm}; f'_1 = 10,20\text{ cm}; f'_2 = 8,5\text{ cm}; f''_2 = 6,5\text{ cm};$   
 $P = 26,67\text{ Dp}; f = 3,75\text{ cm}; f'' = 4,88\text{ cm}$
- $\overline{A_1F} = -1,5\text{ cm}; \overline{A_2F''} = 2,44\text{ cm}; \overline{A_1H} = 2,25\text{ cm}; \overline{A_2H''} = -2,44\text{ cm}$

1.5.6. Una lente con radios de curvatura iguales  $R_1 = R_2 = 5\text{ cm}$ ; tiene un espesor de  $3\text{ cm}$  y  $n' = 1,5$ , si la lente está rodeada de aire, hállese:

- La potencia y la distancia focal.
- La posición de los focos y los puntos principales respecto de los vértices de la lente.

**Respuestas:**

- $f_1 = 10\text{ cm}; f'_1 = 15\text{ cm}; f'_2 = -15\text{ cm}; f''_2 = -10\text{ cm};$   
 $P = 2\text{ Dp}; f = f'' = 50\text{ cm}$
- $\overline{A_1F} = -60\text{ cm}; \overline{A_2F''} = 40\text{ cm}; \overline{A_1H} = -10\text{ cm}; \overline{A_2H''} = -10\text{ cm}$

1.5.7. Una lente concéntrica de  $R_1 = -5 \text{ cm}$  y  $R_2 = -8 \text{ cm}$  tiene un  $n' = 1,5$ . Suponiendo que está rodeada de aire, hállese:

- La potencia y la distancia focal.
- La posición de los focos y los puntos principales respecto de los vértices de la lente.

**Respuestas:**

- $f_1 = -10 \text{ cm}$ ;  $f'_1 = -15 \text{ cm}$ ;  $f'_2 = 24 \text{ cm}$ ;  $f''_2 = 16 \text{ cm}$ ;  
 $P = -2,5 \text{ Dp}$ ;  $f = f'' = -40 \text{ cm}$
- $\overline{A_1F} = 35 \text{ cm}$ ;  $\overline{A_2F''} = -48 \text{ cm}$ ;  $\overline{A_1H} = -5 \text{ cm}$ ;  $\overline{A_2H''} = -8 \text{ cm}$

1.5.8. Determine, para la lente gruesa del ejercicio 1.5.5, determine la posición de sus respectivos puntos nodales, analítica y gráficamente.

**Respuestas:**  $\overline{A_1N} = 3,37 \text{ cm}$ ;  $\overline{A_2N''} = -1,31 \text{ cm}$

1.5.9. Dados los datos de las siguientes lentes gruesas, determinar:

- Potencia y distancia focal.
- Distancia de los vértices a los correspondientes focos, puntos principales y puntos nodales.

LENTE A)  $R_1 = 5 \text{ cm}$ ;  $R_2 = 2 \text{ cm}$ ;  $d = 3 \text{ cm}$ ;  $n' = 1,5$ ;  $n = 1$ ;  $n'' = 1,4$

LENTE B)  $R_1 = 4 \text{ cm}$ ;  $R_2 = 4 \text{ cm}$ ;  $d = 1,5 \text{ cm}$ ;  $n' = 1,5$ ;  $n = 1$ ;  $n'' = 1,3$

LENTE C)  $R_1 = 6 \text{ cm}$ ;  $R_2 = 5 \text{ cm}$ ;  $d = 4,8 \text{ cm}$ ;  $n' = 1,6$ ;  $n = 1,2$ ;  $n'' = 2$

**Respuestas:**

- LENTE A)  $P = 6 \text{ Dp}$ ;  $f = 16,67 \text{ cm}$ ;  $f'' = 23,33 \text{ cm}$   
LENTE B)  $P = 8,13 \text{ Dp}$ ;  $f = 12,31 \text{ cm}$ ;  $f'' = 16 \text{ cm}$   
LENTE C)  $P = 13,07 \text{ Dp}$ ;  $f = 9,18 \text{ cm}$ ;  $f'' = 15,31 \text{ cm}$
- LENTE A)  $\overline{A_1F} = -18,33 \text{ cm}$ ;  $\overline{A_2F''} = 18,67 \text{ cm}$ ;  $\overline{A_1H} = -1,67 \text{ cm}$ ;  $\overline{A_2H''} = -4,67 \text{ cm}$ ;  
 $\overline{A_1N} = 5 \text{ cm}$ ;  $\overline{A_2N''} = 2 \text{ cm}$   
LENTE B)  $\overline{A_1F} = -12,92 \text{ cm}$ ;  $\overline{A_2F''} = 14 \text{ cm}$ ;  $\overline{A_1H} = -0,62 \text{ cm}$ ;  $\overline{A_2H''} = -2 \text{ cm}$ ;



$$\overline{A_1 N} = 3,08 \text{ cm}; \overline{A_2 N''} = 1,69 \text{ cm}$$

$$\text{LENTE C) } \overline{A_1 F} = -6,98 \text{ cm}; \overline{A_2 F''} = 12,24 \text{ cm}; \overline{A_1 H} = 2,2 \text{ cm}; \overline{A_2 H''} = -3,06 \text{ cm};$$

$$\overline{A_1 N} = 8,33 \text{ cm}; \overline{A_2 N''} = 3,06 \text{ cm}$$

1.5.10. Para las lentes del ejercicio 9, ubique los siguientes objetos y determine sus imágenes por el método gráfico, empleando al menos un rayo que pase por los puntos nodales de su correspondiente lente:

- Un objeto extenso de altura 1 cm, tal que  $s = 0,5 f$ .
- Un objeto extenso de altura 1 cm, tal que  $s = 1,5 f$ .
- Un objeto extenso de altura 1 cm, tal que  $s = 2 f$ .

**Respuestas:**

- $s'' = -23,33$ ;  $m = 2$
- $s'' = 47,97 \text{ cm}$ ;  $m = -2$
- $s'' = 15 \text{ cm}$ ;  $m = -1$

### 1.6. Apéndice A: Demostración de la expresión 1.18

Para demostrar la expresión [1.17](#), partimos de la expresión del aumento [1.20](#) y la igualamos a la expresión ya conocida para calcular el aumento lateral, [Ec. 0.8](#):

$$-\frac{s'' - \overline{H''N''}}{s - \overline{HN}} = -\frac{n \cdot s''}{n'' \cdot s}$$

$$\frac{s'' - \overline{H''N''}}{s - \overline{HN}} = \frac{n \cdot s''}{n'' \cdot s}$$

$$\frac{s'' - \overline{HN}}{s - \overline{HN}} = \frac{n \cdot s''}{n'' \cdot s}$$

$$(s'' - \overline{HN}) \cdot n'' \cdot s = (s - \overline{HN}) \cdot n \cdot s''$$

$$n'' \cdot s \cdot s'' - n'' \cdot s \cdot \overline{HN} = n \cdot s'' \cdot s - n \cdot s'' \cdot \overline{HN}$$

$$n'' \cdot s \cdot s'' - n \cdot s'' \cdot s = n'' \cdot s \cdot \overline{HN} - n \cdot s'' \cdot \overline{HN}$$

$$(n'' - n) \cdot s \cdot s'' = (n'' \cdot s - n \cdot s'') \cdot \overline{HN}$$

En el segundo paso se reemplazó  $\overline{H''N''}$  por  $\overline{HN}$ , en virtud de la [Ec. 1.16](#). Si se divide miembro a miembro por  $s \cdot s''$ , y se toma en cuenta la [Ec. de Gauss \(0.1\)](#) queda:

$$n'' - n = P \cdot \overline{HN}$$

Finalmente, si se divide miembro a miembro por la potencia P de la lente, y se toman en cuenta las expresiones [0.5](#) y [0.6](#), que vinculan la potencia de un sistema con sus distancias focales, se llega a la expresión [1.17](#).



# Capítulo 2: Combinaciones de Lentes

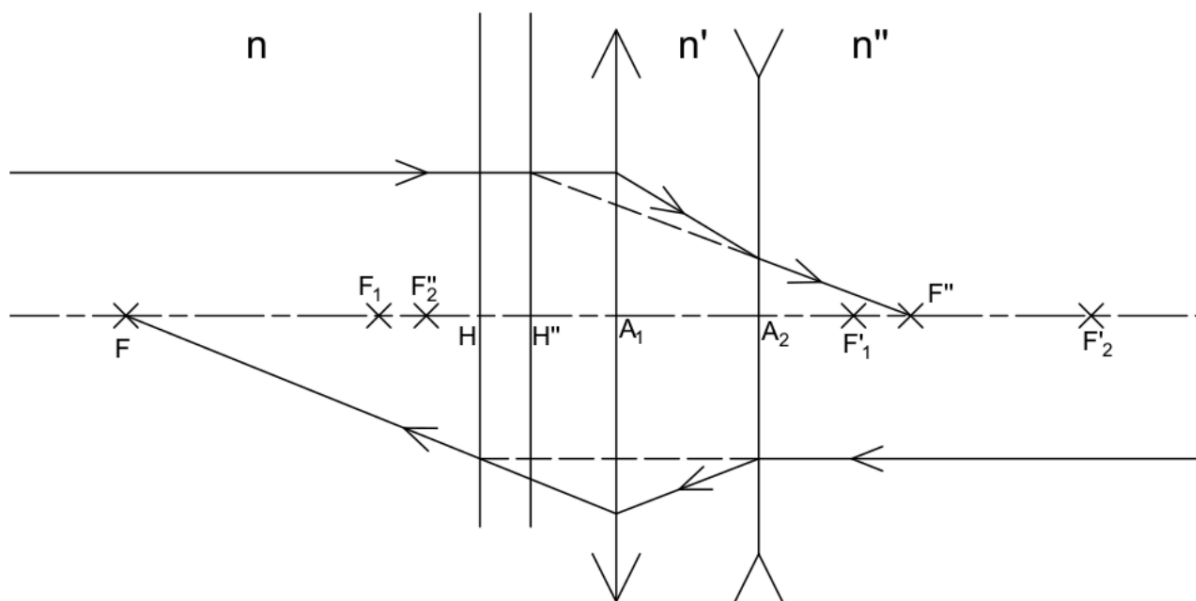
La mayor parte de las lentes utilizadas en los instrumentos ópticos son compuestas, ya que esto permite reducir las aberraciones. En este capítulo se estudiarán sistemas ópticos compuestos por dos o más lentes, que podrán ser gruesas o delgadas, y que a su vez pueden estar separadas o adosadas. Asimismo, se demostrará que cualquier combinación de lentes, sin importar su complejidad, puede ser modelada a partir de seis puntos cardinales, es decir, dos focos, dos puntos principales y dos puntos nodales. Se verá que, una vez determinados los puntos cardinales de un sistema óptico, se puede, empleando los mismos, utilizar un sistema modelo que producirá las mismas imágenes que el sistema real, pero a través de un trazado de rayos mucho más sencillo. En la primera sección se estudiará la combinación de lentes delgadas, donde se verá que el método de análisis comparte muchos puntos en común con lo visto en el capítulo anterior. En la sección siguiente se analizará la combinación de lentes gruesas, y se tratará el problema a partir de reducir cada lente gruesa a una correspondiente modelización, para luego tratar la combinación de los sistemas modelados.

## 2.1. Combinación de Lentes Delgadas

Cuando un rayo de luz interactúa con una lente gruesa, el mismo sufre dos refracciones, una en cada superficie. Por otro lado, cuando un rayo de luz interactúa con un par de lentes delgadas, también puede suponerse que el rayo sólo sufre dos desvíos, debido a que, dentro del modelo de las lentes delgadas, se considera que el rayo no se desarrolla dentro de la lente. Esto implica que una combinación de dos lentes delgadas puede también trabajarse con los métodos empleados con lentes gruesas.

En este sentido, se puede afirmar, con mayor generalidad, que las propiedades ópticas de un par de lentes delgadas coaxiales pueden modelarse a partir de sólo dos focos y dos puntos principales, tal como se hizo con las lentes gruesas.

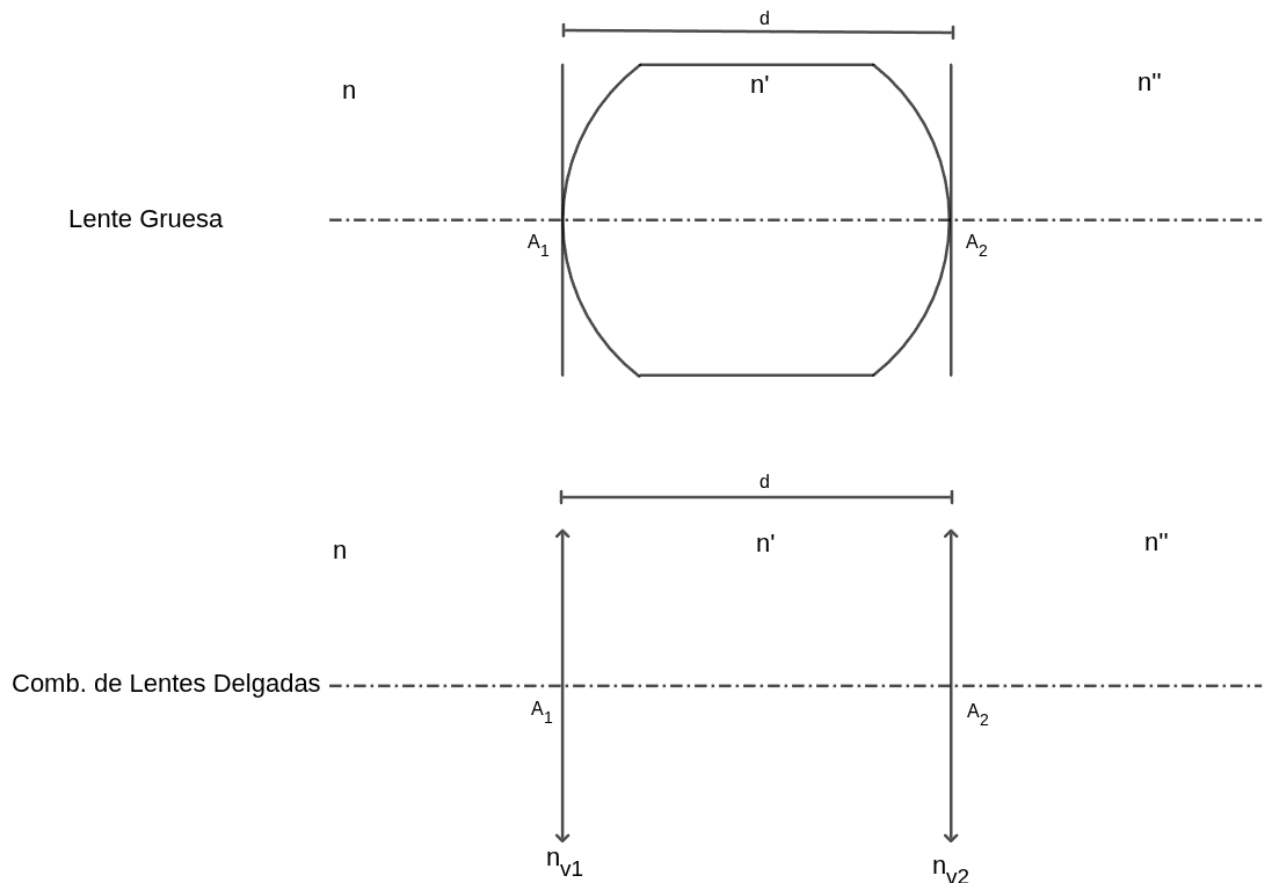
La determinación de los focos y puntos principales de una combinación de lentes delgadas se realiza empleando un procedimiento similar al tratado en el [Capítulo 1](#), con la salvedad de que en este caso, la posición de los focos de cada lente delgada se determina a partir de la [expresión 0.3](#).



**Figura 2.1:** Una combinación de lentes delgadas también puede modelarse a partir de un par de planos principales y sus respectivos focos. El procedimiento para determinar gráficamente la ubicación de tales planos y focos es conceptualmente idéntico al empleado para determinar la ubicación de los focos puntos principales de una lente gruesa.

El trazado de rayos para determinar los focos y puntos principales se realizan siguiendo el procedimiento explicado en la [sección 1.1.1](#), y que se ejemplifica esquemáticamente en la [Figura 2.1](#). Para el cálculo analítico de la potencia y la posición de los puntos principales del sistema se pueden emplear las expresiones [1.10](#), [1.11](#), [1.12](#), [1.13](#) y [1.14](#) pero se debe tener en cuenta que la nomenclatura ahora representa elementos físicos diferentes, a saber:

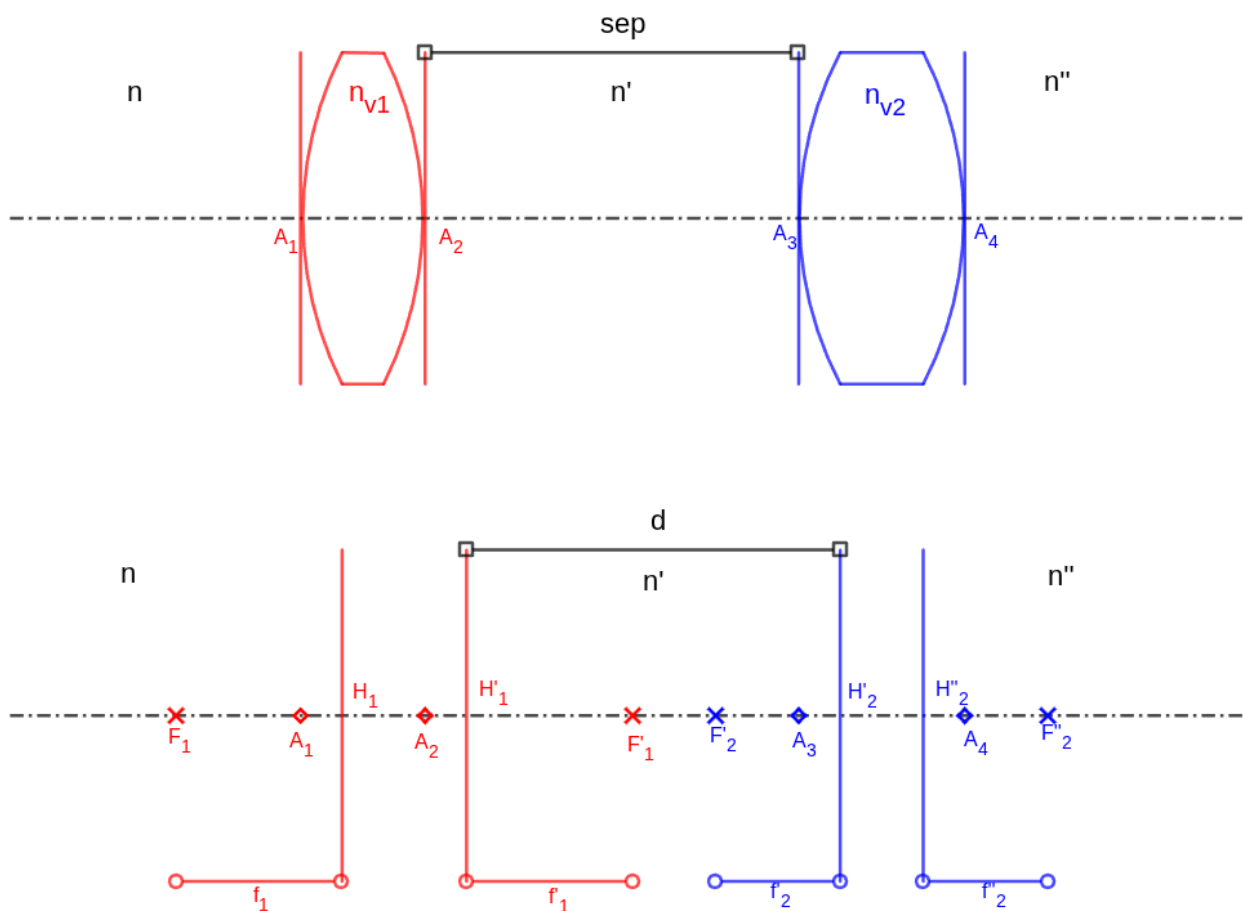
- Los índices de refracción de cada una de las lentes se notan  $n_{v1}$  y  $n_{v2}$ , mientras que el índice de refracción del medio que se encuentra entre las lentes, se nota como  $n'$  (ver [Figura 2.2](#)).
- El índice de refracción del medio del que provienen los rayos se sigue representando como  $n$  y el índice de refracción en donde terminan los rayos se representa ( $n''$ ), tal como cuando se trabajaba con lentes gruesas.
- $A_1$  representa la posición de la primera lente delgada  $LD_1$ , mientras que  $A_2$  representa la posición de la segunda lente delgada  $LD_2$ .
- $f_1$  y  $f'_1$  son las distancias focales de  $LD_1$ , y  $f_2$  y  $f'_2$  son las distancias focales correspondientes a  $LD_2$ , ambas determinadas por las Ecs. [0.3](#), [0.5](#) y [0.6](#).
- $d$  representa la separación entre lentes.



**Figura 2.2:** Representación de la nomenclatura que emplearemos para trabajar con la combinación de lentes delgadas. Una vez determinada la posición de los focos y puntos principales, la determinación de imágenes se realiza directamente sobre el sistema modelado, tal como se explicó en la [sección 1.1.3](#).

## 2.2. Combinación de Lentes Gruesas

Cuando se tiene una combinación de dos lentes gruesas, no se puede considerar que el rayo sólo sufre dos desvíos, ya que en este caso, el rayo tiene un desarrollo dentro de cada lente. Esto implica que el rayo sufre cuatro desvíos. Por lo tanto, para poder determinar la posición de los focos y puntos principales de una combinación de lentes gruesas, primero deben determinarse los focos y puntos principales de cada lente, empleando las expresiones [1.10](#), [1.11](#), [1.12](#), [1.13](#) y [1.14](#). En la [Figura 2.2](#) se indica cómo se representa esta modelización intermedia.



**Figura 2.2:** Para trabajar con una combinación de lentes gruesas, primero se deben modelar por separado cada una de las lentes que constituyen el sistema.

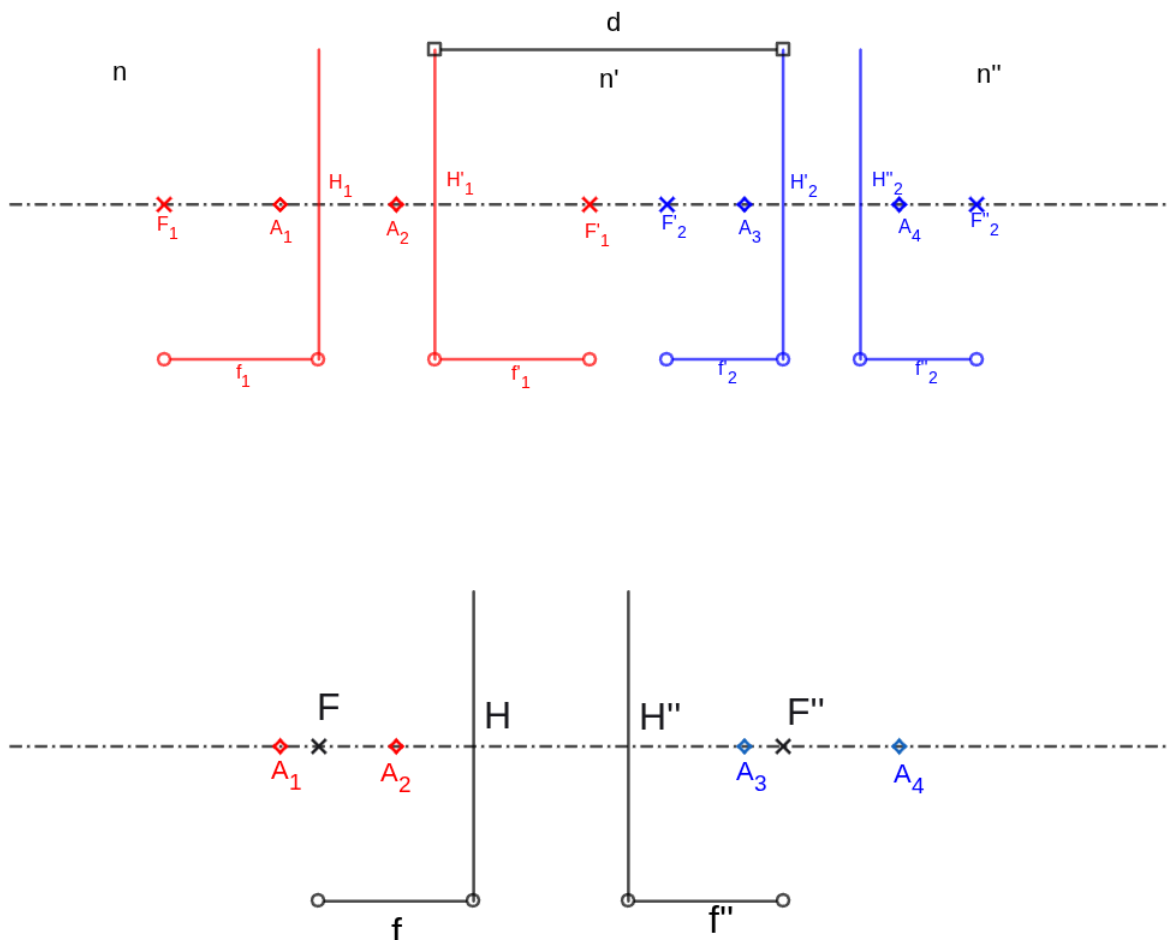
Una vez modelada cada lente gruesa, se tiene un sistema efectivo en el que se puede trabajar suponiendo que los rayos que ingresan “sólo” sufre dos desvíos, permitiendo aplicar los resultados del [Capítulo 1](#).

La determinación analítica de la potencia del sistema se realiza también empleando la [Ec. 1.10](#), teniendo en cuenta las siguientes salvedades:

- $P_1$  y  $P_2$  son las potencias de las lentes gruesas  $LG_1$  y  $LG_2$ , construidas con materiales de índice de refracción  $n_{v1}$  y  $n_{v2}$ , respectivamente (ver [Figura 2.2](#)).
- El índice de refracción del medio que se encuentra entre las lentes se nota como  $n'$ .
- El índice de refracción del medio del que provienen los rayos se sigue representando como  $n$  y el índice de refracción en donde terminan los rayos se representa ( $n''$ ), tal como cuando se trabajaba con lentes gruesas.



- $f_1$  y  $f'_1$  son las distancias focales de  $LG_1$ , y  $f'_2$  y  $f''_2$  son las distancias focales correspondientes a  $LG_2$ , ambas determinadas por las Ecs. [1.10](#), [0.5](#) y [0.6](#), o bien empleando las Ecs. [1.11](#), [1.12](#), [1.13](#) y [1.14](#) (ver [Figura 2.3](#)).
- $d$  representa la separación entre los modelos, es decir es la distancia entre el punto principal imagen de la primera lente  $H'_1$  y el punto principal objeto de la segunda lente  $H''_2$ , independientemente que dichos puntos sean contiguos o no. Dicho en símbolos  $d = \overline{H'_1 H''_2}$  (ver [Figura 2.3](#)).



**Figura 2.3:** Una vez modelada cada una de las lentes gruesas que constituyen a la combinación, se trabaja con cada modelo para encontrar los puntos principales y focos del sistema completo.

A su vez, para ubicar a los puntos principales de la combinación, se toman como referencia los puntos en los que inician y terminan los modelos. Dicho de otro modo, se considera el inicio del sistema como el punto principal objeto de la primera lente  $H_1$ , y el final del sistema como el punto principal imagen de la segunda lente  $H''_2$ . Es importante remarcar que esto es independientemente de que el  $H_1$  y  $H''_2$  sean efectivamente los puntos más a la izquierda y más a la derecha del sistema, respectivamente.

Se puede demostrar, a partir del análisis de semejanza de los triángulos que aparecen en la [Figura 2.4](#), que la posición de los puntos principales del sistema combinado se puede calcular como:

$$\overline{H_1 H} = f \frac{d}{f'_2} \quad (2.1)$$

$$\overline{H''_2 H''} = -f'' \frac{d}{f'_1} \quad (2.2)$$

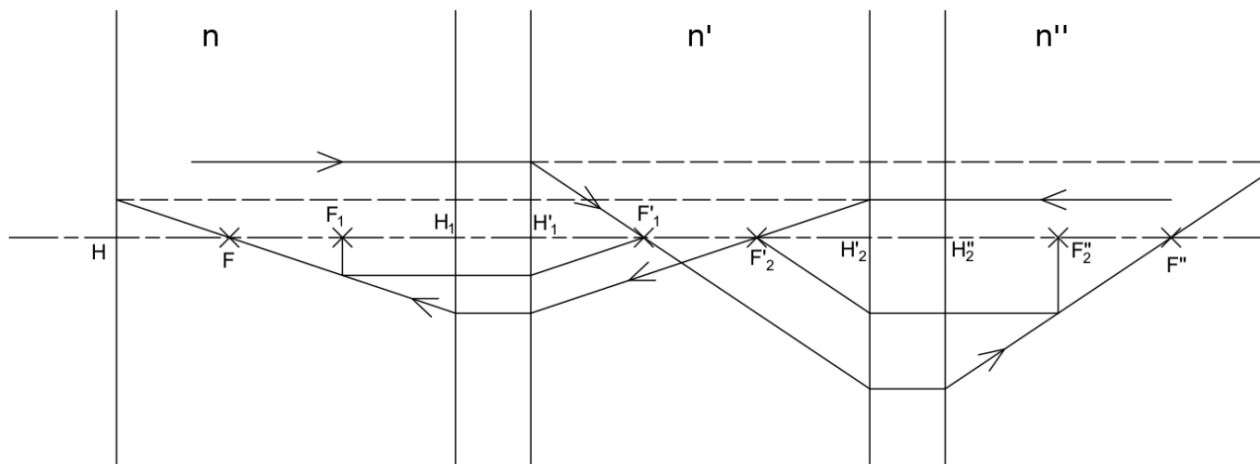
Para encontrar las distancias focales que se emplean en las ecuaciones [\(2.1\)](#) y [\(2.2\)](#), se debe trabajar con la potencia total del sistema junto con la ecuación de Gauss:

$$f = \frac{n}{P} \text{ y } f'' = \frac{n''}{P}$$

La determinación gráfica de los focos y puntos principales se realiza siguiendo un método análogo al empleado con lentes gruesas, es decir, se parte de un rayo que incide paralelo al eje y se sigue su recorrido hasta que el mismo emerge del sistema. De esta manera, la intersección del rayo entrante con el saliente, determinan la posición del plano principal, mientras que la intersección del rayo saliente con el eje óptico determina la posición del foco imagen del sistema.

Inversamente, si se parte de un rayo que emerge paralelo al eje óptico y se sigue su marcha “hacia atrás”, se puede determinar la posición del plano principal objeto a partir de la intersección de los rayos salientes y entrantes así trazados, mientras que la intersección del rayo entrante con el eje óptico determina la posición del foco objeto del sistema. De esta manera, el sistema total queda reducido a un único par de focos y puntos principales.

En la [Figura 2.4](#) se muestra una combinación de dos lentes gruesas  $LG_1$  y  $LG_2$ , cada una de las cuales se encuentra ya modelada con sus respectivos focos y puntos principales.



**Figura 2.4:** Si se tiene un par de sistemas que ya han sido modelados a partir de sus respectivos focos y puntos principales, se pueden aplicar los métodos ya conocidos para determinar los focos y puntos principales del sistema compuesto.

Una vez modelado el sistema, la determinación de imágenes, se puede hacer analítica o gráficamente con los métodos explicados en el [Capítulo 1](#). En la [Figura 2.3](#) se muestra el trazado de un objeto extenso para el sistema mostrado en la [Figura 2.4](#).

Cabe mencionar que en el ejemplo mostrado, la imagen resultante es real y directa, pese a haber sido hallada por la prolongación de rayos hacia atrás de los rayos emergentes. Para no cometer errores en la determinación de la naturaleza de la imagen en los sistemas compuestos, debe analizarse cómo va resultando la misma, lente por lente. Un criterio que puede utilizarse es el de observar si la imagen resultante queda dentro o fuera del sistema óptico real, ya que si la imagen queda dentro del mismo, ésta siempre va a ser virtual. Es por esto que es una buena práctica marcar siempre en el eje óptico la posición de los vértices físicos de las lentes gruesas y la ubicación de las lentes delgadas.

Un detalle importante que vale la pena destacar es que las expresiones [2.1](#) y [2.2](#), así como todo lo mencionado en esta sección, tiene como punto de partida la combinación de dos modelos. Por lo visto anteriormente, dicho modelo puede provenir de una lente gruesa, de una combinación de lentes delgadas, de una combinación de lentes gruesas y otros sistemas más complejos. De esta manera queda claro que cualquier sistema compuesto por un conjunto de lentes gruesas y delgadas, puede modelarse a partir de un único par de focos y puntos principales, por medio de la aplicación sucesiva de los métodos discutidos en este capítulo.





### 2.3. Resumen de Fórmulas

Nombre	Expresión	Número
Posición de los planos principales de una lente gruesa que proviene de una combinación de lentes	$\overline{H_1 H} = f \frac{d}{f'_2}$ $\overline{H''_2 H''} = -f'' \frac{d}{f'_1}$	<u>(2.1)</u>  <u>(2.2)</u>

### 2.4. Cuestiones

- 2.4.1. Analice la necesidad de cumplir la aproximación de rayos paraxiales para emplear las expresiones 1.10, 2.1 y 2.2 para determinar los puntos principales de una combinación de lentes gruesas.
- 2.4.2. Se cuentan con dos lentes delgadas positivas sumergidas en aire, con distancias focales  $f_1$  y  $f_2$ , respectivamente. Deducir la relación que debe existir entre las distancias focales de las mismas y su separación para que el sistema sea:
- convergente;
  - divergente;
  - afocal ( $f = \infty$ ).
- 2.4.3. ¿Es posible, a partir de la combinación de dos lentes divergentes, obtener un sistema afocal ( $f = \infty$ )? En caso afirmativo, determine qué condición debe cumplirse, en caso negativo justifique.
- 2.4.4. ¿Es posible, a partir de la combinación de dos lentes divergentes, obtener un sistema convergente? En caso afirmativo, determine qué condición debe cumplirse, en caso negativo justifique.



## 2.5. Ejercicios

2.6.1. Dados las siguientes combinaciones de lentes delgadas, determine, de forma analítica y gráfica:

- Potencia y distancia focal del sistema.
- Distancia de los centros de las lentes a los focos y puntos principales.

A.  $LD_1$  (equiconvexa):  $|R| = 4 \text{ cm}; n_{v1} = 1,5;$

$LD_2$  (equicóncava):  $|R| = 6 \text{ cm}; n_{v2} = 1,6$

$n = n' = 1; n'' = \frac{4}{3} \approx 1,33; d = 4 \text{ cm}$

- $f_{LD1} = 10 \text{ cm}; f_{LD2} = 20 \text{ cm}; d = 4 \text{ cm}; n = n' = n'' = 1.$
- $P_{LD1} = 10 \text{ Dp}; P_{LD2} = -10 \text{ Dp}; d = 5 \text{ cm}; n = n' = n'' = 1.$
- $f_{LD1} = -10 \text{ cm}; f_{LD2} = -20 \text{ cm}; d = 5 \text{ cm}; n = n' = n'' = 1.$
- $P_{LD1} = 5 \text{ Dp}; P_{LD2} = 10 \text{ Dp}; d = 0 \text{ cm}; n = n' = n'' = 1.$

### Respuestas:

**A. a.**  $P = 25 \text{ Dp}; f = 4 \text{ cm}; f'' = 5,33 \text{ cm}$

**b.**  $\overline{A_1H} = -2,32 \text{ cm}; \overline{A_2H''} = -5,33 \text{ cm}; \overline{A_1F} = -6,32 \text{ cm}; \overline{A_2F''} = 0 \text{ cm};$

**B. a.**  $P = 13 \text{ Dp}; f = 7,69 \text{ cm}$

**b.**  $\overline{A_1H} = 1,54 \text{ cm}; \overline{A_2H''} = -3,08 \text{ cm}; \overline{A_1F} = -6,15 \text{ cm}; \overline{A_2F''} = 4,62 \text{ cm};$

**C. a.**  $P = 5 \text{ Dp}; f = 20 \text{ cm}$

**b.**  $\overline{A_1H} = -10 \text{ cm}; \overline{A_2H''} = -10 \text{ cm}; \overline{A_1F} = -30 \text{ cm}; \overline{A_2F''} = 10 \text{ cm};$

**D. a.**  $P = -17,50 \text{ Dp}; f = -5,71 \text{ cm}$

**b.**  $\overline{A_1H} = 1,43 \text{ cm}; \overline{A_2H''} = -2,86 \text{ cm}; \overline{A_1F} = 7,14 \text{ cm}; \overline{A_2F''} = -8,57 \text{ cm};$

**E. a.**  $P = 15 \text{ Dp}; f = 6,67 \text{ cm}$

**b.**  $\overline{A_1H} = 0 \text{ cm}; \overline{A_2H''} = 0 \text{ cm}; \overline{A_1F} = -6,67 \text{ cm}; \overline{A_2F''} = 6,67 \text{ cm};$

- 2.6.2. Se tiene una lente convergente de distancia focal de 10 cm, y se sabe que un objeto tiene su imagen a 30 cm de la misma. Por otro lado, si se le adosa dicha lente otra lente divergente de distancia focal desconocida, la imagen del mismo objeto se aleja 10 cm del sistema.
- Determine analíticamente la distancia focal de la lente divergente.
  - Determine gráficamente la posición de los focos de este sistema.

**Respuestas:**  $P_2 = -0.8333 \text{ Dp}$

- 2.6.3. Se tiene una lente divergente con  $|f| = 5 \text{ cm}$ , y se sabe que la misma forma una imagen virtual de un objeto dado, y que dicha imagen se encuentra a 4 cm de la lente. Por otro lado, si se le adosa dicha lente una lente convergente de distancia focal desconocida, la imagen del mismo objeto sigue siendo virtual, pero se encuentra a  $20/3$  cm del sistema. Determine la distancia focal de la lente convergente.

**Respuestas:**  $P = 10 \text{ Dp}$

- 2.6.4. Se tiene una lente delgada de distancia focal  $f_1 = 10 \text{ cm}$  y otra lente de distancia focal  $f_2 = 20 \text{ cm}$ . Determine la separación que debe haber entre las mismas para que la imagen de un objeto que se encuentra en el infinito, también se forme en el infinito (del espacio imagen). Todo el sistema se encuentra sumergido en aire.

**Respuestas:**  $d = 30 \text{ cm}$

- 2.6.5. Se tienen dos lentes gruesas como las del ejercicio 1.5.1 del Capítulo 1 sumergidas en aire. La distancia entre el vértice final de la primera lente y el vértice inicial de la segunda lente es de 7,5 cm.
- Determine la posición de los focos y puntos principales del sistema, analítica y gráficamente.
  - Si se tiene un objeto extenso de altura 1 cm ubicado a 10 cm del primer vértice de la primera lente gruesa, determine analítica y gráficamente la posición, tamaño y naturaleza de su imagen.

**Respuestas:**

**a.**  $P = -38.40 \text{ Dp}$ ;  $f = -2.60 \text{ cm}$ ;  $\overline{H_1 H} = -8.33 \text{ cm}$ ;  $\overline{H''_2 H''} = 8.33 \text{ cm}$ ;

**b.**  $s'' = -1.377 \text{ cm}$ ;  $m = 0.471$ ;

- 2.6.6. Se tienen dos lentes plano-convexas idénticas en oposición, de modo que sus caras planas se encuentran enfrentadas. El radio de curvatura de las caras curvas es de 10 cm y



el material del que están hechas las lentes tiene un índice de refracción 1,5. Las lentes se encuentran separadas 80 cm y todo el sistema se encuentra sumergido en aire.

- Determine la posición de los focos y puntos principales del sistema, analítica y gráficamente.
- Si se tiene un objeto puntual ubicado a 20 cm del primer vértice de la primera lente gruesa, determine analítica y gráficamente la posición, tamaño y naturaleza de su imagen.

**Respuestas:**

**a.**  $P = -13.33 \text{ Dp}$ ;  $f = -7.5 \text{ cm}$ ;  $\overline{H_1 H} = -35 \text{ cm}$ ;  $\overline{H'' H''} = 35 \text{ cm}$ ;

**b.**  $s'' = -15 \text{ cm}$ ;  $m = -1$ ;

2.6.7. Se tiene un sistema conformado por dos lentes delgadas y una lente gruesa. La primera lente es delgada y tiene una potencia de -10 Dp. A 5 cm de esta lente se encuentra la segunda, que también es delgada pero tiene una potencia de -5 Dp. A 6,5 cm de la segunda lente se encuentra una lente gruesa con  $R_1 = 3 \text{ cm}$ ,  $R_2 = 5 \text{ cm}$ ,  $n_{v3} = 1.5 \text{ cm}$  y espesor de 3 cm.

- Determine la posición de los focos y puntos principales del sistema, analítica y gráficamente.
- Si se tiene un objeto extenso de altura 1 cm ubicado a 4 cm de la primera lente, determine analítica y gráficamente la posición, tamaño y naturaleza de su imagen.

**Respuestas:**

**a.**  $P = 5.38 \text{ Dp}$ ;  $f = 18.6 \text{ cm}$ ;  $\overline{H_1 H} = 13.69 \text{ cm}$ ;  $\overline{H'' H''} = 23.95 \text{ cm}$ ;

**b.**  $s'' = 23.981 \text{ cm}$ ;  $m = 7.093$ ;

2.6.8. Se tiene un sistema constituido por tres lentes delgadas. La primera tiene una distancia focal de 4 cm, y la segunda, ubicada a 6 cm de la primera, una distancia focal de -8 cm. La tercera lente tiene una distancia focal desconocida, y se encuentra a 1,4 cm de la segunda lente. Determine analítica y gráficamente cuál debe ser la distancia focal de la tercera lente, de modo tal que el sistema sea afocal ( $f = \infty$ ).

**Respuesta:**  $P = 33.333 \text{ Dp}$ ,  $f = 3 \text{ cm}$

### Capítulo 3: Espejos Gruesos

El término espejo grueso se usa para referirse a un sistema óptico que consiste en una combinación de lentes con una superficie reflectante al final. Este tipo de sistemas tiene la característica distintiva de que el rayo final siempre emerge por el mismo medio que ingresó (esto es lo que distingue a los espejos de las lentes). En este capítulo estudiaremos los casos más comunes de espejo grueso, que se ejemplifican en la [Figura 3.1](#), y son:

- I. Una lente delgada con una superficie plateada;
- II. Una lente delgada separada de un espejo simple;
- III. Una lente gruesa con una superficie plateada;
- IV. Una lente gruesa separada de un espejo simple.

