

Universidad Nacional de Rosario

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Laboratorio de Automatización y Control



Tesis Doctoral

**Modelado y Control con Inspiración
Física-Energética de Robots Móviles en
Operación Multiagente**

Ing. Martín Andrés Crespo

Director: Ing. Sergio José Junco

Codirector: Dr. Bruno Siciliano

Miembros del Jurado: 1 Dra. Mónica Romero

2 Dr. Ricardo Carelli

3 Dr. Aníbal Zanini

Tesis presentada en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
en cumplimiento parcial de los requisitos para optar al título de

Doctor en Ingeniería

Noviembre 2023

*A todas las personas de las cuales,
a lo largo de estos años,
aprendí algo.*

Declaración

Certifico que el trabajo incluido en esta tesis es el resultado de investigaciones originales y que no ha sido presentado para optar a ningún otro título de posgrado en ninguna otra Universidad o Institución.

Ing. Martín Andrés Crespo

Noviembre 2023

Agradecimientos

Quiero comenzar agradeciendo a toda mi familia. A mis viejos, por todo el apoyo incondicional en los momentos más difíciles. A mis hermanas, a Mirian y a mi tía Norma por el acompañamiento y por poder siempre contar con ellas. A mi abuela, que la recuerdo siempre con cariño. Y a los epifanis, mis primos adoptivos, gracias por todas las risas.

Quiero agradecer también a todos mis amigo/as que fueron un soporte fundamental en estos años. Primero a Kümei, sin ella todo esto no hubiera sido posible. Gracias a su familia también por aceptarme como uno más. Al Gato, por los viajes y por estar siempre. A Claudia, compañera y amiga de trabajo, por su generosidad, las clases y cafés compartidos. A Luigi y a Mer, que me mostraron que uno puede seguir haciendo amigos increíbles de grande. A toda la gente del bien del PAMI F.C. por los martes de fulbito y MA, son lo mejor. Por último, y no menos importante, a los Ay chiques. Gracias por todas las comidas, fiestas, campos, años nuevos y viajes increíbles compartidos a lo largo de estos años.

Van mis agradecimientos también a toda la gente del trabajo que me acompañó en estos años. A Sergio, mi director, por la enseñanza y la dedicación. A toda la gente del LAC: en especial a Mati por el apoyo, la escucha y los consejos en todos estos años y a Javier por haberme inspirado a seguir este camino. A Ale Donaire, por su generosidad y porque sus palabras al comienzo del doctorado me marcaron el rumbo. Y por último, a Martín Mujica por todo el aguante en Tarbes.

Finalmente, quiero agradecer a todas las instituciones que hicieron posible que hoy haya llegado hasta acá. Al CONICET que financió mi beca durante seis años. A los ministerios de Educación y de Ciencia y Tecnología por financiar los proyectos de investigación de los que formé parte y las pasantías de investigación que realicé. Al Poli que me acogió durante tantos años, primero como estudiante y luego como profesor, infinitamente agradecido. Y por último a la Universidad Nacional de Rosario por permitirme ser parte, desde hace 22 años, de este sistema público de educación gratuita y de calidad.

Resumen

En los últimos años numerosas investigaciones se enfocaron en el control de sistemas multiagentes (MAS, Multi-agent System) debido a su potencial en aplicaciones de robótica, micro redes eléctricas inteligentes, telecomunicaciones, logística y transporte. El gran interés generalizado por los MAS se debe a que también se consideran como una tecnología y una herramienta que ayuda a analizar y desarrollar nuevos modelos y teorías en sistemas distribuidos a gran escala o en sistemas centrados en el ser humano.

En particular la coordinación y control inteligente de los agentes, inspirados en el comportamiento colaborativo observado en la naturaleza como bandadas de pájaros o cardúmenes de peces, plantean innumerables desafíos en el plano teórico de control. El control de formación, que es uno de los tópicos más estudiados dentro del área de MAS, tiene por objetivo conducir múltiples agentes para que alcancen determinadas restricciones en sus estados. Así, desde el punto de vista de la implementación, cada agente opera en el ambiente con cierto nivel de autonomía y capacidad de sensado, toma de decisión y actuación.

En este contexto, las investigaciones de esta tesis se concentran sobre MAS robóticos, compuestos de bases móviles (BM) y manipuladores móviles (MM), y están orientadas a obtener resultados a problemas de control local y superior de coordinación, con una formulación sobre modelos del mismo tipo (una base energética común).

Análogamente a la coordinación de MAS inspirada en el comportamiento de grupos de animales, en esta tesis la inspiración para la solución de los problemas de control proviene de los principios físicos-energéticos: se busca emular con leyes de control las propiedades físicas de interacción energética entre componentes interconectados de sistemas en ingeniería. En ese sentido, las soluciones propuestas a los problemas de control tratados se abordan con un enfoque ingenieril, basado en los principios físicos básicos de interconexión o acoplamiento de componentes y/o subsistemas, interacción energética e intercambio de potencia. Dichas soluciones luego se formalizan y teorizan con los conceptos matemáticos de la teoría de control, con especial énfasis en los métodos energéticos; los resultados *per se* brindan un aporte a la metodología utilizada. Como parte del enfoque metodológico para resolver los distintos problemas de control, también se aplica una batería de métodos articulando soluciones de control de distinta naturaleza. Se emplean los formalismos energéticos de Euler-Lagrange (EL), Bond

Graphs (BG) y Sistemas Port-Hamiltonianos (PHS, Port-Hamiltonian Systems), y se explotan las correspondencias entre los modelos brindados.

En una primera instancia se desarrollan los modelos cinemáticos y dinámicos de BM omnidireccionales y MM para luego, utilizando la teoría de grafos como soporte, extenderlos a modelos de MAS. Se utiliza el modelado BG como *lingua franca* entre el modelado EL y PHS, y se identifican propiedades de unos en los otros. Por su parte, utilizando la teoría de grafos, se define la matriz de Formación que permite caracterizar a un MAS.

Posteriormente, se presenta una solución inspirada físicamente para el problema de control de formación de MAS y luego la misma se formaliza con los conceptos de la teoría de Control por Interconexión (CbI, Control by Interconnection). Aquí se derivan todas las propiedades matemáticas asociadas a dicha teoría, entre las que se encuentran las funciones de Casimir.

Luego por un lado, en lo que concierne al modelado del MAS, en primera instancia las leyes de control se derivan con los agentes modelados como puntos materiales y luego se extienden incluyendo características y cuestiones de operación más realistas de los mismos como la dinámica de los cuerpos rígidos de las BM y MM, el accionamiento eléctrico, los motores, etc. Por otro lado, se presentan *estrategias de control* que brindan solución a distintos problemas relativos a la teoría de control de MAS: control de formación y cooperación, elusión de obstáculos, prevención de colisiones, estabilidad anti-vuelco, etc. Finalmente, los distintos modelos del MAS junto con las distintas *estrategias de control* se combinan en *esquemas de control* que brindan soluciones a problemas de control planteados en los distintos escenarios de simulación. Para todos los *esquemas de control* propuestos se demuestra estabilidad en el sentido de Lyapunov y, a través de simulación numérica, se valida el correcto funcionamiento de las leyes de control y comportamiento de los modelos.

Palabras clave: Sistemas Multi-Agentes, Modelos Dinámicos, Control de Formación, Métodos Energéticos, Control por Interconexión, Elusión de Obstáculos, Bases Omnidireccionales, Manipuladores Móviles

Abstract

In recent years, numerous research efforts have focused on the control of multi-agent systems (MAS) due to their potential in applications such as robotics, smart microgrids, telecommunications, logistics, and transportation. The widespread interest in MAS stems from their role as a technology and tool for analyzing and developing new models and theories in large-scale distributed systems or human-centered systems.

In particular, the intelligent coordination and control of agents, inspired by collaborative behavior observed in nature, such as flocks of birds or schools of fish, pose numerous theoretical challenges in control theory. Formation control, which is one of the most studied topics within the field of MAS, aims to guide multiple agents to achieve specific constraints in their states. From an implementation standpoint, each agent operates in the environment with a certain level of autonomy and sensing, decision-making, and actuation capabilities.

In this context, the research in this thesis focuses on robotic MAS composed of mobile bases (MB) and mobile manipulators (MM), with a focus on achieving local and higher-level control and coordination, using a formulation based on similar models (a common energy base).

Just as the coordination of MAS is inspired by the behavior of animal groups, in this thesis, the inspiration for solving control problems comes from physical and energetic principles. Control laws are designed to emulate the physical properties of energy interaction between interconnected components in technical systems. In this sense, the proposed solutions to the control problems are approached with an engineering perspective, based on the basic physical principles of component or sub-system interconnection, energy interaction, and power exchange. These solutions are then formalized and theorized using mathematical concepts from control theory, with a special emphasis on energetic methods. The results themselves contribute to the methodology employed.

As part of the methodological approach, a variety of control methods are employed to solve different control problems. The energetic formalisms of Euler-Lagrange (EL), Bond Graphs (BG), and Port-Hamiltonian Systems (PHS) are utilized, and the correspondences between them are exploited.

Initially, the kinematic models of omnidirectional MB and MM are developed and then extended to MAS models using graph theory as a support. BG modeling is used

as a *lingua franca* between EL and PHS modeling, and properties of one modeling approach are identified in the other. Additionally, using graph theory, the Formation matrix is defined to characterize a MAS.

Subsequently, a physically inspired solution is presented for the MAS formation control problem, which is then formalized using the concepts of Control by Interconnection (CbI) theory. All the mathematical properties associated with CbI theory, including Casimir functions, are derived.

Regarding MAS modeling, control laws are initially derived with agents modeled as point masses, and then extended to include more realistic characteristics and operational aspects, such as the dynamics of rigid bodies of MB and MM, electrical actuation, motors, etc. On the other hand, control strategies are presented to address a series of problems related to MAS control theory, including formation and cooperation control, obstacle avoidance, collision prevention, tip-over stability, etc.

Finally, the different MAS models and control strategies are combined into control schemes that provide solutions to the control problems posed in various simulation scenarios. For all proposed control schemes, stability in the Lyapunov sense is demonstrated, and numerical simulations validate the correct functioning of the control laws and the behavior of the models.

Keywords: Multi-Agent Systems, Dynamic Models, Formation Control, Energetic Methods, Control by Interconnection, Obstacle Avoidance, Omnidirectional Bases, Mobile Manipulators.

Nomenclatura

$:=$	Definición.
$\mathbf{I}_n$	Matriz identidad de dimensión $n \times n$.
$\mathbf{0}_{n \times m}$	Matriz cero de dimensión $n \times m$.
$\ a\ $	Norma Euclídea del vector a .
$\ A\ $	Norma 2 inducida de la matriz A .
A^T	Transpuesta de la matriz A .
A^{-1}	Inversa de la matriz A .
$\mathcal{N}(A)$	Espacio nulo de la matriz A .
$\mathcal{R}(A)$	Imagen de la matriz A .
$\text{rank}(A)$	Rango de la matriz A .
$\dim(A)$	Dimensión de la matriz A .
$\det(A)$	Determinante de la matriz A .
$\text{diag}\{v\}$	Matriz diagonal con los elementos del vector v como diagonal.
$\text{tr}(A)$	Traza de la matriz A .
$\min\{c, d\}$	Mínimo entre los valores escalares c y d .
$a \times b$	Producto vectorial entre los vectores a y b .
$A \otimes B$	Producto de Kronecker entre las matrices A y B .
$\mathcal{X} \subset \mathcal{B}$	$\mathcal{X}$ es un subconjunto de $\mathcal{B}$.
$x \in \mathcal{X}$	x es un elemento del conjunto $\mathcal{X}$.
$ \varepsilon $	Tamaño del conjunto ε .
s_φ y c_φ	Función seno y coseno del ángulo φ , respectivamente.
$s_{i \dots j}$ y $c_{i \dots j}$	Funciones $\sin(\varphi_i + \dots + \varphi_j)$ y $\cos(\varphi_i + \dots + \varphi_j)$, respectivamente.

Salvo indicación contraria, todos los vectores $x \in \mathbb{R}^n$ son vectores columna y se expresan como

$$x := [x_1, \dots, x_n]^T$$

Dada una función escalar $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, su gradiente se define como

$$\nabla h := \frac{\partial h}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial h}{\partial x_n} \end{bmatrix} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Dada una función vectorial $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, su matriz Jacobiana se define como

$$\nabla H := \frac{\partial H}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial H_m}{\partial x} \end{bmatrix}^T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$$

Acrónimos

I+D	Investigación y Desarrollo.
EL	Euler Lagrange.
PHS	Sistemas Port-Hamiltonianos.
PBC	Passivity Based Control.
CbI	Control por Interconexión.
BG	Bond Graph.
PE	Punto de Equilibrio.
CI	Causalidad Integral.
CD	Causalidad Derivativa.
MCC	Motor de Corriente Continua.
DH	Denavit-Hartenberg.
DB	Diagrama de Bloques.
GL	Grados de Libertad.
CM	Centro de Masa.
MAS	Multi-agent System.
VRS	Virtual Reference Structure.
VRP	Virtual Reference Points.
REA	Real Equivalent Agent.
ECB	Elementary Coupling Block.
PDE	Partial Differential Equations.
BM	Bases Móviles.
MM	Manipuladores Móviles.
ZMP	Zero Moment Point.
FT	Función Transferencia.

Índice General

Agradecimientos	vii
Resumen	ix
Abstract	xi
Nomenclatura	xiii
Acrónimos	xv
1 Introducción General	1
1.1 Motivación	1
1.2 Laboratorio de Automatización y Control	2
1.2.1 Cooperación Internacional	3
1.2.2 Proyectos I+D	4
1.2.3 Docencia y Desarrollo	5
1.3 Contribuciones	7
1.4 Publicaciones	8
1.5 Organización del Manuscrito	11
2 Controladores Físicamente Inspirados Basados en Enfoques Energéticos	13
2.1 Introducción	13
2.1.1 Teoría de Control Clásica	13
2.1.2 Teoría de Control Moderna	14
2.2 Estrategias de Control	15
2.2.1 Sistemas Lineales y No Lineales	15
2.2.2 Nuevo Paradigma	16
2.3 Modelado Matemático Basado en Principios Físicos	16
2.3.1 Ecuaciones de Euler-Lagrange	17
2.3.2 Ecuaciones de Hamilton	17
2.4 Control por Pasividad	18
2.4.1 Métodos Energéticos	18
2.4.1.1 PBC Clásico	19

2.4.1.2	IDA-PBC	19
2.4.1.3	CbI	19
2.4.1.4	PID + PBC	20
2.4.1.5	CL - EB - PS	20
2.5	Bond Graphs	21
2.6	Metodología de la Tesis	21
Parte I MODELADO		23
3	Base Omnidireccional	25
3.1	Introducción	25
3.2	Cinemática diferencial	26
3.3	Modelo Dinámico	28
3.3.1	Bond Graph	28
3.3.2	Método Clásico por Sustitución	31
3.3.3	Ecuaciones de Euler Lagrange	32
3.3.4	Sistema port-Hamiltoniano	35
3.4	Equivalencias	39
3.4.1	BG y Método Clásico por Sustitución	39
3.4.2	BG y EL	40
3.4.3	BG y PHS	41
3.5	Motores de Comando	44
3.6	Parametrización	46
3.6.1	Máxima Fuerza de Tracción	48
3.7	Conclusiones	51
	Bibliografía	52
4	Manipulador Móvil	53
4.1	Cinemática Directa	53
4.1.1	Denavit Hartenberg	54
4.1.2	Espacio de Trabajo y Espacio de las Juntas	57
4.2	Cinemática Diferencial	58
4.2.1	Jacobiano	58
4.2.2	Singularidades	60
4.2.3	Redundancia y Espacio Nulo	60
4.2.4	Jacobiano Analítico	61
4.3	Inversión Cinemática Diferencial	62
4.4	Modelo Dinámico	64
4.4.1	Ecuaciones de Euler Lagrange	66
4.4.2	Bond Graph	66

4.4.2.1	Campo IC	68
4.4.3	Modelo port-Hamiltoniano	70
4.4.3.1	Conservación de la Energía	71
4.5	Base Móvil	72
4.5.1	EL	72
4.5.2	BG	72
4.5.3	PHS	74
4.6	Conclusiones	75
	Bibliografía	76
5	Sistemas Multiagentes	79
5.1	Introducción	79
5.2	Modelado	80
5.2.1	Modelo Punto Material	80
5.2.2	Modelo de Bases y Manipuladores Móviles	81
5.2.2.1	Bond Graph	81
5.2.2.2	Ecuaciones de Euler Lagrange	82
5.2.2.3	Sistema port-Hamiltoniano	83
5.2.3	Coordenadas s	84
5.3	Resumen de la Teoría de Grafos	85
5.3.1	Matrices	85
5.3.2	Propiedades y Definiciones	87
5.4	Matriz de Formación	88
5.4.1	Cálculo de la Expresión	90
5.4.2	Rango y Espacio Nulo	93
5.4.3	Inversión de Segundo Orden	96
5.4.4	Holonomicidad del Mapeo	98
5.5	Conclusiones	99
	Bibliografía	100
Parte II	CONTROL	101
6	Control de Formación de Sistemas Multiagentes	103
6.1	Introducción	103
6.2	Emulación Física	104
6.2.1	Bloque Elemental de Acople	105
6.2.1.1	Modelo en Ecuaciones de Estado	105
6.2.1.2	Modelo Bond Graph	106
6.2.1.3	Pasividad	107
6.2.2	Sistema Multiagente Interconectado	108

6.2.2.1	Modelo Bond Graph	108
6.2.2.2	Modelo Generalizado con Teoría de Grafos	112
6.2.3	Control por Interconexión	114
6.2.3.1	Modelado con Señal Externa v	116
6.2.3.2	Funciones de Casimir	118
6.2.4	Control por Retroalimentación	120
6.2.4.1	Control PI	121
6.2.4.2	Control por Retroalimentación Estática	121
6.2.5	Análisis de Estabilidad	122
6.3	Estructura de Referencia Virtual	123
6.4	Conclusiones	124
	Bibliografía	125
7	Esquemas de Control de Sistemas Multiagentes	127
7.1	Introducción	128
7.2	Control de Formación por Distancia Extendido	129
7.2.1	Agente Líder	131
7.2.1.1	Estabilidad y Ley de Control	133
7.2.2	Espacio de las Aristas	137
7.2.2.1	Estabilidad y Ley de Control	139
7.3	Control de Formación por Posición	140
7.3.1	Prevención de Colisiones	141
7.3.2	Análisis de Estabilidad	142
7.3.3	Rediseño de control	143
7.4	Control Cooperativo de Manipuladores Móviles	147
7.4.1	Cancelación por Dinámica Inversa	147
7.5	Elusión de Obstáculos	152
7.5.1	Bloques ECB	152
7.5.2	Campos de Potencial	154
7.6	Control de Motores	156
7.6.1	PI de Torque	156
7.6.2	Tracking de Corriente	159
7.6.3	Backstepping	160
7.7	Conclusiones	163
	Bibliografía	165
8	Simulaciones	167
8.1	Introducción	167
8.2	Escenarios de Verificación	170
8.2.1	Control de Formación	170
8.2.2	Control de Cooperación	175

8.3	Análisis Comparativos Vía Simulación	178
8.4	Conclusiones	198
9	Conclusiones	201
9.1	Conclusiones Generales	201
9.1.1	Análisis Comparativo	201
9.1.2	Contribuciones a la Metodología Utilizada	208
9.2	Prospectivas	209
9.2.1	Fase Experimental	209
9.2.2	Fase Teórica	210
	Bibliografía	213
	Apéndice A Matrices Manipulador Móvil	223
A.1	Cinemática Directa	223
A.2	Modelo Dinámico	224
A.3	Relaciones de Transformación del Esquema BG	225
A.4	Matriz Simétrica y Positiva	226
	Apéndice B Índices de Estabilidad de Vuelco	227
B.1	Fuerza-Ángulo	229
B.2	Estabilidad de Energía	231
B.3	Punto de Momento Cero	233
B.4	Simulaciones	234
	Apéndice C Prototipado Virtual: Usos y Equivalencias	237
C.1	Introducción	237
C.2	Backstepping	237
C.3	Control de Seguimiento Trayectoria	240
C.3.1	Interpretación Física	241
C.4	Control por Dinámica Inversa	242

Capítulo 1

Introducción General

El objetivo de este capítulo es brindar al/la lector/a una descripción del contexto en el que se desarrolló la tesis, de manera que le permita tener una comprensión integral de los contenidos abordados en la misma. El capítulo está organizado en cinco secciones. La primera versa sobre la motivación que llevó a la confección de esta tesis. La segunda es una descripción del lugar del trabajo en el que se realizó la tesis; se explica el contexto de los proyectos de Investigación y Desarrollo (I+D) que se llevan a cabo, las tareas de docencia y dirección de proyectos finales y la cooperación internacional existente en el laboratorio. Luego, se listan las contribuciones específicas de la tesis y se presenta el listado de publicaciones en conferencias y revistas realizadas a lo largo de los años que duró el desarrollo de la misma. Finalmente, se detalla la organización del manuscrito.

1.1 Motivación

En esta sección introducimos la idea general que motivó la confección de esta tesis en la que se elaboran leyes de control para un MAS, compuesto por bases o manipuladores móviles, teniendo en cuenta distintas hipótesis y en consecuencia distintos modelos para cada uno de los agentes. Estos modelos van desde la consideración de cada uno de ellos como masas puntuales -el caso más simple- hasta su constitución como bases rígidas (con consideración de la dinámica de las ruedas) y la incorporación de un brazo manipulador en cada una de ellas, como el caso más complejo.

El procedimiento para el diseño de los controladores de cada uno de los agentes que componen el MAS consta de (i) desarrollo de modelos (no lineales) con distintos grados de realismo/complejidad del subsistema mecánico de los móviles¹, (ii) desarrollo de los modelos matemáticos de los motores, (iii) desarrollo de algoritmos de control no lineales para las entradas de torque (se considera que los actuadores son entradas de torque).

¹Basado en el procedimiento descrito en el prefacio de [1].

Si bien se planea validar con experimentos físicos los resultados aquí presentados (ver las previsiones al respecto más adelante, en la subsección 1.2.3), dicha etapa no se incluye en el marco del desarrollo de esta tesis. Como validación del desempeño de los controladores se opta entonces por la simulación digital en modelos aún más detallados que los más complejos utilizados para su diseño. Esto a sabiendas que al momento de implementar las leyes de control se encontrarán una serie de problemas como: (i) capacidad limitada del hardware encargado del procesamiento, (ii) respuesta en frecuencia y excursión acotadas de los actuadores, (iii) ruido en las mediciones de variables, (iv) imposibilidad de reconstrucción de la totalidad de las variables no medidas.

Teniendo en cuenta estas consideraciones, se simulan los esquemas de control en dos tipos de escenarios distintos. En el primero, el objetivo es validar las leyes de control sobre los modelos empleados para su diseño, de modo de verificar el correcto desempeño de las mismas y que se cumplan las consigas de control propuestas. En el segundo, la validación se realiza sobre modelos con alto grado de detalle de forma que se emulen las condiciones experimentales. Para ello se utilizan modelos matemáticos más realistas y se analizan las entradas de control (límites, saturaciones, derivadas) de manera que respeten las limitaciones físicas de los actuadores reales.

De este modo, los esquemas de control se prueban sobre modelos de móviles con distinto grado de complejidad. A su vez, como los modelos matemáticos más complejos requieren de leyes de control más sofisticadas, la modificación de los primeros incide directamente en las segundas. Ejemplo de esto se observa en el capítulo 7, donde se comienza modelando a los agentes como puntos materiales y a medida que se incorpora complejidad a los mismos (dinámica del subsistema mecánico y de los motores), indefectiblemente se complejizan las leyes de control.

Al final de este proceso iterativo de diseño, se analiza la aplicabilidad de la ley de control y se adopta una situación de compromiso en la que se escoge una ley cuya complejidad, y por ende tiempo de cómputo, sean compatibles con los de la implementación física.

Respecto al modelado, los modelos matemáticos de los agentes se desarrollan utilizando tres metodologías distintas basadas en enfoques energéticos: (i) Euler-Lagrange, (ii) port-Hamiltonian System, (iii) Bond Graph. El contexto del surgimiento, una justificación de la metodología empleada y una revisión del estado del arte de las tres técnicas de modelado se tratan en el capítulo 2.

1.2 Laboratorio de Automatización y Control

Mis actividades se desarrollaron en el seno del grupo de investigación del Laboratorio de Automatización y Control (LAC) del Departamento de Control, Escuela de Ingeniería Electrónica, FCEIA, UNR, cuyo Director es el Ing. Sergio Junco. En lo que atañe a

esta tesis se resalta que los miembros del grupo de trabajo del LAC tienen experiencia y producción en las áreas de modelado, simulación y control lineal y no-lineal, incluyendo enfoques con métodos energéticos, con aplicaciones en mecatrónica, sistemas de potencia, y automatización en general, plasmada en publicaciones en revistas con referato, libros y capítulos de libros, y divulgada en congresos internacionales, y conferencias internacionales.

El desarrollo tecnológico del LAC se enmarca en una organización en la que, por un lado, los proyectos de I+D aportan el financiamiento necesario para la compra de insumos y bienes, y por el otro, los proyectos finales, realizados por estudiantes del último año de ingeniería, permiten la ejecución de los prototipos experimentales. En este sentido, dichos prototipos experimentales sirven tanto para validar experimentalmente las leyes teóricas obtenidas en el marco de las investigaciones llevadas a cabo en el LAC, como para la realización de trabajos prácticos en las dos materias de grado que dicta la cátedra perteneciente al LAC: “Dinámica de los Sistemas Físicos” y “Dinámica y Control de Sistemas Mecatrónicos”.

Simultáneamente con el desarrollo de la tesis, mi rol de becario con lugar de trabajo en el LAC incluyó la participación en las actividades de cooperación internacional según se describe en la sección 1.2.1. Se considera de gran relevancia también las distintas actividades desarrolladas de I+D en robótica, las cuales me permitieron profundizar y ampliar mi formación en el área, incluyendo la adquisición de conocimiento técnicos y prácticos al respecto. En particular participé en distintos proyectos de I+D y transferencia a empresas de la zona que se detallan en la sección 1.2.2. Por último, en la sección 1.2.3 se describe mi rol como supervisor de estudiantes en el desarrollo de proyectos finales tanto con fines de experimentación, como se mencionó más arriba, como así también aquellos que apuntan a proveer una primera fase de solución a experiencias de transferencia.

Todas estas actividades, complementarias al desarrollo de la tesis y cuya descripción pormenorizada se presenta a continuación, se ponen de manifiesto aquí ya que contribuyeron a moldear el enfoque con el cual se ataca esta tesis.

1.2.1 Cooperación Internacional

De relevancia para esta tesis fueron varias de las relaciones de cooperación internacional que tiene el LAC. En primer lugar, podemos mencionar la establecida con el laboratorio PRISMA perteneciente a la Universidad de Nápoles (Universtà degli Studi di Napoli Federico II) a través de su Director el Dr. Bruno Siciliano, un científico de renombre internacional en el campo de la robótica y co-director de este beca. Antes de comenzar con esta beca, con el financiamiento de la beca AVE-Estudiantil otorgada por la UNR en el año 2015, realicé una estancia de investigación de cinco meses en el laboratorio PRISMA bajo la supervisión del Dr. Alejandro Donaire, doctorado bajo la dirección del Ing. Sergio Junco en la UNR en control con los formalismos BG y PHS.

En dicha experiencia realicé experimentos sobre robots disponibles en el laboratorio que permitieron validar experimentalmente los resultados teóricos que se habían obtenido. Además tuve la posibilidad de cursar la materia Control de Robots (forma parte de la carrera de grado Ingeniería de la Automatización de la Universidad de Nápoles) impartida por el Dr. Bruno Siciliano y cuyo contenido abarca gran parte del libro [2]. Esta oportunidad fue de gran ayuda para comenzar a incorporar los conocimientos en el área.

La cooperación internacional del LAC comprende también al grupo del laboratorio LGP en Tarbes, Francia. La misma surge a partir de una visita académica del Ing. Sergio Junco a Francia y se ve reforzada por el Dr. Martín Mujica, ex ayudante del LAC, quien realizó su doctorado en el LGP. Es así, que a través de una beca Saint Exupéry cofinanciada por el Ministerio de Educación y la Embajada Francesa, que realicé una estancia de investigación de cinco meses en dicho laboratorio francés. La misma estuvo dirigida por el Director del grupo, Dr. Mourad Benoussaad y consistió en el desarrollo de una ley de control robusta para un brazo manipulador en el marco de la interacción con humanos, y posterior validación experimental en un manipulador KUKA disponible en el laboratorio.

Durante el transcurso de la tesis también se trabajó con el investigador Pushparaj Mani Pathak del India Institute of Technology - Roorkee (IIT-Roorkee). En el marco de dicha cooperación recibimos la visita por dos meses del becario Vitalram Rayankula y como resultado de la misma se publicaron, en conferencias y artículos de revista, trabajos realizados en conjunto.

Por último, muy valiosa se juzga también la colaboración con el Dr. Romeo Ortega, investigador del CNRS en SUPELEC París iniciada a partir de la obtención de resultados conjuntos con el Dr. Alejandro Donaire. En sus dos visitas a Argentina, realicé los cursos que brindó en el área de control con enfoque energético.

1.2.2 Proyectos I+D

La línea de investigación en Robótica estuvo financiada a lo largo de estos años a través de los siguientes proyectos de financiamiento en I+D:

- PPCT-UNR-80020220600083UR. “Diseño, simulación y validación experimental numérica y física de estrategias de control de bases móviles y manipuladores móviles trabajando en sistemas robóticos multiagentes”.
Director: Ing. Martín Crespo.
Financiamiento: UNR, \$310.000. Años: 2023-2026.
- PID-UNR-80020190300098UR. “Enfoque Mecatrónico Integral Basado en Modelos para el Diseño de Sistemas Robóticos Manipuladores Móviles: Concepción, Dimensionamiento y Control”.

Director: Dr. Matías Nacusse.

Financiamiento: UNR, \$110.000. Años: 2020-2023.

- Vinculación Inclusiva UNR. “Desarrollo de robot móvil de bajo costo configurable para dotarlo de multifuncionalidad”.

Director: Dr. Matías Nacusse.

Financiamiento: UNR, \$418.000. Año: 2022.

- PICT 2017 N° 3644. “Control de manipuladores y robots móviles con navegación autónoma”.

Director: Ing. Sergio Junco.

Financiamiento: FonCyT, \$1.063.000. Años: 2019-2022.

- UNR innova post-pandemia. “Concepción, dimensionamiento y diseño mecatrónico de nuevos productos y automatización de proceso en PYME metalmecánica”.

Director: Ing. Sergio Junco.

Financiamiento: UNR, \$200.000. Año: 2021.

- PID-UNR-1ING502. “Dinámica y Control de Robots Móviles Manipuladores”.

Director: Ing. Sergio Junco.

Financiamiento: UNR, \$30.000. Años: 2017-2020.

- IN/14/07 MinCyT-DST de Cooperación Bilateral con la India. “Diseño y control de robot manipulador móvil para transporte de materiales peligrosos”.

Director: Ing. Sergio Junco.

Financiamiento: MinCyT. Años: 2015-2017.

- Vinculación Inclusiva UNR. “Diseño y control de manipuladores robóticos fijos y móviles, con implementación de prototipos experimentales”.

Director: Dr. Ernesto Kofman.

Financiamiento: UNR, \$35.000. Año: 2017.

En los proyectos de vinculación se trabajó con distintas PyMEs de la región de entre las cuales destacamos a Giampieri S.H., empresa metalúrgica dedicada a la matricería para el rubro de línea blanca, que comienza a abrir una línea de trabajo que incluye asistentes robotizados para ayuda a personas con dificultades de movilidad.

1.2.3 Docencia y Desarrollo

La vocación del grupo de investigación del LAC es vincular las tareas de I+D con las de docencia, de manera que se genere un intercambio que sea enriquecedor no sólo para los estudiantes sino también para los docentes investigadores y para el equipamiento del laboratorio con plataformas experimentales de concepción y construcción propia. Es por ello que, además de las investigaciones desarrolladas en el marco de mi tesis doctoral,

realicé como codirector tareas de formación de recursos humanos de los siguientes proyectos finales de la carrera de Ingeniería Electrónica e Ingeniería Mecánica:

1. Título: “Control de Trayectoria para Navegación Autónoma de Robot Móvil con Plataforma Omniwheel”.
Descripción: Modelado, simulación y control de un robot móvil y su implementación en un prototipo experimental para el seguimiento de trayectorias y la prevención de colisiones con obstáculos detectados en tiempo real. Figura 1.1a
Estudiantes: Clara Bureu y José Casá. Año: 2019.
2. Título: “Sistema de Control Reconfigurable para Manipulador Scorbot”.
Descripción: Diseño y construcción de nueva placa de control programable, para reemplazar gabinete de control existente del Manipulador Scorbot ER-IX, a fin de poder implementar diferentes algoritmos de control del manipulador. Figura 1.1b
Estudiante: Facundo Piombo. Año: 2021.
3. Título: “Diseño e Implementación de una Plataforma Móvil con dos Sistemas de Locomoción”.
Descripción: Diseño y construcción de una plataforma móvil con dos alternativas de locomoción: tracción diferencial con dos ruedas convencionales más una rueda loca y tracción con tres ruedas omniwheel. Desarrollo e implementación de algoritmos de control para navegación autónoma. Figura 1.1c
Estudiantes: Felipe Cinto y Franco Seguezzo. Año: 2021.
4. Título: “Diseño e Implementación de un Sistema de Control para la Navegación Autónoma de un Automóvil a Escala”.
Descripción: Diseño e implementación en prototipo experimental de controladores para navegación autónoma de un automóvil a escala. Figura 1.1d
Estudiante: Guillermo Rolle. Año: 2022.
5. Título: “Plataforma Robótica de Asistencia a la Movilidad de Personas (PRAM)”.
Descripción: Modelado, simulación, control y automatización de un andador para adultos. Figura 1.1e
Estudiantes: Facundo Chamena y Exequiel Remersaro. Año: 2023.

De este modo, el equipamiento aquí desarrollado y las cualidades adquiridas, brindan la posibilidad de validar experimentalmente los desarrollos de esta tesis en una etapa posterior a la misma. En particular, el hardware de control diseñado ad hoc permitirá computar la complejidad de las leyes de control desarrolladas en esta tesis, no sólo en plataformas omnidireccionales, sino también (previa adaptación) en bases con locomoción diferencial, cuadrúpeda y ackerman.

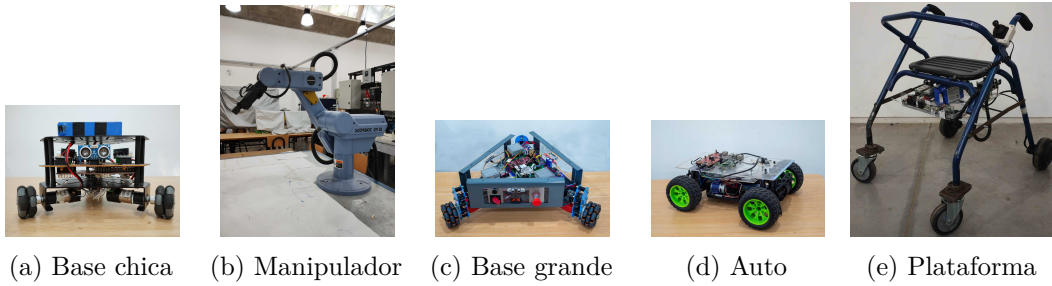


Fig. 1.1 Modelado y control de prototipos experimentales ejecutados en los proyectos finales.

1.3 Contribuciones

A continuación se realiza un listado sucinto, ordenado por capítulos y apéndices, de los principales aportes particulares que conforman contribuciones de la tesis:

- Capítulo 2
 - Argumentación de la metodología utilizada
- Capítulo 3
 - Análisis, comparación de propiedades de tres tipos de modelos de una base móvil: EL, PHS y BG
 - Interpretación física y matemática de las fuentes residuales en un BG
- Capítulo 4
 - Modelado modular de un manipulador móvil. Vinculación de la técnica DH con BG
 - Presentación de distintos tipos de modelos para simulación y síntesis de leyes de control
 - Obtención de las aceleraciones en el espacio nulo de manera integral
- Capítulo 5
 - Modelado MAS con EL, PHS y BG
 - Obtención matriz de Formación
 - Propiedades de la matriz de Formación: rango y holonomicidad
 - Inversión de segundo orden de la matriz de Formación: analogía con el Jacobiano y obtención de las pseudoinversa
- Capítulo 6
 - ECB: Enfoque físico, función resorte pasiva

- MAS interconectado: vinculación del modelado BG con teoría de grafos
- MAS interconectado: expresión como Control por Interconexión, Funciones de Casimir y Realimentación Estática
- Capítulo 7
 - Control de formación por distancia: control de posición y orientación del sistema interconectado usando un agente líder
 - Control de formación por distancia: aprovechamiento del espacio nulo de la matriz de formación
 - Control de formación por posición: rediseño de ley de control para asegurar estabilidad del PE (Punto de Equilibrio)
 - Control de cooperación: uso del espacio nulo de los manipuladores móviles (MM), trabajando en cooperación en un MAS, para formación y estabilidad anti vuelco
 - Elusión de obstáculos: utilización de ECB y funciones de potencial para sumar a los esquemas vistos
- Apéndice B
 - Adaptación del índice Fuerza-Ángulo al manipulador móvil
- Apéndice C
 - Analogías e interpretación física del la técnica de prototipado virtual

1.4 Publicaciones

Las publicaciones que se detallan a continuación son algunas de ellas producto de trabajos en el marco de la tesis y otras afines a la misma, fruto de la participación en las distintas actividades llevadas a cabo en el LAC arriba descritas, siempre en mi caso ampliando o poniendo en ejecución los conocimientos adquiridos en robótica. Las mismas se clasifican en:

Específicas de la Tesis

Artículos en conferencias:

- [3]: Martín Crespo, Matías Nacusse, and Sergio Junco. Comparison of trajectory tracking and obstacle avoidance strategies for a multi-agent dynamic system. In *Int. Conf. on Integrated Modeling and Analysis in Applied Control and Automation (IMAACA 2019)*, 2019.

- [4]: Matías Nacusse, Martín Crespo, and Sergio Junco. Bond graphs based formation control of holonomic robots. In *Int. Conf. on Integrated Modeling and Analysis in Applied Control and Automation (IMAACA 2019)*, 2019.
- [5]: Martín Crespo, Matías Nacusse, and Sergio Junco. Stabilization of mobile robotic manipulator through independent base control. In *Asociación Argentina de Control Automático (AADECA 2018)*, 2018.
- [6]: Martín Crespo, Matías Nacusse, Sergio Junco, Vitalram Rayankula, and Pushparaj Mani Pathak. Control of mobile robotic manipulator: a combined design approach. In *Int. Conf. on Integrated Modeling and Analysis in Applied Control and Automation (IMAACA 2018)*, 2018.
- [7]: Matías Nacusse, Martín Crespo, Sergio Junco, Vitalram Rayankula, and Pushparaj Mani Pathak. Bond graph model conditioning for analysis, simulation and control system design: application to a planar mobile robotic manipulator. In *Int. Conf. on Integrated Modeling and Analysis in Applied Control and Automation (IMAACA 2018)*, 2017.

Relativas a la Cooperación Internacional

Artículos en conferencias:

- [8]: Martín Crespo, Martín Mujica, Mourad Benoussaad, and Sergio Junco. Robust control in task space for redundant manipulator. In *XIX Workshop on Information Processing and Control (RPIC 2021)*, pages 1–6. IEEE, 2021.
- [9]: Martín Crespo, Alejandro Donaire, Fabio Ruggiero, Vincenzo Lippiello, and Bruno Siciliano. Design, implementation and experiments of a robust passivity-based controller for a rolling-balancing system. In *Int. Conf. on Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO 2016)*, 2016. **PREMIO MEJOR PAPER DE LA CONFERENCIA**

Artículos en revistas:

- [10]: Martín Mujica, Martín Crespo, Mourad Benoussaad, Sergio Junco, and Jean-Yves Fourquet. Robust variable admittance control for human–robot co-manipulation of objects with unknown load. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 79:102408, 2023.
- [11]: Alejandro Donaire, Jose Guadalupe Romero, Romeo Ortega, Bruno Siciliano, and Martín Crespo. Robust ida-pbc for underactuated mechanical systems subject to matched disturbances. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 27(6):1000–1016, 2017.

Capítulos de libro:

- [12]: Alejandro Donaire, Martin Crespo, Fabio Ruggiero, Vincenzo Lippiello, and Bruno Siciliano. Passivity-based control design and experiments for a rolling-balancing system. In *Informatics in Control, Automation and Robotics*, pages 230–255. Springer, 2018.

Relativas a la Docencia y Desarrollo

Artículos en conferencias:

- [13]: Facundo Chamena, Ezequiel Remersaro, Matías Nacusse, Martín Crespo, Guillermo Rolle, and Sergio Junco. A systematic approach to the design and implementation of a control system for a robotic mobility assistance platform. In *XX Workshop on Information Processing and Control (RPIC 2023)*, pages 1–6. IEEE, 2023.
- [14]: Rolle Guillermo, Matías Nacusse, Martín Crespo, and Sergio Junco. Model-Based Design and Implementation of Dynamic Controller for Autonomous Guidance of a Scale Automobile. In *IEEE Biennial Congress of Argentina (ARGENCON 2022)*, 2022.
- [15]: Sergio Junco, Matías Nacusse, Martín Crespo, Mauro Carignano, and Daniel Ades. Educating in robotics and producing experimental resources through final engineering projects. In *XV Congreso Tecnología Aprendizaje y Enseñanza de la Electrónica (TAE 2022)*, 2022.
- [16]: Felipe Cinto, Franco Seguezzo, Matías Nacusse, Martín Crespo, Pablo Gallucci, Daniel Ades, and Sergio Junco. Diseño, construcción y control de movimiento de una base móvil con dos sistemas de locomoción alternativos. In *XI Jornadas Argentinas de Robótica (JAR 2022)*, 2022.
- [17]: Facundo Piombo, Matías Nacusse, Martín Crespo, Joaquín Ezpeleta, Daniel Alba, Edgardo Arnejo, and Sergio Junco. Diseño e implementación de hardware y software de control a bajo nivel de un manipulador robótico de tipo industrial. In *XI Jornadas Argentinas de Robótica (JAR 2022)*, 2022.
- [18]: Matías Nacusse, Guillermo Rolle, Sergio Junco, Martín Crespo, Felipe Cinto, Franco Seguezzo, Manuel Sobrero, Mauro Carignano, and Daniel Ades. Diseño mecatrónico de plataformas electromecánicas para robots móviles con sistemas de locomoción con ruedas y con patas. In *VII Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica (CAIM 2021)*, 2021.
- [19]: Sergio Junco, Daniel Alba, Matías Nacusse, Joaquín Ezpeleta, Javier Cabello, and Martín Crespo. Aprendizaje por la práctica: proyectos finales de ingeniería integrando proyectos de i+d. In *XI Congreso Argentino de Enseñanza de la Ingeniería (CAEDI 2021)*, 2021.

- [20]: Clara Bureu, José Casá, Matías Nacusse, Martín Crespo, Gustavo Migoni, and Sergio Junco. Omni-directional mobile robot control system design and implementation. In *X Jornadas Argentinas de Robótica (JAR 2019)*, 2019. 3^{er} PREMIO MEJOR PAPER ESTUDIANTEL.

1.5 Organización del Manuscrito

El resto de la tesis está organizada en dos partes, 8 capítulos y 3 apéndices. En el capítulo 2 se presenta la metodología de trabajo de la tesis. Se realiza un breve racconto histórico de la teoría de control y se presentan los métodos energéticos que se utilizarán para el modelado y confección de las leyes de control.

Luego la tesis se divide en dos partes. En la *Parte I: Modelado* se encuentran los capítulos 3, 4 y 5. En el capítulo 3 se desarrolla el modelo, utilizando distintas metodologías, de una base omnidireccional de tres ruedas. Se analizan y realizan distintas comparaciones entre los mismos y se parametrizan los modelos.

En el capítulo 4 se presenta el modelo de un manipulador montando sobre una base móvil omnidireccional. Nuevamente se presentan distintos tipos de modelos y se realizan análisis y comparaciones entre los mismos.

En el capítulo 5 se extienden los modelos antes vistos para MAS. Utilizando la teoría de grafos, se define la matriz de Formación y se presentan una serie de proposiciones con sus respectivas demostraciones.

La *Parte II: Control* está compuesta por los capítulos 6, 7 y 8. En el capítulo 6 se presentan dos estrategias de control de formación de MAS: una basada en distancia y la otra en posición. Sobre la primera versa la mayor parte del capítulo; se presenta un enfoque inspirado físicamente, luego se formaliza matemáticamente y se derivan las propiedades relativas a las funciones de Casimir.

El capítulo 7 muestra todos los esquemas de control y, a la vez que sirve como especie de aglutinante de los capítulos precedentes, presenta resultados en control de formación y cooperación. Con dicha premisa como objetivo, se desarrollan estrategias de control para asegurar estabilidad del punto de equilibrio, elusión de obstáculos, estabilidad de vuelco y control de motores.

En el capítulo 8 se presentan 12 escenarios distintos de simulación para validar y verificar el correcto funcionamiento de las estrategias presentadas en el capítulo anterior. En base a los resultados de simulación se analizan el comportamiento, ventajas y desventajas de los distintos esquemas.

Finalmente en el capítulo 9 se brindan las conclusiones generales y las perspectivas de trabajo a futuro.

En el Apéndice A se presentan las expresiones matemáticas de las matrices del modelo que concierne al manipulador móvil visto en el capítulo 4. En el Apéndice B se presentan los distintos índices de estabilidad de vuelco, formulados ad hoc para

el modelo de manipulador móvil tratado en esta tesis. Por último, el Apéndice C muestra un análisis de la técnica de control de prototipado virtual y sus equivalencias e interpretaciones físicas con otras estrategias de control.

Capítulo 2

Controladores Físicamente Inspirados Basados en Enfoques Energéticos

En este capítulo se realiza una descripción de la fundamentación de la tesis, y se presenta la metodología utilizada para la realización de la misma. Se comienza con una breve reseña de la historia del control comenzando en los años 30 hasta llegar a la actualidad. Seguidamente, se presenta el nuevo paradigma basado en métodos energéticos que surge luego del enfoque de sistemas lineales y no lineales. A continuación se introducen los distintos tipos de modelos matemáticos que se utilizarán durante el resto de la tesis y se describen los métodos que conforman la familia de control por pasividad. Luego, se hace referencia a los Bond Graphs como técnica tanto de modelado y control, que servirá de lingua franca para articular los distintos modelos matemáticos. Por último se presenta la metodología y enfoque con el que se trabajará a lo largo de toda la tesis.

2.1 Introducción

A continuación se realiza un breve racconto de la historia del desarrollo de la teoría de control diferenciando los períodos clásicos y modernos.

2.1.1 Teoría de Control Clásica

El desarrollo de la teoría de control tuvo su origen en los años 30 y fue impulsado en gran parte por problemas tecnológicos originados desde amplificadores, comunicaciones, hasta aplicaciones espaciales, y se abordó con dos enfoques distintos. Por un lado, el enfoque matemático para el modelado de sistemas y desarrollo de controladores basado en modelos entrada-salida donde las transformadas de Laplace y de Fourier eran las herramientas centrales para el análisis en frecuencia de los mismos, sobre todo en sistemas de comunicación. Los métodos Nyquist-Bode en el dominio frecuencial

sirvieron a Occidente como herramienta para el diseño de servomecanismos durante la Segunda Guerra Mundial como radares, guiado de proyectiles, etc. En este marco, el control por retroalimentación era aplicable sólo a sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI, Linear Time Invariant) [21].

El segundo enfoque, es más clásico y se remonta a los matemáticos Poincaré y Lyapunov. Tiene a las ecuaciones diferenciales como base matemática y permite modelizar la dinámica interna tanto de sistemas lineales como no lineales a través de la representación en el espacio de estados. La principal tarea de diseño es lograr la estabilidad en el sentido de Lyapunov de sistemas retroalimentados que contienen no linealidades significativas. Este enfoque tuvo mucho éxito en la Unión Soviética en problemas de control de cohetes y satélites (la clave de dicho éxito fue también el buen conocimiento de los modelos mecánicos, eléctricos y electromecánicos). Así, durante muchos años, los métodos de análisis frecuenciales y de estabilidad coexistieron por separado en lo que en la actualidad se conoce como el período de la *teoría de control clásica*.

2.1.2 Teoría de Control Moderna

La situación cambió radicalmente en los años 50 y 60 con el célebre lema de Kalman-Yakubovich-Popov que introducía el concepto de pasividad como una de las propiedades fundamentales de la retroalimentación, un resultado clave que vinculó la pasividad con la existencia de una función de Lyapunov cuadrática para un sistema lineal [22]. En 1960, en plena guerra fría y con el lanzamiento del (primer) satélite “Sputnik” en 1957 por parte de la Unión Soviética como antesala, tuvo lugar en Moscú la primera reunión de la Federación Internacional de Control Automático (IFAC, International Federation of Automatic Control) en un intento de unificar criterios y tender puentes con Occidente. De este modo se dio comienzo a lo que en la literatura se denomina como el período de la *teoría de control moderna*.

Esta etapa estuvo signada por una fuerte publicidad por parte de Kalman del trabajo fundamental que había realizado Lyapunov en el área de control de sistemas no lineales en el dominio temporal años atrás [23]. Durante este período se logró con éxito el control de la versión linealizada de algunos sistemas no lineales, dando buenos resultados en la estabilización de su punto de equilibrio. Con Kalman como protagonista se formalizaron los conceptos de optimización en teoría de control y, en teoría de estimación, se introdujo la noción de estocástico a sistemas no estacionarios variables en el tiempo.

En los años 60 y 70, aprovechando las ventajas de la representación de sistemas bajo el formalismo matemático de espacio de estados, aparecieron nuevos conceptos fundamentales como controlabilidad, observabilidad, optimización y técnicas de control como identificación, y control digital [24]. En los años 70 y principios de los años 80, con el enfoque entrada-salida lineal como marco, se desarrolló el control adaptable y el

control robusto para rechazo de perturbaciones en el control de procesos, extendiéndose luego este último al control robusto no lineal, conocido como control predictivo basado en modelo (MPC, Model Predictive Control), haciéndose popular por su simplicidad en el ámbito de la industria de procesos químicos [25].

En el transcurso de los años las teorías de control, en lugar de atacar problemas ingenieriles, fueron virando hacia abstracciones cada vez más matemáticas sin realización de experimentos, perdiendo así el enfoque con el que habían surgido en sus comienzos. El empleo de modelos matemáticos basados en primeros principios, y por lo tanto, dando cuenta de la física subyacente a los problemas de control, que es clave para el diseño de controladores comprensibles o interpretables en términos de los problemas concretos a resolver, también fue relegado [24]. A principios de los años 80 con la presión ejercida por las agencias de financiamiento y la industria, se logró un giro en la comunidad hacia problemas de aplicación más reales, revalorizando el control como una solución interdisciplinaria para nuevos problemas prácticos. Los especialistas en control debían interactuar y comunicarse con especialistas de otras áreas ante los nuevos desafíos de control que surgían, entre los que se encontraban nuevas aplicaciones de ingeniería (robots cooperativos, redes eléctricas inteligentes, aplicaciones biomédicas) que presentaban un fuerte acoplamiento entre subsistemas e interacción mutua en lugar de restringirse exclusivamente a la consideración de relaciones causa-efecto. Esto motivó el surgimiento de nuevos paradigmas de control para sistemas físicos, alternativos al enfoque de procesamiento de señal con el que se venía trabajando hasta ese momento, basados en el estudio de la energía, la disipación y la interconexión [24].

2.2 Estrategias de Control

2.2.1 Sistemas Lineales y No Lineales

La teoría de control ha tenido un gran éxito al tratar con sistemas LTI. La combinación de técnicas frecuenciales y en el espacio de estados permitió sistematizar el diseño de controladores por realimentación de sistemas lineales, incluso ante la presencia de perturbaciones y errores de modelado. Métodos de diseño para sistemas lineales como el lugar de las raíces, diagramas de Bode, control LQR-óptimo, autovalores a lazo cerrado, H_∞ , μ -síntesis, se utilizaron para lograr estabilización, seguimiento de trayectorias, rechazo de perturbaciones y objetivos de diseño similares. En todos estos casos, tanto el modelo del sistema como el del controlador son procesadores de señales, y las especificaciones de control como el seguimiento de trayectoria y el rechazo de perturbaciones, vienen expresadas en términos de señales. Dichas señales se definen como entradas-salidas y tanto la planta como los controladores son operadores causales (interactúan bajo una relación causa-efecto).

Sin embargo, debido a que los sistemas no lineales pueden llegar a tener comportamientos dinámicos extremadamente complejos con una gran diversidad de fenómenos, los intentos de extender los resultados de LTI a modelos no lineales se vieron limitados en muchos casos debido a la gran incertidumbre paramétrica y dinámica no modelada que presentaban los mismos. Resulta difícil entonces pensar en una misma estrategia de diseño de controladores para todos los sistemas sin caer en soluciones conservadoras o de lo que [24] define como “control matemático” i.e., partiendo de sistemas cuya solución de control es conocida, se busca incorporar algunas no linealidades de manera de extender las soluciones a un conjunto más amplio de sistemas.

2.2.2 Nuevo Paradigma

El objetivo entonces era desarrollar herramientas para la síntesis de controladores de una gran variedad de sistemas físicos complejos no lineales abandonando el enfoque puramente matemático de análisis de sistemas y comenzando a dar mayor relevancia, cuando no protagonismo excluyente, a los fenómenos físicos subyacentes a los modelos matemáticos [26]. Por un lado, la transformación y disipación de energía, pensando a la planta como un procesador de energía en lugar de un procesador de señales y, por el otro, reemplazando el enfoque entrada-salida de la teoría clásica por uno de interconexión, en el cual los sistemas interactúen sin una relación causa-efecto, en un mecanismo equiparable a una interconexión que preserva potencia. Además, se buscaba darle una interpretación física al controlador, hecho que en el control matemático resulta muy difícil si no imposible, pensándolo como una solución que a través de su interconexión con la planta - modifica, agrega, transmite y extrae - energía de la misma, aprovechando sus propiedades energético-estructurales [27]. Este enfoque también es conocido como “behavioral approach” [28].

Modelos no basados en energía, como por ejemplo, redes neuronales o fuzzy set, aprovechan la gran disponibilidad de datos y la capacidad de cómputo que existen hoy en día para el control de sistemas no lineales. Aún en este caso, la comprensión de estas técnicas requiere del uso de conceptos de la teoría de control no lineal, y si bien las mismas promueven la aplicación en prototipos reales y son usadas ampliamente por la comunidad, no parecen propiciar una base de colaboración entre especialistas de distintas áreas [24].

2.3 Modelado Matemático Basado en Principios Físicos

De este modo, resulta clave para el control de un sistema no lineal comprender en profundidad su comportamiento dinámico y los fenómenos físicos involucrados. Para ello es necesario contar con un modelo matemático riguroso que formalice dichos fenómenos que allí ocurren. Modelos matemáticos como EL y PHS expresan la no linealidad de la dinámica de una gran variedad de sistemas actuales, muchos de

los cuales no se pueden modelar con las herramientas de control lineal [24]. Ambas técnicas de modelado permiten representar propiedades físicas como (i) almacenamiento y disipación de la energía, (ii) la estructura de interconexión, (iii) el intercambio de energía entre los componentes del sistema a través de esta estructura.

2.3.1 Ecuaciones de Euler-Lagrange

Las ecuaciones de Euler-Lagrange (EL) son el resultado de una técnica de modelado denominada el *método variacional* cuyo enfoque comienza con la definición de funciones de energía, dependientes de variables generalizadas, para luego definir el Lagrangiano del sistema. A través de las ecuaciones de Lagrange, las ecuaciones de movimiento pueden ser obtenidas independientemente del sistema de coordenadas elegido. Dentro de las ventajas de utilizar modelos EL se encuentran [24]:

- La posibilidad de explicitar las funciones de almacenamiento y disipación de energía, claves para el desarrollo de los controladores basados en métodos energéticos.
- Sistemas complejos pueden ser pensados como subsistemas, cada uno representado a través de su función almacenamiento de energía
- La interconexión de dos sistemas EL es un sistema EL
- Dado que el problema se formula en términos de energía, se pueden tratar sistemas de naturaleza mixta, que son los que generalmente aparecen en aplicaciones de ingeniería.

2.3.2 Ecuaciones de Hamilton

Los Sistemas Port-Hamiltonianos (PHS, Port-Hamiltonian Systems) permiten el modelado de un amplio conjunto de sistemas dinámicos no lineales que, a su vez, contiene a los modelos EL descritos anteriormente [29]. A diferencia de las ecuaciones de EL, las ecuaciones de Hamilton son ecuaciones diferenciales de primer orden que se formulan en términos del gradiente de la energía total almacenada en el sistema (Hamiltoniano) y, además de permitir la representación del balance de energía de sistemas físicos como los modelos EL, permiten distinguir variables y ecuaciones entre aquellas asociadas a las propiedades físicas y las que definen la estructura de interconexión de intercambio de energía y la estructura de disipación [30].

Si bien no hay diferencias esenciales entre las formulaciones EL y ecuaciones de Hamilton, las primeras permiten revelar de manera más fácil componentes estructurales de fuerzas que no realizan trabajo, como pueden ser los términos de las fuerzas de Coriolis en los manipuladores robóticos. En cambio, la interpretación de las mismas en los modelos Hamiltonianos es más compleja (ver capítulo 2 de [31]).

2.4 Control por Pasividad

Un sistema es pasivo si no puede acumular más energía que la que le es suministrada, siendo dicha diferencia la energía disipada. El hecho de que un sistema pasivo sea invariante con realimentación negativa (la interconexión por realimentación de dos sistemas pasivos es pasiva) sumado a las condiciones necesarias para las cuales un sistema no lineal puede pasivarse a través de una realimentación de estados [32], explican la importancia de la pasividad en la construcción de bloques de control de sistemas no lineales [24].

2.4.1 Métodos Energéticos

Uno de los paradigmas más exitosos, orientado a la estabilización robusta, es el control por pasividad (PBC, Passivity Based Control). El mismo es una familia de métodos que plantea el problema de control en lazo cerrado en términos de conformación de funciones de los estados del sistema, de la estructura de interconexión y asignación de disipación.

Dichos métodos, basados en modelos matemáticos EL y PHS, tienen por finalidad aprovechar la estructura no lineal de los sistemas en lugar de imponer cierta dinámica determinada o incluso "destruirla", como en el caso de linealización por realimentación donde la estructura no lineal del sistema es reemplazada por una lineal a lazo cerrado.

Por su parte, el uso de la energía para el control permite tener una *lingua franca* entre los distintos métodos sumado al hecho de que, al estar basados en conceptos energéticos, pueden ser comprendidos por los ingenieros de distintas especialidades (no sucede lo mismo con los conceptos matemáticos más avanzados de las teorías abstractas genéricas de control, que usualmente exceden los conocimientos que manejan los ingenieros, aún lo especialistas) facilitando la comunicación entre los mismos y dándole una interpretación física a las acciones de control [27].

Dentro de la familia de métodos que componen el control por PBC se encuentran:

- PBC Clásico
- Conformado de la Energía (ES, Energy Shaping)
 - Interconexión y Asignación de Energía (IDA, Interconnection and Damping Assignment)
 - Lagrangianos Controlados (CL, Controlled Lagrangians)
- Control por Interconexión (CbI, Control by Interconnection)
- Balance de Energía (EB, Energy Balancing)
- Conformado de Potencia (PS, Power Shaping)

A continuación, se definen y describen los distintos métodos listados.

2.4.1.1 PBC Clásico

El concepto de control por pasividad (PBC) fue introducido por primera vez en [33] en el marco de controles adaptativos para manipuladores robóticos con el objetivo de definir una metodología de diseño de controladores que permitiera pasivar un sistema a lazo cerrado con respecto a una determinada función de energía potencial deseada, estableciendo así una relación clave entre energía y pasividad. De este modo, si se piensa al control en términos de interconexión de sistemas pasivos, se obtiene una interpretación energética del proceso de estabilización [27]. Si bien esta técnica es muy exitosa para el control de sistemas de distinta naturaleza (mecánicos, eléctricos, electromecánicos, etc.) que vienen descritos a través de ecuaciones EL, tiene un campo de aplicación limitado [34], encontrando limitaciones en sistemas eléctricos, electromecánicos y sistemas subactuados [30].

