Instituto Politécnico

iversidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de

La Recta en el Espacio

4º Año

Cód. 1407-19

Juan Carlos Bue
Verónica Filotti
María del Luján Martínez
Dpto. de Matemática

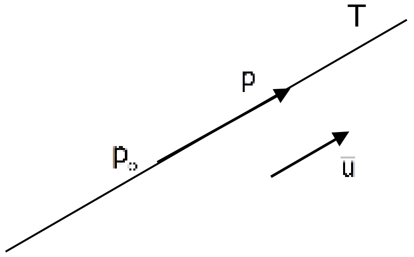
Matemática

Masterización: RECURSOS PEDAGOGICOS

RECTA EN EL ESPACIO

ECUACIÓN VECTORIAL Y ECUACIONES PARAMÉTRICAS

La recta en el espacio como lugar geométrico
Dados un punto p_0 y un vector no nulo $\overline{u}$, la recta T paralela a $\overline{u}$ que pasa por p_0, es el lugar geométrico de los puntos p tales que $\overrightarrow{p_0p} \,//\, \overline{u}$ o $\overrightarrow{p_0p} = \overline{o}$.

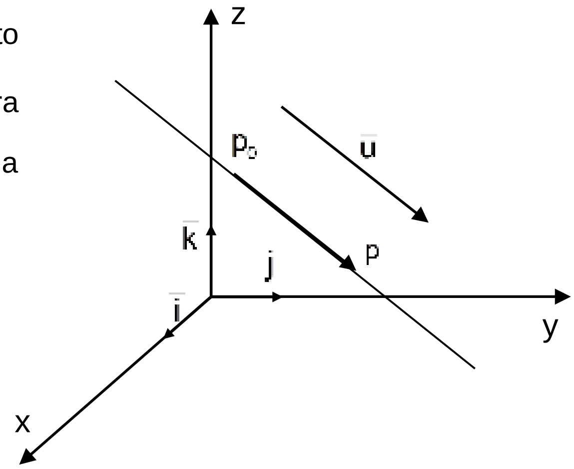


De la definición, resulta:

$$p \in T \Leftrightarrow \overrightarrow{p_0p} \,//\, \overline{u} \text{ o } \overrightarrow{p_0p} = \overline{o} \Leftrightarrow \underbrace{\overrightarrow{p_0p} = \lambda\overline{u}}_{(**)};\ \forall\lambda \in R$$

A la expresión (**) ***ecuación vectorial*** **de** T paralela (o en la dirección de) al vector $\overline{u}$ que pasa por el punto p_0

Fijado un sistema $\{o;\ \overline{i};\ \overline{j};\ \overline{k}\}$, en él un punto $p_0(x_0; y_0; z_0)$ y un vector no nulo $\overline{u} = (u_1; u_2; u_3)$, para todo punto $p(x; y; z)$ perteneciente a la recta T paralela a $\overline{u}$ que pasa por p_0 resulta:



$$\overrightarrow{p_0p} = \lambda\overline{u};\ \forall\lambda \in R$$

$$(x - x_0; y - y_0; z - z_0) = \lambda(u_1; u_2; u_3)$$

$$(x - x_0; y - y_0; z - z_0) = (\lambda u_1; \lambda u_2; \lambda u_3)$$

de donde:
$$\begin{cases} x - x_0 = \lambda u_1 \\ y - y_0 = \lambda u_2; \quad \lambda \in R \\ z - z_0 = \lambda u_3 \end{cases}$$

Es decir:

$$\begin{cases} x = \boxed{x_0} + \lambda \boxed{u_1} \\ y = \boxed{y_0} + \lambda \boxed{u_2}; \quad \lambda \in R \\ z = \boxed{z_0} + \lambda \boxed{u_3} \end{cases} \qquad (2)$$

Parámetro

Coordenadas del punto de paso

Componentes escalares del vector dirección

A la expresión (2) la llamamos ***ecuaciones paramétricas*** de la recta T que pasa por el punto p_0

y es paralela al vector $\overline{u}$.

ECUACIÓN CANÓNICA

Sea la recta T dada por sus ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = x_0 + \lambda\ u_1 \\ y = y_0 + \lambda\ u_2 \ ; \quad \lambda \in R \\ z = z_0 + \lambda\ u_3 \end{cases}$

Suponiendo u_1; u_2 y u_3 distintos de cero, y despejando λ de todas las ecuaciones, resulta:

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{x - x_0}{u_1} & (1) \\ \lambda = \dfrac{y - y_0}{u_2} & (2)\ ; \quad \lambda \in R \\ \lambda = \dfrac{z - z_0}{u_3} & (3) \end{cases}$$

Igualando (1) con (2) y con (3), obtenemos:

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}$$

A esta última expresión la llamamos ***"ecuación canónica de la recta T"*** que pasa por el punto p_0 y es paralela al vector $\overline{u}$.