Una característica que los sistemas mostrados tienen en común, es que en todos ellos el rayo de luz cuenta con una única reflexión. En los casos I, II y III se tiene que el rayo que incide sufre su reflexión entre dos refracciones que se dan en la primera superficie de la lente. En el caso IV, el rayo de luz sufre dos refracciones en la lente gruesa, luego es reflejado en el espejo simple, y después de esto sufre dos refracciones más en cada una de las caras de la lente gruesa.

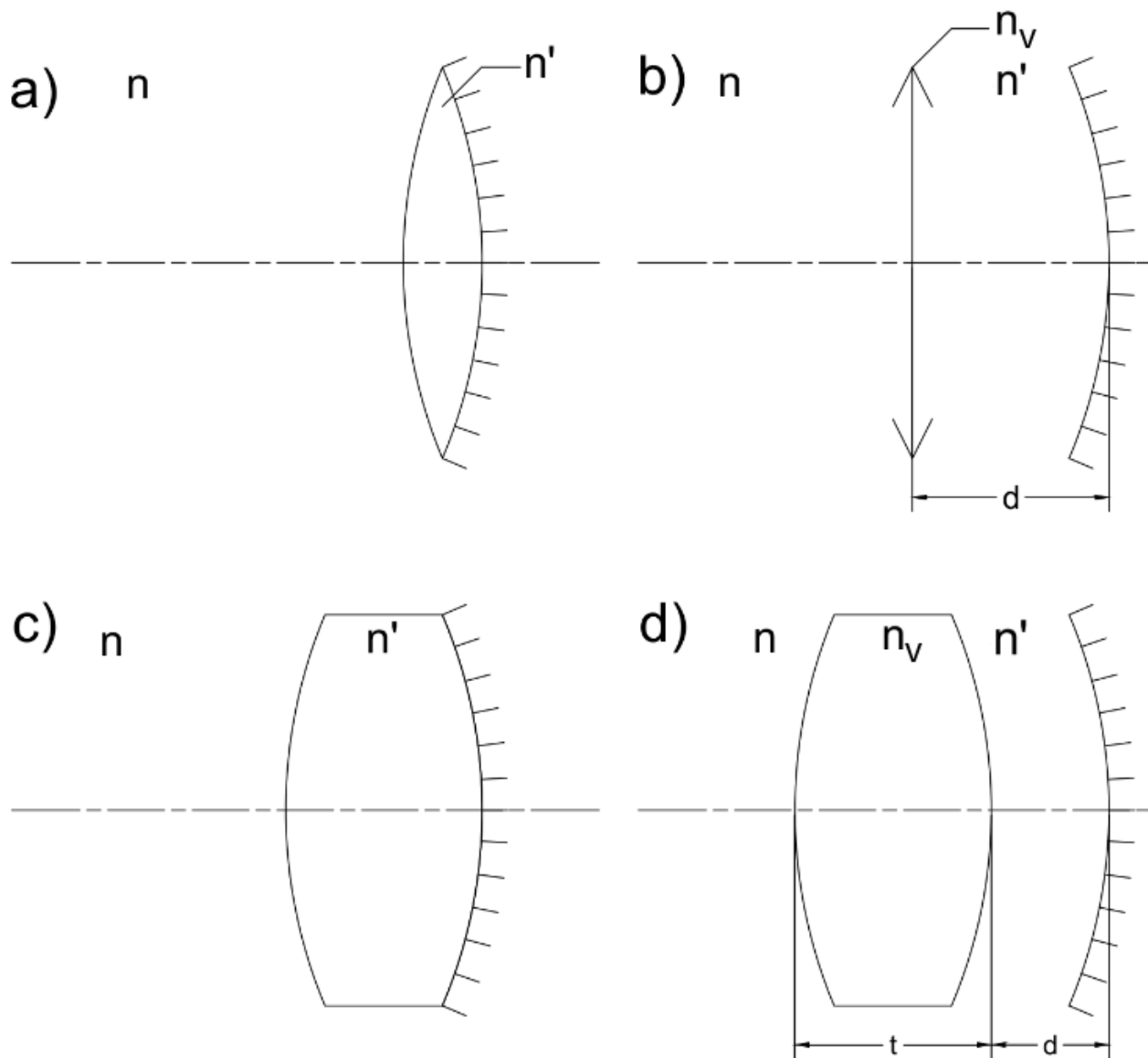
En este capítulo se verá que cualquier sistema de estas características va a contar con un punto y plano focal, así como un punto y plano principal. De esta manera, y usando métodos parecidos a los discutidos en los Capítulos [1](#) y [2](#), se podrá emplear el conjunto foco y plano principal para modelar a cualquier espejo grueso, de modo tal de poder construir imágenes que sean idénticas a las que produciría el sistema más complejo, pero con un trazado de rayos y cálculos matemáticos más sencillos.

En primer lugar se tratará el problema de encontrar expresiones que permitan determinar la posición del plano principal y foco de un espejo grueso que consista en la combinación de una lente delgada separada de un espejo simple (Caso II), que es el caso más sencillo de tratar. Posteriormente, se demostrará que las expresiones obtenidas para ese caso pueden aplicarse, con modificaciones menores, para el caso III, es decir, una lente gruesa con una cara espejada. Finalmente, se determinará la expresión más general posible, que es la del caso IV. Se verá, a su vez, que el caso I puede obtenerse como caso límite de cualquiera de las expresiones obtenidas para los casos II, III y IV.

Una vez determinadas todas las expresiones analíticas, se tratará el problema de determinar la ubicación del foco y punto principal de un espejo grueso para los cuatro casos planteados por el



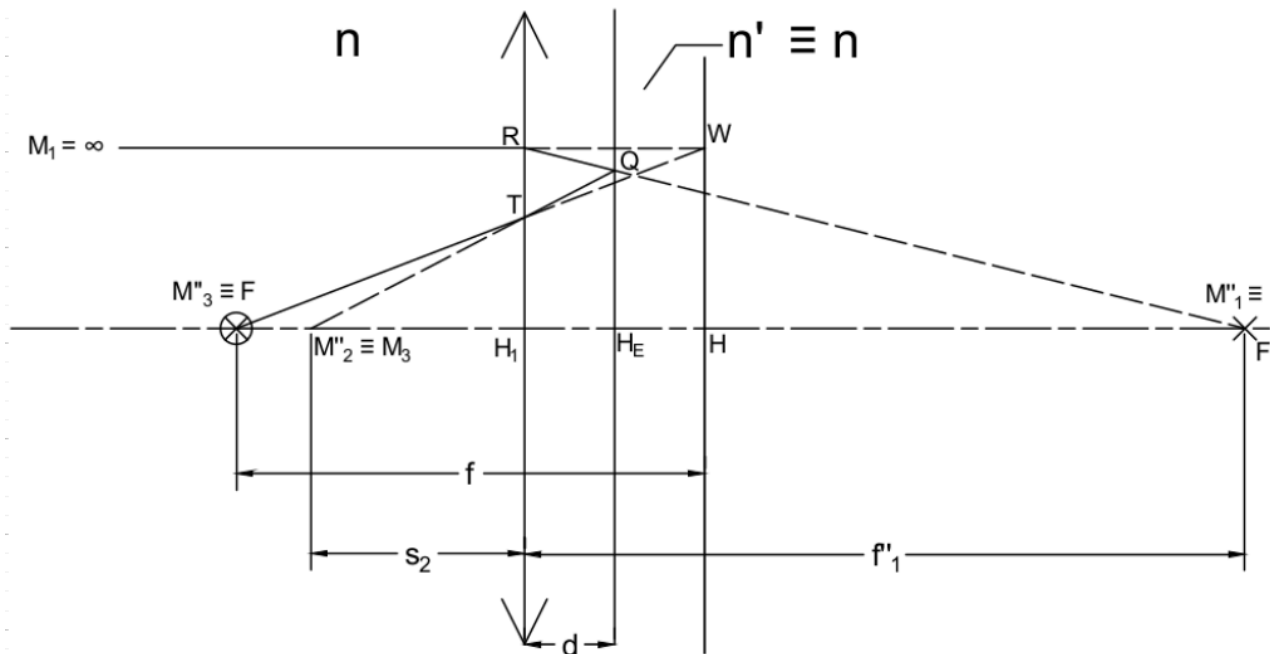
método gráfico. Finalmente, se explicará cómo determinar las imágenes formadas por un espejo grueso a partir del sistema modelo, empleando los métodos analíticos y gráficos.



**Figura 3.1:** Un espejo grueso es un sistema óptico que consiste en una lente o combinación de lentes y una superficie reflectante. En este capítulo trataremos los casos más comunes de espejos gruesos que son: a) Una lente delgada con una superficie plateada; b) Una lente delgada y un espejo simple; c) Una lente gruesa con una superficie plateada; d) Una lente gruesa con un espejo simple.

### 3.1. Determinación del foco y punto principal para el caso de una Lente Delgada separada de un Espejo Simple

Para determinar la posición del foco y punto principal de este sistema se empleará el mismo método que en el [Capítulo 1](#), es decir, se supondrá que hay un objeto  $M_1$  que se encuentra en el infinito ( $s_{M_1} = \infty$ ) y se encontrará la posición de su imagen, que por definición debe ser el foco del sistema. En la [Figura 3.2](#) se muestra la marcha del rayo que proviene desde  $M_1$  y que luego de **dos** refracciones y **una** reflexión corta al eje en el foco del espejo. A su vez, la intersección del rayo que ingresa con el rayo que egresa ocurrirá en el plano principal del sistema, por lo tanto, al trazar una perpendicular desde dicha intersección se determinará la posición del punto principal.



**Figura 3.2:** Para determinar la posición del foco y del plano principal de un espejo grueso se sigue la marcha de un rayo que ingresa paralelo al eje óptico. Por definición de foco, el punto de intersección del rayo saliente con el eje será el foco del sistema. De manera análoga a lo planteado en el [Capítulo 1](#), el plano principal del espejo estará determinado por la intersección del rayo entrante con el rayo saliente.

Supóngase una lente delgada, hecha de un material de índice de refracción  $n'$ , ubicada a una distancia  $d$  de un espejo simple, con todo el sistema sumergido en aire, esto es,  $n = n'' = 1$ <sup>12</sup>. En la [Figura 3.2](#) se ha notado a la posición de la lente delgada como  $H_1$ , y a la posición del espejo simple como  $H_E$ , y por simplicidad en el dibujo, se lo ha representado por su plano tangente<sup>13</sup>.

<sup>12</sup> El caso en que  $n \neq n''$  se determinará en la sección siguiente.

<sup>13</sup> En este capítulo,  $H_1$  siempre indicará el lugar en donde ocurre la primer refracción, mientras que  $H_E$  indica el punto donde ocurre la reflexión de los rayos.



Al considerar que el objeto  $M_1$  se encuentra en infinito, se tiene que después de la primer refracción en la lente delgada, su imagen deberá encontrarse en el foco imagen de la misma, esto es,  $s''_1 = f''_1$ , y su imagen  $M''_1$  será el objeto  $M_2$  respecto al espejo, cuya imagen será  $M''_2$ . Desde luego,  $M_2$  y  $M''_2$  estarán vinculados por la [Ec. de Gauss](#) aplicada a los espejos, es decir:

$$-\frac{1}{f''_1-d} + \frac{1}{s_2+d} = P_2 \quad (3.1)$$

donde  $P_2$  es la potencia del espejo simple, dada por la [Ec. 0.4](#), y las distancias objeto e imagen se han obtenido de la [Figura 3.2](#). La distancia focal imagen de la lente delgada  $f''_1$  se considera dato, o puede obtenerse a partir de la [Ec. 0.3](#).

Finalmente, la imagen  $M''_2$  pasa a ser el objeto  $M_3$  de la segunda refracción que ocurre en la lente delgada, cuya imagen será  $M''_3$ , que estará ubicada en el foco del sistema óptico. Aplicando la [Ec. de Gauss](#) para la lente delgada se obtiene que

$$-\frac{1}{s_2} + \frac{1}{FH_1} = P_1 \quad (3.2)$$

siendo  $P_1$  la potencia de la lente delgada, dada por la [Ec. 0.3](#).

El objetivo de la primera parte de la demostración será poder escribir la distancia focal del espejo grueso, el segmento  $\overline{FH}$ , en función de las magnitudes constructivas del sistema, es decir,  $P_1$ ,  $P_2$ , y  $d$ . Nótese que de momento sólo se dispone de  $\overline{FH}_1$  en función de potencia de la lente  $P_1$  y de la cantidad  $s_2$ , cuyo valor depende de la altura del rayo particular que haya trazado en esta construcción. De esto se concluye que para poder avanzar es preciso eliminar el término  $s_2$  de las Ecs. [3.1](#) y [3.2](#). Para lograr esto, primero se despeja  $s_2$  de la [Ec. 3.1](#):

$$-\frac{1}{f''_1-d} + \frac{1}{s_2+d} = P_2$$

$$\frac{1}{s_2+d} = P_2 + \frac{1}{f''_1-d} = P_2 + \frac{1}{\frac{1}{P_1}-d}$$

$$\frac{1}{s_2+d} = P_2 + \frac{P_1}{1-d \cdot P_1}$$
$$\frac{1}{s_2+d} = \frac{P_1+P_2-d \cdot P_1 \cdot P_2}{1-d \cdot P_1} \quad (3.3)$$

Tomando el recíproco a ambos miembros es posible completar el despeje de  $s_2$ :

$$s_2 + d = \frac{1-d \cdot P_1}{P_1+P_2-d \cdot P_1 \cdot P_2}$$
$$s_2 = \frac{1-d \cdot P_1}{P_1+P_2-d \cdot P_1 \cdot P_2} - d$$
$$s_2 = \frac{1-2 \cdot d \cdot P_1-d \cdot P_2+d^2 \cdot P_1 \cdot P_2}{P_1+P_2-d \cdot P_1 \cdot P_2} \quad (3.4)$$

El siguiente paso es utilizar el valor de  $s_2$  obtenido en la [Ec. 3.4](#) para reemplazarlo en la [Ec. 3.2](#), de modo de poder expresar  $\overline{FH}_1$  sólo como función de las potencias  $P_1$  y  $P_2$ , y de la distancia  $d$  entre la lente y el espejo:

$$\frac{1}{\overline{FH}_1} = P_1 + \frac{1}{s_2}$$
$$\frac{1}{\overline{FH}_1} = P_1 + \frac{P_1+P_2-d \cdot P_1 \cdot P_2}{1-2 \cdot d \cdot P_1-d \cdot P_2+d^2 \cdot P_1 \cdot P_2}$$

Operando un poco se llega a la siguiente expresión intermedia:

$$\overline{FH}_1 = \frac{1-2 \cdot d \cdot P_1-d \cdot P_2+d^2 \cdot P_1 \cdot P_2}{(1-d \cdot P_1) \cdot (2 \cdot P_1+P_2-d \cdot P_1 \cdot P_2)} \quad (3.5)$$

En este punto, es conveniente detenerse a analizar qué es lo que se ha hecho hasta el momento. La [Ec. 3.5](#) es una expresión que permite ubicar el foco del espejo grueso respecto del punto donde ocurre la primer refracción ( $H_1$ ), y dicha magnitud se encuentra escrita en función de



parámetros que sólo dependen del sistema óptico en cuestión, es decir, la potencia de la lente delgada  $P_1$ , la potencia del espejo simple  $P_2$  y la separación  $d$  entre ambos.

Es importante recordar que la distancia focal del sistema es el segmento  $\overline{FH}$ , y no el segmento  $\overline{FH_1}$  obtenido en la [Ecuación 3.5](#). Tampoco se ha determinado hasta el momento la ubicación del punto principal  $H$  del espejo grueso en función de los parámetros del sistema. Véase, no obstante, que es posible encontrar la información faltante si se logra determinar el valor del segmento  $\overline{H_1H}$  en función de  $P_1$ ,  $P_2$  y  $d$ . Para lograr tal fin es preciso volver a la [Figura 3.2](#) y buscar, a partir de triángulos semejantes, expresar, a través de identidades geométricas, la magnitud del segmento  $\overline{H_1H}$  en función de los valores de interés.

En primer lugar debe notarse que el triángulo  $\Delta(TRW)$  contiene la distancia buscada, ya que  $\overline{RW} = \overline{H_1H}$ , y que dicho triángulo es semejante al triángulo  $\Delta(TH_1F)$ , por lo que es válida la siguiente relación entre sus lados<sup>14</sup>:

$$\frac{\overline{TH_1}}{\overline{FH_1}} = \frac{\overline{TR}}{\overline{H_1H}} \quad (3.6)$$

Dado que las magnitudes  $\overline{TH_1}$  y  $\overline{TR}$  dependen del trazado de rayos que se realizó, no son función del sistema óptico, por lo que para completar la demostración es preciso eliminarlos de la [Ecuación 3.6](#), lo que implica que es necesario encontrar dos ecuaciones más.

La primera de tales ecuaciones se obtiene al observar que entre los triángulos  $\Delta(QH_E M_2)$  y  $\Delta(TH_1 M_2)$  también hay una relación de semejanza, por lo que:

$$\frac{\overline{QH_E}}{s_2+d} = \frac{\overline{TH_1}}{s_2} \quad (3.7)$$

<sup>14</sup> Nótese que en realidad las figuras con las que se trabajan en esta parte de la demostración son triángulos en la medida en que las superficies refractantes y reflectantes puedan aproximarse por sus respectivos planos tangentes, es decir, que la expresión que se obtendrá será solamente válida dentro de la aproximación de rayos paraxiales. Vale la pena mencionar que en esta demostración, se ha suscrito a dicha aproximación en el momento en que se decidió emplear la Ec. de Gauss para encontrar la imagen de  $M$ .

La segunda de las ecuaciones deseadas se consigue al comparar los triángulos  $\Delta(RH_1F'_1)$  y  $\Delta(QH_2F_1)$ , que también son semejantes, por lo tanto:

$$\frac{\overline{TR} + \overline{TH}_1}{f'_1} = \frac{\overline{QH}_E}{f'_1 - d} \quad (3.8)$$

Con las Ecuaciones 3.6, 3.7 y 3.8 ya es posible obtener  $\overline{H_1H}$  en función de los parámetros del sistema, para lo cual primero se debe eliminar  $\overline{QH}_E$  de 3.7 y 3.8:

$$\left(\overline{TR} + \overline{TH}_1\right) \cdot \frac{f'_1 - d}{f'_1} = \frac{s_2 + d}{s_2} \cdot \overline{TH}_1, \quad (3.9)$$

para luego utilizar la Ec. 3.6 para eliminar  $\overline{TR}$  de la Ec. 3.9:

$$\left(\frac{\overline{H_1H}}{\overline{FH}_1} \cdot \overline{TH}_1 + \overline{TH}_1\right) \cdot \frac{f'_1 - d}{f'_1} = \frac{s_2 + d}{s_2} \cdot \overline{TH}_1. \quad (3.10)$$

A continuación se debe despejar  $\overline{H_1H}$  de la Ec. (3.10):

$$\overline{H_1H} = \left(\frac{s_2 + d}{s_2} \cdot \frac{1}{1 - d \cdot P_1}\right) \cdot \overline{FH}_1 \quad (3.11)$$

El paso final para obtener  $\overline{H_1H}$  en función de los parámetros del sistema es reemplazar los valores a la derecha de la igualdad 3.11 por las expresiones conocidas 3.3, 3.4 y 3.5. Luego de operar y simplificar, obtendremos la primera de las expresiones buscadas:

$$\overline{H_1H} = \frac{d}{1 - d \cdot P_1}, \quad (3.12)$$

que permite a su vez determinar la distancia focal y potencia del espejo grueso:

$$f = \overline{FH} = \overline{FH}_1 + \overline{H_1H} = \frac{1 - 2 \cdot d \cdot P_1 - d \cdot P_2 + d^2 \cdot P_1 \cdot P_2}{(1 - d \cdot P_1) \cdot (2 \cdot P_1 + P_2 - d \cdot P_1 \cdot P_2)} + \frac{d}{1 - d \cdot P_1}$$

$$f = \frac{1}{(1 - d \cdot P_1) \cdot (2 \cdot P_1 + P_2 - d \cdot P_1 \cdot P_2)}$$



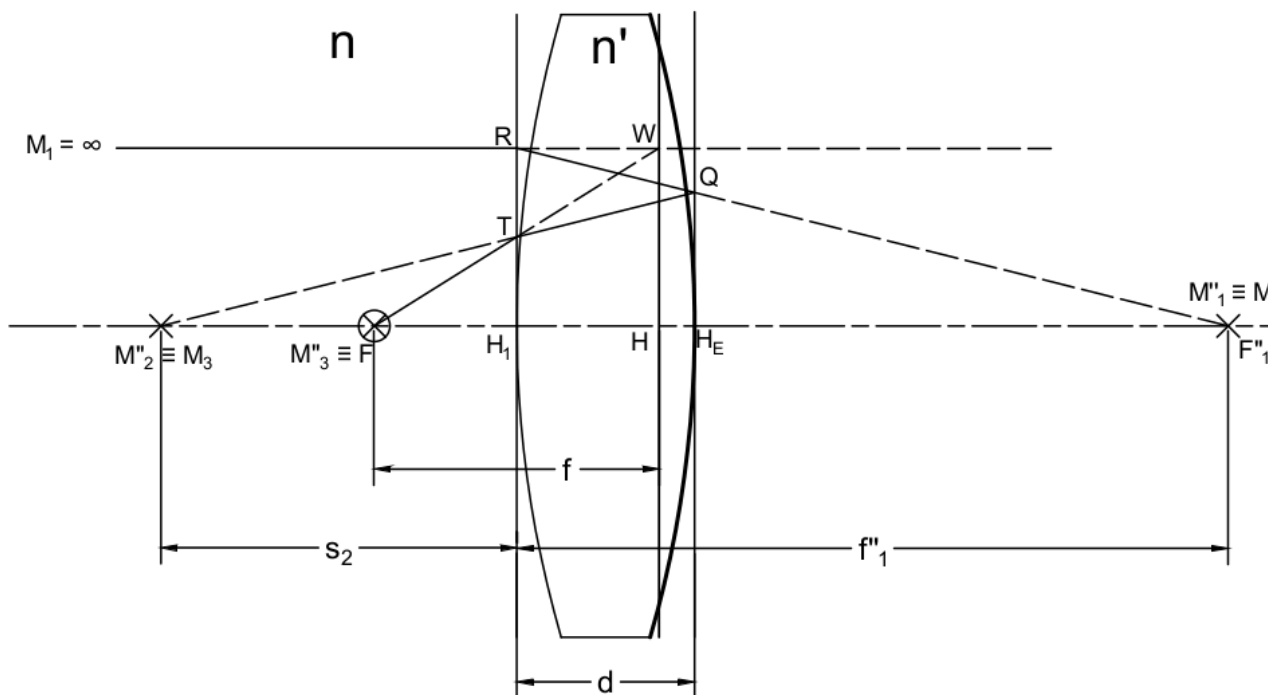
$$P = (1 - d \cdot P_1) \cdot (2 \cdot P_1 + P_2 - d \cdot P_1 \cdot P_2) \quad (3.13)$$

que es la otra expresión buscada.

Nótese que la posición del punto principal de un espejo grueso no depende de la potencia del espejo o superficie plateada del sistema, y que dicha posición está determinada solamente por la potencia de la lente delgada y la separación entre la lente y el espejo.

### 3.2. Determinación del foco y punto principal para el caso de una Lente Gruesa con una Superficie Plateada

Cuando se tiene una lente gruesa con una superficie plateada, el procedimiento para determinar la posición del foco y punto principal es idéntico al realizado en la [Sección 3.1](#). La diferencia está en la forma en la que se obtiene la posición de los focos de la superficie refractante, y en que hay que tener en cuenta que a ambos lados de dicha superficie va a haber medios distintos.



**Figura 3.3:** Para determinar la posición del foco y el punto principal de un espejo grueso constituido por una lente gruesa con una cara espejada, se sigue el mismo procedimiento que el empleado para realizar la determinación análoga del sistema compuesto por una lente delgada separada de un espejo simple, teniendo en cuenta que la primera refracción y la reflexión ocurren en un medio diferente del que provienen los rayos.

En la [Figura 3.3](#) se muestra el trazado de un rayo que incide paralelo al eje de un sistema óptico que consiste en una lente gruesa de espesor  $d$  e índice de refracción  $n'$ , con una cara espejada al final. La presencia de la segunda cara espejada se ha representado haciendo más gruesa la línea que representa la segunda cara de la lente espejada.

Puede verse que el recorrido del rayo es muy similar al de la [Figura 3.2](#). Si se plantean las ecuaciones de Gauss sucesivamente para un objeto  $M_1$  que se encuentra en infinito ( $s_{M1} = \infty$ ), se obtienen expresiones que guardan cierta similitud con las Ecs. [3.1](#) y [3.2](#):

$$-\frac{n'}{f''_1 - d} + \frac{n'}{s_2 + d} = P_2 \quad (3.14)$$

$$-\frac{n'}{s_2} + \frac{1}{FH_1} = P_1 \quad (3.15)$$

siendo en este caso  $P_2$  la potencia de la cara espejada, dada por la [Ec. 0.4](#), y  $P_1$  la potencia de la dioptra, dada por la [Ec. 0.2](#). Operando con las Ecs. [3.14](#) y [3.15](#) es posible escribirlas de una manera interesante:

$$-\frac{1}{\frac{f''_1 - d}{n'} - \frac{d}{n'}} + \frac{1}{\frac{s_2}{n'} + \frac{d}{n'}} = P_2 \quad (3.16)$$

$$-\frac{1}{\frac{s_2}{n'}} + \frac{1}{FH_1} = P_1 \quad (3.17)$$

Es interesante observar que si se hacen las sustituciones  $s_2^* = \frac{s_2}{n'}$ ,  $C = \frac{d}{n'}$  y  $P_1 = \frac{n'}{f'_1}$  las Ecs.

[3.16](#) y [3.17](#) se escriben como:

$$-\frac{1}{\frac{1}{P_1} - C} + \frac{1}{s_2^* + C} = P_2 \quad (3.18)$$

$$-\frac{1}{s_2^*} + \frac{1}{FH_1} = P_1 \quad (3.19)$$

que son expresiones idénticas a las Ecs. [3.1](#) y [3.2](#). Adicionalmente, la relación que hay entre los triángulos de la [Figura 3.2](#) es la misma que la que existe para los triángulos del mismo nombre de la [Figura 3.3](#), respetando las sustituciones hechas más arriba. Esto significa que los pasos para



encontrar la ubicación del plano principal y la potencia de un espejo grueso formado por una lente gruesa con una cara espejada son los mismos que los hechos en la [Sección 3.2](#), mientras se respeten las equivalencias hechas al escribir las Ecs. [3.18](#) y [3.19](#). Podemos concluir entonces que la ubicación del plano principal y la potencia de un espejo grueso formado por una lente gruesa con una cara espejada son:

$$\overline{H_1 H} = \frac{C}{1 - C \cdot P_1} \quad \text{con } C = \frac{d}{n'}, \quad (3.20)$$

y

$$P = (1 - C \cdot P_1) \cdot (2 \cdot P_1 + P_2 - C \cdot P_1 \cdot P_2) \quad \text{con } C = \frac{d}{n'} \quad (3.21)$$

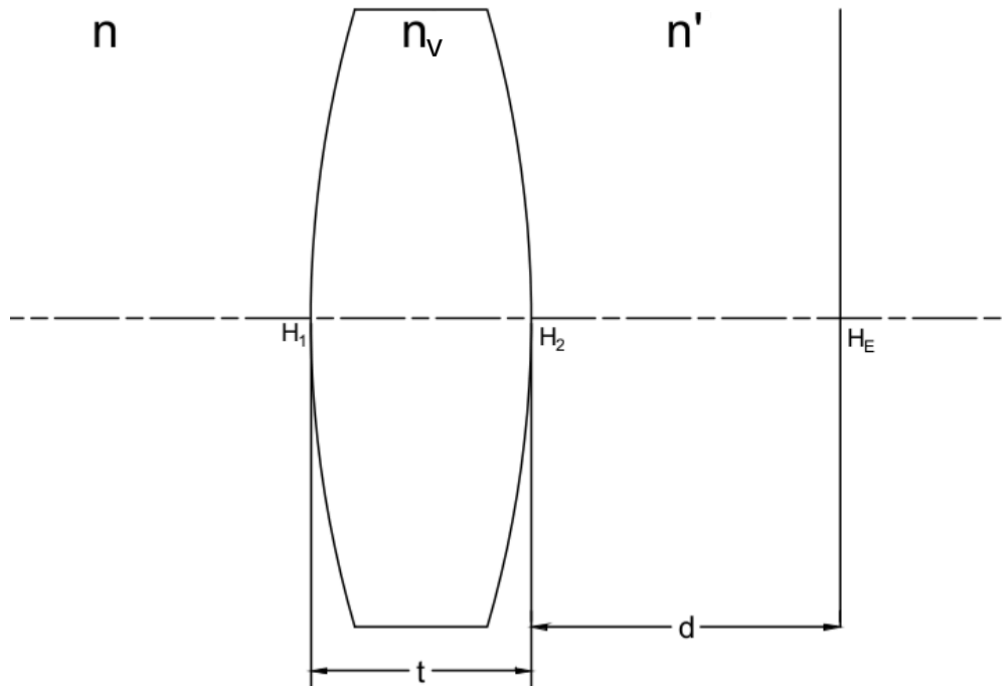
Por otro lado, vale la pena mencionar que como las expresiones [3.20](#) y [3.21](#) involucran las potencias de las componentes del espejo grueso, las mismas también se pueden aplicar a un sistema constituido por una lente delgada y un espejo simple, cuando entre la lente delgada y el espejo hay un medio de índice de refracción  $n'$ . Es más, puede verse que las ecuaciones [3.20](#) y [3.21](#) se reducen a las Ecs. [3.12](#) y [3.13](#) cuando se hace  $n' = 1$ .

Se deja como ejercicio para quien lee determinar cuál es la expresión que permite ubicar la posición del foco y punto principal de un espejo grueso constituido por una lente delgada con una cara espejada, para lo cual simplemente debe hacerse  $d = 0$  en las Ecs. [3.20](#) y [3.21](#).

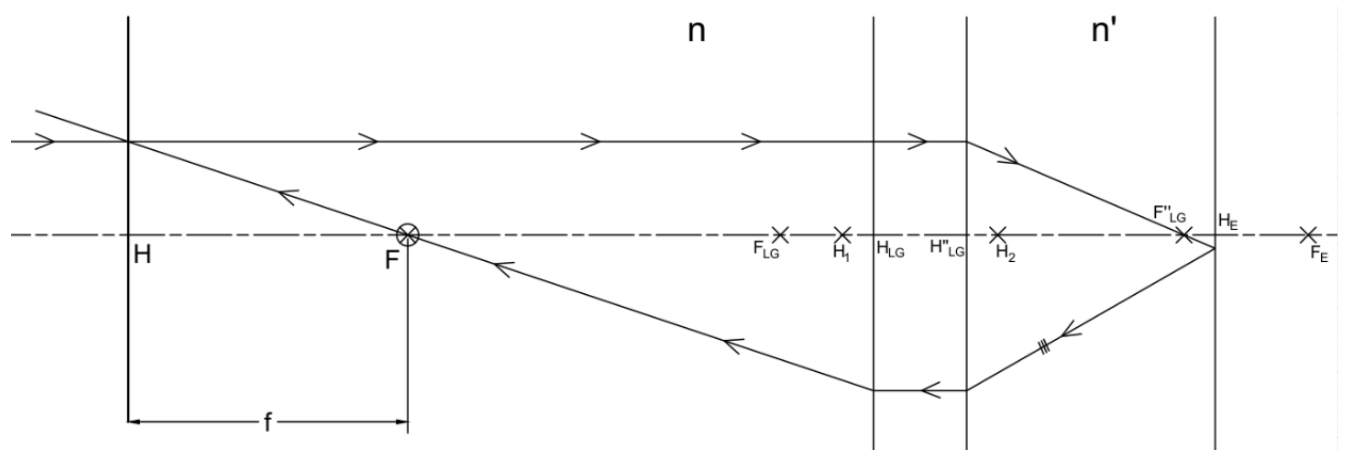
### 3.3. Determinación del foco y punto principal para el caso de una Lente Gruesa separada de un Espejo Simple

El caso más general de espejo grueso que puede obtenerse es el de una lente gruesa hecha de un material de índice de refracción  $n'$  y de espesor  $t$  que se encuentra separada a una distancia  $d$  de una superficie espejada, como se muestra en la [Figura 3.4](#).

Para trabajar con este sistema, primeramente debe reemplazarse la lente gruesa por sus respectivos focos y puntos principales, tal como se muestra en la [Figura 3.5](#). Una vez modelizada la lente gruesa se procede como en las secciones anteriores, siguiendo la marcha de un rayo que proviene de un objeto que se encuentra en infinito, realizando en el modelo de la lente gruesa el trazado de rayos explicado en la [Sección 1.1.3](#). Al igual que en las secciones anteriores, la intersección del rayo saliente con el entrante determinará la posición del plano principal, y la intersección del rayo saliente con el eje del sistema determinará la posición del foco.



**Figura 3.4:** El caso más general de espejo grueso que puede tenerse es el de una lente gruesa separada de un espejo simple. Para trabajar con tal sistema se debe, en primer lugar, reducir la lente gruesa a su correspondiente modelo empleando sus focos y puntos principales.



**Figura 3.5:** Una vez modelada la lente gruesa, la determinación del foco y punto principal de un espejo grueso se hace realizando el procedimiento empleado en los casos anteriores.



Aunque la demostración es un tanto más engorrosa que las anteriores, se puede demostrar que la posición del plano principal y la potencia de este sistema valen:

$$\overline{H_1 H} = \overline{H_1 H_{LG}} + \frac{C + C'}{1 - (C + C') \cdot P_{LG}}, \quad (3.22)$$

y

$$P = [1 - (C + C') \cdot P_{LG}] \cdot [2 \cdot P_{LG} + P_E - (C + C') \cdot P_{LG} \cdot P_E] \quad (3.23)$$

Los valores  $C$  y  $C'$  se calculan a partir de las siguientes expresiones:

$$C = \frac{d}{n'} \quad C' = \frac{\overline{H'_{LG} H_2}}{n'} \quad (3.24)$$

El resto de los términos de las Ecs 3.22 y 3.23 son los que corresponden a la [modelización de una lente gruesa](#), pero se incluyen aquí por completitud:

$$\overline{H_1 H_{LG}} = f_{LG} \frac{t}{f_2^v} \quad \overline{H'_{LG} H_2} = f'_{LG} \frac{t}{f_1^v} \quad (3.25)$$

$$P_{LG} = P_1 + P_2 - \frac{t}{n^v} \cdot P_1 \cdot P_2 \quad P_E = -\frac{2 \cdot n'}{R_E} \quad (3.26)$$

Los subíndices 1 y 2 se refieren a la primera y segunda superficie de la lente gruesa, respectivamente, mientras que el subíndice E corresponde al espejo simple.

Un detalle importante, es que como las Ecs 3.22 y 3.23 emplean expresiones que corresponden al modelo de una lente gruesa, dichas fórmulas también se pueden usar en caso de que se tenga una combinación de lentes de cualquier tipo separada de un espejo, modificándose solamente las expresiones 3.24, 3.25 y 3.26 de acuerdo a la naturaleza de la combinación de lentes con la que se esté trabajando.

Se deja como ejercicio para el lector verificar que las expresiones 3.22 y 3.23 se reducen a las expresiones 3.20 y 3.21 cuando la separación entre la lente gruesa y el espejo se hace nula, o cuando la lente gruesa se convierte en una lente delgada.

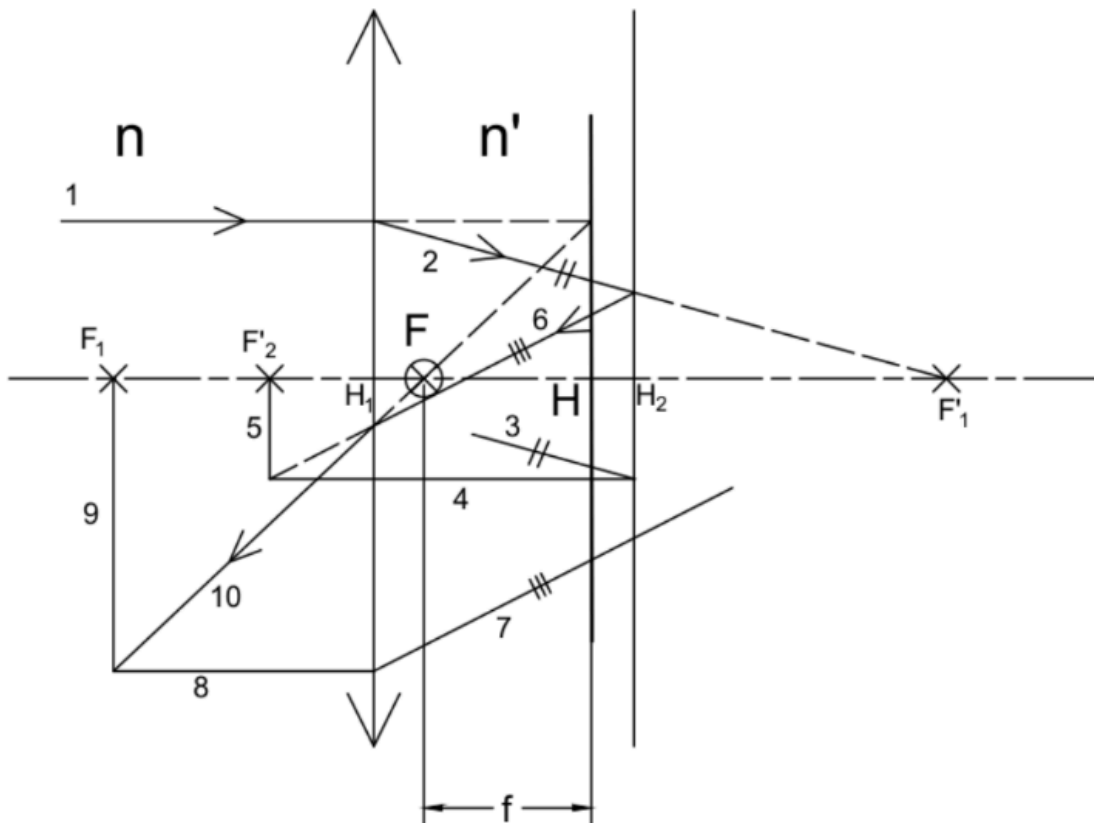
### 3.4. Métodos gráficos

En esta sección se discuten más detalladamente los métodos gráficos que pueden emplearse para determinar la posición del foco y punto principal de un espejo grueso, en cada uno de los casos tratados en el capítulo. En esencia, todos involucran el seguimiento de la marcha de un

rayo que ingresa paralelamente al eje del sistema, de modo tal que la dirección de salida de dicho rayo permita definir la posición de los puntos cardinales del sistema.

### 3.4.1. Lente Delgada con un Espejo Simple

Cuando se tiene una lente delgada separada de un espejo simple, primero se deben ubicar los focos de cada uno de los elementos del sistema, como se muestra en la [Figura 3.6](#). Una vez hecho esto, se traza un rayo 1 que incide paralelo al eje del sistema. Dicho rayo, luego de pasar por la lente, será desviado hacia el foco  $F'_1$  de la misma (rayo 2). Como el rayo 2 no es de marcha conocida, se requiere emplear el método del rayo auxiliar explicado en la sección 0.3, que implica el trazado de los rayos 3 y 4. La intersección del rayo 4 con el plano focal del espejo (línea 5) determina la dirección de salida del rayo 6.

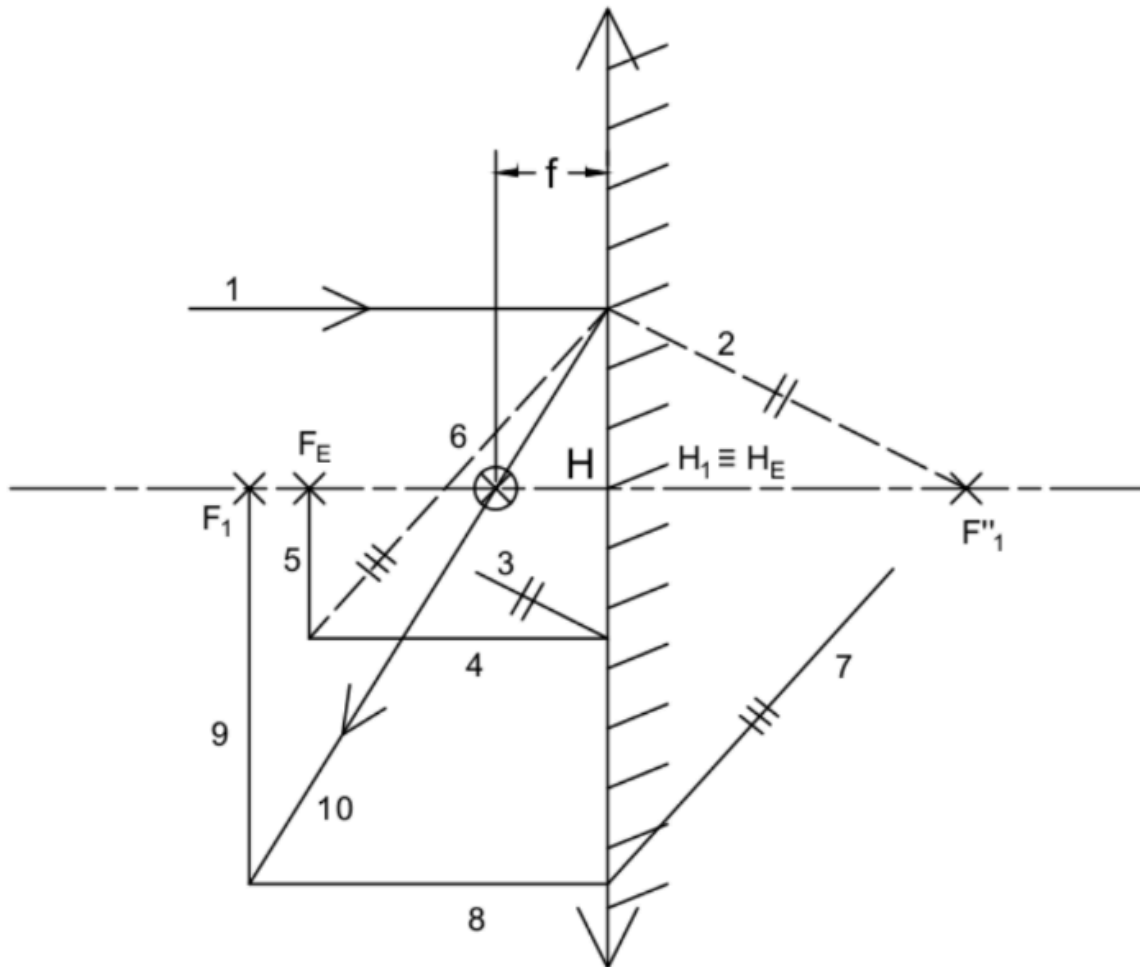


**Figura 3.6** La determinación gráfica del foco y punto principal de un espejo grueso constituido por una lente delgada separada de un espejo simple se hace siguiendo la marcha de un rayo que incide paralelo al eje, se desvía en la lente delgada, luego es reflejado en el espejo, para luego ser desviado nuevamente en la lente delgada. De los tres desvíos, los últimos dos deben determinarse empleando un rayo auxiliar.