2.4.1.2 IDA-PBC

Interconexión y asignación de amortiguamiento extiende el atractivo de la técnica PBC a aquellos sistemas donde es necesario moldear/conformar toda la energía del sistema y no sólo la potencial [30] [34]. La principal diferencia entre el enfoque clásico PBC y el IDA-PBC, es que en el primero se elige la función de almacenamiento deseada a lazo cerrado y luego se diseña el controlador que logra dicho objetivo, mientras que en el segundo, la función energía a lazo cerrado es obtenida vía ecuaciones en derivadas parciales (PDE, Partial Derivative Equations) como resultado de elegir los subsistemas interconectados y el amortiguamiento deseados. Otra de las diferencias es que el control IDA-PBC se implementa sobre modelos PHS en lugar de modelos EL. Como ventajas de esta técnica se pueden mencionar el hecho de que genera controladores PHS asintóticamente estabilizables además de que el diseño es relativamente sistemático y computacionalmente eficiente, mientras que la principal desventaja se encuentra en la dificultad para obtener soluciones de las PDE [30].

2.4.1.3 CbI

El enfoque de CbI tiene la particularidad de que, mientras en el control PBC estándar (las leyes de control del PBC pueden ser vistas como un caso particular del CbI) el moldeado/conformado de energía se logra a través de una realimentación de estados estática, el controlador es otro sistema PHS con sus propias variables de estado y función de energía, conectado a la planta a través de una interconexión sin pérdida de potencia, pudiendo ser interpretado como una realimentación dinámica [35]. De este modo, el sistema completo es ciclo-pasivo con una nueva función de energía igual a la suma de la función de energía del controlador más la de la planta [36]. Es interesante destacar que, a diferencia de la técnica PBC clásica donde la generación de salidas

pasivas no es ni intuitiva ni físicamente inspiradora, el enfoque del CbI plantea una interacción de dos sistemas dinámicos [35].

2.4.1.4 PID + PBC

Un control PID se puede pensar como una acción que tiene en cuenta el pasado (parte integral), futuro (derivativa) y presente (proporcional). Los controladores PID están presentes en casi la totalidad de las aplicaciones ingenieriles de regulación (controlar una señal alrededor de un determinado valor deseado) y su uso es ampliamente comprendido y aceptado por los ingenieros de control. Sin embargo, en sistemas con amplios rangos de operación donde las linealizaciones no son válidas, el ajuste de las ganancias es una tarea difícil, frágil y que conlleva una gran pérdida de tiempo [37].

La principal motivación para la combinación de controladores PID con técnicas de PBC, además de la popularidad y simplicidad de los controladores PID, es que los primeros tienen salida-estrictamente pasivas, por lo que si la planta es pasiva entonces [38]: (i) el lazo cerrado es $\mathcal{L}_2$ -estable para todas las ganancias positivas por lo que el ajuste de las mismas se simplifica, (ii) bajo ciertas condiciones la salida $y(t) \rightarrow 0$.

2.4.1.5 CL - EB - PS

El resto de los métodos se describe sucintamente a continuación:

- **Lagrangianos Controlados**

El método de CL parte de un sistema mecánico con un determinado lagrangiano "libre" para luego modificar la parte de la energía cinética del mismo y producir así un nuevo lagrangiano controlado que describe la dinámica del sistema de lazo cerrado [39]. El método puede extenderse modificando también la parte potencial del lagrangiano [40].

- **Balance de Energía**

En [27] se define una clase especial de PBC, llamada EB, que tiene como particularidad que la energía a lazo cerrado es la diferencia entre la energía almacenada y la suministrada. En [30] se define la clase de sistemas, entre los que se encuentran sistemas mecánicos, para los cuales se cumple dicha particularidad.

- **Conformado de Potencia**

La presencia de disipación *pervasive*, es decir, la existencia de elementos resistivos cuya potencia no desaparece en el punto de equilibrio deseado, impide el balance de energía de un sistema [41]. Para superar dicho inconveniente en circuitos

eléctricos, se propone un paradigma alternativo denominado PS [42]. En el mismo la estabilización se consigue dando forma a una función parecida a la potencia en lugar de la función de energía.

2.5 Bond Graphs

No mencionados hasta aquí, los Bond Graphs (BG), constituyen una herramienta metodológica importante a usar en esta tesis. A diferencia de los formalismos de Lagrange y Hamilton, originados en la Física Clásica, los BG surgieron en Ingeniería en el Instituto Tecnológico de Massachusetts a fines de los 50 [43] y se consolidaron en los 60 y 70 [44], como un formalismo unificado de modelado de sistemas físicos que captura gráficamente los fenómenos energéticos (almacenamiento, disipación, etc.) y la estructura interna y externa de intercambio de potencia en el sistema. Esta información física, junto a la codificación gráfica de las relaciones causales entre las variables del sistema, permite una serie de análisis estructurales, cualitativos y cuantitativos directos sobre el BG y la extracción de diversos tipos de modelos matemáticos, todo lo cual hace de ellos una herramienta muy adecuada para cumplimentar muchas de las etapas del análisis y diseño de un sistema, tales como modelado, simulación, elección de arquitecturas de instrumentación y accionamiento, síntesis de controladores y esquemas de supervisión, etc.

En lo que hace al diseño de controladores, en muchos casos se han implementado métodos pre-existentes sobre los BG, pero también hay trabajos, entre los que se cuentan los propios del grupo, que utilizan las propiedades estructurales y energéticas del formalismo para proponer nuevos métodos y/o como fuente de inspiración o paso previo para una formulación posterior más general sobre formalismos clásicos como los EL y PHS [45] [46] [47]. Los métodos de análisis y diseño de controladores con BG resultan interesantes porque permiten implementar controladores (con una intuición física) en sistemas complejos sin realizar una matemática compleja. Por lo tanto, son importantes para el desarrollo de la ingeniería de control debido al papel integrador que tienen con respecto a diferentes dominios tanto físicos como técnicos, así como la variedad de diseño de sistemas de control.

2.6 Metodología de la Tesis

En la actualidad, áreas como la mecatrónica requieren de una sinergia entre especialistas de diversas ramas ante los nuevos desafíos que surgen en el área de robótica. En esta tesis no sólo se presentan nuevos resultados sino que se provee una herramienta de análisis de sistemas para las diversas comunidades de la ingeniería. Trabajar con conceptos como flujo de potencia y almacenamiento de energía, principios básicos de

ingeniería y transversales a todas sus áreas, resulta clave para una mayor articulación de las mismas.

En esta tesis, para encarar el control de los sistemas físicos se trabajará con el enfoque presentado en [21] donde se propone una *batería de métodos* que se adapten a los requerimientos de los distintos modelos de interés, articulando enfoques energéticos con aquellos de la teoría clásica. A su vez, fundamentales para el diseño de una *batería de métodos*, se desarrollarán modelos matemáticos rigurosos que representan las estructuras físicas, propiedades energéticas y las no linealidades de los sistemas físicos tratados.

Para ello, se emplearán modelos basados en formalismos energéticos EL y PHS y representación gráfica BG. Utilizaremos estos últimos como lingua franca para articularlos, aprovechando la existencia de correspondencias, con los formalismos EL y PHS, en el sentido de interpretar propiedades de unos en términos de los otros, y trasladar a los formalismos matemáticos rigurosos EL, PHS y/o generalizar en ellos resultados específicos que se puedan obtener o inferir en el dominio BG. También se emplearán técnicas como la de Denavit-Hartenberg para la obtención de modelos cinemáticos.

Por su parte, para la síntesis de los controladores de los sistemas abordados en este manuscrito, se adoptará un enfoque ingenieril, con inspiración en fenómenos físicos fundamentales, para luego formalizarlos en el plano matemático. Se utilizarán una serie de técnicas y herramientas de diversos dominios, como teoría de grafos, estabilidad en el sentido de Lyapunov, PBC, linealización por realimentación, control por modos deslizantes, etc., para, de manera articulada, poder analizar y probar el correcto desempeño de las leyes de control propuestas.

Parte I

MODELADO

Capítulo 3

Base Omnidireccional

En este capítulo se presentan distintos modelos de una base omnidireccional compuesta por tres ruedas omniwheel localizadas a 120° una de las otras. A partir del sistema físico idealizado, se comienza presentando el modelo cinemático diferencial que relaciona las distintas velocidades presentes en la base¹. Posteriormente se desarrolla el modelo dinámico utilizando distintas técnicas de modelado: Bond Graph, Euler-Lagrange y ecuaciones de Hamilton. En base a las equivalencias existentes entre estos modelos, se realizan comparaciones e interpretaciones físicas de las mismas. Luego, añadiendo un grado de realismo, se incorporan los modelos de los motores que comandan las bases. El capítulo termina con la presentación de los valores de todos los parámetros de dos bases móviles y el análisis de la máxima fuerza de tracción para asegurar rodadura perfecta de las ruedas.

3.1 Introducción

Un robot móvil omnidireccional es un tipo de robot holonómico, o sea tiene la capacidad de moverse simultánea e independientemente en traslación y rotación [48]. Que las restricciones cinemáticas de un móvil sean holonómicas implica que existe una función que depende de las coordenadas generalizadas del mismo que se puede obtener a partir de integrar dichas restricciones cinemáticas².

Para un sistema que sólo tiene restricciones holonómicas, es posible seleccionar un conjunto de coordenadas independientes de manera que no sea necesario explicitar las restricciones. Esto significa que si hay n coordenadas y m restricciones holonómicas, se puede derivar un conjunto de $(n - m)$ coordenadas independientes. Dicho número son los GL del sistema, y las coordenadas que describen al sistema sin las restricciones se denominan generalmente *coordenadas generalizadas* del sistema. Estas coordenadas, junto con sus variables dinámicas asociadas (velocidades o momentos), constituyen

¹En esta tesis se adoptará la terminología del área de la robótica utilizando *cinemática directa* para referirse a las relaciones geométricas y *cinemática diferencial* para las relaciones de velocidades.

²El término *holonómico* proviene de la palabra griega "όλος", que significa *completo* o *entero*.

un conjunto de $2(n - m)$ coordenadas que describen de forma única el movimiento dinámico del sistema (ver apéndice B de [31]).

Dentro de las herramientas que existen para tratar las restricciones se encuentran: los *multiplicadores de Lagrange* y las *fuerzas generalizadas* [49]. La primera utiliza las coordenadas generalizadas incluyendo en las ecuaciones de EL las m fuerzas de restricción, mientras que la segunda introduce la restricción y otras fuerzas explícitamente.

3.2 Cinemática diferencial

En la Figura 3.1a se muestra el sistema físico idealizado de una base móvil omnidireccional, compuesto de un cuerpo rígido principal que, de ahora en más, será designado como chasis, y las tres ruedas (cada una de ellas, a su vez, un cuerpo rígido). La definición de las variables físicas del chasis se presentan en la Tabla 3.1. Por su parte, del esquema idealizado de la rueda omniwheel i , con $i = 1, 2, 3$, mostrado en la Figura 3.1b se identifican las variables de la Tabla 3.2.

Variable	Descripción
$q = [x, y, \varphi]^T$	Coordenadas de movimiento de posición y orientación del Centro de Masa (CM) del chasis en el sistema global fijo $O - X_F Y_F Z_F$.
$\dot{q} = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{\varphi}]^T$	Velocidades inerciales del CM del chasis definidas respecto al marco fijo $O - X_F Y_F Z_F$.
$\eta = [\dot{X}_G, \dot{Y}_G, \dot{\varphi}]^T$	Velocidades no inerciales del CM del chasis definidas respecto al marco no inercial $O_G - X_G Y_G Z_G$.
$h_e = [F_{e_x}, F_{e_y}, \tau_e]^T$	Fuerzas generalizadas externas (incluye fuerzas propiamente dichas y torques) que ejercen trabajo sobre el CM.

Tabla 3.1 Variables físicas del chasis.

Variable	Descripción
$\theta_r = [\theta_{r1}, \theta_{r2}, \theta_{r3}]^T$	Ángulo de rotación de la rueda i , con $i = 1, 2, 3$, definidas respecto al marco móvil $O_{ri} - X_{ri} Y_{ri} Z_{ri}$.
$\Omega_r = [\Omega_{r1}, \Omega_{r2}, \Omega_{r3}]^T$	Velocidades no inerciales de rotación de la rueda omniwheel i , con $i = 1, 2, 3$, definidas respecto al marco móvil $O_{ri} - X_{ri} Y_{ri} Z_{ri}$.
$V_r = [V_{r1}, V_{r2}, V_{r3}]^T$	Velocidades no inerciales de traslación de la rueda omniwheel i , con $i = 1, 2, 3$, definidas respecto al marco móvil $O_{ri} - X_{ri} Y_{ri} Z_{ri}$.
$\tau = [\tau_{r1}, \tau_{r2}, \tau_{r3}]^T$	Torques externos (proveniente de motores) en la rueda omniwheel i , con $i = 1, 2, 3$.

Tabla 3.2 Variables de la ruedas.

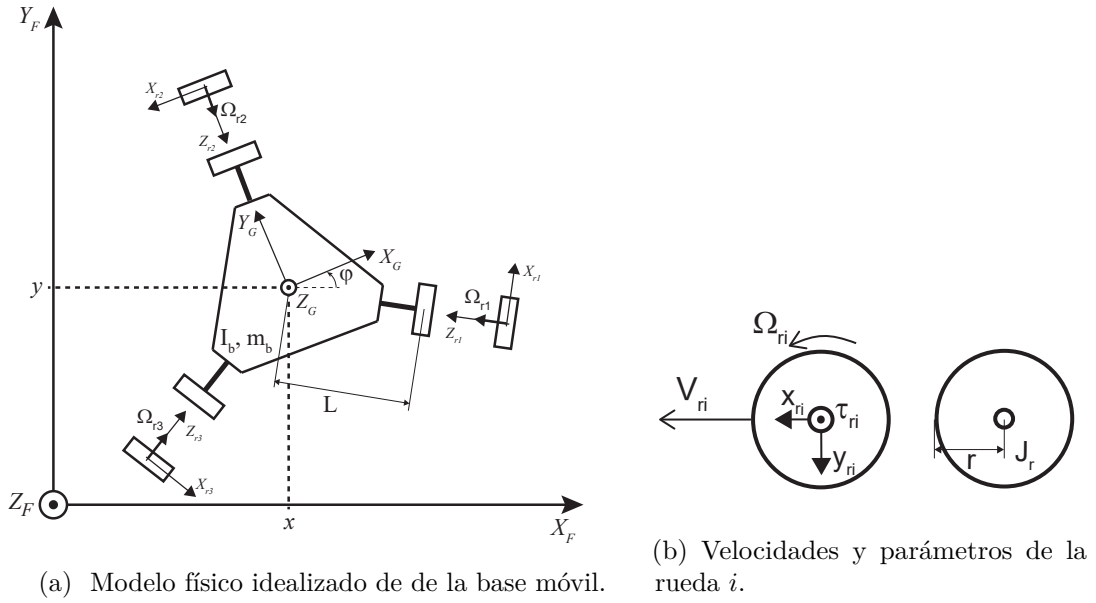


Fig. 3.1 Marcos locales y globales de la base móvil omnidireccional.

Las coordenadas generalizadas (y los ángulos de las ruedas) se relacionan con el vector de velocidades $\dot{q}$ (y el vector de velocidades Ω_r) a través de las operaciones

$$q(t) = \int \dot{q}(t) dt \quad \theta_r(t) = \int \Omega_r(t) dt$$

Como el movimiento de la base depende de las ruedas, las velocidades $\dot{q}$ y V_r no son independientes entre sí, sino que se relacionan con η a través de las relaciones

$$\begin{cases} \dot{q} &= R(q)^T \eta \\ V_r &= r E \eta \end{cases} \Rightarrow V_r = r E R(q) \dot{q} \quad (3.1)$$

donde r es el radio de las ruedas, L la distancia del CM del chasis al eje de las ruedas, y las matrices³

$$R(q) = \begin{bmatrix} c_\varphi & s_\varphi & 0 \\ -s_\varphi & c_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \sin(\frac{\pi}{6}) & \cos(\frac{\pi}{6}) & L \\ -1 & 0 & L \\ -\sin(\frac{7\pi}{6}) & \cos(\frac{7\pi}{6}) & L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2r & \sqrt{3}/2r & L/r \\ -1/r & 0 & L/r \\ 1/2r & -\sqrt{3}/2r & L/r \end{bmatrix}$$

donde se tuvo en cuenta que $R(q)R(q)^T = I$.

Si se considera que el movimiento de la rueda se produce bajo condiciones de rodadura perfecta y sin deslizamiento alrededor del eje vertical que pasa por el punto

³La notación s_φ y c_φ se corresponde con $\sin(\varphi)$ y $\cos(\varphi)$, respectivamente.

de contacto, el vector de velocidades V_r se puede expresar como

$$V_r = r\Omega_r \quad (3.2)$$

Así, reemplazando en (3.1) se obtiene la relación cinemática entre el marco $O-X_F Y_F Z_F$ y los marcos $O_{ri} - X_{ri} Y_{ri} Z_{ri}$ de las ruedas, con $i = 1, 2, 3$

$$\Omega_r = G(q)^T \dot{q} \quad (3.3)$$

donde se ha definido la matriz

$$G(q) := R(q)^T E^T = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos(\varphi + \frac{\pi}{3}) & -\cos(\varphi) & \cos(\varphi - \frac{\pi}{3}) \\ \sin(\varphi + \frac{\pi}{3}) & -\sin(\varphi) & -\cos(\varphi + \frac{\pi}{6}) \\ L & L & L \end{bmatrix}$$

3.3 Modelo Dinámico

En esta sección desarrollamos el modelo dinámico de la base móvil a través de cuatro metodologías distintas: BG, método por sustitución, ecuaciones de EL y PHS.

3.3.1 Bond Graph

La relación entre velocidades inerciales se representa en el domino BG mediante la interconexión de los vínculos **1** asociados a dichas velocidades a través de enlaces y el elemento **MTF**. En la Figura 3.2 se muestra la representación BG de la expresión (3.3), donde se tomó como convención de potencia positiva el flujo desde las ruedas hacia el chasis. Notar que el transformador es modulado ya que las coordenadas generalizadas q intervienen en la conversión a través de la matriz $G(q)$.

Para representar las fuerzas y torques externos se utilizan fuentes de esfuerzo **Se**. Así, acoplando las mismas y las inercias generalizadas **I** a los vínculos **1** correspondientes,

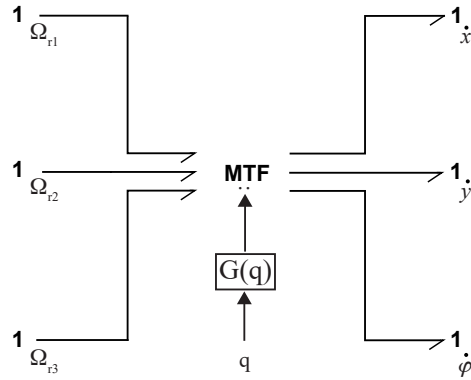


Fig. 3.2 Relación de velocidades.

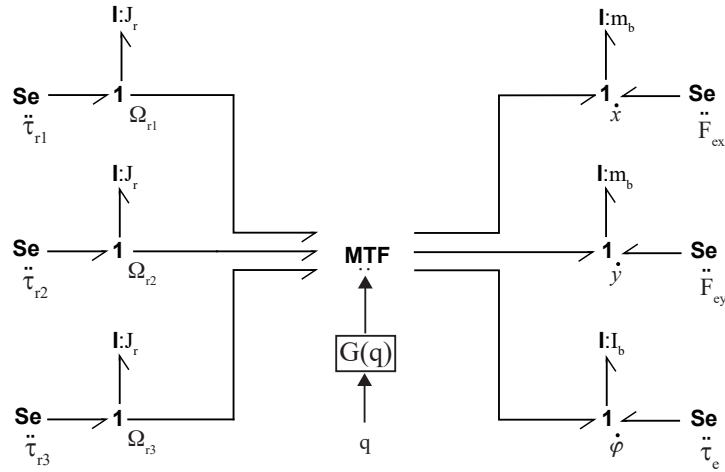


Fig. 3.3 Modelo BG de la base móvil omnidireccional.

se obtiene el BG de la Figura 3.3, donde J_r es la inercia rotacional de la ruedas, y m_b y I_b la masa y la inercia del chasis, respectivamente.

Observación 3.1. Las masas de las ruedas se consideran parte del chasis, por lo que su valor está incluido tanto en la masa m_b como en la inercia I_b . ■

Finalmente, en la Figura 3.4 se presenta el modelo BG causalizado donde se puede apreciar que utilizado multiplexores y demultiplexores⁴, se han reemplazado en el transformador modulado los enlaces unitarios por enlaces 3D que representan vectores de fuerza.

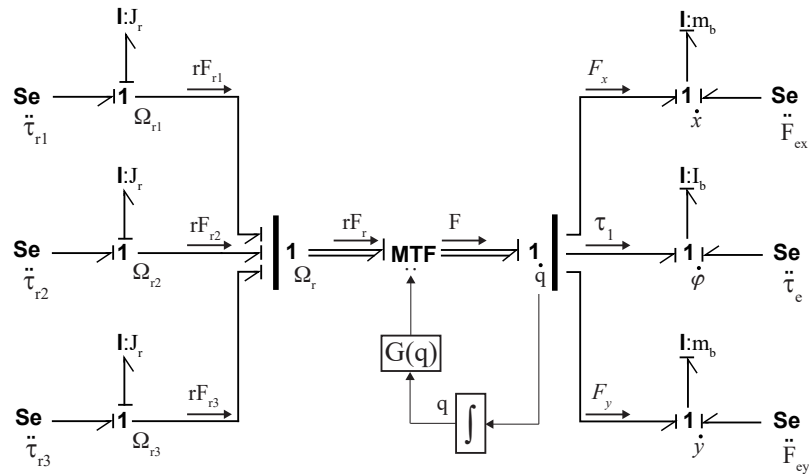


Fig. 3.4 Modelo BG causalizado de la base móvil omnidireccional.

⁴Aclaración: A los efectos de una mejor visualización, el demultiplexor de la derecha descompone el vector de velocidades $\dot{q}$ en $\dot{x}$, $\dot{\phi}$, $\dot{y}$.

Variable	Descripción
$F_r = [F_{r1}, F_{r2}, F_{r3}]^T$	Fuerzas de tracción sobre las ruedas i , con $i = 1, 2, 3$, definidas respecto al marco móvil $O_{ri} - X_{ri}Y_{ri}Z_{ri}$.
$F = [F_x, F_y, \tau_1]^T$	Fuerzas y torques internos del modelo.

Tabla 3.3 Vectores de fuerza.

No presentados hasta aquí, los vectores de la Tabla 3.3 se relacionan a través del elemento **MTF** de manera que se cumple

$$\begin{cases} \Omega_r &= G(q)^T \dot{q} \\ F &= G(q) r F_r \end{cases} \quad (3.4)$$

Observación 3.2. Se puede comprobar fácilmente que la transformación a través de la matriz $G(q)$ conserva potencia. Más aún, se puede interpretar físicamente el significado de estas fuerzas: F_r como las reacciones en las ruedas producto del contacto con el piso durante la rotación y F como las fuerzas internas que ejercen trabajo en las coordenadas q . ■

Finalmente, el modelo de la Figura 3.4 se puede representar en forma compacta como se muestra en la Figura 3.5 donde $M_b = \text{diag}\{[m_b, m_b, I_b]\}$, $I_r = \text{diag}\{[J_r, J_r, J_r]\}$ ⁵, y se han reemplazado los enlaces unitarios de potencia por enlaces 3D. Se distinguen claramente las tres parte del modelo: las ruedas omniwheel, la relación entre las velocidades inerciales y el chasis.

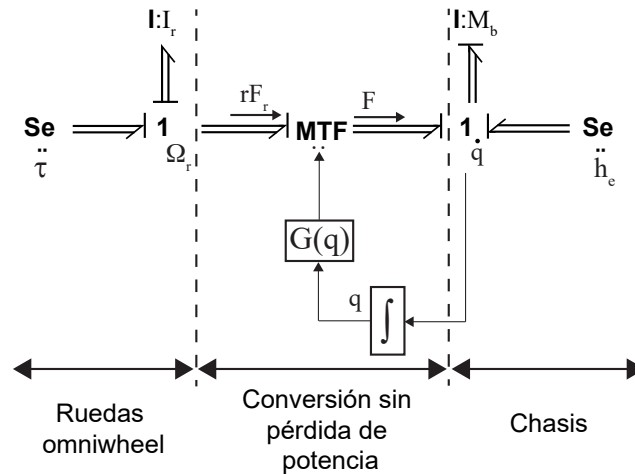


Fig. 3.5 Modelo BG compacto de la base móvil omnidireccional.

⁵ $\text{diag}\{\cdot\}$ es una función que produce una matriz diagonal donde el vector de entrada son los elementos de la diagonal.

Observación 3.3. El orden del BG que representa al sistema físico idealizado de la base móvil es $n_{BG} = 6$, ya que posee tres almacenadores de energía en causalidad integral (CI) y tres bloques integradores (en la Figura 3.5 se representó a través de un sólo bloque pero la señal que integra es de dimensión tres). Las variables de estado del sistema son las cantidades de movimiento asociadas a dichos almacenadores de energía en CI y las coordenadas generalizadas q . ■

3.3.2 Método Clásico por Sustitución

Las ecuaciones de estado que rigen la dinámica de la base móvil, en el marco global fijo, y la dinámica rotacional del conjunto rueda-motor, en sus respectivos marcos locales, se pueden obtener a través de la segunda ley de Newton leyendo el balance de fuerzas

$$\begin{cases} M_b \ddot{q} = F + h_e \\ I_r \dot{\Omega}_r = \tau - r F_r \end{cases} \quad (3.5)$$

Por su parte, derivando (3.3) con respecto al tiempo se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_r &= G(q)^T \ddot{q} + \dot{G}(q)^T \dot{q} \\ &= ER(q) \ddot{q} + E\dot{R}(q) \dot{q} \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde

$$\dot{R}(q) = \dot{\varphi} \begin{bmatrix} -s_\varphi & c_\varphi & 0 \\ -c_\varphi & -s_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Despejando entonces $r F_r$ de (3.5) y reemplazando en la segunda línea de (3.4) se tiene

$$F = G(q) \left(\tau - I_r \dot{\Omega}_r \right)$$

Luego, reemplazando $\dot{\Omega}_r$ por (3.6) y F en la primera línea de (3.5), se llega a

$$M_b \ddot{q} = G(q) \left(\tau - I_r \left(G(q)^T \ddot{q} + \dot{G}(q)^T \dot{q} \right) \right) + h_e$$

Reagrupando, se obtiene el modelo dinámico

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} = G(q) \tau + h_e \quad (3.7)$$

donde $M(q)$ es la matriz de inercia, simétrica y definida positiva, y $C(q, \dot{q})$ es la denominada matriz de Coriolis, cuyo producto con $\dot{q}$ representa los torques/fuerzas

centrífugas y de coriolis presentes en el modelo. Las expresiones de estas matrices son:

$$M(q) = M_b + G(q)I_r G(q)^T = \begin{bmatrix} \frac{3J_r}{2r^2} + m_b & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3J_r}{2r^2} + m_b & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3J_r L^2}{2r^2} + I_b \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$C(q, \dot{q}) = G(q)I_r \dot{G}(q)^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3J_r}{2r^2} \dot{\varphi} & 0 \\ -\frac{3J_r}{2r^2} \dot{\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observación 3.4. En este caso la matriz de inercia es constante y no depende de q ya que el producto

$$E^T I_r E = \begin{bmatrix} 3J_r/(2r^2) & 0 & 0 \\ 0 & 3J_r/(2r^2) & 0 \\ 0 & 0 & 3J_r L^2/r^2 \end{bmatrix}$$

al tener los dos primeros elementos de la diagonal iguales, se cumple $M(q) = M_b + R(q)^T E^T I_r E R(q) = M_b + E^T I_r E = cte$. De este modo, a partir de aquí se omitirá expresar la dependencia de la matriz de inercia en el vector de coordenadas q . ■

Observación 3.5. La elección de la matriz de Coriolis $C(q, \dot{q})$ (que no es única) satisface la siguiente propiedad: dado cualquier vector ω de dimensión (3×1) se cumple con la relación

$$\omega^T N(q, \dot{q}) \omega = 0$$

donde $N(q, \dot{q}) = \dot{M} - 2C(q, \dot{q})$ es *antisimétrica*. Siendo $\dot{M} = \mathbf{0}_3$, se cumple que $C(q, \dot{q})^T = -C(q, \dot{q})$. ■

3.3.3 Ecuaciones de Euler Lagrange

Con la formulación EL, las ecuaciones de movimiento pueden ser generadas de manera sistemática, independientemente del marco de referencia adoptado. Para obtener el modelo dinámico a través de las ecuaciones de EL consideremos las variables dinámicas

asociadas al conjunto total de coordenadas del sistema

$$\dot{\psi} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\varphi} \\ \Omega_{r1} \\ \Omega_{r2} \\ \Omega_{r3} \end{bmatrix}$$

y las coordenadas de movimiento como la integral de dicho vector de velocidades, i.e.,

$$\psi(t) = \int \dot{\psi}(t) dt$$

Las restricciones cinemáticas (3.3), que se expresan a través de funciones tipo *Pfaffian* (son lineales respecto a las velocidades [50]), en forma matricial se escriben como

$$A^T(\psi)\dot{\psi} = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (3.9)$$

donde

$$A(\psi) = \begin{bmatrix} G(q) \\ -I_3 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Observación 3.6. Como se mencionó en la introducción, que las restricciones cinemáticas (3.3) sean holonómicas implica que existe una función $h(\psi) = 0$ que se puede obtener integrando el vector (3.9). En este caso las restricciones son parcialmente integrables, i.e., no existe una relación analítica entre q y θ_r . Esto significa que, en un determinado instante t , $q(t)$ y $\dot{q}(t)$ no dependen únicamente de los ángulos de las ruedas $\theta_r(t)$ y sus derivadas $\Omega_r(t)$, sino de la evolución completa de $\theta_r(t_e)$ y de $\Omega_r(t_e)$ para $t_e \leq t$ [51]. Así, la integrabilidad parcial de las restricciones indica que la orientación del chasis es una función de los ángulos de rotación de las ruedas y, por lo tanto, puede eliminarse de la formulación del problema [52]. ■

Partiendo de la definición del Lagrangiano $\mathcal{L}$ de un sistema mecánico como la diferencia entre la co-energía cinética $\mathcal{T}^*(\psi, \dot{\psi})$ y la energía potencial del sistema $\mathcal{U}(\psi)$, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\psi, \dot{\psi}) &= \mathcal{T}^*(\psi, \dot{\psi}) - \mathcal{U}(\psi) \\ &= \frac{1}{2} \dot{q}^T M_b \dot{q} + \frac{1}{2} \Omega_r^T I_r \Omega_r \\ &= \frac{1}{2} \dot{\psi}^T B \dot{\psi} \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde en este caso la energía potencial es nula y $B = \text{diag}\{[M_b, I_r]\}$ es la matriz de inercia aumentada (también simétrica y definida positiva).

Observación 3.7. De la expresión de la energía cinética (3.11) se aprecia que las coordenadas ψ son cíclicas (o ignorables) ya que no aparecen en la expresión del Lagrangiano. Sin embargo, las derivadas $\dot{\psi}$ sí aparecen, de modo que hay una dependencia implícita en las coordenadas ψ . ■

La formulación general de las ecuaciones de EL para un sistema que posee restricciones cinemáticas es [50]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = S(\psi)u + A(\psi)\lambda, \quad u \in \mathbb{R}^6, \lambda \in \mathbb{R}^3 \quad (3.12)$$

donde $S(\psi)$ es una matriz (6×6) que mapea las entradas externas u a fuerzas que realizan trabajo en ψ , $A(\psi)$ es la matriz que caracteriza las restricciones cinemáticas (3.10), y λ es el vector de los multiplicadores de Lagrange (también denominado vector de fuerzas restrictivas [53]). Usando (3.11) y (3.12), el modelo dinámico del sistema mecánico restringido es

$$\begin{aligned} B\ddot{\psi} + n(\psi, \dot{\psi}) &= S(\psi)u + A(\psi)\lambda \\ A(\psi)^T \dot{\psi} &= \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde

$$n(\psi, \dot{\psi}) = \dot{B}\dot{\psi} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \psi} (\dot{\psi}^T B(\psi) \dot{\psi}) \right)^T + \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \psi} \right)^T$$

En este caso particular, los valores de las matrices son:

$$\begin{aligned} n(\psi, \dot{\psi}) &= \mathbf{0}_{6 \times 1} \\ S(\psi) &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \\ u &= \begin{bmatrix} h_e \\ \tau \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Consideremos ahora una matriz $J(\psi)$ cuyas columnas sean la base del espacio nulo de $A(\psi)^T$, i.e., $A(\psi)^T J(\psi) = 0$. Se pueden reemplazar entonces las restricciones de (3.13) por

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= J(\psi)\dot{q} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 \\ G(q)^T \end{bmatrix} \dot{q} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Incluso se puede premultiplicar ambos lados de la ecuación (3.13) por $J(\psi)^T$ para eliminar los multiplicadores de Lagrange. Esto conduce al modelo dinámico reducido

$$J(\psi)^T B \ddot{\psi} = J(\psi)^T u \quad (3.15)$$

Derivando (3.14) con respecto al tiempo se tiene

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} &= J(\psi) \ddot{q} + \dot{J}(\psi) \dot{q} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 \\ G(q)^T \end{bmatrix} \ddot{q} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \dot{G}(q)^T \end{bmatrix} \dot{q} \end{aligned} \quad (3.16)$$

y reemplazando la expresión de $\ddot{\psi}$ en el modelo dinámico reducido (3.15) se obtiene

$$\begin{aligned} J(\psi)^T B J(\psi) \ddot{q} + J(\psi)^T B \dot{J}(\psi) \dot{q} &= J(\psi)^T u \\ (M_b + G(q) I_r G(q)^T) \ddot{q} + G(q) I_r \dot{G}(q)^T \dot{q} &= h_e + G(q) \tau \\ M \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} &= G(q) \tau + h_e \end{aligned} \quad (3.17)$$

que resulta el mismo modelo al que se llegó en (3.7) a través del método clásico por sustitución. A las equivalencias mostradas en (3.8) se les pueden añadir las siguientes:

$$M = J(\psi)^T B J(\psi) \quad C(q, \dot{q}) = J(\psi)^T B \dot{J}(\psi) \quad (3.18)$$

Observación 3.8. En la ecuación 3.17 efectivamente se puede concluir que la dinámica del sistema, sin la presencia de las restricciones, es descrita por las coordenadas q . De ahí que las coordenadas generalizadas sean el vector q y los GL igual a tres. ■

3.3.4 Sistema port-Hamiltoniano

Los PHS se definen en base a dos principios básicos del modelado físico. Por un lado, el Hamiltoniano como la energía total del sistema, y por el otro, la estructura de interconexión y disipación. Las ecuaciones de Hamilton se derivan de las ecuaciones de EL partiendo por la definición del momento generalizado como

$$p := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}}$$

y al Hamiltoniano, representando la totalidad de la energía, como la transformación de Legendre del Lagrangiano

$$\mathcal{H}(\psi, p) = p^T \dot{\psi} - \mathcal{L}(\psi, \dot{\psi})$$

Así, las ecuaciones de Hamilton de un sistema general con restricciones son [54]

$$\begin{aligned}
 \dot{\psi} &= \frac{\partial H}{\partial p}(\psi, p) \\
 \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial \psi}(\psi, p) + S(\psi)u + A(\psi)\lambda \\
 y &= S(\psi)^T \frac{\partial H}{\partial p}(\psi, p) \\
 \mathbf{0}_{3 \times 1} &= A(\psi)^T \frac{\partial H}{\partial p}(\psi, p)
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

donde y es la salida colocada con la entrada u (grado relativo igual a uno). El Hamiltoniano en este caso particular es

$$H(\psi, p) = \frac{1}{2} p^T B^{-1} p \tag{3.20}$$

el momento generalizado

$$p = B\dot{\psi}$$

y los valores de las matrices $S(\psi)$ y $A(\psi)$ los expresados en la sección anterior.

Definamos ahora el siguiente cambio de coordenadas (ver [29]):

$$\begin{aligned}
 \tilde{p} &:= J(\psi)^T p \\
 &= J(\psi)^T B\dot{\psi} \\
 &= J(\psi)^T B J(\psi) \dot{q} = M\dot{q}
 \end{aligned}$$

Así el Hamiltoniano (3.20) se puede expresar en función de ψ y las nuevas coordenadas $\tilde{p}$ como

$$\begin{aligned}
 H(\psi, p) &= \frac{1}{2} p^T B^{-1} p \\
 &= \frac{1}{2} \dot{\psi}^T B \dot{\psi} \\
 &= \frac{1}{2} \dot{q}^T J(\psi)^T B J(\psi) \dot{q} \\
 &= \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} \\
 &= \frac{1}{2} \tilde{p}^T M^{-1} \tilde{p} = \tilde{H}(\psi, \tilde{p}) ; \quad \tilde{p} = M\dot{q}
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que los multiplicadores de Lagrange se pueden eliminar multiplicando por $J(\psi)^T$ ambos lados de la segunda línea de (3.19), se obtiene

$$J(\psi)^T \dot{p} = -J(\psi)^T \frac{\partial H}{\partial \psi}(\psi, p) + J(\psi)^T S(\psi)u \tag{3.21}$$

Si se deriva $\tilde{p}$ respecto al tiempo, se cumple

$$J(\psi)^T \dot{p} = \dot{\tilde{p}} - \dot{J}(\psi)^T p$$

por lo que la ecuación (3.21) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{p}} &= -J(\psi)^T \frac{\partial H}{\partial \psi}(\psi, p) + \dot{J}(\psi)^T p + J(\psi)^T S(\psi)u \\ &= -J(\psi)^T \frac{\partial H}{\partial \psi}(\psi, p) + \dot{J}(\psi)^T B J(\psi) \dot{q} + J(\psi)^T S(\psi)u \\ &= -J(\psi)^T \frac{\partial H}{\partial \psi}(\psi, p) + \dot{J}(\psi)^T B J(\psi) \frac{\partial H}{\partial \tilde{p}}(\psi, p) + J(\psi)^T S(\psi)u \end{aligned}$$

Como se cumple que

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p}(\psi, p) &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}}(\psi, \tilde{p}) = \dot{q} \\ \frac{\partial H}{\partial \psi}(\psi, p) &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \psi}(\psi, \tilde{p}) = \mathbf{0}_{6 \times 1} \end{aligned} \tag{3.22}$$

el sistema con restricciones (3.19), reemplazando por el valor de $S(\psi)$, toma la forma

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\tilde{p}} \end{bmatrix} &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_6 & J(\psi) \\ \hline -J(\psi)^T & \dot{J}(\psi)^T B J(\psi) \end{array} \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \psi} \\ \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_6 \\ J(\psi)^T \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_6 & J(\psi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \psi} \\ \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde en este caso la salida son las velocidades $y = \dot{\psi}$.

Ahora bien, como el Hamiltoniano $\tilde{H}$ depende de la matriz de inercia M y esta a su vez, en el caso general, depende del vector de coordenadas de movimiento q , es posible expresar el Hamiltoniano $\tilde{H}$ en función de q y $\tilde{p}$. De este modo, considerando la primera equivalencia de (3.22) y definiendo al vector de estados como $\mathbf{x} := \begin{bmatrix} q^T, \tilde{p}^T \end{bmatrix}^T$,

el sistema dinámico simplificado es

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\tilde{p}} \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 \\ -\mathbf{I}_3 & -C(q, \dot{q}) \end{bmatrix}}_{J(\mathbf{x})} \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial q} \\ \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{I}_3 & G(q) \end{bmatrix}}_{g(\mathbf{x})} u \\ y &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0}_3 & G(q)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial q} \\ \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.23)$$

donde se utilizó la igualdad $\dot{J}(\psi)^T B J(\psi) = C(q, \dot{q})^T$ (ver (3.18)) y la propiedad de antisimetría, i.e., $C(q, \dot{q})^T = -C(q, \dot{q})$ (ver Observación 3.5). Finalmente, el modelo PHS de la base móvil en forma compacta es⁶

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= J(\mathbf{x}) \nabla \tilde{H}(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) u \\ y &= g(\mathbf{x})^T \nabla \tilde{H}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

donde la matriz $J(\mathbf{x})$, de dimensión (6×6) y antisimétrica $J(\mathbf{x}) = -J(\mathbf{x})^T$, revela la conservación de potencia de la estructura de interconexión.

Observación 3.9. La potencia entregada al sistema (3.23) es

$$\begin{aligned} u^T y &= u^T g(\mathbf{x})^T \nabla \tilde{H}(\mathbf{x}) \\ &= \left(\dot{\mathbf{x}} - J(\mathbf{x}) \nabla \tilde{H}(\mathbf{x}) \right)^T \nabla \tilde{H}(\mathbf{x}) \\ &= -\nabla \tilde{H}(\mathbf{x})^T J(\mathbf{x})^T \nabla \tilde{H}(\mathbf{x}) + \dot{\mathbf{x}}^T \nabla \tilde{H}(\mathbf{x}) \\ &= \dot{\mathbf{x}}^T \nabla \tilde{H}(\mathbf{x}) \\ &= \dot{\tilde{H}}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

donde se tuvo en cuenta que $\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}}^T C(q, \dot{q}) \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}} = 0$. Integrando ambas partes se satisface la igualdad de la siguiente relación de pasividad

$$\underbrace{\tilde{H}(\mathbf{x}(t)) - \tilde{H}(\mathbf{x}(0))}_{\text{energía almacenada}} \leq \underbrace{\int_0^t u(s)^T y(s) ds}_{\text{energía entregada}}$$

de modo que el sistema es ciclo-pasivo [55]. Además, como $\tilde{H}(\mathbf{x}) \geq 0$ el sistema también es pasivo. ■

Observación 3.10. Tanto en el modelado EL como con PHS, se partió de coordenadas generalizadas de dimensión 6 y luego de un trabajo algebraico, se terminó expresando

⁶Notar que $\dot{q}$ puede ser expresada en términos de $\tilde{p}$, de manera que la matriz de interconexión depende del estado $\mathbf{x}$.

el modelo en función del vector de posiciones y orientación q de dimensión 3. A dicha conclusión se puede arribar rápidamente analizando el modelo BG causalizado de la Figura 3.4, observando que hay sólo 3 almacenadores de energía en CI (inercias más específicamente) donde las integrales de sus velocidades son precisamente las 3 coordenadas generalizadas agrupadas en el vector q . ■

3.4 Equivalencias

En esta sección utilizaremos el modelado en el dominio BG como base para establecer conexiones e interpretaciones entre los distintos modelos desarrollados.

3.4.1 BG y Método Clásico por Sustitución

Una de las técnicas a las que se suele recurrir para evitar la presencia de almacenadores de energía en causalidad derivativa (CD) en un diagrama BG es la reagrupación de almacenadores vía manipulación del BG. En el caso del BG de la Figura 3.4, dicha reagrupación consiste en pasar al lado derecho las inercias rotacionales de las ruedas que se encuentran en CD, de manera que todos los almacenadores de energía queden en CI. Si se grafica el BG que representa el modelo dinámico obtenido por el método clásico por sustitución visto en la sección 3.3.2, se obtiene el BG de la Figura 3.6, donde se puede observar que todos sus almacenadores de energía se encuentran en CI.

Se verifica así que los nuevos valores se corresponden con los presentados en (3.8), siendo los almacenadores de energía cinética los elementos de la diagonal de la matriz de inercia, y el coeficiente de modulación del girador modulado **MGY** el de la matriz de Coriolis.

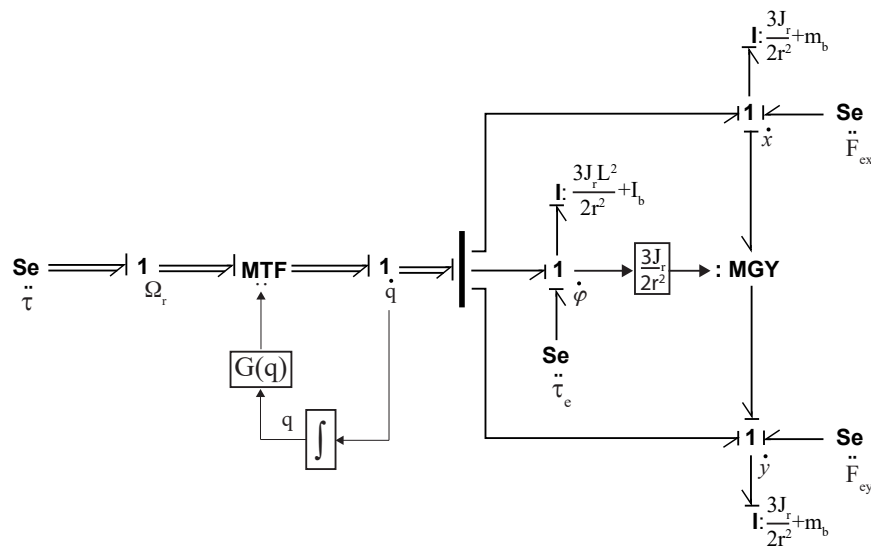


Fig. 3.6 Modelo BG matricial de la base móvil omnidireccional.

De este modo, definiendo **MB** como un nuevo elemento BG que agrupa a los almacenadores de energía (y toda la dinámica del sistema de la Figura 3.6), se puede representar el modelo de la base móvil a través del BG de la Figura 3.7.

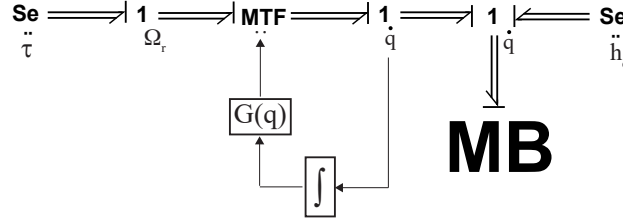


Fig. 3.7 Modelo BG matricial compacto de la base móvil omnidireccional.

3.4.2 BG y EL

Otra forma de evitar las CD es forzar CI en todos los almacenadores de energía mediante el uso de *residual sinks* (fuentes residuales). Partiendo del BG de la Figura 3.4, el procedimiento consiste en incorporar fuentes de esfuerzos a través de vínculos **0** en los almacenadores en CD, como se observa en la Figura 3.8.

Las fuentes residuales inyectan el esfuerzo necesario en los ceros pasantes para forzar que el flujo neto en los mismos sea cero. Así, definiendo $f_{vir} := [f_{vir1}, f_{vir2}, f_{vir3}]^T$, las ecuaciones de balance de flujo en los vínculos **0** son

$$\begin{aligned} \mathbf{0}_{3 \times 1} &= f_{vir} \\ &= G(q)^T \dot{q} - \Omega_r \\ &= A(\psi)^T \dot{\psi} \end{aligned}$$

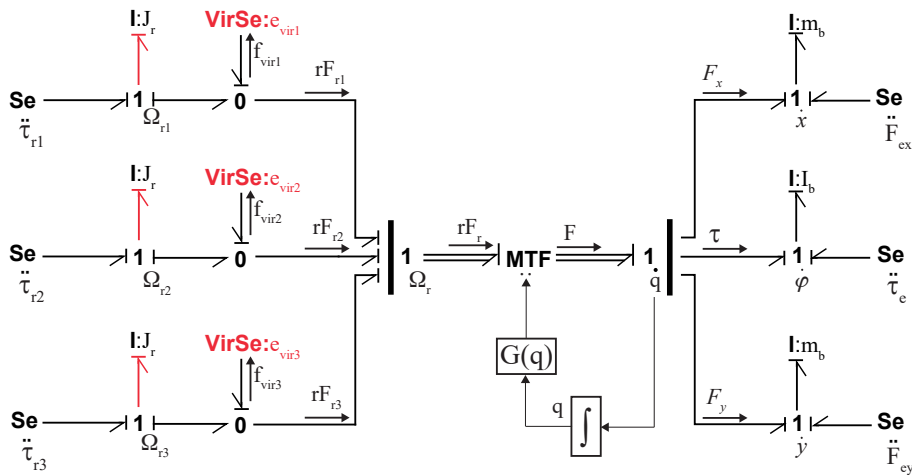


Fig. 3.8 Modelo BG con fuentes virtuales de esfuerzo.

Vemos así que la matriz de restricción $A(\psi)$ definida en la ecuación (3.10) de la Sección 3.3.3 puede obtenerse forzando la CI de todos los almacenadores de energía en CD a través de la incorporación de fuentes virtuales de esfuerzo (flujo asociado nulo) en ceros pasantes.

Observación 3.11. Se puede concluir que los esfuerzos introducidos por las fuentes virtuales equivalen justamente al vector de multiplicadores de Lagrange λ definido en (3.12). De este modo, los multiplicadores de Lagrange pueden interpretarse físicamente como la fuerza que tiene que hacer el piso para que se cumpla con la condición de rodadura perfecta definida en (3.2). Finalmente, cabe destacar que dicha fuerza queda oculta en el modelo final que se obtiene tanto a través del modelado BG como en el modelado EL y PHS. ■

3.4.3 BG y PHS

Con lo que respecta a las ecuaciones de Hamilton, también existen relaciones entre éstas y los BG. El modelo PHS desarrollado en la Sección (3.3.4) puede obtenerse a través de la manipulación del BG con el método desarrollado en [56]. El primer paso del procedimiento consiste en discriminar la estructura de interconexión del resto de los elementos, según el diagrama mostrado en la Figura 3.9a. Para ello se reagrupan los componentes según sean estos (i) fuentes, (ii) almacenadores de energía en CI o CD, (iii) estructura de interconexión, (iv) flujos y esfuerzos asociados, y se los diferencia según la siguiente notación:

- $X_i = M_b \dot{q}$ es el vector de estados, contiene las variables de energía de los elementos **I** en CI. Su derivada es la entrada de los almacenadores de energía en CI
- $X_d = I_r \Omega_r$ es el vector que contiene las variables de energía de los elementos **I** en CD
- $Z_i = \dot{q}$ y $Z_d = \Omega_r$ son los vectores de variables de co-energía asociados al vector X_i y X_d , respectivamente
- $U = [U_1^T, U_2^T]^T$ con $U_1 = h_e$ y $U_2 = \tau$ es el vector de fuerzas/torques externos

En el caso particular de la base móvil del BG de la Figura 3.9b, los vectores X_i y X_d se relacionan linealmente con Z_i y Z_d , respectivamente, de manera que se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} Z_i &= M_b^{-1} X_i \\ X_d &= I_r Z_d \end{aligned} \tag{3.24}$$

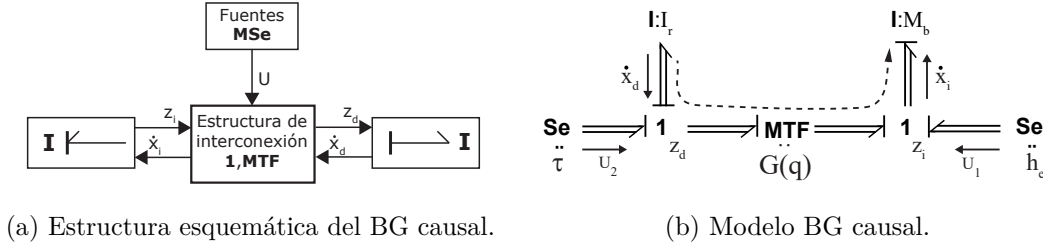


Fig. 3.9 Modelado BG de la base móvil.

Con los vectores definidos, se representa la estructura matemática del BG a través del siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_i \\ Z_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_i \\ \dot{X}_d \\ U \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

donde los valores de las matrices

$$S_{11} = S_{22} = \mathbf{0}_3 \quad S_{12} = -S_{21}^T = -G(q) \quad S_{13} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & G(q) \end{bmatrix} \quad S_{23} = \mathbf{0}_{3 \times 6} \quad (3.26)$$

se obtienen leyendo los caminos causales del BG. A modo de ejemplo, la matriz S_{12} resulta de leer el camino en línea de puntos mostrado en la Figura 3.9b.

La descripción del sistema finaliza escribiendo la expresión total de la energía del sistema como la suma de energías de los dos elementos $\mathbf{I}$

$$E(X_i, X_d) = \frac{1}{2} X_i^T M_b^{-1} X_i + \frac{1}{2} X_d^T I_r^{-1} X_d$$

Luego de identificar las variables y matrices, el procedimiento indica establecer las siguientes equivalencias:

- $\mathbf{x} \equiv X_i$, el vector de estados del PHS es equivalente al vector de estados del BG
- $\dot{\mathbf{x}} \equiv \dot{X}_i$, la derivada del vector de estados del PHS es equivalente a la entrada de los almacenadores de energía en casualidad integral
- $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 - M_b^{-T} S_{12} I_r S_{21} \end{bmatrix} Z_i$, el gradiente de la energía respecto al vector de estados equivale al vector de salida de los almacenadores de energía en CI

En este caso las funciones de energía de las formulaciones del BG y del PHS, $E(X_i, X_d)$ y $H(\mathbf{x})$, respectivamente, son diferentes, porque tienen argumentos diferentes (sin embargo, cuando se evalúan en el mismo estado del sistema- $X_i = \mathbf{x}$ para nuestra elección de las variables de estado: toman valores idénticos porque representan la energía almacenada en el sistema). Por lo tanto, la función de energía del BG se debe calcular como una función de X_i solamente [56].

De esta manera el modelo PHS, en términos de las variables BG, debe tener la siguiente forma:

$$\dot{X}_i = S_S(X_i, U)Z_i + S_g(X_i)U \quad (3.27)$$

Para llegar a dicha representación se parte de (3.25), y se deriva respecto al tiempo al vector X_d y Z_i en (3.24). Teniendo en cuenta los valores de las matrices expresados en (3.26), se llega a

$$\begin{aligned} \dot{X}_i &= S_{12}\dot{X}_d + S_{13}U \\ &= S_{12}I_r\dot{Z}_d + S_{13}U \\ &= S_{12}I_r\dot{S}_{21}Z_i + S_{12}I_rS_{21}\dot{Z}_i + S_{13}U \\ &= S_{12}I_r\dot{S}_{21}Z_i + S_{12}I_rS_{21}M_b^{-1}\dot{X}_i + S_{13}U \end{aligned}$$

Despejando $\dot{X}_i$, y agrupando según (3.27) se obtiene

$$S_S(X_i, U) = \left(I_3 - S_{12}I_rS_{21}M_b^{-1}\right)^{-1} S_{12}I_r\dot{S}_{21} \quad S_g(X_i) = \left(I_3 - S_{12}I_rS_{21}M_b^{-1}\right)^{-1} S_{13}$$

Notar que las matrices S_{12} y S_{21} que dependen de q , se pueden expresar indirectamente en función de X_i como $q = M_b^{-1}X_i$.

Finalmente, recordando las definiciones de los estados del PHS desarrollado en la sección 3.3.4, las siguientes igualdades son válidas

$$\begin{aligned} \left(I_3 - S_{12}I_rS_{21}M_b^{-1}\right) \dot{X}_i &= \dot{p} \\ S_{12}I_r\dot{S}_{21} &= -C(q, \dot{q}) \end{aligned}$$

y el modelo PHS (3.27) es equivalente al (3.23).

Observación 3.12. De la equivalencia entre los modelos PHS y BG se puede inducir que las matrices J y g contienen información, tanto de los caminos causales del BG y su interconexión (a través de las submatrices $S_S(X_i, U)$ y $S_g(X_i, U)$), como del orden de las ecuaciones de estado que describen la dinámica completa sistema. ■

Observación 3.13. El orden del modelo PHS (3.23) tiene su correspondencia gráfica en el BG de la Figura 3.5 con el uso de un bloque integrador extra, ya que la relación de transformación del elemento **MTF** requiere del vector q y la única forma de obtenerlo es integrando el vector de flujos $\dot{q}$. Más aún, en dicho BG se observa que el vector q no tiene asociado un flujo de potencia (la integración se produce en señal), lo que también se puede inferir del modelo PHS observando que el Hamiltoniano H no tiene como variable de energía asociada al desplazamiento q (por eso $\frac{\partial H}{\partial q} = \mathbf{0}_{3 \times 1}$), puesto que no hay almacenadores de energía potencial, i.e, elementos **C** en el BG. Lo mismo ocurre con el modelo PHS (3.27), para obtener la expresión de la matriz $S_S(X_i, U)$ es necesario integrar el vector $\dot{X}_i$. ■

3.5 Motores de Comando

Hasta aquí hemos considerado como entradas de control de la base omnidireccional los torques aplicados a las ruedas. En esta sección, añadimos un grado más de realismo incorporando el modelo de cada Motor de Corriente Continua (MCC) que generan los torques de comando de las ruedas de la base.

El sistema físico idealizado de un MCC se muestra en la Figura 3.10, donde la tensión de entrada es

$$U_a = L_a \dot{I}_a + R_a I_a + f_{cem}$$

siendo

$$f_{cem} = k_\psi \omega$$

la fuerza contraelectromotriz que caracteriza la vinculación entre el subsistema eléctrico y el mecánico, con k_ψ la constante de flujo magnético. Por su parte el torque de carga en el subsistema mecánico es

$$\tau_L = (\tau_e - J_m \dot{\omega} - b_m \omega)$$

donde los parámetros J_m y b_m engloban todas las inercias y fricciones presentes en la máquina, respectivamente, y

$$\tau_e = k_\psi I_a$$

es el torque electromagnético. Las velocidades y torques a ambos lados de la caja de engranajes se relacionan como

$$\begin{cases} \omega &= G_r \Omega_s \\ \tau_s &= G_r \tau_L \end{cases}$$

donde G_r es la relación de conversión de la caja de engranajes y τ_s es el torque de salida.

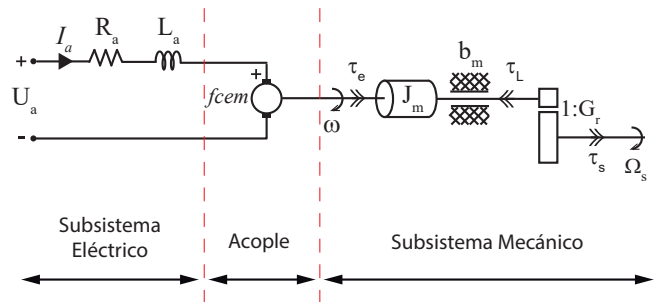


Fig. 3.10 Esquema idealizado del MCC.

En la Figura 3.11a se muestra el correspondiente modelo BG del circuito físico idealizado, donde se pueden distinguir claramente la dinámica de los subsistemas eléctricos y mecánicos y cómo estos se interconectan a través de elementos BG de

conversión **GY** y transformación **TF** que preservan potencia. En la Figura 3.11b se muestra el modelo compacto entrada-salida del MCC que engloba la totalidad de la dinámica.

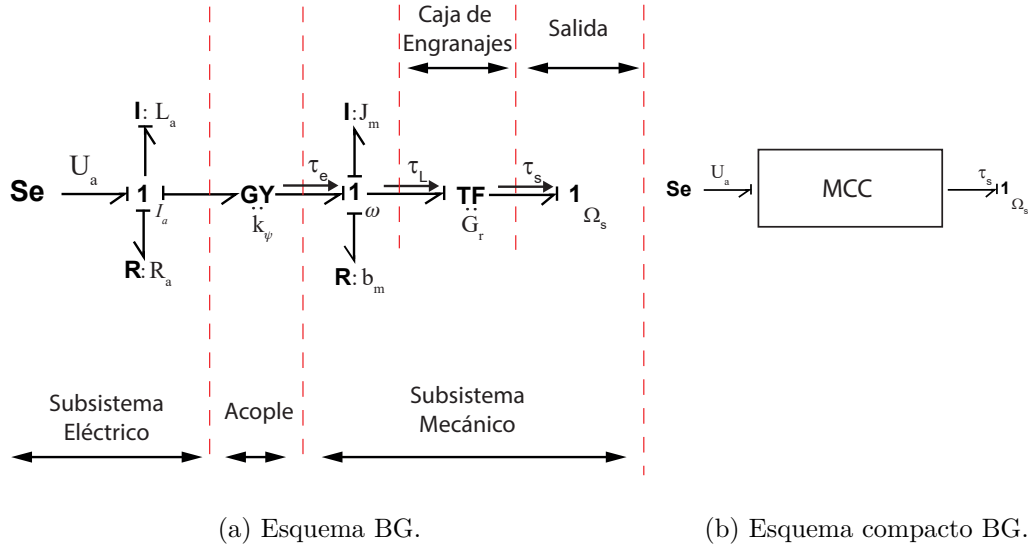


Fig. 3.11 Representaciones BG del MCC.