Ejemplos:

a) Determina la ecuación paramétrica de la recta A que pasa por el punto p(-2; 0; 1) y es paralela al vector $\vec{u} = (-1;\ 2;\ 1)$.

Solución:

La recta A) $\begin{cases} x = -2 - \lambda \\ y = 2\lambda \quad ; \quad \lambda \in R \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$

b) Determina la ecuación canónica de la recta B que pasa por el punto p(1; 4; -2) y es paralela al vector $\vec{u} = (5; 4;\ -3)$.

Solución:

La recta B) $\frac{x-1}{5} = \frac{y-4}{4} = \frac{z+2}{-3}$

PROBLEMAS

1) Determina la ecuación canónica de la recta que:
   a) es paralela al vector $\overline{u} = (-2;\ 5;\ 1)$ y contiene al punto $p(-6;\ 4;\ 2)$

b) pasa por los puntos $a(5;\ 4;\ -1)$ y $b(-3;\ 1;\ -5)$

2) Dadas las rectas R) $\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 - 3\lambda \\ z = -4 + \lambda \end{cases}$; $\lambda \in R$ y T) $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{2-y}{6} = \dfrac{z-5}{-7}$, determina:

a) un vector paralelo a T
b) si son paralelas
c) un punto de R y otro de T

RECTA DETERMINADA POR LA INTERSECCIÓN DE DOS PLANOS NO PARALELOS.

Si se conocen las ecuaciones de dos planos no paralelos α y β, y M es la recta intersección de dichos planos, la ecuación de la misma la podemos expresar con el sistema:

$$\text{M)} \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} \qquad (***)$$

siendo $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ la ecuación del plano α y $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ la ecuación del plano β.
La ecuación (***) se la conoce con el nombre de ***"ecuación general de la recta".***

Ejemplo:

Dada la recta B) $\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x + y + 3z = 1 \end{cases}$

i. Determina un punto $p \in B$
ii. Calcula un vector $\vec{v} // B$
iii. Escribe sus ecuaciones paramétricas
iv. Determina la intersección entre B y el plano xy

Solución:

i) Si por ejemplo tomamos x = 0, resulta:

$$\begin{cases} y - z = 3 \\ y + 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow 3 + z = 1 - 3z \Rightarrow 4z = -2 \Rightarrow z = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = 3 - \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{5}{2}$$

$$p\left(0;\ \frac{5}{2}:\ -\frac{1}{2}\right)$$

ii) $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (4;\ -7;\ 1)$. Luego un vector podría ser: $\vec{v} = (8;\ -14;\ 2)$.

iii) $\begin{cases} x = 4\lambda \\ y = \dfrac{5}{2} - 7\lambda\ ; \quad \lambda \in R \\ z = -\dfrac{1}{2} + \lambda \end{cases}$

iv) $z = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow 3 - 2x = 1 - x \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 1 - 2 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow t(2;\ -1;\ 0)$

PROBLEMAS

3) Dado el plano 3 x + 2 y - 2 z + 5 = 0 y la recta $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + \lambda\ ; \quad \lambda \in R \\ z = -2 - \lambda \end{cases}$. ¿Existe intersección entre ellos? En caso afirmativo determina analíticamente la misma.

4) Dada la recta $\begin{cases} 2x - y + z = 6 \\ -x + y - z = 1 \end{cases}$, Calcula:

a) sus ecuaciones paramétricas.
b) las coordenadas del punto p para $\lambda = 1$
c) su intersección con el plano “yz”

5) Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos p(3; 1; 0) y q(0; 2; -1) y que es paralelo a la recta de intersección de los planos: $2x + z = 3$ y $-x + y + 3z = 12$.

6) ¿Tienen algún punto en común las rectas L y M?

L) $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -3 + 2\lambda ; \quad \lambda \in R \\ z = -2 - \lambda \end{cases}$ M) $\begin{cases} x = 17 + 3\alpha \\ y = 4 + \alpha \quad ; \quad \alpha \in R \\ z = -8 - \alpha \end{cases}$

7) Grafica los siguientes lugares geométricos en distintos sistemas de referencia en el espacio:

a) $\{(x;\ y;\ z) /\ z = 4\}$
b) $\{(x;\ y;\ z) /\ x = 0;\ z = 0\}$
c) $\{(x;\ y;\ z) /\ x = \lambda;\ y = \lambda;\ z = 4;\ \lambda \in R\}$
d) $\{(x;\ y;\ z) /\ x = 3;\ y = 4;\ z = 5\}$
e) $\{(x;\ y;\ z) /\ 3x + 2y = 6;\ z = 0\}$

8) Dados en un $\left\{0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right\}$ el punto a(1; 0; -2) y los vectores $\vec{ob} = (-1;\ 1;\ 2)$ y $\vec{v} = \vec{j} - \vec{k}$.