Como el rayo 6 también incide de manera oblicua a la lente delgada, también debe emplearse el método del rayo auxiliar para determinar su dirección de salida. Esto se hace con los rayos 7 y 8, que junto con el plano focal indicado con la línea 9 determinan la dirección de salida del rayo 10.

Finalmente, para determinar la posición del plano principal del sistema, se deben prolongar el rayo incidente 1 y el rayo emergente 10 hasta que se intersequen, mientras que la intersección del rayo 10 con el eje óptico del sistema determinará la posición del foco del espejo grueso.



**Figura 3.7** Cuando se tiene una lente delgada adosada a un espejo, el procedimiento para determinar gráficamente la posición del foco y punto principal del sistema es idéntica al caso de la lente delgada separada del espejo. Debe tenerse en cuenta, sin embargo, que en este caso, el primer rayo desviado y el rayo reflejado carecen de espacio para desarrollarse, por lo que se deben trazar en su totalidad con líneas de prolongación.

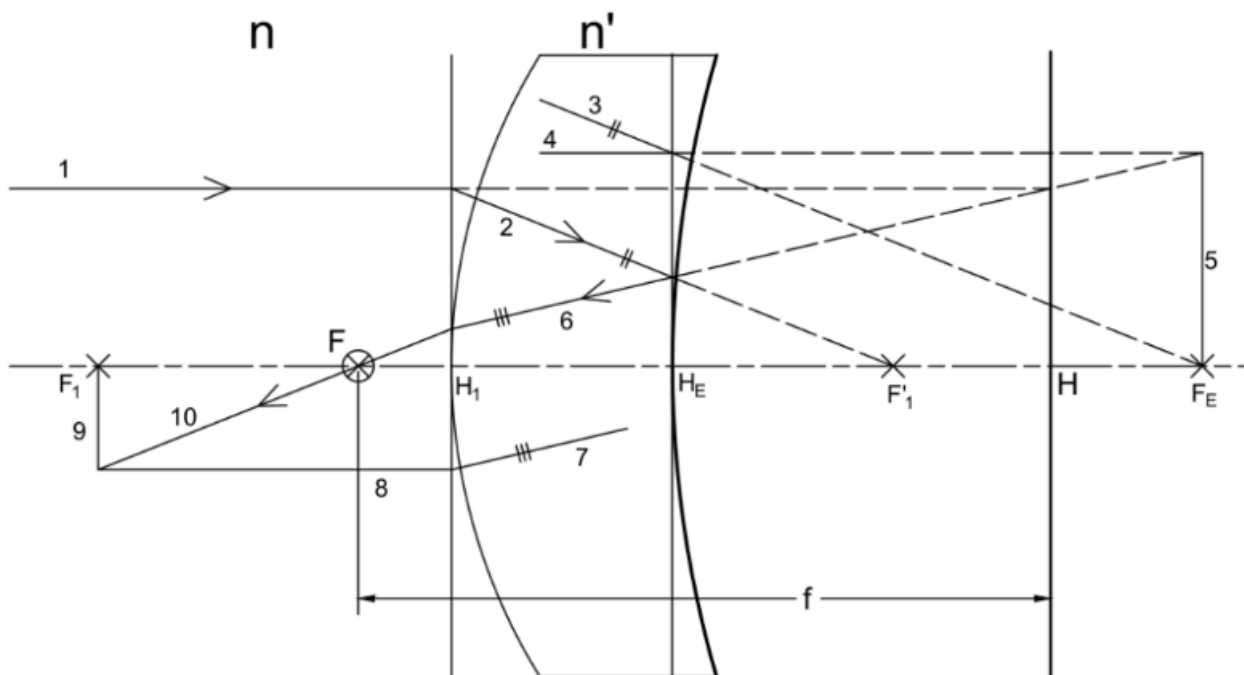
Un caso particular de una lente delgada con un espejo simple se da cuando el espejo se encuentra adosado a la lente, esto es, la distancia lente-espejo es nula, como se muestra en la [Figura 3.7](#). En este caso el procedimiento para determinar el foco y punto principal del sistema es idéntico al desarrollado anteriormente, con algunas salvedades.

En primer lugar para ubicar el foco imagen de la lente delgada y del espejo plano debe suponerse que entre ambos existe una capa de espesor cero de un material con el mismo índice de refracción que el del material de donde provienen los rayos. En segundo lugar, y una vez ubicados todos los focos, debe realizarse el mismo procedimiento explicado anteriormente, sólo teniendo en cuenta que los rayos intermedios, rayos 2 y 6, no se desarrollan, por lo que se dibujan completamente con líneas de prolongación.

Un hecho notable de esta situación, es que debido a que los rayos 2 y 6 no se desarrollan el plano principal del espejo grueso siempre coincide con el punto donde se encuentra ubicada la lente delgada.

### 3.4.2. Lente Gruesa con una Superficie Plateada

El trazado de rayos para el caso de una lente gruesa con una superficie plateada es similar al tratado en la sección anterior, y se muestra en la [Figura 3.8](#).



**Figura 3.8** La determinación gráfica del foco y punto principal de un espejo grueso constituido por una lente gruesa con una superficie espejada se hace siguiendo la marcha de un rayo que incide paralelo al eje, se desvía en la primer dioptra, luego es reflejado en el espejo, para luego ser desviado nuevamente en la dioptra por la que ingresó el rayo. De los tres desvíos, los últimos dos deben determinarse empleando un rayo auxiliar.



La particularidad de este caso se encuentra en que como se cuenta con una lente gruesa, el medio del que provienen los rayos siempre va a ser diferente al medio en que se encuentra el espejo, por lo que debe tenerse en cuenta este hecho a la hora de ubicar el foco imagen de la primera superficie y del espejo que se encuentra adosado a la lente. Por lo demás el trazado sigue los mismos pasos que los utilizados para encontrar el foco y punto principal de una lente delgada separada de un espejo.

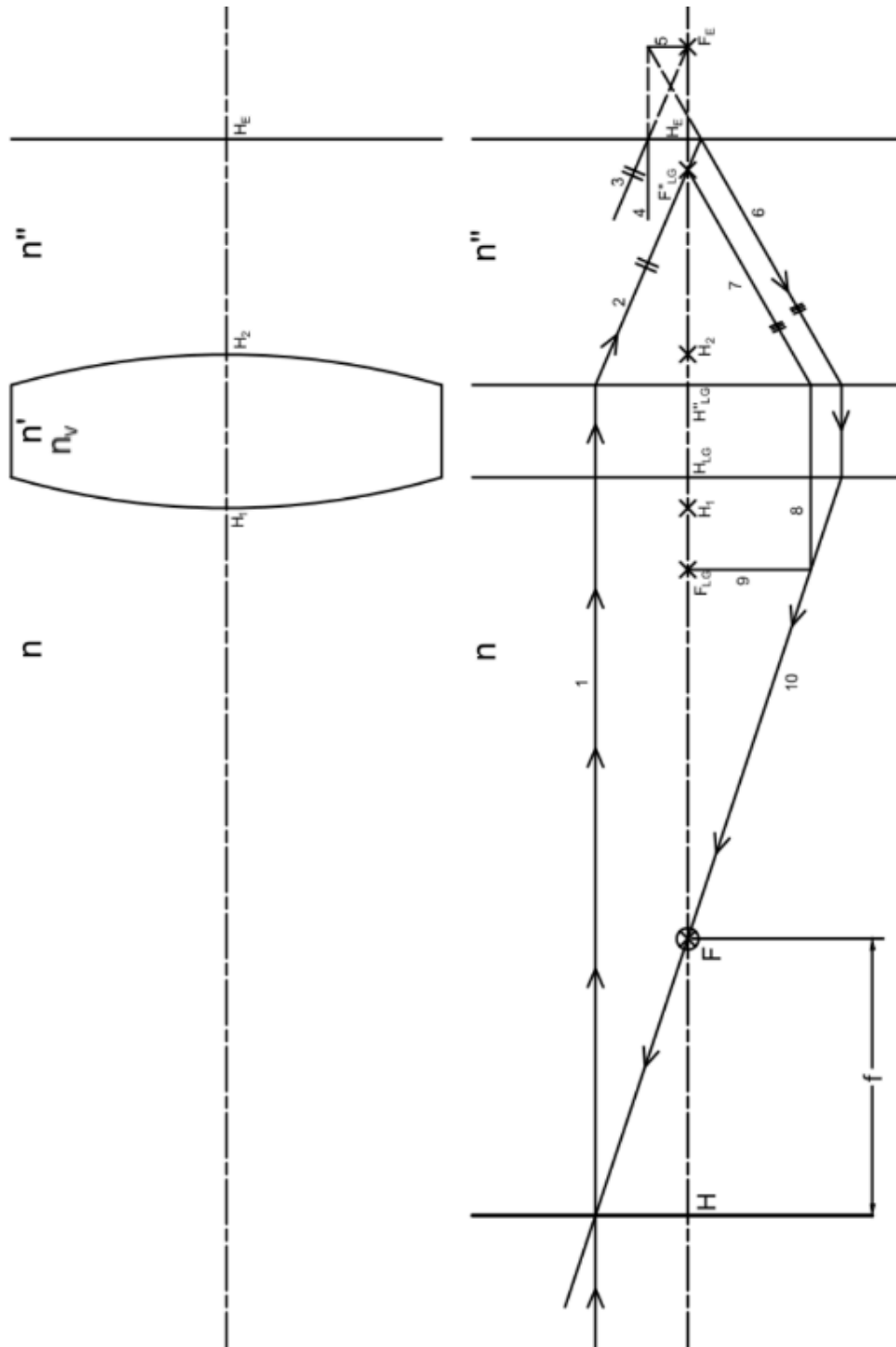
En caso de que una de las caras de la lente gruesa sea plana, para seguir la marcha de los rayos se debe emplear el método del rayo oblicuo con diagrama auxiliar, también detallado en la sección 0.3.

### **3.4.3. Lente Gruesa con un Espejo Simple**

El caso de la determinación de la posición del foco y punto principal de una gruesa separada de un espejo simple, puede realizarse de dos maneras diferentes.

Una de ellas, que se encuentra ejemplificada en la [Figura 3.9](#) consiste en reemplazar la lente gruesa por el sistema modelado, empleando cualquiera de los métodos descritos en el [Capítulo 1](#). Una vez ubicados los puntos principales y focos de la lente gruesa se realiza un nuevo esquema con estos puntos, dejando como referencia la posición de los vértices de la lente.

El trazado inicia con el rayo 1, paralelo al eje del sistema, que luego de pasar por la lente se dirige hacia el foco del sistema modelo (rayo 2). Dicho rayo incide oblicuamente al espejo, por lo que para continuar su trazado debe aplicarse el método del rayo auxiliar en el espejo (rayos 3 y 4, y línea 5). De esta manera se conocerá la marcha del rayo reflejado (rayo 6), que también incide oblicuamente en el segundo plano principal de la lente gruesa. En esta situación se vuelve a emplear un rayo auxiliar 7 que determinará la salida del rayo 10, que a su vez permitirá ubicar al foco y punto principal del espejo grueso.



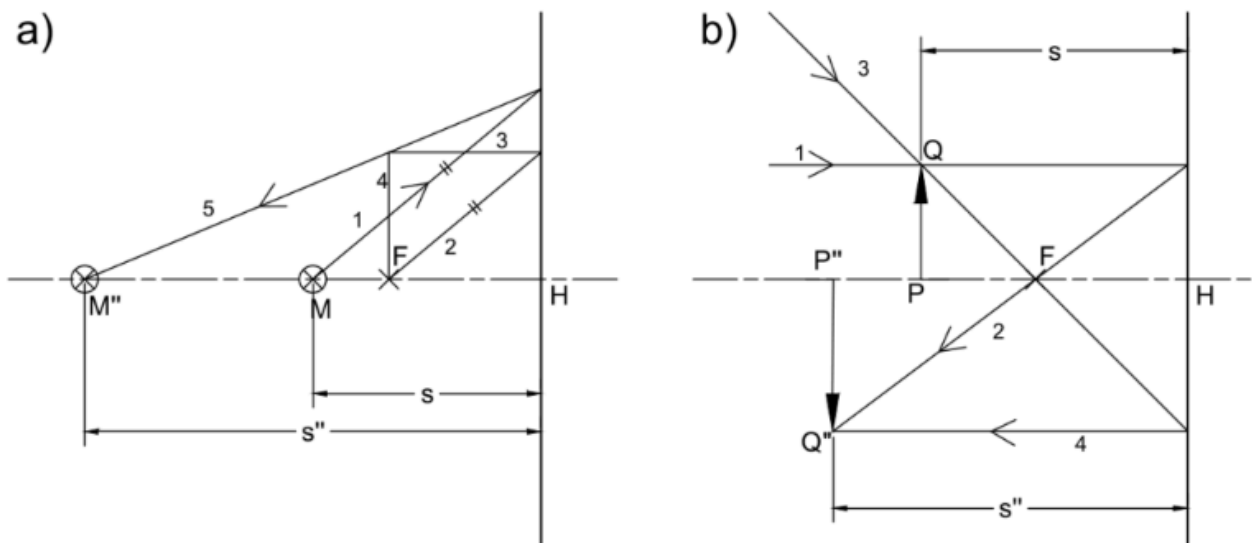
**Figura 3.9** La determinación gráfica del foco y punto principal de un espejo grueso constituido por una lente gruesa separada de un espejo simple puede realizarse de dos maneras: o bien se sigue la marcha de un rayo que incide paralelo al eje y es desviado cinco veces (dos veces en la primer superficie de la lente, dos en la segunda y una vez al reflejarse en el espejo), o bien a partir de modelar la lente gruesa, para luego seguir la marcha de un rayo que se desvía tres veces (dos veces en el sistema modelado y una vez al incidir sobre el espejo). En la figura se muestra el trazado que corresponde a realizar el segundo procedimiento, que requiere emplear dos rayos auxiliares, mientras que el primer método requiere emplear cuatro.



Una alternativa a este trazado es la de trabajar directamente con la lente física, lo que implica aplicar el método del rayo auxiliar en las dos caras de la lente y en el espejo.

### 3.5. Determinación de imágenes a partir de un sistema modelado

Una vez halladas la distancia focal y punto principal de un espejo grueso, la imagen de un objeto dado puede determinarse a posición y naturaleza de la imagen aplicando la [expresión de Gauss \(0.1\)](#), teniendo en cuenta que las distancias objeto e imagen se miden desde el punto principal del sistema, y que la distancia focal es la separación entre el foco y el punto principal.



**Figura 3.10** Una vez modelado un espejo grueso, la determinación gráfica de imágenes se hace igual que para el caso de un espejo simple, midiendo las distancias objeto e imagen a partir del plano principal del espejo. Debe tenerse siempre como referencia, sin embargo, la posición del punto donde efectivamente ocurre la primer refracción (punto  $H_1$ ), ya que, independientemente de lo que ocurra con los rayos en el sistema modelado, si la imagen se encuentra a la izquierda de  $H_1$ , la misma será real. Por otro lado, si la imagen se forma a la derecha de  $H_1$ , la misma será virtual.

El aumento lateral de la imagen se calcula también empleando utilizando la [expresión \(0.8\)](#), midiendo las distancias objeto e imagen de la misma manera que cuando se aplica la fórmula de Gauss.

La determinación gráfica de las imágenes es idéntica a la empleada para espejos simples, y se encuentra ejemplificada en la [Figura \(3.10\)](#). Debe tenerse en cuenta sin embargo, que como un espejo grueso es una modelización, no se puede emplear el rayo que pasa por el centro de curvatura, ya que físicamente no existe tal punto.

Es importante mencionar, al igual que cuando se estuvo trabajando con combinaciones de lentes, que el hecho de que una imagen parezca virtual o real en el sistema modelado, no necesariamente implica que dicha imagen vaya a ser real o virtual en el sistema real. Para saber la naturaleza de la imagen debe verse su ubicación respecto del inicio del sistema, es decir, el punto donde ocurre la primera refracción de los rayos, que en nuestra nomenclatura se ha marcado como  $H_1$ . En caso de que la imagen se encuentre fuera del sistema (a la izquierda de  $H_1$ ), la imagen será real, mientras que si la imagen se encuentra dentro del sistema (a la derecha de  $H_1$ ) la imagen será virtual.



### 3.6. Resumen de Fórmulas

Nombre	Expresión	Número
<b>Lente delgada y espejo simple // Lente Guesa con segunda cara espejada</b>		
Posición del plano principal de un espejo respecto de la superficie de la primera refracción	$\overline{H_1 H} = \frac{C}{1 - C \cdot P_1}$	(3.20)
Potencia	$P = (1 - C \cdot P_1) \cdot (2 \cdot P_1 + P_2 - C \cdot P_1 \cdot P_2)$	(3.21)
Factor C	$C = \frac{d}{n'}$	
<b>Lente gruesa separada de un espejo simple</b>		
Posición del plano principal de un espejo respecto de la superficie de la primera refracción	$\overline{H_1 H} = \overline{H_1 H_{LG}} + \frac{C + C'}{1 - (C + C') \cdot P_1}$	(3.22)
Potencia	$P = [1 - (C + C') \cdot P_{LG}] \cdot [2 \cdot P_{LG} + P_E - (C + C') \cdot P_{LG} \cdot P_E]$	(3.23)
Factor C	$C = \frac{d}{n''}$	
Factor C'	$C' = \frac{\overline{H''_{LG} H_2}}{n''}$	

### 3.7. Cuestiones

- 3.7.1. Realizar la demostración de las expresiones [3.20](#) y [3.21](#).
- 3.7.2. Analice qué ocurre con las Ecs. [3.12](#) y [3.13](#) cuando se hace que la lente delgada se pegue al espejo, es decir, cuando  $d = 0$ . Interprete el resultado físicamente.
- 3.7.3. Analice qué ocurre con las Ecs. [3.20](#) y [3.21](#) cuando se hace que  $n'$  tienda a 1. Interprete el resultado físicamente.
- 3.7.4. Analice qué ocurre con las Ecs. [3.20](#) y [3.21](#) cuando se hace que la lente gruesa tenga un espesor nulo, es decir, si se hace que la lente gruesa sea delgada. Interprete el resultado físicamente.
- 3.7.5. Se cuenta con una lente delgada positiva separada de un espejo positivo. Todo el medio se encuentra sumergido en aire. La distancia focal de la lente es  $f_1$  y la del espejo es  $f_E$ . Ambas distancias focales son positivas. Deducir la relación que debe existir entre las distancias focales de la lente y el espejo y su separación para que el sistema sea:
  - a. convergente ( $P > 0$ ),
  - b. divergente ( $P < 0$ );
  - c. afocal ( $P = 0$  o  $f = \infty$ ).
- 3.7.6. ¿Pueden obtenerse los mismos resultados si uno de los elementos posee una distancia focal negativa? En caso afirmativo, determine las condiciones necesarias para que esto suceda. En caso negativo, justifique su respuesta.
- 3.7.7. Revise los resultados obtenidos en las cuestiones 3.7.5 y 3.7.6 si se tiene una lente gruesa con una superficie espejada.
- 3.7.8. Revise los resultados obtenidos en las cuestiones 3.7.5 y 3.7.6 si se tiene una lente gruesa separada de un espejo simple.



### 3.8. Ejercicios

- 3.8.1. Se tiene un espejo grueso constituido por una lente delgada de distancia focal  $f_1 = 12\text{ cm}$  y un espejo con un radio de curvatura  $R_E = -20\text{ cm}$ . La lente y el espejo están separados 2 cm. Determine analítica y gráficamente la posición del foco y punto principal del sistema. Todo el sistema se encuentra sumergido en aire.

**Respuestas:**

$$P = 20.833\text{ Dp}; \overline{H_1H} = 2.4\text{ cm}$$

- 3.8.2. Se tiene un espejo grueso constituido por una lente delgada de distancia focal  $f_1 = -14.5\text{ cm}$  y un espejo con un radio de curvatura  $R_E = -12.5\text{ cm}$ . La lente y el espejo están separados 3 cm. Determine analítica y gráficamente la posición del foco y punto principal del sistema. Todo el sistema se encuentra sumergido en aire.

**Respuestas:**

$$P = 6.659\text{ Dp}; \overline{H_1H} = 2.49\text{ cm}$$

- 3.8.3. Se tiene una lente delgada y un espejo simple que responden a los siguientes datos:

$$\text{Lente: } R_1 = 50\text{ cm}; R_2 = -50\text{ cm}; n^v = 1.5$$

$$\text{Espejo: } R_E = -50\text{ cm}$$

En base a esta información:

- Si se sabe que la lente y el espejo se encuentran separados 10 cm y que todo el sistema se encuentra sumergido en aire, determine, analítica y gráficamente, la posición del foco y el punto principal del espejo grueso.
- Si se tiene un objeto extenso de altura 1 cm ubicado a 60 cm de la lente delgada, determine, utilizando la modelización del espejo grueso, la posición, tamaño y naturaleza de la imagen del objeto. Resuelva analítica y gráficamente.

**Respuestas:**

a.  $P = 5.760\text{ Dp}; \overline{H_1H} = 12.50\text{ cm}$

b.  $s'' = 22.827\text{ cm}; y'' = -0.315\text{ cm}; \text{Real}$

3.8.4. Se tiene una lente delgada con una distancia focal  $f_1 = 5 \text{ cm}$  y un espejo simple de distancia focal  $f_E = 5 \text{ cm}$ .

- Si se sabe que la lente y el espejo se encuentran separados 15 cm y que todo el sistema se encuentra sumergido en aire, determine, analítica y gráficamente, la posición del foco y el punto principal del espejo grueso.
- Si se tiene un objeto puntual ubicado en el eje a una distancia de 10 cm de la lente delgada, determine, utilizando la modelización del espejo grueso, la posición, y naturaleza de la imagen del objeto. Resuelva analítica y gráficamente.

**Respuestas:**

a.  $P = 0 \text{ Dp}$ ;  $\overline{H_1H} = -7.5 \text{ cm}$

b.  $s'' = -2.5 \text{ cm}$ ; *Virtual*

3.8.5. Se tiene una lente delgada equiconvexa hecha de un material con un índice de refracción  $n^v = 1,5$ , que en aire tiene una distancia focal de 30 cm. La lente está montada en una abertura practicada en una pared de un depósito lleno de agua. En la pared opuesta del depósito, a 80 cm de la lente, se encuentra un espejo plano.

- Determine, analítica y gráficamente, la posición del foco y el punto principal del espejo grueso.
- Si se tiene un objeto extenso de 1 cm de altura, ubicado en el eje del sistema y a una distancia de 90 cm de la lente delgada, determine, utilizando la modelización del espejo grueso, la posición, tamaño y naturaleza de la imagen del objeto. Resuelva analítica y gráficamente.

**Respuestas:**

a.  $P = -6.666 \text{ Dp}$ ;  $\overline{H_1H} = -60 \text{ cm}$

b.  $s'' = -10 \text{ cm}$ ;  $y'' = 0.333 \text{ cm}$ ; *Virtual*

3.8.6. Se tiene un espejo grueso constituido por una lente gruesa de 4 cm de espesor. La primera cara de la lente tiene un radio de curvatura  $R_1 = -6 \text{ cm}$ , y la segunda cara, que está espejada, tiene un radio de curvatura  $R_E = -12 \text{ cm}$ . La lente gruesa está hecha de un material con índice de refracción  $n^v = 1,4$ . Determine analítica y



gráficamente la posición del foco y punto principal del sistema. Todo el sistema se encuentra sumergido en aire.

**Respuestas:**

$$P = 17.196 \text{ Dp}; \overline{H_1H} = 2.40 \text{ cm}$$

- 3.8.7. Se tiene un espejo grueso conformado por una lente plano-convexa de 3,2 cm de espesor con segunda cara espejada. Se sabe además que la cara espejada tiene un radio de curvatura  $R_E = -12 \text{ cm}$  y que está hecha de un material con índice de refracción  $n' = 1,6$ . Determine analítica y gráficamente la posición del foco y punto principal del sistema. Todo el sistema se encuentra sumergido en aire.

**Respuestas:**

$$P = 26.667 \text{ Dp}; \overline{H_1H} = 2 \text{ cm}$$

- 3.8.8. Resuelva el ejercicio anterior invirtiendo la cara espejada de la lente gruesa, es decir, suponiendo que se tiene una lente convexo-plana con segunda cara espejada.

**Respuestas:**

$$P = 9 \text{ Dp}; \overline{H_1H} = 2.22 \text{ cm}$$

- 3.8.9. Se tiene una lente delgada equiconvexa de radios de curvatura  $|R_{1,2}| = 12 \text{ cm}$  y de índice de refracción  $n' = 1,6$ . Si la segunda cara de la lente se encuentra espejada, determine analítica y gráficamente la posición del foco y punto principal del espejo grueso. Todo el sistema se encuentra sumergido en aire.

**Respuestas:**

$$P = 36.667 \text{ Dp}; \overline{H_1H} = 0 \text{ cm}$$

- 3.8.10. Dada una lente delgada divergente con radios  $R_1 = -5 \text{ cm}$  y  $R_2 = -10 \text{ cm}$  e índice de refracción  $n' = 1,75$ , que tiene su segunda cara espejada, determine analítica y gráficamente la posición del foco y punto principal del sistema. Todo el sistema se encuentra sumergido en aire.

**Respuestas:**

$$P = 20 \text{ Dp}; \overline{H_1H} = 0 \text{ cm}$$

- 3.8.11. Se tiene una esfera de vidrio con  $n' = 1,5$  y radio  $R = 20 \text{ cm}$  a la que se le ha espejado la segunda mitad. A  $40 \text{ cm}$  de dicha esfera se encuentra un objeto puntual ubicado en el eje del sistema.
- Determine, analítica y gráficamente, la posición del foco y el punto principal del espejo grueso.
  - Determine, utilizando la modelización del espejo grueso, la posición, y naturaleza de la imagen del objeto. Resuelva analítica y gráficamente.

**Respuestas:**

a.  $P = 3.333 \text{ Dp}; \overline{H_1H} = 80 \text{ cm}$

b.  $s'' = 40 \text{ cm}; \text{Real}$

- 3.8.12. Se tiene un espejo grueso constituido por una lente gruesa de  $25 \text{ cm}$  de espesor separada  $40 \text{ cm}$  de un espejo cóncavo. La lente es equiconvexa, de radios  $|R_1| = |R_2| = 10 \text{ cm}$  e índice de refracción  $n_v = 1.5$ . El radio de curvatura del espejo es  $|R_E| = 50 \text{ cm}$ . Determine, analítica y gráficamente, la posición del foco y el punto principal del espejo grueso.

**Respuestas:**

$$P_{LG} = 5.83 \text{ Dp}; f_{LG} = f'_{LG} = 17.14 \text{ cm}$$

$$\overline{H_1H_{LG}} = 14.29 \text{ cm}; \overline{H_1F_{LG}} = -2.86 \text{ cm}; \overline{H_2H'_{LG}} = -14.29 \text{ cm}; \overline{H_2F'_{LG}} = 2.86 \text{ cm};$$

$$P = -6.5 \text{ Dp}; \overline{H_1H} = -10.77 \text{ cm}; f = -15.38 \text{ cm}$$

- 3.8.13. Se tiene un espejo grueso constituido por una lente gruesa separada  $15 \text{ cm}$  de un espejo cóncavo. La lente es concéntrica, de radios  $R_1 = -34 \text{ cm}$  y  $R_2 = -47 \text{ cm}$ , e índice de refracción  $n' = 1.5$ . El radio de curvatura del espejo es  $|R_E| = 70 \text{ cm}$ . Determine, analítica y gráficamente, la posición del foco y el punto principal del espejo grueso.

**Respuestas:**

$$P = -1.489 \text{ Dp}; \overline{H_1H} = 16.39 \text{ cm}$$



## Capítulo 4: Diafragmas

Hasta ahora se ha trabajado con diferentes sistemas ópticos y las imágenes que estos forman, analizando las características de las mismas: su posición, naturaleza y aumento. Un aspecto de las imágenes sobre el que no nos hemos detenido aún, pero que es muy importante es el del **brillo** de una imagen. El **brillo** de una imagen está dado por la cantidad de rayos de luz que, proviniendo del objeto, pueden ingresar al sistema óptico para formar una imagen. Dicho en términos más concretos, cuanta más luz del objeto puede ingresar al sistema, más brillante será la imagen que se forma.

En este sentido, el aspecto constructivo de las lentes y espejos que determina el brillo de una imagen es su dimensión lateral o **apertura**, dada generalmente por su diámetro. El hecho de que los sistemas ópticos tengan una dimensión lateral finita implica que la luz que podrán captar de un dado objeto será limitada también. Decimos entonces que el diámetro no obstruido de una lente es una **apertura** por la que pasan solamente una fracción de los rayos de luz que emanan del objeto.

Adicionalmente, los instrumentos ópticos como las cámaras fotográficas constan además de ciertos elementos llamados diafragmas, que consisten en láminas opacas con un agujero, cuyo fin es precisamente acotar el rango angular de la luz que ingresa a la cámara. También se llaman diafragmas al conjunto de hojas ajustables de las cámaras, que se usan justamente para limitar la luz que ingresa a la misma por parte de los objetos. Esto se hace con el fin de ajustar lo que se llama profundidad de campo de la fotografía, que es lo que determina cuántos de los elementos de la fotografía se encontrarán en foco.

Otra razón por la que se suele desear limitar la luz que ingresa a un sistema es la de evitar la formación de imágenes con rayos que se encuentran alejados de la aproximación paraxial, con el fin de evitar aberraciones en las imágenes (ver [Capítulo 5](#)).

Finalmente, y como se dijo anteriormente, la cantidad de luz que ingresa al sistema, va a determinar, junto con el tiempo de exposición y la sensibilidad del sensor o película de la cámara, el brillo de la imagen.

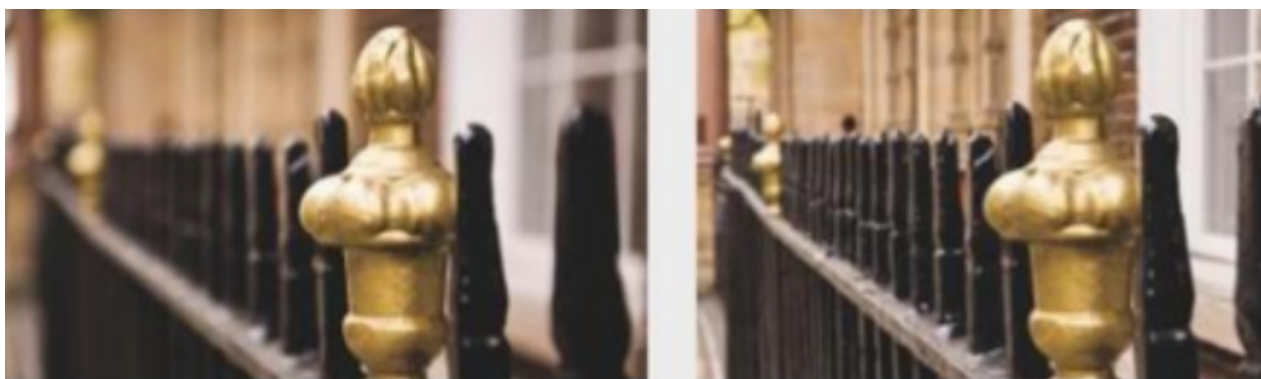
Por otro lado, la dimensión finita de los instrumentos ópticos también determina, qué región del espacio que se encuentra frente a dicho instrumento formará parte de la imagen que veremos. Dicho de otra manera, la dimensión finita de los elementos en un sistema óptico determina lo que en fotografía se denomina el encuadre.

En este Capítulo, veremos que para un dado sistema óptico y cada objeto particular, habrá un elemento que tendrá el efecto de limitar el encuadre de la imagen mientras que habrá otro que tendrá el efecto de limitar la cantidad de luz que ingresa en el sistema. Llamaremos al primer elemento **diafragma de campo** del sistema, y al segundo, **diafragma de apertura**. Veremos además, que la determinación del diafragma de apertura será muy útil para encontrar imágenes en sistemas ópticos complejos, como cámaras de foto, telescopios y microscopios.

### 4.1. Diafragmas de apertura y diafragmas de campo

En cualquier sistema óptico habrá para cada objeto, un elemento que determinará la cantidad de luz que ingresa al sistema para formar su imagen. Dicho elemento, que puede ser el borde de una lente, o un diafragma separado, recibe el nombre de **Diafragma de Apertura (DA)** del sistema, y es el elemento que determina el brillo de la imagen. En las cámaras fotográficas, para cada lente suele colocarse un diafragma muy próximo a la misma, bien delante de ella (diafragma frontal) o bien detrás de ella (diafragma posterior). Esto se hace para modificar la profundidad de campo de la imagen que ha de formarse en la placa o película fotográfica, o bien en el sensor.

En la [Figura 4.1](#) se muestra un ejemplo de como el diámetro del diafragma de apertura modifica las características de una imagen: en la [Figura 4.1-a](#) el diafragma de la cámara se ha abierto a su máxima capacidad, lo que significa que la cantidad de luz que llega a la cámara proveniente de los objetos visibles es máxima. El resultado es que el objeto más cercano a la cámara se vea nítidamente, mientras el resto de los elementos se ven de una forma más borrosa. Por otro lado, en la [Figura 4.1-b](#), el diafragma se ha cerrado al máximo, llevando a una situación en donde sólo ingresan aproximadamente el 1 % de los rayos que ingresaron en la fotografía anterior. El resultado es una imagen en que todos los elementos se encuentran “en foco”. En fotografía, se dice que al reducir el diámetro del diafragma de apertura se ha incrementado la profundidad de campo de la imagen.



**Figura 4.1** Fotografía de una reja tomada con la misma lente, pero para dos aperturas de diferentes diafragmas. En la fotografía de la izquierda el diafragma se encuentra muy abierto,



aumentando la cantidad de luz que llega de todos los objetos, dando como resultado que el objeto más cercano a la cámara se vea nítidamente, mientras el resto de los elementos se ven de una forma más borrosa. En la fotografía de la derecha, por otro lado, el diafragma de la cámara se ha cerrado considerablemente, dando como resultado una imagen en que todos los elementos se encuentran “en foco”.

Debe notarse igualmente que si bien se ha modificado la cantidad de luz que ingresa al sistema, el encuadre de la imagen no ha cambiado, es decir los límites de la imagen son idénticos en ambas fotografías. Esta es una de las características más importantes de los diafragmas de apertura, sólo limitan la cantidad de luz que se utiliza para formar la imagen, pero no sus límites.

Por otro lado, existe en cada sistema óptico otro elemento que, para un objeto dado, determina el tamaño de la imagen que se formará (en fotografía, también recibe el nombre de encuadre). Dicho elemento recibe el nombre de **Diafragma de Campo (DC)**. En una cámara fotográfica, el tamaño de la imagen de la imagen está limitado por el tamaño de la película o el sensor, así que ese elemento es el DC.

En los instrumentos ópticos más complejos, como microscopios y telescopios, que constan de una combinación de lentes y espejos, existe siempre una lente o combinación de estas, llamada lente objetivo, que forma en el interior del instrumento una imagen real del o los objetos observados. Esta imagen real es luego amplificada por otra combinación de lentes, que se llama ocular. En estos sistemas, el diafragma de campo se coloca en el lugar en donde el objetivo forma dicha imagen real.

En este Capítulo iniciaremos nuestro estudio a partir de la determinación de **Diafragmas de Apertura**, y veremos que una vez determinado el mismo, se podrá proceder a determinar el **Diafragma de Campo** de un sistema.

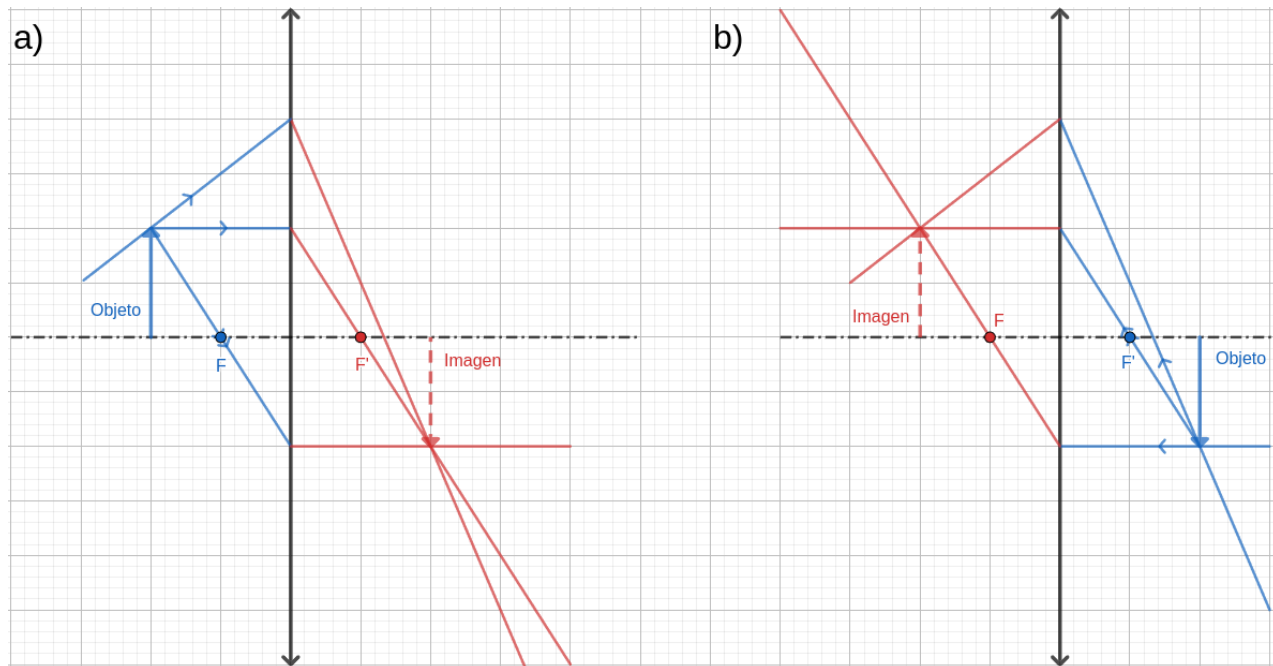
### **¡Aclaración importante!**

En este capítulo veremos la palabra diafragma en diferentes contextos, y cada uno de ellos tendrá significados muy diferentes. Para evitar confusiones deberá prestar mucha atención al contexto en que se encuentra la palabra diafragma, a saber:

1. **Diafragma:** cuando la palabra diafragma aparezca sola nos estamos refiriendo a un elemento físico que es parte de un sistema óptico que consiste en una lámina opaca con un agujero (diafragmas fijos), o en un conjunto de hojas ajustables (diafragma regulable).
2. **Diafragma de apertura:** Cuando hablamos de diafragma de apertura nos referimos a un elemento conceptual de un sistema óptico. Cuando hablamos de elemento conceptual, queremos decir nos referimos a un elemento que, sin ser necesariamente un diafragma en el sentido de la definición 1., cumple el rol de limitar la luz que ingresa al sistema. Por ejemplo podemos decir que la lente objetivo de un telescopio oficia de diafragma de apertura en el mismo.
3. **Diafragma de campo:** al hablar de diafragma de campo también nos estamos refiriendo a un elemento conceptual, diferente del diafragma de apertura. Este elemento será el que determine cuáles son los bordes de la imagen que efectivamente veremos. Por ejemplo, en una cámara digital, los bordes del sensor offician de diafragma de campo para la cámara.

#### **4.2. Espacio Objeto y Espacio Imagen**

En la [Figura 4.2](#)-a se ha representado un objeto extenso que se encuentra a la izquierda de una lente delgada, y que se extiende por arriba del eje del sistema. Se han trazado además tres rayos azules que pasan por el borde superior del objeto, cuya marcha es de izquierda a derecha. En base a lo visto en el curso anterior, sabemos que cada uno de estos rayos se desviará al pasar por la lente, lo que dará lugar a los rayos rojos, cuya intersección da lugar a la imagen del objeto, marcada también en rojo. Vemos que en este caso la imagen es real e invertida. Decimos entonces que todos los rayos azules y sus prolongaciones pertenecen al espacio objeto de la lente, mientras que los rayos rojos y sus prolongaciones, pertenecen al espacio imagen de la lente.



**Figura 4.2** Relación entre el espacio objeto y espacio imagen.

Más generalmente, dada una lente o espejo cualquiera, se define al **espacio objeto** como al espacio al cual pertenecen todos los rayos (o sus prolongaciones) que aún no han sido desviados por el elemento en cuestión, mientras que se define al **espacio imagen** como al espacio al cual pertenecen todos los rayos (o sus prolongaciones) que ya han sido desviados el por el elemento.

Como un objeto puede ser real o virtual, y estar a ambos lados de un elemento, tanto el espacio objeto como el espacio imagen se extienden infinitamente a ambos lados del elemento. Es decir, espacio imagen y objeto se encuentran superpuestos.

Ahora bien, en la [Figura 4.2-b](#) se ha dibujado la misma lente delgada, pero se ha colocado un objeto un objeto extenso a su derecha, que se extiende por debajo del eje del sistema. Quien lee podrá comprobar que este objeto se encuentra en el mismo lugar que la imagen que se determinó en la [Figura 4.2-a](#). Es más, puede observarse que si se trazan para este objeto rayos que tengan la misma dirección que los rayos rojos en la [Figura 4.2-a](#) pero invirtiendo su sentido, al desviarse en la lente, dichos rayos tendrán la misma dirección que los rayos azules en dicha figura, y darán lugar a una imagen que coincidirá en tamaño y aumento con el objeto de la [Figura 4.2-a](#).

Vemos que los trazados que figuran en la [Figura 4.2](#) ejemplifican la conocida propiedad de reversibilidad de los rayos. El hecho de que podamos intercambiar objeto e imagen para cualquier sistema óptico nos indica que el espacio objeto y el espacio imagen son espacios conjugados.

Veremos que la propiedad de reversibilidad de los rayos será crucial para encontrar imágenes una vez determinado el **Diafragma de Apertura** de un dado sistema.