Observación 3.14. El almacenador de energía cinética **I**, correspondiente a la inercia J_m del subsistema mecánico, se encuentra en CD ya que se considera que se controla el torque de salida τ_s del MCC. ■

Ejemplo 3.1. Consideremos el modelo de la base omnidireccional, en el cual los motores se acoplan a las ruedas de la base. En ese caso los torques y velocidades de salida son los correspondientes a los de las ruedas, como se detalla en el BG de la Figura 3.12a. El balance de esfuerzos es

$$\begin{aligned}\tau_e &= I_m \dot{\omega} + B_m \omega + \tau_L \\ \tau &= I_r \dot{\Omega}_r + r F_r\end{aligned}$$

donde $I_m = \text{diag}\{[J_m, J_m, J_m]\}$, $B_m = \text{diag}\{[b_m, b_m, b_m]\}$ y la relación de la caja de engranajes

$$\begin{cases} \omega &= G_r \Omega_r \\ \tau &= G_r \tau_L \end{cases}$$

Ahora bien, a los efectos de la síntesis de controladores que se verán en los capítulos siguientes, para evitar almacenadores de energía en CD conviene manipular el esquema BG y compactar ambas inercias en una sola. De este modo se obtiene el modelo de la

Figura 3.12b donde

$$I_e = G_r^2 I_m + I_r$$

$$B_e = G_r^2 B_m$$

Así, el modelo dinámico completo, teniendo en cuenta la dinámica de los motores es

$$M_m(q)\ddot{q} + C_m(q, \dot{q})\dot{q} + F_v\dot{q} = G(q)\ddot{\tau} + h_e$$

donde

$$M_m(q) = M_b + G(q)I_e G(q)^T \quad C_m(q, \dot{q}) = G(q)I_e \dot{G}(q)^T \quad F_v = G(q)B_e G(q)^T \quad \ddot{\tau} = G_r \tau_e$$

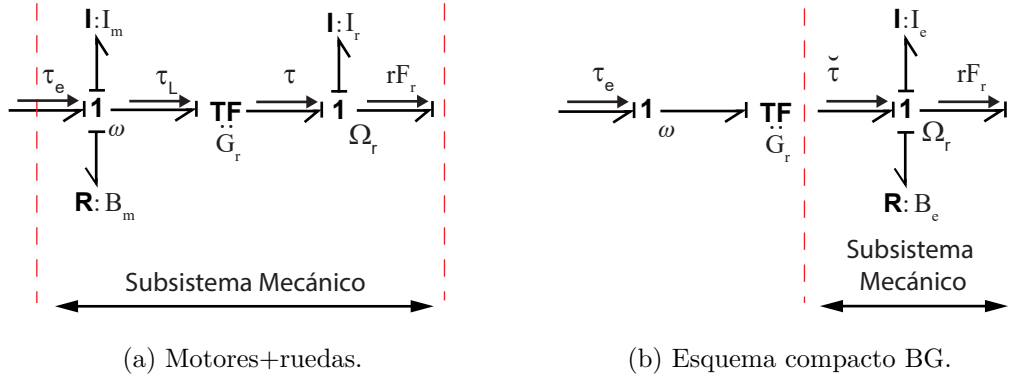


Fig. 3.12 Representaciones BG del subsistema mecánico considerando los motores de las ruedas.

3.6 Parametrización

En esta sección detallamos los valores y los pasos para la obtención de los parámetros de las bases omnidireccionales "chica" y "grande" que se muestran en las Figuras 1.1a y 1.1c, respectivamente, y cuyos esquemas físicos se muestran en la Figura 3.13. Los valores de los parámetros se obtuvieron a través de mediciones directas e indirectas en las bases reales, en el marco de los proyectos finales de ingeniería que se llevaron a cabo en el laboratorio.

Los parámetros que se obtienen por medición directa son la masa de la base m_b y de las ruedas m_r , la distancia del centro del chasis al centro de las ruedas L , la altura de la base h_b y el radio de las ruedas r , mientras que los parámetros que se obtienen por medición indirecta son la inercia rotacional de la base I_b y de la rueda J_r .

Para calcular la inercia rotacional de la base chica, se realizan una serie de simplificaciones. Por una lado, se considera que la base tiene una densidad de masa ρ constante por lo que el CM de la base coincide con el centro geométrico de la misma.

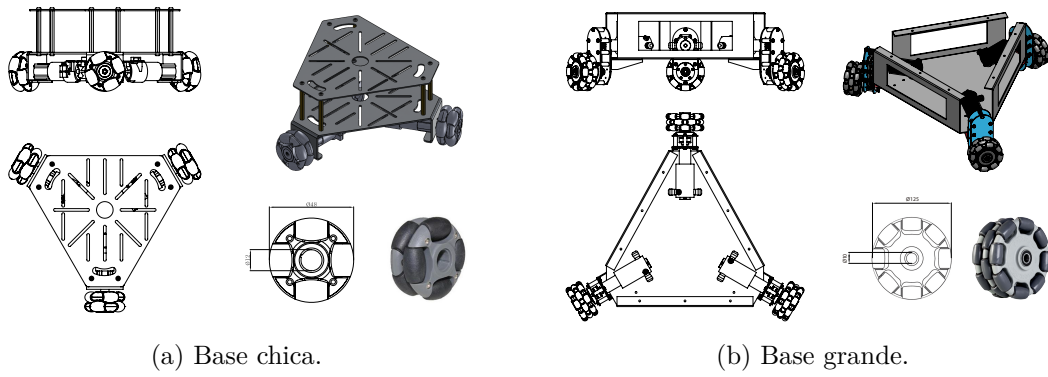


Fig. 3.13 Esquema general de las BM.

Por el otro, que la base es un cilindro de radio L y altura h_b . La inercia rotacional de un cilindro entonces se puede expresar como

$$I_b = \int r^2 dm$$

donde dm es el diferencial de masa y equivale a

$$\begin{aligned} dm &= \rho dV \\ &= \rho h_b 2\pi r dr \end{aligned}$$

De este modo la inercia rotacional de la base I_b es

$$\begin{aligned} I_b &= \int_0^L r^3 \rho h_b 2\pi dr \\ &= m_b L^2 \end{aligned}$$

Calculando J_r de manera análoga, tomando en cuenta las mismas hipótesis y considerando el caso de un disco con un agujero interno, se tiene

$$J_r = \frac{1}{2} m_r (r_i^2 + r^2)$$

donde r_i es el radio interno de las ruedas.

Notar que las simplificaciones consideradas se cumplen hasta un cierto nivel ya que, como se puede inferir de las Figuras 1.1a y 1.1c, la ubicación de todos los componentes que conforman el hardware de control (batería, microcontroladores, controladores de velocidad, etc.) ocasiona que la densidad de la base no sea constante y por lo tanto, el CM no se encuentre necesariamente en el centro geométrico de la base. Incluso la hipótesis de considerar a la base como un cilindro puede ser difícil de cumplir, considerando que el chasis es triangular y las ruedas omniwheel tienen una inercia alrededor de sus respectivos ejes z . En todos los casos, al momento de utilizar el modelo

de la base para el desarrollo de ley de control, cualquier incertidumbre paramétrica será analizada y tratada oportunamente.

Los valores de inercia de la base grande fueron estimados a través del Software SolidWorks. Los valores de todos los parámetros de ambas BM se presentan en la Tabla 3.4 ⁷.

Parámetros	Base Chica	Base Grande
m_b	1,5 Kg	31,5 Kg
m_r	0,040 Kg	0,485 Kg
L	0,2 m	0,39 m
h_b	0,0985 m	0,178 m
r	0,024 m	0,0625 m
I_b	0,0216 Kgm ²	1,9587 Kgm ²
J_r	12,24e ⁻⁶ Kgm ²	943,71e ⁻⁶ Kgm ²

Tabla 3.4 Parámetros de las BM.

Por su parte, los motores correspondientes a las bases chica y grande son los 16009 Nexus y los MR10B0-24050 Ignis, respectivamente. Los datos y parámetros de los mismos se muestran en la Tabla 3.5.

	MCC Base Chica	MCC Base Grande
Potencia Nominal	6 W	60 W
Tensión Nominal	12 V	24 V
Corriente Nominal	0,5 A	4,5 A
R_a	7,4118 Ω	2,1 Ω
L_a	0,05e-3 H	5,3e-3 H
k_ψ	0,0103 Nm/A=Vs	0,059 Nm/A=Vs
b_m	0,4763e-6 Nms/rad	0,075e-3 Nms/rad
J_m	0,2332e-6 Kgm ²	0,04e-3 Kgm ²
G_r	80	16

Tabla 3.5 Datos y parámetros de los motores MCC de las BM.

3.6.1 Máxima Fuerza de Tracción

En aplicaciones experimentales, la fuerza de tracción f_t de una rueda depende del terreno en el que se desplaza y generalmente se obtiene como el producto entre el coeficiente de adhesión μ_a y la fuerza normal N en el punto de contacto. El coeficiente μ_a es una medida que determina el grado de adhesión entre dos superficies, y es una función de la dinámica de la rueda y las condiciones de tracción [57].

⁷Para más información visitar los sitios web: <https://www.nexusrobot.com/> y <https://www.rotacaster.com.au/>

Un modelo del coeficiente de adhesión posible es considerarlo dependiente de la *velocidad de deslizamiento* ν , donde

$$\nu = \begin{cases} \frac{\Omega_r}{\omega_r} - 1 & \text{si } \omega_r > \Omega_r \\ 1 - \frac{\omega_r}{\Omega_r} & \text{si } \omega_r < \Omega_r \end{cases}$$

y $\omega_r = V_r/r$. Así, las fuerzas de tracción se expresan como

$$f_t = \mu_a(\nu)N$$

donde la relación entre el coeficiente de adherencia μ_a y el deslizamiento de la rueda ν , que depende de la naturaleza de la superficie y del material de la rueda, se muestra en la Figura 3.14 durante el frenado y aceleración [57]. Del análisis de la gráfica se desprende que:

- Para el caso de rodadura perfecta la velocidad de deslizamiento es $\nu = 0$ y $\omega_r = \Omega_r$.
- En el caso particular de $\nu = 1$, la velocidad de desplazamiento V_r de la rueda es cero y la misma gira en el lugar
- Cuando $\nu = -1$ la velocidad de rotación Ω_r es cero y la rueda se desplaza bloqueada sin rotar

La región estable está representada por la porción de la curva $|\nu| < \nu_s$, que muestra un aumento de μ_a con el aumento de ν . En esta porción, las fuerzas de tracción aumentan con el deslizamiento de la rueda debido al aumento de μ_a . La caída de μ_a , más allá del pico μ_a^{max} , resulta en inestabilidad ya que la fuerza de tracción se reduce con el aumento del deslizamiento [57].

Un modelo matemático de la parte estable se puede expresar de forma simplificada a través de la función matemática [58]

$$\mu_a(\nu) = \mu_a^{max} \frac{2}{\pi} \text{atan}(k\nu)$$

donde la constante k regula la pendiente de la función en cero.

Observación 3.15. Para todos los modelos físicos idealizados presentados en este capítulo vale la restricción de la ecuación (3.4) de manera que, independientemente de si la rueda se está acelerando o frenando, siempre se cumple con la condición de rodadura perfecta. Esto se aprecia con mayor detalle en el modelo BG de la Figura 3.8 cuando se introducen las fuentes residuales para romper con la CD. Aquí las fuerzas ficticias f_{vir} adoptan el valor necesario para que se cumpla la igualdad $\Omega_r = V_r/r$. Analizando la gráfica de la Figura 3.14 esto equivale a que la velocidad de deslizamiento ν sea siempre cero y por ende la pendiente de la zona estable tienda a infinito. ■

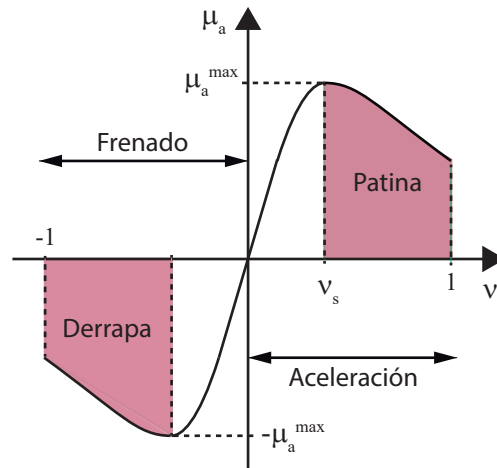


Fig. 3.14 Coeficiente de adhesión μ_a vs. velocidad de deslizamiento ν

De este modo, es posible que la fuerza de tracción del modelo de simulación f_r no siempre sea igual a la fuerza de tracción real f_t . En el ejemplo de a continuación, obtendremos el límite físico de estabilidad para la fuerza de tracción real f_t de acuerdo al coeficiente de adhesión del suelo en el cual se desplaza la base.

Ejemplo 3.2. En la siguiente tabla se especifican los valores picos de distintos tipos de coeficientes de tracción⁸.

Superficie	Coeficiente de tracción μ_a^{max}
Hielo mojado	0,1
Nieve	0,2
Arena	0,3 - 0,4
Barro seco	0,5 - 0,6
Gravilla mojada	0,3 - 0,5
Gravilla seca	0,6 - 0,7
Asfalto mojado	0,6
Concreto mojado	0,6
Asfalto seco	0,9
Concreto seco	0,9

La máxima fuerza de tracción posible f_t^{max} en una de las ruedas omniwheel de la base chica (considerando que la masa está distribuida uniformemente en las tres ruedas) en una superficie de concreto seco es

$$\begin{aligned}
 f_t^{max} &= \mu_a^{max} \frac{m_b g}{3} \\
 &= 4,41 N
 \end{aligned}$$

⁸The Engineering ToolBox, Car Traction Force. www.engineeringtoolbox.com/tractive-effort-d_1783.html.

Así, independientemente de las limitaciones de potencia de los motores, para evitar que la rueda derrape o patine se debe cumplir que⁹

$$\frac{\tau_r - J_r \dot{\Omega}_r}{r} < f_t^{max}$$

de modo que el torque máximo a aplicar en una rueda para que la misma no patine en el arranque es

$$\tau_r^{max} < 0,1058 Nm$$

3.7 Conclusiones

En este capítulo se mostraron distintos modelos (cinemáticos y dinámicos) de una base omnidireccional con tres ruedas omniwheel. Se presentó una metodología para la confección de distintos modelos dinámicos de BM utilizando las técnicas BG, EL y PHS, a la vez que la primera de ellas se utilizó como *lingua franca* para la generalización de resultados.

Las restricciones cinemáticas quedaron expuestas formalmente en todos los tipos de modelos y en todos ellos además, se realizó un detalle pormenorizado de coordenadas, coordenadas generalizadas y orden del modelo.

Se resaltó el concepto de coordenadas cíclicas ante la particularidad de que la matriz de masa total no dependiera de las coordenadas generalizadas, y por consiguiente, las derivadas parciales del Lagrangiano y Hamiltoniano fueran cero respecto a ellas.

Por su parte, el modelado en BG de los motores permitió acoplar la dinámica de estos a la de la base de una manera más sencilla que en el caso de que se hubiera modelado con EL y PHS.

Manipulando el modelo BG para evitar las CD se mostró que las fuerzas introducidas por las fuentes residuales eran los multiplicadores de Lagrange del modelo EL. Con ambas metodologías, dicha fuerza desaparecía en el modelo final. Fue justamente el análisis de causalidad del BG y la vinculación de este con el modelo EL, lo que permitió explicitar y darle un significado matemático a dichas fuerzas.

Luego, con el modelo de coeficiente de adhesión obtenido de la bibliografía, se pudo dar una interpretación y significado físico al vector de fuerzas virtuales y por ende, al vector de multiplicadores de Lagrange. Las fuentes residuales fijaban el valor necesario de esfuerzo para que las fuerzas de tracción cumplan con la condición de rodadura perfecta. Finalmente, con la parametrización presentada, se pudo calcular el máximo valor real de dichas fuerzas.

Los trabajos publicados en [20] y [16], ambos en distintas ediciones de las Jornadas Argentinas de Robótica (JAR), muestran el desarrollo de los modelos BG, EL y PHS

⁹Esto es una análisis simplificado en el que la rueda rota y se mueve longitudinalmente en una determinada dirección y no se consideran los movimientos laterales.

y la correspondiente parametrización, de las bases chicas y grande, respectivamente, realizados en el marco de proyectos finales de ingeniería. Dichos desarrollos se presentaron en congresos de enseñanza de la ingeniería [19] y [15]. En [18] se presentó el diseño mecatrónico de la base móvil grande. Los modelos BG de la base fueron publicados también en [7], [6], y [5].

Bibliografía

Una análisis detallado del modelado cinemático, dinámico y de las restricciones de BM con distintos tipos de locomoción se puede encontrar en [59]. Para un mayor detalle en la definición de coordenadas generalizadas consultar el Apéndice B de [31]. El modelado de sistemas dinámicos con BG se aborda de manera integral en [44]. En el capítulo 11 de [2] y en el capítulo 6 de [29] se trata la temática de modelado EL y PHS con restricciones cinemáticas, respectivamente. En el capítulo 1 de [60] se presenta un tratamiento extendido del concepto de coordenadas cíclicas. La relación entre el modelado EL y BG se puede encontrar de manera detallada en [44]. La equivalencia entre PHS y los modelos BG se desarrolla en forma general en [56]. Para un análisis en profundidad de la fuerza de tracción y la no linealidad que trae aparejada en los modelos dinámicos consultar los trabajos [61] [62].

Capítulo 4

Manipulador Móvil

En este capítulo se presentan los distintos modelos de un manipulador móvil de dos eslabones. En primera instancia se considera un modelo simplificado de la base, modelando al chasis como un cuerpo rígido que se mueve en un plano horizontal. A través del método Denavit-Hartenberg, se comienza obteniendo el modelo *cinemático directo* que expresa la posición del efector final en función de las coordenadas de las Juntas. A continuación se presenta el modelo *cinemático diferencial* que expresa la velocidad traslacional y rotacional del efector final en función de las velocidades de las Juntas. La matriz que gobierna dicha relación, denominada *Jacobiano*, es sumamente importante para la caracterización de un manipulador móvil ya que permite inferir propiedades como *redundancia*, *singularidad* e *inversión cinemática*. Luego, se desarrolla el modelo dinámico a través de tres representaciones diferentes: EL, BG y PHS como generalización de las ecuaciones de Hamilton. Se analizan dichos modelos y se presentan equivalencias que permiten resaltar propiedades de unos en otros. Luego se extiende este modelo simplificado reemplazando el modelo de la base por el modelo dinámico más completo visto en el capítulo anterior. Finalmente, se presentan las conclusiones del capítulo.

4.1 Cinemática Directa

El modelo cinemático directo que se presenta se basa en los conceptos desarrollados en el capítulo 2 de [2]. En la Figura 4.1 se muestra el modelo idealizado del manipulador móvil con el que se trabajará en este capítulo. El mismo consiste en el chasis de la base móvil, que se mueve en el plano horizontal definido por los ejes X_F y Y_F , y montado sobre él un manipulador vertical de dos eslabones en cuyo extremo se halla el efector final. Las juntas de los dos eslabones sólo habilitan movimientos en planos verticales.

A los efectos de la obtención de los distintos modelos presentados en este capítulo, se considera a la base como un cuerpo rígido actuado por fuerzas y torques aplicadas en su CM, y no se diferencian las dinámicas del chasis y las ruedas como la realizada en el capítulo 3.

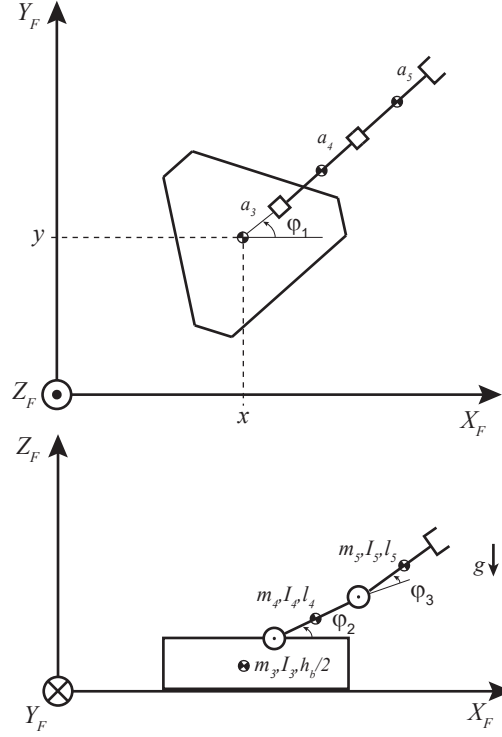


Fig. 4.1 Vista superior y frontal del modelo físico idealizado del manipulador móvil.

La posición y orientación de un Marco i respecto al Marco fijo F puede ser expresada a través de la matriz de transformación homogénea

$$T_i^F = \begin{bmatrix} R_i^F & p_i^F \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}$$

donde R_i^F es la matriz de rotación del Marco i al Marco F y p_i^F la posición del origen de coordenadas del Marco i expresada en el Marco F . Dicha matriz puede ser obtenida como composición de todas las transformaciones individuales entre los sucesivos Marcos como

$$T_i^F = A_1^F \cdots A_i^{i-1} \quad (4.1)$$

donde A_i^{i-1} es la matriz de transformación del Marco i al Marco $i - 1$. Para obtener la expresión de dichas matrices utilizaremos la convención Denavit-Hartenberg (DH).

4.1.1 Denavit Hartenberg

La convención DH permite construir la expresión de la cinemática directa a través de la siguiente serie de pasos preestablecidos:

- Elegir el eje z_i axialmente con el eje de la Junta $i + 1$.

- Ubicar el origen O_i del Marco i en la intersección de z_i con el segmento de distancia mínima entre z_{i-1} y z_i . Ubicar el origen O'_i del Marco i' , en el caso de que no coincida con O_i , en la intersección de dicho segmento con el eje z_{i-1} .
- Elegir el eje x_i a lo largo del segmento de distancia mínima con dirección de la Junta i a la Junta $i + 1$.
- Completar con el eje y_i utilizando la convención de la regla de la mano derecha.

Una vez definidos todos los Marcos, se obtienen los parámetros DH:

- a_i distancia entre O'_i y O_i .
- d_i distancia a O'_i a lo largo de z_{i-1} .
- α_i ángulo entre z_{i-1} y z_i medido con respecto a x_i , con convención positiva en sentido anti-horario.
- φ_i ángulo entre x_{i-1} y x_i medido con respecto a z_{i-1} , con convención positiva en sentido anti-horario.

En el modelo esquematizado de la Figura 4.2 se pueden apreciar los Marcos de referencias adoptados, y en la Tabla 4.1 se especifican los parámetros DH.

Observación 4.1. A los efectos del modelado con la convención DH, el movimiento traslacional de la base en el plano se modeló como dos Juntas prismáticas con sus respectivos Marcos $O_0 - X_0Y_0Z_0$ y $O_1 - X_1Y_1Z_1$, mientras que la componente rotacional de la misma como una Junta de revolución. ■

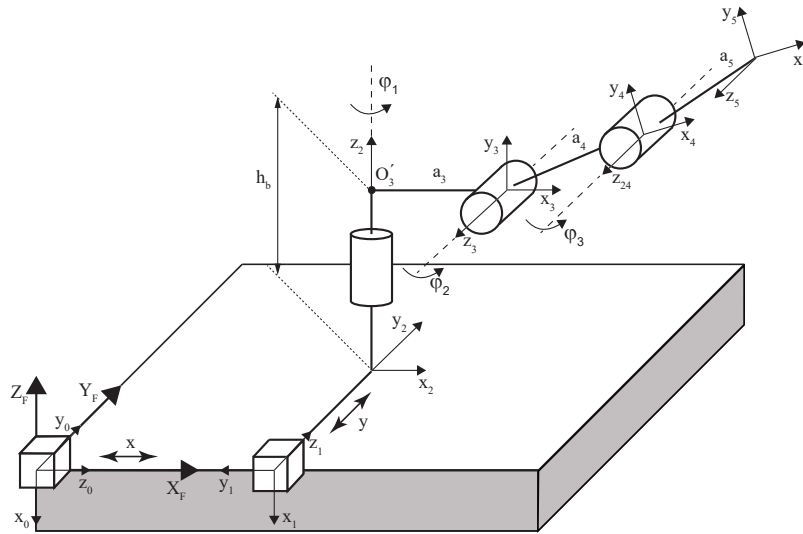


Fig. 4.2 Marcos de referencia, variables y parámetros DH.

Notar que en todos los casos los orígenes O'_i y O_i coinciden, salvo para el caso $i = 3$, donde O'_3 se encuentra a una distancia h_b y a_3 del origen del Marco 2 y 3, respectivamente. Notar también que para el caso del cuerpo 2 el Marco 1, para que coincida con el Marco 2, debe rotar un cuarto de vuelta en sentido contrario a las agujas del reloj respecto a x_2 y luego un cuarto de vuelta en sentido de las agujas del reloj respecto a z_1 . Por esta última rotación, el ángulo φ_2 es constante e igual a $-\pi/2$. Finalmente, observar que el origen del Marco $O_0 - X_0Y_0Z_0$ coincide con el del Marco base $O_F - X_FY_FZ_F$, pero el primero está rotado respecto al segundo de manera que el eje z_0 coincida con la dirección de desplazamiento x .

Link	a_i	α_i	d_i	φ_i
1	0	$-\pi/2$	x	0
2	0	$\pi/2$	y	$-\pi/2$
3	a_3	$\pi/2$	h_b	φ_1
4	a_4	0	0	φ_2
5	a_5	0	0	φ_3

Tabla 4.1 Parámetros DH del manipulador móvil.

Una vez obtenidos los parámetros DH, las matrices de transformación homogénea A_i^{i-1} se pueden escribir usando la expresión

$$A_i^{i-1} = \begin{bmatrix} c_{\varphi_i} & -s_{\varphi_i}c_{\alpha_i} & s_{\varphi_i}s_{\alpha_i} & a_i c_{\varphi_i} \\ s_{\varphi_i} & c_{\varphi_i}c_{\alpha_i} & -c_{\varphi_i}s_{\alpha_i} & a_i s_{\varphi_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde la matriz A_i^{i-1} de transformación del Marco i al Marco $i - 1$ varía solamente respecto al ángulo φ_i o distancia d_i según sea la Junta de revolución o prismática, respectivamente. Las matrices (4.1) con $i = 0, \dots, 5$, se muestran en la sección A.1 del Apéndice A. Por su parte, las posiciones de los Marcos i respecto al Marco fijo F son los vectores (3×1) de la cuarta columna de T_i^F , siendo¹

$$p_0^F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad p_1^F = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad p_2^F = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$p_3^F = \begin{bmatrix} x + c_1 a_3 \\ y + s_1 a_3 \\ h_b \end{bmatrix} \quad p_4^F = \begin{bmatrix} x + c_1(a_3 + a_4 c_2) \\ y + s_1(a_3 + a_4 c_2) \\ h_b + a_4 s_2 \end{bmatrix} \quad p_5^F = \begin{bmatrix} x + c_1(a_3 + a_4 c_2 + a_5 c_{23}) \\ y + s_1(a_3 + a_4 c_2 + a_5 c_{23}) \\ h_b + a_4 s_2 + a_5 s_{23} \end{bmatrix}$$

¹La notación $s_{i\dots j}$ y $c_{i\dots j}$ se corresponde con $\sin(\varphi_i + \dots + \varphi_j)$ y $\cos(\varphi_i + \dots + \varphi_j)$, respectivamente.

mientras que las matrices de rotación del Marco i al Marco fijo F se obtienen a partir del primer sub-bloque (3×3) de las matrices de transformación homogénea T_i^F , siendo

$$\begin{aligned}
 R_0^F &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & R_1^F &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & R_2^F &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & R_3^F &= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 R_4^F &= \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -c_1 s_2 & s_1 \\ s_1 c_2 & -s_1 s_2 & -c_1 \\ s_2 & c_2 & 0 \end{bmatrix} & R_5^F &= \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & -c_1 \\ s_{23} & c_{23} & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

matrices ortogonales, i.e., $R_i^{FT} = R_i^{F-1}$.

4.1.2 Espacio de Trabajo y Espacio de las Juntas

La cinemática directa es una función que permite expresar la posición p_e y orientación ϕ_e del efector final de un manipulador (móvil en este caso), respecto a un Marco de referencia fijo inercial, como función de un vector independiente que caracteriza la postura del manipulador móvil. La pose del efector final se expresa como²

$$x_e = k(q) = \begin{bmatrix} p_e \\ \phi_e \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

donde $q = [x, y, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]^T$ es el vector de desplazamientos de las Juntas caracterizante precisamente, de la postura del manipulador móvil. La posición del efector final coincide con el origen de coordenadas del Marco 5, de manera que $p_e = p_5^F$.

Por su parte, la orientación puede ser expresada a través de diferentes técnicas (Ángulos de Euler, Cuaterniones Unitarios o Ángulos y Ejes). En este caso se utilizará la representación de los ángulos de Euler a través de la rotación descrita por los ángulos **ZYZ** y caracterizada por $\phi_e = [\varphi_e, \vartheta_e, \psi_e]^T$ [2]. La expresión de los mismos viene determinada por:

$$\phi_e = \begin{bmatrix} \varphi_e \\ \vartheta_e \\ \psi_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Atan2}(r_{23}, r_{13}) \\ \text{Atan2} \left(\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33} \right) \\ \text{Atan2}(r_{32}, -r_{31}) \end{bmatrix}$$

²A partir de aquí se omite la notación con superíndice ' F ' para valores expresados respecto al Marco fijo F .

donde $\text{Atan2}(y, x)$ es la función arcotangente de la relación y/x , y r_{ij} es el elemento $[i, j]$ de la matriz de rotación R_5 . De esta manera la función de cinemática directa es

$$k(q) = \begin{bmatrix} p_{ex} \\ p_{ey} \\ p_{ez} \\ \varphi_e \\ \vartheta_e \\ \psi_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + a_3 c_1 + a_4 c_2 c_1 + a_5 c_{23} c_1 \\ y + a_3 s_1 + a_4 c_2 s_1 + a_5 c_{23} s_1 \\ h_b + a_4 s_2 + a_5 s_{23} \\ -\frac{\pi}{2} + \varphi_1 \\ \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} + \varphi_2 + \varphi_3 \end{bmatrix}$$

4.2 Cinemática Diferencial

El objetivo de la cinemática diferencial es poder expresar la velocidad lineal $\dot{p}_e$ y angular ω_e del efector final, en función de las velocidades de las Juntas $\dot{q}$, a través de relaciones lineales de la forma

$$\begin{aligned} \dot{p}_e &= J_P(q) \dot{q} \\ \omega_e &= J_O(q) \dot{q} \end{aligned}$$

donde $J_P(q)$ y $J_O(q)$ son matrices de tamaño (3×5) que dependen de las posiciones de las Juntas q . Ambas ecuaciones se pueden escribir de forma compacta como

$$v_e = \begin{bmatrix} \dot{p}_e \\ \omega_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_P(q) \\ J_O(q) \end{bmatrix} \dot{q} = J(q) \dot{q} \quad (4.4)$$

donde $J(q)$ es el Jacobiano geométrico del manipulador móvil y su producto por las velocidades $\dot{q}$ representa la cinemática diferencial del mismo. El Jacobiano resulta ser una matriz de suma importancia en el modelado y control de un manipulador ya que, como se verá más adelante, las propiedades matemáticas de la matriz permiten obtener conclusiones sobre redundancia y singularidades. El análisis y desarrollo de la cinemática diferencial se basa en el capítulo 3 de [2].

4.2.1 Jacobiano

La expresión analítica del Jacobiano geométrico viene dada por

$$J(q) = \begin{bmatrix} j_{P1} & \cdots & j_{P5} \\ j_{O1} & \cdots & j_{O5} \end{bmatrix}$$

donde se cumple, para $i = 1, \dots, 5$, que

$$\begin{bmatrix} j_{Pi} \\ j_{Oi} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} z_{i-1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix} & \text{para el caso de una Junta prismática} \\ \begin{bmatrix} z_{i-1} \times (p_5 - p_{i-1}) \\ z_{i-1} \end{bmatrix} & \text{para el caso de una Junta de revolución} \end{cases}$$

El vector z_{i-1} se corresponde con la tercera columna de la matriz de rotación R_{i-1} , de modo que para los Marcos elegidos en la Figura 4.2 sus valores son:

$$z_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad z_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad z_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad z_3 = z_4 = \begin{bmatrix} s_1 \\ -c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De esta manera, el Jacobiano geométrico es

$$J(q) = \begin{bmatrix} z_0 & z_1 & z_2 \times (p_5 - p_2) & z_3 \times (p_5 - p_3) & z_4 \times (p_5 - p_4) \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix}$$

Realizando los productos vectoriales y reemplazando los valores de z_i , se obtiene

$$J(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s_1(a_3 + a_4c_2 + a_5c_{23}) & -c_1(a_4s_2 + a_5s_{23}) & -a_5s_{23}c_1 \\ 0 & 1 & c_1(a_3 + a_4c_2 + a_5c_{23}) & -s_1(a_4s_2 + a_5s_{23}) & -a_5s_{23}s_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_4c_2 + a_5c_{23} & a_5c_{23} \\ 0 & 0 & 0 & s_1 & s_1 \\ 0 & 0 & 0 & -c_1 & -c_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Observar que el rango del Jacobiano es como mucho igual a cinco, de modo que hay una fila que no es independiente. Dicha fila en este caso es la cuarta, que puede ser escrita en función de la quinta, i.e, $\omega_{ex} = -\tan(\varphi_1)\omega_{ey}$. Teniendo cinco Grados de Libertad (GL), conviene entonces considerar el siguiente Jacobiano reducido

$$J_R(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s_1(a_3 + a_4c_2 + a_5c_{23}) & -c_1(a_4s_2 + a_5s_{23}) & -a_5s_{23}c_1 \\ 0 & 1 & c_1(a_3 + a_4c_2 + a_5c_{23}) & -s_1(a_4s_2 + a_5s_{23}) & -a_5s_{23}s_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_4c_2 + a_5c_{23} & a_5c_{23} \\ 0 & 0 & 0 & -c_1 & -c_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que no tiene en cuenta la velocidad de rotación ω_{ex} (se podría haber descartado de igual modo la velocidad ω_{ey}) y que describe la relación entre las velocidades de las Juntas y la velocidad lineal y las velocidades rotacionales ω_{ey} y ω_{ez} del efector final, de modo que no se admiten velocidades independientes de ω_{ex} .

Observación 4.2. Esto era esperable ya que, observando la estructura del manipulador móvil, se aprecia por un lado que el movimiento y rotación de la base permiten generar de manera independiente tres velocidades del efector final: $\dot{p}_{ex}$, $\dot{p}_{ey}$, ω_{ez} . Por otro lado, el movimiento del brazo genera solamente dos ya que, salvo la velocidad de traslación $\dot{p}_{ez}$, las velocidades de rotación ω_{ex} y ω_{ey} no son independientes. ■

4.2.2 Singularidades

Las configuraciones para las cuales el Jacobiano no es de rango pleno, se denominan *singularidades cinemáticas*. Las mismas se pueden analizar de manera relativamente sencilla analizando el determinante del Jacobiano en el caso de que el mismo sea cuadrado. Así, cuando el determinante es cero la matriz Jacobiana pierde rango y se está ante la presencia de una singularidad.

En este caso, analizando el Jacobiano reducido $J_R(q)$ se tiene que el determinante

$$\det(J_R(q)) = -a_4 c_1 c_2$$

es cero (i.e. $\text{rank}(J_R(q)) < 5$) cuando $c_1 = 0$ y/o $c_2 = 0$. Esto sucede si

$$\varphi_1 = -\pi/2 \text{ / } \varphi_1 = \pi/2 \quad \vee \quad \varphi_2 = \pi/2^3$$

El primer caso se da cuando el brazo manipulador se encuentra contenido en el plano formado por los ejes $Z_F Y_F$ y no se pueden generar velocidades de rotación ω_{ey} . El segundo caso sucede cuando el primer eslabón del brazo se encuentra a 90° y no se pueden generar velocidades de traslación $\dot{p}_{ez}$ independientes de ω_{ey} .

Observación 4.3. Si se piensa al manipulador móvil como un brazo antropomorfo cuya base se puede desplazar libremente en el plano, se ve que esta última particularidad tiene como ventaja que el manipulador móvil no presente las clásicas singularidades internas y de borde que tiene un brazo antropomorfo fijo [63]. ■

4.2.3 Redundancia y Espacio Nulo

Para analizar la redundancia del manipulador móvil se deben tener en cuenta: (i) la cantidad de GL del manipulador móvil $n = 5$, (ii) el número de variables del espacio de trabajo $m = 5$, (iii) la cantidad de variables en el espacio de trabajo r que requiere una tarea en un determinado escenario.

³No se tuvo en cuenta el caso $\varphi_2 = -\pi/2$ por considerarlo físicamente irrealizable.

Consideremos por ejemplo que se desea controlar sólo la posición del efector final en el espacio, de modo que $r = 3$ y se tienen $n - r = 2$ grados de redundancia. Notar que siempre, independientemente de la tarea a realizar, se cumple que $r \leq m$. De esta manera, el Jacobiano resultante surge de tener en cuenta sólo el primer subbloque de tres filas del Jacobiano (4.5)

$$J_P(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s_1(a_3 + a_4c_2 + a_5c_{23}) & -c_1(a_4s_2 + a_5s_{23}) & -a_5s_{23}c_1 \\ 0 & 1 & c_1(a_3 + a_4c_2 + a_5c_{23}) & -s_1(a_4s_2 + a_5s_{23}) & -a_5s_{23}s_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_4c_2 + a_5c_{23} & a_5c_{23} \end{bmatrix}$$

Asociado al concepto de redundancia, está el de espacio nulo definido como el conjunto de velocidades $\dot{q}$ que no producen velocidades en el efector final. La dimensión del espacio nulo del manipulador móvil es:

$$\dim(\mathcal{N}(J_P)) = n - r$$

de manera que la existencia de un subespacio $\mathcal{N}(J_P) \neq 0$ si el manipulador móvil es redundante permite la implementación de técnicas de gestión de dicho espacio nulo.

4.2.4 Jacobiano Analítico

Existe una manera de obtener otro Jacobiano, y es a través de la derivada respecto al tiempo de la postura del efector final especificada en (4.3),

$$\dot{x}_e = \begin{bmatrix} \dot{p}_e \\ \dot{\phi}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_P(q) \\ J_\phi(q) \end{bmatrix} \dot{q} = J_A(q) \dot{q}$$

donde $J_A(q)$ es el Jacobiano analítico, y

$$\dot{\phi}_e = \frac{\partial \phi_e}{\partial q} \dot{q} = J_\phi(q) \dot{q}$$

siendo en la mayoría de los casos, $\dot{\phi}_e \neq \omega_e$.

El uso de un Jacobiano u el otro, dependerá de la aplicación en cada caso. Desde un punto de vista físico, el significado de ω_e tiene una interpretación más clara que $\dot{\phi}_e$; los tres componentes de ω_e representan la velocidad de rotación respecto al Marco base fijo F , mientras que las tres componentes de $\dot{\phi}_e$ son componentes ortogonales de velocidades angulares definidas respecto a ejes de un Marco que varía junto con el efector final. Por otro lado, la integral $\dot{\phi}_e$ da como resultado el ángulo ϕ_e que es interpretable físicamente como se vio en la sección anterior, mientras que la integral de ω_e no nos dice nada respecto a la orientación del efector final. Así, siempre que se quiera asignarle una interpretación física al resultado se utilizará el Jacobiano

geométrico $J(q)$, mientras que cuando el objetivo sea trabajar con valores diferenciales de las variables en el espacio de trabajo, se optará por el Jacobiano analítico $J_A(q)$ [2].

4.3 Inversión Cinemática Diferencial

El problema de cinemática diferencial inversa consiste en determinar las velocidades de las juntas del manipulador móvil, a partir de la velocidad del efector final. A diferencia de lo presentado en [2], aquí se desarrolla la solución óptima para el caso de las aceleraciones de las Juntas. En esa línea, se plantea la derivada con respecto al tiempo de la cinemática diferencial (4.4), que relaciona la aceleración del efector final $\ddot{x}_e$ con las velocidades y aceleraciones de las Juntas como

$$\ddot{x}_e = \dot{J}(q, \dot{q})\dot{q} + J(q)\ddot{q} \quad (4.6)$$

Si el manipulador móvil se vuelve redundante (el Jacobiano tiene mas columnas que filas), cuando se desea obtener la expresión de las aceleraciones $\ddot{q}$ que generan la aceleración del efector final $\ddot{x}_e$, infinitas soluciones existen al problema de cinemática inversa ya que la matriz Jacobiana no es invertible.

La solución a este problema se puede obtener a través del método de los *multiplicadores de Lagrange*: planteando una función costo $L(x, \lambda) = f(x) - \lambda^T g$, el método consiste en encontrar el mínimo de la función $f(x)$ sujeto a las restricciones $g = 0$, siendo λ un vector columna de dimensión $(r \times 1)$ conocido como los *multiplicadores de Lagrange*. Para ello hay que encontrar los valores de x y λ que simultáneamente satisfagan $\nabla L = \mathbf{0}$, o sea

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^T = \mathbf{0} \quad y \quad \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)^T = \mathbf{0}$$

Consideremos entonces que

$$f = \frac{1}{2}(\ddot{q} - \ddot{q}_0)^T W(\ddot{q} - \ddot{q}_0) \quad g = \dot{J}\dot{q} + J\ddot{q} - \ddot{x}_e$$

donde W es una matriz (5×5) definida positiva y $\ddot{q}_0$ son aceleraciones arbitrarias. De este modo, las soluciones de $\ddot{q}$ deben satisfacer la restricción (4.6) al mismo tiempo que, si es posible, sean lo más próximas a $\ddot{q}_0$. Así la función costo

$$L(\ddot{q}, \lambda) = \frac{1}{2}(\ddot{q} - \ddot{q}_0)^T W(\ddot{q} - \ddot{q}_0) + \lambda^T (\ddot{x}_e - \dot{J}\dot{q} - J\ddot{q})$$

debe cumplir con los siguientes requisitos:

$$(i). \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right)^T = \mathbf{0}_{5 \times 1} \quad (ii). \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)^T = \mathbf{0}_{r \times 1}$$

De la primera restricción es $W(\ddot{q} - \ddot{q}_0) - J^T \lambda = \mathbf{0}$ lo que equivale a

$$\ddot{q} = \ddot{q}_0 + W^{-1} J^T \lambda \quad (4.7)$$

donde dicha solución es un mínimo ya que la matriz hessiana $\partial^2 L / \partial \ddot{q}^2 = W$ es definida positiva. De la segunda restricción se obtiene

$$\ddot{x}_e = \dot{J}\dot{q} + J\ddot{q}$$

Combinando ambas se tiene

$$\ddot{x}_e = \dot{J}\dot{q} + J(\ddot{q}_0 + W^{-1} J^T \lambda)$$

Considerando que J es de rango pleno e igual a r , la matriz $JW^{-1}J^T$ es cuadrada de dimensión $(r \times r)$ e invertible, de manera que se puede despejar λ como

$$\lambda = (JW^{-1}J^T)^{-1} (\ddot{x}_e - \dot{J}\dot{q} - J\ddot{q}_0)$$

Reemplazando en (4.7) da como resultado la solución de las aceleraciones

$$\ddot{q} = \underbrace{W^{-1}J^T(JW^{-1}J^T)^{-1}}_{J^{INV}} (\ddot{x}_e - \dot{J}\dot{q}) + \left(I - \underbrace{W^{-1}J^T(JW^{-1}J^T)^{-1}J}_{J^{INV}} \right) \ddot{q}_0$$

Según sea el valor de la matriz de peso W se obtiene la:

- 1) Inversa generalizada $\bar{J}$ con $W = M \Rightarrow J^{INV} = M^{-1}J^T(JM^{-1}J^T)^{-1}$
- 2) Pseudo-inversa $J^\dagger$ con $W = \mathbf{I}_5 \Rightarrow J^{INV} = J^T(JJ^T)^{-1}$

donde M es la matriz de masa del manipulador móvil (referirse al apéndice A para su expresión) y $\mathbf{I}_5$ la matriz identidad.

Observación 4.4. Si se hubiese utilizado la función $f = \frac{1}{2}(\dot{q} - \dot{q}_0)^T W (\dot{q} - \dot{q}_0)$ y $g = J\dot{q} - \dot{x}_e$, las expresiones de la Inversa generalizada $\bar{J}$ y Pseudo-inversa $J^\dagger$ habrían sido las mismas. Por ello en la literatura se asegura que la primera ($W = M$) minimiza la energía cinética y la segunda ($W = I$) la norma de las velocidades de las juntas (ver [64] y capítulo 3 de [2], respectivamente). ■

Analizando las soluciones de las aceleraciones se puede apreciar que en el segundo término, denominado solución homogénea, las aceleraciones arbitrarias $\ddot{q}_0$ se proyectan en el espacio nulo del Jacobiano J . Esto significa que en el caso de que $\ddot{x}_e = 0$, es posible generar movimientos de las Juntas del manipulador móvil de manera que la posición y orientación del efector final se mantengan constantes.

Generalmente el vector de aceleraciones $\ddot{q}_0$ se elige como

$$\ddot{q}_0 = k_0 \left(\frac{\partial \omega(q)}{\partial q} \right)^T \quad (4.8)$$

donde $k_0 > 0$ y $\omega(q)$ es una función que representa un objetivo secundario. Como el gradiente de la función objetivo apunta en la dirección de su máximo, siempre que se cumpla con el objetivo primario (la restricción $g = 0$), el vector de soluciones $\ddot{q}$ tenderá a ser lo más próximo posible a $\ddot{q}_0$ y así la solución se moverá hacia el máximo (local) de la función $\omega(q)$.

Finalmente, para disminuir los tiempos computacionales en la implementación numérica, la derivada parcial de $\omega(q)$ en (4.8) se puede expresar como [65] (ver también [66])

$$\frac{\partial \omega(q)}{\partial q_i} = \omega(q) \text{tr} \left(\frac{\partial J}{\partial q_i} J^\dagger \right)$$

donde q_i es una componente del vector q y tr representa la traza de una matriz.

4.4 Modelo Dinámico

Los modelos dinámicos presentados a continuación se formulan en base a consideraciones energéticas, y se representan a través de ecuaciones EL, modelos PHS y diagramas BG. Para obtener el modelo dinámico del manipulador móvil se utiliza la técnica ilustrada en el capítulo 7 de [2] y se considera el modelo físico idealizado mostrado en la Figura 4.1. El mismo está compuesto por tres cuerpos: la base y los dos eslabones del brazo manipulador. Asociados a cada uno de ellos se detalla el CM que viene caracterizado por su masa m_i , el tensor de inercia I_{li} relativo a su CM expresado en el Marco fijo F , y la distancia l_i del CM del cuerpo i al origen de su Marco asociado.

Observación 4.5. Como el Marco $i = 3$ representa completamente la traslación y rotación del CM de la base, se puede trabajar con los Marcos de referencia presentados en la sección anterior considerando $i = 3, 4, 5$. ■

De este modo, cada uno de los cuerpos tiene una co-energía cinética asociada $\mathcal{T}_{li}^*$, con $i = 3, 4, 5$, compuesta por una parte traslacional y otra rotacional, que se puede escribir como

$$\mathcal{T}_{li}^* = \frac{1}{2} m_i \dot{p}_{li}^T \dot{p}_{li} + \frac{1}{2} \omega_i^T R_i I_{li}^i R_i^T \omega_i \quad (4.9)$$

donde

- I_{li}^i es el tensor de inercia del cuerpo i definido respecto a su propio Marco de referencia y expresado como $I_{li}^i = \text{diag}\{I_{xi}, I_{yi}, I_{zi}\}$
- R_i^T son las matrices de rotación del Marco fijo F al Marco i , cuyas transpuestas están detalladas en (4.2)

- $\dot{p}_{li}$ y ω_i son las velocidades de traslación y rotación del CM del cuerpo i , respectivamente

Observación 4.6. Como la base sólo puede rotar respecto al eje z del Marco fijo F , sólo se considera dicha inercia, de manera que su tensor definido respecto a su propio Marco es $I_{l3}^3 = \text{diag}\{[0, I_{z3}, 0]\}$. ■

Las velocidades $\dot{p}_{li}$ y ω_i se pueden expresar aplicando el mismo método del Jacobiano geométrico como

$$\begin{aligned}\dot{p}_{li} &= j_{P1}^{li} \dot{q}_1 + \cdots + j_{Pi}^{li} \dot{q}_i \\ \omega_i &= j_{O1}^{li} \dot{q}_1 + \cdots + j_{Oi}^{li} \dot{q}_i\end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned}j_{Pj}^{li} &= \begin{cases} z_{j-1} & \text{para el caso de una Junta prismática} \\ z_{j-1} \times (p_{li} - p_{j-1}) & \text{para el caso de una Junta de revolución} \end{cases} \\ j_{Oj}^{li} &= \begin{cases} \mathbf{0}_{3 \times 1} & \text{para el caso de una Junta prismática} \\ z_{j-1} & \text{para el caso de una Junta de revolución} \end{cases}\end{aligned}\quad (4.10)$$

De esta manera las velocidades de traslación son

$$\begin{aligned}\dot{p}_{l3} &= \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix} & \dot{p}_{l4} &= \begin{bmatrix} \dot{x} - a_3 s_1 \dot{\varphi}_1 - l_4 c_2 s_1 \dot{\varphi}_1 - l_4 c_1 s_2 \dot{\varphi}_2 \\ \dot{y} + a_3 c_1 \dot{\varphi}_1 + l_4 c_1 c_2 \dot{\varphi}_1 - l_4 s_1 s_2 \dot{\varphi}_2 \\ l_4 c_2 \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix} \\ \dot{p}_{l5} &= \begin{bmatrix} \dot{x} - a_3 s_1 \dot{\varphi}_1 - a_4 c_2 s_1 \dot{\varphi}_1 - a_4 c_1 s_2 \dot{\varphi}_2 - l_5 c_{23} s_1 \dot{\varphi}_1 - l_5 c_1 s_{23} (\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3) \\ \dot{y} + a_3 c_1 \dot{\varphi}_1 + a_4 c_1 c_2 \dot{\varphi}_1 - a_4 s_1 s_2 \dot{\varphi}_2 + l_5 c_1 c_{23} \dot{\varphi}_1 - l_5 s_1 s_{23} (\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3) \\ a_4 c_2 \dot{\varphi}_2 + l_5 c_{23} (\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

y las velocidades de rotación

$$\begin{aligned}\omega_3 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi}_1 \end{bmatrix} & \omega_4 &= \begin{bmatrix} s_1 \dot{\varphi}_2 \\ -c_1 \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_1 \end{bmatrix} & \omega_5 &= \begin{bmatrix} s_1 (\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3) \\ -c_1 (\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3) \\ \dot{\varphi}_1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Por su parte, la energía potencial U_i del cuerpo i se escribe como

$$U_i = -m_i g_0^T p_{li}$$

donde $g_0 = [0 \ 0 \ -g_r]^T$, g_r es la aceleración de la gravedad, y

$$p_{l_3} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ h_b/2 \end{bmatrix} \quad p_{l_4} = \begin{bmatrix} x + a_3 c_1 + l_4 c_2 c_1 \\ y + a_3 s_1 + l_4 c_2 s_1 \\ h_b + l_4 s_2 \end{bmatrix} \quad p_{l_5} = \begin{bmatrix} x + a_3 c_1 + a_4 c_2 c_1 + l_5 c_{23} c_1 \\ y + a_3 s_1 + a_4 c_2 s_1 + l_5 c_{23} s_1 \\ h_b + a_4 s_2 + l_5 s_{23} \end{bmatrix}$$

son las posiciones del CM del cuerpo i respecto al Marco fijo F .

4.4.1 Ecuaciones de Euler Lagrange

El Lagrangiano del manipulador móvil es la diferencia entre la co-energía cinética $\mathcal{T}^*(\dot{q}, q)$ y la energía potencial $U(q)$

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \mathcal{T}^*(q, \dot{q}) - U(q)$$

donde

$$\mathcal{T}^*(q, \dot{q}) = \sum_{i=3}^5 \mathcal{T}_{li}^* \quad \text{y} \quad U(q) = \sum_{i=3}^5 U_{li}$$

representa la suma de las co-energía cinéticas y energía potencial, respectivamente. Notar que como en este caso los almacenadores de energía son lineales, la co-energía $\mathcal{T}_{li}^*$ toma el mismo valor que la energía $\mathcal{T}_{li}$ de la ecuación (4.9). Por su parte, las ecuaciones de EL son

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \tau + J^T(q) h_e \quad (4.11)$$

donde $\tau = [F_x, F_y, \tau_1, \tau_2, \tau_3]^T$ es el vector de fuerzas⁴ ejercido sobre las coordenadas generalizadas q y $J^T(q) h_e$ son las fuerzas que actúan sobre las coordenadas q del manipulador móvil, producto de un vector de fuerza externo h_e de dimensión (6×1) ejercido en el efector final por el entorno. En forma compacta, las ecuaciones de EL se expresan como

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau + J^T(q) h_e \quad (4.12)$$

donde $M(q)$ es la matriz de inercia, $C(q, \dot{q})$ la matriz que agrupa los términos relativos a las fuerzas de Coriolis y centrífugas y $g(q)$ la matriz de gravedad. Las expresiones de las mismas para el caso en estudio se muestran detalladas en la sección A.2 del Apéndice A.

4.4.2 Bond Graph

Como se puede observar en la Figura 4.3, el esquema BG parte de asociar a vínculos **1** los componentes del vector de velocidades $\dot{q}$ y las velocidades $\dot{p}_{li}$ y ω_i con $i = 3, \dots, 5$, representando a través de elementos **MTF** las relaciones cinemáticas mostradas en

⁴De aquí en más nos referiremos a los vectores cuyos elementos representen fuerzas y/o torques de forma general como vector de fuerzas.

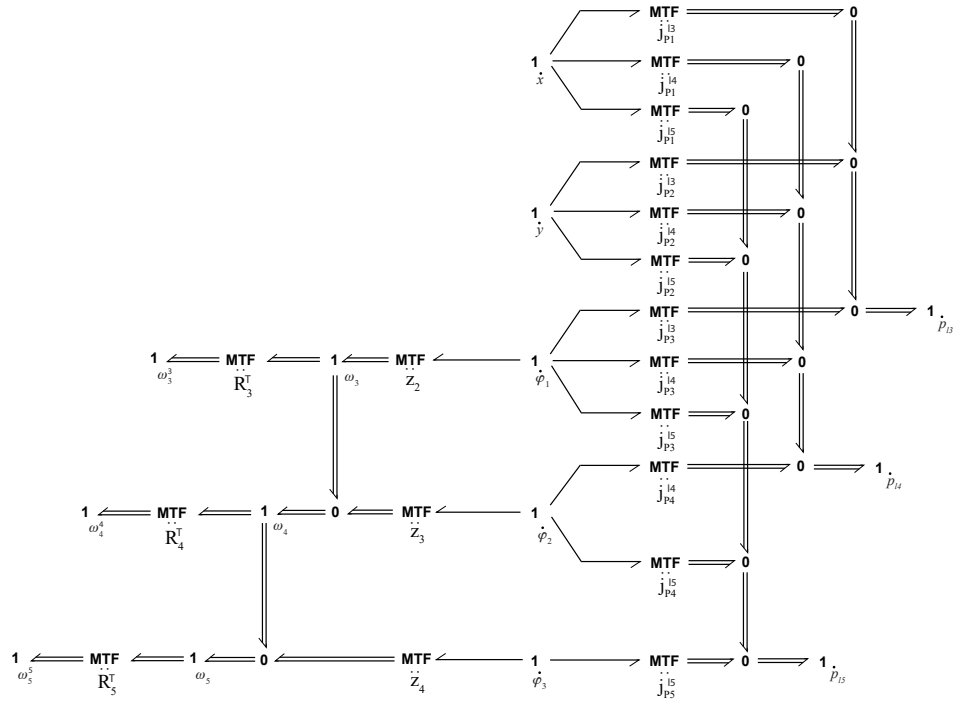


Fig. 4.3 Esquema BG de la estructura de interconexión del manipulador móvil.

(4.10)⁵. Observar que los enlaces escalares están asociados a las velocidades de las Juntas mientras que los enlaces 3D se corresponden con los vectores de velocidades lineales y rotacionales de los CM. Las expresiones de las relaciones de transformación de los **MTF** se detallan en la sección A.3 del Apéndice A (si bien el término j_{P3}^{l3} es igual a cero, se introdujo a través del elemento **MTF** en aras de aportar una mayor claridad al esquema).

Notar que las velocidades de rotación ω_i^i , expresadas en sus respectivos Marcos i , con $i = 3, \dots, 5$, se podrían construir con la misma estructura de transformadores modulados utilizada para el caso de $\dot{p}_{li}$. Sin embargo, en este caso muchos de los vectores que las componen son nulos, por lo que se optó por construir la expresión de las velocidades de manera simplificada.

Una vez establecidas las relaciones cinemáticas, se agregan las fuentes de esfuerzo, las inercias asociadas a las velocidades y se causaliza el BG, quedando el esquema de la Figura 4.4. El esfuerzo reflejado en la junta i producto de las fuerzas externas h_e se representa como una fuente de esfuerzo **MSe** modulada por el factor $h_e^i(q)$, siendo este la i -ésima fila del vector columna $J^T(q)h_e$.

Notar que el torque de entrada τ_3 aplicado sobre el segundo eslabón del brazo manipulador tiene una reacción sobre el primer eslabón. En ese sentido, en el caso de que se hubiera considerado la rotación de la base respecto al eje y del Marco fijo F , se tendría que haber tenido en cuenta la reacción del torque de entrada τ_2 sobre la base.

⁵Se omitió la dependencia en la variable q en todos los elementos modulados (**MTF**, **MSe**)

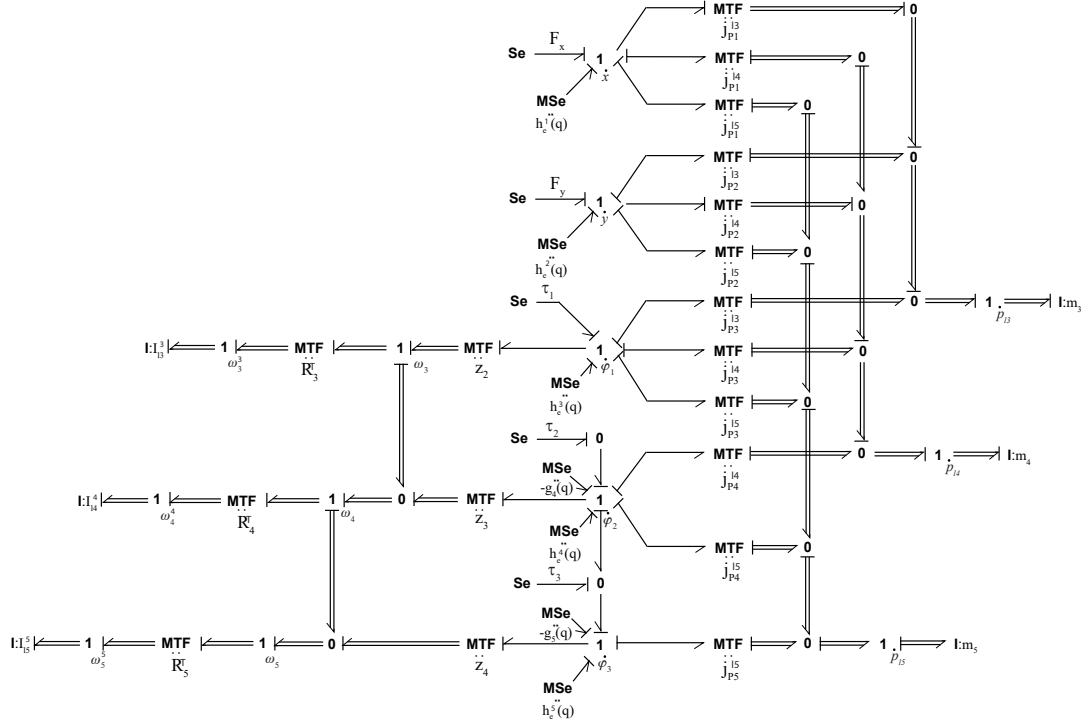


Fig. 4.4 Modelo BG del manipulador móvil.

Observación 4.7. La causalidad permite deducir que los tensores de inercia I_{l3}^3 , I_{l4}^4 y I_{l5}^5 son los que definen las velocidades de rotación φ_1 , φ_2 y φ_3 , respectivamente, mientras que m_3 y m_4 lo hacen con $\dot{x}$ y $\dot{y}$, respectivamente. De este modo se cumple que la cantidad de almacenadores de energía en CI es igual a la dimensión del vector de entradas τ . O sea, cada coordenada está actuada de forma independiente. ■

Observación 4.8. En lugar de reconstruir la velocidad de traslación $\dot{p}_{l3}$, se puede armar un esquema BG asociando a los vínculos 1 de las velocidades $\dot{x}$ y $\dot{y}$ un almacenador de energía cinética de valor $\mathbf{I} = m_3$ a cada una, como se verá más adelante. ■

4.4.2.1 Campo IC

En los casos en los que el esquema BG presente lazos algebraicos, almacenadores de energía en CD o relaciones algebraicas complejas, las ecuaciones de EL resultan especialmente útiles, pudiendo representar al manipulador móvil a través de los denominados *campos IC* utilizando las ecuaciones de EL en forma Hamiltoniana (ver capítulo 9 de [44]). Retomando la ecuación (4.11), la misma puede reescribirse como

$$E - e = \tau + J^T(q)h_e$$

donde E y e son vectores de dimensión (5×1) , cuyos componentes son

$$E_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right)$$

$$e_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$$

con $i = 1, \dots, 5$. Teniendo en cuenta la definición de impulso generalizado

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = \dot{p}$$

$$= M(q)\ddot{q} + \dot{M}(q)\dot{q}$$

y que la ecuación (4.11) equivale a (4.12), la expresión de e es

$$e = \dot{M}(q)\dot{q} - C(q, \dot{q})\dot{q} - g(q)$$

En la Figura 4.5a se muestra el diagrama de bloques (DB) de la operación matemática del *campo IC* y en la Figura 4.5b el modelo BG completo del manipulador móvil utilizando el campo IC. La energía total del manipulador móvil se representa de este modo a través de un solo almacenador de energía.