Determina:

a) la ecuación de la recta $\overleftrightarrow{ab}$

b) la ecuación del plano π tal que contenga a la recta $\overleftrightarrow{ab}$ y sea paralelo al vector $\vec{v}$

c) las coordenadas del punto de intersección de la recta $\overleftrightarrow{ab}$ con el plano xy

d) la ecuación de recta S perpendicular al plano xz que pase por el punto a

9) Dados en un $\left\{0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right\}$, el punto m (0; 1; -1) y los vectores $\vec{ot} = (1;\ -1;\ 2)$ y $\vec{s} = \vec{i} - \vec{k}$.

Determina justificando las respuestas.

a) ¿Es $m\hat{t}o$ un ángulo recto?

b) Si los puntos m; t y h(0; 2; 1) son coplanares.

c) La recta T tal que $T // \overleftrightarrow{mt} \wedge o \in T$.

10) Determina justificando la respuesta si son V(verdaderas) o F(falsas) cada una de las siguientes proposiciones:

a) Las rectas R) $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z}{-\frac{1}{2}}$ y T) $\begin{cases} 3x - 2y + z - 2 = 0 \\ -x + 4y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$ son paralelas.

b) La recta $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 + \lambda;\ \lambda \in R \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$ es perpendicular al plano 2x + 2y - 2z = 0.

c) Las rectas : $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -3\lambda;\ \lambda \in R \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$ y $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$ son paralelas.

11) Dados la recta R) $\begin{cases} x = 1 - 4\lambda \\ y = 2 - 4\lambda;\ \lambda \in R \\ z = 3\lambda \end{cases}$ y el plano π) 6x + 9y - 4z + 12 = 0. Determina si $R \subset \pi$.

12) Dados el plano $\pi)\ -2x + 3y + 2z + 6 = 0$ y la recta M) $\begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = 2 - 2\lambda;\quad \lambda \in R \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$. Determina las coordenadas de p y t si $M \cap \pi = \{p\}$ y eje $z \cap \pi = \{t\}$.

13) Si a(2; 0; 0); b(0; 2; 0) y c(0; 0; 2) son los puntos de intersección del plano π con cada uno de los ejes coordenados. Determina:

a) la ecuación segmentaria del plano π
b) la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por b .

__RESPUESTAS__

__Recta en el espacio__

1. a. $\frac{x+6}{-2}=\frac{y-4}{5}=z-2$ b. $\frac{x-5}{-8}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z+1}{-4}$

2. a. Un vector paralelo a T puede ser $(3;-6;-7)$
b. No son paralelos c. $(0;1;-4)\in R$ y $(-1;2;5)\in T$

3. Si existe intersección y es el punto $\left(-\frac{3}{7};-\frac{10}{7};\frac{3}{7}\right)$

4. a. posibles ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x=3 \\ y=5+\lambda; \ \lambda\in R \\ z=\lambda \end{cases}$
b. $(3;6;1)$ c. no existe intersección con el plano "yz"

5. $5x-7y-22z-8=0$

6. Si, $(2;-1;-3)$

7. A cargo del alumno

8. a. $\begin{cases} x=1-2\lambda \\ y=\lambda \quad ; \ \lambda\in R \\ z=2+4\lambda \end{cases}$ b. $\pi)$ - $5x-2y-2z+1=0$
c. $\left(0;\frac{1}{2};0\right)$ d. $\begin{cases} x=1 \\ y=\lambda \ ; \ \lambda\in R \\ z=-2 \end{cases}$

9. a. $\hat{mto}$ no es recto c. $T)\begin{cases} x=\lambda \\ y=-2\lambda; \ \lambda\in R \\ z=3\lambda \end{cases}$
b. Si

10. a. F b. V c. F

11. R no está incluida en π

12. $p\left(-\frac{13}{3};-\frac{14}{3};-\frac{1}{3}\right)$ y $t(0;0;-3)$

13. a. $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1$

b. por ejemplo $R)\begin{cases} x=\lambda \\ y=2+\lambda;\ \ \lambda\in R \\ z=\lambda \end{cases}$