### 4.3. Pupila de entrada y pupila de salida

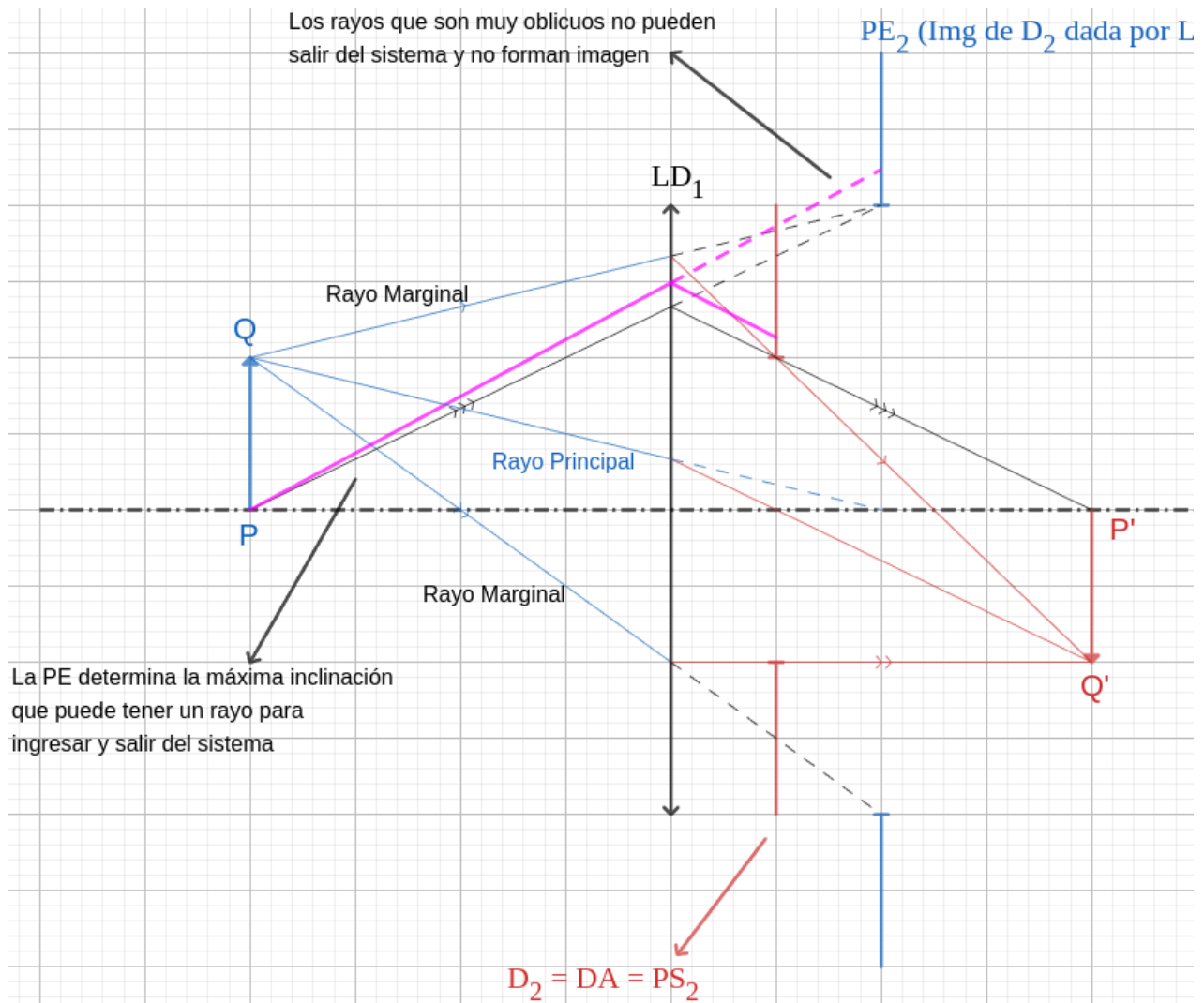
En los sistemas ópticos más sencillos resulta evidente cuál es el Diafragma de Apertura del mismo. No obstante, para sistemas más complejos, que constan de muchos elementos, esta determinación no es tan evidente. Es más, para muchos sistemas ópticos, el objeto cuya imagen se quiere determinar va a tener un rol tan importante en la determinación del DA como la apertura de los elementos que componen el sistema óptico.

Para determinar cuál de todos los elementos de un sistema óptico está limitando el ingreso de rayos a un sistema, es preciso encontrar a la **Pupila de Entrada (PE)** del mismo. La PE del sistema es la imagen del DA, vista desde el punto de vista de un observador que se encuentra en el espacio objeto del sistema (convencionalmente, a la extrema izquierda del mismo), a través de todos los elementos que se encuentran entre él y el DA. Si no hubiera lentes entre el observador y el DA, será el DA mismo que funcione como PE. La PE siempre pertenece al espacio objeto del sistema.

Por otro lado, podemos definir a la **Pupila de Salida (PS)** de un sistema como a la imagen del DA, vista desde el punto de vista de un observador que se encuentra en el espacio imagen del sistema (convencionalmente, a la extrema derecha del mismo), a través de todos los elementos que se encuentran entre él y el DA. Si no hubiera lentes entre el observador y el DA, será el DA mismo que funcione como PS. La PS siempre pertenece al espacio imagen del sistema.

En la imagen de la [Figura 4.3](#) se muestra una lente  $LD_1$  que tiene a su derecha un diafragma  $D_2$ , que en esta situación oficia como DA. Esto significa que la PE del sistema es la imagen de los bordes del diafragma  $D_2$  dada por la lente delgada  $LD_1$ , mientras que la PS serán los bordes del mismo diafragma, ya que  $D_2$  se encuentra en el final propiamente dicho del sistema en cuestión. Para indicar que la PE y la PS del sistema están asociados al segundo elemento del mismo incorporaremos a la abreviatura el subíndice 2, es decir, escribiremos  $PE_2$  y  $PS_2$ .

En esta figura, se han indicado en azul a los elementos que pertenecen al espacio objeto (el objeto extenso  $\overline{PQ}$  y la  $PE_2$ ) y en rojo a los elementos que pertenecen al espacio imagen (la imagen  $\overline{P'Q'}$  y la  $PS_2$ ). La lente delgada  $LD_1$ , que separa ambos espacios, se ha dejado indicada en negro.



**Figura 4.3** Ejemplo de cómo se puede emplear un DA posterior para limitar la luz que permite formar imágenes en un sistema dado. Adicionalmente vemos que se puede usar la relación entre el DA y sus imágenes para formar imágenes de otros objetos.

En la [Figura 4.3](#) se han trazado dos rayos que parten del borde inferior del objeto (punto P). Vemos que el rayo negro apunta al borde de la  $PE_2$ , que como ya dijimos es la imagen de los bordes de  $D_2$  dados por  $LD_1$ . Esto significa, en base al principio de reversibilidad de los rayos, que dicho rayo deberá, luego de desviarse por la lente, pasar por el objeto que dió lugar a la imagen, esto es, los bordes del diafragma  $D_2$ , que coincide con la  $PS_2$ , y vemos que la intersección de este rayo con el eje da lugar a la imagen  $P'$ .

Partiendo del punto P se ha trazado además un rayo violeta, que tiene una apertura angular un poco mayor que el rayo negro. Quien lee puede verificar que este y cualquier rayo que tengan una apertura mayor al rayo negro, luego de desviarse en la lente, se toparán con el diafragma, por lo que no podrán intersecar al eje en  $P'$  y no contribuirán al brillo de la imagen. Decimos entonces

que la  $PE_2$ , determina el máximo cono de luz que forma la imagen  $P'$ . El rayo negro recibe el nombre de **rayo marginal**.

Se puede decir entonces que el cono de luz que realmente ingresa al sistema está determinado por la  $PE_2$ , mientras que el cono de luz que emerge del sistema lo está por la  $PS_2$  y que cada rayo que pasa por el borde de la  $PE_2$  pasa por el borde de la  $PS_2$ .

En este ejemplo partimos afirmando que el DA del sistema era  $D_2$ , lo que determinó la PE y la PS del sistema. En general, sin embargo, para determinar el DA del sistema para un objeto dado, **se deberán determinar todas las posibles PE del sistema**, y ver cuál de todas ellas subtiende el cono de menor ángulo para ese objeto. Una vez determinada la PE para dicho objeto, se habrá determinado consecuentemente qué elemento es el DA y la correspondiente PS del sistema. Es importante notar que el DA depende tanto de los elementos que constituyen un sistema como de la posición y tamaño de los objetos cuya imagen se desea obtener.

Antes de pasar a los ejemplos de determinación de DA para diferentes combinaciones de elementos, observemos cómo se puede determinar la imagen de un objeto que se encuentra fuera del eje, conociendo su correspondiente DA. En la [Figura 4.3](#) se tiene tal objeto indicado con la letra Q. Vemos que en este caso de Q se pueden trazar tres rayos: uno que pasa por el borde superior de la  $PE_2$ , otro que lo hace por el borde inferior de la  $PE_2$  y un tercero que apunta el centro de la  $PE_2$ . Cada uno de esos rayos, luego de desviarse por la lente, pasa por el punto correspondiente de la  $PS_2$ , y los tres rayos se intersecan en la imagen  $Q'$ . En línea con lo mencionado anteriormente para el punto P, llamaremos a los dos rayos que apuntan al borde de la PE del sistema, **rayos marginales**, y al rayo que apunta al centro de la PE, **rayo principal**. El rayo principal es de suma importancia para la determinación del diafragma de campo y para la determinación de las aberraciones de los sistemas.

### 4.3.1. Determinación del Diafragma de Apertura, la Pupila de Entrada, la Pupila de Salida de algunos sistemas ópticos

En esta sección presentaremos algunos ejemplos sencillos que servirán a modo de ejemplo de cómo determinar el DA de un sistema. Será importante notar que, independientemente de la complejidad del sistema, el procedimiento que se llevará a cabo será siempre el mismo:

1. **Ubicación de los elementos del sistema.** Se listan todos los elementos físicos del sistema. Abreviamos a todas las lentes delgadas con el símbolo LD y a todos los diafragmas con el símbolo D. Adicionalmente, a cada elemento le corresponde un subíndice que indica su orden relativo respecto al resto de los elementos: al elemento de



más a la izquierda se lo indica con el subíndice 1, al siguiente con el subíndice 2, y así sucesivamente hasta que se hayan listado todos los elementos del sistema.

2. **Análisis del sistema.** Para cada elemento se indica cuál sería la PE y PS si ese elemento oficiase como DA del sistema. Las PE y PS tendrán un subíndice que coincidirá con el del elemento que las genera:  $PE_1$  y  $PS_1$  para el elemento 1,  $PE_2$  y  $PS_2$  para el elemento 2 y así sucesivamente.
3. **Determinación de las PE.** Se determinan gráficamente, todas las posibles PE del sistema. Los bordes de cada elemento del sistema se representan con los símbolos  $P_i$  y  $L_i$ , y el punto central de cada elemento, con la letra  $E_i$ . El subíndice  $i$  corresponde a la numeración del elemento dada en el Paso 1.
4. **Determinación de los bordes de zona.** En función de las posiciones de las diferentes PE, se determinan las zonas en cada una subtiende el menor ángulo.
5. **Determinación de los DA.** En función de la determinación realizada en el Paso 4., se determinará para cada región del espacio, cuál es el DA correspondiente. Para esto se emplea el análisis realizado en el Paso 2.

Una vez determinadas las zonas en que cada elemento oficia como DA, la determinación utilizando rayos marginales se realiza de la siguiente manera (este procedimiento se explicará con más detalle a partir de ejemplos en la sección [4.3.2](#)):

1. Se ubica al objeto en el lugar correspondiente
2. En función de su ubicación se determina cuál es su DA
3. Se dibujan las correspondientes PE y PS
4. Se trazan todos los rayos necesarios para formar imágenes que parten del objeto (uno para un objeto en el eje óptico, dos para un objeto fuera del eje óptico), partiendo del objeto y apuntando hacia los puntos extremos de la PE (rayos marginales) o bien al centro de la PE (rayo principal).
5. Se sigue la marcha de los rayos, tomando como referencia la relación entre el DA y sus imágenes, de modo tal que el último rayo (el que sale de la última lente) pase por la PS del sistema.
6. La intersección de los rayos da como resultado la imagen del objeto dado.

#### 4.3.1.1. Caso 1: Una lente delgada con un diafragma frontal

Consideremos el sistema de la [Figura 4.4](#), que consiste en una lente convergente situada detrás de un diafragma. En el esquema de la [Figura 4.4](#), ya se han representado todos los elementos, y se los han listado según la convención mencionada en la sección anterior (Paso 1).



**Figura 4.4** Caso 1: Lente delgada con diafragma frontal.

Datos del sistema:  $Ap_{D_1} = 3 \text{ cm}$ ;  $Ap_{LD_2} = 4 \text{ cm}$ ;  $f_{LD_2} = 2,5 \text{ cm}$ ;  $d_{D_1,LD_2} = 1 \text{ cm}$

### Paso 2: Análisis del sistema

<p><b>Si DA = D<sub>1</sub>:</b>  <math>PE_1 = D_1</math>  <math>PS_1 = \text{Img de } D_1 \text{ dada por } LD_2</math></p>	<p><b>Si DA = LD<sub>2</sub>:</b>  <math>PE_2 = LD_2</math>  <math>PS_2 = LD_2</math></p>
--	---

### ¡Aclaración importante!

1. Cuando decimos que el DA = LD<sub>2</sub>, lo que en realidad queremos decir es que los bordes de la lente son el diafragma de apertura.
2. De modo parecido, cuando decimos que PE<sub>2</sub> = LD<sub>2</sub> o que PS<sub>2</sub> = LD<sub>2</sub> lo que queremos decir es que los bordes de la lente delgada funcionan como pupila de entrada/salida.

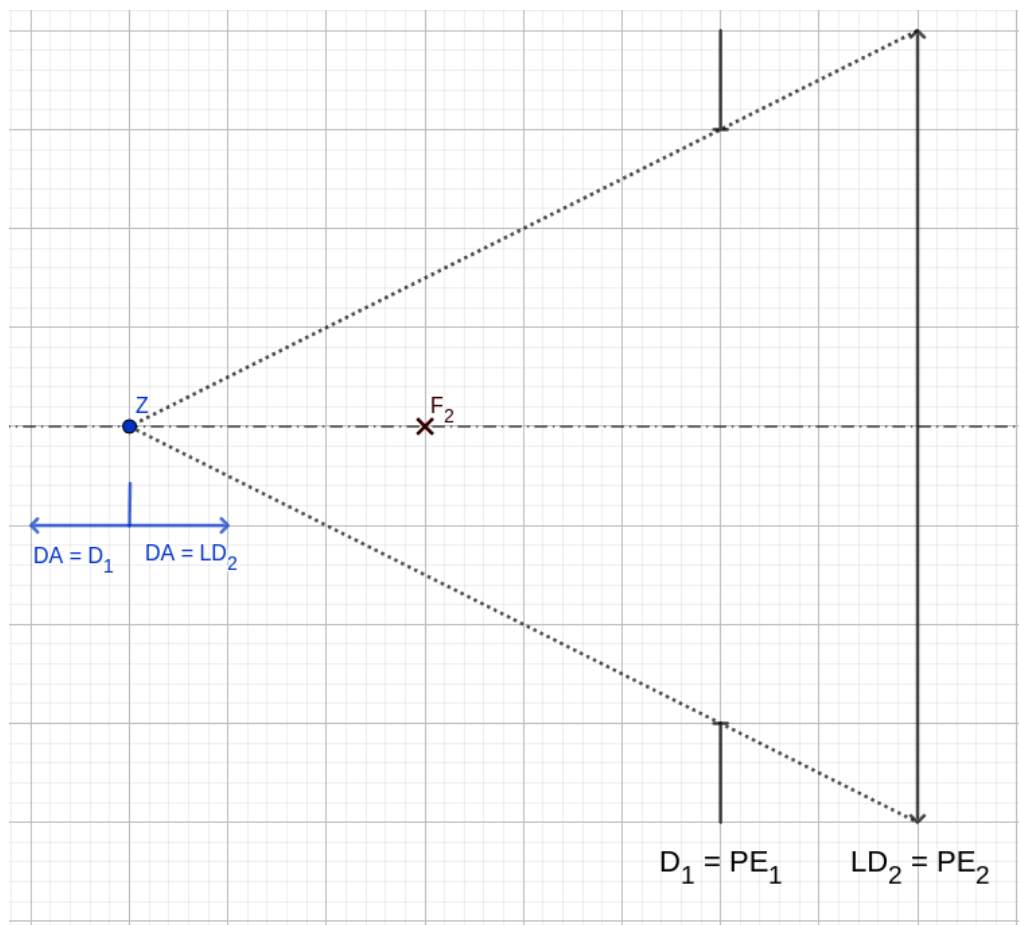
Paso 3: **Determinación de las PE.** En este caso, tanto D<sub>1</sub> como LD<sub>2</sub> funcionarían como PE si el respectivo elemento oficiase como DA, por lo que no es necesario encontrar ninguna imagen.



Paso 4: **Determinación de los bordes de zona.** Para conocer la región en que cada elemento oficiará como DA, es preciso determinar para un objeto dado, cuál es la PE que subtiende menor ángulo. Dicho de otra manera, para cada objeto, se trazan rayos con origen en el eje, incrementando su apertura hasta encontrar los bordes de la PE más cerrada. Realizando un análisis geométrico se puede prescindir de repetir el análisis para cada objeto si se unen los bordes de las dos pupilas de entrada con una línea imaginaria. La intersección de dicha línea con el eje óptico dará como resultado el borde de zona en el mismo. Cuando existe un sólo borde de zona, lo simbolizaremos con la letra Z. La determinación del borde de zona en este ejemplo se puede ver en la [Figura 4.5](#).

Paso 5: **Determinación de los DA.** En este caso basta un análisis geométrico para observar que cualquier objeto que se ubique sobre el eje óptico del sistema a la derecha del punto marcado como Z, tendrá como DA a la lente delgada  $LD_2$ , es decir, para cualquier objeto ubicado en el eje a la derecha de Z, el elemento que limitará el ingreso de luz que el sistema podrá utilizar para formar imágenes, será  $LD_2$ . Del mismo modo se ve que para cualquier objeto ubicado en el eje óptico a la izquierda de Z, el DA será el diafragma  $D_2$ . Para el caso de objetos que se encuentren fuera del eje óptico la determinación se del elemento que subtiende menor ángulo se puede realizar también, dado como resultado que el DA es  $LD_2$  para objetos que se encuentren dentro del triángulo formado por las líneas de puntos, mientras que para objetos que se encuentren fuera de dicho triángulo, el DA será  $D_1$ .

Una vez determinada la región del espacio que corresponde a cada DA, se puede iniciar la determinación de imágenes utilizando rayos marginales. Como en este ejemplo se tienen dos posibles DA, consideraremos el trazado para un objeto puntual que se encuentra en el eje óptico a la izquierda de Z y otro a la derecha de Z.



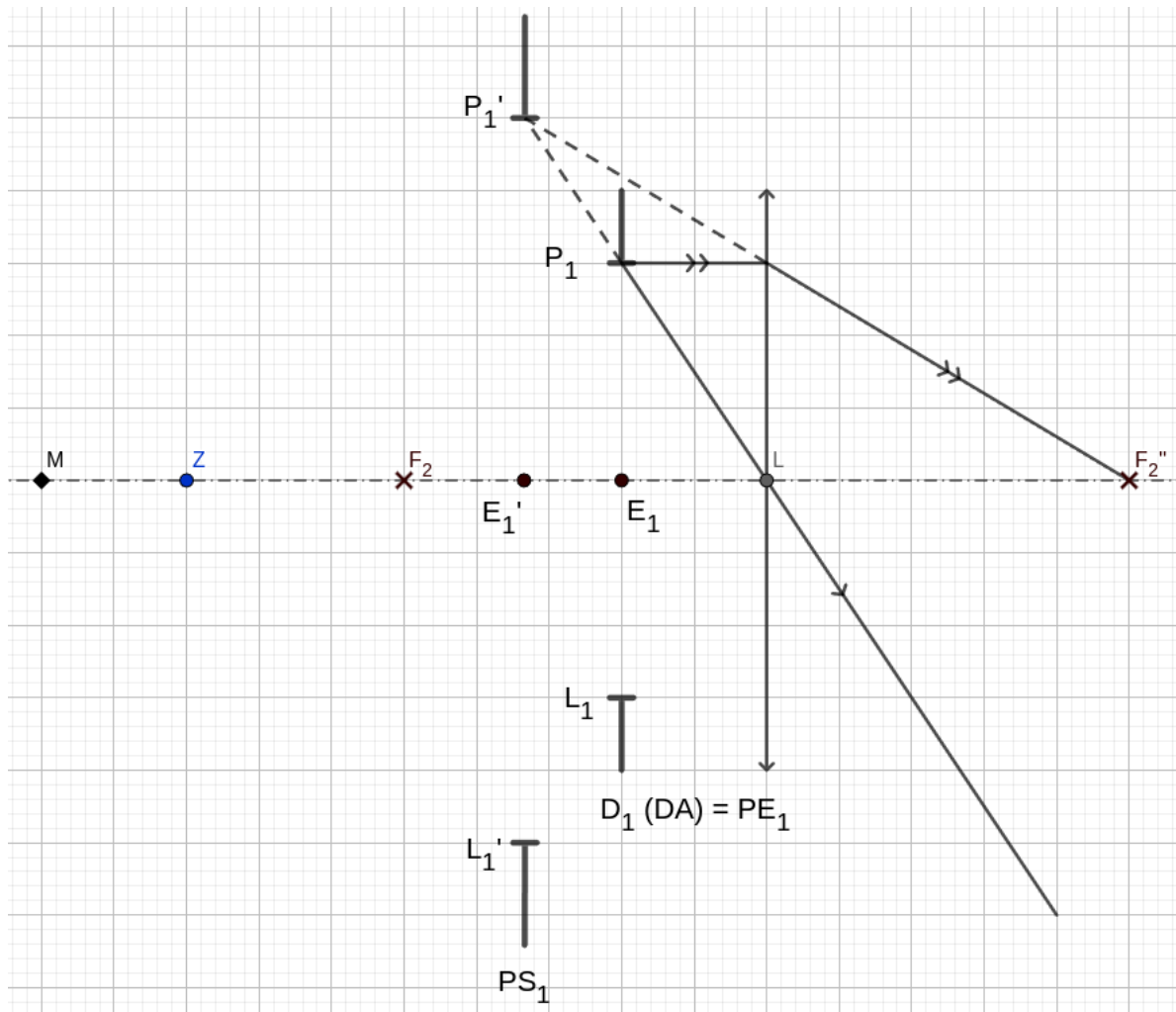
**Figura 4.5** Lente delgada con diafragma frontal. La determinación de los bordes de zona se hace uniendo los bordes de las Pupilas de Entrada.

### Objeto puntual ubicado sobre el eje a la izquierda de Z ( $DA = D_1$ )

Consideremos el objeto M que se encuentra a la izquierda del punto Z, como se muestra en la [Figura 4.6](#). En estas condiciones, el objeto que oficiará de DA será el diafragma  $D_1$ .

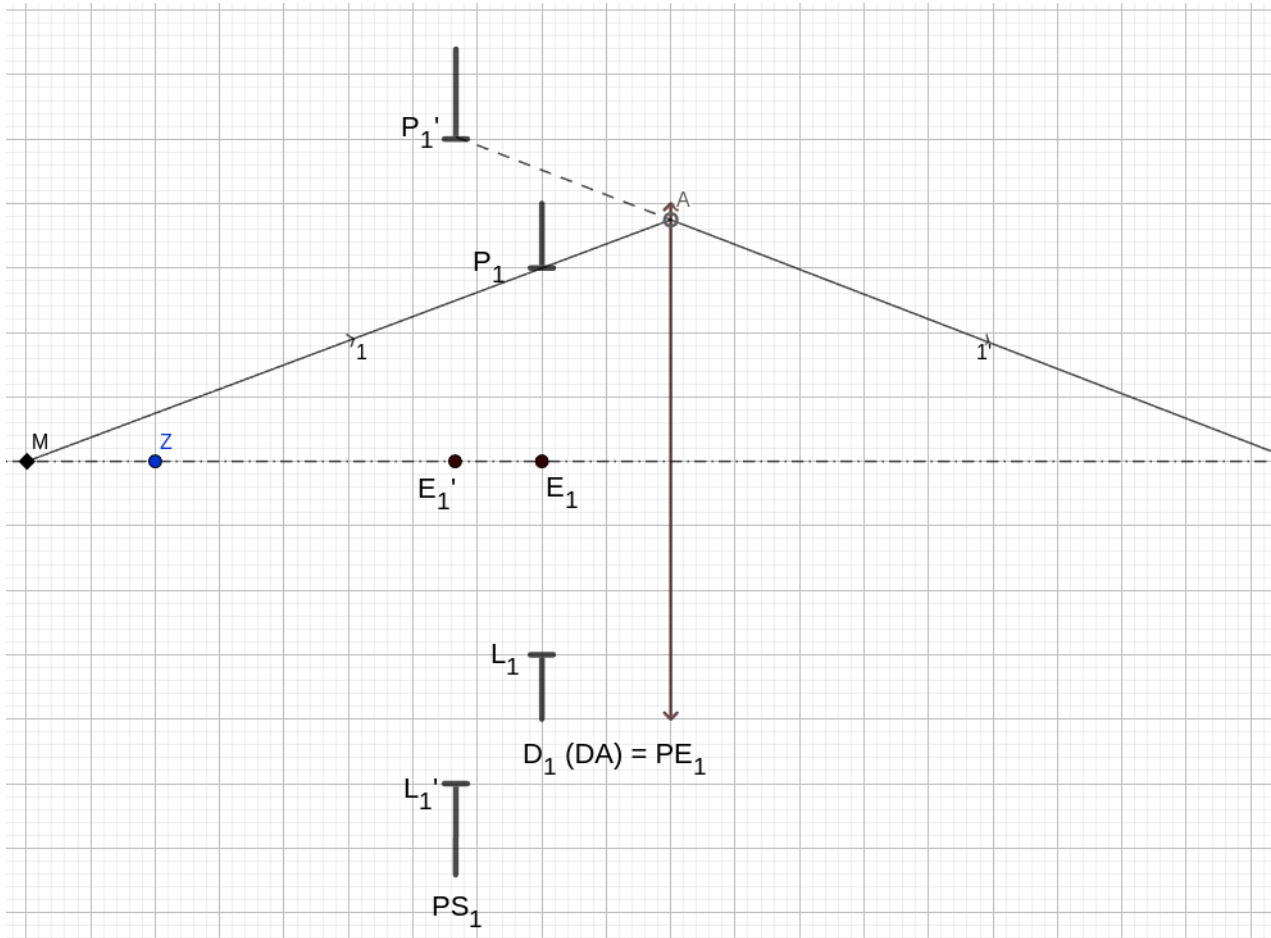
En base al análisis realizado en el Paso 2, podemos afirmar entonces que la Pupila de Salida del sistema será  $PS_1$ , que es la imagen de los bordes de  $D_1$  dados por  $LD_2$ , cuando  $D_1$  se ve desde la derecha de la imagen. Para determinar la  $PS_1$  debemos, entonces encontrar dicha imagen, lo cual se puede hacer analíticamente o a través de trazado de rayos, como se muestra en la [Figura 4.6](#).

**Para la determinación de las PS, el trazado de rayos siempre se hace de izquierda a derecha, esto es, en el sentido convencional.**



**Figura 4.6** Lente delgada con diafragma frontal. Una vez determinado el DA para el objeto dado, se puede determinar la PS correspondiente. Dicho trazado se hace con rayos que van de izquierda a derecha.

Una vez que se encontró la PS del sistema para el objeto dado, y como en este caso, PE y PS no coinciden, la determinación de la imagen de M se puede realizar a través del empleo de rayos marginales, ver [Figura 4.7](#). Para ello es preciso recordar que la PE<sub>1</sub> en este caso es un objeto físico (que pertenece al espacio objeto de LD<sub>2</sub>), mientras que la PS<sub>1</sub> es la imagen de dicho objeto, producida por la LD<sub>2</sub> (y que por lo tanto pertenece al espacio imagen de la lente). Esto significa que **cualquier** rayo proveniente del espacio objeto que pase por, por ejemplo P<sub>1</sub> deberá, después de la refracción, desviarse de modo tal que parezca provenir de P<sub>1</sub>' al ingresar al espacio imagen.

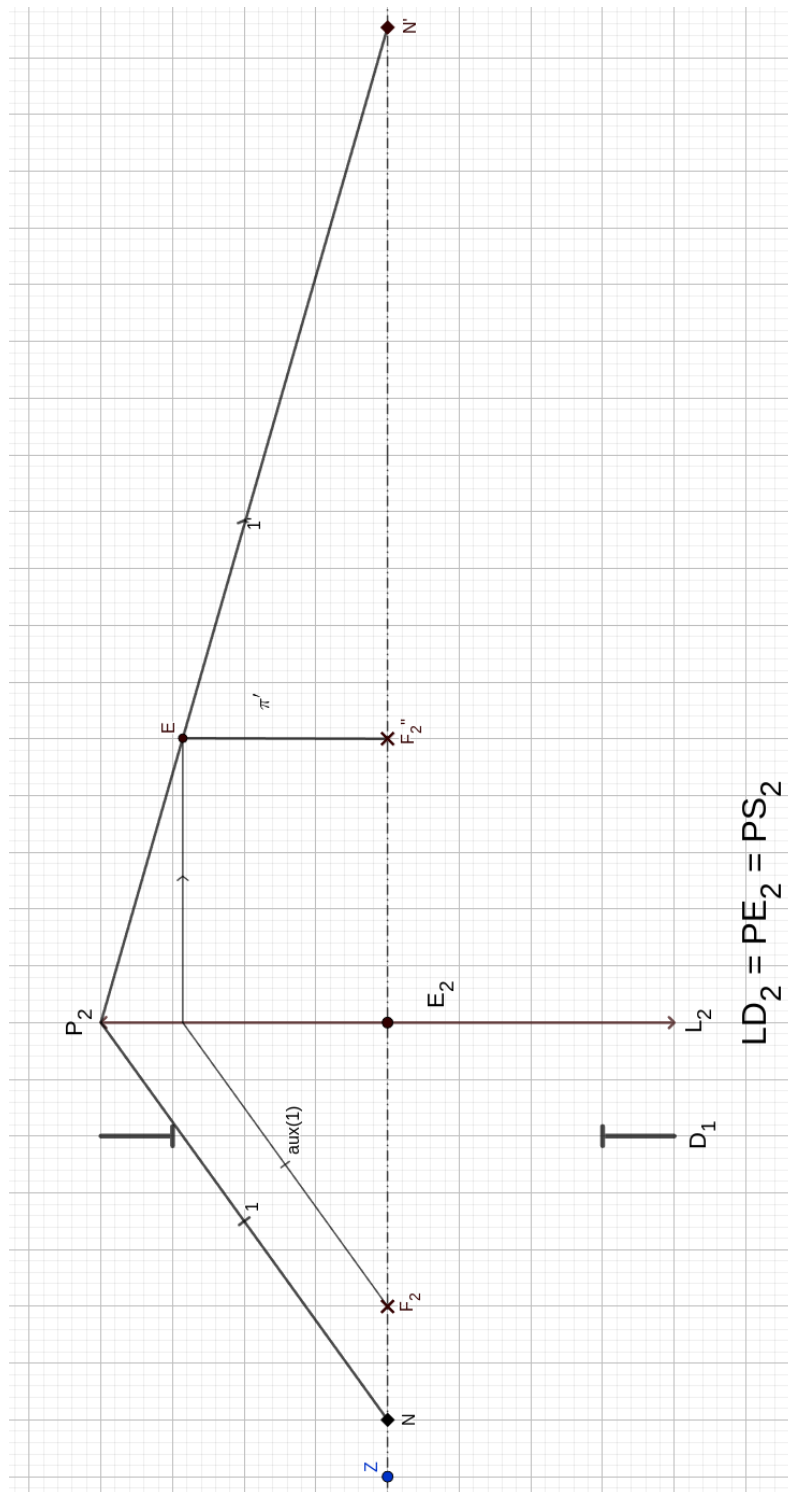


**Figura 4.7** Lente delgada con diafragma frontal. Una vez determinadas las PE y PS correspondientes, la imagen del objeto puede determinarse por el método de los rayos marginales, trazando un rayo que pasa por el objeto y la PE del sistema, y sigue su camino hacia la lente. La dirección del rayo de salida se puede determinar uniendo la intersección del rayo de entrada (punto A en la figura) con la de la PS correspondiente ( $P_1'$ ). La intersección del rayo de salida con el eje dará como resultado la ubicación de la imagen  $M'$ .

En particular, si se traza un rayo 1 que une a M con  $P_1$ , el mismo intersecta a  $LD_2$  en el punto A, lugar en el que deberá desviarse. Ahora bien, como el rayo 1 pasa por  $P_1$ , después de la refracción deberá parecer que proviene de la imagen de  $P_1$  producida por  $LD_2$ , esto es,  $P_1'$ . Tal rayo es el rayo 1' que se ha dibujado en la [Figura 4.7](#). Dado que el rayo 1 original también pasa por el objeto M, la intersección del rayo 1' con el eje óptico deberá dar como resultado la imagen  $M'$ .



Objeto puntual ubicado sobre el eje a la derecha de Z ( $DA = LD_2$ )

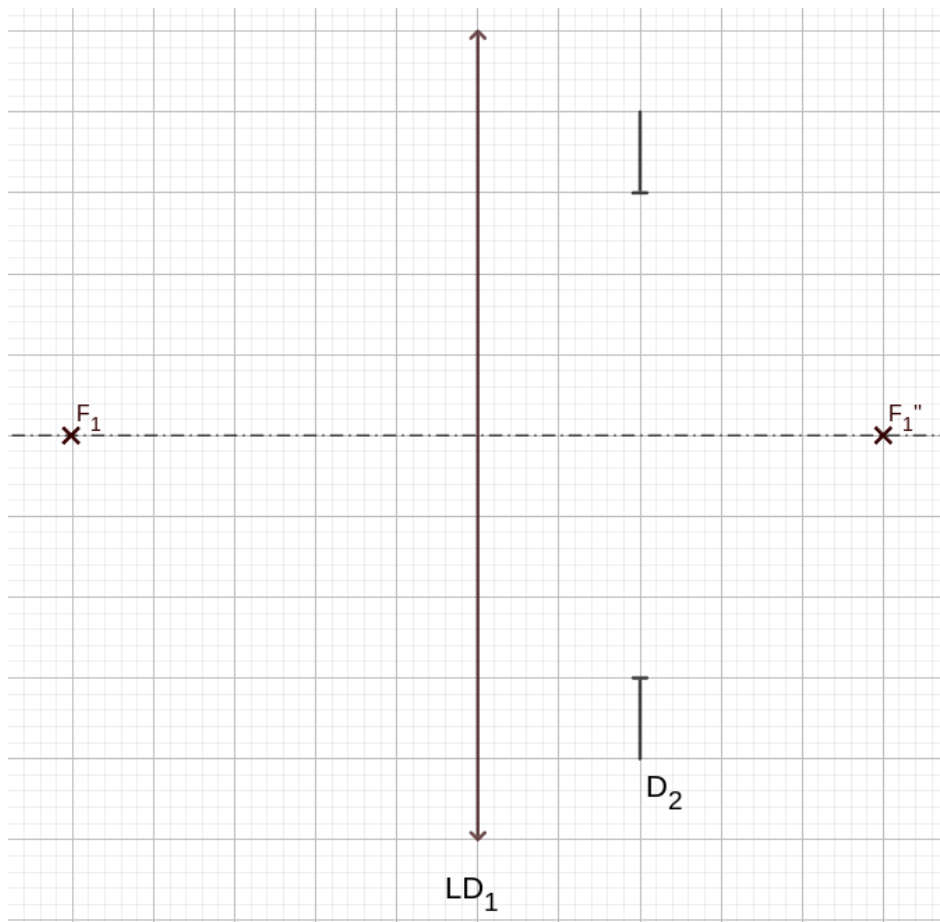


**Figura 4.8** Lente delgada con diafragma frontal. Cuando la PE y la PS coinciden con el DA, y dicho elemento es una lente delgada, la determinación gráfica de la imagen debe realizarse empleando el método del rayo auxiliar. Esto aplica siempre que la PE y/o la PS coincidan con un elemento que desvíe los rayos de luz (lentes).

Consideremos el caso de un objeto N que se encuentra a la derecha de Z. En este caso, su DA será  $LD_2$ , lo que a su vez significa que la Pupila de Entrada será  $PE_2$ , es decir, la propia  $LD_2$ , según el análisis realizado en el Paso 2 de este ejemplo. Observando el mismo análisis podemos ver que para la Pupila de Salida vale que  $PS_2 = LD_2$ . En esta situación, en que tanto la PE como la PS coinciden con el DA propiamente dicho, vemos que, a diferencia del caso anterior, no podemos utilizar la relación objeto-imagen entre la PE y la PS para hacer la determinación empleando rayos marginales ya que todos los puntos coinciden en su ubicación. En este caso, la determinación de la imagen por el método gráfico debe realizarse empleando el método del rayo auxiliar, como se muestra en la [Figura 4.8](#).

### 4.3.1.2. Caso 2: Una lente delgada con diafragma posterior

Consideremos ahora el caso inverso al anterior, esto es, una lente que se encuentra delante de un diafragma. La situación se muestra en la imagen de la [Figura 4.9](#) donde ya se han listado todos los elementos según la convención mencionada (Paso 1).



**Figura 4.9** Caso 2: Lente delgada con diafragma posterior.

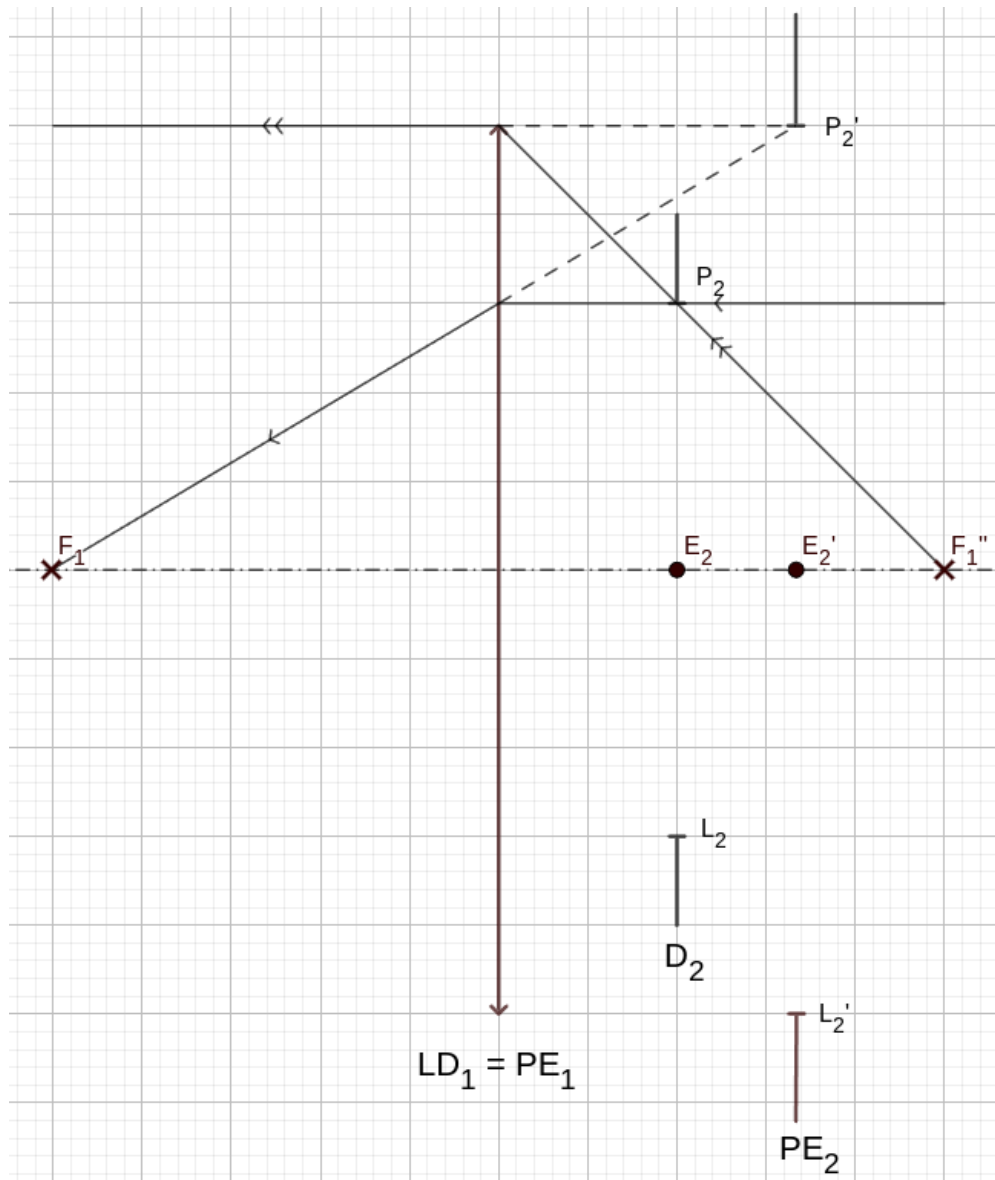
Datos del sistema:  $Ap_{LD_1} = 5 \text{ cm}$ ;  $Ap_{D_2} = 3 \text{ cm}$ ;  $f_{LD_1} = 2,5 \text{ cm}$ ;  $d_{LD_1, D_2} = 1 \text{ cm}$



## Paso 2: Análisis del sistema

<b>Si <math>DA = LD_1</math>:</b> $PE_1 = LD_1$ $PS_1 = LD_1$	<b>Si <math>DA = D_2</math>:</b> $PE_2 = \text{Img. de } D_2 \text{ dada por } LD_1$ $PS_2 = D_2$
---	---

Paso 3: **Determinación de las PE.** A partir del análisis del sistema vemos que si los bordes de  $LD_1$  funcionasen como DA, serían los mismos bordes los que obrarían como PE, por lo que no es necesario encontrar una imagen en este caso.