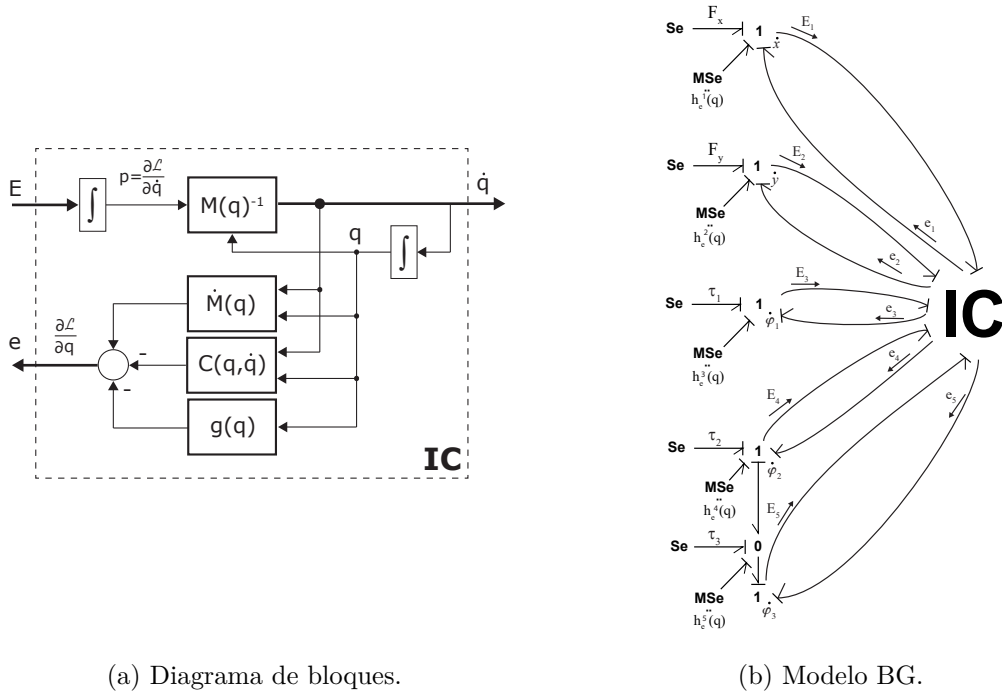


Fig. 4.5 Representación del manipulador móvil con *campo IC*.

Observación 4.9. El vector de fuerzas de gravedad $g(q)$, que en el esquema BG de la Figura 4.4 se modelaba a través de fuentes moduladas de esfuerzo **MSe**, ahora se incorpora en el modelo interno del *campo IC* en línea con lo que estipula la técnica BG, que es que las fuentes de esfuerzo sólo representan fuerzas externas y de control del sistema. ■

Hasta ahora se había visto que la manera de romper con causalidades derivativas era manipulando algebraicamente el BG, agrupando elementos **I** o **C**, tal como se mostró en el capítulo 3. Sin embargo cuando tratamos sistemas mecánicos más complejos, cuyas relaciones geométricas son no lineales, el uso de *campos IC* elimina esta dificultad. Esta ventaja se logra a expensas de invertir la matriz de inercia del sistema, lo que puede implicar mayor costo computacional a la hora de simular el modelo o implementar una ley de control basada en dicho esquema.

Observación 4.10. La representación de la dinámica del manipulador móvil a través del *campo IC* puede verse como un paso intermedio entre el modelo EL y PHS, ya que el *campo IC* incorpora a las variables naturales del modelado EL (q y $\dot{q}$) aquellas correspondientes a las ecuaciones de Hamilton (p). ■

4.4.3 Modelo port-Hamiltoniano

De la definición del momento generalizado como $p := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$ y de la transformación de Legendre se obtienen las siguientes igualdades

- $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \dot{q}$
- $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}$
- $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = \dot{p}$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(q, p) &= p^T \dot{q} - \mathcal{L}(q, \dot{q}) \\ &= \mathcal{T}(q, p) + U(q) \end{aligned} \tag{4.13}$$

es el Hamiltoniano y representa la energía total del manipulador móvil. De esta manera la ecuación (4.11) puede reescribirse en función del momento generalizado p como

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} + \tau + J^T(q)h_e$$

Considerando esta última ecuación y las igualdades mostradas más arriba, se generalizan las ecuaciones de estado y se agregan las ecuaciones de salida particulares, obteniendo

el modelo PHS

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_5 & \mathbf{I}_5 \\ -\mathbf{I}_5 & \mathbf{0}_5 \end{bmatrix}}_{J(\mathbf{x})} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_5 & \mathbf{0}_5 \\ J^T(q) & \mathbf{I}_5 \end{bmatrix}}_{g(\mathbf{x})} u \\ y &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_5 & J(q) \\ \mathbf{0}_5 & \mathbf{I}_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde $\mathbf{x} = [q^T, p^T]^T$ es el vector de estados, $u = [h_e^T, \tau^T]^T$ el vector de fuerzas externas, y $y = [\dot{x}_e^T, \dot{q}^T]^T$ las velocidades de salida colocadas con las entradas u . En forma compacta es

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= J(\mathbf{x}) \nabla H(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) u \\ y &= g(\mathbf{x})^T \nabla H(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

4.4.3.1 Conservación de la Energía

El principio de conservación de la energía [26] enuncia que, en un sistema sin disipación como es el caso del modelo que aquí se trata, el incremento de energía es igual al trabajo suministrado por las fuerzas externas, esto es

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{H}(q, p) &= \frac{\partial^T \mathcal{H}}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial^T \mathcal{H}}{\partial p} \dot{p} \\ &= \frac{\partial^T \mathcal{H}}{\partial q} \dot{q} + \dot{q}^T \left(-\frac{\partial^T \mathcal{H}}{\partial q} + J^T(q) h_e + \tau \right) \\ &= \dot{q}^T (J^T(q) h_e + \tau) \end{aligned}$$

Ahora bien, teniendo en cuenta la definición (4.13) del Hamiltoniano, se cumple que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{T}(q, p) &= \frac{d}{dt} \mathcal{H}(q, p) - \frac{d}{dt} U(q) \\ &= \dot{q}^T (J^T(q) h_e + \tau) - \frac{\partial^T U}{\partial q}(q) \dot{q} \\ &= \dot{q}^T (J^T(q) h_e + \tau - g(q)) \end{aligned} \tag{4.14}$$

la derivada de la energía cinética total con respecto al tiempo se balancea con la potencia generada por todas las fuerzas actuantes en las juntas del manipulador móvil.

A dicha conclusión se llega inspeccionando el esquema BG desarrollado en la Figura 4.4. Como la estructura de interconexión (ver Figura 4.3) no genera ni consume potencia, se satisface que el término derecho de la ecuación (4.14) corresponde a la

potencia entregada por todas las fuentes de esfuerzo, mientras que el término izquierdo equivale a la potencia (derivada de la energía) de los elementos almacenadores de energía cinética **I**. Los términos de fuerzas centrífugas y de Coriolis están incluidos implícitamente en la variación temporal de la matriz de masa $M(q)$.

4.5 Base Móvil

En el capítulo anterior se desarrolló y analizó el modelo cinemático y dinámico de una base omnidireccional. En esta sección buscaremos incorporar dicho modelo al del manipulador móvil desarrollado en este capítulo.

4.5.1 EL

Un manipulador móvil puede tener bases con distintos tipos y cantidad de ruedas, ergo, diversos tipos de locomociones. Consideremos el tipo de base vista en el capítulo anterior. La dinámica de las ruedas junto con las restricciones cinemáticas de la base del manipulador móvil, no tenida en cuenta hasta el momento, pueden ser incorporadas al modelo mediante el método por sustitución, como se vio en el capítulo 3, a través de las matrices

$$M_r = \begin{bmatrix} G(q)I_r G(q)^T & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad C_r(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} G(q)I_r \dot{G}(q)^T & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Así, incorporando dichas matrices a la ecuación (4.12), se llega al modelo dinámico extendido

$$M_t(q)\ddot{q} + C_t(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = S_t(q)\tau_t + J^T(q)h_e \quad (4.16)$$

donde $\tau_t = [\tau_{r1}, \tau_{r2}, \tau_{r3}, \tau_2, \tau_3]^T$ agrupa a los torques aplicados a las ruedas y al brazo manipulador, y las matrices

$$M_t(q) = M_r + M(q) \quad C_t(q, \dot{q}) = C_r(q, \dot{q}) + C(q, \dot{q}) \quad S_t(q) = \begin{bmatrix} G(q) & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

incorporan la dinámica y restricciones de las ruedas.

4.5.2 BG

El esquema BG con la dinámica de las ruedas puede obtenerse incorporando en el esquema de la Figura 4.4 el modelo de la base móvil detallado en la Figura 3.7, acoplado este último al esquema BG del brazo manipulador a través del enlace de las fuerzas externas de la base. En ese caso no se debe construir ni la velocidad de traslación $\dot{p}_{l3}$ ni la de rotación ω_3 , y la fuente de esfuerzo **Se** de las fuerzas de la base se reemplaza por un vínculo **1** que permite definir a las velocidades del CM de la base

con convención positiva entrante sobre el brazo manipulador, como se muestra en la Figura 4.6.

Como se aprecia en el BG de la Figura 4.6, las velocidades de traslación y rotación de la base (definidas como el vector $\dot{q}_B = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{\varphi}_1]^T$) quedan determinadas por el modelo de la base **MB**, que agrupa a su vez las inercias tanto del chasis como de las ruedas.

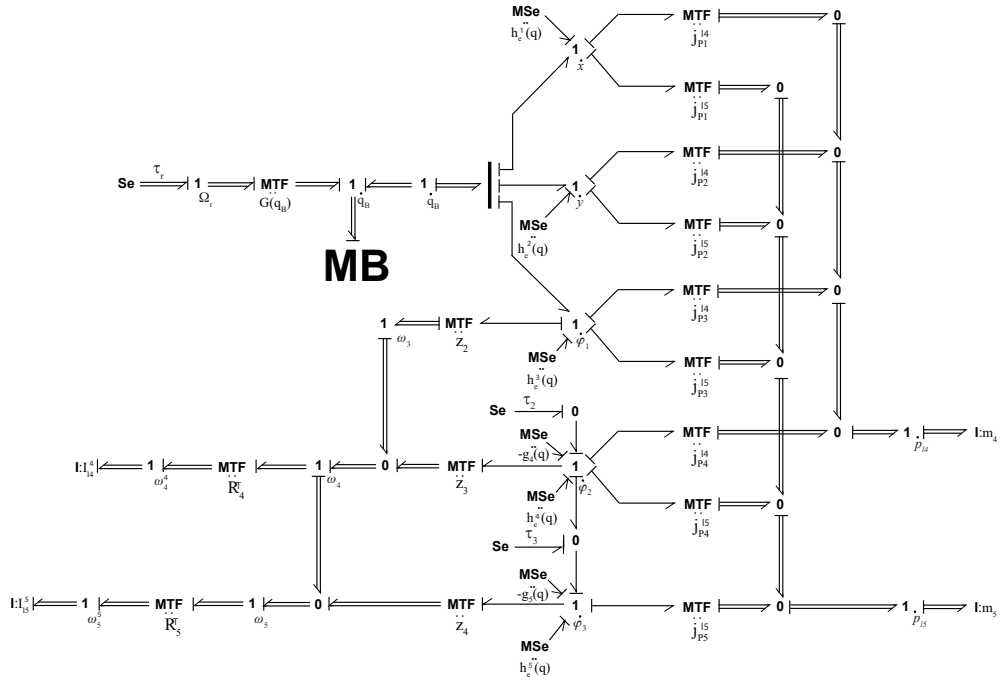


Fig. 4.6 Esquema BG del manipulador móvil.

Observación 4.11. Esta representación del modelo tiene la ventaja de que la dinámica de la base se representa por separado de la del manipulador, de modo que si deseara modelar un manipulador móvil con una base con otro tipo de locomoción (diferencial por ejemplo), sólo habría que reemplazar el modelo BG de la base. ■

La dinámica de las ruedas puede modelarse también en los esquemas presentados en la Figura 4.5, incorporando los torques de control de las ruedas al modelo y obteniendo el esquema de la Figura 4.7. Notar que las matrices que rigen el comportamiento del *campo IC* incorporan la dinámica de las ruedas.

Finalmente, en la Figura 4.8 presentamos un modelo compacto que nos será de utilidad en los capítulos siguientes. El mismo se obtiene agrupando toda la dinámica del manipulador móvil en un sólo elemento BG definido ad hoc y denominado **MM**, mientras que las relaciones cinemáticas quedan explicitadas por fuera de dicho elemento.

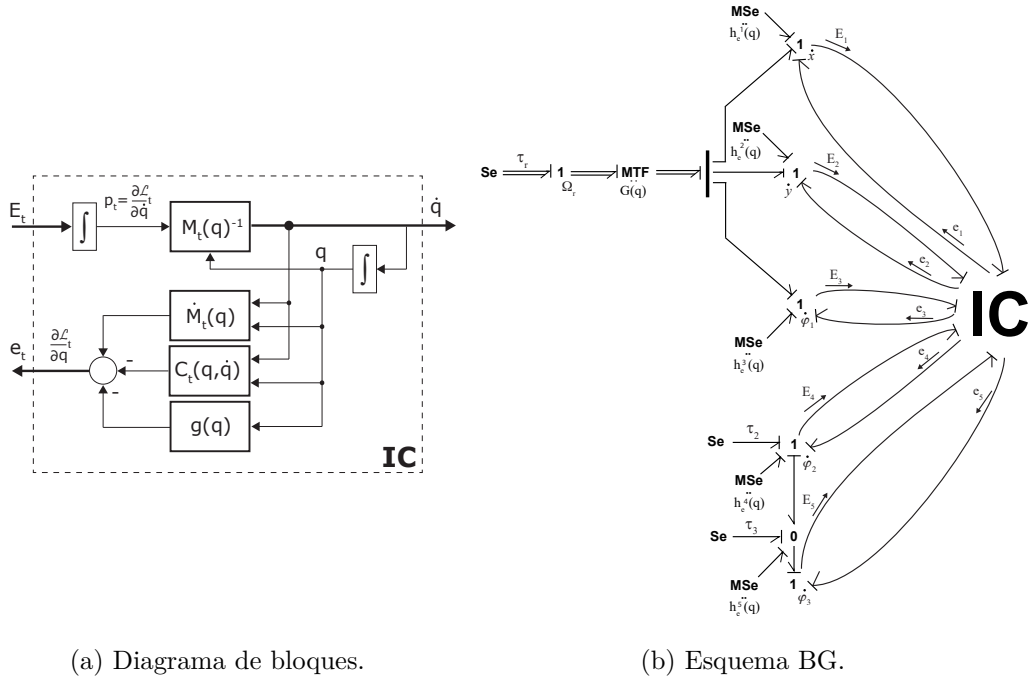
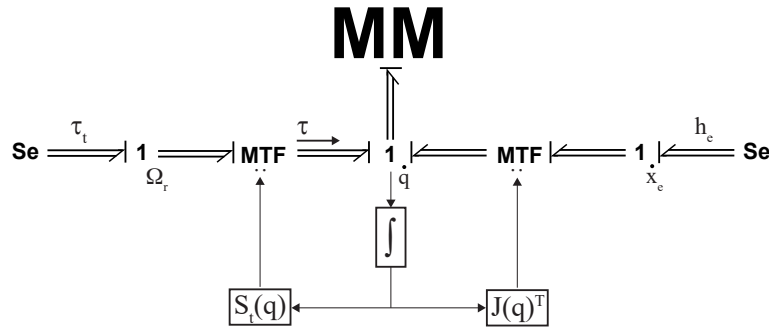
Fig. 4.7 Representación del manipulador móvil con *campo IC*.

Fig. 4.8 Modelo BG matricial compacto del manipulador móvil.

Observación 4.12. El modelo de la Figura 4.8 permite explicitar todas las velocidades del manipulador móvil, i.e., (i) las velocidades de las juntas $\dot{q}$, (ii) la velocidad del efector final $\dot{x}_e$, (iii) el vector de velocidades $\Omega_r = [\Omega_{r1}, \Omega_{r2}, \Omega_{r3}, \dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_3]^T$ que contiene entre sus elementos las velocidades de las ruedas. ■

4.5.3 PHS

El modelo PHS con la dinámica de las ruedas incorporadas se obtiene representando la energía total del sistema a través del Hamiltoniano

$$H_t(q, p_t) = \frac{1}{2} p_t^T M_t(q)^{-1} p_t$$

donde se redefinió el momento generalizado como

$$p_t = M_t(q)\dot{q}$$

De esta manera, como $\frac{\partial H_t}{\partial p_t} = \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}$, el modelo PHS es

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p}_t \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_5 & \mathbf{I}_5 \\ -\mathbf{I}_5 & -C_r(q, \dot{q}) \end{bmatrix}}_{J_t(x_t)} \begin{bmatrix} \frac{\partial H_t}{\partial q} \\ \frac{\partial H_t}{\partial p_t} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_5 & \mathbf{0}_5 \\ J^T(q) & S_t(q) \end{bmatrix}}_{g_t(x_t)} u_t \\ y &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_5 & J(q) \\ \mathbf{0}_5 & S_t(q)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H_t}{\partial q} \\ \frac{\partial H_t}{\partial p_t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde $x_t = [q^T, p_t^T]^T$ es el vector de estados, $u_t = [h_e^T, \tau_t^T]^T$ el vector de fuerzas externos, y $y_t = [\dot{x}_e^T, \Omega_r^T]^T$ las velocidades de salida colocadas. Notar que la presencia del subbloque $C_r(q, \dot{q})$ en la matriz de interconexión $J_t(x_t)$ se debe a las restricciones cinemáticas presentes en la base, como se vio en el capítulo anterior. En forma compacta es

$$\begin{aligned} \dot{x}_t &= J_t(x_t) \nabla H_t(x_t) + g_t(x_t) u_t \\ y_t &= g_t(x_t)^T \nabla H_t(x_t) \end{aligned}$$

donde se cumple la propiedad de antisimetría de $J_t(x_t)$ y que la potencia entregada es $\mathcal{P}(t) = y_t^T u_t$.

4.6 Conclusiones

En este capítulo se desarrollaron los modelos cinemáticos y dinámicos de un manipulador móvil con dos metodologías diferentes, modelos BG y la más habitualmente empleada en Robótica, y se vincularon de manera de aprovechar la propiedades de uno en el otro.

Se comenzó vinculando el procedimiento clásico de DH con BG utilizando el primero para construir la estructura de interconexión del segundo. La técnica BG permitió representar en un sólo modelo, y visualizar explícitamente, tanto la dinámica del manipulador móvil como así también todas las velocidades existentes en el mismo: la del efector final, las velocidades generalizadas y las velocidades de las ruedas.

Luego, con la metodología BG se pudo también trabajar de forma modular, de manera de poder acoplar fácilmente y de manera sencilla los distintos subsistemas que componen al manipulador móvil: motores, base y manipulador. De este modo, si

eventualmente se cambiara la base móvil, sólo habría que reemplazar el modelo de la misma sin necesidad de reformar todo el esquema BG. Esto representa una ventaja sobre las representaciones clásicas de EL y PHS, donde en tal caso habría que realizar una manipulación de las ecuaciones matemáticas que podría resultar tediosa.

Se manipularon y analizaron en detalle todo los modelos BG, resaltando, comparando, y comprobando propiedades de la mecánica clásica en cada uno. Además, se presentaron modelos compactos que nos serán de utilidad para simulación y síntesis de las leyes de control en los capítulos posteriores.

Se mostró satisfactoriamente que para la obtención del modelo cinemático la base puede ser considerada como una conjunto de dos juntas prismáticas y una junta de revolución, mientras que para el modelo dinámico se la puede considerar como un cuerpo rígido. Para tratar la inversión cinemática se mostró el procedimiento para obtener las expresiones de las aceleraciones del espacio nulo y se concluyó que el uso de una base móvil eliminaba las clásicas singularidades que tiene un brazo antropomorfo.

Dos resultados, utilizando la metodología desarrollada para la obtención de modelos dinámicos de los cuerpos rígidos de MM, fueron publicados en [5] [6]. En sendos trabajos se presentaron modelos dinámicos EL, BG y PHS, de un manipulador móvil vertical de tres eslabones en el primero, y de un manipulador móvil horizontal de cuatro eslabones en el segundo. La convención DH para la obtención del modelo de cinemática directa, se implementó en un manipulador KUKA-LBR iiwa 14 que tenía una caja sujeta al efector final. Los resultados de dicho trabajo fueron publicados en [8]. En [7] se presentó el modelado en campos IC de un manipulador móvil horizontal de dos eslabones.

Bibliografía

Los modelos cinemáticos directos, diferenciales y dinámicos EL se basaron en la metodología desarrollada en [2]. Los mismos contenidos con distintos niveles de profundidad pueden encontrarse en varios libros de robótica de autores reconocidos [67] [68] [69]. La convención DH publicada originalmente en [70] tiene otra versión (MDH, Modified Denavit Hartenberg) que se utiliza sobre todo en manipuladores con cadena cinemática cerrada [71]. En [72] se presenta otra forma de representar la cinemática directa de un manipulador, denominada fórmula de Productos Exponenciales (PoE, Product of Exponentials), cuya principal ventaja sobre la convención DH radica en el hecho de que no es necesario la elección de marcos de referencias. Otra representación de la orientación del efector final más apta para el control se puede encontrar en [73]. Un análisis detallado de la redundancia y el espacio nulo del manipulador se desarrolla en [74]. El concepto de Jacobiano extendido en el cómputo de la cinemática inversa para el control de manipuladores redundantes se halla en [75] [76]. En [65] se presenta una estrategia para el cómputo del gradiente de la función objetivo secundario para el

caso de manipuladores con altos grados de redundancia. Ver el capítulo 9 de [44] para un desarrollo extendido del concepto de campo IC . La utilización del concepto de conservación de energía en sistemas Hamiltonianos se trata de manera integral en el capítulo 4 de [54]. Un desarrollo detallado de máquinas eléctricas se puede encontrar en [77].

Capítulo 5

Sistemas Multiagentes

En este capítulo se comienzan presentando modelos dinámicos de un sistema multiagente a lazo abierto, compuesto por bases y manipuladores móviles, utilizando distintas metodologías como BG, EL y PHS. Luego, se realiza una breve revisión de los conceptos, definiciones y propiedades relativas a la teoría de grafos para la modelización, análisis y posterior control del sistema multiagente. Un sistema multiagente no trivial queda definido cuando hay interacciones entre los agentes. De este modo, recurriendo a los conceptos de la teoría de grafos, se caracteriza a los agentes como vértices y a las interacciones entre ellos como aristas que componen un grafo. Seguidamente se presenta la definición de la matriz de formación $\mathcal{F}(r)$ que permite vincular las posiciones y distancias entre agentes. Se analizan las propiedades de dicho mapeo, como rango, espacio nulo y holonomicidad, y se demuestran una serie de proposiciones que serán de gran utilidad a la hora de implementar las leyes de control. Luego, a partir de plantear una analogía entre la matriz de formación con el Jacobiano de los brazos robóticos, se obtienen las expresiones de la pseudo-inversa e inversa generalizada de la matriz de formación. Finalmente, se presentan las conclusiones y contribuciones del capítulo.

5.1 Introducción

La rápida expansión de robots autónomos a nuestro alrededor, no solo ha planteado la posibilidad de mejorar su desempeño, sino también de ampliar sus alcances, mediante la comunicación y colaboración entre múltiples robots. En este contexto, surgen los llamados sistemas multiagentes, los cuales presentan muchas características interesantes como la heterogeneidad de acciones disponibles, la tolerancia ante fallos y una mayor eficiencia [78].

El modelado de la dinámica de los agentes que componen un MAS puede realizarse utilizando la metodología vista hasta aquí, i.e., EL, PHS y BG. Por su parte, la topología de interacción de un MAS se puede modelar naturalmente mediante grafos. Específicamente, los agentes pueden representarse como vértices de un grafo y las

interacciones entre ellos, como el sensado y la comunicación, a través de las aristas del grafo [79].

5.2 Modelado

En las secciones sucesivas se considerará un MAS compuesto por n agentes a lazo abierto, es decir, con las acciones de control (torques, fuerzas) no especificadas, donde el subíndice i representará al i –ésimo agente, siendo $i = 1, \dots, n$. En el caso de que esta representación implique una inconsistencia con la terminología utilizada en los capítulos anteriores se utilizará el superíndice i . El subíndice l representará la dimensión de las coordenadas generalizadas mientras que el subíndice f la dimensión de las fuerzas externas. Por ejemplo, en el caso de la base omnidireccional es $l = 3$ y $f = 3$ mientras que en el manipulador móvil es $l = 5$ y $f = 6$.

5.2.1 Modelo Punto Material

A continuación se presenta la representación en el espacio de estados de un agente modelado como punto material en el plano.

$$\begin{cases} \dot{r}_i &= M_i^{-1} p_i \\ \dot{p}_i &= u_i \end{cases} \quad (5.1)$$

donde $r_i = [x_i, y_i]^T$ es la posición en el plano del punto material, $p_i = [p_{ix}, p_{iy}]^T$ la cantidad de movimiento, $M_i = \text{diag}\{[m_i, m_i]\}$ su matriz de masa y $u = [u_{ix}, u_{iy}]^T$ la fuerza de control.

Consideremos ahora n agentes, modelados como puntos de masa materiales en el plano cuya dinámica viene dada por (5.1). La dinámica de los mismos se puede caracterizar como

$$\begin{cases} \dot{r} &= M^{-1} p \\ \dot{p} &= u \end{cases} \quad (5.2)$$

donde $r = [r_1^T, \dots, r_n^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$, $p = [p_1^T, \dots, p_n^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$, $u = [u_1^T, \dots, u_n^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ y $M = \text{diag}\{[M_1, \dots, M_n]\}$. La misma dinámica expresada en modelo PHS es

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{p} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_2 & \mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{I}_2 & \mathbf{0}_2 \end{bmatrix} \nabla H + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_2 & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \nabla H \end{cases}$$

donde $y = \dot{r}$ es la salida y

$$H(r, p) = \frac{1}{2} p^T M^{-1} p$$

el Hamiltoniano que equivale a la energía cinética total del MAS. Por último, los correspondientes modelos BG y DB se muestran en las Figuras 5.1a y 5.1b, respectivamente.

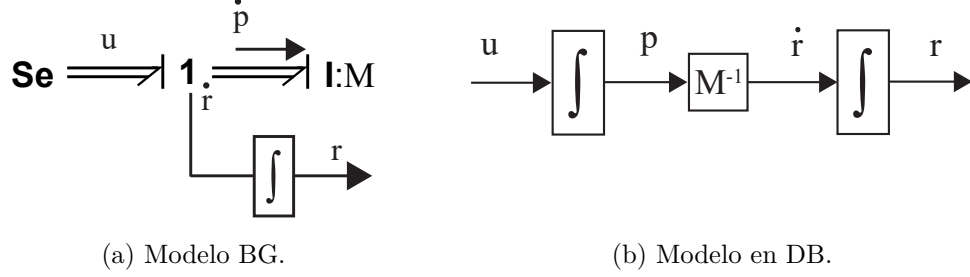


Fig. 5.1 MAS con agentes modelados como puntos materiales en el plano.

5.2.2 Modelo de Bases y Manipuladores Móviles

En esta sección se presenta el modelo dinámico de un MAS utilizando las metodologías vistas en los capítulos anteriores, considerando que el mismo puede estar compuesto tanto de BM como de MM, a los que de aquí en adelante se denominará de manera indistinta como robots móviles, o simplemente, agentes.

5.2.2.1 Bond Graph

El modelo BG de un robot móvil general se muestra en la Figura 5.2a, donde el nuevo elemento BG $\mathbf{A}$ puede expresar indistintamente tanto la dinámica del elemento $\mathbf{MB}$ del capítulo 3 (Figura 3.7) como la del $\mathbf{MM}$ del capítulo 4 (Figura 4.8). Se consideran que las fuerzas de control τ_i y las fuerzas externas h_{ei} actúan en las coordenadas generalizadas q_i a través de las transformaciones $S_i(q_i)$ y $J_i(q_i)^T$, respectivamente.

Nota 5.1. Para el caso particular en que el elemento $\mathbf{A}$ describa la dinámica de la base omnidireccional, se cumple que

- $S_i(q_i) = G_i(q_i)$
- $J_i(q_i) = \mathbf{I}_3$
- $\dot{x}_{ei} = \dot{q}_i$

El modelo BG de un MAS compuesto por n robots móviles se ilustra en la Figura 5.2b, donde

- $\tau = [\tau_1^T, \dots, \tau_n^T]^T \in \mathbb{R}^{ln}$
- $h_e = [h_{e1}^T, \dots, h_{en}^T]^T \in \mathbb{R}^{fn}$

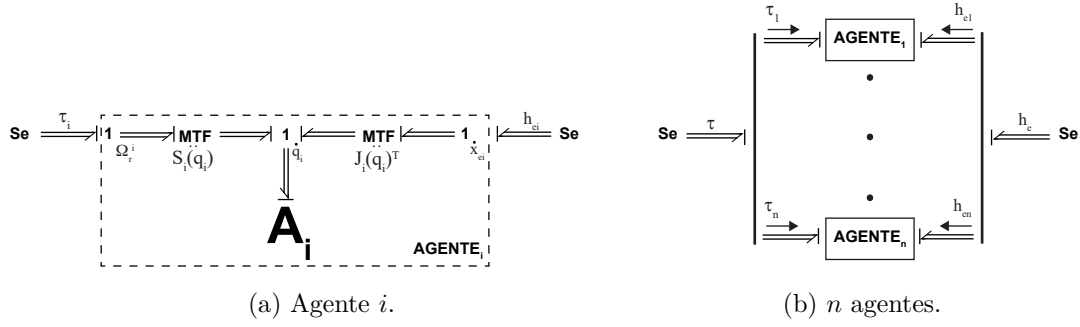


Fig. 5.2 Modelo BG de un MAS.

5.2.2.2 Ecuaciones de Euler Lagrange

El modelo dinámico en ecuaciones EL de un robot móvil i viene dado en su forma genérica como

$$M_i(q_i)\ddot{q}_i + C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i + g_i(q_i) = S_i(q_i)\tau_i + J_i(q_i)^T h_{ei} \quad (5.3)$$

donde $M_i(q_i)$ es la matriz de inercia del agente i , $C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i$ agrupa las fuerzas centrífugas y de coriolis, $g_i(q_i)$ las fuerzas de gravedad, τ_i es la entrada de control y h_{ei} son las fuerzas externas ejercidas por el entorno.

Nota 5.2. Si el agente es una base móvil omnidireccional, de la dinámica expresada en (3.7), se deduce que $g_i(q_i) = \mathbf{0}_{3 \times 1}$.

El modelo dinámico de un MAS de n robots, expresado en ecuaciones de EL, se expresa de la misma forma matricial que (5.3) con la particularidad que ahora las matrices y vectores engloban la totalidad de los agentes, esto es

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = S(q)\tau + J(q)^T h_e \quad (5.4)$$

donde

- $q = [q_1^T, \dots, q_n^T]^T \in \mathbb{R}^{ln}$
- $M(q) = \text{diag}\{[M_1(q_1), \dots, M_n(q_n)]\}$
- $C(q, \dot{q}) = \text{diag}\{[C_1(q_1, \dot{q}_1), \dots, C_n(q_n, \dot{q}_n)]\}$
- $g(q) = [g_1(q_1)^T, \dots, g_n(q_n)^T]^T$
- $S(q) = \text{diag}\{[S_1(q_1), \dots, S_n(q_n)]\}$
- $J(q) = \text{diag}\{[J_1(q_1), \dots, J_n(q_n)]\}$

5.2.2.3 Sistema port-Hamiltoniano

El modelo dinámico de un agente i en ecuaciones de Hamilton en su forma general viene dada por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{q}_i \\ \dot{p}_i \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_l & \mathbf{I}_l \\ -\mathbf{I}_l & J_{22}(q_i, p_i) \end{bmatrix}}_{J(x_i)} \begin{bmatrix} \frac{\partial H_i}{\partial q_i} \\ \frac{\partial H_i}{\partial p_i} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{l \times f} & \mathbf{0}_l \\ J_i(q_i)^T & S_i(q_i) \end{bmatrix}}_{g(x_i)} u_i \\ y &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{f \times l} & J_i(q_i) \\ \mathbf{0}_l & S_i(q_i)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H_i}{\partial q_i} \\ \frac{\partial H_i}{\partial p_i} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde $x_i = [q_i^T, p_i^T]^T$ representa el estado, $p_i = M_i \dot{q}_i$ la cantidad de movimiento, $u_i = [h_{ei}^T, \tau_i^T]^T$ las entradas externas, $y_i = [\dot{x}_{ei}^T, \Omega_r^i]^T$ las velocidades de salida y

$$H_i(x_i) = \frac{1}{2} p_i^T M_i^{-1} p_i$$

el Hamiltoniano del agente i .

Nota 5.3. Si el agente es una base móvil omnidireccional es $J_{22}(q_i, p_i) = -C_i(q_i, \dot{q}_i)$ (ver ecuación (3.8)) mientras que si es un manipulador móvil $J_{22}(q_i, p_i) = -C_{ri}(q_i, \dot{q}_i)$ (ver ecuación (4.15)).

La dinámica de n agentes se puede expresar de manera compacta en formato PHS como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{ln} & \mathbf{I}_{ln} \\ -\mathbf{I}_{ln} & \begin{matrix} J_{22}(q_1, p_1) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & J_{22}(q_n, p_n) \end{matrix} \end{bmatrix}}_{J(x)} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{ln \times fn} & \mathbf{0}_{ln} \\ J(q)^T & S(q) \end{bmatrix}}_{g(x)} u \\ y &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{fn \times ln} & J(q) \\ \mathbf{0}_{ln} & S(q)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde

- $x = [q^T, p^T]^T \in \mathbb{R}^{2ln}$
- $p = [p_1^T, \dots, p_n^T]^T \in \mathbb{R}^{ln}$

- $u = \begin{bmatrix} h_e^T & \tau^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{2ln}$

- $y = \begin{bmatrix} \dot{x}_e^T & \Omega_r^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{2ln}$

siendo $\dot{x}_e = \begin{bmatrix} \dot{x}_{e1}^T & \dots & \dot{x}_{en}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{ln}$ y $\Omega_r = \begin{bmatrix} \Omega_{r1}^T & \dots & \Omega_{rn}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{ln}$. Para el caso de la base móvil es $\dot{x}_e = \dot{q}$. El Hamiltoniano del MAS es

$$\begin{aligned} H(x) &= \sum_{i=1}^n H_i(x_i) \\ &= \frac{1}{2} p^T M^{-1} p \end{aligned}$$

y representa la energía cinética total del sistema. El modelo PHS en forma matricial es

$$\begin{aligned} \dot{x} &= J(x) \nabla H(x) + g(x) u \\ y &= g(x)^T \nabla H(x) \end{aligned}$$

5.2.3 Coordenadas s

Las coordenadas s agrupan todas las variables de las BM y MM que no sean las posiciones de las mismas. Dicho de otra manera, para una base omnidireccional o un manipulador móvil dichas coordenadas son $s = [\varphi_1]$ o $s = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]^T$, respectivamente. Para un MAS el vector de coordenadas s es $s = [s_1^T, \dots, s_n^T]^T \in \mathbb{R}^{n(l-2)}$.

De este modo, de aquí en adelante diferenciaremos la posición r_i de una base i en el plano, respecto a un sistema de referencia global, del resto de las coordenadas s_i , y las expresaremos en función de las coordenadas generalizadas q_i a través de la relación

$$\begin{bmatrix} r_i \\ s_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_i \\ \Pi_i \end{bmatrix} q_i$$

donde Λ_i y Π_i pueden adoptar los valores

$$\Lambda_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Pi_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Pi_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

según el agente sea una base omnidireccional o un manipulador móvil, respectivamente. Para el caso de un MAS con n agentes las posiciones r de todas las bases y el resto de

las coordenadas s de los robots móviles se pueden expresar como

$$\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda \\ \Pi \end{bmatrix} q$$

donde

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & \cdots & \mathbf{0}_{2 \times l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{2 \times l} & \cdots & \Lambda_n \end{bmatrix} \quad \Pi = \begin{bmatrix} \Pi_1 & \cdots & \mathbf{0}_{l-2 \times l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{l-2 \times l} & \cdots & \Pi_n \end{bmatrix}$$

tienen dimensión $(2n \times ln)$ y $(n(l-2) \times ln)$, respectivamente.

5.3 Resumen de la Teoría de Grafos

Un grafo se define como un conjunto de vértices y aristas, relacionados entre sí. Se representa como $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ donde $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, n\}$ son los vértices y $\mathcal{E} = \{1, 2, \dots, m\}$ las aristas, siendo $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$, $|\mathcal{V}| = n$ y $|\mathcal{E}| = m$. El grafo $\mathcal{H}$ es un *subgrafo* de $\mathcal{G}$ si $\mathcal{V}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{G})$ y $\mathcal{E}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{G})$. Una *arista directa* representa una relación direccional entre dos vértices distintos i y j , i.e., $(i, j) \in \mathcal{E}$. Un grafo $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ que contiene todas sus *aristas directas* se denomina grafo directo. Si en cambio la arista no representa ninguna dirección y sólo una relación simétrica, se denomina *arista indirecta*. Un grafo $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ que contiene todas sus aristas indirectas se denomina grafo indirecto.

En un grafo *directo* $\mathcal{G}$, un vértice i es vecino de otro j si existe una arista con sentido de i a j . En cambio en un grafo *indirecto*, como las aristas no tienen sentido, si un vértice i es vecino de otro j también se cumple el recíproco, i.e., j es vecino de i . El conjunto de vecinos de un vértice j se define como $\mathcal{N}_j = \{i \in \mathcal{V} : (i, j) \in \mathcal{E}\}$ y el *grado* d_i de un vértice i se define como la cardinalidad del conjunto $\mathcal{N}_i$, o sea el número de sus vértices vecinos, i.e., $d_i = |\mathcal{N}_i|$. Si todos los vértices tienen el mismo grado, el grafo se denomina *regular*.

En un grafo indirecto $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un *camino* de largo r , desde el vértice i hasta el vértice j , es una secuencia de $r + 1$ vértices distintos que empieza en i y termina en j , de manera que todos los vértices consecutivos son vecinos. Si $i = j$, dicho camino se denomina *ciclo*. En un ciclo cada vértice tiene al menos dos vecinos. Si existe un camino entre dos vértices cualesquiera, entonces el grafo se denomina *conexo*, sino es *disconexo*. A un grafo conexo se lo denomina *árbol* si no contiene ciclos.

5.3.1 Matrices

Una de las muchas matrices asociadas a la definición de un grafo $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$, es la matriz de incidencia D de dimensión $(n \times m)$. Dado un determinado grafo, si se le asigna un sentido arbitrario a todas las aristas de manera que uno de sus extremos (asociado a un vértice) sea positivo y el otro negativo, se pueden definir los elementos de la matriz

de incidencia D como

$$D_{ik} := \begin{cases} 1 & \text{si el v\u00e9rtice } i \text{ es el extremo positivo de la arista } k \\ -1 & \text{si el v\u00e9rtice } i \text{ es el extremo negativo de la arista } k \\ 0 & \text{si el v\u00e9rtice no pertenece a la arista } k \end{cases}$$

donde D_{ik} es el elemento de la fila i y columna k de la matriz D .

La matriz de Laplace de un grafo $\mathcal{G}$ es una matriz de dimensi\u00f3n $(n \times n)$ definida como

$$L_{ij} := \begin{cases} |\mathcal{N}_i| & \text{si } j = i \\ -1 & \text{si } j \in \mathcal{N}_i \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

La matriz de adyacencia A de un grafo indirecto $\mathcal{G}$ es una matriz de dimensi\u00f3n $(n \times n)$ definida como

$$A_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si } (j, i) \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

Por \u00faltimo, existe la matriz de grados $\mathcal{D}$ de dimensi\u00f3n $(n \times n)$ cuyos elementos de la diagonal son los grados de cada v\u00e9rtice, i.e.,

$$\mathcal{D}_{ij} := \begin{cases} |\mathcal{N}_i| & \text{si } j = i \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

Ejemplo 5.1. Sea el grafo directo $\mathcal{G}$ de la Figura 5.3:

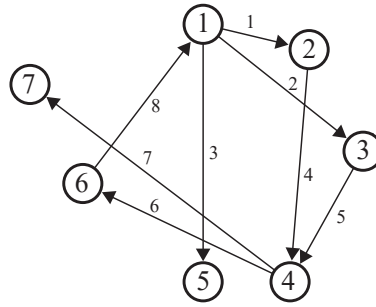


Fig. 5.3 Grafo $\mathcal{G}$: $n = 7$, $m = 8$.

El conjunto de v\u00e9rtices viene dado por $\mathcal{V} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y el conjunto de aristas por $\mathcal{E} = \{(1, 2); (1, 3); (1, 5); (2, 4); (3, 4); (4, 6); (4, 7); (6, 1)\}$. Como hay un camino entre cada uno de los v\u00e9rtices, el grafo es conexo. Sin embargo, como el grafo $\mathcal{G}$ contiene los ciclos $(1, 2, 4, 6, 1)$ y $(1, 3, 4, 6, 1)$, no es un grafo \u00e1rbol. Las matrices de

incidencia D , de Laplace L , de adyacencia A y de grado $\mathcal{D}$ del grafo $\mathcal{G}$ son:

$$D = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathcal{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.3.2 Propiedades y Definiciones

La suma de la matriz de adyacencia y la matriz de Laplace de un grafo $\mathcal{G}$ es igual a la matriz de grados, i.e.,

$$\mathcal{D} = A + L$$

Dado un grafo directo $\mathcal{G}$, la matriz de incidencia D posee las siguientes propiedades:

- 1 $\text{rank}(D) \leq n - 1$
- 2 $\text{rank}(D) = n - 1$ sí y sólo sí $\mathcal{G}$ es conexo
- 3 Si $\mathcal{G}$ no posee ciclos entonces las columnas de D son linealmente independientes

Definición 5.1. *Un grafo se denomina rígido si, en una determinada configuración, para cualquier movimiento de un vértice se preserva la distancia entre dos vértices cualesquiera. Un grafo es mínimamente rígido si es rígido y no existe un grafo rígido con los mismos vértices pero con menos aristas [80].*

La definición matemática de un grafo mínimamente rígido es (ver definición de grafo de Laman en [81]):

Definición 5.2. *Un grafo $\mathcal{G}$ con $n \geq 2$ vértices es mínimamente rígido sí y sólo si*

- (1) *Tiene $2n - 3$ aristas, y*
- (2) *Cada subconjunto de $n' \leq n$ vértices no tiene más que $2n' - 3$ aristas.*

Ejemplo 5.2. Un ejemplo de los distintos tipos de configuraciones posibles para un grafo $\mathcal{G}$ conexo y directo, con conjunto de vértices $\mathcal{V} = \{1, 2, 3, 4\}$, puede observarse en la Figura 5.4.

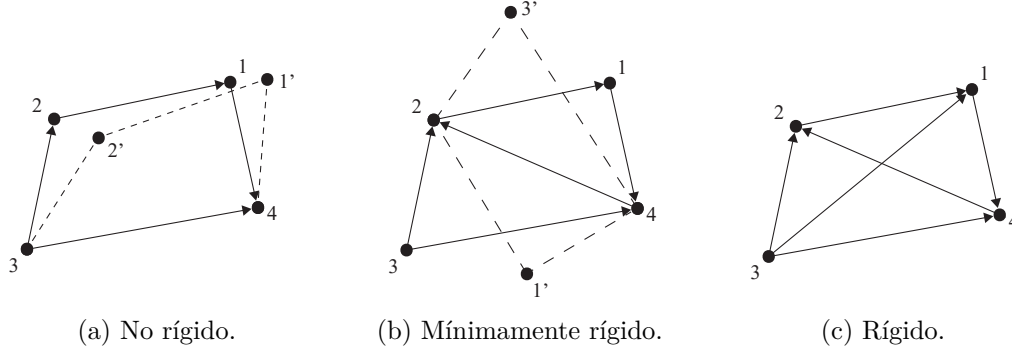


Fig. 5.4 Grafo directo $\mathcal{G}$ con $n = 4$.

En el Grafo de la Figura 5.4a, que tiene $4 < 2n - 3$ aristas, se puede observar que los vértices 1 y 2 pueden moverse en el plano (como se muestra en la línea punteada) conservando las longitudes de las aristas pero variando las distancias con otros vértices, por lo que no es rígido. Si se añade una arista, se tiene el Grafo de la Figura 5.4b, donde se cumple que la cantidad de aristas es $5 = 2n - 3$. En este caso, si bien los vértices 1 y 3 puede tener dos posiciones distintas (como se muestra en la línea punteada), para una determinada configuración el paso de una a la otra no se puede realizar sin modificar la longitud de las aristas, por lo que el grafo es rígido. Además, es mínimamente rígido porque en el caso de que se le quite una arista pierde dicha propiedad. Finalmente, el Grafo mostrado en la Figura 5.4c tiene $6 > 2n - 3$ aristas, lo que lo hace rígido.

5.4 Matriz de Formación

La interacción entre robots móviles en un esquema multiagente puede ser naturalmente descrita por los conceptos asociados a la teoría de grafos [82], considerando que existen las siguientes correspondencias entre los robots móviles y un grafo $\mathcal{G}$:

- Entre la posición del CM de las bases y la posición de los vértices.
- Entre la existencia de interacción entre las bases (por ejemplo el intercambios de valores de fuerzas o información de sensado) y las aristas.

La ubicación de un vértice en el plano puede expresarse de varias formas distintas (ver Figura 5.5): (i) La posición del mismo respecto a un sistema global fijo, (ii) el desplazamiento con respecto a otros vértices, (iii) la distancia entre dos de ellos.

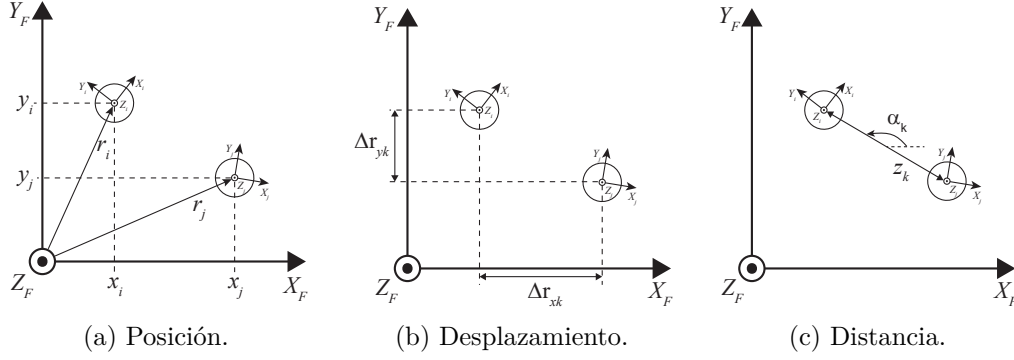


Fig. 5.5 Modos de representar la ubicación de dos vértices vecinos i y j en el plano.

En esta sección repasaremos las distintas definiciones e introduciremos una forma de representar las distancias entre vértices que será útil para sintetizar las leyes de control.

Sea $r_i = [x_i, y_i]^T$ y $r_j = [x_j, y_j]^T$ la posición en el plano de los vértices i y j , respectivamente, respecto a un sistema de coordenadas global fijo (Figura 5.5a). El desplazamiento entre dos vértices vecinos i y j , respecto a un sistema de coordenadas global (Figura 5.5b), se define como

$$\begin{aligned}
 \Delta r_k &:= r_i - r_j \\
 &= \begin{bmatrix} x_i - x_j \\ y_i - y_j \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \Delta r_{xk} \\ \Delta r_{yk} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Por su parte, la distancia z_k se define como la norma euclídea de la diferencia de posición entre dos vértices vecinos i y j (Figura 5.5c), esto es

$$z_k := \|r_i - r_j\| \tag{5.6}$$

En esta tesis también consideraremos el ángulo α_k que forma la arista k con el eje horizontal X_F , de modo que la distancia z_k se puede expresar en función del mismo y del desplazamiento Δr_k como

$$\begin{aligned}
 z_k &= \|\Delta r_k\| \\
 &= \sqrt{\Delta r_{xk}^2 + \Delta r_{yk}^2} \\
 &= \frac{\Delta r_{xk}^2 + \Delta r_{yk}^2}{\sqrt{\Delta r_{xk}^2 + \Delta r_{yk}^2}} \\
 &= \frac{\Delta r_{xk}}{z_k} \Delta r_{xk} + \frac{\Delta r_{yk}}{z_k} \Delta r_{yk} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \alpha_k & \sin \alpha_k \end{bmatrix} \Delta r_k
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Por su parte, el ángulo α_k satisface

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \cos \alpha_k \\ \sin \alpha_k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\Delta r_{xk}}{z_k} \\ \frac{\Delta r_{yk}}{z_k} \end{bmatrix} \\ &= \frac{\Delta r_k}{\|\Delta r_k\|} \end{aligned}$$

Todas las formas de representar la distancia euclídea en (5.7) son equivalentes y se usarán unas u otras según el objetivo de la aplicación. En la próxima sección expresamos los desplazamientos utilizando los conceptos de la teoría de grafos, y presentamos una forma de expresar la distancia entre dos vértices vecinos i y j que forma parte de las contribuciones de esta tesis.

5.4.1 Cálculo de la Expresión

De la ecuación (5.5) se observa que el desplazamiento Δr_k entre dos vértices vecinos i y j se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \Delta r_k &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i \\ r_j \end{bmatrix} \\ &= \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_2 \right) \begin{bmatrix} r_i \\ r_j \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde el operador $\otimes$ representa el producto de Kronecker. Si el vértice i es el extremo positivo de la arista k de un Grafo directo $\mathcal{G}$ de n vértices y m aristas, el desplazamiento entre todos los vértices vecinos $\Delta r = [\Delta r_1^T, \dots, \Delta r_m^T]^T \in \mathbb{R}^{2m}$ se puede expresar en función de la matriz de incidencia D como [83]

$$\Delta r = \left(D^T \otimes \mathbf{I}_2 \right) r$$

donde $r = [r_1^T, \dots, r_n^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$.

Teniendo en cuenta esta representación, ahora presentamos otra forma de expresar la distancia z_k entre dos vértices vecinos i y j , alternativa a las de la ecuación (5.7), que es parte de las contribuciones de esta tesis. Operando matemáticamente con la definición de z_k , vemos que la misma se puede reescribir como

$$z_k = \begin{bmatrix} \cos \alpha_k & \sin \alpha_k \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_2 \right) \begin{bmatrix} r_i \\ r_j \end{bmatrix}$$

donde el vértice i nuevamente es el extremo positivo de la arista k . De este modo, el vector de todas las distancias entre vértices vecinos $z = [z_1, \dots, z_m]^T \in \mathbb{R}^m$, se puede

escribir como

$$z = \mathcal{F}(r)r \quad (5.8)$$

donde a $\mathcal{F}(r)$ la definimos como la *matriz de formación*, siendo su dimensión $(m \times 2n)$ y su expresión

$$\mathcal{F}(r) := \beta(r)^T (D^T \otimes \mathbf{I}_2) \quad (5.9)$$

donde $\beta(r)$ una matriz de dimensión $(2m \times m)$ cuya expresión es

$$\beta(r) = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \sin \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cos \alpha_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \sin \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha_m \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha_m \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Observación 5.1. Teniendo en cuenta que las posiciones de los vértices se pueden expresar como $r = \Lambda q$, la expresión (5.8) se puede reescribir como

$$z = \mathcal{F}(q)\Lambda q$$

De este modo se logra expresar la distancia entre bases de un MAS en función de las coordenadas q . ■

A su vez, la expresión diferencial $\dot{z}_k$ que se obtiene derivando (5.7) respecto al tiempo es

$$\begin{aligned} \dot{z}_k &= \frac{\Delta r_{xk} \dot{\Delta r}_{xk} + \Delta r_{yk} \dot{\Delta r}_{yk}}{\sqrt{\Delta r_{xk}^2 + \Delta r_{yk}^2}} \\ &= \frac{\Delta r_{xk}}{z_k} \dot{\Delta r}_{xk} + \frac{\Delta r_{yk}}{z_k} \dot{\Delta r}_{yk} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \alpha_k & \sin \alpha_k \end{bmatrix} \dot{\Delta r}_k \end{aligned}$$

donde si se tiene en cuenta que

$$\dot{\Delta r}_k = \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_2 \right) \begin{bmatrix} \dot{r}_i \\ \dot{r}_j \end{bmatrix}$$

y que la matriz Λ es constante, las derivadas de las longitudes de todas las aristas son

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \mathcal{F}(r)\dot{r} \\ &= \mathcal{F}(q)\Lambda\dot{q} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Proposición 5.1. *La derivada parcial de $\mathcal{F}(r)r$ con respecto a r es $\mathcal{F}(r)$.*

Demostración. Las longitudes de las aristas z de la ecuación (5.8) y sus derivadas $\dot{z}$ definidas en (5.11), se relacionan con la posición de los vértices r y sus velocidades $\dot{r}$, respectivamente, a través de la misma transformación $\mathcal{F}(r)$. De este modo, como se cumple que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}z &= \dot{z} \\ \Downarrow \\ \frac{d}{dt}(\mathcal{F}(r)r) &= \mathcal{F}(r)\dot{r} \end{aligned}$$

la derivada parcial de $\mathcal{F}(r)r$ satisface

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{F}(r)r) = \left(\frac{\partial \mathcal{F}(r)r}{\partial r} \right)^T \dot{r} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial \mathcal{F}(r)r}{\partial r} \right)^T = \mathcal{F}(r)$$

□

Proposición 5.2. *El producto $\dot{\mathcal{F}}(r)r$ es nulo.*

Demostración. De la proposición 5.1 se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathcal{F}(r)r) &= \dot{\mathcal{F}}(r)r + \mathcal{F}(r)\dot{r} \\ &= \dot{z} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathcal{F}}(r)r = \mathbf{0}_{m \times 1} \end{aligned}$$

□

Observación 5.2. La derivada parcial $\frac{\partial \mathcal{F}(r)}{\partial r}$ da como resultado un arreglo de matrices ya que $\mathcal{F}(r)$ es una matriz y r un vector columna. ■

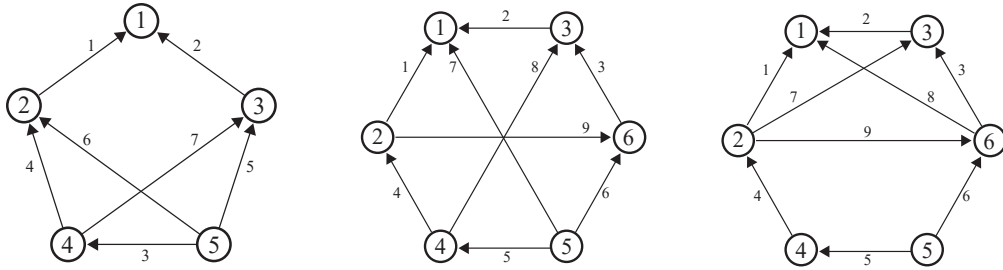
Ejemplo 5.3. Considerando los Grafos directos que se muestran en la Figura 5.6, las respectivas matrices de formación $\mathcal{F}_i(r)$, con $i = 1, 2, 3$, son¹:

$$\mathcal{F}_1(r) = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & -c_1 & -s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & s_2 & 0 & 0 & -c_2 & -s_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 & s_3 & -c_3 & -s_3 \\ 0 & 0 & c_4 & s_4 & 0 & 0 & -c_4 & -s_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_5 & s_5 & 0 & 0 & -c_5 & -s_5 \\ 0 & 0 & c_6 & s_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_6 & -s_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_7 & s_7 & -c_7 & -s_7 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

¹La notación s_i y c_i se corresponde con $\sin \alpha_i$ y $\cos \alpha_i$, respectivamente.

$$\mathcal{F}_2(r) = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & -c_1 & -s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & s_2 & 0 & 0 & -c_2 & -s_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 & s_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_3 & -s_3 \\ 0 & 0 & c_4 & s_4 & 0 & 0 & -c_4 & -s_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_5 & s_5 & -c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_6 & -s_6 & c_6 & s_6 \\ c_7 & s_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_7 & -s_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_8 & s_8 & -c_8 & -s_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_9 & -s_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_9 & s_9 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{F}_3(r) = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & -c_1 & -s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & s_2 & 0 & 0 & -c_2 & -s_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 & s_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_3 & -s_3 \\ 0 & 0 & c_4 & s_4 & 0 & 0 & -c_4 & -s_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_5 & s_5 & -c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_6 & -s_6 & c_6 & s_6 \\ 0 & 0 & -c_7 & -s_7 & c_7 & s_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_8 & s_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_8 & -s_8 \\ 0 & 0 & -c_9 & -s_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_9 & s_9 \end{bmatrix}$$



(a) Grafo $\mathcal{G}_1$: $n = 5$, $m = 7$. (b) Grafo $\mathcal{G}_2$: $n = 6$, $m = 9$. (c) Grafo $\mathcal{G}_3$: $n = 6$, $m = 9$.

Fig. 5.6 Matrices de Formación para tres grafos distintos.

5.4.2 Rango y Espacio Nulo

La matriz de formación $\mathcal{F}(r)$, definida en (5.9), describe la relación entre las velocidades de los vértices y las velocidades de las aristas a través del mapeo $\mathcal{F}(r) : \dot{r} \mapsto \dot{z}$ cuyo esquemático se muestra en la Figura 5.7².

La relación (5.11) puede ser caracterizada en términos del rango y del espacio nulo del mapeo:

²De aquí en adelante se considera la hipótesis práctica de que $m \leq 2n$.

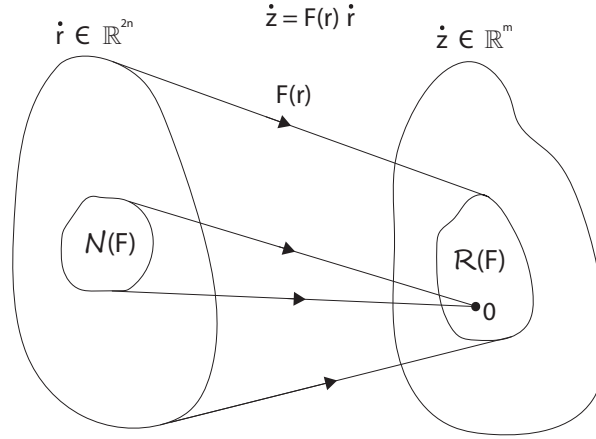


Fig. 5.7 Mapeo entre las velocidades de los vértices y las velocidades de las aristas.

- La imagen de $\mathcal{F}(r)$ es el subespacio $\mathcal{R}(\mathcal{F}) \in \mathbb{R}^m$ de las tasas de cambio de las aristas $\dot{z}$ que pueden ser generadas por las velocidades de los vértices $\dot{r}$.
- El espacio nulo de $\mathcal{F}(r)$ es el subespacio $\mathcal{N}(\mathcal{F}) \in \mathbb{R}^{2n}$ de las velocidades de los vértices $\dot{r}$ que no producen ningún cambio en las longitudes de las aristas ($\dot{z} = 0$).