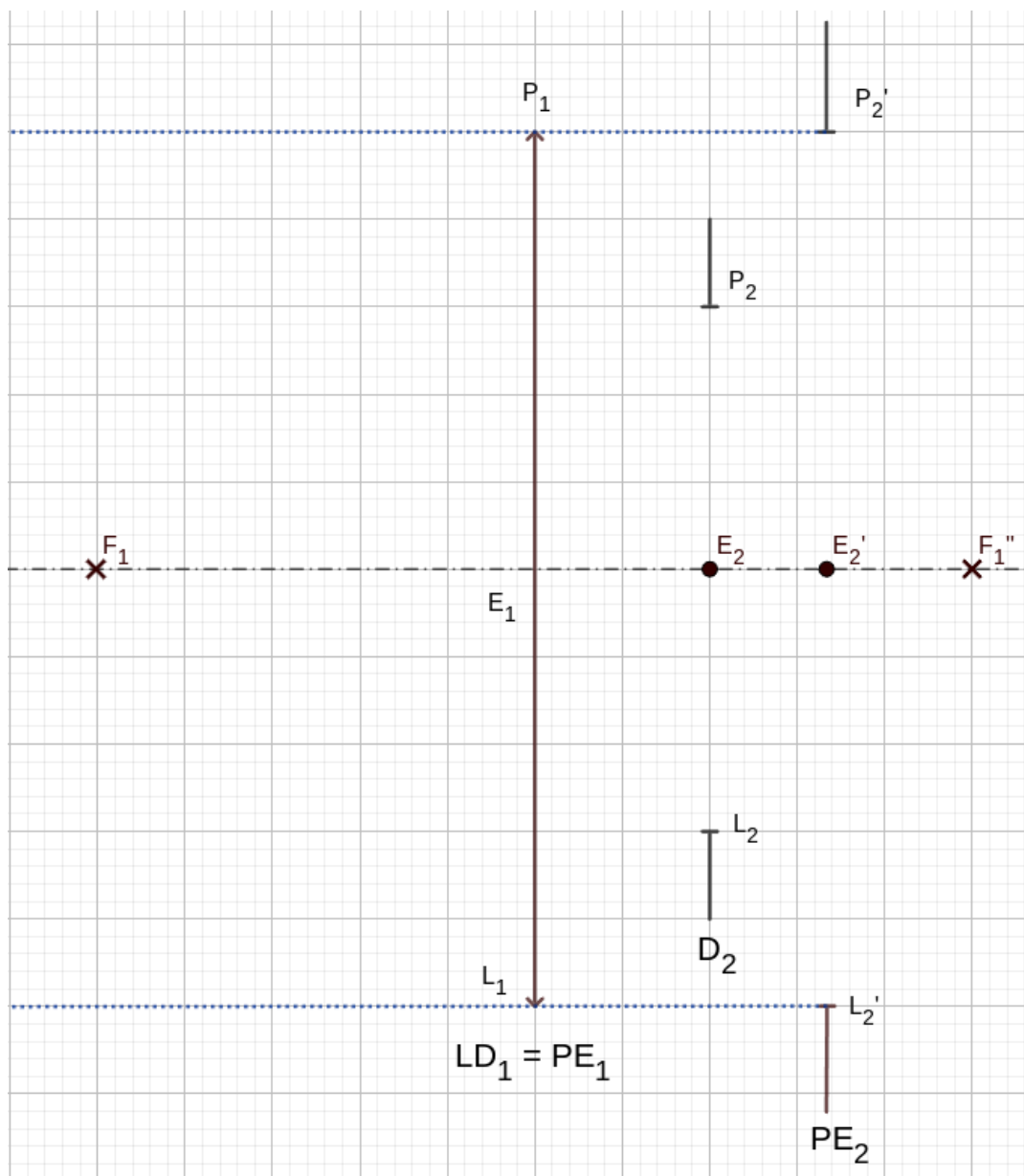


**Figura 4.10** Lente delgada con diafragma posterior. Para determinar las imágenes que corresponden a las Pupilas de Entrada, los trazados de rayos deben hacerse de derecha a izquierda.

En el caso de  $D_2$ , por otro lado, observamos que si nos ponemos a la izquierda del dibujo, no observamos los bordes del diafragma, sino la imagen de los mismos, producidas por  $LD_1$ . Esto significa que la PE en este caso sería la imagen de  $D_2$  dada por  $LD_1$ . En la [Figura 4.10](#) se muestra el trazado de rayos para determinar dicha imagen. Dado que la PE se obtiene mirando a los elementos desde la izquierda del dibujo, el trazado de rayos debe hacerse en el sentido opuesto al convencional, esto es, de derecha a izquierda. Esto es válido en general: **cuando la PE es la imagen de un elemento, el respectivo trazado debe realizarse de derecha a izquierda.**

Paso 4: **Determinación de los bordes de zona.** Al igual que en el caso anterior, para determinar el borde de zona que separa la región en que cada elemento oficia como DA, es preciso unir los bordes de las pupilas de entrada con una línea imaginaria. En la [Figura 4.11](#) se puede ver, que en este caso, al unir los bordes de las dos posibles Pupilas de Entrada (las líneas definidas por los puntos  $P_1$  y  $P_2'$  y  $L_1$  y  $L_2'$ ), las líneas resultantes son paralelas al eje óptico, lo que significa que el hipotético punto Z se encontraría en el infinito.

Paso 5: **Determinación de los DA.** En este caso el punto Z se encuentra en el infinito, lo que significa que para cualquier objeto real, la PE que subtiende menor ángulo será siempre la  $PE_2$ . Esto implica a su vez, que para este sistema, el DA será siempre  $D_2$ . En términos más generales, si existen dos PE, y la que está más a la derecha tiene una apertura menor o igual que la que está a la izquierda, será el elemento correspondiente a la primera el que oficiará como DA para cualquier objeto real.

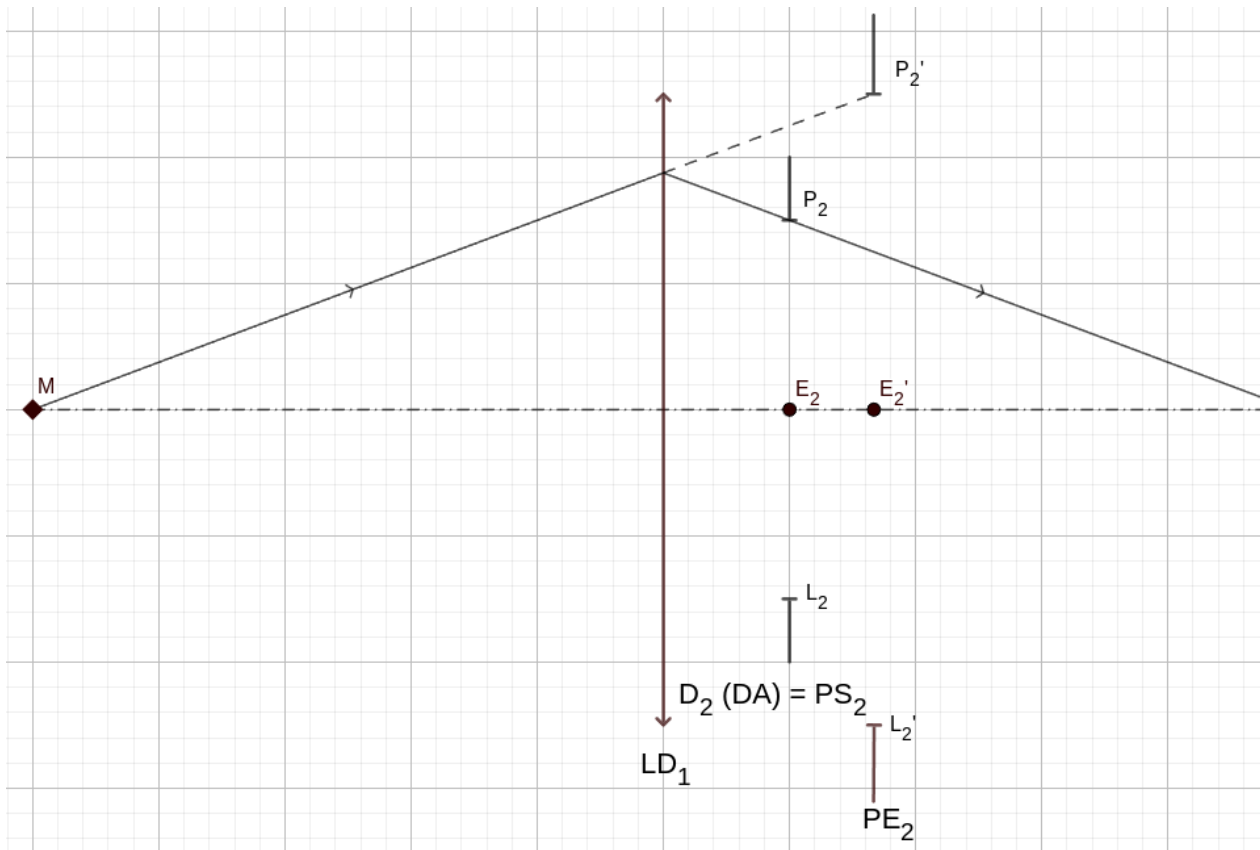


**Figura 4.11** Lente delgada con diafragma posterior. En este caso existe una única Pupila de Entrada que subtiende el menor ángulo posible para todos los objetos que se encuentran a la izquierda de  $LD_1$ , por lo que el único posible Diafragma de Apertura es el elemento  $D_1$ .

A continuación, procedemos a mostrar la determinación de imágenes para este sistema, considerando dos tipos de objetos, uno puntual sobre el eje y otro extenso.

### Objeto puntual ubicado sobre el eje

En este caso, según el análisis realizado en el Paso 2, vemos que la PS son los bordes del diafragma  $D_2$  propiamente dicho, por lo que no es necesario realizar ningún trazado para determinar la Pupila de Salida.



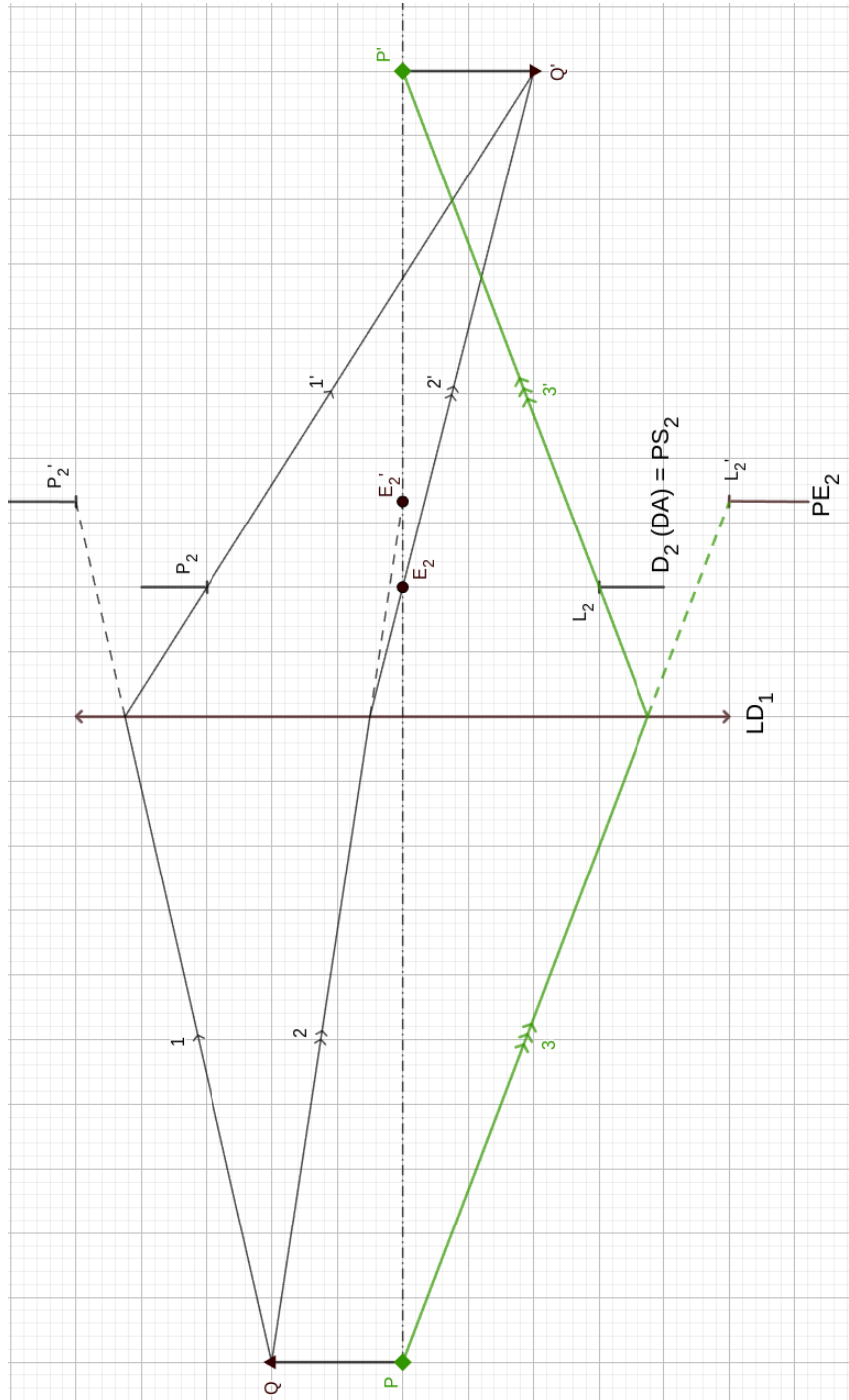
**Figura 4.12** Lente delgada con diafragma posterior. Una vez determinadas las PE y PS, y dado que ambas son diferentes, la determinación de la imagen de un dado objeto se puede realizar empleando rayos marginales.

Habiéndose establecido la PE y la PS del sistema para el objeto dado, y considerando que ambas pupilas están relacionadas por ser objeto e imagen de la misma lente, la determinación de la imagen de los objetos se puede realizar empleando rayos marginales. En la [Figura 4.12](#) se ha ubicado un objeto  $M$ . La determinación de la imagen de dicho objeto inicia con el trazado de un rayo que busca a uno de los bordes de la  $PE_2$ , en este caso se ha elegido al punto  $P_2'$ . Al llegar a la lente  $LD_1$  el rayo se desvía, tomando la dirección definida por el punto  $P_2$ , que es el objeto que dió lugar a la imagen  $P_2'$ . La intersección del rayo saliente con el eje óptico da como resultado la imagen  $M'$ .



### Objeto extenso ubicado sobre el eje

Para determinar la imagen de un objeto extenso debemos determinar la imagen de cada uno de sus extremos, como se muestra en la [Figura 4.13](#) para un objeto extenso  $\overline{PQ}$ .



**Figura 4.13** Ejemplo 2: Lente delgada con diafragma posterior. Para los objetos que se encuentran fuera del eje óptico, la determinación de imágenes se hace a partir de combinar rayos marginales y rayos principales.

Para el objeto Q que se encuentra sobre el eje, puede verse que la determinación de su imagen es idéntica a la empleada en el párrafo anterior, solo que esta vez se ha empleado el rayo marginal 3 que apuntaba al borde inferior de la  $PE_2$ , es decir el punto  $L_2'$ . Al desviarse en la lente el rayo sigue la dirección  $3'$ , que pasa por el objeto que dió lugar a la imagen, esto es el punto  $L_2$ .

El objeto puntual P que se encuentra fuera del eje requiere un tratamiento algo diferente. Dado que el rayo está fuera del eje, debemos emplear dos rayos (rayos 1 y 2 en la [Figura 4.13](#)) para encontrar su imagen:

- El rayo 1 apunta al borde de la  $PE_2$ , el punto  $P_2'$ . Dicho rayo al desviarse en la lente, debe continuar su marcha por el objeto que dió lugar a la imagen  $P_2'$ , es decir, el punto  $P_2$ . Esto da lugar al rayo  $1'$ . Este rayo es **marginal**.
- El rayo 2, por otro lado, apunta al centro de la  $PE_2$ , el punto  $E_2'$ . Al desviarse en la lente  $LD_1$ , el rayo apunta al objeto que dió lugar a la imagen, esto es, el punto  $E_2$ . El resultado es el rayo  $2'$ , cuya intersección con el rayo  $1'$  da la imagen  $P'$ . Este rayo se denomina **principal**. Los rayos principales son de gran importancia para detectar y corregir aberraciones en los sistemas ópticos.

### 4.3.1.3. Caso 3: Dos lentes delgadas sin diafragma

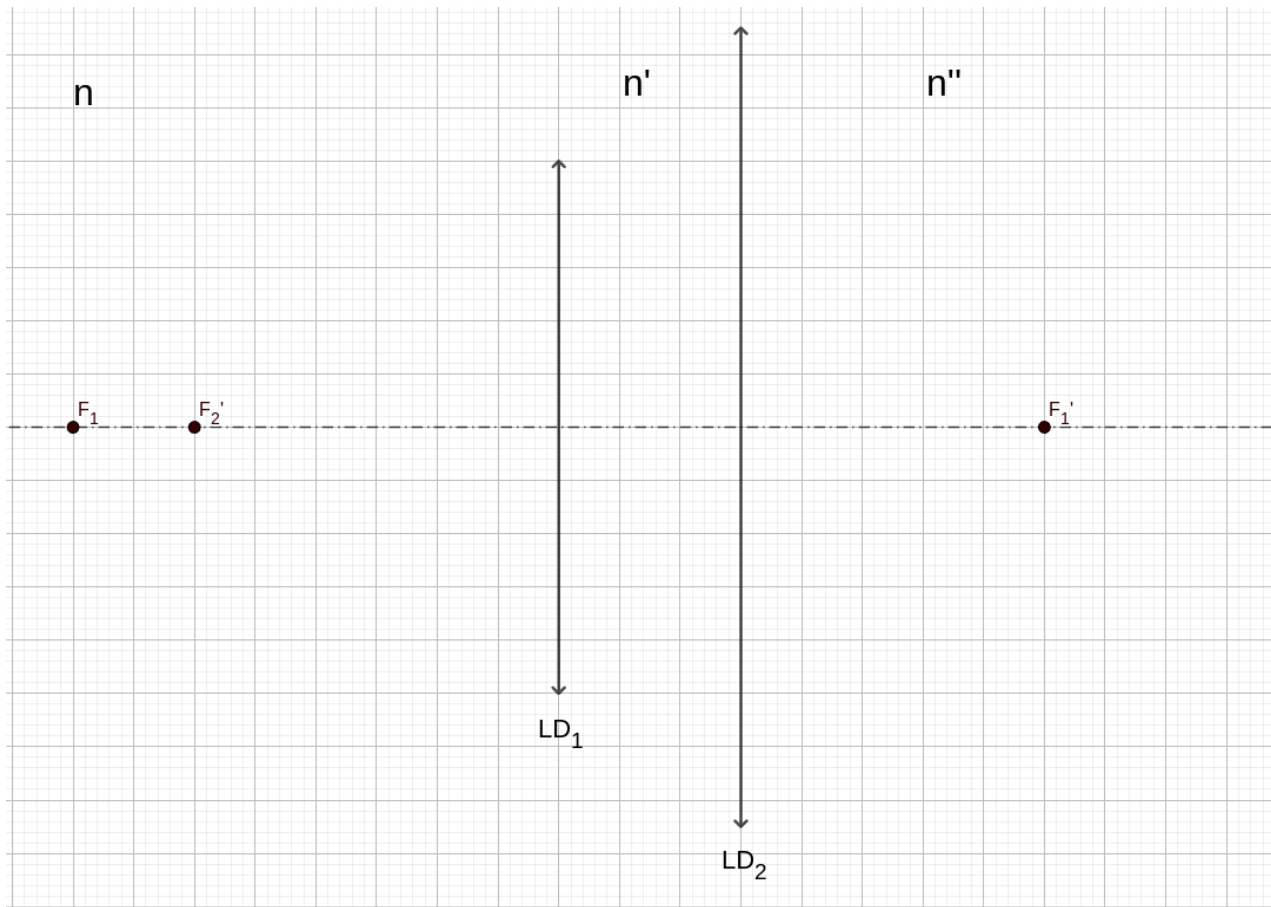
En el tercer caso consideraremos la presencia de sólo dos lentes delgadas. En este caso, los bordes mismos de las lentes serán los que oficiarán como potencial DA. En la [Figura 4.14](#) mostramos a todos los elementos junto con sus respectivos focos (Paso 1). Como existen tres lentes, hacemos la distinción apropiada de los índices de refracción, aunque en este caso consideraremos que  $n = n' = n'' = 1$ .

#### Paso 2: Análisis del sistema

Si DA = $LD_1$ : $PE_1 = LD_1$ $PS_1 = \text{Img de } LD_1 \text{ dada por } LD_2$	Si DA = $LD_2$ : $PE_2 = \text{Img. de } LD_2 \text{ dada por } LD_1$ $PS_2 = LD_2$
--	---

#### **¡Aclaración importante!**

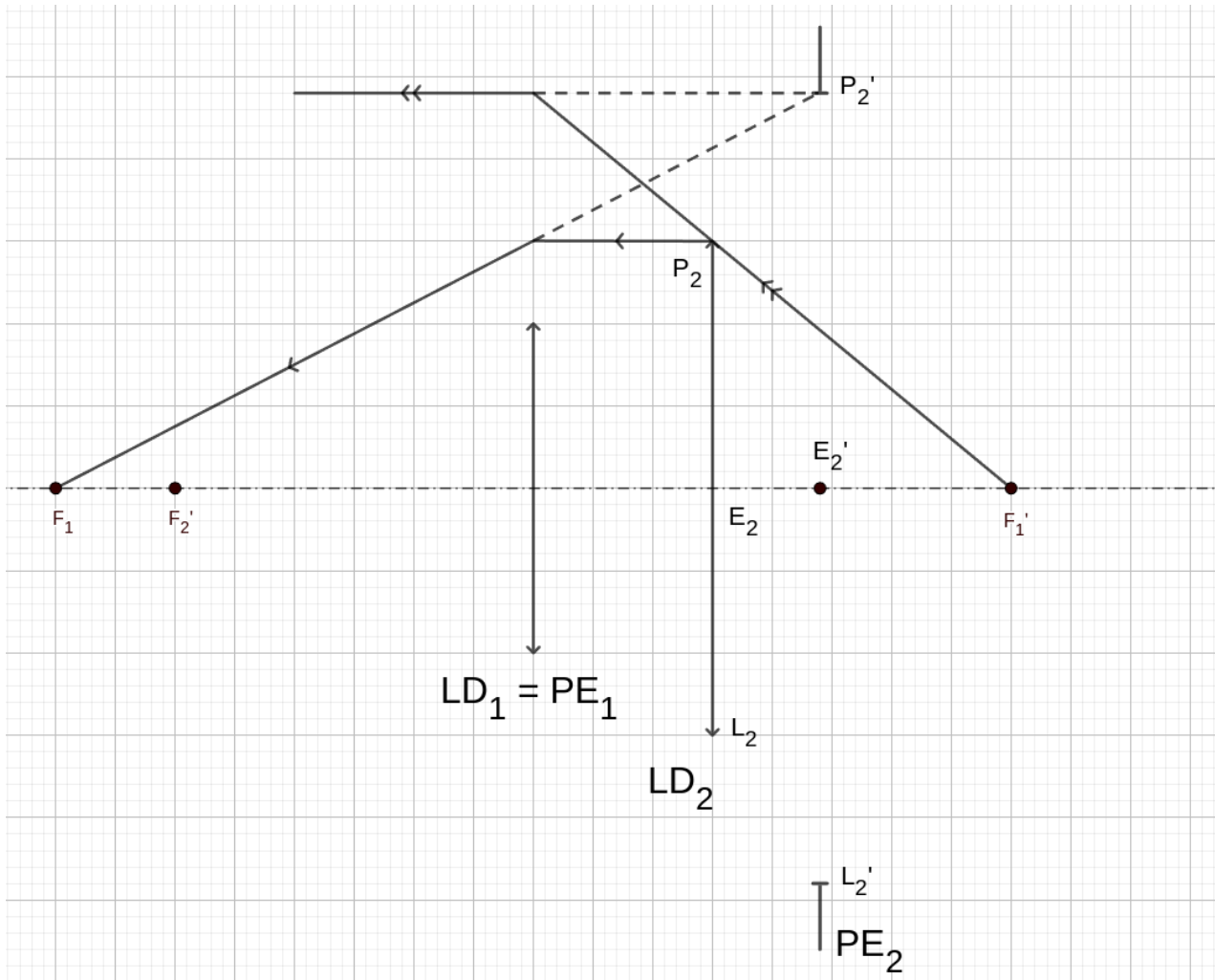
Cuando decimos que " $PE_2 = \text{Img. de } LD_2 \text{ dada por } LD_1$ " o que " $PS_1 = \text{Img de } LD_1 \text{ dada por } LD_2$ " lo que queremos decir es que la Pupila de entrada/salida será la imagen de los **bordes de la lente**. Esto significa que cuando hagamos el trazado correspondiente para encontrar la pupila de entrada/salida consideraremos a dichos bordes como objetos puntuales fuera del eje y no consideraremos el desvío de rayos que se daría en la lente propiamente dicha.



**Figura 4.14** Ejemplo 3: Dos lentes delgadas sin diafragma.

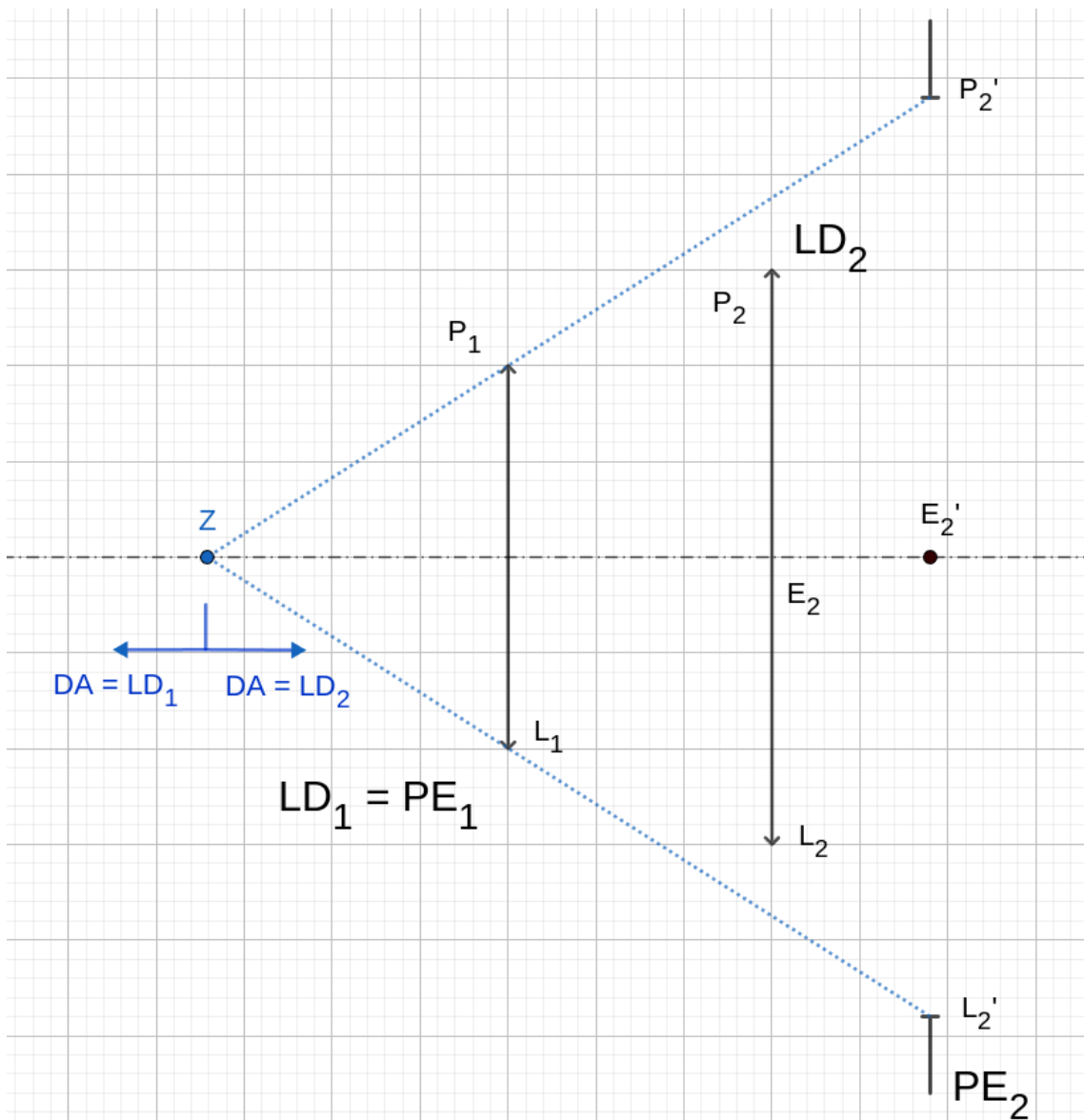
Datos del sistema:  $Ap_{LD_1} = 2 \text{ cm}$ ;  $Ap_{LD_2} = 3 \text{ cm}$ ;  $f_{LD_1} = 4 \text{ cm}$ ;  $f_{LD_2} = 4.5 \text{ cm}$ ;  $d_{LD_1,LD_2} = 1.5 \text{ cm}$

Paso 3: **Determinación de las PE.** A partir del análisis del sistema vemos que si  $LD_1$  funcionase como DA, sería el mismo elemento el que obraría como PE, por lo que no es necesario encontrar una imagen en este caso. En el caso de  $LD_2$ , al igual que en el ejemplo anterior, observamos que la PE que correspondería a  $LD_2$ , no serían los bordes de la lente, sino la imagen de dichos bordes, producida por  $LD_1$ , obtenida a partir de trazar rayos de derecha a izquierda, como se muestra en la [Figura 4.15](#). Es preciso notar en este caso, que como lo que se está buscando es la imagen de los **bordes de la lente**, se ignora el desvío de rayos que se da, en este caso, en  $LD_2$ . Dicho de otra manera, se realiza un trazado de rayos para encontrar la imagen de los puntos  $P_2$  y  $L_2$ , ignorando el hecho de que ambos puntos pertenecen a una lente.



**Figura 4.15** Dos lentes delgadas sin diafragma. El trazado para encontrar las pupilas de entrada se hace de la misma manera que en el ejemplo del Caso 2. Para realizar el trazado, consideraremos a los bordes de la lente delgada  $LD_2$  como un objeto extenso.

Paso 4: **Determinación de los bordes de zona.** Una vez más, la determinación de las zonas que corresponden a cada DA se hace uniendo los bordes de las posibles Pupilas de Entrada del sistema. En la [Figura 4.16](#), tal trazado se ha realizado uniendo los puntos  $P_2'$  y  $P_1$  (bordes de pupila superiores) y los puntos  $L_2'$  y  $L_1$  (bordes de pupila inferiores). La intersección de tales rayos, da como resultado el punto que delimita a las dos posibles zonas, el punto Z.



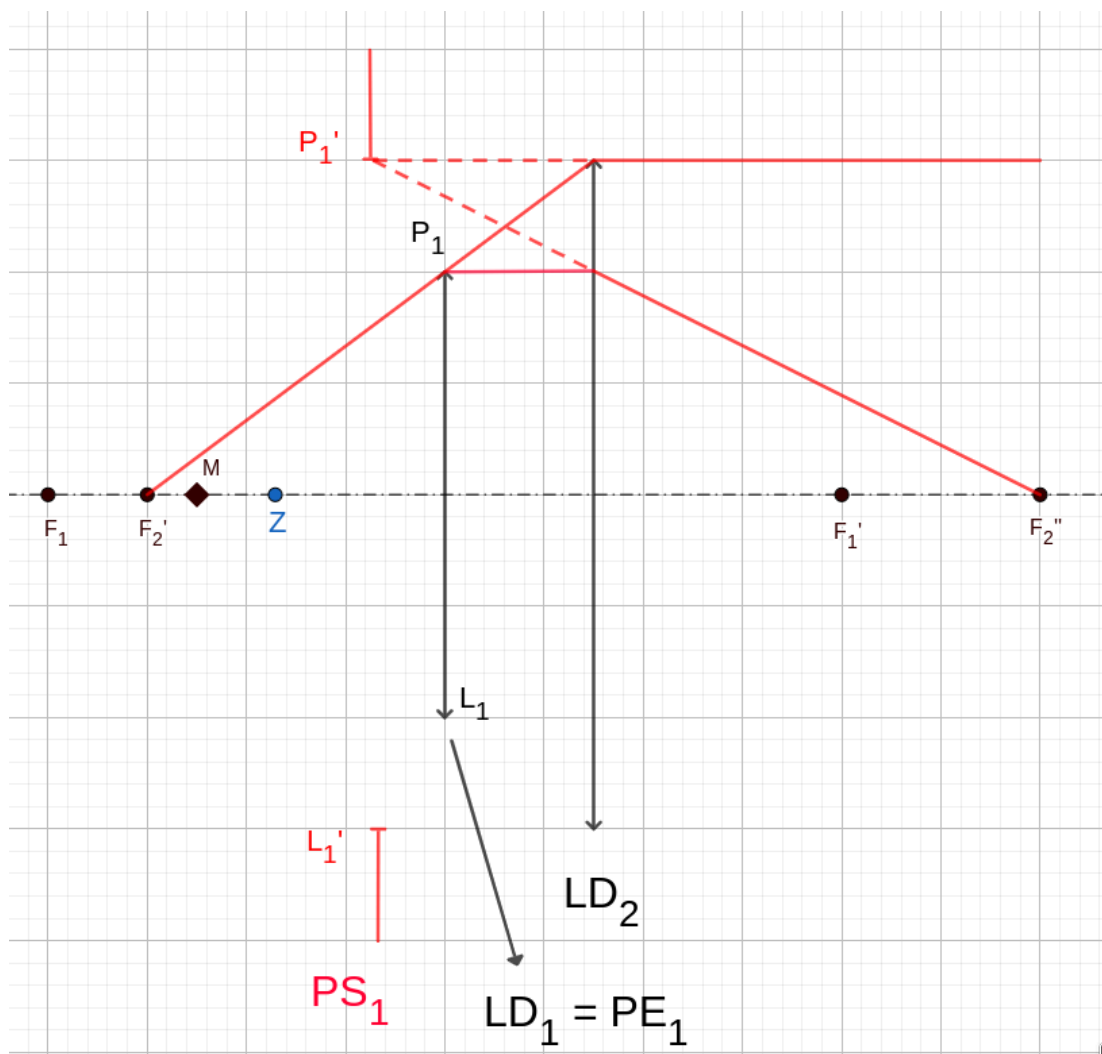
**Figura 4.16** Dos lentes delgadas sin diafragma. Al igual que en el ejemplo del Caso 1. La unión de los posibles bordes de las pupilas de entrada nos permite determinar a qué región del espacio le corresponde cada DA.

**Paso 5: Determinación de los DA.** En este caso, al igual que en el Caso 1, el análisis geométrico nos permite observar que cualquier objeto que se ubique sobre el eje óptico del sistema a la derecha del punto marcado como Z, tendrá como DA a la lente delgada  $LD_2$ , mientras que para cualquier objeto ubicado en el eje óptico a la izquierda de Z, el DA correspondiente será  $LD_1$ . De modo similar, para objetos que se encuentren fuera del eje óptico la determinación se del elemento que subtiende menor ángulo se puede realizar también, dado como resultado que el DA es  $LD_2$  para objetos que se encuentren dentro del triángulo formado por las líneas de puntos, mientras que para objetos que se encuentren fuera de dicho triángulo, el DA será  $D_1$ .

A continuación, procedemos a mostrar la determinación de imágenes para este sistema, considerando dos objetos puntuales, uno cuyo DA es  $LD_1$  y otro cuyo DA es  $LD_2$ .

### Objeto puntual ubicado sobre el eje a la izquierda de Z (DA = $LD_1$ )

Consideremos el objeto M que se encuentra a la izquierda del punto Z, como se muestra en la [Figura 4.17](#). Como ya se dijo, el objeto que oficiará de DA serán los bordes de la lente  $LD_1$ . En base al análisis realizado en el Paso 2, podemos afirmar entonces que la Pupila de Salida del sistema será  $PS_1$ , que es la imagen de los bordes de  $LD_1$  dados por  $LD_2$ , cuando los bordes de  $LD_1$  se ven desde la derecha de la imagen. En la misma [Figura 4.17](#) se ha realizado, en rojo, el trazado de rayos para encontrar la  $PS_1$ .

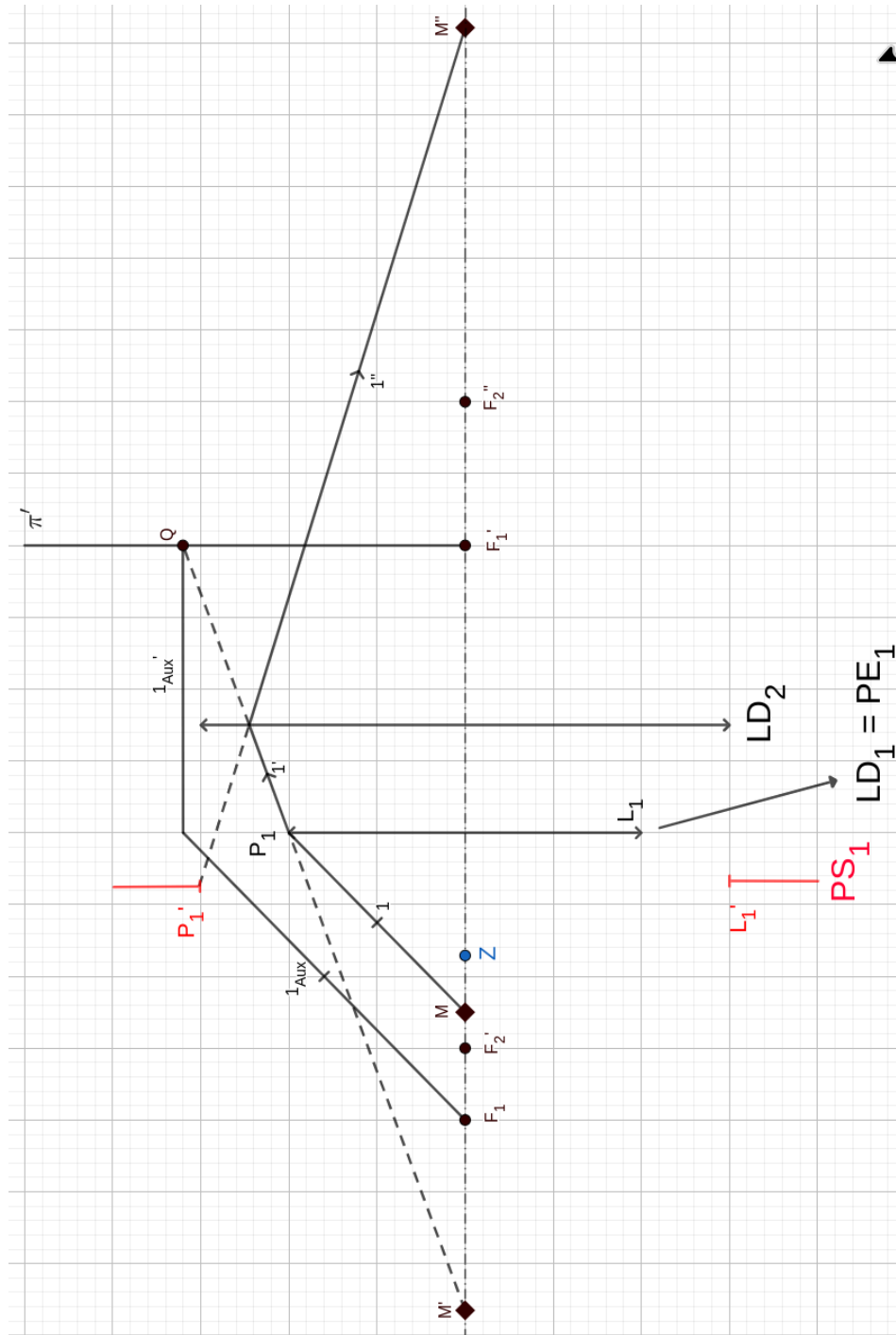


**Figura 4.17** Dos lentes delgadas sin diafragma. Una vez determinado el DA para el objeto dado, se puede determinar la PS correspondiente. En este caso se buscan las imágenes de los bordes de la lente delgada, por lo que no se consideran los desvíos de los rayos que podrían darse en la misma.



Una vez determinadas ambas PE y PS se puede iniciar el trazado empleando rayos marginales. El resultado de tal trazado puede observarse en la [Figura 4.18](#). Al igual que en Caso 1 el primer rayo que parte de M apunta al borde de la PE correspondiente al DA, en este caso el borde  $P_1$  de la  $PE_1$ . Ahora bien, en este caso, como la pupila de entrada consiste en los bordes de una lente, es de esperar que el rayo 1 que incide sobre la misma deba ser desviado. En esta ocasión, dado que no podemos emplear aún la pupila de salida para determinar la dirección de salida del rayo, debemos emplear un rayo auxiliar para determinar al rayo 1' que va desde  $LD_1$  hasta  $LD_2$ .

Finalmente, para determinar la dirección del rayo final 1" sí podemos emplear la información de la ubicación de la  $PS_1$ , ya que la misma es la imagen de los bordes de  $LD_1$  dados por  $LD_2$ . En este caso, como el rayo inicial fue hacia el borde  $P_1$ , la dirección del rayo de salida debe parecer provenir del borde correspondiente  $P_1'$ . Finalmente, la intersección del rayo 1" con el eje óptico da como resultado la imagen final M". En el dibujo se ha representado por completitud a la imagen intermedia M' (la imagen del objeto M, dada por  $LD_1$ ).



**Figura 4.18** Dos lentes delgadas sin diafragma. Una vez determinadas las PE y PS correspondientes, la imagen del objeto puede determinarse por el método de los rayos marginales, trazando un rayo que pasa por el objeto y la PE del sistema (borde P<sub>1</sub>). En este caso, como la PE es una lente, debe considerarse el desvío de los rayos que se dan en la misma, para lo que se emplea un rayo auxiliar. Una vez que el rayo que emerge de LD<sub>1</sub> llega a LD<sub>2</sub>, la dirección del rayo saliente final se determina a través del borde correspondiente de la PS<sub>1</sub> (P<sub>1</sub>'). La intersección del rayo de salida con el eje dará como resultado la ubicación de la imagen M''.



## Objeto puntual ubicado sobre el eje a la derecha de Z (DA = LD<sub>2</sub>)

Consideremos el caso de un objeto N que se encuentra a la derecha de Z. En este caso, su DA serán los bordes de LD<sub>2</sub>, lo que a su vez significa que la Pupila de Entrada será PE<sub>2</sub>, es decir, la imagen de los bordes de LD<sub>2</sub> producidos por LD<sub>1</sub>, según el análisis realizado en el paso 2 de este ejemplo. Observando el mismo análisis podemos ver que la Pupila de Salida son también los bordes de LD<sub>2</sub>.

Para iniciar el trazado de rayos empleando rayos marginales, se debe trazar un primer rayo 1 que parte del objeto hasta uno de los bordes de la pupila de entrada. En el trazado de la [Figura 4.19](#) se ha elegido el borde superior P<sub>2</sub>'. Antes de llegar a la PE<sub>2</sub> el rayo 1 es desviado por la LD<sub>1</sub>. La marcha de este rayo se puede continuar buscando al objeto que produjo la imagen de P<sub>2</sub>', es decir, el punto P<sub>2</sub> (recordemos que P<sub>2</sub>' es la imagen de P<sub>2</sub> producida por LD<sub>1</sub>).

Ahora bien en este caso, de forma similar a lo que ocurrió en el ejemplo anterior, ocurre que el borde de la pupila de salida coincide con un elemento que desvía los rayos de luz, una lente delgada, esto significa que para poder determinar la dirección de salida del rayo 1" se debe emplear un rayo auxiliar, que se ha trazado en rojo en la [Figura 4.19](#).

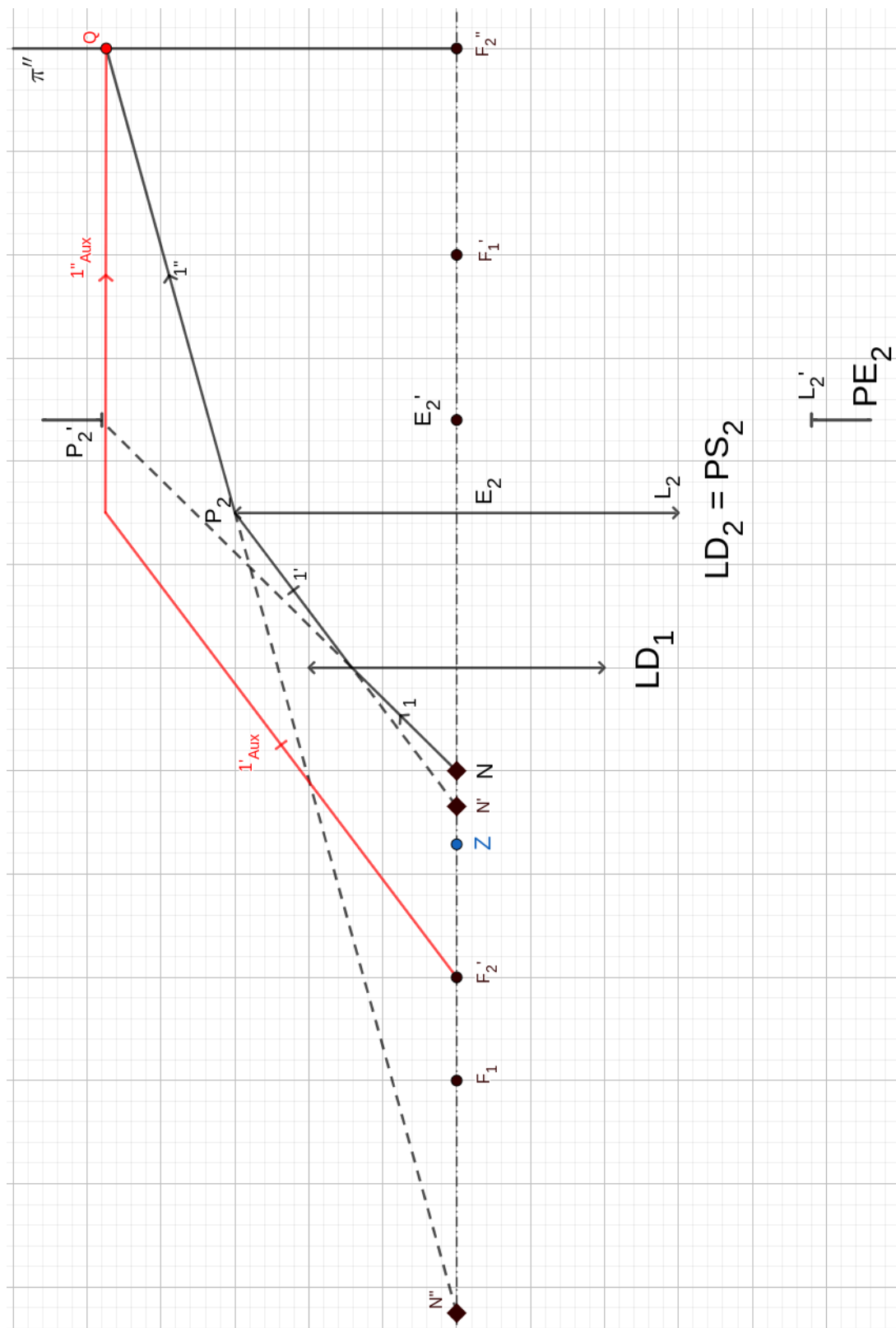


Figura 4.19 Dos lentes delgadas sin diafragma. Cuando la pupila de salida coincide con una lente, la determinación de la marcha de los rayos se hace empleando un rayo auxiliar.



## Resumen de casos posibles para sistemas de dos elementos

Ahora que hemos analizado y encontrado los diafragmas de apertura en diferentes sistemas que consisten en dos elementos, quien lee podrá notar que existen algunas características que todos estos sistemas tienen en común:

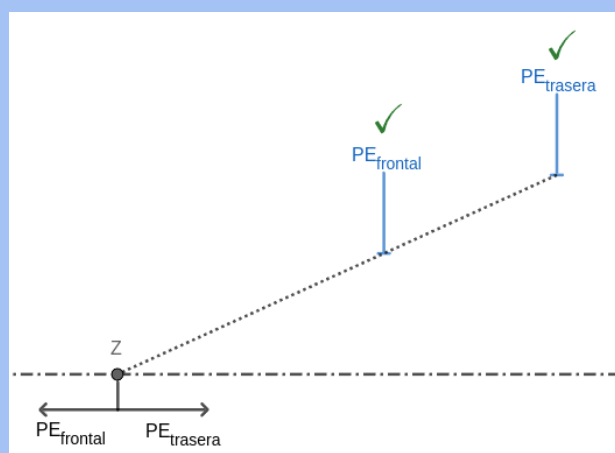
- En los sistemas de dos elementos, siempre encontraremos dos posibles pupilas de entrada
- De estas posibles pupilas de entrada, siempre habrá una que esté delante y otra detrás, una que esté más alejada del eje del sistema que la otra.
- Como la posible pupila de entrada que se encuentra delante no necesariamente debe corresponder al primer elemento del sistema, para los propósitos de este resumen la indicaremos como  $PE_{\text{frontal}}$ .
- Por razones similares, notaremos a la posible pupila de entrada que queda detrás, y sólo en este resumen,  $PE_{\text{traserá}}$ .
- Para simplificar este análisis, sólo indicaremos a los bordes superiores de las posibles pupilas de entrada.

En lo que sigue veremos cómo se puede determinar la pupila de entrada según la ubicación de un objeto en el eje del sistema en relación a la posición de las posibles pupilas de entrada.

Situación 1: la  $PE_{\text{traserá}}$  se encuentra más alejada del eje que la  $PE_{\text{frontal}}$ .

En esta situación se puede determinar un punto Z en el eje del sistema a partir de unir los bordes de las posibles pupilas de entrada.

Si hacemos girar a esa línea imaginaria alrededor del eje del sistema quedará determinado un cono, y todos los objetos que se encuentran por fuera de ese cono tendrán como pupila de entrada a la  $PE_{\text{frontal}}$ , mientras que todos los puntos que queden por dentro de ese cono, tendrán como pupila de entrada a la  $PE_{\text{traserá}}$ .

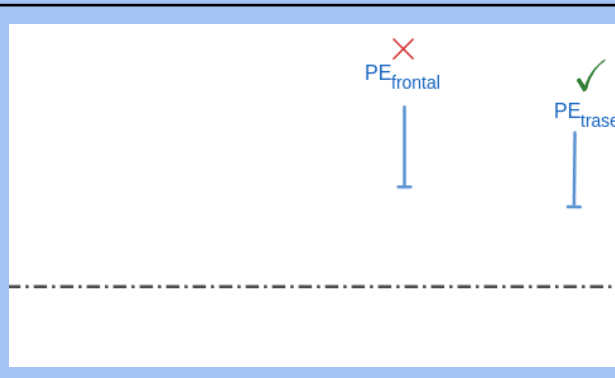
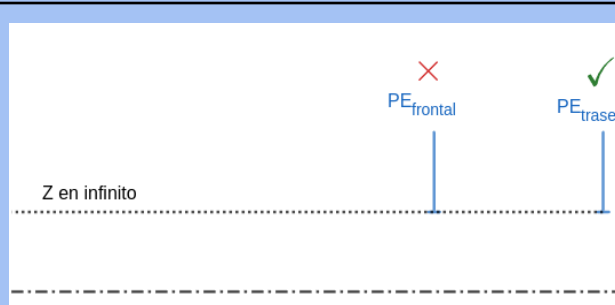


Situación 2: la  $PE_{\text{traserá}}$  se encuentra a la misma altura o más cerca del eje que la  $PE_{\text{frontal}}$ .

En esta situación no existe objeto real para el cual la  $PE_{\text{frontal}}$  subtienda menor ángulo que la  $PE_{\text{traserá}}$ .

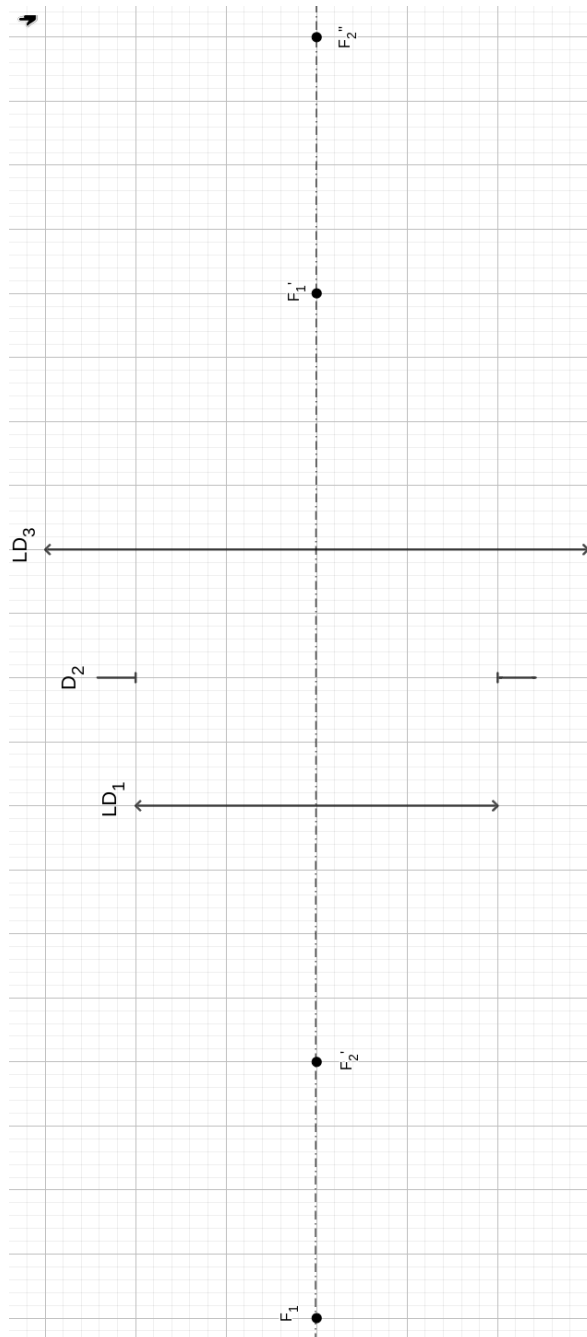
Esto significa que la única pupila de entrada del sistema es la  $PE_{\text{traserá}}$ .

En estas condiciones, decimos que la  $PE_{\text{traserá}}$  anula a la  $PE_{\text{frontal}}$ .



### 4.3.1.4. Caso 4: Un diafragma entre dos lentes delgadas

Consideremos el último caso de esta serie de ejemplos, que consiste en dos lentes delgadas con un diafragma entre ambas, como se muestra en la [Figura 4.20](#). En dicha Figura se han ubicado los elementos junto con la nominación correspondiente (Paso 1).



**Figura 4.20** Dos lentes delgadas con un diafragma en el medio. Datos del sistema:

$$Ap_{LD_1} = 2 \text{ cm}; Ap_{D_2} = 2 \text{ cm}; Ap_{LD_3} = 3 \text{ cm};$$

$$f_{LD_1} = 4 \text{ cm}; f_{LD_3} = 4 \text{ cm}; d_{LD_1, D_2} = 1 \text{ cm}; d_{LD_1, LD_3} = 2 \text{ cm}$$



## Paso 2: Análisis del sistema

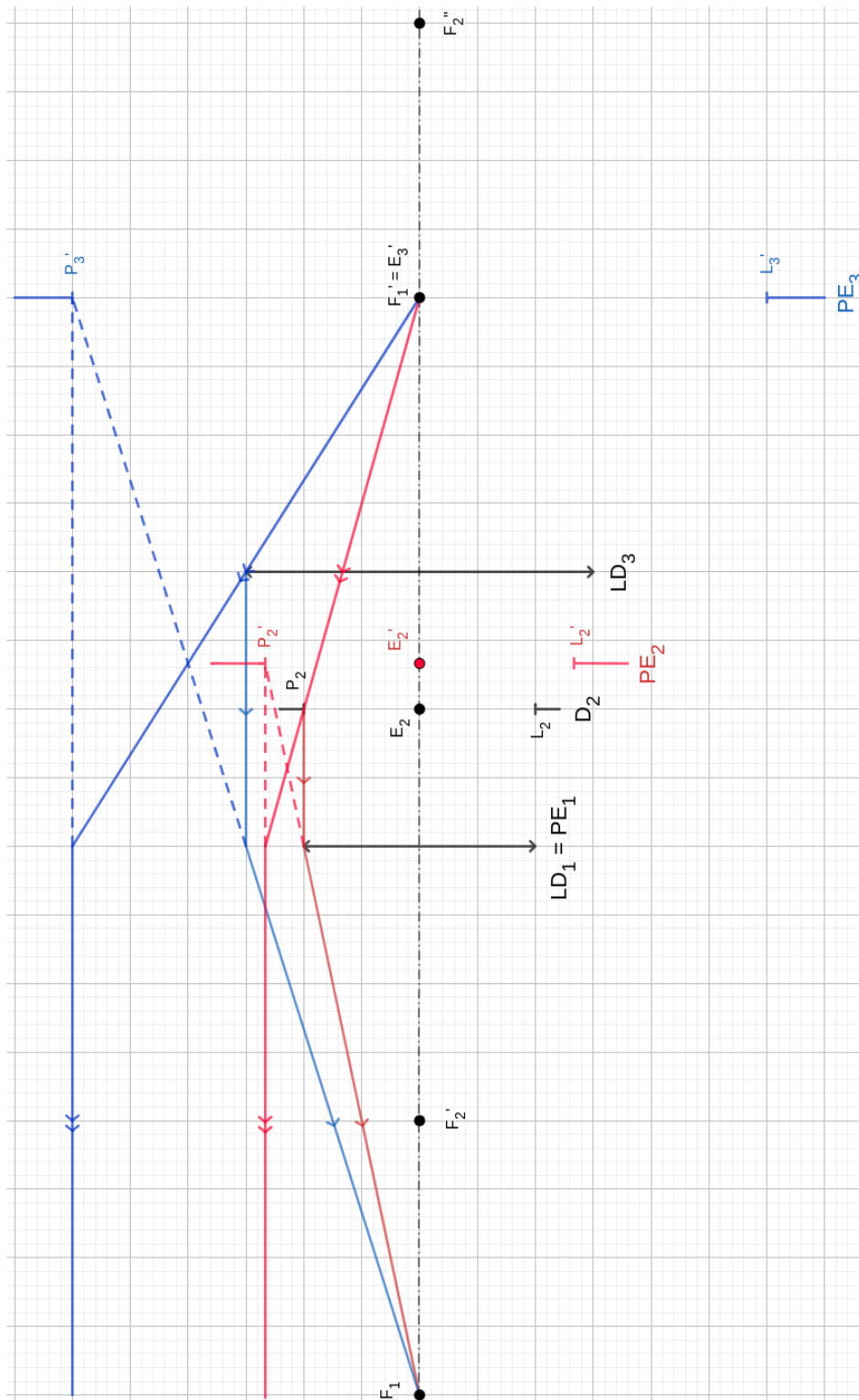
<b>Si DA = LD<sub>1</sub>:</b> $PE_1 = LD_1$ $PS_1 = \text{Img de } LD_1 \text{ dada por } LD_3$	<b>Si DA = D<sub>2</sub>:</b> $PE_2 = \text{Img. de } D_2 \text{ dada por } LD_1$ $PS_2 = \text{Img. de } D_2 \text{ dada por } LD_3$	<b>Si DA = LD<sub>3</sub>:</b> $PE_3 = \text{Img. de } LD_3 \text{ dada por } LD_1$ $PS_3 = LD_3$
--	---	---

Paso 3: **Determinación de las PE.** A partir del análisis del sistema vemos que si LD<sub>1</sub> funcionase como DA, sería el mismo elemento el que obraría como PE, por lo que no es necesario encontrar una imagen en este caso. En el caso de D<sub>2</sub>, tenemos que la PE correspondiente sería la imagen de los bordes de D<sub>2</sub> producidos por LD<sub>1</sub>. Del mismo modo, si los bordes de LD<sub>3</sub> oficiasen como DA sería la imagen de dichos bordes producida por LD<sub>1</sub> la que funcionará como PE<sub>3</sub>. En ambos casos, el trazado debe realizarse de derecha a izquierda, como se muestra en la [Figura 4.21](#).

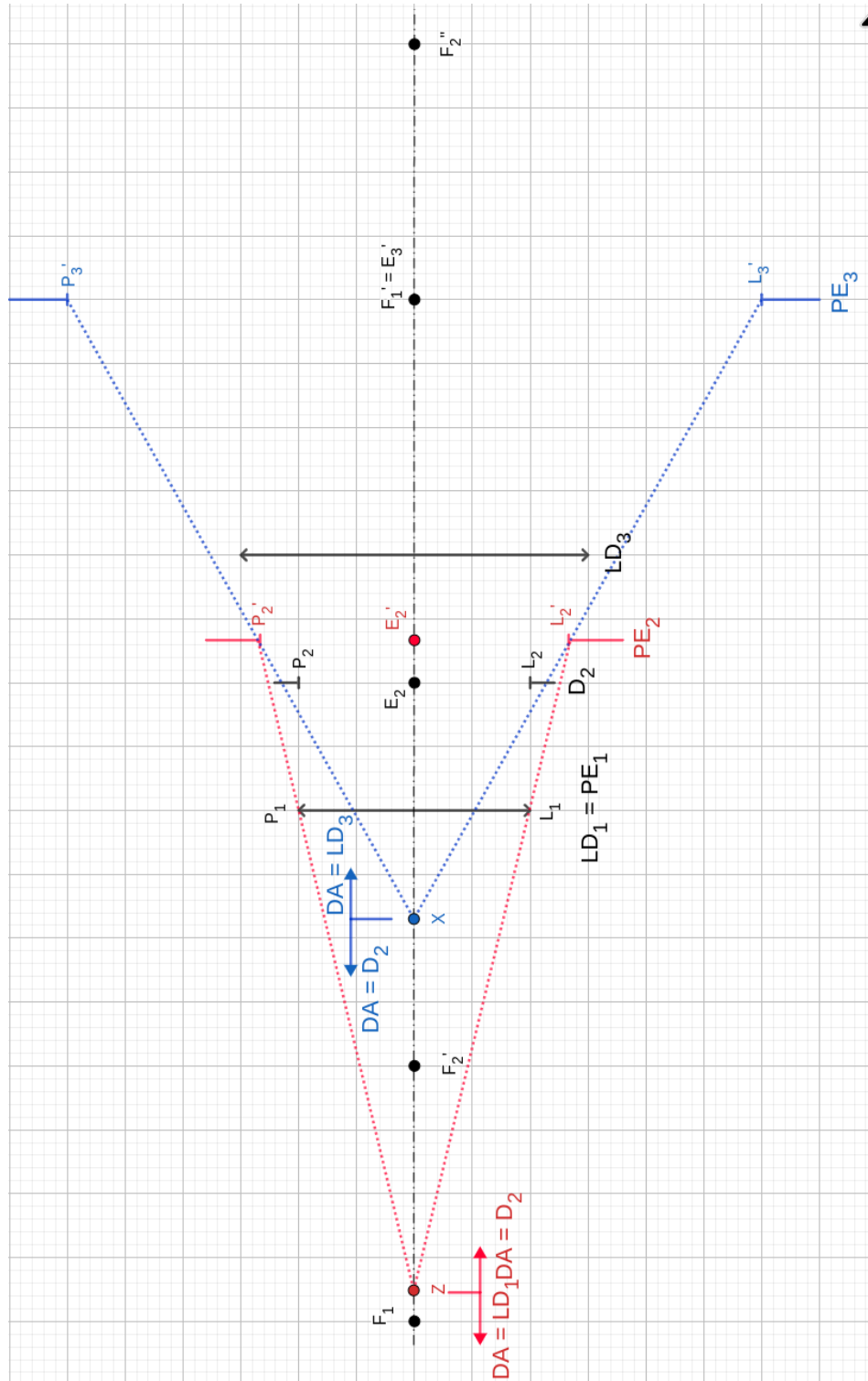
Paso 4: **Determinación de los bordes de zona.** Cuando se tienen varios elementos, la determinación de los bordes de zona debe hacerse analizando, para cada par de pupilas de entrada, cuál es el elemento que subtiende el menor ángulo posible.

Para el caso presentado en este ejemplo, dicho análisis da como resultado tres zonas, y en cada zona cada uno de los tres elementos presentes oficia como DA. La separación entre las zonas puede verse en la [Figura 4.22](#) y en la tabla que se muestra a continuación:

Posición del objeto (en el eje)	Pupila de entrada con menor ángulo	Diafragma de Apertura
A la izquierda de Z	PE <sub>1</sub>	LD <sub>1</sub>
Entre Z y X	PE <sub>2</sub>	D <sub>2</sub>
A la derecha de X	PE <sub>3</sub>	LD <sub>3</sub>



**Figura 4.21** Dos lentes delgadas con un diafragma en el medio. En rojo se muestra el trazado para encontrar la PE<sub>2</sub> (imagen de los bordes de D<sub>2</sub> dados por LD<sub>1</sub>), mientras que en azul se muestra el trazado para encontrar la PE<sub>3</sub> (imagen de los bordes de LD<sub>3</sub> dados por LD<sub>1</sub>). Para el caso de la PE<sub>1</sub> no es necesario encontrar ninguna imagen, ya que el elemento coincide con la PE<sub>1</sub>.



**Figura 4.22** Dos lentes delgadas con diafragma en el medio. En este caso la determinación de los bordes de zona debe realizarse estudiando, para los diferentes pares de pupilas de entrada, cuál subtende el menor ángulo. En este caso, existen dos bordes de zona, que se determinan por unir los bordes de las  $PE_1$  y  $PE_2$  (en rojo) y por unir los bordes de las  $PE_2$  y  $PE_3$  (en azul).

Paso 5: **Determinación de los DA.** En este caso, podemos observar que existen dos bordes de zona, es decir, que dependiendo dónde se ubique un objeto, su luz puede encontrarse limitada por cualquiera de los tres elementos posibles. **Vale mencionar que dependiendo de la ubicación de las pupilas de entrada, puede darse que haya uno, dos o tres posibles diafragmas de apertura.**

Los criterios para determinar imágenes son similares a los vistos anteriormente. Analizaremos ahora, sin embargo, un caso especial que no fue considerado en los ejemplos anteriores: el de un objeto extenso en que cada uno de sus extremos pertenece a un DA diferente.

Consideremos el objeto extenso  $\overline{MN}$  en la [Figura 4.23](#): si observamos al punto M, notaremos que se encuentra en el eje a la derecha del punto Z, lo que significa que su DA es  $D_2$ , y sus pupilas de entrada y salida serán  $PE_2$  y  $PS_2$ , respectivamente. Sin embargo, para el otro extremo del objeto extenso, el objeto puntual fuera del eje, el punto N, se puede observar a través de un análisis geométrico que la pupila que subtiende menor ángulo es la  $PE_1$ , lo que significa que el DA que corresponde a N será  $LD_1$ , y su pupila de salida  $PS_1$ . Esto será cierto también para cualquier objeto que, estando fuera del eje, se encuentre por fuera del triángulo marcado en línea de puntos roja, es decir, el triángulo  $\Delta(P_2'ZL_2')$ .

El resultado de que a cada extremo del objeto  $\overline{MN}$  le corresponda un DA diferente, es que para cada extremo del mismo se deberán emplear diferentes rayos marginales y principales.

Para el objeto puntual M, como su DA es  $D_2$ , el rayo 1 que parte del objeto debe apuntar a uno de los bordes de la  $PE_2$ , (en el caso de la [Figura 4.23](#), se ha elegido el borde inferior  $L_2'$ ). Como los bordes de  $PE_2$  son la imagen de los bordes de  $D_2$  producidos por  $LD_1$ , al desviarse en esta lente, el rayo 1 debe dirigirse al objeto que dió lugar a la imagen correspondiente, es decir, al borde de diafragma  $L_2$  (rayo 1'). Una vez que dicho rayo se desvíe en  $LD_2$ , debe parecer provenir del borde correspondiente de la  $PS_2$ , es decir,  $L_2''$ . Esto es así porque  $L_2''$  es la imagen de  $L_2$  producida por  $LD_3$  y el rayo 1' pasa por  $L_2$ . El resultado es el rayo 1'' cuya intersección con el eje da la imagen buscada, M''.

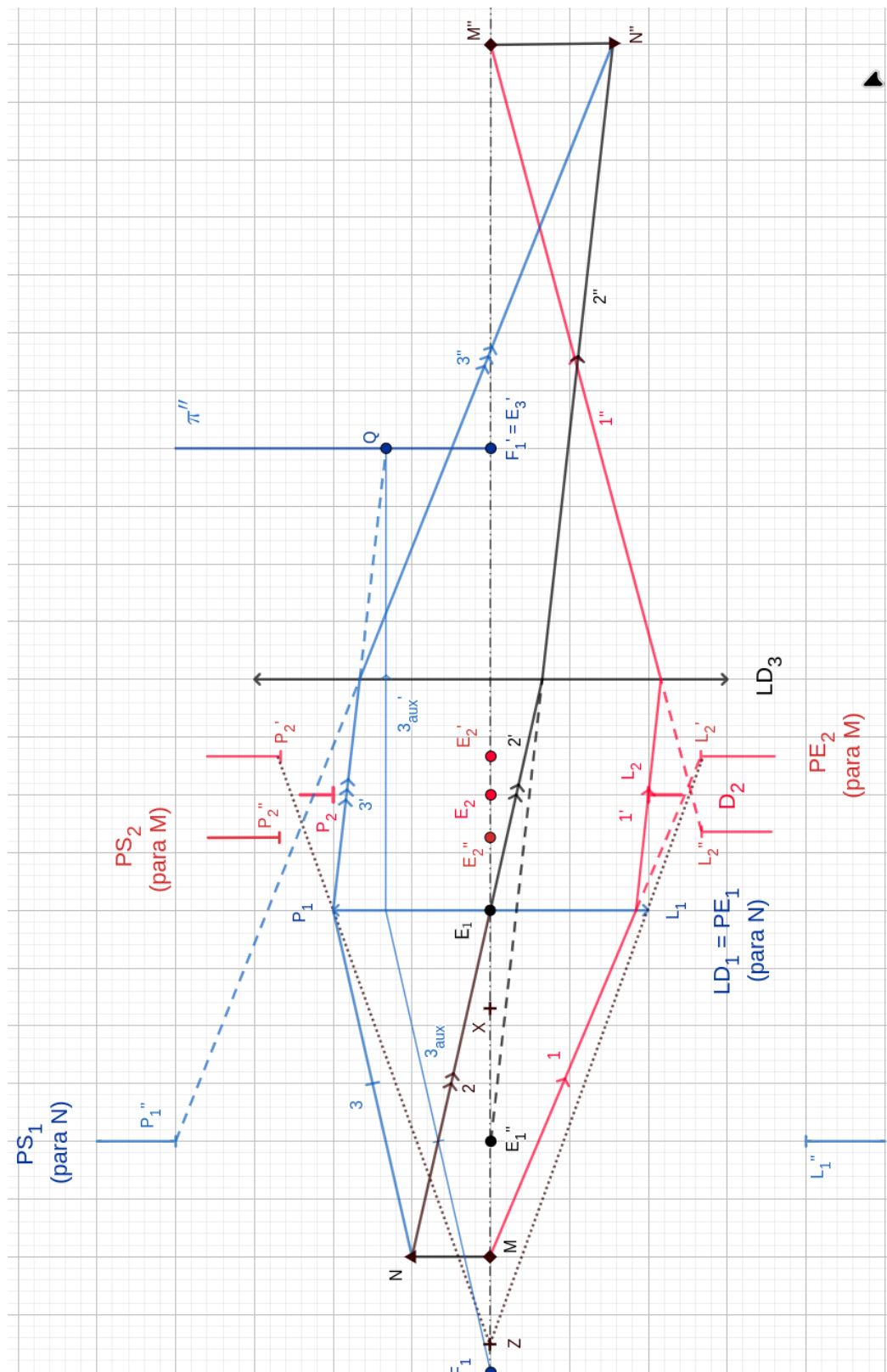
Para el otro extremo del objeto extenso, el punto N, debemos emplear dos rayos para encontrar su imagen, ya que se encuentra fuera del eje. En el caso de la [Figura 4.23](#), se ha elegido emplear un rayo **marginal** (rayo 3, en azul) y un rayo **principal** (rayo 2, en negro). En este caso, como el DA son los bordes de  $LD_1$ , cada rayo apunta al borde (punto  $P_1$ ) y al centro (punto  $E_1$ ) de la  $PE_1$ , respectivamente. El rayo 2 continúa su marcha, ya que apunta al centro de la lente, y por lo tanto no es desviado por la misma (rayo 2'). Al llegar a  $LD_2$ , el rayo 2' se desvía de modo tal que parece



---

provenir del punto  $E_1''$  que es la imagen de  $E_1$  producida por  $LD_3$ , o, lo que es lo mismo, el centro de la  $PS_1$ .

Para el caso del rayo 3, es necesario encontrar la dirección de desvío del mismo en la lente  $LD_1$ . En este caso, al igual que en casos anteriores, como la PE coincide con un elemento que desvía rayos, para determinar la marcha de los mismos se emplea un rayo auxiliar ( $3_{aux}-3_{aux}'$ ), que da la dirección del rayo desviado en  $LD_1$ , el rayo  $3'$ . Al desviarse en  $LD_3$ , el rayo  $3''$  parece provenir del borde correspondiente de la  $PS_1$ , es decir,  $P_1''$ , y su intersección con con el rayo  $2''$  nos da la imagen buscada, el punto  $N''$ .



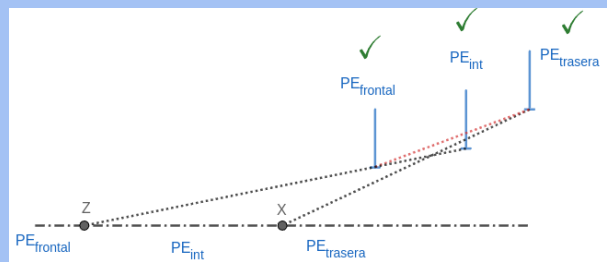
**Figura 4.23** Dos lentes delgadas con diafragma en el medio. Cuando un objeto extenso cruza los bordes de zona, se deben emplear los rayos marginales que corresponden a las respectivos DA de cada extremo para encontrar las imágenes.

## Resumen de casos posibles para sistemas de tres elementos

Al igual que lo hicimos en el caso en que estudiamos sistemas de dos elementos, los sistemas que consisten tres elementos también pueden agruparse en casos típicos, aunque en este caso, existen más combinaciones posibles. La notación que emplearemos en este resumen será similar a la que utilizamos en el resumen anterior con la salvedad de que como en este caso hay tres posibles pupilas de entrada, indicaremos a la pupila de entrada que se encuentra en el medio como  $PE_{int}$ .

Situación 1: la  $PE_{int}$  se encuentra más alejada del eje que la  $PE_{frontal}$ . A su vez, la  $PE_{trasera}$  se encuentra más alejada del eje que la  $PE_{trasera}$ . Finalmente, la  $PE_{int}$  se encuentra por debajo de la línea que une a la  $PE_{frontal}$  y la  $PE_{trasera}$ .

Este caso da como resultado tres zonas, delimitadas en el eje con las letras Z y X. En cada zona cada uno de los tres elementos presentes oficia como DA.

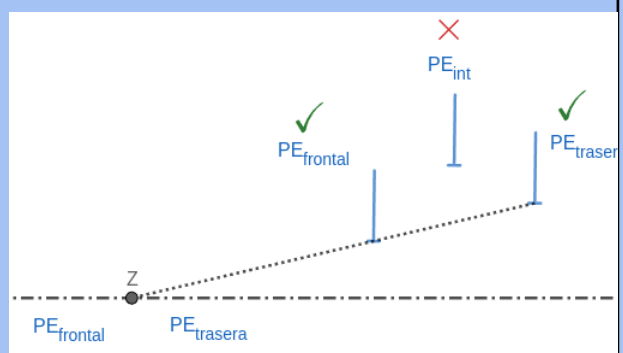
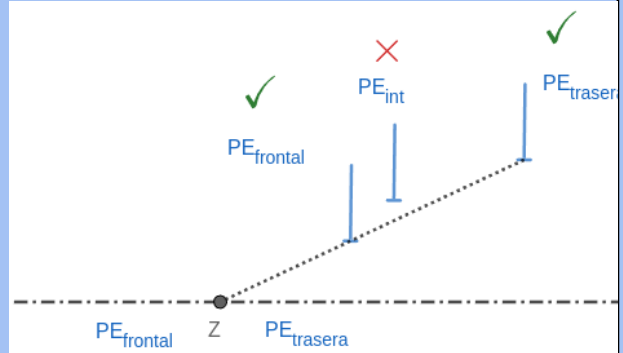


Situación 2: la  $PE_{trasera}$  se encuentra más alejada del eje que la  $PE_{frontal}$ . A su vez, la  $PE_{int}$  se encuentra se encuentra por encima de la línea que une a la  $PE_{frontal}$  y la  $PE_{trasera}$ .

En esta situación se puede determinar un punto Z en el eje del sistema a partir de unir los bordes de las posibles pupilas de entrada.

Si hacemos girar a esa línea imaginaria alrededor del eje del sistema quedará determinado un cono, y todos los objetos que se encuentran por fuera de ese cono tendrán como pupila de entrada a la  $PE_{frontal}$ , mientras que todos los puntos que queden por dentro de ese cono, tendrán como pupila de entrada a la  $PE_{trasera}$ .

En esta situación decimos que la  $PE_{trasera}$  anula a la  $PE_{int}$ .

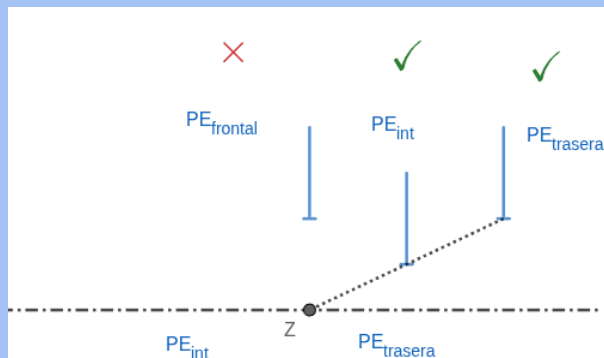


Situación 3: la  $PE_{traseras}$  se encuentra más alejada del eje que la  $PE_{int}$ . A su vez, la  $PE_{int}$  se encuentra se encuentra más cerca del eje que la  $PE_{frontal}$ .

En esta situación se puede determinar un punto Z en el eje del sistema a partir de unir los bordes de las posibles pupilas de entrada.

Si hacemos girar a esa línea imaginaria alrededor del eje del sistema quedará determinado un cono, y todos los objetos que se encuentran por fuera de ese cono tendrán como pupila de entrada a la  $PE_{int}$ , mientras que todos los puntos que queden por dentro de ese cono, tendrán como pupila de entrada a la  $PE_{traseras}$ .

En esta situación decimos que la  $PE_{int}$  anula a la  $PE_{frontal}$ .

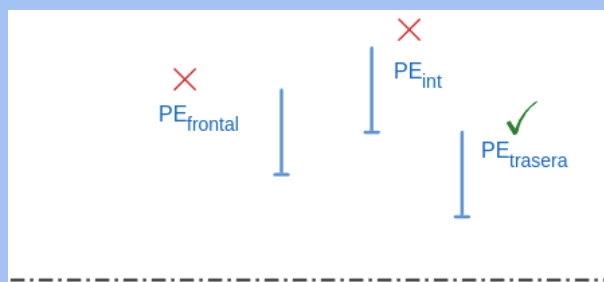
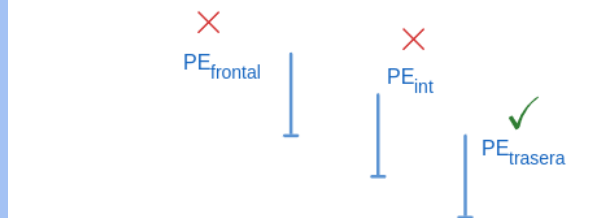


Situación 4: la  $PE_{traseras}$  se encuentra más cerca del eje que la  $PE_{int}$  y la  $PE_{frontal}$ .

En esta situación no existe objeto real para el cual ni la  $PE_{frontal}$  o la  $PE_{int}$  subtendan menor ángulo que la  $PE_{traseras}$ .

Esto significa que la única pupila de entrada del sistema es la  $PE_{traseras}$ .

En estas condiciones, decimos que la  $PE_{traseras}$  anula a las  $PE_{frontal}$  y  $PE_{int}$ .



### 4.4. Campo Visual

Como se dijo al principio del Capítulo, y como bien sabemos por la experiencia cotidiana, como los instrumentos ópticos tienen dimensión finita, sólo una parte del espacio que se encuentra frente a ellos formará parte de la imagen que veremos.

En cada instrumento habrá un elemento que será el que determine los límites de la imagen, y llamaremos a ese elemento **Diafragma de Campo (DC)**. A su vez, una vez determinado el DC, se



podrá determinar cuál es la región del espacio en que se pueden colocar objetos y esperar que los mismos sean observables por el instrumento, es decir, que el instrumento pueda formar imágenes completas de los mismos. Esta región del espacio recibe el nombre de **Campo Objeto o Real**.

Si, utilizando los elementos que forman parte del sistema buscamos las imágenes de los bordes del **Campo Objeto** podremos encontrar lo que se denomina el **Campo Visual, Imagen o Aparente**, que es la región del espacio en que se encontrarán todas las imágenes de los objetos que puedan verse completamente por el instrumento óptico en cuestión. El **campo objeto** y el **campo imagen** se encontrarán muchas veces superpuestos en nuestros diagramas, pero uno corresponde al espacio objeto, mientras que el otro lo hace al espacio imagen, por lo que esta superposición no debe suponer un problema.

En esta sección veremos que la manera más sencilla de determinar el **Diafragma de Campo**, el **Campo Objeto** y el **Campo Imagen**, es a través de la determinación del *Diafragma de Apertura*, la *Pupila de Entrada* y la *Pupila de Salida* del sistema.

#### 4.4.1. Lumbreira de entrada y lumbreira de salida

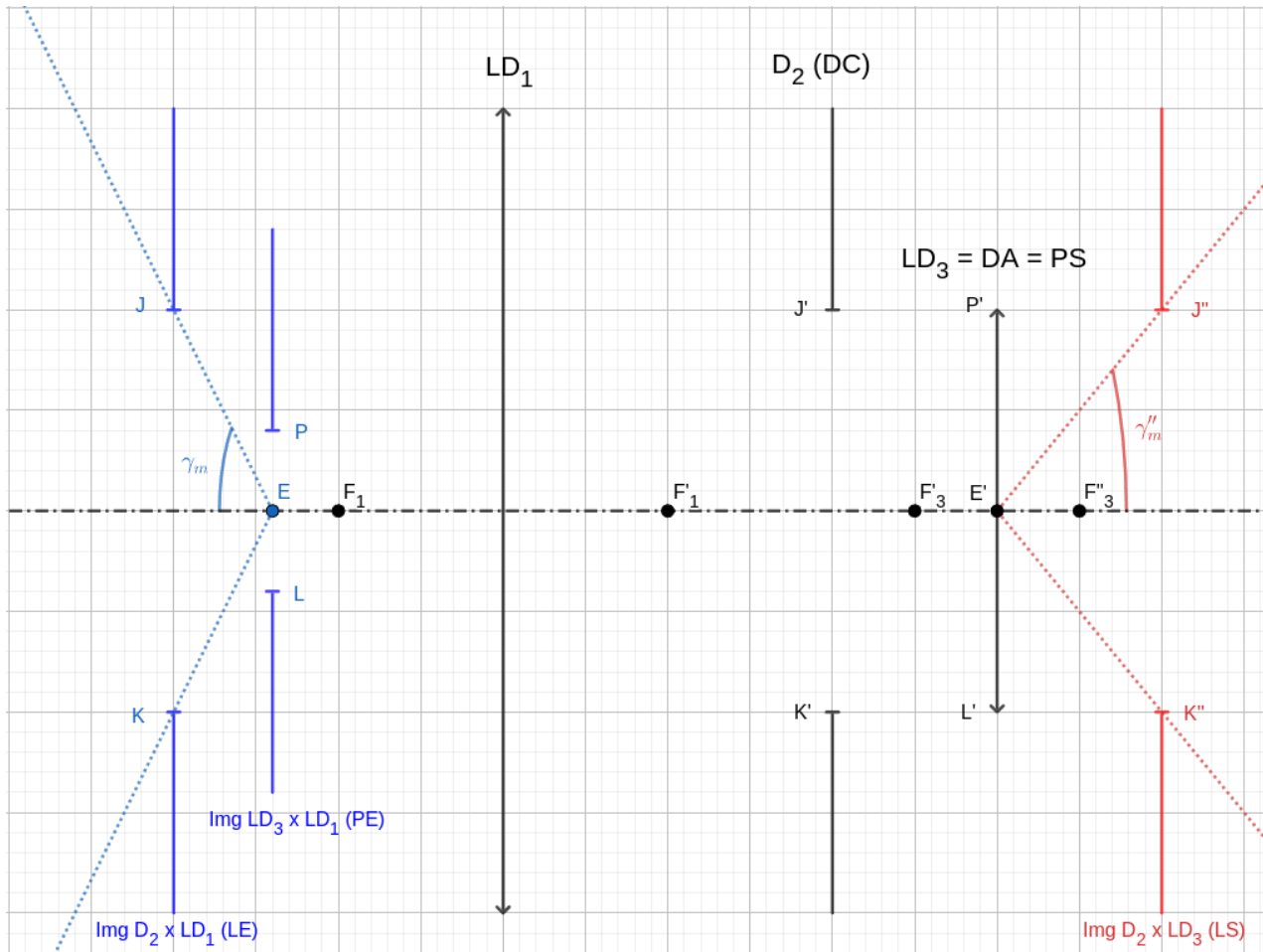
En la [Figura 4.24](#) se ha representado de forma sencilla la configuración de lentes y diafragmas de un telescopio astronómico refractor. Este tipo de telescopios suele constar de un lente objetivo (indicado como  $LD_1$  en la Figura), un lente ocular (indicado como  $LD_3$ ) y un diafragma  $D_2$  ubicado cerca del plano focal de la lente objetivo que en este caso funciona como diafragma de campo (DC). En esta configuración puede verse que la lente  $LD_3$  es la que funciona como diafragma de apertura (DA) y pupila de salida del sistema (PS). Esto significa que la imagen de la  $LD_3$  dada por la  $LD_1$  es la pupila de entrada del sistema (PE).