Así, de acuerdo al teorema de rango-nulidad, se cumple que la dimensión del dominio de un mapeo lineal equivale a la suma del rango (dimensión de la imagen) y la nulidad (dimensión del kernel), esto es

$$\dim(\mathcal{R}(\mathcal{F})) + \dim(\mathcal{N}(\mathcal{F})) = 2n$$

En el caso particular de que $\mathcal{F}(r)$ tenga rango pleno, entonces se cumple

$$\dim(\mathcal{R}(\mathcal{F})) = m \quad \dim(\mathcal{N}(\mathcal{F})) = 2n - m$$

Por su parte, el rango de la matriz $\mathcal{F}(r)$ satisface

$$\text{rank}(\mathcal{F}) \leq \min \left\{ \text{rank} \left(\beta(r)^T \right), \text{rank} \left(D^T \otimes \mathbf{I}_2 \right) \right\}$$

donde, considerando un Grafo conexo $\mathcal{G}$, es

$$\begin{aligned} \text{rank} \left(\beta(r)^T \right) &= m \\ \text{rank} \left(D^T \otimes \mathbf{I}_2 \right) &= 2(n - 1) \end{aligned}$$

En el caso de que el rango satisfaga la igualdad, i.e.,

$$\text{rank}(\mathcal{F}) = \min \left\{ \text{rank} \left(\beta(r)^T \right), \text{rank} \left(D^T \otimes \mathbf{I}_2 \right) \right\}$$

la matriz $\mathcal{F}(r)$ tiene rango pleno, en caso contrario, tiene rango incompleto. A continuación presentaremos una serie de proposiciones y lemas que forman parte de las contribuciones de esta tesis.

Proposición 5.3. *Si el Grafo $\mathcal{G}$ es mínimamente rígido entonces la matriz de formación $\mathcal{F}(r)$ tiene rango pleno igual a $m = 2n - 3$.*

Demostración. Un conjunto de n vértices en el plano posee $2n$ GL, mientras que un cuerpo rígido en el plano tiene sólo 3 GL (la posición de un punto del mismo y la rotación del cuerpo restante alrededor de ese punto).

Intuitivamente, para un subconjunto de $n' = 2$ vértices, se puede definir una distancia independiente entre los mismos y el GL de los mismos se reduce en uno y es igual a tres. De modo general, para cada subconjunto de $n' \leq n$ vértices se pueden fijar el valor de $2n' - 3$ distancias independientes, de manera que el para el caso particular de $2n$ vértices, se pueden fijar $2n - 3$ distancias independientes.

Si $\mathcal{G}$ es mínimamente rígido, cada subconjunto de $n' \leq n$ vértices no tiene más que $2n' - 3$ aristas, de modo que la matriz de formación $\mathcal{F}(r)$ que lo representa tiene $2n - 3$ filas linealmente independientes. Como $m = 2n - 3$, entonces $\mathcal{F}(r)$ tiene rango pleno igual a m . $\square$

Corolario 5.1. *El máximo número de filas linealmente independientes que puede tener la matriz de formación $\mathcal{F}(r)$ es $2n - 3$.*

Demostración. Si se continúan añadiendo restricciones a las distancias entre vértices, el grafo se vuelve rígido con distancias que ya no son independientes. De esta forma se concluye que la matriz de formación $\mathcal{F}(r)$ no puede tener más de $2n - 3$ filas linealmente independientes. $\square$

Ejemplo 5.4. En la Figura 5.8 se muestran 4 conjuntos de n vértices con $2n$ GL cada uno que, a través de restricciones linealmente independientes, se reducen a 3 GL. Cada caso del (a) al (d) representa una extensión del anterior, al que se le agrega un vértice y dos aristas. Todos ellos se pueden representar a través de grafos mínimamente rígidos y los GL se pueden expresar como $GL = 2n - m = 3$.

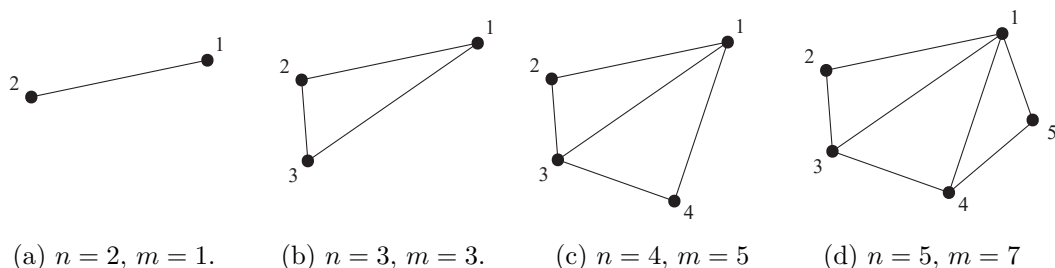


Fig. 5.8 Conjuntos con 3 GL y todas sus restricciones linealmente independientes.

Corolario 5.2. Para un grafo $\mathcal{G}$ mínimamente rígido es $\dim(\mathcal{N}(\mathcal{F})) = 3$.

Demostración. La dimensión del espacio nulo satisface la siguiente relación:

$$\dim(\mathcal{N}(\mathcal{F})) = 2n - \dim(\mathcal{R}(\mathcal{F}))$$

Como $\dim(\mathcal{R}(\mathcal{F})) = \text{rank}(\mathcal{F})$, y en virtud de la Proposición 5.3 es $\text{rank}(\mathcal{F}) = 2n - 3$, la dimensión del espacio nulo es $\dim(\mathcal{N}(\mathcal{F})) = 3$ y $\mathcal{F}(r)\dot{r} = 0$ tiene un número infinito de soluciones. $\square$

Corolario 5.3. Para un grafo $\mathcal{G}$ mínimamente rígido el único elemento del espacio nulo $\mathcal{N}(\mathcal{F}^T)$ es el vector cero.

Demostración. De acuerdo al teorema de rango-nulidad, *mutatis mutandis* con el mapeo mostrado en la Figura 5.7, se cumple que

$$\dim(\mathcal{N}(\mathcal{F}^T)) = m - \dim(\mathcal{R}(\mathcal{F}^T))$$

Como $\dim(\mathcal{R}(\mathcal{F}^T)) = \text{rank}(\mathcal{F})$, y de la Proposición 5.3 se tiene $\text{rank}(\mathcal{F}) = m$, se cumple que $\dim(\mathcal{N}(\mathcal{F}^T)) = 0$. $\square$

Ejemplo 5.5. Consideremos los Grafos del Ejemplo 5.3 y sus respectivas matrices $\mathcal{F}_i(r)$, con $i = 1, 2, 3$. Se puede observar que los grafos $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ (Figuras 5.6a y 5.6b respectivamente) son mínimamente rígidos y que las matrices satisfacen

$$\begin{array}{lll} \mathcal{F}_1 & \text{Dimensión } (7 \times 10) & \dim(\mathcal{R}(\mathcal{F}_1)) = 7 \quad \dim(\mathcal{N}(\mathcal{F}_1)) = 3 \\ \mathcal{F}_2 & \text{Dimensión } (9 \times 12) & \dim(\mathcal{R}(\mathcal{F}_2)) = 9 \quad \dim(\mathcal{N}(\mathcal{F}_2)) = 3 \end{array}$$

donde las matrices $\mathcal{F}_i$ con $i = 1, 2$ tienen rango pleno igual a m , de manera que se cumple lo enunciado en la Proposición 5.3.

En cambio, no se puede decir nada de la matriz $\mathcal{F}_3$ del grafo $\mathcal{G}_3$ (Figura 5.6c) ya que este no es mínimamente rígido (ni siquiera es rígido). Esto se debe a que, incluso teniendo $m = 2n - 3 = 5$ aristas, no se cumple con la condición 2 de la Definición 5.2 dado que existe el subgrafo $\mathcal{H}$ determinado por el conjunto de los 4 vértices $\mathcal{V}(\mathcal{H}) = \{1, 2, 3, 6\}$ con más de las $2n - 3 = 5$ aristas necesarias para que sea un subgrafo mínimamente rígido, i.e., $|\mathcal{E}(\mathcal{H})| = 6$ con $\mathcal{E}(\mathcal{H}) = \{(2, 1); (3, 1); (6, 3); (2, 3); (6, 1); (2, 6)\}$.

5.4.3 Inversión de Segundo Orden

La inversión de la matriz de formación para la obtención de las aceleraciones $\ddot{r}$ se puede realizar *mutatis mutandis* con el procedimiento aplicado al manipulador móvil en el capítulo 4.

La derivada con respecto al tiempo de la expresión que relaciona las velocidades $\dot{r}$ de los agentes con las velocidades $\dot{z}$, es

$$\ddot{z} = \dot{\mathcal{F}}(r)\dot{r} + \mathcal{F}(r)\ddot{r} \quad (5.12)$$

El problema de inversión de segundo orden surge si queremos obtener las expresiones de $\ddot{r}$ a partir de $\ddot{z}$. Para ello, utilizamos el método de los *multiplicadores de Lagrange*: planteando una función costo $L(x, \lambda) = f(x) - \lambda^T g$, el método consiste en encontrar el mínimo de la función $f(x)$ sujeto a las restricciones $g = 0$, siendo λ un vector columna de dimensión $(m \times 1)$ conocido como los *multiplicadores de Lagrange*. Para ello hay que encontrar los valores de x y λ que simultáneamente satisfagan $\nabla L = \mathbf{0}$, o sea

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \mathbf{0} \quad y \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \mathbf{0}$$

Consideremos entonces para este caso

$$f = \frac{1}{2}(\ddot{r} - \ddot{r}_0)^T W(\ddot{r} - \ddot{r}_0) \quad g = \dot{\mathcal{F}}\dot{r} + \mathcal{F}\ddot{r} - \ddot{z}$$

donde W es una matriz simétrica, de dimensión $(2n \times 2n)$ definida positiva y $\ddot{r}_0$ son aceleraciones arbitrarias. De este modo, las soluciones de $\ddot{r}$ deben satisfacer la restricción (5.12) al mismo tiempo que, si es posible, sean lo más próximas a $\ddot{r}_0$. Así la función costo

$$L(\ddot{r}, \lambda) = \frac{1}{2}(\ddot{r} - \ddot{r}_0)^T W(\ddot{r} - \ddot{r}_0) + \lambda^T (\ddot{z} - \dot{\mathcal{F}}\dot{r} - \mathcal{F}\ddot{r})$$

debe cumplir con los siguientes requisitos:

$$(i). \frac{\partial L}{\partial \ddot{r}} = \mathbf{0}_{2n \times 1} \quad (ii). \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \mathbf{0}_{m \times 1}$$

De la primera restricción es $W(\ddot{r} - \ddot{r}_0) - \mathcal{F}^T \lambda = \mathbf{0}$ lo que equivale a

$$\ddot{r} = \ddot{r}_0 + W^{-1} \mathcal{F}^T \lambda \quad (5.13)$$

donde dicha solución es un mínimo ya que la matriz hessiana $\partial^2 L / \partial \ddot{r}^2 = W$ es definida positiva. De la segunda restricción se obtiene

$$\ddot{z} = \dot{\mathcal{F}}\dot{r} + \mathcal{F}\ddot{r}$$

Combinando ambas se llega a

$$\ddot{z} = \dot{\mathcal{F}}\dot{r} + \mathcal{F}(\ddot{r}_0 + W^{-1} \mathcal{F}^T \lambda)$$

Considerando que $\mathcal{F}$ es de rango pleno e igual a m , la matriz $\mathcal{F}W^{-1}\mathcal{F}^T$ es cuadrada de dimensión $(m \times m)$ e invertible³, de manera que se puede despejar λ como

$$\lambda = \left(\mathcal{F}W^{-1}\mathcal{F}^T\right)^{-1} \left(\ddot{z} - \dot{\mathcal{F}}\dot{r} - \mathcal{F}\ddot{r}_0\right)$$

Reemplazando en (5.13) da como resultado la solución de las aceleraciones

$$\ddot{r} = \underbrace{W^{-1}\mathcal{F}^T \left(\mathcal{F}W^{-1}\mathcal{F}^T\right)^{-1}}_{\mathcal{F}^{INV}} \left(\ddot{z} - \dot{\mathcal{F}}\dot{r}\right) + \left(I - \underbrace{W^{-1}\mathcal{F}^T \left(\mathcal{F}W^{-1}\mathcal{F}^T\right)^{-1}\mathcal{F}}_{\mathcal{F}^{INV}}\right) \ddot{r}_0 \quad (5.14)$$

donde según sea el valor de la matriz de peso W se obtiene:

- 1) $\bar{\mathcal{F}}$ como la inversa generalizada con $W = M \Rightarrow \mathcal{F}^{INV} = M^{-1}\mathcal{F}^T \left(\mathcal{F}M^{-1}\mathcal{F}^T\right)^{-1}$
- 2) $\mathcal{F}^\dagger$ como la pseudo-inversa con $W = \mathbf{I}_{2n} \Rightarrow \mathcal{F}^{INV} = \mathcal{F}^T \left(\mathcal{F}\mathcal{F}^T\right)^{-1}$

donde M es la matriz de masa de los agentes modelados como puntos materiales y $\mathbf{I}_{2n}$ la matriz identidad. De este modo, la solución del primer caso minimiza localmente la energía cinética de los agentes mientras que la del segundo la norma de las velocidades (ver Observación 4.4).

5.4.4 Holonomicidad del Mapeo

Las restricciones holonómicas son generalmente el resultado de las interconexiones mecánicas entre los distintos cuerpos que componen un sistema. Las mismas pueden clasificarse en bilaterales o unilaterales según se expresen como igualdades o desigualdades, respectivamente, y en rheonómicas o escleronómicas si dependen explícitamente del tiempo o no, respectivamente [2]. De esta manera, es posible estudiar la holonomicidad de un determinado grafo a través del análisis de la matriz de transformación $\mathcal{F}(r)$, que será bilateral y escleronómica.

Comencemos definiendo el vector $\psi := [r^T, z^T]^T \in \mathbb{R}^{2n+m}$, y expresando la ecuación (5.11) como m -restricciones cinemáticas en su forma *Pfaffiana* como

$$A(\psi)^T \dot{\psi} = \mathbf{0}_{m \times 1} \quad (5.15)$$

donde

$$A(\psi) = \begin{bmatrix} \mathcal{F}(r)^T \\ -\mathbf{I}_m \end{bmatrix}$$

³El rango de la matriz de Gram $\mathcal{F}\mathcal{F}^T$ es $\text{rank}(\mathcal{F}\mathcal{F}^T) = \text{rank}(\mathcal{F})$ y como una matriz cuadrada es de rango pleno si y sólo si su determinante no es cero, entonces $\mathcal{F}\mathcal{F}^T$ es invertible.

es una matriz de dimensión $(2n + m \times m)$. Luego, expresamos la ecuación (5.8) a través de una función $h(\psi)$ como

$$\begin{aligned} h(\psi) &= \mathcal{F}(r)r - z \\ &= \mathbf{0}_{m \times 1} \end{aligned} \tag{5.16}$$

Así, teniendo en cuenta la Observación 5.1, se cumple que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}h(\psi) &= \left(\frac{\partial h(\psi)}{\partial \psi} \right)^T \dot{\psi} \\ &= \left[\left(\frac{\partial \mathcal{F}(r)r}{\partial r} \right)^T - \left(\frac{\partial z}{\partial z} \right)^T \right] \dot{\psi} \\ &= [\mathcal{F}(r) \quad -\mathbf{I}_m] \dot{\psi} \\ &= A(\psi)^T \dot{\psi} \\ &= \mathbf{0}_{m \times 1} \end{aligned}$$

Esto significa que las m restricciones cinemáticas de la ecuación (5.15) son integrables y se pueden expresar como m restricciones de la forma (5.16), por lo que se concluye que las mismas son restricciones holonómicas.

Observación 5.3. Como en este caso las restricciones son holonómicas, el teorema de la función implícita⁴ permite convertir la ecuación (5.16) expresando las m coordenadas z en función de las $2n$ coordenadas r , esto es representando las longitudes como $z(r)$. Sin embargo, como el conocimiento de z per se no caracteriza por completo los GL del sistema, para describir la movilidad restringida por las interconexiones (aristas) del sistema se debe elegir el vector de coordenadas r de dimensión $2n$. ■

5.5 Conclusiones

El eje de este capítulo fueron los sistemas multiagentes: se presentaron modelos dinámicos, siendo los agentes bases o manipuladores móviles, luego se hizo un breve repaso de los conceptos y definiciones de la teoría de grafos y finalmente se mostraron los aportes y análisis para la descripción de distancias entre agentes.

Se extendieron los modelos dinámicos de bases y manipuladores móviles, presentados en los capítulos anteriores, para el caso de MAS. Se generalizaron los vectores y matrices característicos para el caso general de un MAS compuesto por n agentes. Se definieron las matrices Λ y Π que permitieron mapear las coordenadas generalizadas de los agentes en las coordenadas r y s , respectivamente.

⁴El teorema de la función implícita establece condiciones suficientes bajo las cuales una ecuación o conjunto de ecuaciones de varias variables permite definir a una de ellas o varias de ellas como función de las demás.

Partiendo de un sucinto repaso de la teoría de grafos, se presentó el mapeo entre las posiciones en el plano de los agentes y sus distancias a través de la matriz de formación $\mathcal{F}(r)$. Se analizó su rango y espacio nulo y se presentaron una serie de proposiciones y lemas que serán de utilidad en los capítulos siguientes. Principalmente se demostró, y se ilustró a través de un ejemplo, que un Grafo mínimamente rígido posee una matriz de transformación con rango pleno.

Continuando con la matriz de formación, planteando la analogía con el Jacobiano de manipuladores robóticos, se presentó la expresión de la pseduo-inversa e inversa generalizada de la matriz de formación que permite obtener las expresiones de las posiciones de los agentes a partir de las distancias entre los mismos.

Finalmente se verificó que la derivada parcial de la multiplicación de la matriz de transformación con las posiciones de los agentes respecto a estos últimos, era igual a la matriz de transformación. Esto permitió demostrar la holonomicidad del mapeo $\mathcal{F}(r)$.

La mayoría de los desarrollos y contribuciones mostrados en este capítulo aún no fueron publicados. El modelado de MAS, representando a los agentes como puntos materiales y utilizando BG, fue publicado en dos trabajos en el congreso internacional IMAACA desarrollado en el año 2019 [3] [4].

Bibliografía

En [82] se encuentran todas las definiciones, conceptos y propiedades relativas a la teoría de grafos. El modelado de MAS generales con EL y PHS se puede encontrar en [84] y [85], respectivamente. En [86] se presenta el modelado de redes dinámicas con PHS utilizando grafos. Para una revisión de conceptos y definiciones asociados a MAS ver los trabajos [87] y [88]. El concepto de holonomicidad está desarrollado en el capítulo 11 de [2].

Parte II

CONTROL

Capítulo 6

Control de Formación de Sistemas Multiagentes

Este capítulo presenta dos técnicas de control de formación de sistemas multiagentes. La primera, tiene una inspiración física basada en el comportamiento de un sistema de resortes amortiguadores. Sobre esta última, se presentan distintos modelos matemáticos y se muestra que la misma se enmarca dentro de la estructura de CbI. Luego se identifican de manera natural las *funciones de Casimir* intrínsecas a dicha estructura, y se detallan importantes propiedades matemáticas asociadas a los conceptos de la teoría de CbI. Luego, se presentan distintos enfoques de control de formación por retroalimentación, y se muestra que el esquema CbI presentando es equivalente a un esquema por retroalimentación estática. La segunda técnica de control, inspirada geoméricamente, se basa en una estructura de referencia virtual en la cual los agentes pueden realizar formaciones cuya topología varía a través del tiempo. Se presentan las definiciones y los esquemas de control. Finalmente, se discuten las conclusiones del capítulo.

6.1 Introducción

El control de formación, que es uno de los temas más estudiados en el ámbito de los MAS, suele tener como objetivo conducir a múltiples agentes para que alcancen las restricciones prescritas en sus estados. En función de la capacidad de detección y la topología de interacción de los agentes, se han estudiado en la literatura diversos problemas de control de formación [79]. Al igual que en [79], clasificaremos las distintas estrategias de control de formación en base a la capacidad de sensado y a la topología de interacción. De esta manera surgen naturalmente las preguntas sobre las variables que se miden y se controlan en el MAS para lograr la formación deseada, por lo que los resultados en control de formación pueden categorizarse según control de: posición, desplazamiento y distancia.

Un agente es un sistema que opera en un entorno con cierta autonomía y capacidad de detección, toma de decisiones e interacción con otros agentes [89]. Los mismos pueden ser bases o manipuladores móviles dotados de sensores que envían información a una capa superior de control, esta procesa la información y devuelve las acciones de control a los actuadores, en un esquema que se observa en la Figura 6.1.

En la capa de nivel de jerarquía más baja, denominada aquí *Nivel Físico*, se encuentran los agentes individuales. Estos pueden controlar sus actuadores y conectarse con el *Nivel de Interacción*, que es una capa de jerarquía superior, encargada de procesar la información brindada por los sensores de la capa inferior.

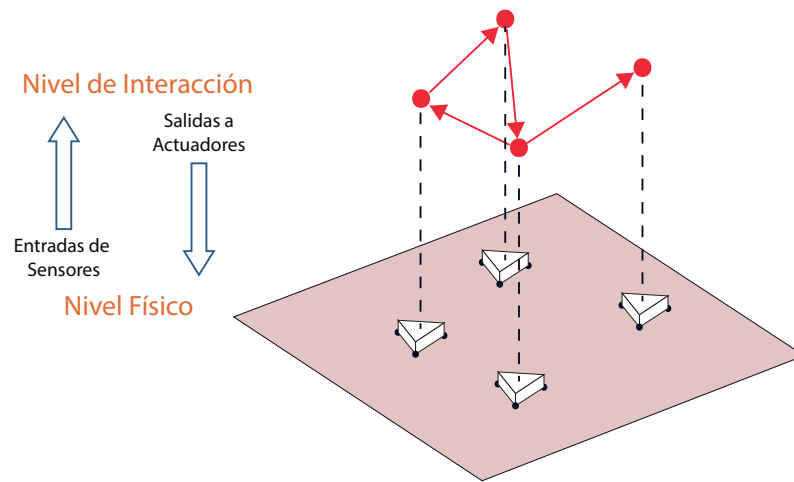


Fig. 6.1 Niveles de un MAS controlado.

A lo largo de todo el capítulo se considerará a los agentes que componen el MAS modelados como puntos materiales en el plano. Las leyes de control resultantes de la síntesis de los controladores se interpretan como referencias de fuerzas en el plano. A continuación presentaremos dos estrategias distintas de control de formación: una basada en el control de la distancia entre agentes, inspirada físicamente, y la otra basada en el control de posición, con una inspiración geométrico-matemática.

6.2 Emulación Física

El proceso de razonamiento que se aplica en esta sección, para obtener las leyes de control, consiste en comenzar proponiendo una solución física al problema de formación del MAS para luego, dentro del correspondiente marco teórico, demostrar las propiedades matemáticas pertinentes.

Para el seguimiento de las especificaciones de movimiento generadas por la capa superior de control para los agentes del MAS, se presenta una estrategia inspirada físicamente que emula la interconexión entre los mismos a través de acoplamientos

virtuales como en una estructura física, de tal manera que el conjunto satisfaga el objetivo de control. Este es el eje principal de la sección.

Un acoplamiento virtual debe emular el que produciría un acoplamiento físico como el que se da, por ejemplo, en el sistema de suspensión de un vehículo. De las especificaciones impuestas al movimiento de los agentes se deben determinar los esfuerzos que deben generar los acoplamientos virtuales. Como estos últimos no existen en la realidad, estos esfuerzos se entienden como referencias para los actuadores de los sistemas de locomoción de los robots, que son los encargados de producir los esfuerzos reales.

6.2.1 Bloque Elemental de Acople

Específicamente la propuesta es acoplar pares de agentes escogidos con un bloque resorte-amortiguador en paralelo, como se muestra en la Figura 6.2a. A cada uno de estos bloques los denominaremos Bloque Elemental de Acople (ECB, Elementary Coupling Block). A continuación desarrollamos los distintos modelos dinámicos y analizamos la pasividad.

6.2.1.1 Modelo en Ecuaciones de Estado

Consideremos el agente i unido al agente j a través del ECB, como se muestra en la Figura 6.2a.

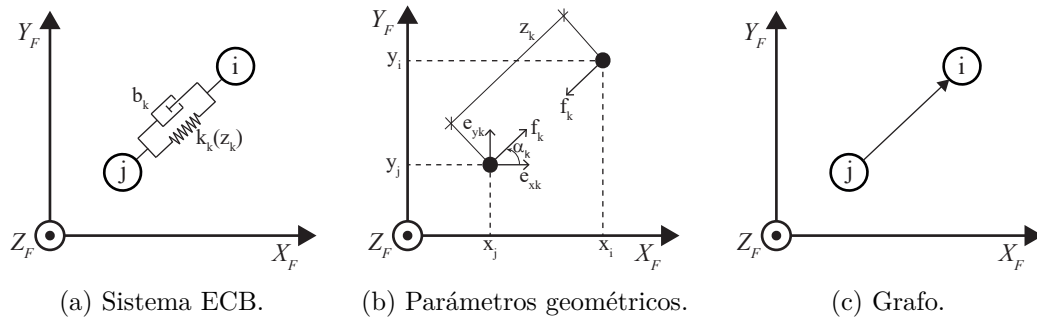


Fig. 6.2 Configuración general.

6.2.1.1.1 Formulación Estándar La representación del modelo entrada salida del par resorte-amortiguador en el espacio de estados es

$$\begin{cases} \dot{z}_k &= \zeta_k \\ f_k &= f_{rk}(z_k; z_k^*) + b_k \zeta_k \end{cases} \quad (6.1)$$

donde el parámetro b_k es el coeficiente de amortiguación lineal, la variable de estado z_k es la longitud del resorte, la entrada ζ_k la tasa de cambio de la longitud del resorte

virtual, la salida f_k la fuerza ejercida por el ECB (ver Figura 6.2b), y $f_{rk}(z_k; z_k^*)$ es la fuerza (no lineal) ejercida por el resorte.

Observación 6.1. El valor z_k^* se puede interpretar físicamente como la longitud natural del resorte virtual k en su estado desenergizado. ■

6.2.1.1.2 Formulación Hamiltoniana Definamos ahora una nueva variable $\tilde{z}_k$ como la diferencia entre la longitud del resorte z_k y su valor deseado z_k^* , i.e.,

$$\tilde{z}_k := z_k - z_k^*$$

Así, la fuerza del resorte se puede describir como¹

$$f_{rk}(\tilde{z}_k; z_k^*) = \frac{\partial H_{rk}}{\partial \tilde{z}_k}$$

donde

$$\begin{aligned} H_{rk}(\tilde{z}_k) &= \int_0^{\tilde{z}_k} f_{rk}(\tilde{z}_k; z_k^*) d\tilde{z}_k \\ &= H_{ck}(\tilde{z}_k) + \Phi_{ck}(z_k^*) \end{aligned} \quad (6.2)$$

es el Hamiltoniano del ECB que equivale a la energía total (potencial) del resorte y el término $\Phi_{ck}(z_k^*)$ es la constante de integración cuyo valor se elige de manera que el Hamiltoniano tenga un mínimo en $z_k = z_k^*$.

Como el valor de z_k^* puede interpretarse físicamente como la longitud del resorte desenergizado (Observación 6.1), resulta lógico plantear que la misma sea constante de modo que $\dot{z}_k^* = 0$. De este modo la ecuación (6.1), teniendo en cuenta el cambio de variables, se puede reescribir de una manera análoga a las ecuaciones de Hamilton como

$$\begin{cases} \dot{\tilde{z}}_k &= \zeta_k \\ f_k &= \frac{\partial H_{rk}}{\partial \tilde{z}_k} + b_k \zeta_k \end{cases} \quad (6.3)$$

6.2.1.2 Modelo Bond Graph

El modelo BG del ECB es sencillo, consta de un elemento disipativo **R** y un almacenador de energía potencial **C** que representan el amortiguador y el resorte, respectivamente, unidos a través de un vínculo **1** como se observa en la Figura 6.3a.

La dinámica del bloque ECB, cuyo modelo compacto se muestra en la Figura 6.3b, es

$$\begin{cases} \dot{\tilde{z}}_k &= \dot{z}_k \\ f_k(\tilde{z}_k, \dot{\tilde{z}}_k; z_k^*) &= f_{rk}(\tilde{z}_k; z_k^*) + b_k \dot{z}_k \end{cases} \quad (6.4)$$

¹Abusando de la notación se mantiene f_{rk} .

donde $\dot{z}_k$ es la entrada y f_k la salida. Notar que el modelo es de orden 1 y que es necesario fijar la condición inicial del integrador del elemento **C** como

$$\tilde{z}_0 = z_0 - z^*$$

donde los subíndices 0 indican la condición inicial.

Observación 6.2. La inicialización del integrador del elemento **C** conlleva especificar la diferencia $\tilde{z}_0$, lo que implica determinar la posición inicial z_0 de los agentes. ■

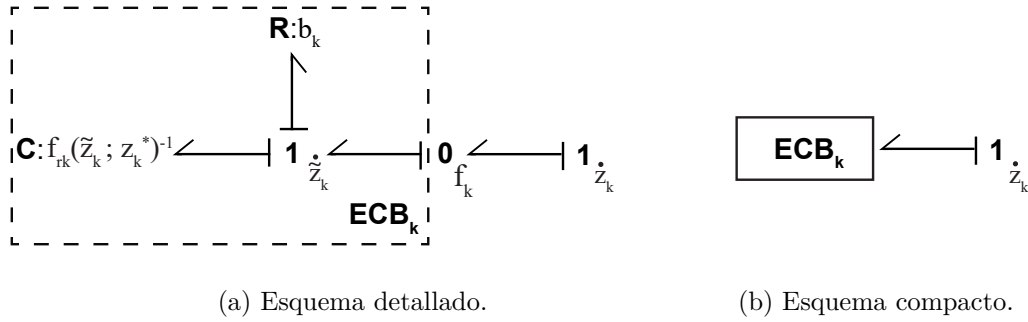


Fig. 6.3 Esquema BG del sistema físico idealizado de la Figura 6.2a.

6.2.1.3 Pasividad

La energía intercambiada con el medio por el ECB, definido en función de las ecuaciones de Hamilton en (6.3), es igual a la integral del producto entre su entrada y la salida como:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \dot{z}_k f_k(\tilde{z}_k, \dot{z}_k; z_k^*) dt &= \int_{t_0}^{t_1} \dot{z}_k f_{rk}(\tilde{z}_k; z_k^*) + b \dot{z}_k^2 dt \\ &= \int_{\tilde{z}_k^0}^{\tilde{z}_k^1} f_{rk}(\tilde{z}_k; z_k^*) d\tilde{z}_k + \int_{t_0}^{t_1} b \dot{z}_k^2 dt \\ &= H_{rk}(\tilde{z}_k^1) - H_{rk}(\tilde{z}_k^0) + \int_{t_0}^{t_1} b \dot{z}_k^2 dt \end{aligned}$$

donde $\tilde{z}_k^0$ y $\tilde{z}_k^1$ son los valores de $\tilde{z}_k$ en los instantes t_0 y t_1 , respectivamente. En virtud de esto se cumple que

$$H_{rk}(\tilde{z}_k^1) - H_{rk}(\tilde{z}_k^0) \leq \int_{t_0}^{t_1} \dot{z}_k f_k(\tilde{z}_k, \dot{z}_k; z_k^*) dt$$

por lo que el ECB es pasivo.

6.2.2 Sistema Multiagente Interconectado

A continuación se presenta el modelo dinámico del sistema físico idealizado del MAS compuesto de n agentes interconectado por m ECB's de la Figura 6.4, utilizando distintos modelos matemáticos.

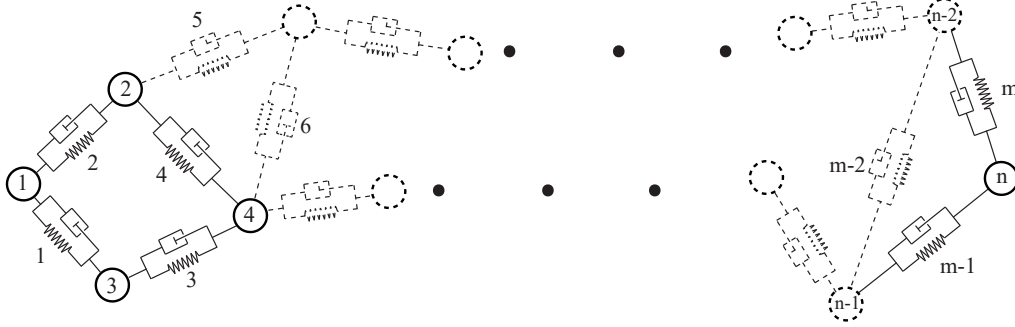


Fig. 6.4 Modelo físico simplificado de un MAS interconectado a través de resortes-amortiguadores.

6.2.2.1 Modelo Bond Graph

Antes de desarrollar el modelo BG del MAS interconectado de la Figura 6.4, primero comenzamos definiendo las distintas variables del sistema y planteando sus relaciones cinemáticas para el caso de dos agentes (ver la Figura 6.2). Las variables de interés son:

- $p_j = [p_{xj}, p_{yj}]^T$, $p_i = [p_{xi}, p_{yi}]^T$ las cantidades de movimiento de los agentes j y i , respectivamente
- $e_k = [e_{xk}, e_{yk}]^T$ la descomposición de la fuerza f_k del ECB $_k$ expresada en el marco fijo (ver Figura 6.2b)
- $r_j = [x_j, y_j]^T$, $r_i = [x_i, y_i]^T$ las posiciones de los agentes j y i , respectivamente
- $\Delta r_k = [\Delta r_{xk}, \Delta r_{yk}]^T$ el desplazamiento entre los agentes i y j

Las relaciones estructurales entre flujos y esfuerzos, representadas por vínculos **0** y **1** respectivamente, son

$$\begin{aligned}\dot{\Delta r}_k &= \dot{r}_i - \dot{r}_j \\ \dot{p}_j &= e_k \\ \dot{p}_i &= -e_k\end{aligned}$$

donde dichos flujos y esfuerzos se relacionan con los del ECB_k a través de un transformador modulado **MTF**, como

$$\begin{cases} \dot{\tilde{z}}_k &= \frac{\Delta r_k^T}{\|\Delta r_k\|} \dot{\Delta r}_k \\ e_k &= \frac{\Delta r_k}{\|\Delta r_k\|} f_k(\tilde{z}_k, \dot{\tilde{z}}_k; z_k^*) \end{cases} \quad (6.5)$$

donde (ver el capítulo 5 para un repaso de todas las relaciones)

$$\frac{\Delta r_k}{\|\Delta r_k\|} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_k \\ \sin \alpha_k \end{bmatrix}$$

es la relación de transformación que puede ser completamente representada en función de Δr_k . El modelo BG resultante se muestra en la Figura 6.5a mientras que su equivalente compacto en la Figura 6.5b, donde se agrupó en un subbloque a la estructura de interconexión (IJS, Interconnection Junction Structure), y se puso de manifiesto los flujos asociados a los enlaces a través de vínculos pasantes **1**. Notar que como los agentes se modelan como puntos materiales, los ECB's no ejercen torque sobre los mismos, sólo fuerzas traslacionales en el plano.

Ahora bien, considerando la dinámica del ECB descrita por (6.4) y eligiendo las variables de estado como las salidas de los integradores, i.e., (i) las cantidades de movimiento p_j , p_i , (ii) el desplazamiento Δr_k , (iii) la longitud $\tilde{z}_k$, la dinámica del modelo BG en ecuaciones de estados es²

$$\begin{cases} \dot{p}_j &= \frac{\Delta r_k}{\|\Delta r_k\|} f_k(\tilde{z}_k, \dot{\tilde{z}}_k; z_k^*) \\ \dot{p}_i &= -\frac{\Delta r_k}{\|\Delta r_k\|} f_k(\tilde{z}_k, \dot{\tilde{z}}_k; z_k^*) \\ \dot{\Delta r}_k &= M_i^{-1} p_i - M_j^{-1} p_j \\ \dot{\tilde{z}}_k &= \frac{\Delta r_k^T}{\|\Delta r_k\|} (M_i^{-1} p_i - M_j^{-1} p_j) \end{cases} \quad (6.6)$$

Por su parte, el balance de flujos y esfuerzos del bloque dinámico IJS_k es

$$\begin{aligned} e_k^T \dot{r}_j - e_k^T \dot{r}_i &= -\dot{p}_j^T \dot{\Delta r}_k \\ &= -f_k \frac{\Delta r_k^T}{\|\Delta r_k\|} \dot{\Delta r}_k \\ &= -f_k \dot{\tilde{z}}_k \end{aligned}$$

de modo que conserva potencia.

²En aras de una mayor claridad, la fuerza $f_k(\tilde{z}_k, \dot{\tilde{z}}_k; z_k^*)$ se expresa en función de la variable $\dot{\tilde{z}}_k$ en lugar de las variables de estado.

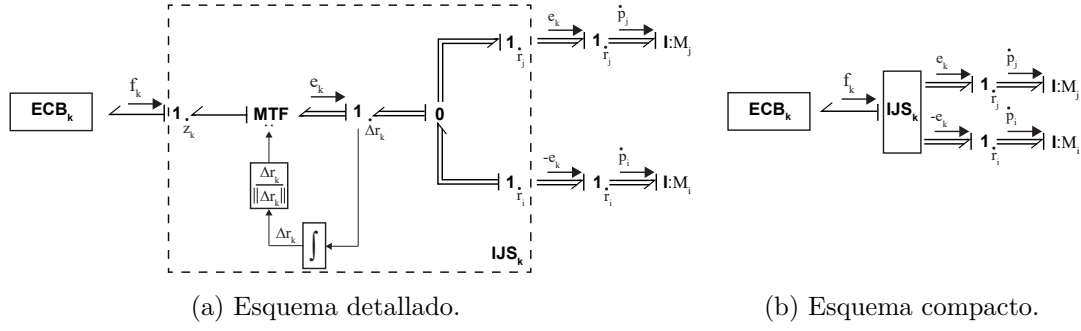


Fig. 6.5 Esquema BG del sistema físico idealizado de la Figura 6.2a.

Respecto al orden de las ecuaciones de estado tenemos:

- $n_{M_{i,j}} = 4$ correspondientes a la dinámica de los dos agentes en el plano
- $n_{IJS_k} = 2$ asociados a la integración del desplazamiento entre agentes en la IJS_k
- $n_{ECB_k} = 1$ por la dinámica del almacenador de energía potencial $\mathbf{C}$ en ECB_k

lo que a priori daría un sistema de orden $n_\Sigma = 7$. Sin embargo, teniendo en cuenta que la longitud $\tilde{z}_k$ se puede expresar como

$$\tilde{z}_k = \|\Delta r_k\| - z_k^*$$

se concluye que $\tilde{z}_k$ no es un variable de estado independiente, pudiendo ser reconstruida en función de las otras variables de estado, de modo que el orden del modelo en ecuaciones de estados sea igual a $n_\Sigma = 6$. Esta particularidad se analizará en detalle más adelante.

En la Figura 6.6 se muestra el esquema BG para el modelo del sistema completo de la Figura 6.4, donde $\tilde{z} = [\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_m]^T \in \mathbb{R}^m$, $f = [f_1, \dots, f_m]^T \in \mathbb{R}^m$, $r = [r_1^T, \dots, r_n^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ y $p = [p_1^T, \dots, p_n^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$. La fuerza ejercida sobre el agente i es la suma de todas las fuerzas ejercidas por los ECB's, que en este caso particular satisface

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= e_1 + e_2 \\ \dot{p}_2 &= -e_2 - e_4 - e_5 \\ \dot{p}_3 &= -e_1 - e_3 \\ \dot{p}_4 &= e_3 + e_4 - e_6 \\ &\vdots \\ \dot{p}_n &= e_m - e_{m-1} \end{aligned}$$

siendo la dinámica de e_k , con $k = 1, \dots, m$, la expresada en la ecuación (6.5).

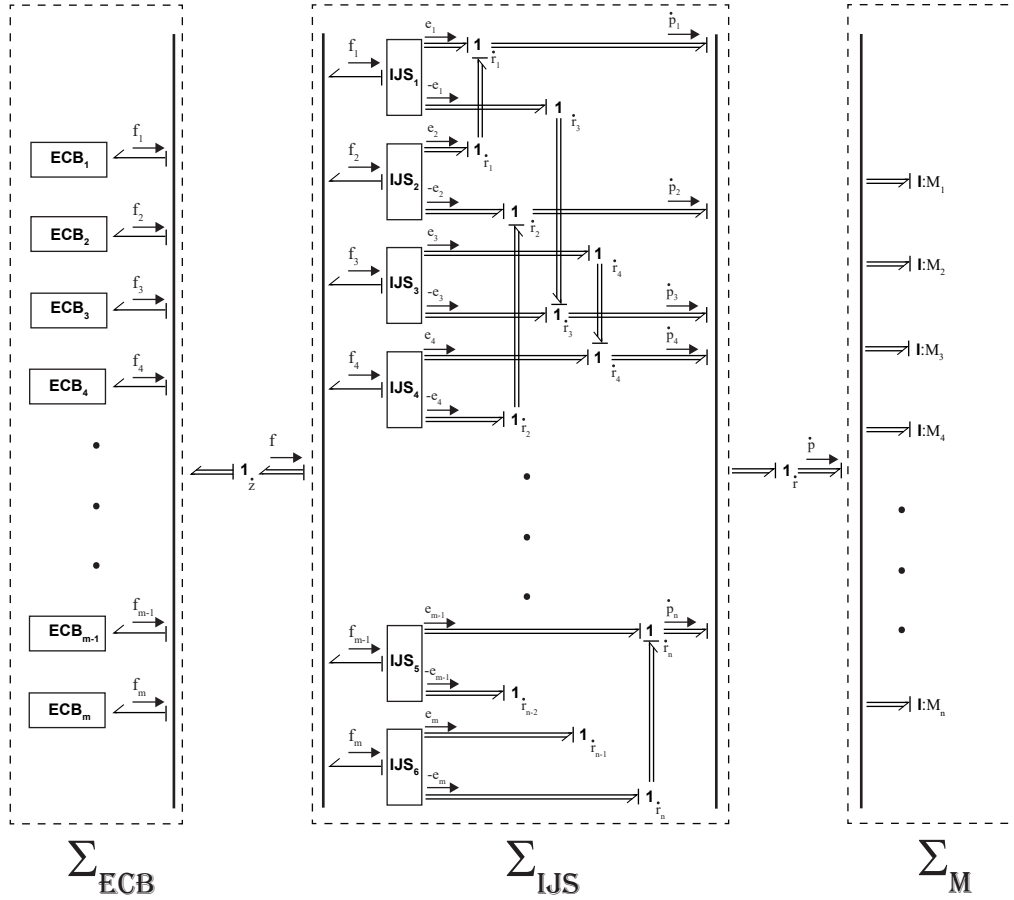


Fig. 6.6 Modelo BG del sistema físico idealizado de la Figura 6.4.

Analizando el orden del modelo BG, del mismo modo que se hizo para el de la Figura 6.5a, se tiene:

- $n_{\Sigma_M} = 2n$ del bloque Σ_M que corresponden a la dinámica de los agentes en el plano
- $n_{\Sigma_{IJS}} = 2m$ del bloque Σ_{IJS} por la integración del desplazamiento entre los agentes en cada subbloque IJS_k
- $n_{\Sigma_{ECB}} = m$ del bloque Σ_{ECB} por las dinámicas de los almacenadores de energía potencial $\mathbf{C}$ de cada subbloque ECB_k

de manera que el orden total es $n_{BG} = 2n + 3m$.

Observación 6.3. Con la integración que se realiza en el bloque Σ_{IJS} se obtienen los desplazamientos Δr_k , pero en ninguna parte del modelo BG aparecen las expresiones de las posiciones de los agentes r . Generalmente, dichas posiciones surgen de manera natural al modelar la dinámica de los agentes, sin embargo en este caso, basta con expresar la derivada de la cantidad de movimiento para caracterizar completamente su

dinámica. Es por ello que el bloque Σ_M aporta $2n$ grados al orden total del sistema, en lugar de $4n$. ■

6.2.2.2 Modelo Generalizado con Teoría de Grafos

En esta sección nos valemos de los conceptos de la teoría de grafos y los análisis desarrollados en el capítulo 5, para expresar de manera general la dinámica de la estructura de interconexión de la Figura 6.4. Para ello se representarán las interacciones entre los agentes del modelo físico simplificado a través de un grafo directo $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$, donde los n vértices $\mathcal{V}$ representan a los agentes y las m aristas $\mathcal{E}$ a los ECB's, como se muestra en la Figura 6.7.

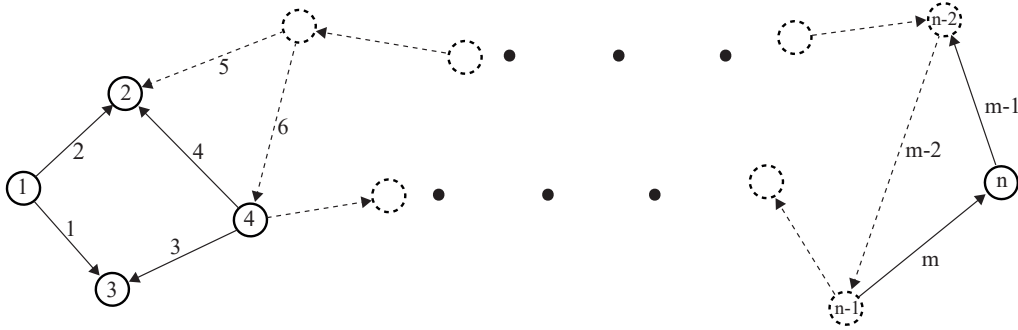


Fig. 6.7 Representación del modelo de la Figura 6.4 como un grafo $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$.

De este modo, la fuerza f_k ejercida por el k -ésimo sistema ECB, considerando que el vértice i es el extremo positivo de la arista k y j el negativo (ver Figura 6.2c), se puede descomponer en el sistema de coordenadas global fijo como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -e_{xk} \\ -e_{yk} \\ e_{xk} \\ e_{yk} \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha_k \\ \sin \alpha_k \end{bmatrix} f_k \\ &= - \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_2 \right) \begin{bmatrix} \cos \alpha_k \\ \sin \alpha_k \end{bmatrix} f_k \end{aligned}$$

De este modo, considerando la matriz de incidencia D del grafo de la Figura 6.7 cuya expresión es

$$D = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

las fuerzas ejercidas a todos los agentes por todos los ECB's se puede expresar como

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -(D \otimes \mathbf{I}_2) \beta(r) f \\ &= \mathcal{F}(r)^T (-f) \end{aligned}$$

donde $\beta(r)$ es la matriz de dimensión $(2m \times m)$ y $\mathcal{F}(r)$ la matriz de formación definidas en las ecuaciones (5.10) y (5.9) del capítulo anterior, respectivamente.

Así, la dinámica del bloque de interconexión Σ_{IJS} de la Figura 6.6 puede ser reemplazada por un transformador **MTF** modulado, donde los flujos y esfuerzos se relacionan como

$$\begin{cases} \dot{z} &= \mathcal{F}(r) \dot{r} \\ \dot{p} &= \mathcal{F}(r)^T (-f) \end{cases}$$

donde las coordenadas r se obtienen integrando las velocidades de los agentes $\dot{r}$ en el bloque Σ_{MAS} , como se observa en el BG de la Figura 6.8. Notar que este último es el mismo subbloque Σ_M con la diferencia que contiene un integrador que genera las coordenadas r . El balance de flujos y esfuerzos del bloque Σ_{IJS} es

$$\begin{aligned} \dot{r}^T \dot{p} &= -\dot{r}^T \mathcal{F}(r)^T f \\ &= -\dot{z}^T f \end{aligned}$$

de modo que conserva potencia.

Analizando nuevamente el orden del modelo BG se tiene:

- $n_{\Sigma_{MAS}} = 4n$ del bloque Σ_{MAS} que corresponden a la dinámica de los agentes en el plano e integración de sus velocidades
- $n_{\Sigma_{ECB}} = m$ del bloque Σ_{ECB} por las dinámicas de los almacenadores de energía potencial $\mathbf{C}$ de cada subbloque ECB_k

de manera que el orden total es $n_{BG_{\mathcal{F}}} = 4n + m$. Notar que en este caso el orden se incrementó en $2(n - m)$ ya que, a diferencia del BG de la Figura 6.6 donde la integración

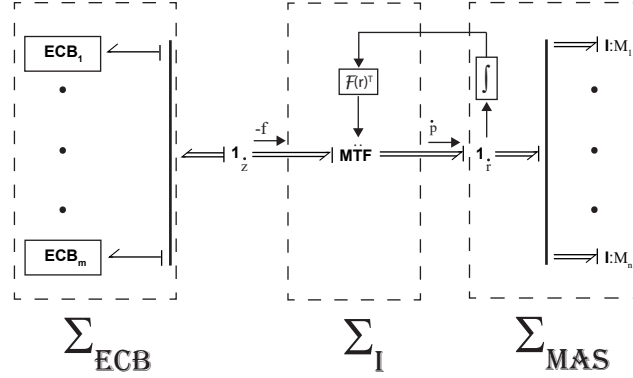


Fig. 6.8 Modelado BG con teoría de grafos del sistema de la Figura 6.4.

se realiza sobre las velocidades $\dot{\Delta}r_k$ de dimensión $2m$, en este caso la integración se realiza sobre las velocidades $\dot{r}$ cuya dimensión es $2n$. Además, el nuevo subbloque Σ_I , a diferencia del bloque Σ_{IJS} , no contiene dinámica sino que sólo relaciona los flujos y esfuerzos de entrada en una transformación sin pérdida de potencia.

6.2.3 Control por Interconexión

En esta sección se desarrolla sucintamente la teoría de CbI de manera que la lectura de la tesis sea autocontenida, luego se muestra de forma natural que el modelo BG del sistema interconectado visto en la sección anterior puede interpretarse como un esquema de CbI [35], y finalmente resaltamos importantes propiedades estructurales que se surgen al analizar el controlador propuesto.

El esquema de CbI que se ilustra en la Figura 6.9 es el análogo al modelo BG de la Figura 6.8, donde se han reemplazado las variables por la notación clásica de la teoría de CbI³, siendo en este caso específico:

- Las salidas y y y_c las velocidades $\dot{r}$ y las fuerzas f , respectivamente.
- Las entradas u y u_c las fuerzas $\dot{p}$ y velocidades $\dot{\hat{z}}$, respectivamente.

La convención de potencia positiva es la misma que la utilizada en la teoría de circuitos eléctricos, de manera que la potencia fluye desde el bloque Σ_{ECB} al Σ_{MAS} , pasando por el bloque de interconexión Σ_I .

En el CbI tanto el controlador como la planta son dos sistemas port-Hamiltonianos, cada uno con sus propias variables de estado y funciones de energía, conectados a

³La terminología utilizada en esta literatura es:

- $\pm$ fuerzas.
- $\rightarrow$ velocidades.
- y salidas.
- u entradas.

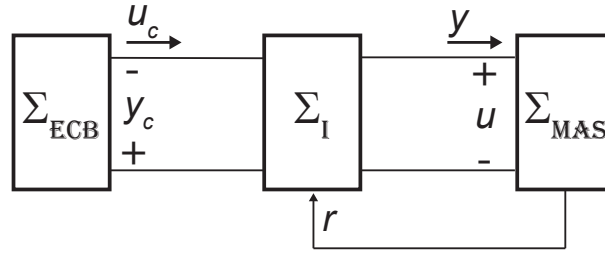


Fig. 6.9 Diagrama de bloque del CbI.

través de una interconexión que preserva potencia. De este modo, presentaremos los modelos PHS tanto del MAS como de la colección de ECB's. El primero se puede expresar como

$$\Sigma_{MAS} : \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2n} & \mathbf{I}_{2n} \\ -\mathbf{I}_{2n} & \mathbf{0}_{2n} \end{bmatrix} \nabla H_s + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2n} \\ \mathbf{I}_{2n} \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2n} & \mathbf{I}_{2n} \end{bmatrix} \nabla H_s \end{cases} \quad (6.7)$$

donde $H_s(r, p)$ es el Hamiltoniano, representa la energía cinética total del sistema MAS, y su expresión es

$$H_s(r, p) = \frac{1}{2} p^T M^{-1} p \quad (6.8)$$

siendo $M = \text{diag}\{[M_1, \dots, M_n]\}$. Por su parte, la dinámica del controlador se puede expresar como un conjunto de integradores no lineales, con la misma estructura que en (6.3), esto es

$$\Sigma_{ECB} : \begin{cases} \dot{\tilde{z}} = u_c \\ y_c = \frac{\partial H_r}{\partial \tilde{z}} + B u_c \end{cases} \quad (6.9)$$

donde $B = \text{diag}\{[b_1, \dots, b_m]\}$ y $H_r(\tilde{z})$ es el Hamiltoniano del controlador, que equivale a la suma de las energías potenciales de los m ECB's detallada en (6.2), cuya expresión es

$$\begin{aligned} H_r(\tilde{z}) &= \sum_{k=1}^m H_{rk}(\tilde{z}_k) \\ &= \sum_{k=1}^m \left(\tilde{z}_k + \frac{z_k^{*3}}{2(\tilde{z}_k + z_k^*)^2} \right) \mu_R + \sum_{k=1}^m -\frac{1}{2} \mu_R z_k^* \\ &= H_c(\tilde{z}) + \Phi_c(z^*) \end{aligned} \quad (6.10)$$

donde $z^* = [z_1^*, \dots, z_m^*]^T$. Por último, el sistema de interconexión que representa la interacción entre los m ECB's y los n agentes, puede expresarse matemáticamente en

términos de las velocidades y fuerzas compartidas como

$$\Sigma_I : \begin{cases} \begin{bmatrix} u \\ u_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2n} & -\mathcal{F}(r)^T \\ \mathcal{F}(r) & \mathbf{0}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ y_c \end{bmatrix} \end{cases} \quad (6.11)$$

de manera que la entrada de los bloques ECB's y salida del sistema Σ_I satisfacen

$$\begin{aligned} y_c^T u_c &= y_c^T \mathcal{F}(r) y \\ &= -u^T y \Rightarrow y_c^T u_c + u^T y = 0 \end{aligned} \quad (6.12)$$

cumpléndose así la propiedad de que el sistema de interconexión Σ_I preserva potencia.

De este modo, la función de energía total del sistema a lazo cerrado W se define como la suma de los Hamiltonianos del MAS (6.8) y del conjunto de ECB's (6.10), siendo

$$\begin{aligned} W(r, p, \tilde{z}) &:= H_s(r, p) + H_r(\tilde{z}) \\ &= H_s(r, p) + H_c(\tilde{z}) + \Phi_c(z^*) \end{aligned} \quad (6.13)$$

Observación 6.4. El uso de resortes y amortiguadores virtuales para el control de formación puede verse, desde el punto de vista energético, como una forma de moldear la energía $W(r, p, \tilde{z})$ a través de la selección de H_c y Φ_c . Además, como el PE ($p = 0, \tilde{z} = 0$) es un mínimo aislado de la función $W(r, p, \tilde{z})$, entonces la misma califica como función de Lyapunov. ■

Así, la dinámica completa del sistema interconectado también se puede expresar a través de las ecuaciones de Hamilton en función del Hamiltoniano W como

$$\begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{p} \\ \dot{\tilde{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2n} & \mathbf{I}_{2n} & \mathbf{0}_{2n \times m} \\ -\mathbf{I}_{2n} & -\mathcal{F}(r)^T B \mathcal{F}(r) & -\mathcal{F}(r)^T \\ \mathbf{0}_{m \times 2n} & \mathcal{F}(r) & \mathbf{0}_m \end{bmatrix} \nabla W \quad (6.14)$$

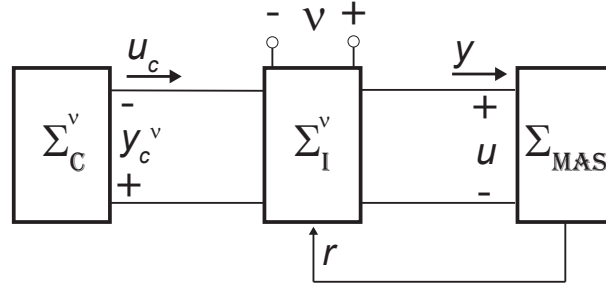
Analizando el orden del esquema CbI se tiene:

- $n_{\Sigma_{MAS}} = 4n$ que corresponden al orden del sistema PHS (6.7)
- $n_{\Sigma_C} = m$ que corresponden al orden del controlador PHS (6.9)

de manera que el orden total $n_{CbI} = 4n + m$ coincide con el del BG de la Figura 6.8.

6.2.3.1 Modelado con Señal Externa v

Con el objetivo de mostrar que el enfoque propuesto puede encuadrarse dentro de los aspectos de la teoría de CbI con señal externa [35], se propone una alternativa al esquema de CbI de la Figura 6.9, donde se añade una entrada externa v a través del sistema de interconexión Σ_I como se muestra en el esquema CbI de la Figura 6.10.

Fig. 6.10 Diagrama de bloque del CbI con entrada externa ν .

Si consideramos entonces que el amortiguamiento correspondiente al los ECB's lo introducimos a través de esta nueva señal ν , la dinámica del nuevo controlador Σ_c^ν , teniendo en cuenta sólo los resortes de los ECB's, se puede expresar como un conjunto de integradores no lineales

$$\Sigma_c^\nu : \begin{cases} \dot{\tilde{z}} &= u_c \\ y_c^\nu &= \frac{\partial H_r}{\partial \tilde{z}} \end{cases}$$

donde y_c^ν son las fuerzas ejercidas por los resortes virtuales. Luego, la expresión de ν la obtenemos del balance de potencia (6.12) como

$$\begin{aligned} -y^T u &= u_c^T y_c \\ &= u_c^T \frac{\partial H_r}{\partial \tilde{z}} + u_c^T B u_c \\ &= u_c^T f_r(\tilde{z}; z^*) + y^T \mathcal{F}(r)^T B \mathcal{F}(r) y \\ &= u_c^T y_c^\nu - y^T \nu \end{aligned}$$

donde $\nu = -\mathcal{F}(r)^T B \mathcal{F}(r) y$, de modo que se cumple que, para todo $t \geq 0$

$$y^T u + u_c^T y_c^\nu = y^T \nu \quad (6.15)$$

la interconexión conserva la potencia. Así, la expresión del nuevo subsistema de interconexión Σ_I^ν es

$$\Sigma_I^\nu : \begin{cases} \begin{bmatrix} u \\ u_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2n} & -\mathcal{F}(r)^T \\ \mathcal{F}(r) & \mathbf{0}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ y_c^\nu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2n} \\ \mathbf{0}_{m \times 2n} \end{bmatrix} \nu \end{cases}$$

y la dinámica del sistema a lazo cerrado representada a través de un modelo PHS es

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{p} \\ \dot{\tilde{z}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2n} & \mathbf{I}_{2n} & \mathbf{0}_{2n \times m} \\ -\mathbf{I}_{2n} & \mathbf{0}_{2n} & -\mathcal{F}(r)^T \\ \mathbf{0}_{m \times 2n} & \mathcal{F}(r) & \mathbf{0}_m \end{bmatrix} \nabla W + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2n} \\ \mathbf{I}_{2n} \\ \mathbf{0}_{m \times 2n} \end{bmatrix} \nu \\ y &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2n} & \mathbf{I}_{2n} & \mathbf{0}_{2n \times m} \end{bmatrix} \nabla W \end{aligned}$$

con entrada externa ν y salida colocada $y = \dot{r}$.

6.2.3.2 Funciones de Casimir

En esta sección presentamos importantes propiedades matemáticas que se desprenden de analizar el esquema de CbI con los conceptos desarrollados en [35] [90]. En el método de CbI se buscan funciones que sean dinámicamente invariantes e independientes del Hamiltoniano. Esto es, para asignar a la función de energía global una forma deseada, es necesario "relacionar" los estados de la planta r y el controlador $\tilde{z}$ mediante la generación de conjuntos invariantes definidos como *funciones de Casimir*. A continuación veremos cómo todas y cada una de estas condiciones y propiedades se revelaron de forma natural a lo largo de todo el desarrollo planteando en las secciones anteriores.

Primero, observamos que la función

$$\mathcal{K}(r, \tilde{z}) = \mathcal{F}(r)r - \tilde{z}$$

con $\mathcal{K} : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ restringe la evolución a un conjunto de $(r, \tilde{z})$ definido como

$$\Omega_c := \{(r, \tilde{z}) \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^m | \tilde{z} = \mathcal{C}(r) - c\}, \quad c \in \mathbb{R}^m \quad (6.16)$$

donde en este caso es $\mathcal{C}(r) = \mathcal{F}(r)r$ y $c = z^*$ (ver Observación 6.2).

Observación 6.5. En este caso la constante c tiene un significado físico. Por un lado, elegir $c = z^*$ es definir las distancias deseadas entre agentes y por el otro, elegir $\Phi_c(z^*)$ es definir un mínimo de energía de los resortes en dicho valor. ■

Luego, el conjunto $\Omega_c \subset \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^m$ es invariante si $(r(0), \tilde{z}(0)) \in \Omega_c \Rightarrow (r(t), \tilde{z}(t)) \in \Omega_c$ para todo $t \geq 0$. Una condición, denominada la foliación de la variedad Ω_0 , necesaria y suficiente para que el conjunto Ω_c sea invariante, es que se cumpla que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{K} = 0$$

lo que en este caso implica que

$$\dot{\mathcal{C}}(r) - \dot{\tilde{z}} = 0$$

Teniendo en cuenta que $\dot{\mathcal{C}}(r) = \dot{z}$ y $\dot{\tilde{z}} = \dot{z}$, dicha condición se cumple por lo que el conjunto Ω_c es invariante. Un ejemplo de un conjunto invariante se muestra en la Figura 6.11.

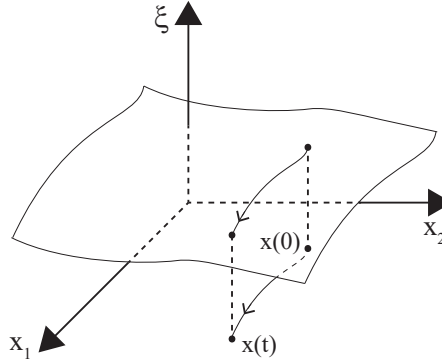


Fig. 6.11 Ejemplo de un conjunto invariante $\Omega_c = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid \xi = \mathcal{C}(x) - c\}$, $c \in \mathbb{R}$.

De este modo, proyectando la evolución del sistema sobre Ω_c , se puede expresar la dinámica (6.14) de forma reducida como

$$\begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2n} & \mathbf{I}_{2n} \\ -\mathbf{I}_{2n} & -\mathcal{F}(r)^T B \mathcal{F}(r) \end{bmatrix} \nabla W_c$$

donde la energía (6.13) se reemplazó por

$$W_c(r, p) := H_s(r, p) + H_c(\mathcal{F}(r)r - z^*) + \Phi_c(z^*)$$

En una segunda observación, vemos que la expresión de la energía de la ecuación (6.13) también se puede reescribir como

$$W(r, p, \tilde{z}) = H_s(r, p) + H_c(\tilde{z}) + \Phi_c(\mathcal{K}(r, \tilde{z}))$$

Dado que se cumple $\dot{\mathcal{K}} = 0$, se satisface que $\dot{\Phi}_c = 0$. Por lo tanto, teniendo en cuenta (6.15), es

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \dot{H}_s + \dot{H}_c \\ &= y^T u + u_c^T y_c^\nu = y^T \nu \end{aligned}$$

de modo que se cumple que⁴

$$\dot{W} \leq y^T \nu$$

Así, como $W(r, p, \tilde{z}) \geq 0$, el sistema a lazo cerrado es pasivo respecto a la energía $W(r, p, \tilde{z})$ y la misma puede ser moldeada eligiendo H_c y Φ_c . A esta conclusión habíamos llegado en la Observación 6.4.

Por otra parte, dado que la función $\mathcal{K}(r, \tilde{z})$ es independiente de las funciones de energía H_s y H_c , y como se cumple que $\dot{\mathcal{K}} = 0$, la misma califica como *función de*

⁴Sería menor si el MAS tuviera algún tipo de disipación.

Casimir, relacionando los estados de la planta r con los del controlador $\tilde{z}$ a través de conjuntos dinámicamente invariantes.

Analicemos ahora las condiciones iniciales del controlador. Como los conjuntos de nivel de la *función de Casimir* son invariantes, para asegurarse que la trayectoria comienza y permanece en Ω_c , se debe cumplir

$$\mathcal{F}(r(0))r(0) - \tilde{z}(0) = \mathcal{F}(r(t))r(t) - \tilde{z}(t)$$

para todo $t \geq 0$. Como $\mathcal{F}(r(t))r(t) = z(t)$, la condición inicial del controlador (los valores iniciales de z) debe satisfacer

$$z(0) = \mathcal{F}(r(0))r(0)$$

para cualquier vector $r(0)$. Dicho en otras palabras, no es posible asignar valores arbitrarios a los valores iniciales $z(0)$ dada las posiciones iniciales $r(0)$. Más allá de eso, imponer una restricción a la condición inicial del controlador no es prácticamente implementable, por lo que trataremos dicho problema en la próxima sección.

Para concluir con el análisis, observar que la deducción de la función $\mathcal{C}(r) = \mathcal{F}(r)r$ surge de manera natural por el enfoque empleado para deducir la ley de control. Esto es una gran ventaja ya que en general la obtención de dichas funciones implica encontrar funciones $\mathcal{C}(r)$ que satisfagan $\dot{\mathcal{C}} = 0$. O sea, se busca la resolución de ecuaciones en derivadas parciales (PDE, Partial Differential Equations) de la forma

$$\begin{bmatrix} (\nabla \mathcal{C})^T & -\mathbf{I}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\tilde{z}} \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{m \times 1}$$

donde en este caso la función $\mathcal{C}(r) = \mathcal{F}(r)r$ es obviamente una solución de dichas PDE, siendo (ver Observación 5.1 del capítulo 5)

$$\begin{aligned} (\nabla \mathcal{C})^T &= (\nabla \mathcal{F}(r)r)^T \\ &= \left(\frac{\partial \mathcal{F}(r)r}{\partial r} \right)^T \\ &= \mathcal{F}(r) \end{aligned}$$

6.2.4 Control por Retroalimentación

En esta sección mostraremos que el esquema de CbI presentando puede ser interpretado como un control por retroalimentación estático.

6.2.4.1 Control PI

La dinámica del CbI de la Figura 6.9 puede expresarse como un esquema a lazo cerrado donde el sistema Σ_{MAS} es retroalimentado a través de un controlador PI, como se muestra en la Figura 6.12.

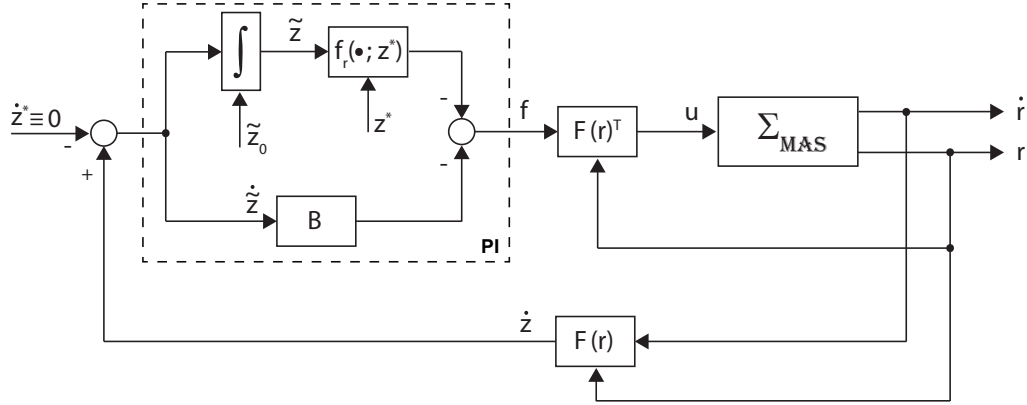


Fig. 6.12 Diagrama de bloques del MAS retroalimentado con un PI.

Ahora bien, teniendo en cuenta que los estados del controlador $\tilde{z}$ se pueden expresar en función de los estados del sistema r a través de funciones de Casimir y que $\dot{z}^* = 0$, es posible manipular el esquema de la Figura 6.12 de manera de obtener un sistema con retroalimentación estática.

6.2.4.2 Control por Retroalimentación Estática

Como el estado $\tilde{z}$ se puede construir como la diferencia entre las distancias $z = \mathcal{F}(r)r$ y sus valores deseados z^* , el esquema de la Figura 6.12 puede manipularse de manera de obtener el sistema con retroalimentación estática de la Figura 6.13, donde no es necesaria la utilización de integradores.

Esto trae aparejado dos ventajas, por un lado se evita definir las condiciones iniciales del controlador, algo que resulta poco natural como se mencionó en la Observación 6.2. Por el otro, la eliminación del bloque integrador hace que el orden del sistema disminuya en m , de manera que el nuevo orden del sistema a lazo cerrado es $n_\Sigma = 4n$.

Observación 6.6. En este caso la dinámica a lazo cerrado es la misma, con la diferencia que los estados $\tilde{z}$ se construyen como $\tilde{z} = \mathcal{F}(r)r - z^*$ en lugar de $\tilde{z} = \int \mathcal{F}(r)\dot{r}$, evitando así tener que definir la condición inicial de integración como $\mathcal{F}(r(0))r(0) - z^*$. ■

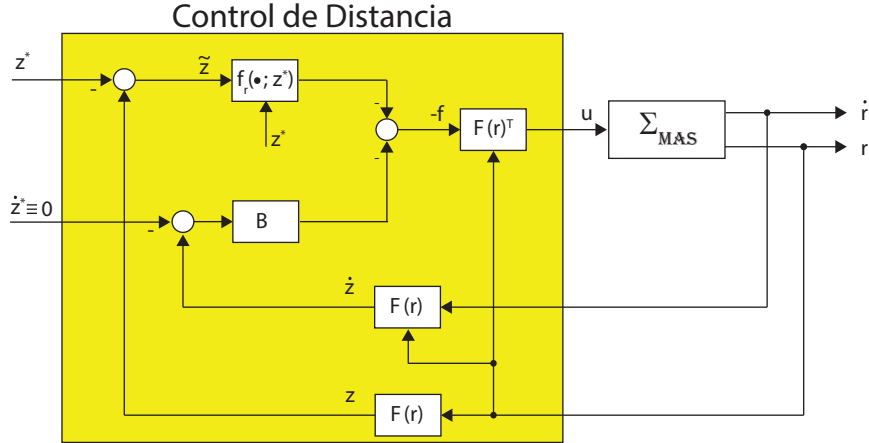


Fig. 6.13 Diagrama de bloques del MAS con retroalimentación estática.

6.2.5 Análisis de Estabilidad

Como se señaló en la Observación 6.4, para probar estabilidad proponemos como función candidata de Lyapunov a la energía total del sistema a lazo cerrado (6.13)

$$V(\dot{r}, \tilde{z}) = \frac{1}{2} \dot{r}^T M \dot{r} + H_c(\tilde{z}) + \Phi_c(z^*) > 0 \quad \forall \dot{r}, \tilde{z} \neq 0$$

donde se tuvo en cuenta que $M\dot{r} = p$. Derivando respecto al tiempo y teniendo en cuenta la dinámica a lazo cerrado definida en (6.14), se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{r}^T M \ddot{r} + \left(\frac{\partial H_c}{\partial \tilde{z}} \right)^T \dot{\tilde{z}} \\ &= \dot{r}^T \dot{p} + \left(\frac{\partial H_c}{\partial \tilde{z}} \right)^T \dot{z} \\ &= -\dot{r}^T \left(\mathcal{F}(r)^T B \mathcal{F}(r) \dot{r} + \mathcal{F}(r)^T \frac{\partial H_c}{\partial \tilde{z}} \right) + \left(\frac{\partial H_c}{\partial \tilde{z}} \right)^T \mathcal{F}(r) \dot{r} \\ &= -\dot{r}^T \mathcal{F}(r)^T B \mathcal{F}(r) \dot{r} \end{aligned}$$

de modo que no se puede asegurar estabilidad asintótica del PE ya que (ver Corolario 5.2 del capítulo 5) la derivada $\dot{V}$ podría ser cero incluso con $\dot{r} \neq 0$. En el próximo capítulo presentaremos dos estrategias alternativas para sortear dicho inconveniente.

Observación 6.7. Se podría añadir amortiguamiento extra a los agentes a través de la señal ν para asegurar que las velocidades $\dot{r}$ converjan a cero y así, al igual que en el control de manipuladores en el espacio de trabajo con PD y compensación de gravedad (ver sección 8.5.1 de [2]), asegurar la convergencia a la postura de equilibrio. ■

Observación 6.8. El segundo método de Lyapunov es condición suficiente y no necesaria para asegurar estabilidad, de modo que el hecho de que la derivada orbital de la función de Lyapunov no sea definida negativa no implica que el PE no sea AE.

Sin embargo en este caso no es AE, ya que por ejemplo dos agentes unidos a través de un ECB pueden mantener una distancia constante pero estar moviéndose en el plano (para un caso específico de control de formación por distancia con este método en esta tesis ver el escenario **A** del capítulo 8). ■

6.3 Estructura de Referencia Virtual

Un sistema de masas puntuales vinculadas por restricciones holonómicas que fijan su posición puede considerarse como un cuerpo rígido. A dichas partículas se las puede considerar estacionarias respecto a un marco que también se está moviendo en el plano. Si las relaciones geométricas no son impuestas por un sistema físico de restricciones (por ejemplo las fuerzas moleculares que mantienen unido a un objeto sólido), sino por un sistema de control, la estructura se denomina estructura virtual. Con mayor generalidad, una estructura virtual es un conjunto de elementos, por ejemplo en este caso agentes, que mantienen una relación geométrica (semi)-rígida entre sí y con un marco de referencia [91] [92].

Con el enfoque de la estructura virtual, el control se deriva en tres pasos: (i) se define la dinámica deseada de la estructura virtual, (ii) el movimiento de la estructura virtual se traduce en el movimiento deseado para cada agente, (iii) se derivan los controles de seguimiento de cada agente [93] [94].

Definamos entonces una estructura de referencia virtual (VRS, Virtual Reference Structure) compuesta por una colección de n puntos de referencia virtual (VRP, Virtual Reference Points) que se mueven con una trayectoria predeterminada en el plano y tiene un marco local asociado. En esta tesis trabajaremos con una VRS semi-rígida, i.e., las distancias entre los VRP que la componen pueden variar en el tiempo.

A modo ilustrativo, consideremos la VRS de la Figura 6.14 compuesta por 7 VRP y un Marco de referencia $O_S - X_S Y_S Z_S$ solidario a la estructura. Sea $r_S = [x_S, y_S]^T$ el vector que describe la posición del Marco S en el plano, $r_i^* = [x_i^*, y_i^*]^T$ el vector de coordenadas del i -ésimo VRP con respecto al Marco fijo F , y r_i^S el vector de coordenadas del i -ésimo VRP expresado en el Marco S , la relación entre ellos se puede escribir como

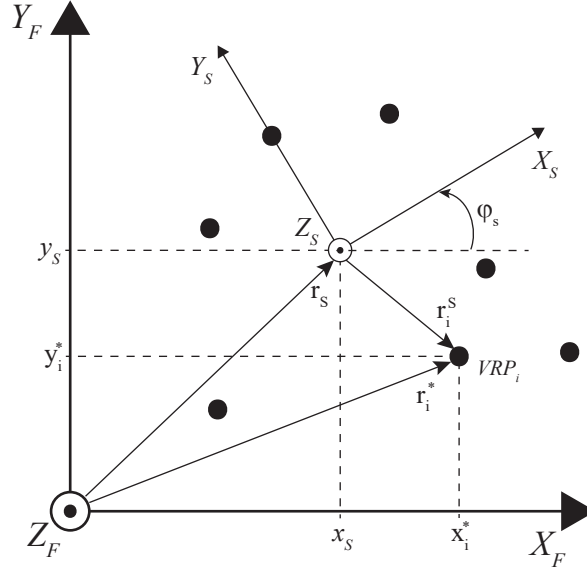
$$r_i^* = r_S + R_S r_i^S$$

donde

$$R_S = \begin{bmatrix} c_{\varphi_S} & -s_{\varphi_S} \\ s_{\varphi_S} & c_{\varphi_S} \end{bmatrix}$$

De este modo, las expresiones de velocidad y aceleración del agente i son

$$\begin{aligned} \dot{r}_i^* &= \dot{r}_S + \dot{R}_S r_i^S + R_S \dot{r}_i^S \\ \ddot{r}_i^* &= \ddot{r}_S + \ddot{R}_S r_i^S + 2\dot{R}_S \dot{r}_i^S + R_S \ddot{r}_i^S \end{aligned}$$

Fig. 6.14 Ejemplo de una VRS con $n = 7$ agentes.

donde

$$\dot{R}_s = \begin{bmatrix} -s_{\varphi_s} & -c_{\varphi_s} \\ c_{\varphi_s} & -s_{\varphi_s} \end{bmatrix} \dot{\varphi}_s \quad \ddot{R}_s = \begin{bmatrix} -c_{\varphi_s} & s_{\varphi_s} \\ -s_{\varphi_s} & -c_{\varphi_s} \end{bmatrix} \dot{\varphi}_s^2 + \begin{bmatrix} -s_{\varphi_s} & -c_{\varphi_s} \\ c_{\varphi_s} & -s_{\varphi_s} \end{bmatrix} \ddot{\varphi}_s$$

En el caso de que los VRP mantengan una relación geométrica rígida con respecto al Marco móvil $O_S - X_S Y_S Z_S$, entonces $\dot{r}_i^S = 0$ y las expresiones de velocidad y aceleración deseadas serían

$$\begin{aligned} \dot{r}_i^* &= \dot{r}_s + \dot{R}_s r_i^S \\ \ddot{r}_i^* &= \ddot{r}_s + \ddot{R}_s r_i^S \end{aligned}$$

Por su parte, a cada agente (modelado como punto de masa material en el plano) lo definimos como un agente real equivalente (REA, Real Equivalent Agent).

6.4 Conclusiones

En este capítulo se presentaron dos estrategias de control de formación de MAS, una con enfoque físico y la otra geométrico. Se probó estabilidad en sentido Lyapunov de ambas estrategias y se demostraron importantes propiedades matemáticas.

El control de formación que se presentó con enfoque físico se basa en la unión de los agentes con bloques virtuales de resortes y amortiguadores. Se realizó un cambio de variables para asegurar pasividad del ECB y se mostró que las principales ventajas de esta perspectiva son que las leyes de control tienen una interpretación física y el objetivo de control se puede pensar como el moldeado de una función energía.

Se demostró que el sistema interconectado de agentes y ECB's podía interpretarse como un esquema de CbI gracias al uso de la teoría de grafos, de modo que, en base a la extensa literatura existente, el sistema interconectado de agentes heredó todas las propiedades del CbI. Se analizó el orden, la conservación de potencia y las funciones de energía de los distintos bloques. El modelado en BG fue el hilo conductor que permitió ir vinculando los distintos modelos y sus propiedades.

Una de las propiedades que se resaltaron fue que la interconexión de agentes con los ECB's relacionaba las posiciones de los primeros con las longitudes de los segundos a través de conjuntos invariantes. Así, se demostró que la matriz de formación permitía vincular los estados de los agentes con las distancias a través de funciones de Casimir. Es importante resaltar que los análisis que se formalizaron luego, se fueron revelando de manera natural a lo largo del todo el desarrollo en las secciones precedentes.

Es sabido que el esquema de CbI puede ser naturalmente descrito por un sistema realimentado con un controlador PI. Sin embargo, aprovechando la propiedad de invariancia de la matriz de formación, se reemplazó el esquema por una realimentación estática y así se evitó fijar las condiciones iniciales del controlador con los valores deseados, un problema que se había observado con anterioridad.

Finalmente se presentó una estrategia de control de formación con inspiración geométrica basada en el concepto de estructura virtual. Se mostró el esquema de seguimiento de trayectoria y se verificó estabilidad.

Se prevé que las contribuciones principales de este capítulo sean publicadas a la brevedad. Algunos resultados en el control de formación de MAS con inspiración física fueron publicados en [3] y [4]. El moldeado de la energía para la estabilización de un sistema subactuado con perturbaciones fue aplicado sobre un prototipo experimental de discos, cuyos resultados fueron publicados en los artículos de conferencia [9], revista [11] y capítulo de libro [12].

Bibliografía

Los trabajos [87], [88] y [79] describen de manera detallada el estado del arte del control de formación de MAS. Las distintas definiciones de pasividad se pueden consultar en [29]. Definiciones y propiedades sobre teoría de CbI de sistemas port-Hamiltonianos se pueden encontrar en [27] [34] [35]. En [95] se resuelve vía moldeado de la energía el problema de coordinación robusta de un MAS. En [96], partiendo de modelos dinámicos PHS, se provee una solución físicamente interpretable a la ley de control de formación con acoples virtuales para una red de robots móviles con locomoción diferencial. En [97] se muestra que cuando el intercambio de información entre agentes es bidireccional el lazo cerrado se comporta como una estructura de interconexión que hereda las propiedades de pasividad de sus componentes. En [90] se propone una estrategia para evitar inicializar el controlador para un esquema de CbI de PHS. En ese mismo trabajo

se abordan sucintamente las definiciones y conceptos sobre las funciones de Casimir. En [30] se abordan condiciones suficientes para la existencia de funciones de Casimir.

Capítulo 7

Esquemas de Control de Sistemas Multiagentes

En el capítulo anterior se presentaron dos técnicas de control de formación de MAS con distintos enfoques que, si bien resuelven el problema básico de control de formación, el control del MAS puede requerir de más medidas fundamentalmente por dos razones: (i) para satisfacer objetivos adicionales en relación con referencias de movimiento, (ii) para rechazar perturbaciones, conferir robustez y/o evitar colisiones entre agentes o eludir obstáculos.

En el presente capítulo se presentan diversos esquemas de control de formación extendido y cooperación de MAS. Se comienza con dos estrategias de control de formación por *distancia*. La primera, partiendo del esquema de control con enfoque físico presentado con los ECB's del capítulo anterior, consiste en designar un agente líder para controlar la posición y orientación de la formación. La segunda, inspirada en la teoría de manipuladores robóticos, plantea una analogía entre la matriz de formación y el Jacobiano para controlar topologías con distancias entre agentes variables en el tiempo y la posición de los mismos a través del espacio nulo de la matriz de formación.

Luego se presenta un control de formación por *posición* utilizando la técnica de estructura virtual mostrada en el capítulo anterior. Se introduce una ley para prevención de colisiones y un rediseño -basado en estabilidad Lyapunov- para asegurar convergencia al PE.

Seguidamente, se desarrolla un control de *cooperación* para MM actuando en un MAS realizando tareas de forma coordinada.

Para la elusión de obstáculos se presenta una estrategia de control, inspirada físicamente, que se puede incorporar a los esquemas de vistos anteriormente.

Finalmente se ilustran distintos tipos de controles para los motores que accionan las juntas para el caso que la dinámica de los mismos sea tomada en cuenta en los modelos del MAS.

En todos los casos se analiza la estabilidad en el sentido de Lyapunov del lazo cerrado para agentes modelados como puntos materiales y después se extiende para los modelos dinámicos vistos en los capítulos anteriores.

7.1 Introducción

El control de formación apunta a conducir una cierta cantidad de agentes a que alcancen determinadas restricciones en sus estados. Para el caso de control de formación por distancia, dichos estados son las distancias entre los agentes y las restricciones el largo de las mismas [79]. En esa dirección se ofrecieron soluciones en el capítulo 6.

La metodología presentada para el desarrollo de los *esquemas de control* de este capítulo es del tipo acumulativa y está inspirada en el libro [22]. Esto significa que, dependiendo del escenario donde se simule el MAS, los *esquemas de control* combinarán distintas *estrategias de control* en pos de cumplir con objetivos de control del correspondiente escenario. En todos los casos se verifica convergencia al PE deseado analizando la estabilidad en sentido de Lyapunov del esquema de control a lazo cerrado.

Entre los diversos objetivos que aquí puede llegar a tener que cumplir un esquema de control de MAS se encuentran: (i) Seguimiento de trayectorias, (ii) Formación, (ii) Cooperación, (iv) Prevención de colisiones, (v) Elusión de singularidades, (vi) Estabilidad anti-vuelco para los MM, (vii) Elusión de obstáculos para los agentes individuales. Como los objetivos a cumplir pueden ser más de uno, se los diferencié según su jerarquía y se los agrupó en distintos niveles como se muestra en la Figura 7.1.

A lo largo de todo el capítulo se irán presentando las distintas estrategias de control para atacar cada uno de los diferentes objetivos mostrados en la Figura 7.1, y se buscará a través de distintos esquemas de control, siempre que sea posible, respetar dicha jerarquía.

Por su parte, en los esquemas de control de formación que se presenten en este capítulo, el objetivo será formar a los agentes bajo una determinada topología. Sin

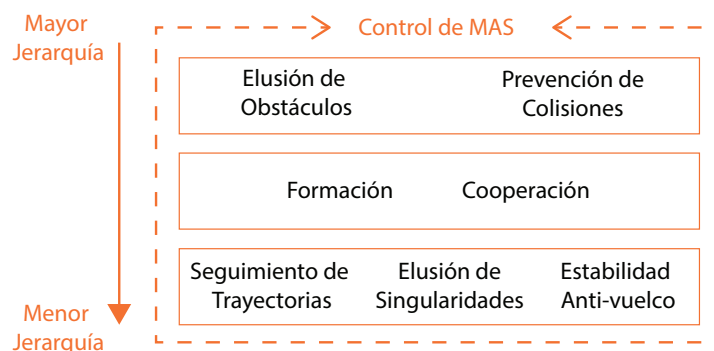


Fig. 7.1 Organización teórica de los objetivos de control.

embargo, existen casos en los que, aún respetándose las restricciones de distancia impuestas por el controlador, no se logra formar la topología deseada. Aquí identificamos dos fenómenos que bautizaremos como *espejismo* y *desdoblamiento*, mostrados en la Figura 7.2. Dada una topología deseada (Figura 7.2a), el primer fenómeno consiste en que los agentes se forman en la topología deseada pero espejada respecto a un eje de simetría local (Figura 7.2b). En el segundo caso, para una determinada restricción en la distancia entre agentes, existen distintas posiciones posibles para los mismos (Figura 7.2c).

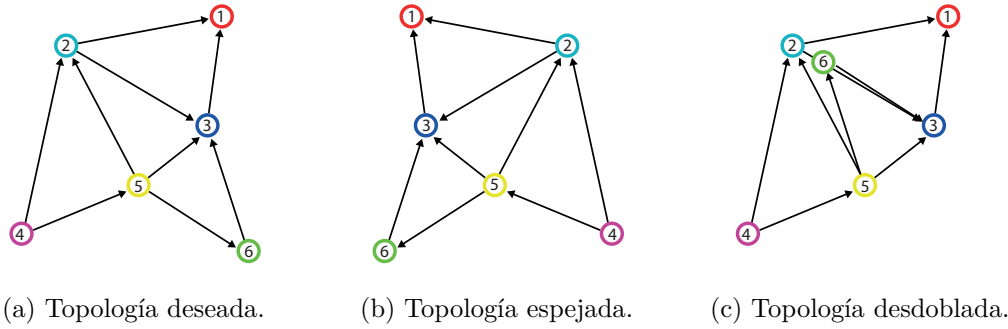


Fig. 7.2 Variaciones de la topología deseada aún respetándose las distancias deseadas entre agentes.

7.2 Control de Formación por Distancia Extendido

En el capítulo anterior se demostró que para el esquema de control por distancia de la Figura 6.13 no se podía asegurar que las velocidades de los agentes convergieran a cero, o sea, las distancias deseadas podían ser respetadas pero los agentes podrían continuar moviéndose. En ese caso la entrada de control era $u = y_d$, donde¹

$$\begin{aligned} y_d &= \mathcal{F}(r)^T (-f) \\ &= -\mathcal{F}(r)^T (f_r(\tilde{z}; z^*) + B\dot{\tilde{z}}) \end{aligned} \quad (7.1)$$

y la dinámica a lazo cerrado del MAS con agentes modelados como puntos materiales

$$M\ddot{r} = y_d$$

Consideración de la prevención de colisiones en la ley de control de formación.

Para evitar colisiones entre agentes y conseguir que se acerquen cuando los mismos están a distancias mayores a z^* , la expresión de la fuerza no lineal $f_{rk}(z_k; z_k^*)$ ejercida

¹Para mayor facilidad de lectura recordamos que $\mathcal{F}(r)$ es la matriz de formación, f la fuerza ejercida por los ECB, r las posiciones en el plano de los agentes, z^* las distancias deseadas, y $\tilde{z}$ el error de distancia.

por el resorte virtual del ECB se elige como

$$f_{rk}(z_k; z_k^*) = \begin{cases} \left(\frac{z_k^{*3}}{(z_k^* - \hat{z}_k)^3} - \frac{z_k^{*3}}{(z_k - \hat{z}_k)^3} \right) \mu_R & \text{si } z_k < z_k^* \\ k_{lk} (z_k - z_k^*) & \text{si } z_k \geq z_k^* \end{cases}$$

donde z_k^* la longitud deseada entre agentes y μ_R y k_{lk} valores constantes positivos.

Observación 7.1. El parámetro $\hat{z}_k$ permite elegir la distancia mínima permitida entre dos agentes, que varíe entre cero y el valor deseado z_k^* .

Eligiendo $\hat{z}_k = 0$ se obtiene

$$f_{rk}(z_k; z_k^*) = \begin{cases} \left(1 - \frac{z_k^{*3}}{z_k^3} \right) \mu_R & \text{si } z_k < z_k^* \\ k_{lk} (z_k - z_k^*) & \text{si } z_k \geq z_k^* \end{cases} \quad (7.2)$$

Así, como se puede observar en la Figura 7.3a, cuando la distancia z_k tienda a $\hat{z}_k = 0$ la fuerza f_{rk} tiende a infinito, el resorte trabaja en compresión y se evitan colisiones entre agentes. Para distancias z_k mayores a la de referencia z_k^* el resorte virtual trabaja en tracción, y la fuerza ejercida es positiva, atrayendo ambos agentes.

Observación 7.2. Si se elige $k_{lk} = 3 \frac{\mu_R}{z_k^*}$ la función $f_{rk}(z_k; z_k^*)$ posee derivada continua en todo su dominio. ■

Considerando ahora el error de distancias $\tilde{z} = z - z^*$, la ecuación (7.2) se puede reescribir como

$$f_{rk}(\tilde{z}_k; z_k^*) = \begin{cases} \left(1 - \frac{z_k^{*3}}{(\tilde{z}_k + z_k^*)^3} \right) \mu_R & \text{si } \tilde{z}_k < 0 \\ k_{lk} \tilde{z}_k & \text{si } \tilde{z}_k \geq 0 \end{cases} \quad (7.3)$$

cuya gráfica ahora es la de la Figura 7.3b. Dicha fuerza además se puede expresar como

$$f_{rk}(\tilde{z}_k; z_k^*) = \frac{\partial H_{rk}}{\partial \tilde{z}_k}$$

donde $H_{rk}(\tilde{z}_k)$ es el Hamiltoniano del ECB y equivale a la energía total (potencial) del mismo. Evaluando la integral, la expresión del Hamiltoniano resulta

$$\begin{aligned} H_{rk}(\tilde{z}_k) &= \begin{cases} \left(\tilde{z}_k + \frac{z_k^{*3}}{2(\tilde{z}_k + z_k^*)^2} \right) \mu_R - \frac{1}{2} \mu_R z_k^* & \text{si } \tilde{z}_k < 0 \\ \frac{k_{lk}}{2} \tilde{z}_k^2 & \text{si } \tilde{z}_k \geq 0 \end{cases} \\ &= H_{ck}(\tilde{z}_k) + \Phi_{ck}(z_k^*) \end{aligned}$$

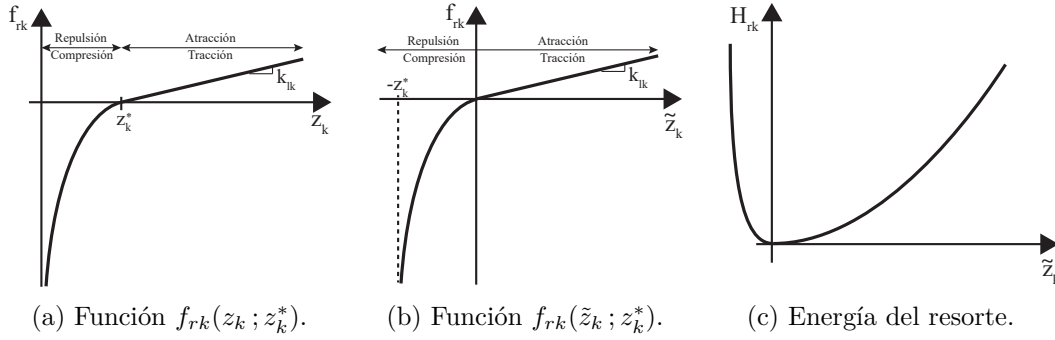


Fig. 7.3 Propiedades del resorte virtual del ECB.

donde el término $\Phi_{ck}(z_k^*) = -\frac{1}{2}\mu_R z_k^*$ es la constante de integración cuyo valor se elige de manera que el Hamiltoniano tenga un mínimo en $z_k = z_k^*$, como se puede apreciar en la Figura 7.3c.

Observación 7.3. La pasividad del ECB se asegura con el cambio de coordenadas y la introducción del término μ_R permitiendo, como se muestra en la Figura 7.3b, la excursión de la función $f_{rk}(\tilde{z}_k; z_k^*)$ en el primer y tercer cuadrante. ■

A continuación presentamos dos estrategias que forman parte de las contribuciones de esta tesis para asegurar que la formación se detenga en una posición y orientación determinada. Una consiste en agregar una ley de control extra para conducir al MAS a una postura de equilibrio deseada, y la otra, inspirada en el control de manipuladores redundantes, aprovecha el espacio nulo de la matriz de formación $\mathcal{F}(r)$ para introducir una segundo objetivo de control.

7.2.1 Agente Líder

En esta sección presentamos una nueva ley de control, inspirada en el comportamiento de los cuerpos rígidos que se mueven en un plano y basada en el método directo de Lyapunov, para posicionar al MAS interconectado de la Figura 6.4 (en el marco de un enfoque líder-seguidor) en una determinada posición y orientación en el plano.

Consideremos que el MAS interconectado caracterizado por un grafo $\mathcal{G}$ como el de la Figura 6.7, y dos agentes vecinos cualesquiera i y j conectados a través de la arista k , como se muestra en la Figura 7.4. Fijando la posición del agente líder i y la orientación de la arista k , se pueden determinar los tres GL del MAS en el plano. De este modo, controlando la posición de los agentes i y j aseguramos tanto el control de la posición como de la orientación del MAS interconectado.

Consideremos dos agentes i y j en el plano, con velocidades cartesianas $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$ y $\dot{x}_j$, $\dot{y}_j$, respectivamente. Siempre existirá un segmento que una ambos agentes, de manera

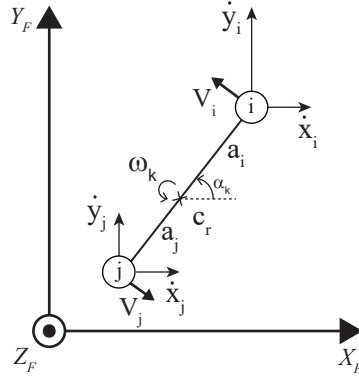


Fig. 7.4 Velocidades en la arista k rotando alrededor del punto c_r .

que las velocidades tangenciales al mismo se pueden expresar como

$$\begin{aligned} V_i &= -\dot{x}_i \sin \alpha_k + \dot{y}_i \cos \alpha_k \\ V_j &= \dot{x}_j \sin \alpha_k - \dot{y}_j \cos \alpha_k \end{aligned}$$

donde α_k es el ángulo que forma dicho segmento con el eje horizontal X_F .

Ahora bien, si el segmento rota respecto a un determinado centro instantáneo de rotación c_r , el mismo se encontrará a una distancia a_i y a_j de los agentes i y j , respectivamente, pudiéndose expresar las mismas como

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{V_i}{\omega_k} \\ a_j &= \frac{V_j}{\omega_k} \end{aligned} \tag{7.4}$$

donde $\omega_k = \dot{\alpha}_k$ es la velocidad de rotación del segmento.

Sumando miembro a miembro los términos de la ecuación (7.4), y considerando que $z_k = a_i + a_j$, la velocidad de rotación se puede expresar como

$$\omega_k = \frac{V_i + V_j}{z_k}$$

Así se obtiene

$$\omega_k = -\frac{\sin \alpha_k}{z_k} \dot{x}_i + \frac{\cos \alpha_k}{z_k} \dot{y}_i + \frac{\sin \alpha_k}{z_k} \dot{x}_j - \frac{\cos \alpha_k}{z_k} \dot{y}_j$$

Ahora definamos el vector $a := [x_i, y_i, \alpha_k]^T$ que representa la posición cartesiana del agente líder i y el ángulo de la arista k . Su derivada respecto al tiempo se puede expresar como

$$\dot{a} = \mathcal{A}(r)\dot{r}$$

donde $\mathcal{A}(r)$ se define como la *matriz líder*, de dimensión $(3 \times 2n)$ y cuya expresión es

$$\mathcal{A}(r) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -\frac{\sin \alpha_k}{z_k} & \frac{\cos \alpha_k}{z_k} & \frac{\sin \alpha_k}{z_k} & -\frac{\cos \alpha_k}{z_k} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$\uparrow_{2i-1} \quad \uparrow_{2i} \quad \uparrow_{2j-1} \quad \uparrow_{2j}$

donde la ubicación de las columnas es $2i-1$, $2i$, $2j-1$ y $2j$. De esta manera, velocidades $\dot{z}$ y $\dot{a}$ se relacionan con las velocidades de los agentes $\dot{r}$ a través de la transformación

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{a} \end{bmatrix} = \mathcal{T}(r)\dot{r} \quad ; \quad \mathcal{T}(r) = \begin{bmatrix} \mathcal{F}(r) \\ \mathcal{A}(r) \end{bmatrix}$$

Proposición 7.1. *Si el sistema multiagente viene caracterizado por un grafo $\mathcal{G}$ mínimamente rígido, entonces $\mathcal{T}(r)$ es una matriz cuadrada de dimensión $(2n \times 2n)$ y tiene rango pleno igual a $2n$.*

Demostración. Por un lado, de la Proposición (5.3) del capítulo 5, se sabe que la matriz $\mathcal{F}(r)$ tiene rango pleno igual a m . Por otro lado, la matriz líder $\mathcal{A}(r)$ tiene rango pleno igual a 3, ya que tiene todas sus filas linealmente independientes (y a su vez las filas de $\mathcal{A}(r)$ son independientes de las filas de la matriz $\mathcal{F}(r)$). De este modo, como $m = 2n - 3$ por ser el grafo $\mathcal{G}$ mínimamente rígido, la matriz $\mathcal{T}(r)$ tiene dimensión $(2n \times 2n)$ y rango pleno igual a $m + 3 = 2n$. $\square$

Corolario 7.1. *Si el sistema multiagente viene caracterizado por un grafo $\mathcal{G}$ mínimamente rígido, el espacio nulo de la matriz $\mathcal{T}(r)^T$ es el conjunto vacío.*

Demostración. Como la matriz $\mathcal{T}(r)$ es cuadrada y de rango pleno entonces $\mathcal{N}(\mathcal{T}) = \mathcal{N}(\mathcal{T}^T) = \emptyset$. $\square$

7.2.1.1 Estabilidad y Ley de Control

Sea $y_a \in \mathbb{R}^{2n}$ una nueva entrada de control, que se suma a la y definida en la ecuación (7.1), encargada de conducir al MAS interconectado a la postura y orientación deseada. Para obtener la expresión de la nueva entrada de control, se propone la siguiente función de Lyapunov

$$V(\dot{r}, \tilde{z}, \tilde{a}) = \frac{1}{2} \dot{r}^T M \dot{r} + H_c(\tilde{z}) + \Phi_c(z^*) + \frac{1}{2} \tilde{a}^T K_{Ia} \tilde{a} > 0 \quad \forall \dot{r}, \tilde{z}, \tilde{a} \neq 0$$

donde $\tilde{a} = a^* - a$ es el error de posición, siendo $a^* = [x_i^*, y_i^*, \alpha_k^*]^T$ el vector de referencia deseado y K_{Ia} una matriz diagonal positiva de dimensión (3×3) . Derivando

respecto al tiempo, se tiene

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \dot{r}^T M \ddot{r} + \left(\frac{\partial H_c}{\partial \tilde{z}} \right)^T \dot{\tilde{z}} + \tilde{a}^T K_{Ia} \dot{\tilde{a}} \\
&= \dot{r}^T (y_d + y_a) + f_r(\tilde{z}; z^*)^T \dot{z} + \tilde{a}^T K_{Ia} \dot{\tilde{a}} \\
&= -\dot{r}^T \mathcal{F}(r)^T f + \dot{r}^T y_a + f_r(\tilde{z}; z^*)^T \mathcal{F}(r) \dot{r} + \tilde{a}^T K_{Ia} \dot{\tilde{a}} \\
&= -\dot{r}^T \mathcal{F}(r)^T B \mathcal{F}(r) \dot{r} + \dot{r}^T y_a + \tilde{a}^T K_{Ia} \dot{\tilde{a}}
\end{aligned}$$

Si se considera la referencia a^* constante, es $\dot{\tilde{a}} = -\mathcal{A}(r)\dot{r}$, de modo que eligiendo la ley de control como

$$y_a = \mathcal{A}(r)^T f_a \quad (7.5)$$

donde

$$f_a = K_{Pa} \dot{\tilde{a}} + K_{Ia} \tilde{a}$$

y K_{Pa} es una matriz diagonal positiva de dimensión (3×3) , se llega a

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= -\dot{r}^T \mathcal{F}(r)^T B \mathcal{F}(r) \dot{r} - \dot{r}^T \mathcal{A}(r)^T K_{Pa} \mathcal{A}(r) \dot{r} \\
&= -\dot{r}^T \mathcal{T}(r)^T \gamma \mathcal{T}(r) \dot{r}
\end{aligned}$$

donde $\gamma = \text{diag}\{[B, K_{Pa}]\}$ es una matriz de dimensión $(2n \times 2n)$ definida positiva. Así, si el MAS viene caracterizado por un grafo mínimamente rígido $\mathcal{G}$, entonces por la proposición (7.1), $\dot{r}$ tiende a cero. De este modo, la derivada de la función de Lyapunov es semidefinida negativa ya que

$$\dot{V} = 0 \quad \text{para } \dot{r} = 0, \forall \tilde{z}, \tilde{a}$$

Como $\dot{V} = 0$ es semidefinida negativa pero no definida negativa, se concluye que el PE es estable pero no se puede asegurar que sea asintóticamente estable. Para probar esto último, debemos demostrar que la variedad definida por $\dot{r} = 0$ no es invariante bajo la dinámica. Para ello aplicamos el teorema de invariancia de LaSalle y analizamos la dinámica a lazo cerrado

$$\begin{aligned}
M \ddot{r} &= y_d + y_a \\
&= -\mathcal{F}(r)^T f + \mathcal{A}(r)^T f_a \\
&= -\mathcal{F}(r)^T (f_r(\tilde{z}; z^*) + B \mathcal{F}(r) \dot{r}) + \mathcal{A}(r)^T (K_{Pa} \dot{\tilde{a}} + K_{Ia} \tilde{a})
\end{aligned} \quad (7.6)$$

Si forzamos que $\dot{r} = 0$, entonces la dinámica a lazo cerrado queda

$$\begin{aligned}
M \ddot{r} &= -\mathcal{F}(r)^T f_r(\tilde{z}; z^*) + \mathcal{A}(r)^T K_{Ia} \tilde{a} \\
&= \mathcal{T}(r)^T \begin{bmatrix} -f_r(\tilde{z}; z^*) \\ K_{Ia} \tilde{a} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

De este modo, por el lema 7.1, si $\tilde{z} \neq 0$ o $\tilde{a} \neq 0$ entonces $\ddot{r} \neq 0$, por lo que el sistema seguirá evolucionando, de modo que el PE es asintóticamente estable. El correspondiente esquema de control se puede observar en la Figura 7.5. Notar que el controlador propuesto en (7.5) es un control PI ya que el error $\tilde{a}$ se obtiene integrando la salida del mapeo $\mathcal{A}(r)$ (es necesario definir las condiciones iniciales de $\tilde{a}$).

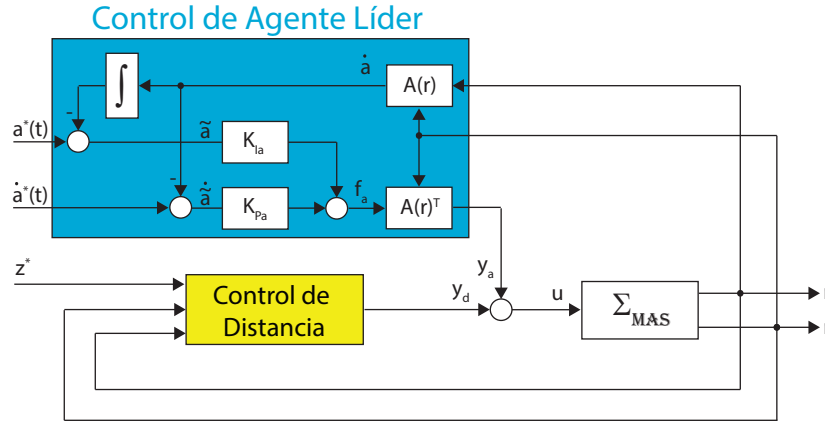


Fig. 7.5 Control de formación por distancia y agente líder con agentes modelados como puntos materiales.

7.2.1.1.1 Bases y Manipuladores Móviles Hasta aquí las leyes de control presentadas se aplicaron para agentes modelados como puntos materiales. A continuación representamos a los agentes con los modelos dinámicos de cuerpos rígidos de BM y MM vistos en el capítulo 5.

Para poder adaptar las leyes de control desarrolladas a los nuevos modelos dinámicos, nos valemos de las matrices Λ y $S(q)$ presentadas en el capítulo 5. La primera adapta las coordenadas y dimensiones ($s = \Lambda q$) y la segunda transforma las fuerzas en los torques de control ($\tau = S(q)^{-1}f$). De este modo, la ley de la entrada de control aplicada a los nuevos modelos es

$$u = S(q)^{-1} (u_d + u_a)$$

con

$$u_d = \Lambda^T y_d \quad u_a = \Lambda^T y_a$$

y el correspondiente esquema de control el de la Figura 7.6.

Sin embargo, a medida que el modelo del MAS es más realista, el control de formación resulta insuficiente ya que es necesario controlar el resto de las coordenadas de los modelos. Para ello se utiliza el conocido esquema de control por cancelación exacta en las coordenadas s (definidas en la sección 5.2.3 del capítulo 5) de manera independiente del resto de las posiciones r .

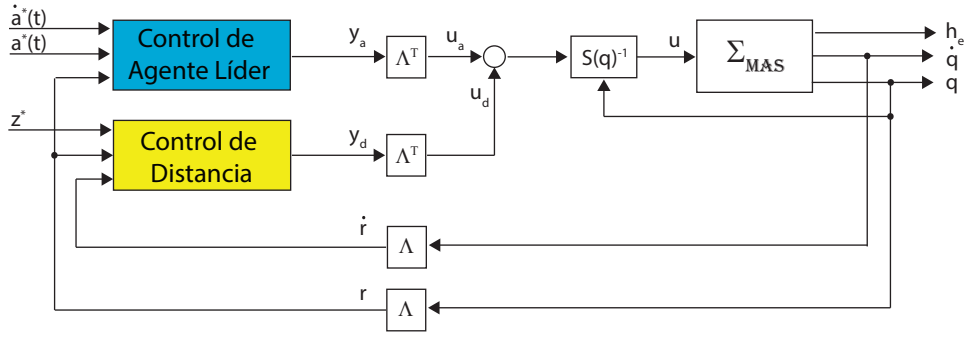


Fig. 7.6 Control de formación por distancia y trayectoria para modelos de agentes dinámicos.

Recordando el modelo general visto en el capítulo 5, un MAS compuesto por BM o MM se puede representar como

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = S(q)\tau + J^T(q)h_e$$

Por lo tanto, eligiendo la entrada de control $\tau = u$ como

$$u = S(q)^{-1} \left(M(q) [u_d + u_a + u_s] + n(q, \dot{q}) - J^T(q)h_e \right) \quad (7.7)$$

donde $n(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q)$ y la señal

$$u_s = \Pi^T y_s$$

con

$$y_s = \ddot{s}^* + K_{Ds}\dot{\tilde{s}} + K_{Ps}\tilde{s}$$

donde K_{Ds} y K_{Ps} son matrices diagonales de dimensión $n(l - 2 \times l - 2)$ y $\tilde{s} = s^* - s$ es el error de posición, la dinámica a lazo cerrado es

$$\ddot{q} = u_d + u_a + u_s$$

y el correspondiente esquema de control se muestra en la Figura 7.7.

Como las matrices Λ y Π mapean el vector de coordenadas q en r y s , respectivamente, se obtienen dos dinámicas desacopladas

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= y_d + y_a \\ \ddot{\tilde{s}} + K_{Ds}\dot{\tilde{s}} + K_{Ps}\tilde{s} &= 0 \end{aligned} \quad (7.8)$$

donde la segunda ecuación presenta una evolución de segundo orden con una tasa de convergencia a cero del error $\tilde{s}$ que depende del valor de las matrices K_{Ds} y K_{Ps} . Así, la cancelación exacta y las matrices Λ y Π permiten controlar de manera independiente

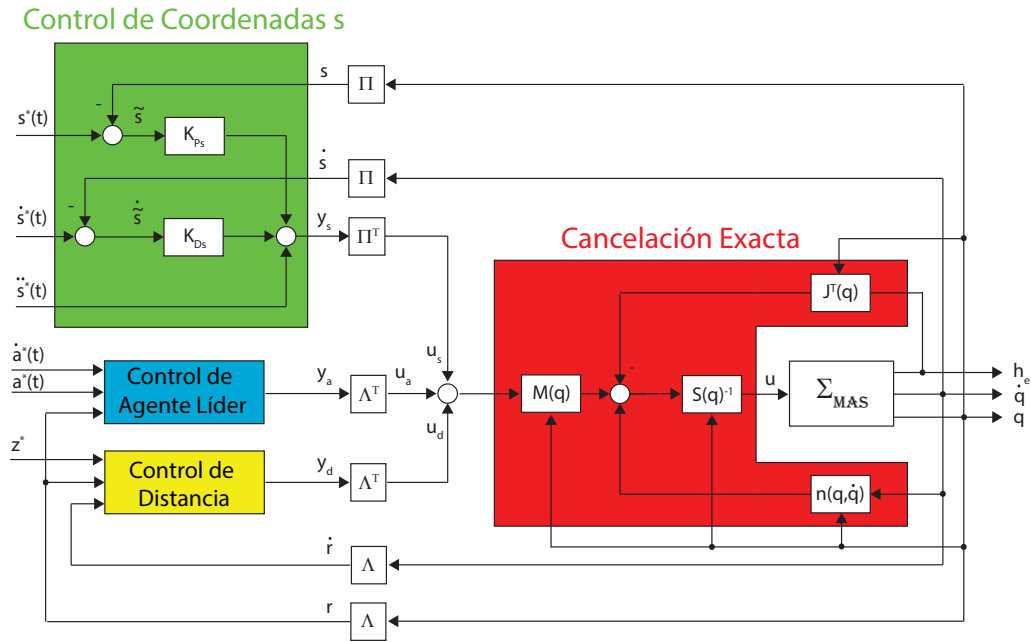


Fig. 7.7 Control de formación por distancia y agente líder con cancelación exacta para agentes modelados como BM o MM.

la posición de la base r del resto de las coordenadas s , respectivamente, de forma que el sistema a lazo cerrado con el controlador propuesto es estable.

Observación 7.4. Notar que la primera ecuación de (7.8) equivale a la dinámica a lazo cerrado de la ecuación (7.6) con la diferencia que la matriz de masa ahora es la matriz identidad. De este modo el análisis de estabilidad realizado en la sección anterior continúa siendo válido para los modelos de cuerpos rígidos de BM y MM. ■

7.2.2 Espacio de las Aristas

Inspirados en la teoría control de manipuladores robóticos, de manera análoga a la distinción que se realiza entre el control en espacio de trabajo y en espacio de las juntas, plantearemos una diferenciación para el control de formación del MAS interconectado de la Figura 6.4. En ese sentido, definimos al conjunto de las distancias z como el espacio de las aristas (análogo al espacio de trabajo) y el de las posiciones r de los agentes como el espacio de las posiciones de los agentes (análogo al espacio de las juntas).

Así, el esquema de control que se presenta a continuación está inspirado en el control por dinámica inversa de manipuladores robóticos redundantes. Planteando la analogía entre la matriz de formación $\mathcal{F}(r)$ y el Jacobiano $J(q)$, prescindimos del enfoque físico con ECB's con el que fue planteado originalmente el MAS interconectado de la Figura 6.4, y presentamos una ley de control de formación que permite el seguimiento de trayectoria de distancias deseadas $z(t)^*$ variables en el tiempo.

Analizando las soluciones de las aceleraciones de la ecuación 5.14 del capítulo 5, que para mayor comodidad se reescriben a continuación,

$$\ddot{r} = \mathcal{F}^{INV} (\ddot{z} - \dot{\mathcal{F}}\dot{r}) + (I - \mathcal{F}^{INV}\mathcal{F}) \ddot{r}_0$$

se puede apreciar que en el segundo término, denominado solución homogénea, las aceleraciones arbitrarias $\ddot{r}_0$ se proyectan en el espacio nulo de la matriz $\mathcal{F}$. Esto significa que en el caso de que $\ddot{z} = 0$, es posible generar movimientos de las agentes de manera que las distancias z entre los mismos se mantengan constantes y se cumpla con un objetivo secundario. El vector de aceleraciones $\ddot{r}_0$ se puede elegir, de manera análoga al vector $\ddot{q}_0$ de la ecuación 4.8, como

$$\ddot{r}_0 = k_0 \left(\frac{\partial \omega(r)}{\partial r} \right)^T$$

Los objetivos secundarios:

- **Prevención de Colisiones**

En este caso nos concentramos en todas las aristas entre agentes que no vienen representadas por la matriz de incidencia D del grafo $\mathcal{G}$. Considerando la distancias entre dichos agentes como z_{Fk} , proponemos la función

$$\omega(r) = \sum_{k=m+1}^M z_{Fk}^2$$

donde M es el número de aristas del grafo que representa todas las interacciones posibles entre agentes. Así, maximizando la función se aprovecha el espacio nulo para evitar colisiones entre agentes cuyas distancias no se controlan con el objetivo principal.

- **Control de Posición y Orientación**

La función a maximizar se elige como

$$\omega(r) = - \sum_i^j \tilde{r}_i^T \tilde{r}_i$$

donde el error $\tilde{r}_i = r_i^* - r_i$ es cero cuando $r_i = r_i^*$ para $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq n$. Así, maximizando la función $\omega(r)$ se mantienen lo más cerca posible las posiciones de los agentes a las deseadas. Si se define la posición deseada de un solo agente, se logra controlar la posición de la formación. Con dos agentes, se controla además la orientación. Para tres agentes o más, se previene además el riesgo de espejismo y desdoblamiento.

- **Minimización de la Velocidad de las Agentes**

Maximizando la función

$$\omega(\dot{r}) = -\dot{r}^T \dot{r}$$

se reducen al mínimo las velocidades de los agentes, asegurando convergencia a cero de las velocidades.

Observación 7.5. En todos los casos el control en el espacio nulo tiene por fin cumplir un objetivo secundario, por lo que no se puede asegurar que el mismo se cumpla si ello implica modificar la dinámica $\tilde{z}$ de la ecuación (7.10), o si la función $\omega(r)$ alcanza un máximo local, i.e., $\ddot{r}_0 = 0$ con $\omega(r) \neq 0$. ■

7.2.2.1 Estabilidad y Ley de Control

Eliendo la entrada de control del modelo dinámico del cuerpo rígido de la BM o MM como $\tau = u$, donde

$$u = S(q)^{-1} \left(M(q) [u_n + u_s] + n(q, \dot{q}) - J^T(q) h_e \right)$$

y $u_n = \Lambda^T y_n$, se obtiene el sistema lineal y desacoplado

$$\ddot{r} = y_n$$

$$\ddot{s} = y_s$$

de modo que la nueva entrada de control y_n se puede elegir con distintos criterios según sea el objetivo de control. Si se elige la acción de control como

$$y_n = \mathcal{F}^{INV} \left(\ddot{z}^* + K_D \dot{\tilde{z}} + K_P \tilde{z} - \dot{\mathcal{F}}(r, \dot{r}) \right) + (I - \mathcal{F}^{INV} \mathcal{F}) \ddot{r}_0 \quad (7.9)$$

donde z^* es la trayectoria deseada y K_D y K_P son matrices (diagonales) definidas positivas como

$$K_P = \text{diag}\{\omega_{n1}, \dots, \omega_{nm}\} \quad K_D = \text{diag}\{2\zeta_1 \omega_{n1}, \dots, 2\zeta_m \omega_{nm}\}$$

se obtiene que la dinámica del error $\tilde{z} = z^* - z$ a lazo cerrado

$$\ddot{\tilde{z}} + K_D \dot{\tilde{z}} + K_P \tilde{z} = 0 \quad (7.10)$$

que describe m evoluciones desacopladas que convergen a cero con una dinámica de segundo orden caracterizada por la frecuencia natural de oscilación ω_{ni} y el coeficiente de amortiguamiento ζ_i . El correspondiente esquema de control se aprecia en la Figura 7.8.

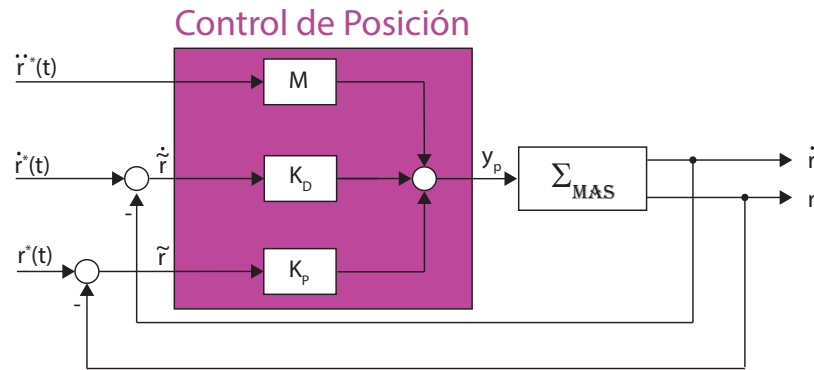


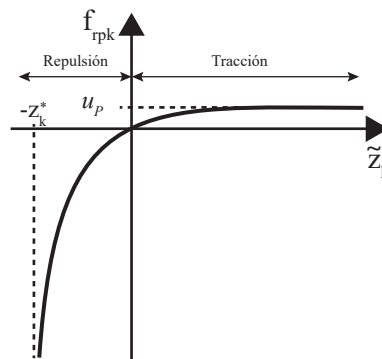
Fig. 7.9 Esquema de control de formación por posición de un MAS.

7.3.1 Prevención de Colisiones

Para prevenir la colisión entre agentes, implementamos el mismo enfoque físico con ECB utilizado en el control de distancia visto en la sección 6.2 del capítulo 6. En este caso la expresión de la ley de los resortes virtuales que componen los ECB's se elige como

$$f_{rp_k}(\tilde{z}_k; z_k^*) = \left(1 - \frac{z_k^{*3}}{(\tilde{z}_k + z_k^*)^3} \right) \mu_P$$

donde μ_P es una constante positiva. Con esta ley se busca que el resorte ejerza una mínima fuerza cuando actúa en tracción, ya que la intención es que la repulsión sea el fenómeno principal para evitar colisiones, como se muestra en la Figura 7.10. Por lo tanto, a μ_P se le asigna un valor mínimo que representa la máxima fuerza de tracción posible y juega un rol secundario, sólo a efectos de que el resorte cumpla con la propiedad de pasividad.

Fig. 7.10 Función $f_{rp_k}(\tilde{z}_k; z_k^*)$ para evitar colisiones.