Además de los elementos y pupilas de entrada y salida del sistema, en la figura se han representado las imágenes de los bordes del diafragma de campo producidas por cada lente. Puede apreciarse en este caso que existen tres elementos que pertenecen al espacio objeto:

- La lente objetivo  $LD_1$
- La imagen de la  $LD_3$  dada por  $LD_1$  (pupila de entrada)
- La imagen de  $D_2$  dada por  $LD_1$

Además puede verse que la imagen de  $D_2$  dada por  $LD_1$  es el elemento del espacio objeto que subtende menor ángulo respecto al centro de la pupila de entrada, lo que la constituye como **Lumbreira de Entrada (LE)** del sistema. El hecho de que la imagen de  $D_2$  dada por  $LD_1$  sea la LE del sistema es lo que nos indica que  $D_2$  es el diafragma de campo (DC) del sistema. Si se traza

una semirrecta con origen en el centro de la pupila de entrada (E) y sentido hacia el borde de la lumbreira de entrada (J) se tiene lo que se denomina como límite del campo medio del sistema. El campo medio determina la región del espacio en que se puede colocar un objeto para que se lo pueda ver completamente a través de la pupila de salida del sistema. Los campos medios suelen darse en función del ángulo que la semirrecta EJ forma con el eje del sistema (el ángulo  $\gamma_m$  en la [Figura 4.24](#)). Al valor dado por  $2\gamma_m$  se lo denomina **campo angular medio**.



**Figura 4.24** Lumbreira de entrada y de salida.

Por otro lado, tenemos que la imagen del diafragma de campo dada por  $LD_3$  constituye la **Lumbreira de Salida (LS)** y el ángulo que subtende el centro de la pupila de salida del sistema con el borde de la pupila de salida se lo denomina **campo aparente medio**. La región limitada por el campo aparente medio, constituye la región del espacio en que se podrán apreciar las imágenes de los objetos que se encuentran dentro del **campo angular medio**. La amplitud angular del campo aparente medio está dada por el ángulo  $2\gamma''_m$ .



#### 4.4.2. Determinación del Campo Visual de sistemas ópticos sencillos

En esta sección presentaremos algunos ejemplos sencillos que servirán a modo de ejemplo de cómo determinar el DC de un sistema. Será importante notar que, independientemente de la complejidad del sistema, el procedimiento que se llevará a cabo será siempre el mismo:

1. **Determinación del DA del sistema.** Empleando los métodos explicados anteriormente en este capítulo se determina el DA del sistema.
2. **Ubicación de los elementos del sistema con la PE y la PS.** Una vez determinado el DA, se ubican todos los elementos del sistema, junto con la correspondiente PE y PS.
3. **Determinación de las posibles lumberras de entrada.** Para ello deberán determinarse todos los elementos o imágenes de elementos que se encuentren en el espacio objeto y que sean distintos de la PE del sistema.
4. **Determinación del DC.** Se determina cuál de todas las posibles lumberras de entrada subtiende menor ángulo con el centro de la PE del sistema. El elemento asociado a esta lumberra será aquél que oficie de Diafragma de Campo.
5. **Determinación del Campo Objeto.** El área determinada desde el centro de la PE hacia los bordes de la lumberra de entrada constituye el campo objeto del sistema.
6. **Determinación del Campo Imagen.** El área determinada desde el centro de la PS hacia los bordes de la lumberra de salida constituye el campo aparente del sistema.

##### 4.4.2.1. Campo Visual de una ventana

El primer ejemplo para la determinación del campo visual, y tal vez el más intuitivo, es el campo visual de una ventana. En este caso el diafragma de apertura que debe considerarse es el propio ojo, que es además pupila de entrada y salida. En función de los pasos indicados en la sección anterior, tenemos:

Paso 1: **Determinación del DA del sistema.** Como se dijo anteriormente, en este caso el DA es el ojo, indicado como PEL en la [Figura 4.25](#).

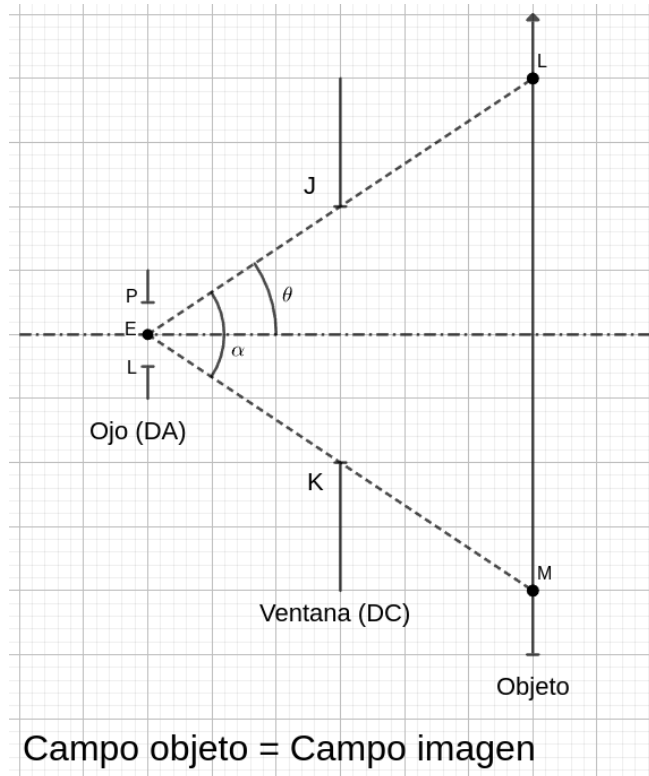
Paso 2: **Ubicación de los elementos del sistema con la PE y la PS.** En la [Figura 4.25](#) se ha representado al ojo como un diafragma y se lo ha ubicado a una cierta distancia de la misma. Como se dijo anteriormente, en este caso, el mismo ojo es PE y PS también.

Paso 3: **Determinación de las posibles lumberras de entrada.** En este caso, el otro elemento aparte del ojo es la ventana, cuyos bordes se han representado con las letras J y K.

Paso 4: **Determinación del DC.** Una vez más, es la propia ventana la que funcionará como DC.

Paso 5: **Determinación del Campo Objeto.** Para determinar el campo objeto debemos trazar las semirrectas EJ y EK. Queda determinado entonces que el campo angular medio tiene magnitud  $\alpha = 2\theta$ , según lo que se observa en la figura.

Paso 6: **Determinación del Campo Imagen.** Como los bordes de la ventana no tienen la capacidad de desviar rayos y el propio ojo es la PS, el campo aparente o imagen coincide con el campo objeto.



**Figura 4.25** Campo objeto e imagen de una ventana. En este caso el campo objeto e imagen coinciden y la amplitud de ambos campos visuales está determinada por la distancia a la que el observador se encuentra de la ventana, así como por sus bordes.

En la [Figura 4.25](#) se ha ubicado, aparte de la ventana, un objeto extenso cuyo centro se encuentra en el eje. En este caso vemos que las semirrectas  $\overline{EJ}$  y  $\overline{EK}$  cortan a dicho objeto en los puntos L y M. Esto significa que para un observador ubicado como en la figura, sólo el segmento  $\overline{LM}$  será visible. Si el observador quisiera ver completamente al objeto extenso debería acercarse a la ventana para aumentar su campo visual.



#### 4.4.2.2. Campo Visual de un espejo plano

El campo visual de un espejo plano guarda muchas similitudes con el caso anterior, con la diferencia de que en este caso la pupila de salida (el ojo) no coincide con la pupila de entrada. En la [Figura 4.26-a](#) se ha representado el caso de una persona que mira un espejo. En dicha figura, el ojo se ha representado como el diafragma PEL y el espejo como el segmento JK.

Paso 1: **Determinación del DA del sistema.** En este caso el DA es el ojo, indicado como PEL en la [Figura 4.26](#).

Paso 2: **Ubicación de los elementos del sistema con la PE y la PS.** En este caso el ojo constituye la pupila de salida del sistema, y la imagen del mismo dada por el espejo, la pupila de entrada, indicada como P'E'L' en la [Figura 4.26](#).

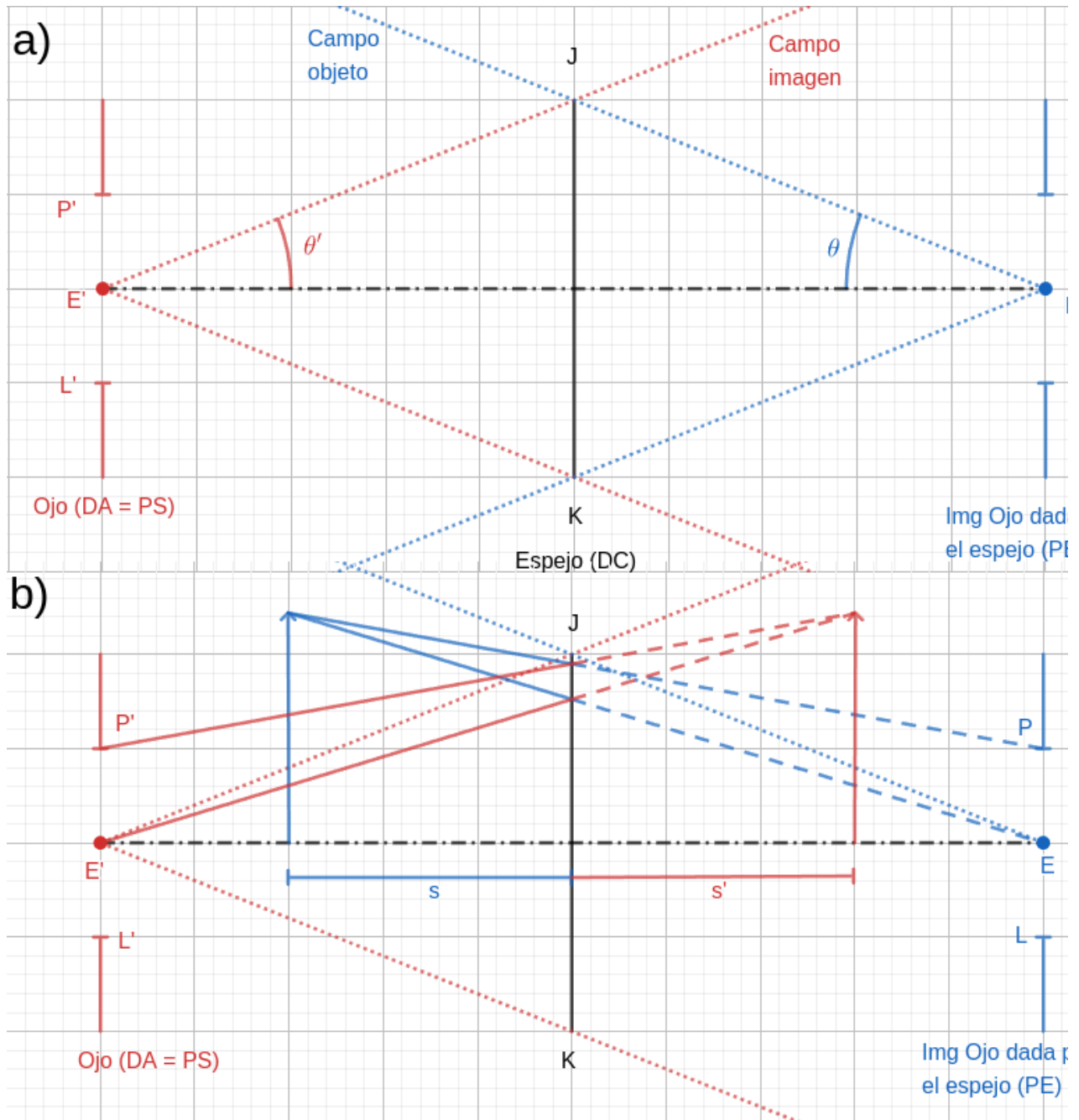
Paso 3: **Determinación de las posibles lumberras de entrada.** En este caso, el otro elemento aparte del ojo es el espejo, cuyos bordes se han representado con las letras J y K. Eso significa que sólo hay una posible lumberra de entrada, el espejo.

Paso 4: **Determinación del DC.** En este caso, no queda otra opción que el espejo constituya el diafragma de campo.

Paso 5: **Determinación del Campo Objeto.** Para determinar el campo objeto debemos trazar las semirrectas EJ y EK. Queda determinado entonces que el campo angular medio tiene magnitud  $\alpha = 2\theta$ , según lo que se observa en la figura.

Paso 6: **Determinación del Campo Imagen.** En este caso, y a diferencia del caso anterior, como la pupila de salida no coincide con la pupila de entrada, para determinar el campo imagen debemos trazar las semirrectas E'J y E'K. Queda determinado entonces que el campo aparente medio tiene magnitud  $\alpha' = 2\theta'$ . En este caso, y como el espejo es plano, el valor del campo objeto es idéntico al campo aparente.

En la [Figura 4.26-b](#) se ha ubicado, además de las pupilas del sistema a un objeto extenso, más alto que el propio espejo, ubicado a cierta distancia  $s$  del mismo. En este caso como la totalidad del objeto se encuentra dentro del campo objeto, el mismo podrá verse íntegramente en el espejo.



**Figura 4.26** Campo objeto e imagen de un espejo plano. En este caso, si bien los campos objeto e imagen no coinciden, si tienen la misma amplitud angular, ya que un espejo plano no tiene ningún tipo de aumento. En este caso, al igual que en el de la ventana, la amplitud del campo está determinada por la distancia a la que se encuentra el observador y por los bordes del espejo.

En la [Figura 4.26-b](#) se ha trazado un rayo marginal y un rayo principal para encontrar la imagen de este objeto. Vemos que efectivamente, la totalidad de la imagen del objeto se encuentra dentro del campo imagen del espejo, indicando el mismo se verá completamente.



Quien lee puede en este caso verificar que si el mismo objeto se acerca al espejo (es decir, se reduce  $s$ ), el extremo superior del objeto extenso saldrá del área delimitada por las líneas de puntos azules, y al mismo tiempo, el rayo marginal que apunta al borde de la pupila de entrada  $P'$  no interseca al segmento que representa al espejo, lo que significa que no podrá formar una imagen. Eso implicaría que el borde superior del objeto no se podrá ver para un observador ubicado en la posición en que se encuentra la figura.

#### 4.4.2.3. Campo Visual de un espejo convexo

El campo visual de un espejo convexo es similar al caso anterior sólo que en este caso el ángulo del campo objeto y del campo imagen no coinciden. En la [Figura 4.27](#) se ha representado el caso de una persona que mira un espejo convexo. En dicha figura, el ojo se ha representado como el diafragma  $P'E'L'$  y el espejo como el arco de circunferencia JK.

Paso 1: **Determinación del DA del sistema.** En este caso el DA es el ojo, indicado como  $P'E'L'$  en la [Figura 4.27](#).

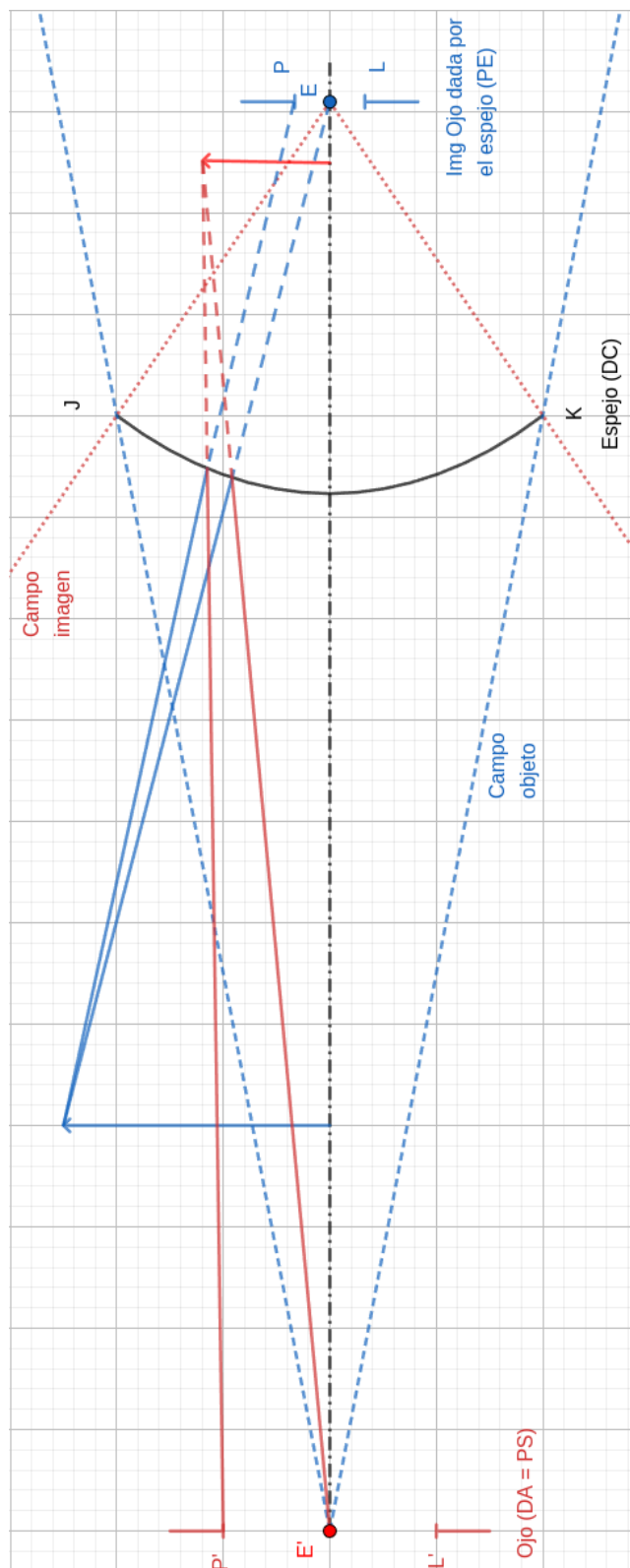
Paso 2: **Ubicación de los elementos del sistema con la PE y la PS.** En este caso el ojo constituye la pupila de salida del sistema, y la imagen del mismo dada por el espejo, la pupila de entrada, indicada como PEL en la [Figura 4.27](#).

Paso 3: **Determinación de las posibles lumberras de entrada.** En este caso, el otro elemento aparte del ojo es el espejo, cuyos bordes se han representado con las letras J y K. Eso significa que sólo hay una posible lumberra de entrada, el espejo.

Paso 4: **Determinación del DC.** En este caso, no queda otra opción que el espejo constituya el diafragma de campo.

Paso 5: **Determinación del Campo Objeto.** Para determinar el campo objeto debemos trazar las semirrectas EJ y EK. Queda determinado entonces que el campo angular medio tiene magnitud  $\alpha = 2\theta$ , según lo que se observa en la figura.

Paso 6: **Determinación del Campo Imagen.** En este caso, y al igual que en el caso anterior, la pupila de salida no coincide con la pupila de entrada, por lo que para determinar el campo imagen debemos trazar las semirrectas  $E'J$  y  $E'K$ . Queda determinado entonces que el campo aparente medio tiene magnitud  $\alpha' = 2\theta'$ . En este caso, y como el espejo es plano, el valor del campo objeto es idéntico al campo aparente.



**Figura 4.27** Campo objeto e imagen de un espejo convexo. En este caso, como un espejo convexo tiene aumento, la amplitud del campo objeto es mayor que la del campo imagen, lo que resulta en que se incrementa el rango visual del observador.



Es importante notar que, por las características de las imágenes producidas por el espejo convexo, el campo objeto tiene mayor amplitud que el campo imagen, es decir que un espejo convexo amplía el campo objeto del observador respecto de lo que pasaría si se utilizase un espejo plano. Esta es la razón por la que se utilizan espejos convexos en algunos espejos retrovisores de diferentes vehículos.

#### 4.4.2.4. Campo Visual de una lente convergente

Consideremos finalmente el caso del campo visual de una lente convergente. Este podría ser el caso del campo visual de una persona que usa anteojos. En la [Figura 4.28](#) se ha representado tal caso, considerando que el ojo P'E'L' (pupila de salida y DA del sistema) se encuentra a la derecha de una lente delgada limitada por los bordes JK.

Paso 1: **Determinación del DA del sistema.** En este caso el DA es el ojo, indicado como P'E'L' en la [Figura 4.28](#).

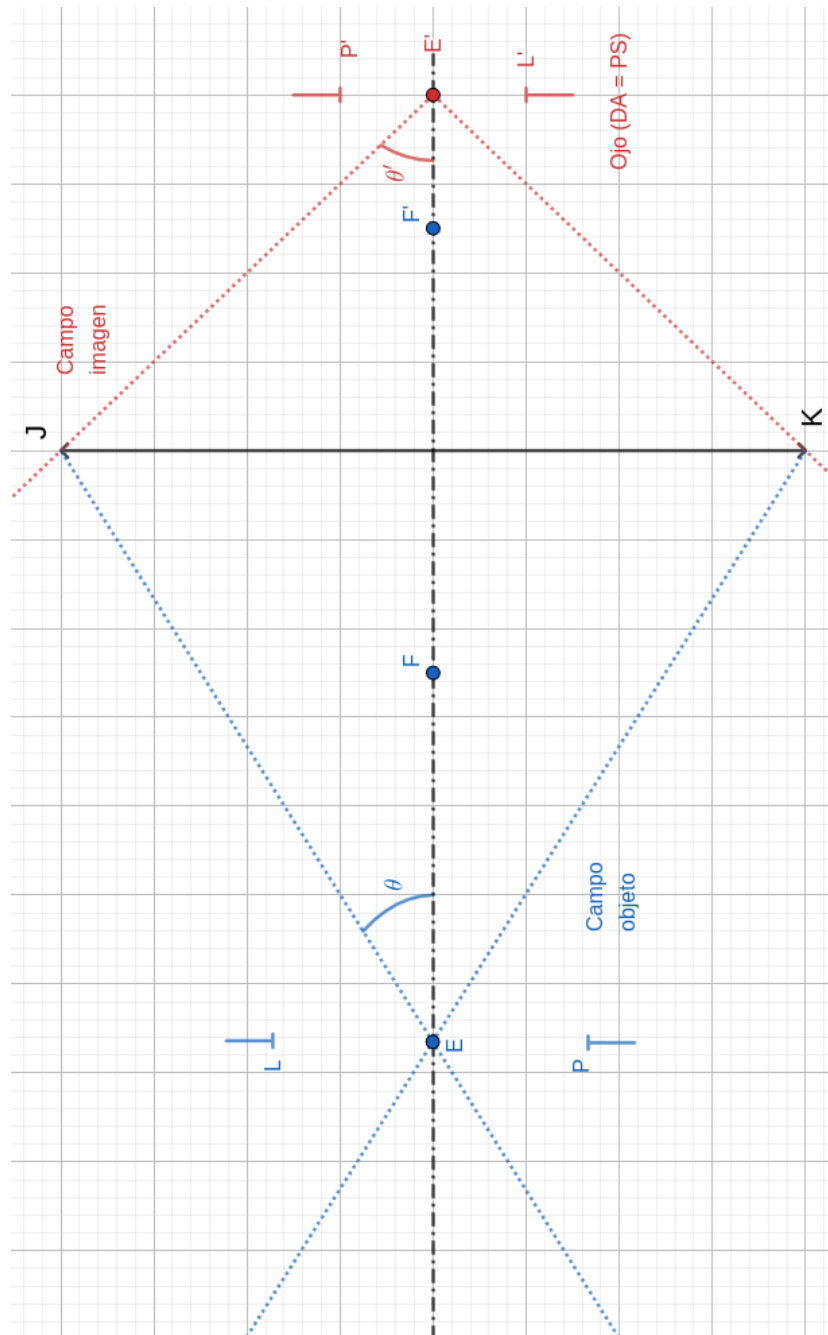
Paso 2: **Ubicación de los elementos del sistema con la PE y la PS.** En este caso el ojo constituye la pupila de salida del sistema, y la imagen del mismo dada por la lente, la pupila de entrada, indicada como PEL en la [Figura 4.28](#). Es importante notar que en este caso la pupila de entrada se encuentra invertida.

Paso 3: **Determinación de las posibles lumbreras de entrada.** En este caso, el otro elemento aparte del ojo es la lente, cuyos bordes se han representado con las letras J y K. Eso significa que sólo hay una posible lumbrera de entrada, la lente.

Paso 4: **Determinación del DC.** En este caso, no queda otra opción que la lente constituya el diafragma de campo.

Paso 5: **Determinación del Campo Objeto.** Para determinar el campo objeto debemos trazar las semirrectas EJ y EK. Queda determinado entonces que el campo angular medio tiene magnitud  $\alpha = 2\theta$ , según lo que se observa en la figura.

Paso 6: **Determinación del Campo Imagen.** En este caso, y al igual que en el caso anterior, la pupila de salida no coincide con la pupila de entrada, por lo que para determinar el campo imagen debemos trazar las semirrectas E'J y E'K. Queda determinado entonces que el campo aparente medio tiene magnitud  $\alpha' = 2\theta'$ . En este caso, y como debido a la distancia que el ojo se encuentra del foco de la lente, el valor del campo objeto es mayor que el campo aparente.

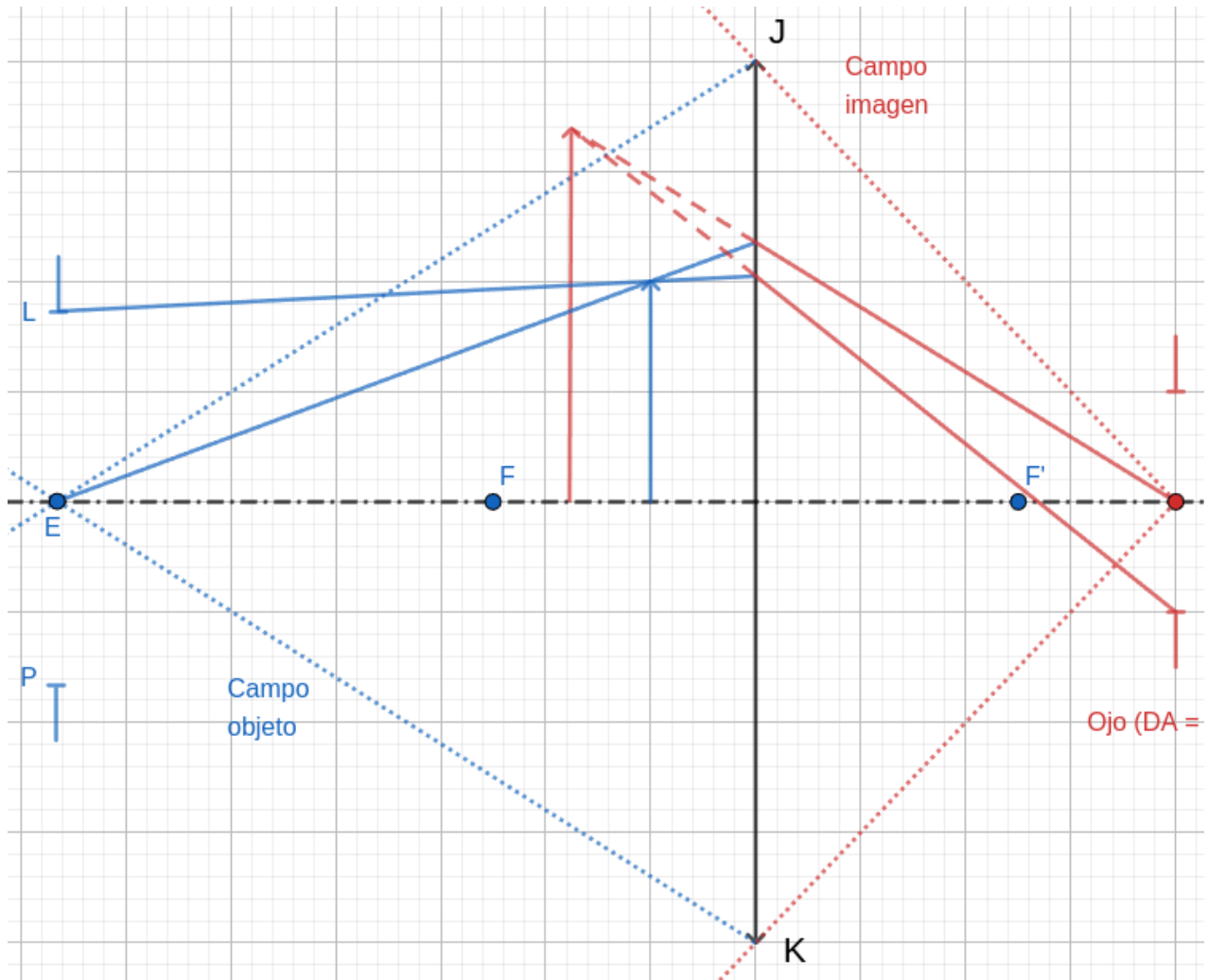


**Figura 4.28** Campo objeto e imagen de una lente convergente

En la [Figura 4.29](#) se ha ubicado, para el mismo sistema, un objeto extenso muy próximo a la lente, como si se tratara de un objeto que desea verse con una lupa. Empleando el método de los rayos marginales y principales, podemos encontrar la imagen del objeto, que en este caso es virtual, aumentada y directa. Vale notar en este caso que cuanto más acerca el objeto al foco objeto de la lente (es decir cuanto más queremos que se amplifique la imagen), más pequeño debe ser el objeto para quedar dentro del cono que determina el campo objeto.



A la vez, cuanto más se acerca el ojo se acerca al foco de la lente el campo imagen se incrementa y la pupila de entrada se aleja de la lente, por lo que la región del campo objeto se vuelve más larga y angosta, lo que vuelve menos crítica la posición que debe tomar el objeto para que se pueda ver completamente.



**Figura 4.29** A medida que los objetos se acercan a la lente, los mismos deben ser más pequeños para quedar dentro del campo visual de la misma.

### 4.5. Ejercicios

#### Diafragmas de Apertura

- 4.5.1. Una lente delgada de 4 cm de apertura y 2 cm de distancia focal se encuentra 4 cm delante de un diafragma de 2 cm de apertura. Bajo estas condiciones, se pide que:
- realice el análisis del sistema;
  - encuentre todas las posibles pupilas de entrada y salida del sistema;
  - encuentre, a partir de las pupilas de entrada encontradas los bordes de zona para el sistema dado, si es que existen;
  - indique, para un objeto puntual ubicado a 10 cm de la lente, cuál es su DA correspondiente;
  - indique posición, tamaño y naturaleza de la imagen empleando rayos marginales.
- 4.5.2. Se coloca un diafragma de 3.0 cm de diámetro a una distancia de 1.5 cm delante de una lente delgada. El diámetro de la lente es de 4.80 cm y su distancia focal es de 3.5 cm. Se coloca un objeto de 1.5 cm de altura, con su extremo inferior sobre el eje óptico, a 8 cm de la lente. Bajo estas condiciones se pide que:
- realice el análisis del sistema;
  - encuentre todas las posibles pupilas de entrada y salida del sistema;
  - encuentre, a partir de las pupilas de entrada encontradas los bordes de zona para el sistema dado, si es que existen;
  - indique, para el objeto dado, cuál es su DA correspondiente;
  - indique posición, tamaño y naturaleza de la imagen empleando rayos marginales y/o principales.
- 4.5.3. Una lente delgada de 5 cm de apertura y 4 cm de distancia focal tiene a 2 cm delante de ella a un diafragma de 3 cm de apertura. A 9 cm de la lente se sitúa un objeto puntual. Bajo estas condiciones se pide que:
- realice el análisis del sistema;
  - encuentre todas las posibles pupilas de entrada y salida del sistema;
  - encuentre, a partir de las pupilas de entrada encontradas los bordes de zona para el sistema dado, si es que existen;
  - indique, para el objeto dado, cuál es su DA correspondiente;
  - indique posición, tamaño y naturaleza de la imagen empleando rayos marginales y/o principales.



- 4.5.4. Repita el ejercicio anterior para un objeto extenso de 1,5 cm de altura con su extremo inferior en el eje.
- 4.5.5. Una lente delgada de 6 cm de apertura y 5 cm de distancia focal tiene a 3 cm detrás de ella un diafragma de 3 cm de apertura. Delante de la lente, a 12 cm de ella, se encuentra un objeto puntual. Bajo estas condiciones se pide que:
- realice el análisis del sistema;
  - encuentre todas las posibles pupilas de entrada y salida del sistema;
  - encuentre, a partir de las pupilas de entrada encontradas los bordes de zona para el sistema dado, si es que existen;
  - indique, para el objeto dado, cuál es su DA correspondiente;
  - indique posición, tamaño y naturaleza de la imagen empleando rayos marginales y/o principales.
- 4.5.6. Repita el ejercicio anterior para un objeto extenso de 3 cm de altura con su centro sobre el eje.
- 4.5.7. Una lente delgada (divergente) de 4 cm de altura y  $|f| = 8 \text{ cm}$  está situada 3 cm delante de otra lente delgada (convergente) de 4 cm de apertura y  $|f| = 6 \text{ cm}$ . Se coloca un objeto puntual sobre el eje principal a 12 cm delante de la primera lente. Bajo estas condiciones se pide que:
- realice el análisis del sistema;
  - encuentre todas las posibles pupilas de entrada y salida del sistema;
  - encuentre, a partir de las pupilas de entrada encontradas los bordes de zona para el sistema dado, si es que existen;
  - indique, para el objeto dado, cuál es su DA correspondiente;
  - indique posición, tamaño y naturaleza de la imagen empleando rayos marginales y/o principales.
- 4.5.8. Una lente delgada tiene un diámetro de 6 cm y una distancia focal de 6 cm. Un diafragma de 5 cm de diámetro se coloca 2 cm antes de la lente y un diafragma de 4 cm de diámetro se coloca 2 cm después de la lente. Un objeto de 4 cm de altura se coloca, con su centro sobre el eje, a 12 cm de la lente. Bajo estas condiciones se pide que:
- realice el análisis del sistema;
  - encuentre todas las posibles pupilas de entrada y salida del sistema;

- c. encuentre, a partir de las pupilas de entrada encontradas los bordes de zona para el sistema dado, si es que existen;
  - d. indique, para el objeto dado, cuál es su DA correspondiente;
  - e. indique posición, tamaño y naturaleza de la imagen empleando rayos marginales y/o principales.
- 4.5.9. Dos lentes delgadas de apertura de 5 cm y distancias focales 8 cm y 6 cm respectivamente, están separadas 4 cm. Equidistante a ambas lentes se encuentra un diafragma de 2,5 cm de diámetro. A 10 cm de la primera lente se sitúa un objeto puntual. Bajo estas condiciones se pide que:
- a. realice el análisis del sistema;
  - b. encuentre todas las posibles pupilas de entrada y salida del sistema;
  - c. encuentre, a partir de las pupilas de entrada encontradas los bordes de zona para el sistema dado, si es que existen;
  - d. indique, para el objeto dado, cuál es su DA correspondiente;
  - e. indique posición, tamaño y naturaleza de la imagen empleando rayos marginales y/o principales.
- 4.5.10. Repita el ejercicio anterior para un objeto extenso de 4 cm de altura con su centro en el eje óptico.
- 4.5.11. Una lente delgada de apertura 6 cm y distancia focal 6 cm está situada 4 cm delante de otra lente delgada de apertura 6 cm y distancia focal -10 cm. Delante de la primera lente, a 12 cm de esta, se encuentra un objeto puntual. A 3 cm delante de la primera lente se encuentra un diafragma de 3 cm de apertura. Bajo estas condiciones se pide que:
- a. realice el análisis del sistema;
  - b. encuentre todas las posibles pupilas de entrada y salida del sistema;
  - c. encuentre, a partir de las pupilas de entrada encontradas los bordes de zona para el sistema dado, si es que existen;
  - d. indique, para el objeto dado, cuál es su DA correspondiente;
  - e. indique posición, tamaño y naturaleza de la imagen empleando rayos marginales y/o principales.
- 4.5.12. Repita el ejercicio anterior para un objeto de 1 cm de altura cuya base se encuentra sobre el eje.



- 4.5.13. Un sistema se compone de un diafragma de 2 cm de apertura está ubicado 5 cm delante de una lente delgada, que a su vez se encuentra 1 cm delante de otra lente delgada. Si cada lente delgada tiene una potencia de 15 Dp y una apertura de 4 cm, se pide que:
- realice el análisis del sistema;
  - encuentre todas las posibles pupilas de entrada y salida del sistema;
  - encuentre, a partir de las pupilas de entrada encontradas los bordes de zona para el sistema dado, si es que existen;
  - ubique un objeto puntual de modo tal que su DA sea el diafragma propiamente dicho y encuentre su imagen usando rayos marginales;
  - indique posición, tamaño y naturaleza de la imagen empleando rayos marginales y/o principales.
- 4.5.14. Una lente delgada de apertura 4 cm y potencia de 1 está situada 4 cm delante de otra lente delgada de apertura 6 cm y distancia focal -10 cm. Delante de la primera lente, a 12 cm de esta, se encuentra un objeto puntual. A 3 cm delante de la primera lente se encuentra un diafragma de 3 cm de apertura. Bajo estas condiciones se pide que:
- realice el análisis del sistema;
  - encuentre todas las posibles pupilas de entrada y salida del sistema;
  - encuentre, a partir de las pupilas de entrada encontradas los bordes de zona para el sistema dado, si es que existen;
  - indique, para el objeto dado, cuál es su DA correspondiente;
  - indique posición, tamaño y naturaleza de la imagen empleando rayos marginales y/o principales.
- 4.5.15. Se tiene un sistema consistente de Lentes y Diafragmas que responde a los siguientes datos:
- $LD_1: Ap = 4 \text{ cm}; f = -4 \text{ cm}$
  - $LD_2: Ap = 4 \text{ cm}; f = -3,5 \text{ cm}$
  - $D_3: Ap = 2 \text{ cm}$
  - $d_{LD_1,LD_2} = 2 \text{ cm}; d_{LD_2,D_3} = 1,3 \text{ cm}$

Si se tiene un objeto puntual a 8,5 cm de la primera lente, se pide que:

- realice el análisis del sistema;
- encuentre todas las posibles pupilas de entrada y salida del sistema;

- c. encuentre, a partir de las pupilas de entrada encontradas los bordes de zona para el sistema dado, si es que existen;
- d. indique, para el objeto dado, cuál es su DA correspondiente;
- e. indique posición, tamaño y naturaleza de la imagen empleando rayos marginales y/o principales.

4.5.16. Se tiene un sistema consistente de Lentes y Diafragmas que responde a los siguientes datos:

- $LD_1: Ap = 5,3 \text{ cm}; f = 1,2 \text{ cm}$
- $LD_3: Ap = 5,3 \text{ cm}; f = 0,8 \text{ cm}$
- $D_2: Ap = 1,8 \text{ cm}$
- $d_{LD_1, D_2} = 3,2 \text{ cm}; d_{D_2, LD_3} = 2 \text{ cm}$

Si se tiene un objeto puntual a 3,2 cm de la primera lente, se pide que:

- a. realice el análisis del sistema;
- b. encuentre todas las posibles pupilas de entrada y salida del sistema;
- c. encuentre, a partir de las pupilas de entrada encontradas los bordes de zona para el sistema dado, si es que existen;
- d. indique, para el objeto dado, cuál es su DA correspondiente;
- e. indique posición, tamaño y naturaleza de la imagen empleando rayos marginales y/o principales.

### Diafragmas de Campo

4.5.17. Considere un espejo convexo de 9,7 cm de radio y 3 cm de apertura, con una pupila de salida con 1,8 cm de apertura, ubicada a 4,1 cm del espejo. Si se tiene un objeto extenso de 1,3 cm de altura a 2,8 cm del espejo, determine si la imagen del mismo se podrá ver completamente por el sistema.

4.5.18. Determine el campo visual de un espejo cóncavo. Para ello considere un sistema que responde a los siguientes datos:

- Un espejo esférico cóncavo de 5,7 cm de radio y 5 cm de apertura.
- El ojo como pupila de salida se encuentra a 8,5 cm del espejo y tiene una apertura de 1,8 cm

Si se tiene un objeto extenso de 1 cm de altura a 5,7 cm del espejo, determine si la imagen del mismo se podrá ver completamente por el sistema.

4.5.19. Considere una lente convergente de 2 cm de distancia focal y 3 cm de apertura, con una pupila de salida con 1,8 cm de apertura, ubicada a 4,2 cm a la derecha de la lente. Si se tiene un objeto extenso de 0,8 cm de altura a 1,1 cm de la lente, determine si la imagen del mismo se podrá ver completamente por el sistema.

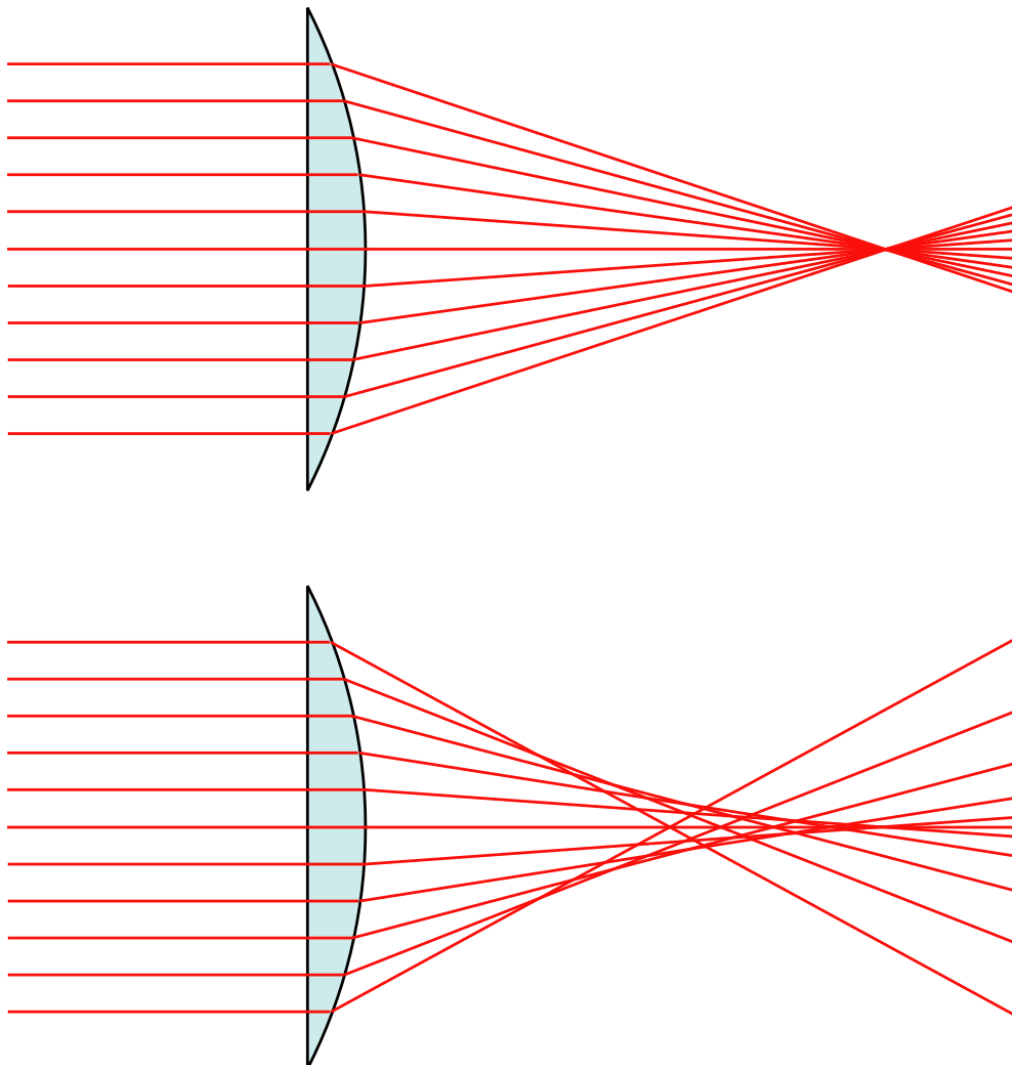


## Capítulo 5: Trazado Estricto de Rayos

El estudio de la formación de imágenes por un sistema compuesto de una o más superficies esféricas se ha limitado hasta ahora a la consideración de rayos paraxiales. Con esta limitación ha sido posible deducir métodos relativamente sencillos para calcular y construir la posición y tamaño de la imagen. En la práctica, la apertura de la mayoría de las lentes es lo suficientemente grande como para que los rayos paraxiales constituyan sólo una pequeña fracción de los rayos que efectivamente ingresan a la lente. Esto significa que es importante considerar lo que ocurre a los rayos no paraxiales en la formación de imágenes. El método directo para ello consiste en determinar las trayectorias seguidas por tales rayos, aplicando a cada superficie la ley de Snell de la refracción. Llamaremos a este procedimiento, **trazado estricto de rayos**.