Así, la ley para prevención de colisiones es

$$y_c = -\mathcal{F}(r)^T f$$

que, sumada a la señal de control de posición (7.11), da como resultado la siguiente dinámica a lazo cerrado

$$M\ddot{\tilde{r}} + K_D\dot{\tilde{r}} + K_P\tilde{r} = \mathcal{F}(r)^T f \quad (7.13)$$

Observación 7.6. En la condición de equilibrio dinámico, i.e. $\ddot{\tilde{r}} = \dot{\tilde{r}} = 0$, la ecuación 7.13 tiene la expresión

$$K_P\tilde{r} = \mathcal{F}(r)^T f_r(\tilde{z}; z^*)$$

Para que $f_r(\tilde{z}; z^*)$ sea cero (y por ende $\tilde{z}$ sea igual z^*) cuando $\tilde{r} = 0$, los valores de z^* se deben corresponder con los de la VRS. ■

Observación 7.7. Aún cumpliéndose con las condiciones de la Observación 7.6, existen infinitas configuraciones de equilibrio $(\tilde{r}, \tilde{z})$ en el equilibrio dinámico $\ddot{\tilde{r}} = \dot{\tilde{r}} = 0$, tal que se satisface

$$K_P\tilde{r} - \mathcal{F}(r)^T f_r(\tilde{z}; z^*) = 0$$

■

7.3.2 Análisis de Estabilidad

A continuación estudiamos la estabilidad del PE ($\tilde{r} = 0, \dot{\tilde{r}} = 0, \tilde{z} = 0$) del sistema a lazo cerrado (7.13). Para ello proponemos la función candidata a Lyapunov

$$V(\tilde{r}, \dot{\tilde{r}}, \tilde{z}) = \frac{1}{2} \left(\dot{\tilde{r}}^T M \dot{\tilde{r}} + \tilde{r}^T K_P \tilde{r} \right) + H_c(\tilde{z}) + \Phi_c(z^*) > 0 \quad \forall \tilde{r}, \dot{\tilde{r}}, \tilde{z} \neq 0 \quad (7.14)$$

que es positiva y posee un mínimo aislado en el PE deseado. Diferenciando (7.14) con respecto al tiempo, se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{\tilde{r}}^T M \ddot{\tilde{r}} + \tilde{r}^T K_P \dot{\tilde{r}} + \left(\frac{\partial H_c}{\partial \tilde{z}} \right)^T \dot{\tilde{z}} \\ &= -\dot{\tilde{r}}^T K_D \dot{\tilde{r}} + \dot{\tilde{r}}^T \mathcal{F}(r)^T f + f_r(\tilde{z}; z^*)^T \dot{\tilde{z}} \\ &= -\dot{\tilde{r}}^T K_D \dot{\tilde{r}} + \dot{\tilde{r}}^T \mathcal{F}(r)^T f_r(\tilde{z}; z^*) + \dot{\tilde{r}}^T \mathcal{F}(r)^T B \mathcal{F}(r) \dot{\tilde{r}} + f_r(\tilde{z}; z^*)^T \dot{\tilde{z}} \end{aligned}$$

Como $\dot{\tilde{r}}^T \mathcal{F}(r)^T = 0$ (los VRP mantienen una relación geométrica rígida con respecto al Marco móvil $O_S - X_S Y_S Z_S$) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\dot{\tilde{r}}^T K_D \dot{\tilde{r}} - \dot{\tilde{r}}^T \mathcal{F}(r)^T B \mathcal{F}(r) \dot{\tilde{r}} \\ &= 0 \quad \text{para } \dot{\tilde{r}} = 0, \forall \tilde{r}, \tilde{z} \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de invariancia de LaSalle a la dinámica a lazo cerrado se tiene

$$M\ddot{\tilde{r}} = \mathcal{F}(r)^T f_r(\tilde{z}; z^*) - K_P \tilde{r} \quad (7.15)$$

Si bien el término de la derecha se anula con $\tilde{z} = 0$ y $\tilde{r} = 0$, tal como se apuntó en la Observación 7.7, no se puede asegurar que no lo haga con otros valores, por lo que no se puede probar estabilidad asintótica del PE.

7.3.3 Rediseño de control

En esta subsección añadimos una ley de control para asegurar la estabilidad asintótica del PE ($\tilde{r} = 0, \dot{\tilde{r}} = 0, \tilde{z} = 0$). Para ello definimos la nueva variable

$$\xi := \begin{bmatrix} \tilde{r} \\ \dot{\tilde{r}} \end{bmatrix}$$

y una nueva señal de control $\omega \in \mathbb{R}^{2n}$ que se suma a la ley de control de posición y prevención de colisiones definidas anteriormente:

$$\begin{aligned} u &= y_p + y_c + \omega \\ &= M\ddot{r}^* + K_D \dot{\tilde{r}} + K_P \tilde{r} - \mathcal{F}(r)^T f + \omega \end{aligned}$$

De este modo, la dinámica a lazo cerrado (7.13) se transforma en

$$\dot{\xi} = H\xi + D(\mathcal{F}(r)^T f - \omega) \quad (7.16)$$

donde H y D son matrices de dimensión $(4n \times 4n)$ y $(4n \times 2n)$, respectivamente, cuyas expresiones son

$$H = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2n} & \mathbf{I}_{2n} \\ -M^{-1}K_P & -M^{-1}K_D \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2n} \\ M^{-1} \end{bmatrix}$$

Propongamos una nueva función candidata de Lyapunov

$$V(\xi) = \xi^T Q \xi$$

donde Q es una matriz $(4n \times 4n)$ definida positiva. Su derivada respecto al tiempo es

$$\dot{V} = \xi^T (H^T Q + QH) \xi + 2\xi^T Q D (\mathcal{F}(r)^T f - \omega)$$

Dado que H tiene todos sus autovalores negativos, para cualquier matriz simétrica definida positiva P (consultar el Apéndice A para saber cómo generar una matriz

cuadrada, simétrica y definida positiva), la ecuación

$$H^T Q + QH = -P$$

da una solución única Q . De este modo podemos expresar la derivada como

$$\dot{V} = -\xi^T P \xi + 2\xi^T Q D \left(\mathcal{F}(r)^T f - \omega \right)$$

Luego, definiendo $\lambda := 2D^T Q \xi \in \mathbb{R}^{2n}$ y eligiendo

$$\omega = \frac{\rho}{\|\lambda\|} \lambda$$

con ρ un real positivo, la derivada de la función de Lyapunov es definida negativa si

$$\begin{aligned} \lambda^T \left(\mathcal{F}(r)^T f - \omega \right) &= \lambda^T \left(\mathcal{F}(r)^T f - \frac{\rho}{\|\lambda\|} \lambda \right) \\ &= \lambda^T \mathcal{F}(r)^T f - \rho \|\lambda\| \\ &\leq \|\lambda\| \left(\left\| \mathcal{F}(r)^T f \right\| - \rho \right) \end{aligned}$$

Así, eligiendo $\rho > \left\| \mathcal{F}(r)^T f \right\|$ el término extra de control ω asegura que $\dot{V}$ es menor a cero y entonces $\xi \rightarrow 0$.

Observación 7.8. En este caso los ECB's no cumplen la función de ubicar a los agentes en una formación determinada, si no que evitan la colisión entre ellos. Por este motivo el rango de la matriz $\mathcal{F}(r)$ no influye en la estabilidad de la ley de control, por lo que conviene utilizar la mayor cantidad posible de ECB's. ■

A continuación, analizamos qué sucede cuando las fuerzas ejercidas por los bloques ECB's no cumplen con la condición $\rho < \left\| \mathcal{F}(r)^T f \right\|$. La norma de $\mathcal{F}(r)^T f$ se puede expresar como

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{F}(r)^T f \right\| &= \|(D \otimes \mathbf{I}_2)\| \|\beta(r)\| \|f\| \\ &= \|(D \otimes \mathbf{I}_2)\| \|f_r(\tilde{z}; z^*) + B\dot{z}\| \end{aligned} \tag{7.17}$$

donde $\|\beta(r)\| = 1$. Recordando que la norma de una determinada matriz A es

$$\|A\| = \left[\lambda_{\max}(A^T A) \right]^{1/2}$$

el primer término de (7.17) resulta

$$\begin{aligned}
 \|(D \otimes \mathbf{I}_2)\| &= \left[\lambda_{\max} \left((D \otimes \mathbf{I}_2)^T (D \otimes \mathbf{I}_2) \right) \right]^{1/2} \\
 &= \left[\lambda_{\max} \left((D^T \otimes \mathbf{I}_2^T) (D \otimes \mathbf{I}_2) \right) \right]^{1/2} \\
 &= \left[\lambda_{\max} \left((D^T D) \otimes (\mathbf{I}_2^T \mathbf{I}_2) \right) \right]^{1/2} \\
 &= \left[\lambda_{\max} (L^T \otimes \mathbf{I}_2) \right]^{1/2}
 \end{aligned}$$

Luego, por propiedad del producto de Kronecker y sabiendo que los autovalores de la matriz identidad es el vector unitario, es

$$\|(D \otimes \mathbf{I}_2)\| = \lambda_n(L)^{1/2}$$

donde $\lambda_n(L)$ es el máximo autovalor de la matriz de Laplace L . Así, considerando despreciable la velocidad $\dot{z}$, la expresión de (7.17) resulta

$$\|\mathcal{F}(r)^T f\| = \lambda_n(L)^{1/2} \|\text{diag}\{z^3 - z^{*3}\}\| \|z^{-3}\| \|\mu_P\|$$

Para analizar el comportamiento, en la Figura 7.11a se muestra la gráfica de la superficie $\|\mathcal{F}(r)^T f\|$ para el caso particular de $m = 2$, $\mu_P = 20$ y $z^* = [1.5, 3]^T$. El plano vertical (en azul) contiene al origen y al punto en el cual la superficie es cero, y la curva de intersección entre dicho plano y la superficie se muestra en la Figura 7.11b.

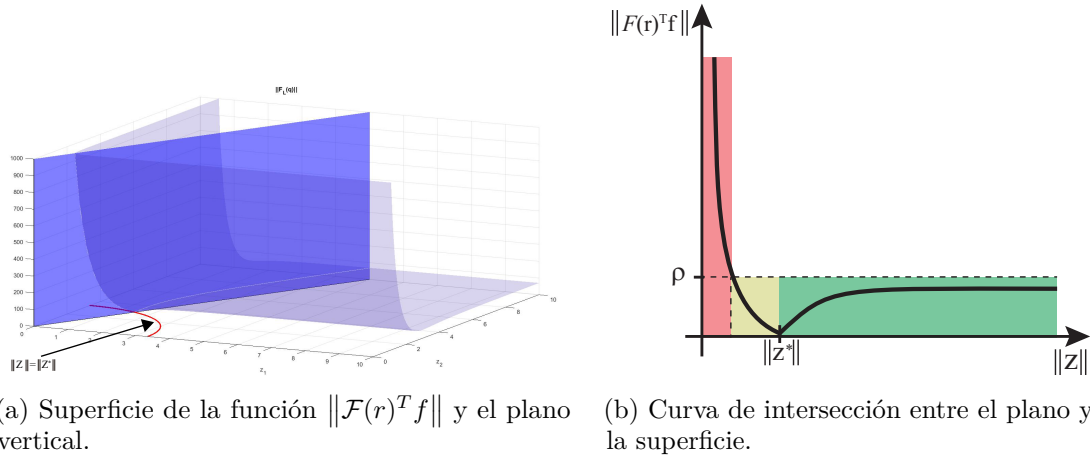


Fig. 7.11 Zonas de trabajo de $\|\mathcal{F}(r)^T f\|$ para $m = 2$, $\mu_P = 20$ y $z^* = [1, 5; 3]^T$.

Para estudiar el comportamiento de la ley de prevención de colisiones, dividimos la gráfica de la Figura 7.11b en tres regiones:

- Rojo: alto riesgo de colisión, $\|\mathcal{F}(r)^T f\| > \rho$.

Los agentes están demasiado cerca unos de otros. En este caso, la ley de control para evitar la colisión prevalece sobre la ley de control de seguimiento de trayectoria. El error de seguimiento no converge a cero porque existe un alto riesgo de colisión entre agentes.

- Amarillo: bajo riesgo de colisión, $\|\mathcal{F}(r)^T f\| < \rho$ y $\|z\| < \|z^*\|$.

Los agentes están cerca pero se considera que el riesgo de colisión es bajo y se prioriza la ley de seguimiento de trayectoria. Notar que si los agentes están demasiado cerca y existe un alto riesgo de colisión, se considera la primera situación.

- Verde: sin riesgo de colisión, $\|\mathcal{F}(r)^T f\| < \rho$ y $\|z\| > \|z^*\|$.

No existe riesgo de colisión. La ley de prevención de colisiones y la de control ω favorecen la convergencia del error de trayectoria a cero, desplazando los agentes a la distancia deseada z^* .

Observación 7.9. Se eligió la curva de intersección entre el plano y la superficie para analizar en detalle el comportamiento de la ley de prevención de colisiones, pero este principio puede extenderse a todo el espacio. Del mismo modo, el caso particular de $m = 2$ sirve para ilustrar el comportamiento gráficamente pero el mismo aplica para todo $m \geq 2$. ■

En el caso general de m aristas, aún cuando exista riesgo de colisión sólo entre dos agentes, el control operará en la región roja: la fuerza del ECB_k correspondiente tenderá a infinito, el error de trayectoria no será cero pero se evitará la colisión. Una vez que los agentes sigan la trayectoria deseada sin error, tanto las fuerzas de prevención de colisiones como ω serán cero.

Para finalizar, notar que en el subespacio de deslizamiento $\lambda = 0$, la señal de control ω debería conmutar idealmente a frecuencia infinita. Sin embargo, en la realidad esta señal conmuta a alta frecuencia, causando oscilaciones en las torques de control. Para evitar estas conmutaciones de alta frecuencia de la señal de control, conocidas como *chattering* [98], se propone la siguiente modificación en la ley de control

$$\omega = \begin{cases} \frac{\rho}{\|\lambda\|} \lambda & \text{para } \|\lambda\| \geq \epsilon \\ \frac{\rho}{\epsilon} \lambda & \text{para } \|\lambda\| < \epsilon \end{cases} \quad (7.18)$$

Observación 7.10. A priori, la incorporación del parámetro ϵ asegura que el error de posición $\tilde{r}$ permanezca acotado. Sin embargo en este caso en particular, la convergencia a cero del error de trayectoria está asegurada por el control de posición. Esto es, la incorporación de la ley de control ω no es para rechazar perturbaciones y/o incertidumbres paramétricas, si no que es para asegurar convergencia al PE deseado a lazo cerrado. De este modo la señal de control no queda oscilando en una región, si no que tiende a $\omega = 0$. ■

7.3.3.0.1 Bases y Manipuladores Móviles Para el caso del MAS cuyos agentes sean caracterizados con modelos de cuerpos rígidos de BM y MM, se procede de la misma manera que en lo mostrado en la sección anterior: una cancelación exacta de la dinámica, desacople y control independiente de las posiciones r del resto de las coordenadas s . De este modo, la ley de control $\tau = u$ para este caso es

$$u = S(q)^{-1} \left(M(q) \left[\Lambda^T (y_p + \omega) + u_c + u_s \right] + n(q, \dot{q}) - J^T(q) h_e \right)$$

donde

$$u_c = \Lambda^T y_c$$

Así se obtienen las dos dinámicas desacopladas

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{r}} + K_D \dot{\tilde{r}} + K_P \tilde{r} &= \mathcal{F}(r)^T f + \omega \\ \ddot{\tilde{s}} + K_{Ds} \dot{\tilde{s}} + K_{Ps} \tilde{s} &= 0 \end{aligned}$$

y el esquema de control se muestra en la Figura 7.12. Como se apuntó en la Observación 7.4, la estabilidad está asegurada para ambas dinámicas.

7.4 Control Cooperativo de Manipuladores Móviles

En esta sección presentamos un esquema de control de cooperación para un MAS compuesto de MM. Existen distintas tareas que pueden realizar los agentes de manera cooperativa, en este caso es el seguimiento, por parte de los efectores finales de todos los MM, de una trayectoria en común. Naturalmente dicha cooperación requiere de una coordinación entre los agentes que en nuestro caso puede implicar desde un control de formación, estabilidad anti-vuelco hasta la elusión de obstáculos fijos y móviles.

7.4.1 Cancelación por Dinámica Inversa

Si la entrada de control $\tau = u$ del MAS compuesto por MM se elige como

$$u = S(q)^{-1} \left(M(q) y + n(q, \dot{q}) - J^T(q) h_e \right)$$

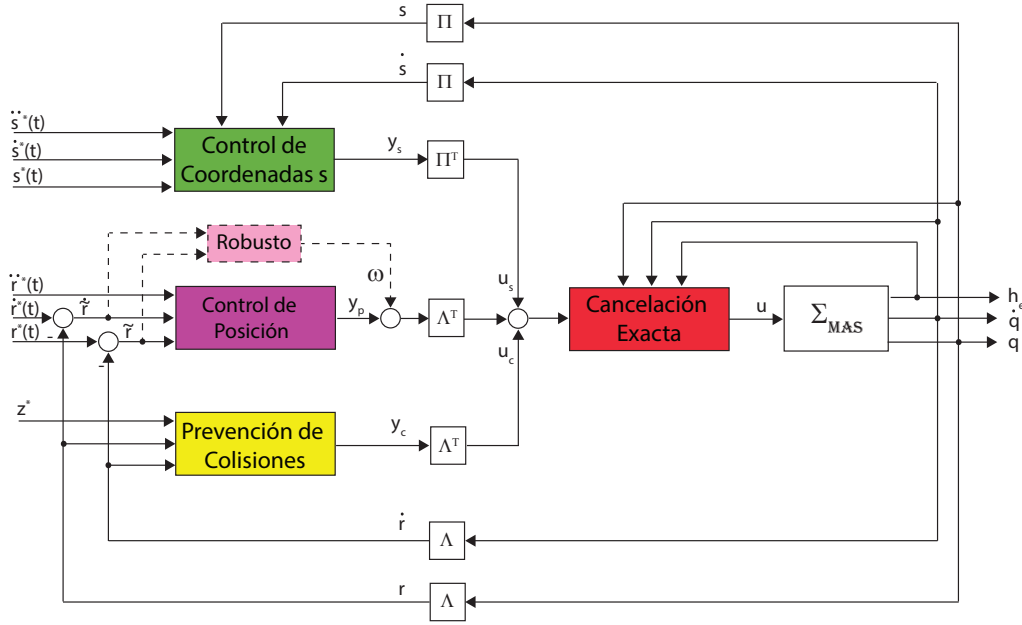


Fig. 7.12 Control de formación robusta de posición, prevención de colisiones y cancelación exacta para agentes modelados como BM o MM.

se obtiene la linealización exacta que lleva a las aceleraciones del sistema a

$$\ddot{q} = y$$

de modo que la nueva entrada de control y se puede elegir con distintos criterios según sea el objetivo de control. En este caso se desea realizar el seguimiento de la trayectoria $x_e^* = [x_{e1}^{*T}, \dots, x_{en}^{*T}]^T$, donde cada componente $x_{ei}^* = [x_e^i, y_e^i, z_e^i]^T$ representa la posición deseada del efector final del manipulador móvil i con $i = 1, \dots, n$. Así, si se elige la acción de control como

$$y = J^{INV} \left(\ddot{x}_e^* + K_D \dot{\tilde{x}} + K_P \tilde{x} - \dot{J}(q, \dot{q}) \dot{q} \right) \quad (7.19)$$

donde $\tilde{x} = x_e^* - x_e$ el error de posición, $x_e = [x_{e1}^T, \dots, x_{en}^T]^T$ representa la posición de cada efector final, y K_D y K_P son matrices (diagonales) definidas positivas de dimensión $(3n \times 3n)$, se obtiene la siguiente dinámica del error a lazo cerrado

$$\ddot{\tilde{x}} + K_D \dot{\tilde{x}} + K_P \tilde{x} = 0 \quad (7.20)$$

que describe evoluciones desacopladas que convergen a cero con una tasa de convergencia determinada por K_D y K_P . De esta manera, la ley de control de trayectoria de cancelación por dinámica inversa, para este caso en particular, es

$$u = S(q)^{-1} \left(M(q) J^{INV} \left(\ddot{x}_d + K_D \dot{\tilde{x}} + K_P \tilde{x} - \dot{J}(q, \dot{q}) \dot{q} \right) + n(q, \dot{q}) - J^T h_e \right) \quad (7.21)$$

Como se vio en el capítulo 4, en el caso de que un manipulador sea redundante, se puede aprovechar su espacio nulo para cumplir con objetivos secundarios. Añadiendo el término $(I - J^{INV} J(q)) \ddot{q}_0$ a la ley de control (7.19), la misma resulta

$$y_R = y + (I - J^{INV} J) \ddot{q}_0$$

donde el vector $\ddot{q}_0$ se proyecta en el espacio nulo de J generando movimientos internos descritos por $(I - J^{INV} J) \ddot{q}_0$ que no modifican la postura del efector final. De esta forma, la ley de control (7.21) se puede reescribir como

$$u = S(q)^{-1} (M(q)y + n(q, \dot{q}) - J^T h_e) + S(q)^{-1} (I - M(q)J^{INV} JM(q)^{-1}) \Gamma_0 \quad (7.22)$$

donde $\Gamma_0 = M(q)\ddot{q}_0$ son torques arbitrarios.

Ahora bien, si consideramos el caso de la inversa generalizada, esto es $J^{INV} = \bar{J}$, se cumple con la condición

$$JM^{-1}(q) (I - J^T J^{INV T}) \Gamma_0 = 0$$

en la que los torques Γ_0 se proyectan en el espacio nulo de $J^{INV T}$ y no generan aceleraciones del efector final. Como $\bar{J}$ satisface dicha condición, se dice que es consistente dinámicamente y los torques Γ_0 no generan aceleración en el espacio operacional (i.e. $\ddot{x}_e = 0$) [64]. El diagrama de control correspondiente es el de la Figura 7.13.

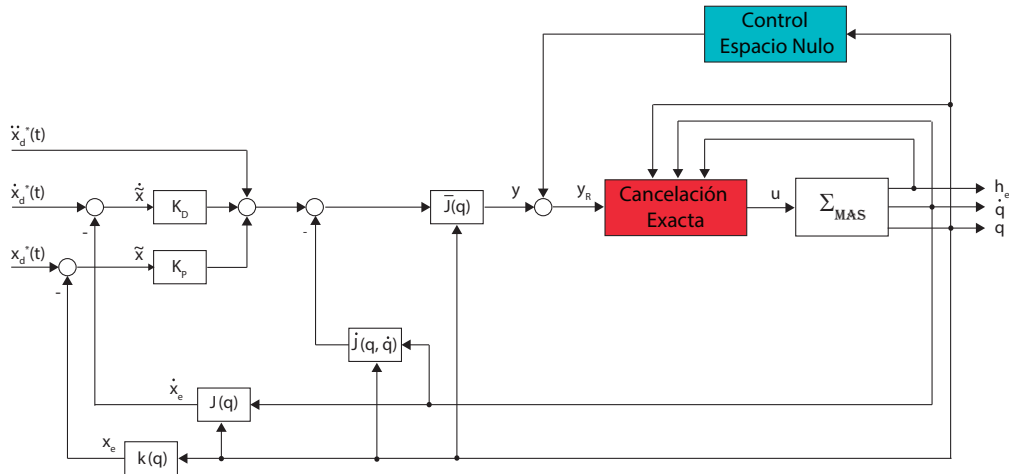


Fig. 7.13 Control de trayectoria por cancelación exacta y espacio nulo de los efectores finales de MM trabajando en cooperación.

Por último, como se vio en la sección 4.3 del capítulo 4, la función $\omega(q)$ puede ser elegida de acuerdo a distintos criterios. A continuación presentamos una serie de funciones con el fin de lograr distintos objetivos secundarios:

- **Prevención de Colisiones**

La función

$$\omega(q) = z^T K_C z$$

con K_C matriz diagonal definida positiva de dimensión $(m \times m)$, es cero cuando los agentes colisionan entre sí. Así, maximizando la función, se aprovecha el espacio nulo para distanciar los agentes y evitar colisiones.

- **Formación**

Maximizando la función

$$\omega(q) = - \sum_{k=1}^m (z_k - z_k^*)^2$$

se aprovecha el espacio nulo para que las distancias entre las bases de los MM sean las deseadas y así los mismos cooperen bajo una determinada formación.

- **Estabilidad de Vuelco**

Existen distintos índices que miden el riesgo de vuelco de una manipulador móvil, cada uno con un enfoque diferente. A continuación presentamos tres funciones $\omega(q)$ asociadas a los distintos índices de estabilidad de vuelco presentados en el Apéndice B:

- *Punto de Momento Cero*: En este caso el objetivo secundario es minimizar la distancia que existe entre el centro geométrico de la base y la proyección en la misma del Punto de Momento Cero (ZMP). La función propuesta para este caso es

$$\omega(q) = - \sum_{i=1}^n \left[(x_{zmp}^i - x_i)^2 + (y_{zmp}^i - y_i)^2 \right]$$

maximizando dicha función, se aleja el punto de proyección del ZMP de los n MM de los bordes del polígono (definido por las aristas de la base), y se los acerca al punto de máxima estabilidad, disminuyendo así el riesgo de vuelco.

- *Fuerza-Ángulo*: El objetivo secundario es obtener el máximo índice de estabilidad Fuerza-Ángulo posible minimizando la altura h que el CM tiene respecto al piso, como se observa en la Figura 7.14. La función $\omega(q)$ propuesta es

$$\omega(q) = -g^T(q) g(q)$$

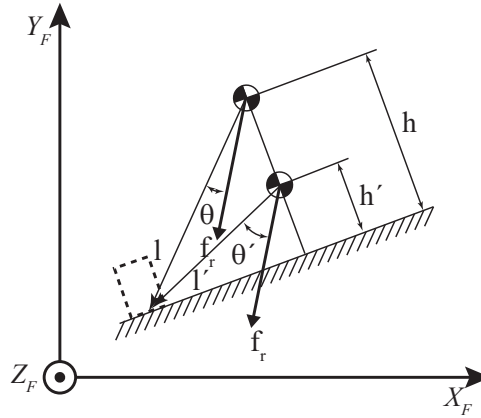


Fig. 7.14 Ángulos de vuelco para la misma fuerza neta y distintas alturas.

donde $g(q)$ es el vector de fuerzas gravitacionales del manipulador móvil. Así, maximizando la función $\omega(q)$ se minimizan las fuerzas gravitacionales, de manera que los CM de los MM estén lo más cerca al piso posible, maximizándose así los ángulos θ_i .

- *Estabilidad Energética*: El objetivo secundario en este caso es minimizar la energía E_i a través de maximizar la función

$$\omega(q) = -g^T(q)g(q) - \dot{q}^T \dot{q}$$

donde se minimizan tanto los torques gravitacionales producidos por las masas de los eslabones como la energía cinética de los MM.

Por último se completa el listado con dos funciones tomadas de la bibliografía [2]:

- **Elusión de Singularidades**

Como la función

$$\omega(q) = \sqrt{\det(J(q)J^T(q))}$$

es cero cuando los MM están en una posición singular, a través de la maximización de la misma se mantiene a los manipuladores alejados de las singularidades cinemáticas y así se evitan valores de velocidad elevados en el espacio de las Juntas.

- **Minimización de la Velocidad de las Juntas**

Maximizando la función

$$\omega(\dot{q}) = -\dot{q}^T K_\omega \dot{q}$$

con K_ω una matriz diagonal de dimensión $(5n \times 5n)$ se reducen al mínimo las velocidades de las Juntas de los MM, asegurando convergencia a cero de las velocidades.

7.5 Elusión de Obstáculos

En esta sección se presentan dos alternativas para la elusión de uno o más obstáculos fijos y móviles, una con bloques ECB y otra con campos potenciales. Si bien ambas estrategias están inspiradas físicamente y las leyes de control generadas tienen una interpretación física, la estrategia con bloques ECB se utiliza para eludir obstáculos fijos y móviles, mientras que la generación de campos potenciales requiere de un conocimiento previo del escenario lo que implica que los obstáculos deben estar fijos. En ambos casos, la ley de control generada por cualquiera de las dos estrategias es

$$u_o = \Lambda^T y_o$$

con $y_o = [y_{o1}^T, \dots, r_{on}^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ el vector de fuerzas de repulsión, y se puede sumar a los esquemas de control vistos anteriormente conforme se muestra en la Figura 7.15.

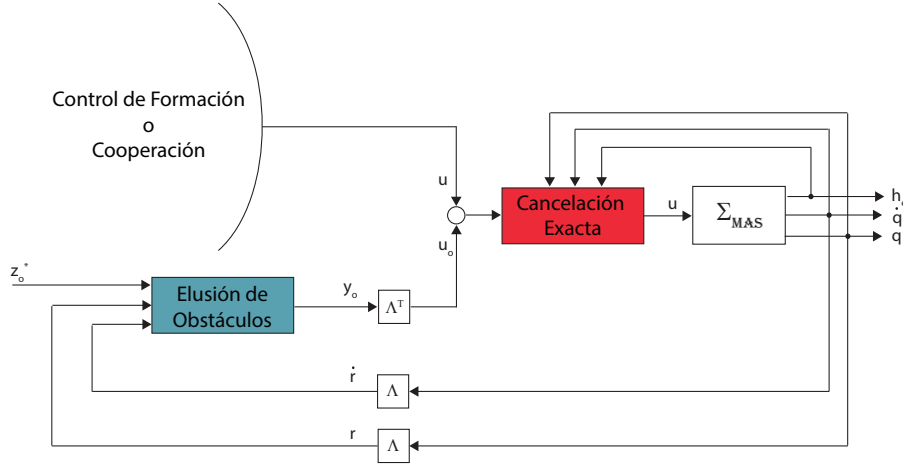


Fig. 7.15 Bloque de elusión de obstáculos en un esquema generalizado de control de formación o cooperación.

7.5.1 Bloques ECB

Para prevenir la elusión de obstáculos fijos y móviles, nos valemos del mismo enfoque físico utilizado en el control de distancia con los ECB's. En este caso el ECB actúa entre el agente i y el obstáculo o , como puede apreciarse en la Figura 7.16a. La expresión de la ley del resorte virtual que compone el ECB utilizado para la elusión de obstáculos, cuya gráfica se muestra en la Figura 7.16c, se elige como

$$f_{roi}(z_{oi}; z_o^*) = \begin{cases} \left(1 - \frac{z_o^{*3}}{(\tilde{z}_{oi} + z_o^*)^3}\right) \mu_O & \text{si } \tilde{z}_{oi} < 0 \\ \left(\frac{-\tilde{z}_{oi}}{e^{Z_1}} - e^{-\frac{\tilde{z}_{oi}}{Z_2}}\right) \frac{k_o}{Z_1 - Z_2} & \text{si } \tilde{z}_{oi} \geq 0 \end{cases}$$

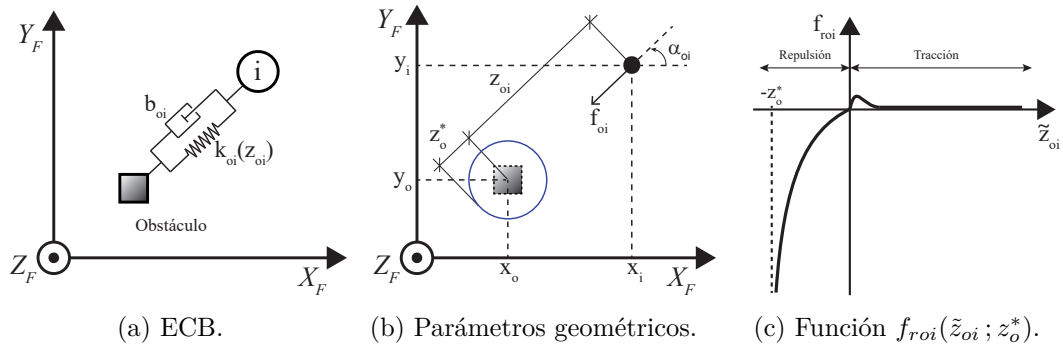


Fig. 7.16 Elusión de obstáculos.

donde μ_O es una constante positiva, z_o^* el radio de la circunferencia que circunscribe por completo al obstáculo o , z_{oi} la distancia entre el agente i y el obstáculo o , cuya expresión es

$$z_{oi} = \sqrt{(x_i - x_o)^2 + (y_i - y_o)^2}$$

y $\tilde{z}_{oi} = z_{oi} - z_o^*$ la distancia entre el agente i y la circunferencia, como se observa en la Figura 7.16b.

La modificación introducida en la ley original del ECB implica que la fuerza tienda a cero cuando el error $\tilde{z}_o$ aumenta. Esto significa que la fuerza del resorte desaparece cuando el agente se encuentra a una distancia considerable del obstáculo. Notar que, si bien cuando el agente se acerca a la circunferencia, el resorte del ECB tiene un comportamiento anti intuitivo -ejerciendo una fuerza de tracción hacia el obstáculo- el valor es mínimo y juega un rol secundario, sólo a efectos de que el resorte cumpla con la propiedad de pasividad.

Observación 7.11. En este caso la fuerza de reacción del ECB no se aplica al obstáculo ya que se considera que la posición del mismo es independiente y no se puede controlar. Además, el valor deseado z_o^* , cuyo valor es mayor que el tamaño del obstáculo, es independiente de los agentes. ■

Así la fuerza ejercida por el ECB es

$$f_{oi} = f_{roi}(z_{oi}; z_o^*) + b_o \dot{\tilde{z}}_{oi}$$

de modo que la ley de prevención de colisiones del agente i con el obstáculo o es

$$y_{oi} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{oi} \\ \sin \alpha_{oi} \end{bmatrix} f_{oi}$$

La expresión de la ley de prevención de colisiones con el obstáculo o para los n agentes es

$$y_o = \beta_o(r, r_o) f_o$$

donde $r_o = [x_o, y_o]^T$ es el vector posición del obstáculo, $f = [f_{o1}^T, \dots, f_{on}^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ el vector de fuerzas aplicado a los agentes y $\beta_o(r, r_o)$ una matriz de dimensión $(2n \times n)$ cuya expresión es

$$\beta_o(r, r_o) = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{o1} & 0 & \cdots & 0 \\ \sin \alpha_{o1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cos \alpha_{o2} & \cdots & 0 \\ 0 & \sin \alpha_{o2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha_{on} \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha_{on} \end{bmatrix}$$

7.5.2 Campos de Potencial

A continuación presentamos una estrategia de elusión de obstáculos basada en campos potenciales que consiste en representar a los obstáculos con funciones potenciales mas altas que el resto del plano, como en un escenario de valles y montañas. De este modo los campos potenciales ejercen una fuerza repulsiva f_{oi} en el agente móvil i cuyo valor depende de la distancia a la que se encuentren del obstáculo.

Para la generación del campo potencial se trabajará con un método que utiliza una función escalar potencial que satisface la *ecuación de Laplace* bajo condiciones de contorno o frontera de Dirichlet: *Obstáculo, Borde y Objetivo* [99]. Aquí utilizaremos las primeras dos.

El campo potencial en el plano se representa a través de la función armónica $\phi(x, y)$ que satisface la ecuación de Laplace, i.e.,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

en una región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Consideremos entonces una representación discretizada de $\phi(x, y)$ en una grilla dada por $u(x_i, y_j)$, con $i = 1, \dots, n_x$ y $j = 1, \dots, n_y$, siendo n_x y n_y la cantidad de puntos de la grilla en el eje x e y , respectivamente. Así se puede expresar la segunda derivada de $\phi(x, y)$ utilizando las series de Taylor como

$$\begin{aligned} \phi_{xx}(x_i, y_j) &= \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)}{h^2} \\ \phi_{yy}(x_i, y_j) &= \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1})}{h^2} \end{aligned}$$

donde h es el tamaño del paso utilizado para aproximar la derivada. Como $\phi(x, y)$ satisface la ecuación de Laplace [100], el valor discretizado $u(x_i, y_j)$ en el punto de la

grilla (i, j) es

$$u(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i+1}, y_j) + u(x_{i-1}, y_j) + u(x_i, y_{j+1}) + u(x_i, y_{j-1})}{4}$$

Este sistema lineal descrito por esta ecuación puede ser resuelto para obtener los valores de ϕ discretizados en los puntos de la grilla a través de la iteración Gauss-Seidel. El mismo consiste en reemplazar repetidamente cada elemento de la grilla por el promedio de sus elementos vecinos. Las condiciones de borde se introducen especificando el valor de la función $u(x_i, y_j)$ en el borde de la región $\partial\Omega$ (Problema de Dirichlet) y permanecen fijas.

El vector de fuerzas de repulsión se obtiene aplicando el gradiente a la curva potencial para todos los puntos de la grilla. De este modo a cada agente i se le aplica una fuerza f_{oi} cuyo valor depende de la posición (x_i, x_j) que ocupa el agente en la grilla. Así, la ley de elusión de obstáculos a aplicar sobre los agentes es

$$y_o = f_o$$

Observación 7.12. Las funciones armónicas $\phi(x, y)$ tienen la particularidad de que no presentan mínimos locales. Para demostrarlo, analicemos la ecuación de Laplace. Si las segundas derivadas de ϕ no son cero, las curvas deben tener derivadas de segundo orden de signos opuestos. Si se asume que $\phi \in C^2$ una curva debe ser cóncava y la otra convexa. De este modo, si la curva no es plana en el punto p_0 , hay una dirección en p_0 en la cual ϕ decrece o aumenta. ■

Si se introdujese el *Objetivo* como tercera condición de borde, a los obstáculos presentes en la región se les asignaría un potencial alto mientras que al objetivo un potencial más bajo. Como la función potencial es continua en la región y no presenta un mínimo local, el método basado en el gradiente descendiente permite generar trayectorias que finalizan en el objetivo para todo origen que se encuentre dentro de la región de trabajo. Sin embargo, como dicho método implica conocer a priori el objetivo y además la trayectoria generada no se puede seleccionar, se descarta dicha estrategia para el control de trayectoria del MAS.

Ejemplo 7.1. A continuación se muestra la generación de un campo potencial para la elusión de tres obstáculos fijos cuadrados de 30cm cada uno ubicados en $r_o = [-4, -3]^T$, $r_o = [2, 0]^T$ y $r_o = [-1, 4]^T$. El plano es discretizado con un grilla de $n_x = 200$ y $n_y = 200$ puntos. Los valores de $u(x, y)$ para las condiciones de *Obstáculo* y *Borde* se establecen en 30 y 0, respectivamente, y se realizan 20 iteraciones.

La superficie potencial generada se muestra en la Figura 7.17a, mientras que los vectores de las fuerzas de repulsión f_o se muestran en la Figura 7.17b. Se puede apreciar que conforme aumenta la distancia al obstáculo, el valor de la fuerza de repulsión disminuye hasta hacerse cero.

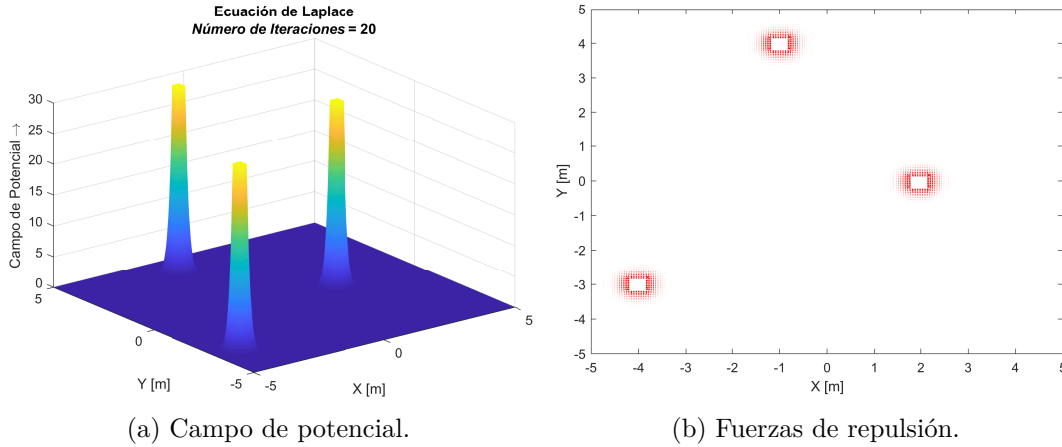


Fig. 7.17 Representación de los obstáculos a través de campos de potencial.

Observación 7.13. Es importante destacar que como en las dos estrategias presentadas para la elusión de obstáculos las fuerzas desaparecen a medida que los agentes se alejan de los mismos, los análisis de estabilidad presentados hasta ahora son válidos para escenarios cuyos obstáculos se encuentren lo suficientemente lejos del valor final deseado r^* . ■

7.6 Control de Motores

Los torques aplicados a las ruedas de las bases o a las juntas de los manipuladores robóticos son producidos por motores de corriente continua (MCC) cuya dinámica, vista en el capítulo 4, hasta ahora no se tuvo en cuenta en el modelado del MAS. Es por ello que en esta sección, con el objetivo de sumar un grado más de realismo, se incorporan los modelos de los motores, así como también los modelos de los drivers que comandan los motores y filtros de corriente que sensan la corriente. Además, como los controladores presentados hasta el momento entregan referencias de torque, y los motores son comandados a través de tensiones, es necesario la implementación de un bloque de *Control de Bajo Nivel* que en este caso será diseñado a través de tres técnicas distintas: (i) Tracking de corriente, (ii) PI de torque y (iii) Backstepping.

En la Figura 7.18 se muestra el modelo del MCC, el driver, el filtro de corriente y el control de bajo nivel en un esquema general de control, pudiéndose introducir en cualquiera de los esquemas de control presentados hasta ahora.

7.6.1 PI de Torque

Las acciones de entrada del MAS son los torques τ_s de los motores de las ruedas (y de las juntas de los manipuladores si los agentes del MAS son MM) provistos por los conjuntos MCC-reductores, que los ven como torques de carga. De esta manera, las velocidades y aceleraciones angulares Ω_s y $\dot{\Omega}_s$, respectivamente, se toman como entradas

a los modelos de los motores (ver sección 3.5 del capítulo 3), como se observa en la Figura 7.18. La corriente I_a contiene la dinámica a controlar. Con esta consideración, la dinámica y la ecuación de salida del modelo dinámico de un MCC son

$$\begin{aligned}\dot{I}_a &= \frac{1}{L_a} (U_a - R_a I_a - k_\psi G_r \Omega_s) \\ \tau_s &= G_r (k_\psi I_a - J_m G_r \dot{\Omega}_s - b_m G_r \Omega_s)\end{aligned}$$

donde, para evitar implementar bloques derivativos en el modelo de simulación, las velocidades y aceleraciones angulares se computan a través de la relación

$$\begin{aligned}\Omega_s &= S^T(q) \dot{q} \\ \dot{\Omega}_s &= S^T(q) \ddot{q} + \dot{S}^T(q) \dot{q}\end{aligned}$$

Esta simplificación implica utilizar las aceleraciones de salida del MAS en el lazo de control, lo que deriva en un lazo algebraico que puede ocasionar eventuales errores numéricos en las simulaciones. Para evitar este inconveniente, utilizamos el modelo de la BM visto en el ejemplo 3.1 del capítulo 3. El mismo consiste en reagrupar la dinámica del subsistema mecánico del motor con la de la base, de manera que cambian la ecuación de salida del MCC y la dinámica del MAS de la siguiente manera:

- MCC

$$\begin{aligned}\dot{I}_a &= \frac{1}{L_a} (U_a - R_a I_a - k_\psi G_r \Omega_s) \\ \ddot{\tau} &:= G_r k_\psi I_a\end{aligned}$$

- Σ_{MAS}

$$M_m(q) \ddot{q} + C_m(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) + F_v \dot{q} = S(q) \ddot{\tau} + J^T(q) h_e$$

y la expresión del bloque de control por cancelación exacta ahora incorpora dicha mecánica

$$\ddot{\tau}^* = S(q)^{-1} (M_m(q) y + n_m(q, \dot{q}) - J^T(q) h_e)$$

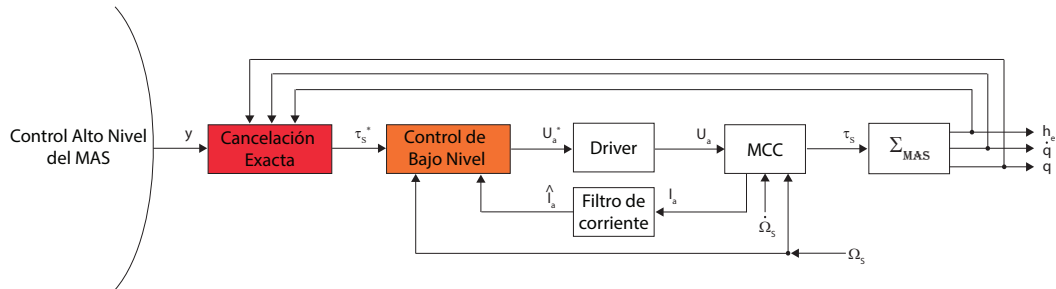


Fig. 7.18 Esquema de control teniendo en cuenta las dinámicas de los motores, drivers, filtros de corrientes y control de bajo nivel.

donde

$$n_m(q, \dot{q}) = C_m(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + F_v\dot{q}$$

y la señal y proviene del la ley de control que se implementa en el nivel superior.

Para el diseño del controlador PI se considera la técnica de *rotor bloqueado* [101]. Esta consiste en tomar como hipótesis que la dinámica de la parte eléctrica es mucho más rápida que la mecánica, i.e., $T_m \gg T_a$ donde

$$T_a = \frac{L_a}{R_a} \quad T_m = \frac{J_m R_a}{b_m R_a + k_\psi^2}$$

son las constantes de armadura y mecánica del MCC, respectivamente. Esto implica que la velocidad de rotación varía lentamente respecto a la dinámica de la armadura (de ahí la expresión *rotor bloqueado*), de modo que la fuerza contraelectromotriz (fcem) varía lentamente respecto a la dinámica eléctrica y el controlador PI la rechaza.

Sin embargo esta hipótesis puede no siempre valer, como por ejemplo en casos cuando se comandan procesos rápidos de aceleración o frenado de la máquina. Por lo tanto, conviene realizar una cancelación por retroalimentación de la fcem (perturbación dependiente de la velocidad) del lazo de torque. Esta cancelación no es exacta porque entre la salida del controlador (punto donde aparece sumando este nuevo término) y la tensión de armadura (a la cual se resta la fcem en la máquina) está la dinámica del driver. Pero como esta dinámica es muy rápida, se logra, sino una cancelación exacta, una buena compensación.

Los parámetros del controlador PI se calculan a partir de las funciones transferencias

$$G_{PI} = K_{PI} \frac{1 + sT_{PI}}{sT_{PI}} \quad G_D = \frac{K_D}{1 + sT_D} \quad G_F = \frac{K_F}{1 + sT_F} \quad G_{I_a} = \frac{1/R_a}{1 + sT_a}$$

del PI, driver, filtro de corriente y dinámica eléctrica del MCC, respectivamente. Con la cancelación de la fcem, la función transferencia a lazo abierto es²

$$G_{LA}(s) = K_{PI} \frac{1 + sT_{PI}}{sT_{PI}} \cdot \frac{K_D K_F}{1 + sT_\Sigma} \cdot \frac{1/R_a}{1 + sT_a} \cdot k_\psi G_r$$

donde $T_\Sigma = T_F + T_D$. Eligiendo $T_{PI} = T_a$ la FT a lazo cerrado es

$$\begin{aligned} G_{LC}(s) &= \frac{\check{\tau}_s(s)}{\check{\tau}_s^*(s)} \\ &= \frac{G_{PI} G_D G_{I_a}}{1 + G_{PI} G_D G_{I_a} G_F k_\psi G_r} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{T_a}{K_{PI} K_a} s + \frac{T_a T_\Sigma}{K_{PI} K_a} s^2} \cdot \frac{1 + sT_F}{K_F k_\psi G_r} \end{aligned}$$

²En el caso de no cancelarse se puede tomar, si es posible, la consideración $T_m \gg T_a$.

donde $K_a = K_D K_F k_\psi G_r / R_a$. Como el denominador es de segundo orden, la expresión de la constante del PI es

$$K_{PI} = \frac{R_a}{K_D K_F} \frac{T_a}{T_\Sigma} \frac{1}{4\xi^2} \frac{1}{k_\psi G_r}$$

por lo que, especificando un amortiguamiento de $\xi = \sqrt{2}/2$ se tiene

$$K_{PI} = \frac{L_a}{2K_D K_F T_\Sigma k_\psi G_r}$$

De este modo, la expresión del bloque de control de bajo nivel es la que se muestra en la Figura 7.19, donde el bloque MCC_{elec} contiene solamente la dinámica eléctrica del MCC³.

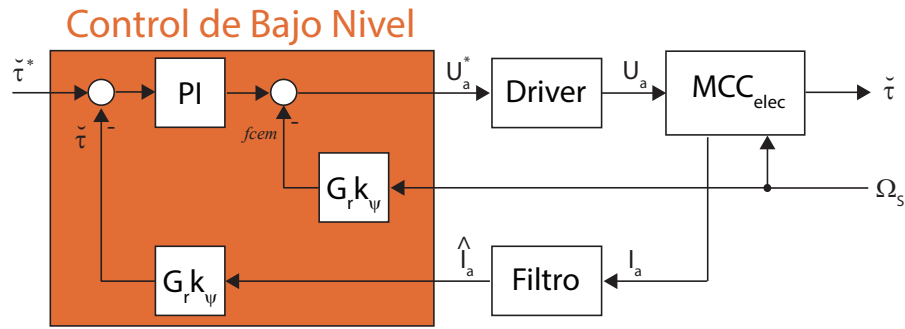


Fig. 7.19 Estructura del control con PI.

7.6.2 Tracking de Corriente

La referencia de torque $\check{\tau}^*$ teniendo en cuenta el modelo simplificado del MCC se puede expresar como referencia de corriente a partir de la transformación

$$I_a^* = \frac{1}{k_\psi G_r} \check{\tau}^*$$

Por su parte, de la dinámica eléctrica se tiene

$$L_a \dot{I}_a = -R_a I_a - k_\psi \omega + U_a$$

Así, eligiendo $U_a = U_a^*$ como

$$U_a^* = L_a \dot{I}_a^* + k_1 \tilde{I}_a + R_a I_a + k_\psi \omega \quad (7.23)$$

³Como las constantes de tiempo del driver y del filtro de corriente son mucho más rápidas que la dinámica eléctrica y del control de bajo nivel, a partir de aquí para el desarrollo de los próximos controladores se desprecian las dinámicas tanto del driver como del filtro de corriente.

la dinámica del error de corriente $\tilde{I}_a = I_a^* - I_a$ es

$$\dot{\tilde{I}}_a = -\frac{k_1}{L_a} \tilde{I}_a$$

y tiende asintóticamente a cero.

Ante la presencia de perturbaciones constantes $\bar{U}$, ya sea por incertidumbres paramétricas o acciones externas, el error no converge a cero. En pos de mejorar el comportamiento a lazo cerrado, añadimos una acción integral en la ley de control que rechace las perturbaciones y asegure convergencia al PE deseado. De este modo, añadiendo un término integral a la entrada de control (7.23) tenemos

$$U_a^* = L_a \dot{I}_a^* + k_1 \tilde{I}_a + R_a I_a + k_\psi \omega + T_I \int \tilde{I}_a dt$$

de modo que la dinámica a lazo cerrado queda

$$L_a \dot{\tilde{I}}_a + k_1 \tilde{I}_a + T_I \int \tilde{I}_a dt = \bar{U}$$

Derivando miembro a miembro se obtiene

$$\ddot{\tilde{I}}_a + \frac{k_1}{L_a} \dot{\tilde{I}}_a + \frac{T_I}{L_a} \tilde{I}_a = 0$$

y se asegura que la acción de la perturbación desaparece y el error de corriente $\tilde{I}_a$ converge a cero. El DB que implementa dicha ley de control se muestra en la Figura 7.20.

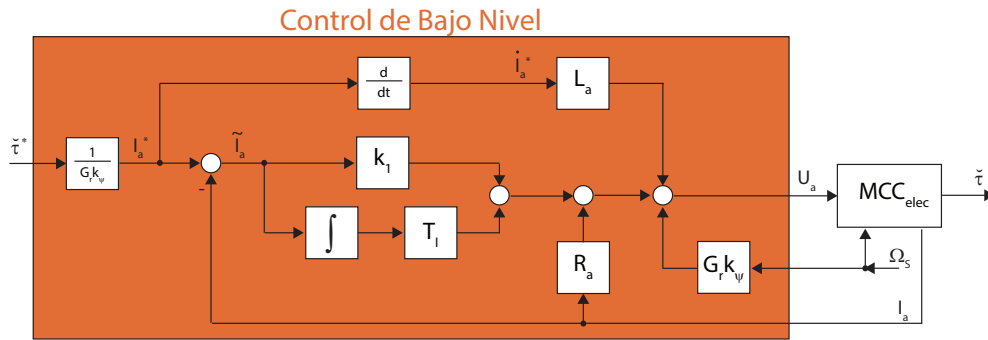


Fig. 7.20 Estructura del control con tracking de corriente.

7.6.3 Backstepping

Con los argumentos que se explican en la sección C.2 del Apéndice C se procede a desarrollar el controlador, de torque para este caso en particular. Partiendo del esquema en cascada de la Figura 7.21, se describe la expresión de cada bloque por separado:

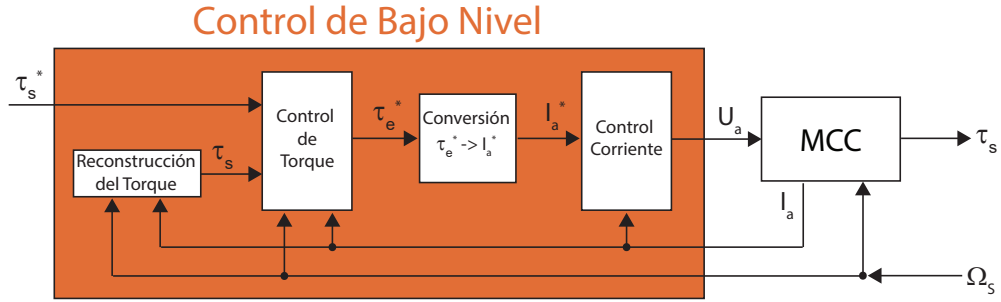


Fig. 7.21 Estructura del control en cascada.

- **Control de Torque**

La dinámica a lazo cerrado del error de torque se corresponde con la del *target BG* que se muestra en la Figura 7.22a, cuya expresión es:

$$b_T^{-1} \dot{\tilde{\tau}}_s + m_T^{-1} \tilde{\tau}_s = 0$$

Planteando el prototipo virtual solamente en el subsistema mecánico, como se muestra en la Figura 7.22b, y leyendo el camino causal se obtiene la siguiente expresión de control

$$\begin{aligned} \tau_e^* &= J_m \dot{\omega} + b_m \omega + G_r^{-1} \left(\tau_s^* - m_T \dot{f}_1 \right) \\ &= J_m \dot{\omega} + b_m \omega + G_r^{-1} \left(\tau_s^* - m_T \left[\dot{f}_3 - \dot{f}_2 \right] \right) \\ &= J_m \dot{\omega} + b_m \omega + G_r^{-1} \left(\tau_s^* - m_T \left[\dot{\Omega}_s - b_T^{-1} \dot{\tilde{\tau}}_s \right] \right) \end{aligned}$$

donde $\tilde{\tau}_s = \tau_s^* - \tau_s$ es el error de torque, τ_s^* es la referencia de torque que proviene del esquema de control de alto nivel y

$$\tau_s = G_r \left(k_\psi I_a - J_m G_r \dot{\Omega}_s - b_m G_r \Omega_s \right)$$

la reconstrucción del torque aplicado por el motor (notar que frente a la complejidad que representa medir el torque, el mismo se reconstruye a través de la medición de la corriente y la velocidad).

Así, si se elige $m_T = J_m G_r^2$ no es necesario realimentar la derivada de la velocidad rotacional ($\omega = G_r \Omega_s$), siendo la ley de control

$$\tau_e^* = b_m \omega + \frac{1}{G_r} \left(\tau_s^* + b_T^{-1} J_m G_r^2 \dot{\tilde{\tau}}_s \right)$$

donde se cumple que la dinámica del error de torque a lazo cerrado es

$$\begin{aligned} b_T^{-1} \dot{\tilde{\tau}}_s + m_T^{-1} \tilde{\tau}_s &= \frac{1}{G_r} \dot{\omega} \\ &= \dot{\Omega}_s \end{aligned} \quad (7.24)$$

Si bien la dinámica con coincide con la deseada, si se toma como hipótesis que $\dot{\Omega}_s = 0$, la misma se corresponde con la del *target BG*.

Observación 7.14. Considerar $\dot{\Omega}_s = 0$ resulta ser una hipótesis válida por el hecho de que la relación de conversión de la caja de engranajes con $G_r \gg 10$, hace que la aceleración rotacional vista desde el eje se la pueda considerar despreciable.

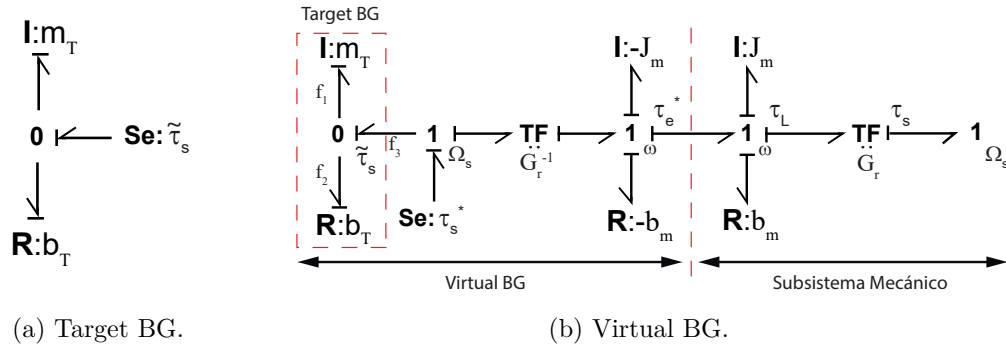


Fig. 7.22 Prototipado virtual BG.

- **Conversión $\tau_e^* \rightarrow I_a^*$**

Leyendo la causalidad del esquema BG de la Figura 3.11a, la referencia de torque se transforma en referencia de corriente a través de la relación

$$I_a^* = \frac{\tau_e^*}{k_\psi}$$

- **Control de Corriente**

Con la referencia de corriente, el bloque de *Control Corriente* genera la tensión U_a en función de la corriente y su derivada a través de la expresión

$$U_a = L_a \dot{I}_a^* + L_a k_a I_a^* + (R_a - L_a k_a) I_a + k_\psi \omega + L_a u_a \quad (7.25)$$

donde U_a cancela la tensión f_{cem} , reemplaza la resistencia R_a por $L_a k_a$ e incorpora el término u_a como entrada de control extra para realizar el *rediseño de Lyapunov*. De esta manera, la dinámica del error de corriente $\tilde{I}_a = I_a^* - I_a$ a lazo cerrado es

$$\dot{\tilde{I}}_a = -k_a \tilde{I}_a - u_a$$

Notar que el error en $\tilde{I}_a$ induce el error

$$\tilde{\tau}_e = k_\psi \tilde{I}_a$$

en el torque de control, donde $\tilde{\tau}_e = \tau_e^* - \tau_e$, de manera que el torque aplicado τ_e es diferente al torque deseado τ_e^* y la dinámica del error $\tilde{\tau}_s$ a lazo cerrado de la ecuación (7.24) cambia a

$$\frac{1}{b_T} \dot{\tilde{\tau}}_s + \frac{1}{m_T} \tilde{\tau}_s = k_\psi \tilde{I}_a$$

Finalmente, se realiza el *rediseño de Lyapunov* planteando la función candidata

$$V(\tilde{\tau}_s, \tilde{I}_a) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b_T} \tilde{\tau}_s^2 + L_a \tilde{I}_a^2 \right)$$

y derivando con respecto al tiempo se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{b_T} \tilde{\tau}_s \dot{\tilde{\tau}}_s + L_a \tilde{I}_a \dot{\tilde{I}}_a \\ &= -\frac{1}{m_T} \tilde{\tau}_s^2 + \tilde{\tau}_s k_\psi \tilde{I}_a - L_a k_a \tilde{I}_a^2 - L_a \tilde{I}_a u_a \end{aligned}$$

Así, eligiendo

$$u_a = \frac{k_\psi}{L_a} \tilde{\tau}_s$$

la derivada orbital

$$\dot{V} = -\frac{1}{m_T} \tilde{\tau}_s^2 - L_a k_a \tilde{I}_a^2$$

resulta ser definida negativa, ya que

$$\dot{V} = 0 \quad \text{sii} \quad \tilde{\tau}_s = 0, \tilde{I}_a = 0$$

De este modo, reemplazando u_a en (7.25), la expresión final de la tensión de control U_a es

$$\begin{aligned} U_a &= L_a \dot{I}_a^* + L_a k_a I_a^* + (R_a - L_a k_a) I_a + k_\psi (\omega + \tilde{\tau}_s) \\ &= L_a \left[b_m \dot{\omega} + G_r^{-1} \left(\dot{\tau}_s^* + \frac{J_m G_r^2}{b_T} \ddot{\tau}_s \right) \right] + L_a k_a \left[b_m \omega + G_r^{-1} \left(\tau_s^* + \frac{J_m G_r^2}{b_T} \dot{\tau}_s \right) \right] \\ &\quad + (R_a - L_a k_a) I_a + k_\psi (\omega + \tilde{\tau}_s) \end{aligned}$$

7.7 Conclusiones

En este capítulo se presentaron una serie de estrategias de control que, implementadas en forma acumulativa en los esquemas de control, logran cumplir con distintos objetivos relacionados al control de MAS. Por su parte, a medida que los modelos del MAS se

complejizan (modelado completo de la dinámica, motores, etc.), se implementan los controladores y/o cancelaciones necesarias para que las estrategias de control diseñadas continúen siendo válidas independientemente del modelo del MAS utilizado.

En el control de formación por distancia se mostraron dos enfoques distintos. En el primero, basado en un agente líder, se demostró convergencia exponencial al PE para formaciones caracterizadas por grafos mínimamente rígidos. Se resalta que el uso de ECB's, además de brindar una interpretación física de la ley de control, hace que la prevención de colisiones entre agentes sea inherente a la estrategia de control.