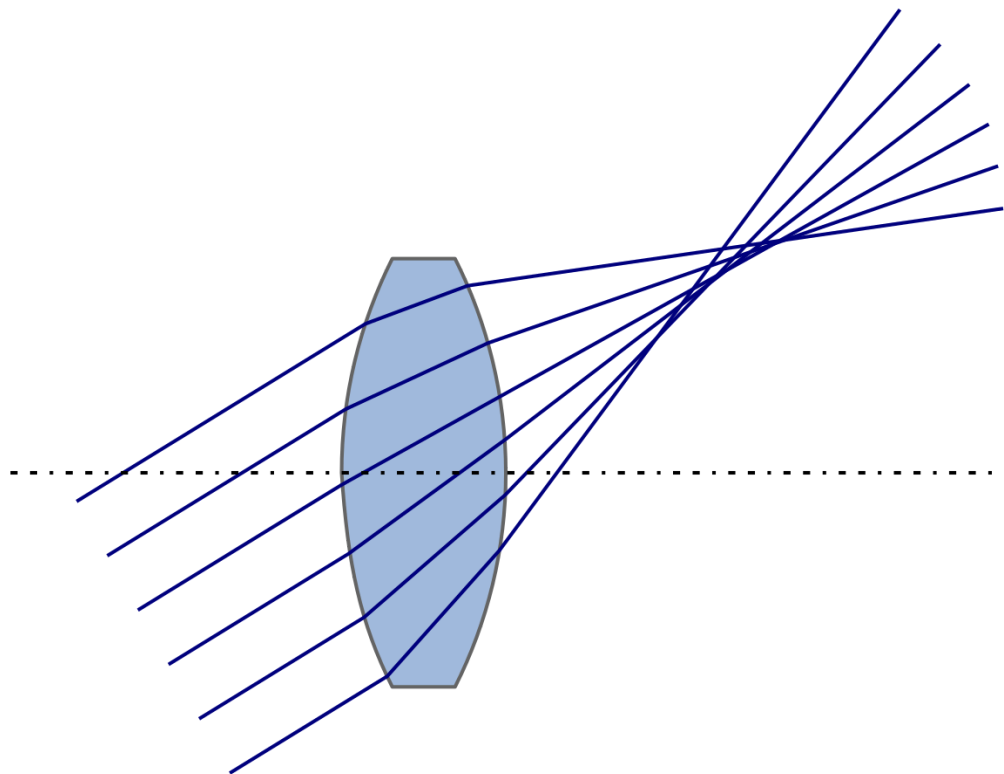
Todos los rayos situados en un plano que pase por el eje principal y no sean paraxiales se llaman rayos oblicuos o marginales. Aplicando exactamente la ley de refracción a cierto número de rayos que atraviesan una o más superficies coaxiales, se encuentra que la posición del punto imagen varía con la oblicuidad de los rayos. Esto origina un emborronamiento de la imagen, que da lugar a las distintas aberraciones de las lentes. La experiencia nos dice que mediante la elección adecuada de los radios y posiciones de las superficies esféricas se reducen mucho las aberraciones. Adicionalmente, la incorporación de diafragmas de apertura también permite seleccionar la luz que ingresa a las lentes, reduciendo la cantidad de rayos oblicuos que distorsionan a las imágenes formadas, lo que a su vez reduce las aberraciones de los sistemas. Sólo de este modo ha sido posible construir instrumentos ópticos de aperturas apreciables que posean al mismo tiempo buenas cualidades para formar imágenes.

Cuando los rayos que inciden en una lente o espejo son paralelos al eje óptico, pero se apartan mucho del mismo, el trazado estricto de rayos también indica que, a medida que los rayos se separan del eje óptico, la convergencia no se da en el punto focal predicho por la ley de Gauss, sino que se va corriendo, en una dirección determinada por el signo de la potencia de la lente, ver la [Figura 5.1](#). Si por otro lado los rayos son paralelos entre sí, pero inciden de forma oblicua al eje óptico, los rayos ya no convergerán en un único punto del plano focal, sino que tendrán un desplazamiento, como se observa en la [Figura 5.2](#), donde se muestra la causa de la distorsión conocida como **coma**.



**Figura 5.1.** Ejemplo de aberración esférica para rayos de luz paralelos al eje óptico. En este sistema puede verse que los rayos paralelos al eje se van acercando a la misma a medida que la distancia de los rayos al eje se incrementa. El resultado es que el foco imagen ya no se ve como un punto sino como un segmento borroso. Imagen obtenida de [4].

En este Capítulo consideraremos los pasos a seguir para realizar el trazado estricto de rayos a partir de un método analítico, y utilizaremos los resultados para poder determinar criterios que permitan reducir el impacto de las aberraciones en superficies esféricas. En la primera sección se determinarán expresiones para seguir la marcha de los rayos para rayos oblicuos al eje óptico, que corresponden a las imágenes que generan los objetos puntuales. En la siguiente sección se determinarán las expresiones para seguir la marcha de rayos que inciden paralelos al eje óptico, que permiten analizar el “desenfoque” que se produce en las lentes reales. Finalmente, aplicaremos los resultados obtenidos para seguir la trayectoria de rayos que inciden en lentes gruesas.



**Figura 5.2.** Cuando rayos paralelos entre sí inciden de forma oblicua al eje óptico, el trazado estricto de rayos predice que los mismos ya no convergerán a un único punto del plano focal, sino que el punto de intersección se correrá, dando lugar a la aberración conocida como **coma**. Imagen obtenida de [5].

### 5.1. Trazado estricto de rayos que inciden oblicuos al eje óptico

Las expresiones para el trazado estricto de rayos oblicuos son las que nos permiten encontrar la posición de la imagen de un objeto puntual que se encuentra en el eje óptico.

Para deducir estas expresiones, consideremos entonces un objeto puntual  $M$  que se encuentra en el eje óptico y está ubicado en un medio de índice de refracción  $n$ . Dicho medio se encuentra separado una distancia  $s$  de un medio de índice de refracción  $n'$  por una superficie esférica de radio  $R$ , y consideraremos que la imagen  $M'$  del objeto  $M$  es conocida y está ubicada a una distancia  $s'$  de la superficie esférica, tal como se puede ver en la [Figura 5.3](#). Nuestro objetivo será entonces encontrar la distancia  $s'$ , que estará determinada por el valor de las magnitudes  $\theta$ ,  $r$ ,  $n'$  y  $s$ .

Consideremos para ello un rayo  $\overline{MT}$ , que luego de refractarse en la superficie esférica debe pasar por la imagen  $M'$ , dando lugar al rayo  $\overline{TM'}$ , que forma un ángulo  $\theta'$  con el eje. Supondremos conocido el ángulo  $\theta$  que el segmento  $\overline{MT}$  forma con el eje óptico, y trataremos de deducir a partir

# Óptica Geométrica (parte I)

## Tec. Univ. En Óptica y Contactología

del uso de la ley de Snell y de consideraciones geométricas, el valor del resto de las magnitudes de la Figura.

En la [Figura 5.3](#) se ha marcado además al segmento  $\overline{TC}$ , que es uno de los radios de la superficie esférica que separa a los medios  $n$  y  $n'$ , y constituye la normal a la superficie. Definiremos como  $\phi$  y  $\phi'$  a los ángulos que los segmentos  $\overline{MT}$  y  $\overline{TM'}$  forman con dicha normal, respectivamente.

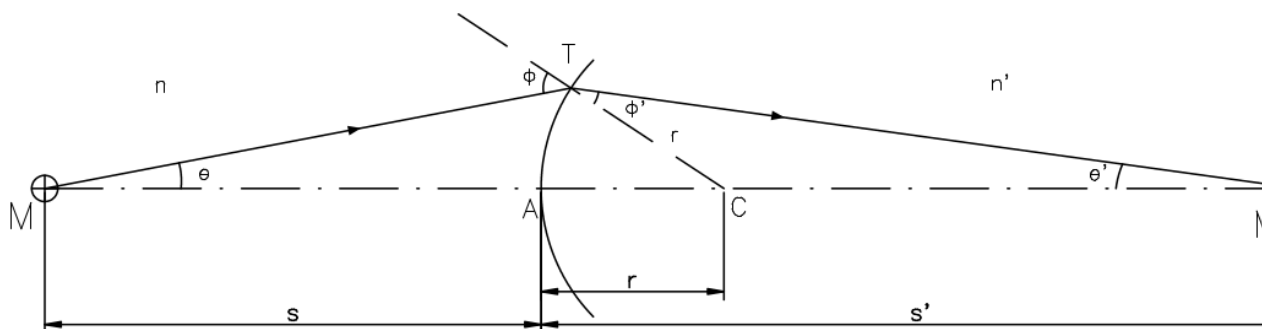
Antes de continuar con nuestras deducciones, es preciso indicar el convenio de signos que utilizaremos para los ángulos que aparecen en el esquema de la [Figura 5.3](#):

1. Los ángulos de inclinación serán positivos cuando se ha de girar el eje, en sentido contrario a las agujas del reloj, un ángulo menor de  $90^\circ$  para hacerlo coincidir con el rayo.
2. Los ángulos de incidencia y refracción son positivos si se ha de girar el radio de la superficie (la normal), en sentido contrario al de las agujas del reloj, un ángulo menor a  $90^\circ$  para hacerle coincidir con el rayo.

De acuerdo con este convenio, los ángulos  $\theta$ ,  $\phi$  y  $\phi'$  de la [Figura 5.3](#) son positivos, mientras que el ángulo  $\theta'$  es negativo. Los valores  $s$  y  $s'$  conservan el convenio de signos usual para las distancias objeto e imagen, respectivamente.

### ¡Aclaración importante!

A lo largo de nuestras demostraciones haremos siempre explícitos los signos de las magnitudes físicas, es decir, si por ejemplo a la magnitud  $\theta$  le corresponde un número positivo escribiremos directamente  $\theta$ , pero si sabemos que a la magnitud  $\theta$  le corresponde un número negativo, escribiremos  $-\theta$ .



**Figura 5.3.** Trazado estricto de rayos para rayos que inciden sobre una superficie refractante de forma oblicua al eje óptico.



Para iniciar nuestra deducción, buscaremos primero la relación que existe entre el ángulo  $\theta$  y el ángulo de incidencia  $\phi$ , para lo cual aplicaremos la ley de los Senos<sup>15</sup> al triángulo  $\Delta(MTC)$ :

$$\frac{\text{sen}(\pi - \phi)}{r + s} = \frac{\text{sen}(\theta)}{r} \quad (5.1)$$

$$\frac{\text{sen}(\phi)}{r + s} = \frac{\text{sen}(\theta)}{r}, \quad (5.2)$$

ya que  $\text{sen}(\pi - \phi) = \text{sen}(\phi)$ . Si se despeja el  $\text{sen}(\phi)$  de la Ec. 5.2, se tiene la primera de las expresiones fundamentales para calcular el trazado estricto de rayos:

$$\text{sen}(\phi) = \frac{r + s}{r} \text{sen}(\theta). \quad (5.3)$$

Por ley de Snell se puede relacionar el seno del ángulo  $\phi'$  con el seno de  $\phi$ , lo que nos da la segunda de las expresiones fundamentales del trazado estricto de rayos:

$$\text{sen}(\phi') = \frac{n}{n'} \text{sen}(\phi). \quad (5.4)$$

Finalmente, para determinar el ángulo  $\theta'$  utilizaremos el hecho de que la suma interior de los ángulos de un triángulo es  $\pi$  en el triángulo  $\Delta(MTM')$ :

$$\theta + [(\pi - \phi) + \phi'] + (-\theta') = \pi. \quad (5.5)$$

Si despejamos  $\theta'$  de la Ec. 5.5 obtenemos la tercera de las expresiones fundamentales del trazado estricto de rayos:

$$\theta' = \phi' + \theta - \phi. \quad (5.6)$$

La Ec. (5.6) permite calcular la pendiente del ángulo refractado. Para determinar la distancia imagen  $s'$  con esta información debemos aplicar una vez más la ley de los Senos, esta vez al triángulo  $\Delta(TCM')$ :

<sup>15</sup> Para recordar la ley de los Senos, ver por ejemplo [este enlace](#).

$$\frac{-\text{sen}(\theta')}{R} = \frac{\text{sen}(\phi')}{s'-R}. \quad (5.7)$$

La distancia imagen es, por lo tanto:

$$s' = r - r \frac{\text{sen}(\phi')}{\text{sen}(\theta')}, \quad (5.8)$$

lo que constituye la cuarta expresión fundamental para el trazado estricto de rayos. El conjunto de Ecuaciones (5.3), (5.4), (5.6) y (5.8) permite calcular cómo varía la distancia imagen  $s'$  de un objeto que se encuentra a una distancia  $s$  de una superficie refractante, para diferentes rayos oblicuos en función de su inclinación  $\theta$ . Esto significa que no todos los rayos que salen de un mismo objeto formarán una imagen en el mismo punto. Por ejemplo, puede darse que al aumentar el ángulo  $\theta$  la distancia  $s'$  resultante de aplicar las Ecs. (5.3), (5.4), (5.6) y (5.8) vaya disminuyendo. El resultado de esto es un emborronamiento de la imagen que se conoce como **aberración de esfericidad**.

En el caso en que la superficie sea plana, las Ecs. (5.3), (5.4), (5.6) y (5.8) toman formas más sencillas:

$$\phi = \theta \quad (5.3-a)$$

$$\text{sen}(\phi') = \frac{n}{n'} \text{sen}(\phi) \quad (5.4-a)$$

$$\theta' = \phi' \quad (5.6-a)$$

$$s' = s \cdot \frac{\cos(\theta')}{\cos(\theta)} \quad (5.8-a)$$

### 5.2. Trazado estricto de rayos que inciden paralelos al eje óptico

Las consideraciones de la sección anterior pueden aplicarse para rayos que inciden en una superficie refractante de forma paralela al eje óptico, como puede verse en la [Figura 5.4](#). En este caso, las ecuaciones se vuelven de hecho más simples, y la posición de la imagen se determina ahora por la altura  $h$  del rayo incidente, que se vincula por con el ángulo de incidencia por la siguiente relación (consideramos que los rayos que inciden por arriba del eje óptico tienen altura positiva):



$$\text{sen}(\phi) = \frac{h}{r}. \quad (5.9)$$

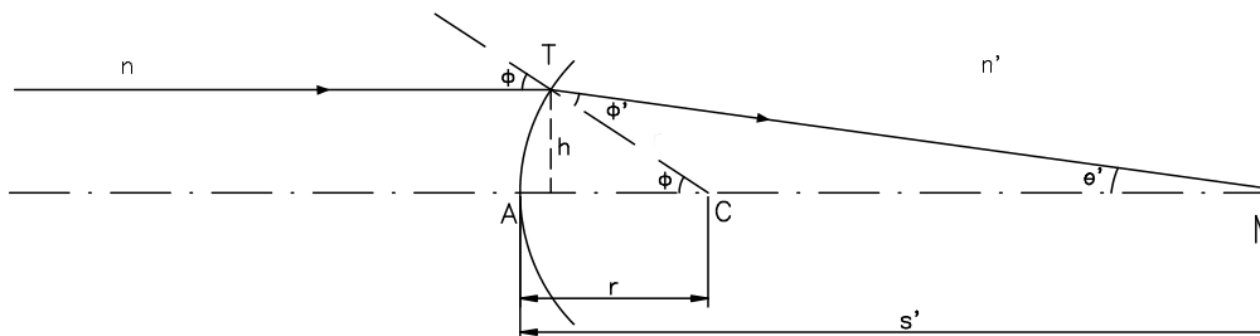
La relación que existe entre el ángulo  $\phi$  y  $\phi'$  es la misma que la establecida en la Ec. (5.4), y aplicando la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo al triángulo  $\Delta(TCM')$ , podemos ver que el ángulo  $\theta'$  se relaciona con los ángulos  $\phi$  y  $\phi'$  a través de la siguiente igualdad:

$$(\pi - \phi) + \phi' + (-\theta') = \pi, \quad (5.10)$$

lo que significa que:

$$\theta' = \phi' - \phi. \quad (5.11)$$

Finalmente, la determinación de la distancia  $s'$  se realiza empleando la Ec. (5.8), al igual que en el caso de los rayos oblicuos.

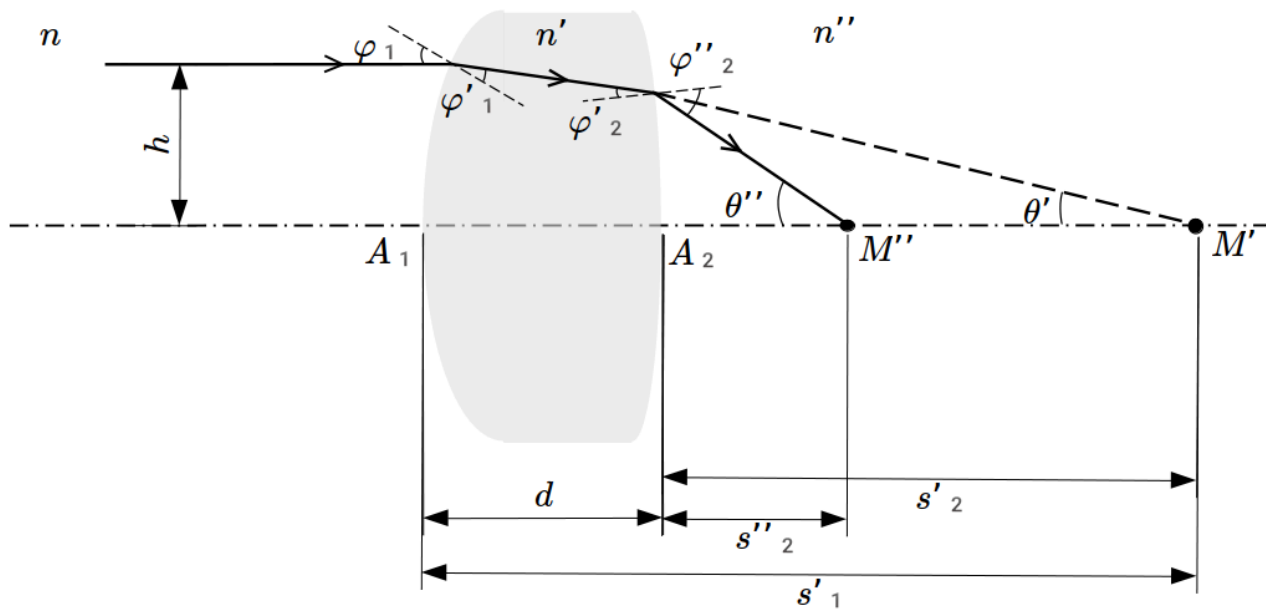


**Figura 5.4.** Trazado estricto de rayos para rayos que inciden sobre una superficie refractante de forma paralela al eje óptico.

La aplicación de las Ecs (5.9), (5.4), (5.11) y (5.8) permite calcular cómo varía la distancia imagen  $s'$  de un objeto que se encuentra a una distancia infinita de una superficie refractante, para rayos paralelos al eje en función de su altura  $h$ . Esto significa que no todos los rayos que provienen del infinito forman una imagen en el mismo punto, esto es, el foco de una superficie en realidad es un segmento. Este emborronamiento de la imagen producida por objetos que se encuentran en el infinito también constituye una **aberración de esfericidad**.

### 5.3. Ejemplo: Trazado estricto de rayos para una lente gruesa de potencia positiva

Una de las aplicaciones más importantes de lo explicado anteriormente es el trazado estricto de rayos para lentes gruesas, lo cual constituye un método para determinar el impacto de las aberraciones en la formación de imágenes. En la [Figura 5.5](#) puede observarse un esquema en que se ejemplifica cómo hacer dicho procedimiento para una lente gruesa con ambas superficies convexas. Se considera una lente gruesa de espesor  $d$  sobre la que incide un rayo paralelo al eje, que se encuentra a una distancia  $h$  del mismo. Consideraremos que dicho rayo proviene de un objeto  $M$  que se encuentra en el infinito.



**Figura 5.5.** Trazado estricto de rayos para rayos que inciden sobre una lente gruesa en forma paralela al eje óptico.

Para determinar la ubicación de la imagen  $M''$ <sup>16</sup>, lo primero que debemos hacer es aplicar las Ecs. (5.9), (5.4), (5.11) y (5.8) para la primera superficie:

1.  $\text{sen}(\phi_1) = \frac{h}{r_1}$
2.  $\text{sen}(\phi_1') = \frac{n}{n'} \text{sen}(\phi_1)$
3.  $\theta' = \phi_1' - \phi_1$
4.  $s_1' = r_1 - r_1 \frac{\text{sen}(\phi_1')}{\text{sen}(\theta')}$

<sup>16</sup> Dentro de la aproximación de rayos paraxiales, la imagen buscada sería el foco imagen de la lente.



Donde hemos empleado el subíndice 1 para todas las magnitudes que están referidas a la primera superficie refractante. Ahora bien, la imagen producida por la primer superficie se formaría en el punto indicado como  $M'$ , que oficiará como objeto para la segunda superficie.

Debemos entonces, para encontrar  $M''$  a partir de la posición de  $M'$ , utilizar los métodos de trazado estricto de rayos para rayos que inciden de forma oblicua al eje óptico. Para ello primero debemos notar que la nueva distancia objeto se puede calcular como:

$$s_2' = d - s_1', \quad (5.12)$$

ya que debemos sustraer a la distancia  $s_1'$  el valor del espesor  $d$  de la lente y cambiar el signo de la diferencia. Esto es porque para la segunda superficie el objeto se encuentra a la derecha de la superficie refractante. Una vez determinado el valor de  $s_2'$  podemos aplicar las Ecs. (5.3), (5.4), (5.6) y (5.8) para determinar la posición de la imagen del sistema  $M''$  respecto de la segunda superficie:

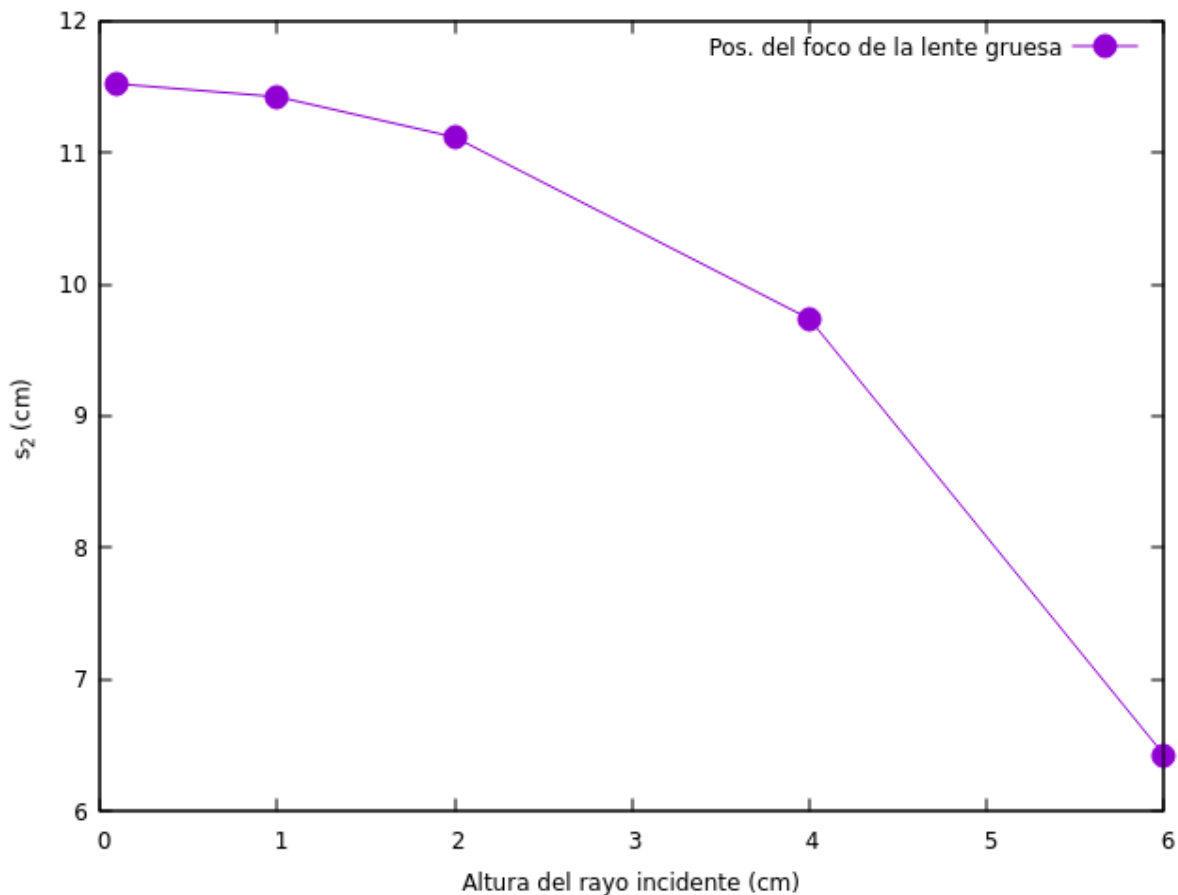
1.  $\text{sen}(\phi_2') = \frac{r_2 + s_2'}{r_2} \text{sen}(\theta')$
2.  $\text{sen}(\phi_2'') = \frac{n'}{n''} \text{sen}(\phi_2')$
3.  $\theta'' = \phi_2'' + \theta' - \phi_2'$
4.  $s_2'' = r_2 - r_2 \frac{\text{sen}(\phi_2'')}{\text{sen}(\theta')}$

Una forma práctica para analizar las consecuencias del trazado estricto de rayos es construir tablas comparativas que permitan analizar cómo varían los valores a medida que se modifican los parámetros de entrada. A modo de ejemplo, en la [Tabla 5.1](#) presentamos el resultado de aplicar las ecuaciones precedentes a rayos que inciden a alturas de 6 cm, 4 cm, 2 cm, 1 cm y 0,1 cm para una lente gruesa con  $R_1 = 15 \text{ cm}$ ,  $R_2 = -15 \text{ cm}$ ,  $d = 3 \text{ cm}$  y  $n' = 1.625$  que se encuentra sumergida en aire.

Ec.	Incógnita	Relación	$h = 6 \text{ cm}$	$h = 4 \text{ cm}$	$h = 2 \text{ cm}$	$h = 1 \text{ cm}$	$h = 0.1 \text{ cm}$
(5.9)	$\text{sen}(\phi_1)$	$\frac{h}{R_1}$	0.4000	0.2667	0.1333	0.0667	0.0067
	$\phi_1$		23.5782°	15.4660°	7.6623°	3.8226°	0.3820°
(5.4)	$\text{sen}(\phi'_1)$	$\frac{n}{n'} \text{sen}(\phi_1)$	0.2462	0.1641	0.0821	0.0410	0.0041
	$\phi'_1$		14.2500°	9.4451°	7.6623°	2.3513°	0.2351°
(5.11)	$\theta'$	$\phi' - \phi$	-9.3281°	-6.0209°	-2.9558°	-1.4713°	-0.1469°
(5.8)	$s'_1$	$r_1 - r_1 \frac{\text{sen}(\phi'_1)}{\text{sen}(\theta'_1)}$	37.7796 cm	38.4675 cm	38.8683 cm	38.9672 cm	38.9997 cm
(5.12)	$s'_2$	$d - s'_1$	-34.7796 cm	-35.4675 cm	-35.8683 cm	-35.9672 cm	-35.9997 cm
(5.3)	$\text{sen}(\phi'_2)$	$\frac{r_2 + s'_2}{r_2} \text{sen}(\theta')$	-0.5379	-0.3529	-0.1749	-0.0872	-0.0087
	$\phi'_2$		-32.5417°	-20.6652°	-10.0710°	-5.0050°	-0.4995°
(5.4)	$\text{sen}(\phi''_2)$	$\frac{n'}{n''} \text{sen}(\phi'_2)$	-0.8741	-0.5735	-0.2842	-0.1418	-0.0142
	$\phi''_2$		-60.9397°	-34.9928°	-16.5087°	-8.1503°	-0.8117°
(5.6)	$\theta''$	$\phi''_2 + \theta' - \phi'_2$	-37.7262°	-20.3485°	-9.3935°	-4.6165°	-0.4591°
(5.8)	$s''_2$	$r_2 - r_2 \frac{\text{sen}(\phi''_2)}{\text{sen}(\theta'')}$	6.4282 cm	9.7379 cm	11.1155 cm	11.4210 cm	11.5190 cm

**Tabla 5.1.** Valores obtenidos de aplicar las ecuaciones del trazado estricto de rayos a una lente gruesa para rayos que inciden sobre la misma a diferentes distancias del eje óptico. Datos de la lente:  $r_1 = 15 \text{ cm}$ ,  $r_2 = -15 \text{ cm}$ ,  $d = 3 \text{ cm}$  y  $n' = 1.625$ . Alturas: 6 cm, 4 cm, 2 cm, 1 cm y 0,1 cm.

Para facilitar el análisis y las conclusiones, se pueden elegir los valores más relevantes y ponerlos en una gráfica, como hemos hecho en la [Figura 5.6](#), donde se ha graficado la variación de la distancia imagen  $s''_2$  (llamado “foco” de la lente gruesa en la Figura) en función de la altura de los rayos incidentes:



**Figura 5.6.** Evolución de la distancia imagen  $s''_2$  (“foco imagen”) en función de la altura  $h$  de diferentes rayos que inciden sobre una lente gruesa en forma paralela al eje óptico.

Para analizar los los valores que se han obtenido de la [Tabla 5.1](#) y la gráfica de la [Figura 5.6](#) es preciso entender cuál es el significado del valor  $s''_2$ : es la distancia imagen de un objeto que se encuentra en el infinito, es decir, es la distancia que corresponde a la imagen que la lente gruesa formaría de un objeto que se encuentra infinitamente alejado de ella. Dicho de otro modo: si fuera válida la aproximación paraxial, todos los rayos incidentes deberían converger hacia el foco imagen de la lente gruesa, es decir, el valor  $s''_2$  debería ser independiente de la altura de incidencia de los rayos paralelos al eje, cosa que evidentemente no es así. Sin embargo, podemos notar que a medida que la altura de los rayos se reduce, los valores de  $s''_2$  se acercan a un cierto valor límite, que se puede calcular como 11.52 cm. Quien lee estas páginas puede verificar que dicho valor corresponde a la distancia del foco al segundo vértice de la lente gruesa, es decir al valor del segmento  $\overline{A_2F''}$  que se puede calcular a partir de la aplicación de la [Ec. \(1.11\)](#) del [Capítulo 1](#). Esto no es casualidad, sino consecuencia del hecho de que cuanto más se acercan los

rayos incidentes al eje óptico, mejor es el resultado de la aplicación de la aproximación paraxial de los mismos.

De esto se pueden extraer la conclusión de que mientras mayor sea el radio del haz luminoso que incide sobre la lente del ejemplo, en vez de observar un punto como resultado del desvío de los rayos en la misma, se observará un círculo borroso alrededor de foco predicho por la aproximación paraxial. Esto constituye la base de la aberración esférica que afecta a las lentes.

Si se quiere resolver este problema, deberá limitarse el rango de rayos luminosos que inciden sobre la lente empleando algún objeto que oficie como diafragma de apertura de modo tal que el radio "del círculo borroso" sea lo suficientemente pequeño como para despreciar el efecto de la aberración. Esto es lo que ocurre en los anteojos, los cuales tienen solamente una región en la que efectivamente corrigen los defectos de visión, como se muestra en la [Figura 5.7](#)



**Figura 5.7.** Todos los anteojos tienen sólo una región en que efectivamente corrigen los defectos de la visión de la persona que los usa, que se encuentra en el centro de los mismos, esto es, donde es válida la aproximación paraxial.



### 3.9. Resumen de Fórmulas

Nombre	Expresión	Número
<b>Rayos que inciden oblicuos al eje óptico (superficie refractante esférica)</b>		
Seno del ángulo incidente respecto a la normal	$\text{sen}(\phi) = \frac{r+s}{r} \text{sen}(\theta)$	(5.3)
Seno del ángulo refractado respecto a la normal	$\text{sen}(\phi') = \frac{n}{n'} \text{sen}(\phi)$	(5.4)
Ángulo respecto al eje óptico del rayo refractado	$\theta' = \phi' + \theta - \phi$	(5.6)
Distancia imagen	$s' = r - r \frac{\text{sen}(\phi')}{\text{sen}(\theta')}$	(5.8)
<b>Rayos que inciden paralelos al eje óptico (superficie refractante esférica)</b>		
Seno del ángulo incidente respecto a la normal	$\text{sen}(\phi) = \frac{h}{r}$	(5.9)
Seno del ángulo refractado respecto a la normal	$\text{sen}(\phi') = \frac{n}{n'} \text{sen}(\phi)$	(5.4)
Ángulo respecto al eje óptico del rayo refractado	$\theta' = \phi' - \phi$	(5.11)
Distancia imagen	$s' = r - r \frac{\text{sen}(\phi')}{\text{sen}(\theta')}$	(5.8)

Rayos que inciden paralelos al eje óptico (lente gruesa)		
Seno del ángulo incidente respecto a la normal de la primera sup.	$\text{sen}(\phi_1) = \frac{h}{r_1}$	(5.9)
Seno del ángulo refractado respecto a la normal de la primera sup.	$\text{sen}(\phi'_1) = \frac{n}{n'} \text{sen}(\phi_1)$	(5.4)
Ángulo respecto al eje óptico del rayo refractado en la primera superficie	$\theta' = \phi'_1 - \phi_1$	(5.11)
Distancia imagen respecto de la primera superficie	$s'_1 = r_1 - r_1 \frac{\text{sen}(\phi'_1)}{\text{sen}(\theta')}$	(5.8)
Distancia objeto respecto de la segunda superficie	$s_2' = d - s_1'$	(5.12)
Seno del ángulo incidente respecto a la normal a la segunda sup.	$\text{sen}(\phi'_2) = \frac{r_2 + s_2'}{r_2} \text{sen}(\theta')$	(5.3)
Seno del ángulo refractado respecto a la normal a la segunda sup.	$\text{sen}(\phi''_2) = \frac{n''}{n'} \text{sen}(\phi'_2)$	(5.4)
Ángulo respecto al eje óptico del rayo refractado en la segunda sup.	$\theta'' = \phi''_2 + \theta' - \phi'_1$	(5.6)
Distancia imagen respecto de la segunda sup.	$s''_2 = r_2 - r_2 \frac{\text{sen}(\phi''_2)}{\text{sen}(\theta'')}$	(5.8)



## 5.4. Cuestiones

- 5.4.1. Empleando una planilla de cálculo, diseñe una planilla que permita aplicar las Ecs (5.3), (5.4), (5.6) y (5.8) para calcular el valor de la distancia imagen  $s'$  en función del ángulo de inclinación y la distancia objeto de rayos que inciden sobre una superficie refractante.
- 5.4.2. Empleando una planilla de cálculo, diseñe una planilla que permita aplicar las Ecs (5.9), (5.4), (5.11) y (5.8) para calcular el valor de la distancia imagen  $s'$  en función de la altura de rayos que inciden paralelos al eje óptico sobre una superficie refractante.
- 5.4.3. Aplicando lo realizado en los ejercicios anteriores, diseñe una tercera planilla que permita calcular la posición del foco imagen de una lente gruesa en función de la altura de rayos que inciden paralelos a su eje óptico. La planilla debe recibir los siguientes datos: Altura  $h$  de los rayos incidentes, radios de cada cara, espesor de la lente, índice de refracción de la lente. A su vez, la planilla debe dar como resultado final la siguiente información: el valor de la distancia imagen  $s''_2$  para rayos que inciden paralelamente al eje, potencia de la lente gruesa.
- 5.4.4. Utilice la planilla construida para analizar si el valor de la distancia imagen  $s''_2$  para rayos que inciden paralelamente al eje de una lente gruesa positiva, aumenta o disminuye a medida que crece el valor de la altura  $h$  de los rayos incidentes.
- 5.4.5. Repita el análisis para una lente gruesa de potencia negativa.
- 5.4.6. Deduzca cómo varía la aplicación de las Ecs. (5.3), (5.4), (5.6) y (5.8) para rayos oblicuos al eje óptico que inciden sobre un espejo simple.
- 5.4.7. Deduzca cómo varía la aplicación de las Ecs (5.9), (5.4), (5.11) y (5.8) para rayos paralelos al eje óptico que inciden sobre un espejo simple.
- 5.4.8. A partir de las Ecs. deducidas en el ejercicio anterior, analice si el valor de la distancia imagen  $s''_2$  para rayos que inciden paralelamente al eje de una lente gruesa positiva, aumenta o disminuye a medida que crece el valor de la altura  $h$  de los rayos incidentes. Analice cómo varía esta dependencia si el espejo de es potencia positiva o negativa. *Sugerencia: Realice una planilla de cálculo para agilizar las cuentas.*

5.4.9. Combine lo estudiado para espejos simples en las cuestiones 5.4.3 y 5.4.4 para deducir las ecuaciones que sería necesario aplicar para determinar la ubicación de la imagen de un rayos que inciden de forma paralela al eje óptico para los siguientes casos de espejo grueso:

- a. Una lente gruesa con su segunda cara espejada.
- b. Una lente gruesa separada de un espejo simple.

*Sugerencia: Realice una planilla de cálculo para agilizar las cuentas.*

5.4.10. Analice si el valor de la distancia imagen  $s''_2$  para rayos que inciden paralelamente al eje de los espejos gruesos del ejercicio anterior, aumenta o disminuye a medida que crece el valor de la altura  $h$  de los rayos incidentes. Analice cómo varía dicha dependencia si la potencia del espejo grueso es positiva o negativa. *Sugerencia: Realice una planilla de cálculo para agilizar las cuentas.*



## 5.5. Ejercicios

- 5.5.1. Determinar posición y naturaleza de la imagen aplicando las expresiones para el trazado estricto de rayos para un objeto que se encuentra a 10 cm de una dioptra de radio  $R = 10 \text{ cm}$  e índice de refracción  $n' = 1,5$ . Considere que el objeto se encuentra en aire y que el rayo que genera la imagen forma un ángulo de  $20^\circ$  con el eje.
- 5.5.2. En el extremo de una varilla de vidrio de  $n' = 1,6525$  se ha tallado una superficie semiesférica de radio  $R = 10 \text{ cm}$ . Determinar los puntos de intersección con el eje para rayos que inciden sobre la superficie esférica de forma paralela al mismo para las alturas 1,5 cm, 1 cm, 0,5 cm y 0 cm (aproximación paraxial).
- 5.5.3. Repita el ejercicio anterior para una superficie esférica con  $R = -6,25 \text{ cm}$  e idéntico índice de refracción.
- 5.5.4. Con el material de los ejercicios anteriores se han construido diferentes lentes gruesas, cuyos radios se especifican en cada apartado, siempre con un espesor de 4 cm. Para cada una de ellas, determinar los puntos de intersección con el eje para rayos que inciden sobre la lente de forma paralela al mismo para las alturas 1,5 cm, 1 cm, 0,5 cm y 0 cm (aproximación paraxial):
- $|R_{1,2}| = 10 \text{ cm}$  (lente equiconvexa)
  - $R_1 = -15 \text{ cm}; R_2 = -6,25 \text{ cm}$ ; (lente bicóncava)
  - $R_1 = 5 \text{ cm}; R_2 = \infty$ ; (lente plano-convexa)
- 5.5.5. Una lente biconvexa de 3 cm de espesor y radios  $R_1 = 14 \text{ cm}$  y  $R_2 = -10 \text{ cm}$  está construida de un material con índice de refracción  $n' = 1,6$ . Determinar los puntos de intersección con el eje para rayos que inciden sobre la lente de forma paralela al mismo para las alturas 4 cm, 3 cm, 2 cm y 1 cm. Compare dichas distancias con el valor de foco imagen obtenido a partir de las fórmulas para lentes gruesas.
- 5.5.6. Dos lentes gruesas responden a los siguientes datos:
- |                          |                         |
|--------------------------|-------------------------|
| L1:                      | L2:                     |
| • $R_1 = 10 \text{ cm}$  | • $R_1 = 10 \text{ cm}$ |
| • $R_2 = -12 \text{ cm}$ | • $R_2 = 12 \text{ cm}$ |
| • $n' = 1,5$             | • $n' = 1,7$            |
| • $d = 2,5 \text{ cm}$   | • $d = 2 \text{ cm}$    |

La separación entre ambas lentes es de 1 cm. Un rayo paralelo al eje, a una altura de 3 cm, incide sobre la primera lente. Determinar el punto en donde dicho rayo corta al eje. Comparar el resultado con la distancia focal correspondiente al aplicar la expresión para una combinación de lentes gruesas.

- 5.5.7. Un espejo grueso está formado por una lente equiconvexa separada 3,5 cm de un espejo cóncavo. La lente gruesa tiene radios  $|R_{1,2}| = 11 \text{ cm}$ , espesor 1,5 cm e índice de refracción  $n' = 1,5$ . El espejo tiene un radio  $R_E = -9,5 \text{ cm}$ . Un rayo luminoso paralelo al eje y situado a 3,5 cm del mismo incide sobre la primera lente. Determine el punto en donde dicho rayo intersecta al eje y compare el resultado con la posición esperada del foco según la expresión correspondiente para espejos gruesos.



---

# Bibliografía

- [1] F. Sears, Principles of Physics. No. v. 3, Addison-Wesley Press, 1945.
- [2] F. Jenkins and H. White, LSC Fundamentals of Optics. McGraw-Hill Education, 2001.
- [3] E. Hecht, Optics. Pearson education, Addison-Wesley, 2002.
- [4] [https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical\\_aberration](https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_aberration)
- [5] [https://en.wikipedia.org/wiki/Coma\\_\(optics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Coma_(optics))