En el segundo enfoque se apeló a la teoría de control de manipuladores robóticos para desarrollar una analogía con el control en el espacio de trabajo, y así poder controlar formaciones con topologías variables en el tiempo definiendo la dinámica del error de distancia a lazo cerrado. Aquí se demostró también que para grafos mínimamente rígidos es posible aprovechar el espacio nulo de la matriz de formación para cumplir con objetivos secundarios de control. En este caso se resaltó como desventaja que las jerarquías de los objetivos secundarios quedaban supeditadas al cumplimiento del objetivo principal de control, que es el control de distancia.

Una desventaja común a ambos esquemas es que, dado que las formaciones se caracterizan a través de grafos mínimamente rígidos, aún cumpliéndose con las restricciones de distancia impuestas, la topología puede presentar desdoblamientos o espejismos.

Luego se presentó un control de formación por posición para cumplir con los objetivos de seguimiento de trayectoria de la formación y ECB's para la prevención de colisiones, cuyas leyes de los resortes virtuales fueron propuestas ad hoc. Para asegurar convergencia a cero del error de posición y velocidad de la trayectoria, se diseñó un control robusto basado en métodos deslizantes y se realizó una interpretación física pormenorizada de su función en el esquema de control en general. Además, como la formación no se caracterizó a través de grafos, no ocurrieron los problemas de espejismo y desdoblamientos.

Continuando con el control de MAS, se presentó un esquema para controlar MM trabajando en coordinación. En este caso, se aprovechó el espacio nulo de los manipuladores para introducir distintos objetivos secundarios, algunos de desarrollo propio como el control de formación de las bases y la prevención de vuelco, esta última basada en distintos índices tomados de la literatura.

En materia de elusión de obstáculos se presentaron dos estrategias distintas, ambas con una interpretación física: una propia y otra tomada de la bibliografía, basada en la generación de campos de potencial. Las contribuciones que se dieron con la primera estuvieron en línea con la utilización de ECB's y en la adaptación y posterior interpretación de la expresión de fuerza del resorte virtual. Continuando con el concepto de estrategias de control acumulativas, ambas técnicas se pueden anexar a cualesquiera de los esquemas de control vistos y su estabilidad a lazo cerrado no se ve afectada para obstáculos ubicados lo suficientemente lejos del MAS.

Por último, incorporando la dinámica de los motores, drivers y filtros de corriente, se propusieron una serie de leyes de control con distintos grados de complejidad en línea con la metodología basada en batería de métodos planteada al principio de esta tesis. Tanto la dinámica de los motores, como su correspondiente control, se incorpora en cascada al resto de los controladores en un lazo interno de dinámica rápida.

Al igual que en el capítulo anterior, se prevé que las contribuciones principales de este capítulo sean publicadas a la brevedad. Resultados de simulación en control de MAS con presencia de obstáculos fueron publicados en [3]. Validaciones experimentales de control de BM con presencia de obstáculos se presentaron en [20]. En [5] [6] [7] se realizaron contribuciones en el dominio de control de MM.

Bibliografía

En [98] se desarrolla la técnica de control por métodos deslizantes. Consultar el libro [82] para ahondar en las propiedades del producto de Kronencker. En [102] se brinda una comparación entre los índices de estabilidad vistos en esta tesis, y otros más, para el caso de un robot manipulador cuadrúpedo. Existen varios trabajos donde se utilizan enfoques parecidos a los de este capítulo. En [103] se presenta el control de consenso de trayectoria de un MAS con un agente líder y topología variable. El trabajo [93] presenta contribuciones en materia de coordinación de MAS con un enfoque de estructura virtual y seguimiento de líder. En [104] muestra que, imponiendo restricciones en el rango del grafo que caracteriza a la formación, las restricciones en la forma de la misma yacen en el espacio nulo del Laplaciano complejo. En [105] la topología de la formación deseada viene dada en términos de ángulos interiores. Consultar [106] para profundizar en el uso de funciones potenciales variables para la elusión de obstáculos móviles.

Capítulo 8

Simulaciones

Con el objetivo de validar el correcto funcionamiento de las distintas estrategias de control desarrolladas en los capítulos anteriores, se presentan resultados de experimentación numérica en 12 escenarios distintos realizados con el Software MatLab-Simulink; los 9 primeros -del **A** al **I**- son en escenarios de control de formación y los 3 últimos -del **J** al **L**- en control de cooperación. El *leitmotiv* de todos los escenarios es ir sumando complejidad a cada uno, agregando estrategias de control o utilizando modelos del MAS más realistas, para verificar las propiedades de alguna de las estrategias de control o el correcto comportamiento de los modelos de los agentes. En la introducción se muestran los valores de parámetros, referencias e información común a los 12 escenarios y luego, para los 9 escenarios de control de formación en particular, se especifican la topología deseada y las condiciones iniciales. Se comienza simulando el control de distancia con el MAS modelado como puntos materiales. Luego se incorporan progresivamente los modelos de BM y MM y los bloques de *Control de Agente Líder*, *Control de Coordenadas s*, *Cancelación Exacta*. Seguidamente, con el objetivo de realizar un análisis experimental numérico lo más próximo posible a la implementación física real, se simula el modelo completo del MAS incluyendo a los motores y sus respectivos controles. Se presentan los resultados del esquema de control de elusión de obstáculos con campos de potencial, en el espacio de las aristas y el control de formación por posición con y sin robustez. Para los últimos 3 escenarios de control de cooperación se especifican las condiciones iniciales y la trayectoria deseada, y luego se validan los distintos objetivos secundarios y la elusión de obstáculos con ECB. Finalmente se presentan las conclusiones comparativas entre las distintas estrategias de control, resaltando ventajas y desventajas.

8.1 Introducción

Hasta aquí la tesis se dividió en dos partes: la de modelado y la de control. La primera contiene modelos dinámicos de las BM y MM de distinta granularidad; desde puntos materiales, pasando por modelos de cuerpo rígido hasta la inclusión de la dinámica

del MCC, mientras que la segunda parte presenta una serie de estrategias de control. Entre estas últimas podemos diferenciar dos tipos de estrategias distintas:

- Las necesarias para hacer frente a los distintos desafíos de la teoría de control de MAS; control de formación y cooperación, elusión de obstáculos, prevención de colisiones, estabilidad anti-vuelco. Las mismas se agrupan según el organigrama de la Figura 8.1a.
- Aquellas que adaptan las leyes de control del item anterior a los distintos modelos del MAS, como se muestran en la Figura 8.1b. Se aprecia que cuando los agentes se modelan como puntos materiales no es necesaria ninguna adaptación de las leyes de control.

Como puede observarse en la Figura 8.1, en cada organigrama se detallaron los distintos escenarios de simulación, del **A** al **L**.

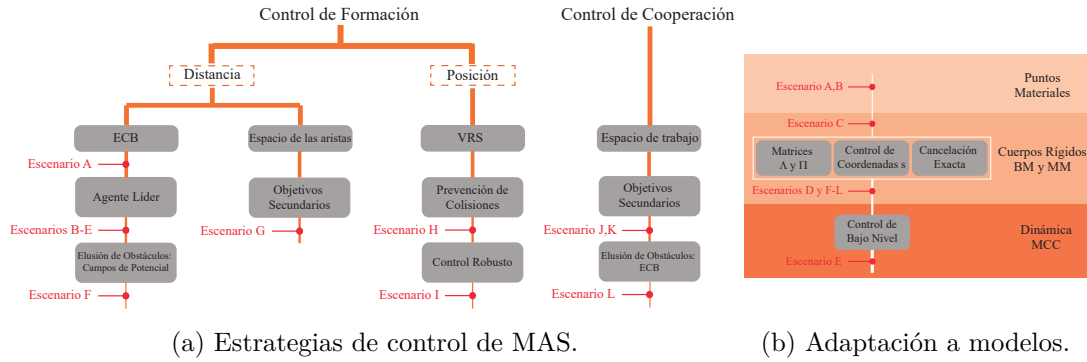


Fig. 8.1 Estrategias de control desarrolladas en la tesis.

A continuación se presentan una serie de características comunes (salvo que se especifique lo contrario) a todos los escenarios de simulación. Dichas características son los parámetros de todos los modelos, el obstáculo a simular y las entradas de referencia deseadas a utilizar en los distintos esquemas.

Modelos y Parámetros

Los modelos utilizados de los agentes son los vistos en los capítulos 3, 4, y 5. En particular, para las simulaciones se utilizará el modelo EL genérico del MAS de la ecuación 5.4. Los valores de los parámetros de la BM y sus correspondientes motores son los de la base chica que se muestran en la Tablas 3.4 y 3.5 del capítulo 3. Por su parte, los valores de los parámetros del manipulador de los MM son:

	Eslabón 1	Eslabón 2
masa m_i	0,297Kg	0,258Kg
centro de masa l_i	0,139m	0,114m
largo a_i	0,2m	0,2m
tensor de inercia $I_{l_i}^i$	$\text{diag}\{[0.14, 1.63, 1.71]\}\text{e-3Kg}\text{m}^2$	$\text{diag}\{[0.06, 1.07, 1.05]\}\text{e-3Kg}\text{m}^2$

Tabla 8.1 Parámetros del manipulador del MM para $i = 2, 3$.

Los mismos se corresponden con los eslabones principales del robot rx-200 de la empresa trossen robotics disponible en el laboratorio¹.

Obstáculo

En los escenarios en los cuales se busque verificar el correcto funcionamiento de las estrategias de elusión de obstáculos, se simulará la presencia de un cubo de dimensiones $0.4\text{m} \times 0.4\text{m} \times 0.4\text{m}$, centrado en el punto $r_o = [0.5, 2]^T$ como se muestra en la Figura 8.2.

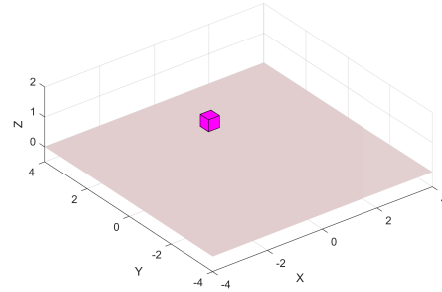


Fig. 8.2 Obstáculo.

Referencias

A continuación se presenta una trayectoria de referencia en el plano que será utilizada en los distintos escenarios con diversos fines (como entrada de los bloques *Control de Agente Líder*, *Control de Posición* o incluso en el control de cooperación).

La trayectoria $(x^*, \dot{x}^*, \ddot{x}^*)$ se muestra en la Figura 8.3a, mientras que la trayectoria $(y^*, \dot{y}^*, \ddot{y}^*)$, que es función de la primera, en la Figura 8.3b. Su correspondiente ley es

$$\begin{aligned}
 y^*(t) &= b \sin(ax^*(t)) + c \\
 \dot{y}^*(t) &= ab \cos(ax^*(t)) \dot{x}^*(t) \\
 \ddot{y}^*(t) &= -a^2 b \sin(ax^*(t)) \dot{x}^{*2}(t) + ab \cos(ax^*(t)) \ddot{x}^*(t)
 \end{aligned}$$

con $a = 2$, $b = 2$ y $c = 1$. En la Figura 8.3c se muestra el correspondiente camino en el plano.

¹Datos del manipulador: <https://www.trossenrobotics.com/reactorx-200-robot-arm.aspx>

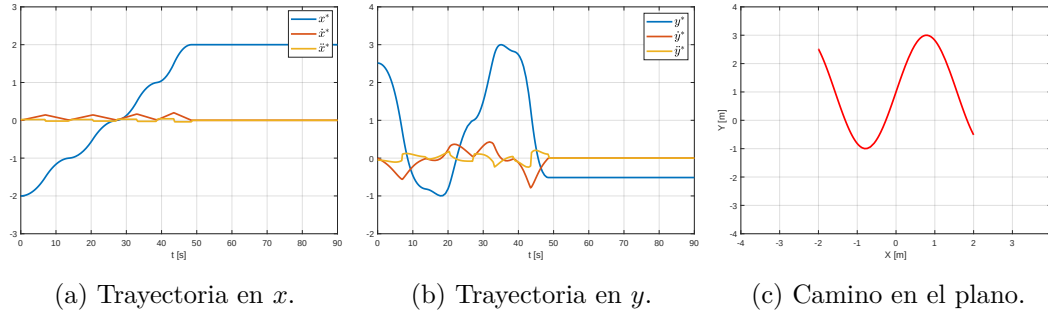


Fig. 8.3 Referencia de entrada a utilizar en los distintos escenarios.

Por su parte, cuando se utilice el bloque de *Control de Coordenadas s* , las referencias deseadas para las coordenadas s de las BM y MM serán

	s_1^*	s_2^*	s_3^*	s_4^*	s_5^*	s_6^*	Unidad
BM	0	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{18}$	$\frac{7\pi}{18}$	$\frac{\pi}{2}$	[rad]
MM	$\pi[0, \frac{8}{9}, -\frac{2}{3}]^T$	$\pi[\frac{1}{9}, \frac{8}{9}, -\frac{2}{3}]^T$	$\pi[\frac{1}{6}, \frac{8}{9}, -\frac{2}{3}]^T$	$\pi[\frac{5}{18}, \frac{8}{9}, -\frac{2}{3}]^T$	$\pi[\frac{7}{18}, \frac{8}{9}, -\frac{2}{3}]^T$	$\pi[\frac{1}{2}, \frac{8}{9}, -\frac{2}{3}]^T$	[rad]

donde para el caso de los MM, los ángulos de los eslabones representan al manipulador en su *home position*, i.e., el brazo retraído sobre la base. Por su parte, las referencias de velocidades $\dot{s}_i^*$ con $i = 1, \dots, 6$ serán nulas.

8.2 Escenarios de Verificación

A continuación presentamos las estrategias de control, vistas en los capítulos anteriores, aplicadas en distintos escenarios que diferenciamos entre control de formación y control de cooperación.

8.2.1 Control de Formación

Los escenarios de control de formación constan de un MAS compuesto de 6 agentes moviéndose en un plano horizontal. Más abajo se presentan las condiciones iniciales de las coordenadas y sus respectivas derivadas, y la topología deseada con sus correspondientes valores deseados de distancias z_k o vectores r_i^S , según corresponda.

Topología y Orientación Deseada

En estos escenarios la topología deseada será la que se muestra en la Figura 8.4a y su orientación deseada la mostrada en la Figura 8.4b. De aquí en adelante se respetará la correspondencia entre números y colores de los agentes mostrada en la Figura 8.4.

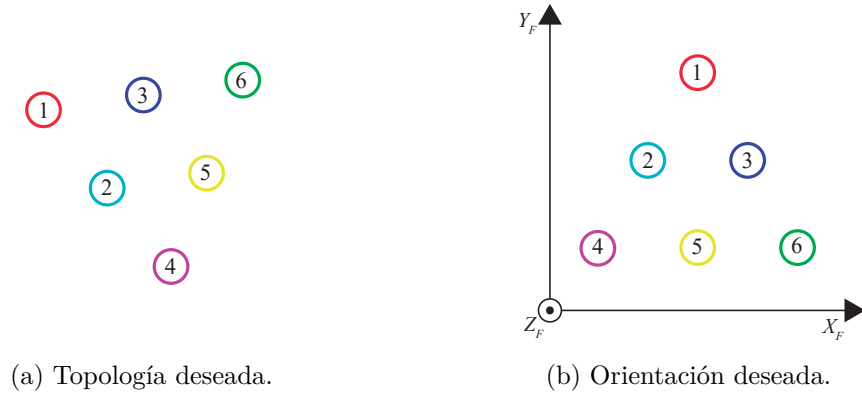


Fig. 8.4 Topología de formación del MAS con su correspondiente orientación deseada.

La misma puede ser representada por

- Dos grafos directos $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ de $n = 6$ vértices cada uno y $m = 9$ y $m = 15$ aristas, como se muestra en las Figuras 8.5a y 8.5b, respectivamente
- La VRS de la Figura 8.5c.

Si se representa con grafos, las matrices de incidencia que caracterizan a los mismos son:

$$D_{\mathcal{G}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D_{\mathcal{G}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

y las respectivas longitudes deseadas de las aristas:

Grafo	z_1^*	z_2^*	z_3^*	z_4^*	z_5^*	z_6^*	z_7^*	z_8^*	z_9^*	z_{10}^*	z_{11}^*	z_{12}^*	z_{13}^*	z_{14}^*	z_{15}^*	Unidad
$\mathcal{G}_1$	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	-	-	-	-	-	-	[m]
$\mathcal{G}_2$	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	2.6	2.6	2.6	3	3	3	[m]

Si se representa a través de la VRS, los vectores de posición de los VRP que componen la VRS son:

r_1^S	r_2^S	r_3^S	r_4^S	r_5^S	r_6^S	Unidad
$[0, 0]^T$	$[-0.75, -h]^T$	$[0.75, -h]^T$	$[-1.5, -2h]^T$	$[0, -2h]^T$	$[1.5, -2h]^T$	[m]

donde $h = \sqrt{1, 5^2 - 0, 75^2}$.

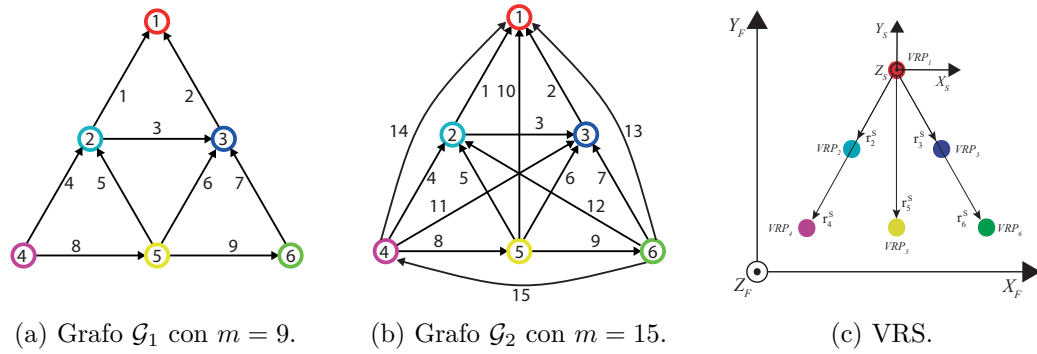


Fig. 8.5 Representación de la topología deseada a través de grafos y VRS.

Condiciones Iniciales

Las condiciones iniciales del vector de posición r del CM (independientemente de si los agentes vienen modelados como puntos materiales o cuerpos rígidos) se muestra en la Figura 8.6 y sus valores son

r_{0_1}	r_{0_2}	r_{0_3}	r_{0_4}	r_{0_5}	r_{0_6}	Unidad
$[0, 5]^T$	$[4, -1.5]^T$	$[-2, 1.5]^T$	$[5, -1]^T$	$[-3, -2]^T$	$[-3, 5]^T$	[m]

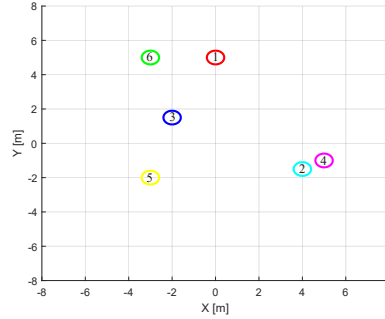


Fig. 8.6 Condiciones iniciales de posición en el plano de los agentes.

Por su parte, las velocidades iniciales son

$\dot{r}_{0_1}$	$\dot{r}_{0_2}$	$\dot{r}_{0_3}$	$\dot{r}_{0_4}$	$\dot{r}_{0_5}$	$\dot{r}_{0_6}$	Unidad
$[24.4, 7.6]^T$	$[20.1, 20.1]^T$	$[10.1, 15.1]^T$	$[2, 1.4]^T$	$[14.1, 20.7]^T$	$[24.9, 3.4]^T$	[m/s]

En el caso de que los agentes vengan modelados como BM o MM, las condiciones iniciales del resto de las coordenadas s son, respectivamente

	s_{0_1}	s_{0_2}	s_{0_3}	s_{0_4}	s_{0_5}	s_{0_6}	Unidad
BM	$\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	[rad]
MM	$\pi[\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^T$	$\pi[0, \frac{1}{3}, \frac{-1}{2}]^T$	$\pi[\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{-2}{3}]^T$	$\pi[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{-1}{4}]^T$	$\pi[\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -1]^T$	$\pi[\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, 0]^T$	[rad]

y las velocidades iniciales $\dot{s}_{0_i}$ con $i = 1, \dots, 6$ nulas.

Escenarios del A al I

A continuación se describen los esquemas de control empleados en los distintos escenarios detallando DB, tipo de modelo del MAS, parámetros y referencias si las hubiera.

A DB de la Figura 6.12: bloque *Control de Distancia*. MAS con agentes modelados como puntos materiales. Parámetros:

$$\mu_R = 10 \quad B = 20\mathbf{I}_9 \quad k_{lk} = \frac{3\mu_R}{z_k^*} \quad m = 9$$

B DB de la Figura 7.5: Mismo esquema que **A** sumándole bloque de *Control de Agente Líder*. MAS con agentes modelados como puntos materiales. Parámetros:

$$K_{Pa} = 20\mathbf{I}_3 \quad K_{La} = 20\mathbf{I}_3$$

Se elige al agente 1 como líder y la arista de control $k = 1$ (ver Figura 8.5a). La evolución respecto al tiempo de los dos primeros componentes del vector de referencia de entrada a^* se muestra en la Figura 8.3. La tercer componente, el ángulo deseado, es constante e igual a

$$\begin{aligned} \alpha_1^* &= \arccos\left(\frac{z_3^*}{2z_1^*}\right) \\ &= 60^\circ \end{aligned}$$

que equivale a que la topología se mueva en el plano con la orientación mostrada en la Figura 8.4b.

C DB de la Figura 7.6: Mismo esquema que **B**. MAS con agentes modelados como BM y MM.

D DB de la Figura 7.7: Mismo esquema que **C** sumándole bloques de *Control de Coordenadas s* y *Cancelación Exacta*. MAS con agentes modelados como MM. Parámetros:

$$K_{Ds} = \mathbf{I}_3 \quad K_{Ps} = 2\mathbf{I}_3$$

E DB de la Figura 7.18: Mismo esquema que **D** pero teniendo en cuenta los drivers, filtros de corrientes y control de bajo nivel. MAS con agentes modelados como BM y dinámicas de los MCC. Parámetros:

$$K_{PI} = 0.2002 \quad T_{PI} = 6.746e^{-6}$$

Para evitar superar la máxima tensión de alimentación de los motores se extiende el tiempo de la trayectoria deseada de la Figura 8.3 a $t = 200s$ y se relajan las

constantes de control:

$$\mu_R = 2 \quad B = 60\mathbf{I}_9 \quad K_{Pa} = 2\mathbf{I}_3 \quad K_{Ia} = 2\mathbf{I}_3$$

F DB de la Figura 7.15: Mismo esquema que en **D** con presencia del obstáculo de la Figura 8.2 y bloque de *Elusión de Obstáculos* con campos de potencial. MAS con agentes modelados como MM. Parámetros:

$$n_x = 200 \quad n_y = 200$$

El campo de potencial y las fuerzas de repulsión que genera el mismo se muestran en las Figuras 8.7a y 8.7b, respectivamente.

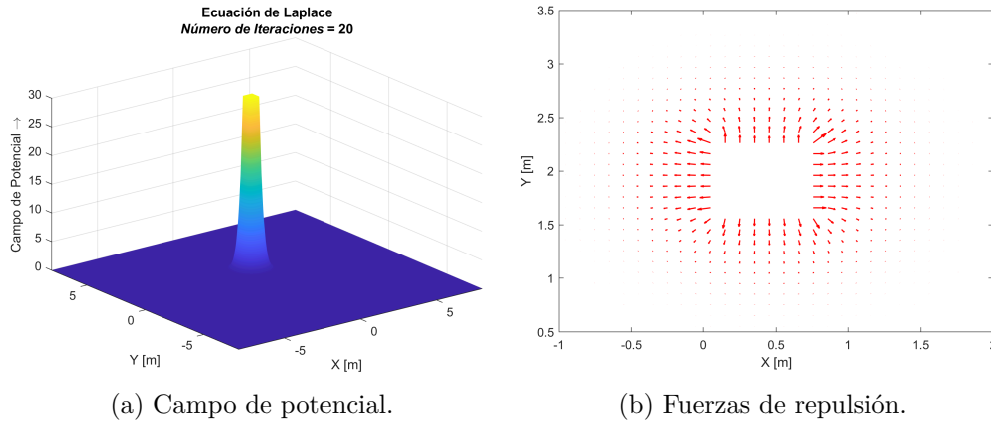


Fig. 8.7 Representación del obstáculo a través de un campo de potencial.

G DB de la Figura 7.8: Esquema de control en el espacio de las aristas, con bloques de *Control en el Espacio Nulo*, *Control de Coordenadas s* y *Cancelación Exacta* y la funciones objetivo secundario de minimización de la velocidad de los agentes y control de posición y orientación:

$$\omega(r) = -k_{01}\dot{r}^T\dot{r} - k_{02}\left(\tilde{r}_2^T\tilde{r}_2 + \tilde{r}_5^T\tilde{r}_5\right)$$

MAS con agentes modelados como BM. Parámetros:

$$K_D = \mathbf{I}_9 \quad K_P = 2\mathbf{I}_9 \quad m = 9 \quad k_{01} = 5 \quad k_{02} = 50$$

Las referencias de distancias $(z^*, \dot{z}^*, \ddot{z}^*)$ son las que se muestran en la Figura 8.8a, y los caminos deseados r_2^* y r_5^* de los agentes número 2 y 5, respectivamente, para que la topología se desplace con la orientación deseada se muestran en la Figura 8.8b.

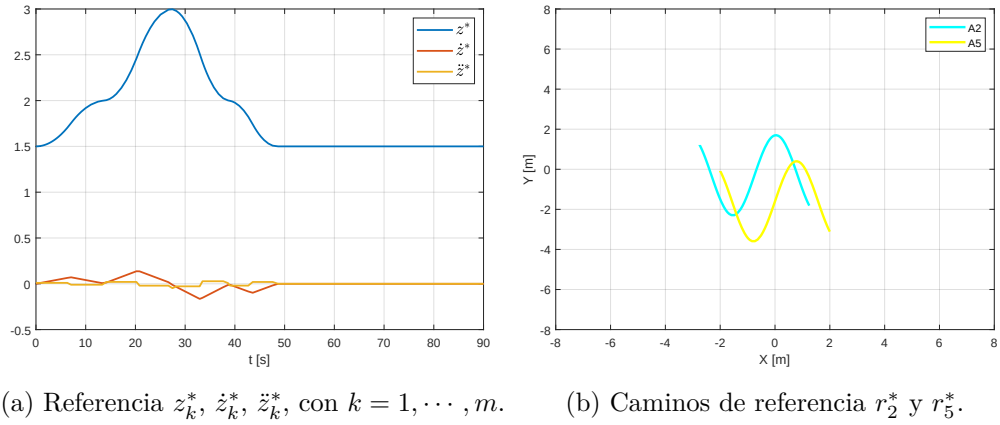


Fig. 8.8 Referencias de entrada del esquema de control en el espacio de las aristas.

H DB de la Figura 7.12: Esquema de control de formación por posición sin control robusto con bloque de *Prevención de Colisiones*, *Control de Coordenadas s* y *Cancelación Exacta*. MAS con agentes modelados como MM. Parámetros:

$$\mu_P = 10 \quad B = 20 \quad m = 15 \quad K_P = 5\mathbf{I}_{12} \quad K_D = 10\mathbf{I}_{12} \quad \rho = 0$$

La VRS deseada se muestra en la Figura 8.5c, la trayectoria deseada de su origen de coordenadas es la mostrada en la Figura 8.3 y el ángulo $\varphi_S = 0$.

I DB de la Figura 7.12: Mismo esquema de control que en **H** pero con control robusto. MAS con agentes modelados como MM. Parámetros:

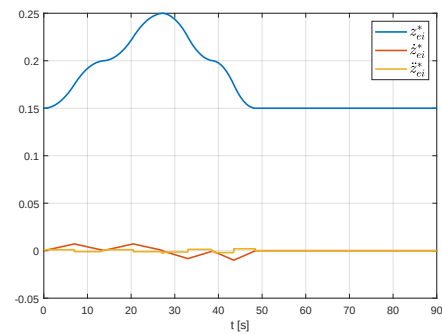
$$\rho = 50 \quad \epsilon = 0.1$$

8.2.2 Control de Cooperación

Los siguientes escenarios contienen 3 MM trabajando en cooperación.

Trayectoria Deseada

El objetivo es que los efectores finales sigan la misma trayectoria deseada (z_{ei}^* , $\dot{z}_{ei}^*$, $\ddot{z}_{ei}^*$) con $i = 1, \dots, 3$. Los primeros dos componentes de la misma se muestran en la Figura 8.3, mientras que el tercer componente (la altura z) se muestra en la Figura 8.9.

Fig. 8.9 Trayectoria en z .

Modelos y Parámetros

A fin de lograr una mejor apreciación visual de los efectos de los controles presentados en esta sección, se duplican todos los parámetros de la Tabla 8.1 y el peso de la bases.

Condiciones Iniciales

Los vectores iniciales de posiciones r y coordenadas s son

r_{01}	r_{02}	r_{03}	Unidad	s_{01}	s_{02}	s_{03}	Unidad
$[0, 3]^T$	$[-3, 1]^T$	$[-2, 1.5]^T$	[m]	$\pi[\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^T$	$\pi[0, \frac{1}{3}, \frac{-1}{2}]^T$	$\pi[\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{-2}{3}]^T$	[rad]

y sus respectivas velocidades cero.

Escenarios del J al L

Los esquemas de control por cooperación son:

J DB de la Figura 7.13: Control de cooperación. Los objetivos secundarios son minimización de la velocidad de las juntas y formación, i.e.,

$$\omega(q) = -k_{01}\dot{q}^T\dot{q} - k_{02}\sum_{k=1}^m (z_k - z_k^*)^2$$

MAS con agentes modelados como MM. Parámetros:

$$n = 3 \quad m = 3 \quad K_P = 10\mathbf{I}_9 \quad K_D = 20\mathbf{I}_9 \quad k_{01} = 10 \quad k_{02} = 30 \quad z_k^* = 1.2$$

con $k = 1, 2, 3$.

K DB de la Figura 7.13: Mismo esquema de cooperación que en **J** pero agregando estabilidad anti vuelco como objetivo secundario, i.e.,

$$\omega(q) = -k_{01}\dot{q}^T\dot{q} - k_{02}\sum_{k=1}^m (z_k - z_k^*)^2 - k_{03}\sum_{i=1}^n \left[(x_{zmp}^i - x_i)^2 + (y_{zmp}^i - y_i)^2 \right]$$

MAS con agentes modelados como MM. Parámetros:

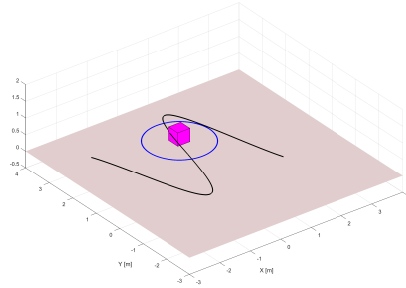
$$k_{01} = 5 \quad k_{02} = 5 \quad k_{03} = 100$$

L DB de la Figura 7.15: Mismo esquema de cooperación que en **J** con presencia del obstáculo de la Figura 8.2 y bloque de *Elusión de Obstáculos* con ECB. MAS con agentes modelados como MM. Parámetros:

$$k_{01} = 5 \quad k_{02} = 15 \quad k_{03} = [0, 3, 0, 6, 1, 5]^T e^3$$

y

$$\mu_O = 10 \quad b_o = 1 \quad k_o = 0,1 \quad Z_1 = 0,105 \quad Z_2 = 0,1 \quad z_o^* = 1$$

Fig. 8.10 Camino, obstáculo y circunferencia de radio z_o^* .

8.3 Análisis Comparativos Vía Simulación

Control de Formación

A continuación se presentan los resultados de simulación de los 9 escenarios de control de formación.

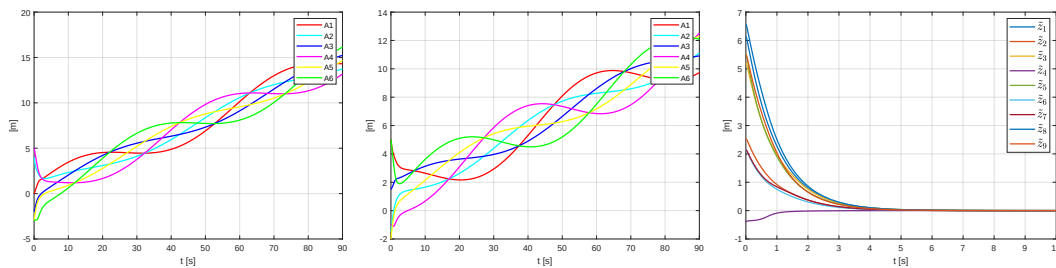
Escenario A

En las gráficas de la Figura 8.11 se verifica que, con el esquema de control **A**, si bien las distancias de los agentes convergen rápidamente al valor deseado (Figura 8.11c), la formación continúa moviéndose en el plano y los agentes no se detienen. Este comportamiento demuestra la invariancia del conjunto Ω_c , definido en la ecuación 6.16, respecto a las posiciones r y los errores $\tilde{z}$.

Se prueba además lo enunciado en la Observación 6.8 del capítulo 6 en la que se aseguraba que los agentes podían moverse en el plano con las distancias deseadas. En este caso en particular los agentes se forman en la topología deseada y la misma se comporta como un cuerpo rígido que rota y se desplaza en el plano, como se observa en las evoluciones de la Figura 8.12.

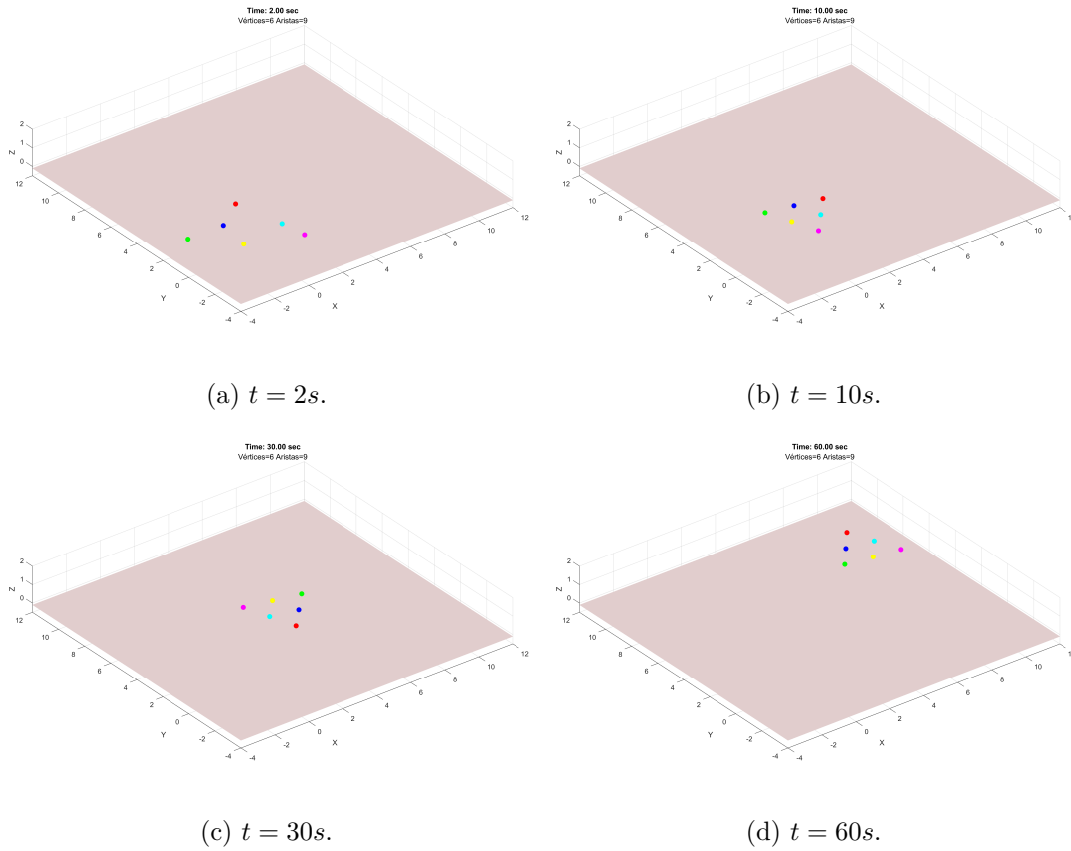
Notar además que, si bien las distancias entre agentes cumplen con las restricciones impuestas, la topología resultante se encuentra espejada respecto a la deseada (ver Figura 8.4a). Esto se había anticipado que podía ocurrir y no representa un error de la estrategia de control si no que se debe a que, como se controla la distancia, los desplazamientos entre agentes podrán ser positivos o negativos y esto dependerá de las condiciones iniciales de posición de los mismos. Este fenómeno de espejismo lo observaremos a lo largo de todos los escenarios en los cuales se implemente el control de formación por distancia.

Incluso más, como la topología viene caracterizada por un grafo de $m = 9$ aristas (ver Figura 8.5a), existen varias soluciones que satisfacen las restricciones de distancias impuestas, de manera que también podría ocurrir el fenómeno de desdoblamiento y que los agentes se formen en una topología que no sea la deseada. En este caso en



(a) Posición x hasta $t = 90s$. (b) Posición y hasta $t = 90s$. (c) Error de distancia $\tilde{z}$ hasta $t = 10s$.

Fig. 8.11 Esquema de control **A**.

Fig. 8.12 Esquema de control **A** - evoluciones en el plano.

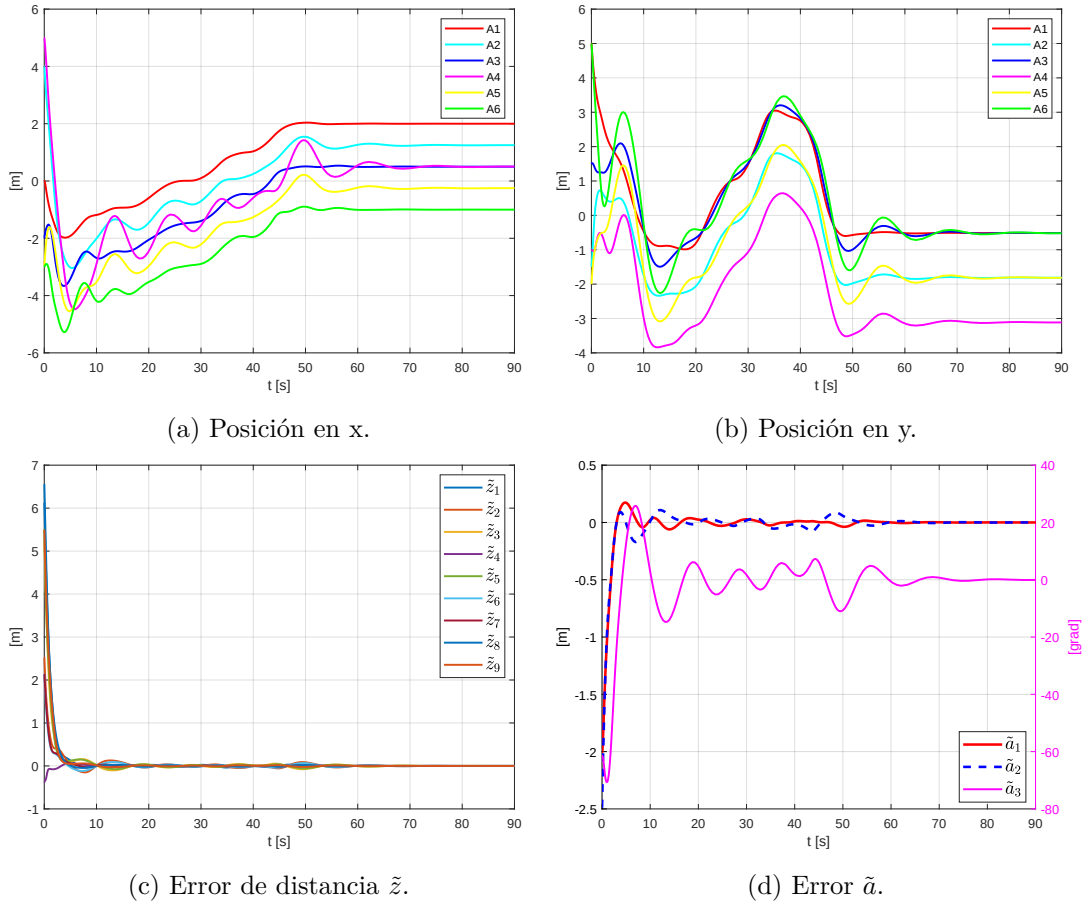
particular, como las distancias deseadas entre agentes son las mismas, podría ocurrir que: (i) el agente 6 ocupe el lugar del 2, (ii) el 4 ocupe el del 3, (iii) el 1 ocupe el del 5.

Escenario B

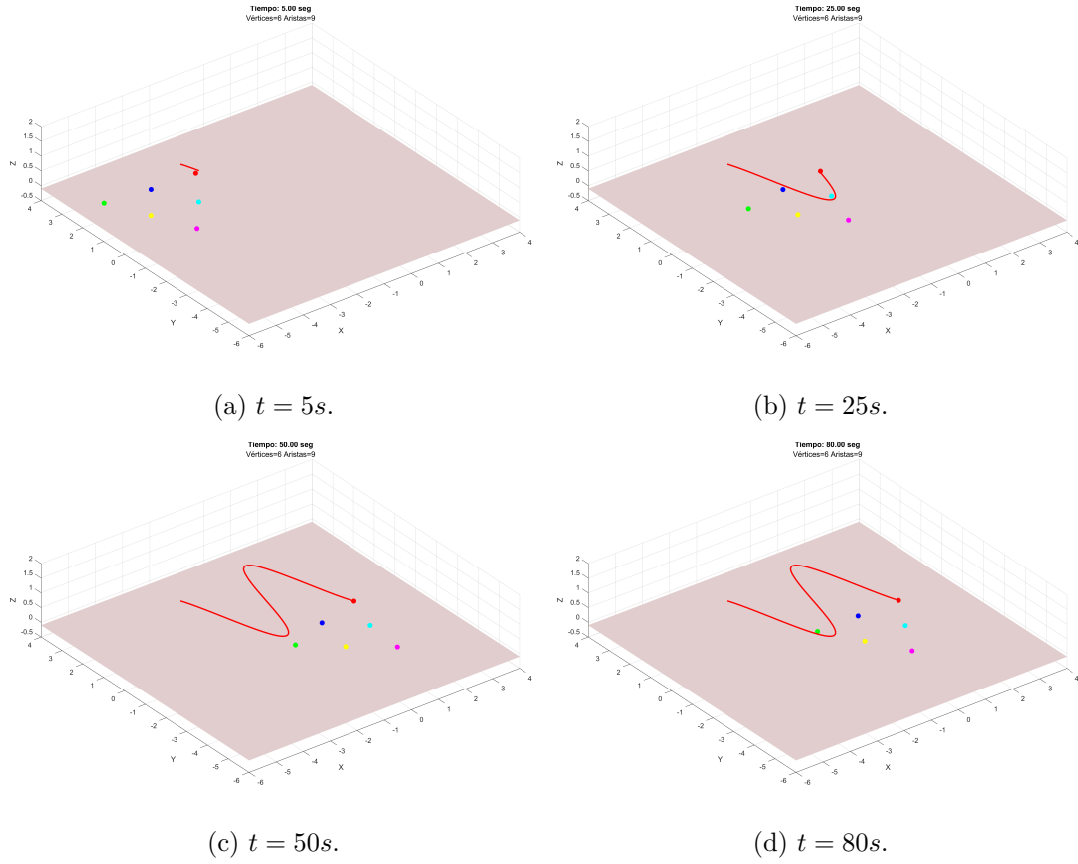
En la Figura 8.13 se puede verificar que con el esquema de control del escenario **B** el PE ($\dot{r} = 0, \dot{\tilde{z}} = 0, \dot{\tilde{a}} = 0$) es estable ya que el MAS se detiene (Figura 8.13a y 8.13b), las distancias entre los agentes son las deseadas (Figura 8.13c) y el error $\tilde{a}$ tiende a cero (Figura 8.13d). Observando la evolución de esta última gráfica se verifica que el bloque de *Control de Agente Líder* estabiliza al MAS en el PE cuando la referencia a^* es constante (a partir de $t = 50s$).

Apreciar que la adición de la estrategia de *Control de Agente Líder* a la de *Control de Distancia* ocasiona que la convergencia del error de distancia $\tilde{z}$ a cero no sea exponencial y presente oscilaciones alrededor del PE (Figura 8.13c).

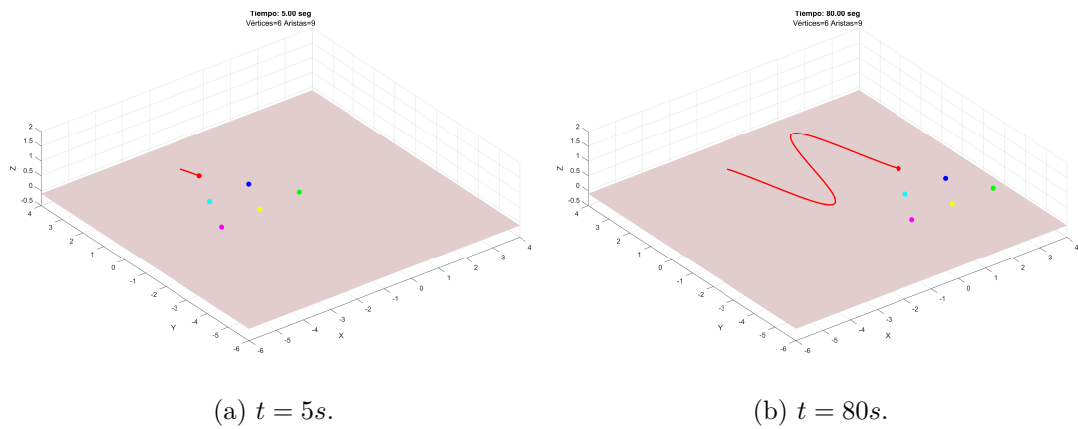
Por su parte, en la Figura 8.14 que se muestran las evoluciones en el plano para distintos instantes, se puede observar que si bien los agentes se forman y siguen la trayectoria con la topología deseada de la Figura 8.4a, la misma queda espejada. En

Fig. 8.13 Esquema de control **B**.

este caso este fenómeno ocasiona que, si bien el error $\tilde{a}$ tiende a cero y el ángulo de la arista $k = 1$ a 60° , la topología no adopte la orientación deseada de la Figura 8.4b.

Fig. 8.14 Esquema de control **B** - evoluciones en el plano.

Como se mencionó anteriormente, el hecho de que la formación quede espejada depende de las condiciones iniciales de las posiciones en el plano de los agentes r_0 . Así, cambiando dicho vector por $r_0 = [0, 5, 4, -1, -2, 1, 5, -1, -3, -2, -3, 5]^T$, los resultados del escenario se muestran en la Figura 8.15. En este sentido ahora se puede apreciar que la topología sí logra seguir la trayectoria con la orientación deseada.

Fig. 8.15 Esquema de control **B** con vector r_0 modificado - evoluciones en el plano.

Escenario C

Con el esquema **C**, se realiza una primera tanda de simulaciones con los agentes representados con el modelo dinámico de las BM. Los resultados de la Figura 8.16 muestran que el comportamiento es similar al esquema anterior con la particularidad de que ahora se puede simular el ángulo de rotación φ_1 de las bases (ver Figura 8.16c). Se puede apreciar que, como las acciones de control de los bloques de control propuestos son fuerzas en el plano, la dinámica de traslación de las BM se encuentra desacoplada de la de rotación.

Los resultados de la segunda tanda de simulaciones, con los agentes que componen el MAS modelados como MM, se muestran en la Figura 8.17. En este caso, la falta de control sobre el brazo manipulador ocasiona que el mismo evolucione libremente (ver Figuras 8.17d y 8.17e). Dicha dinámica no controlada se puede considerar como una perturbación que afecta la convergencia del resto de las variables a sus respectivos PE deseados, ocasionando oscilaciones en las mismas. Y si bien el controlador logra rechazar esta perturbación, con el error $\tilde{a}$ oscilando alrededor del cero y las distancias entre agentes z alrededor de los valores deseados, las bases no logran detenerse y continúan girando. Nuevamente en este caso se observa el desacople entre las dinámica de traslación y rotación y cómo esta última no puede controlarse con el esquema propuesto.

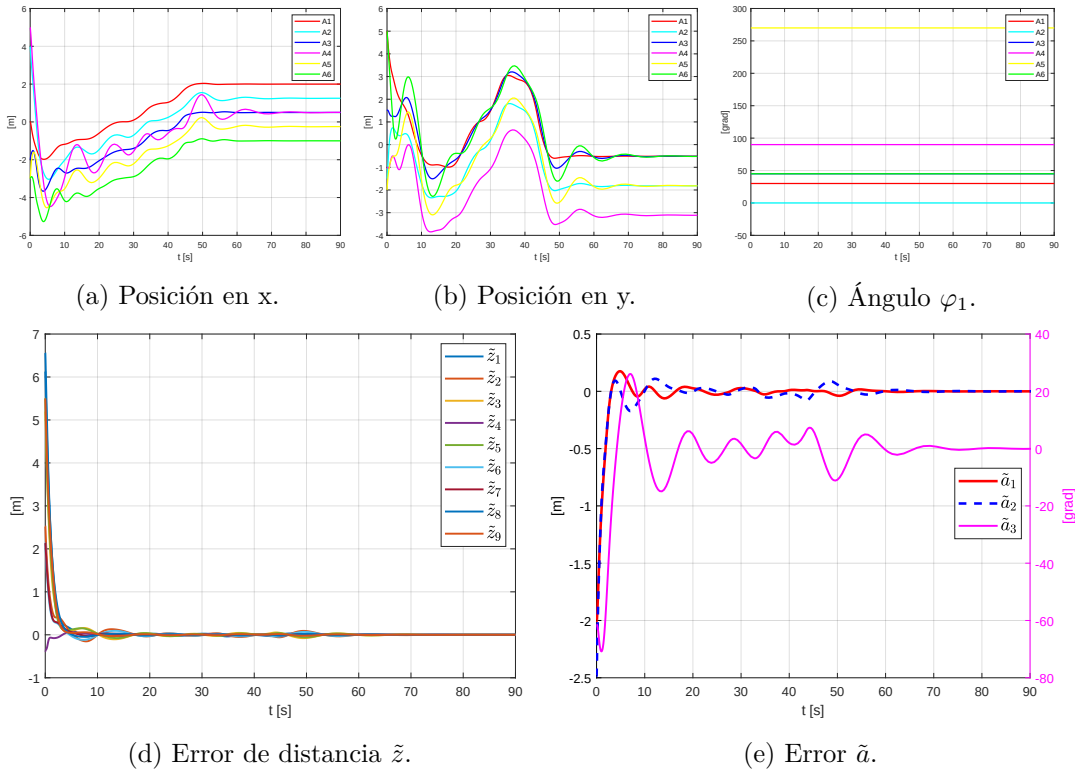
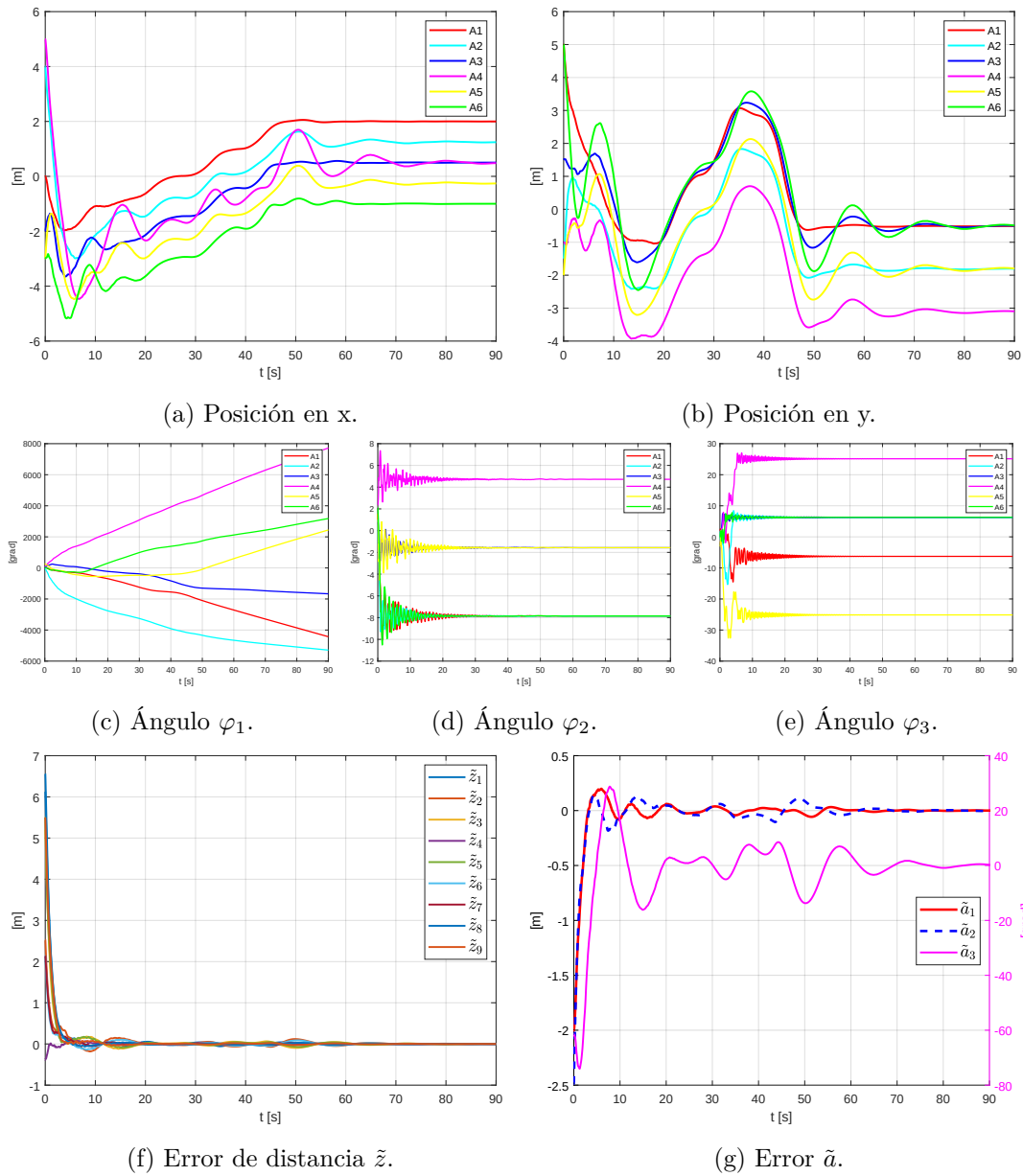


Fig. 8.16 Agentes modelados como BM en el esquema de control **C**.

Fig. 8.17 Agentes modelados como MM en el esquema de control **C**.

Notar que las gráficas de las Figuras 8.17d y 8.17e muestran los brazos tendidos hacia abajo y que, si bien el movimiento del brazo por debajo de la base es físicamente imposible, dicha particularidad no fue tenida en cuenta en el modelo físico idealizado. Con este comportamiento queda demostrada la necesidad de agregar una acción de control en las coordenadas s .

Escenario D

En el esquema **D**, visto el problema ilustrado en el escenario anterior, se procede a incorporar los bloques de *Control de Coordenadas s* y *Cancelación Exacta*. De este

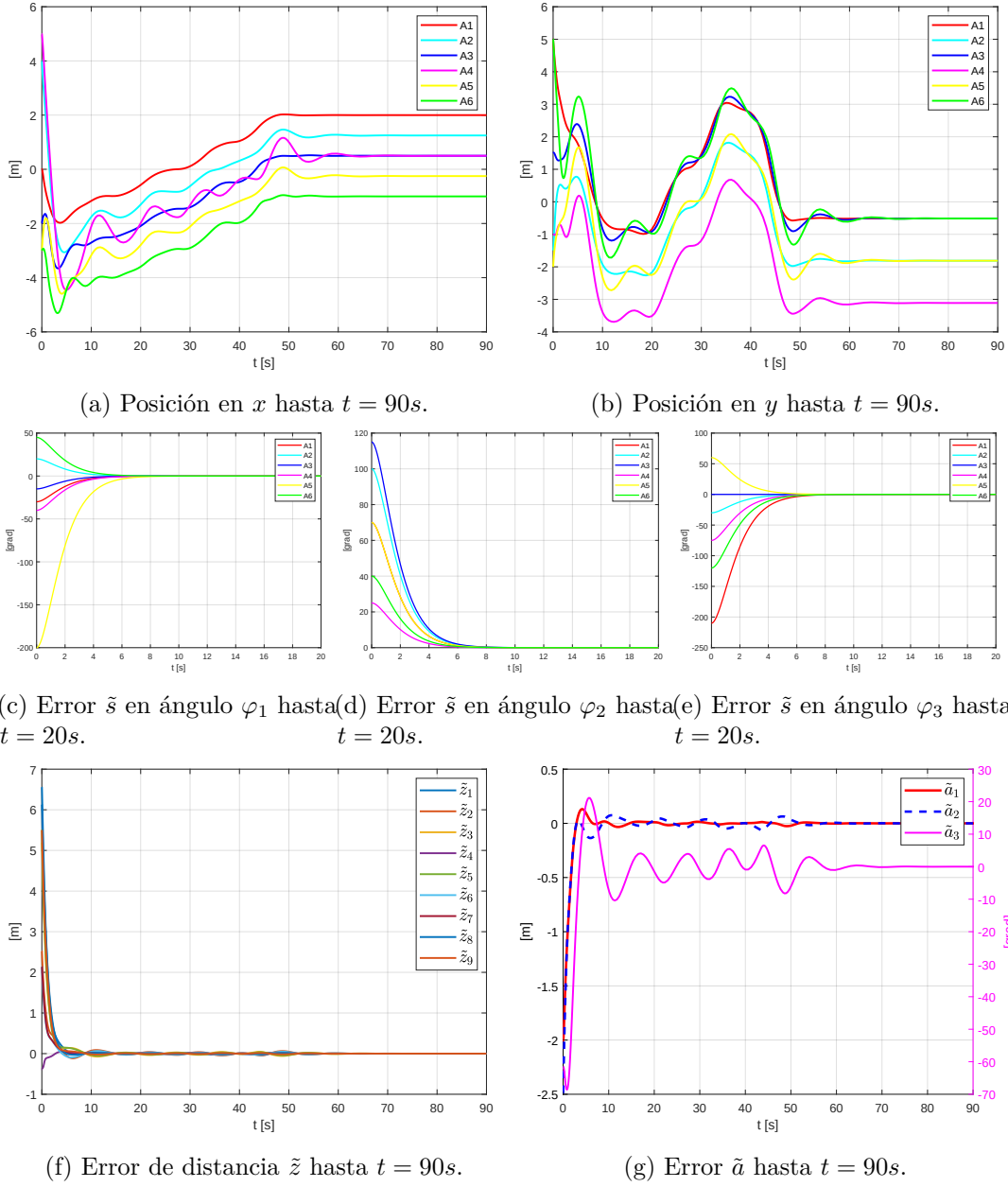


Fig. 8.18 Agentes modelados como MM en el esquema de control **D**.

modo los resultados muestran que las bases logran detenerse (Figura 8.18a y 8.18b) en las distancias deseadas (Figura 8.18f) y el error $\tilde{a}$ tiende a cero (Figura 8.18g). En las Figuras 8.18c-8.18e, se verifica la evolución desacoplada entre las coordenadas r y s (debido al bloque de *Cancelación Exacta*) con un error que converge a cero con una tasa de tiempo que depende de las matrices K_{Ds} y K_{Ps} .

Escenario E

Hasta ahora los escenarios implementados permitieron verificar el correcto desempeño de las distintas estrategias de control y validar los modelos de las BM y MM. Sin embargo, si dichos controles se quisiesen implementar experimentalmente en dispositivos físicos, habría que tener en cuenta otro tipo de consideraciones como limitaciones físicas de los actuadores y condiciones nominales de los motores.

Es por eso que en el escenario de control **E** se incorporan la dinámica de los MCC de las ruedas de las bases, y con ellos los drivers y filtros de corriente, de manera que se puedan analizar la tensión y corriente de armadura que hasta ahora no habían sido tenidas en cuenta².

En la Figura 8.19a se aprecia que, si bien la corriente tiene un pico de 1,5 A en el arranque (equivalente a tres veces su valor nominal), el mismo se extingue en 15ms y la evolución de los valores se ubican dentro de la zona de operación nominal. Se puede ver también que la tensión de la Figura 8.19c, limitada en su valor máximo $U_a^{max} = 15V$, satura durante los primeros instantes y luego adopta valores dentro del rango de operación nominal.

Dicha saturación provoca que, durante los primeros segundos, las distancias convergan a cero con ciertas fluctuaciones como se puede apreciar en la Figura 8.19d y

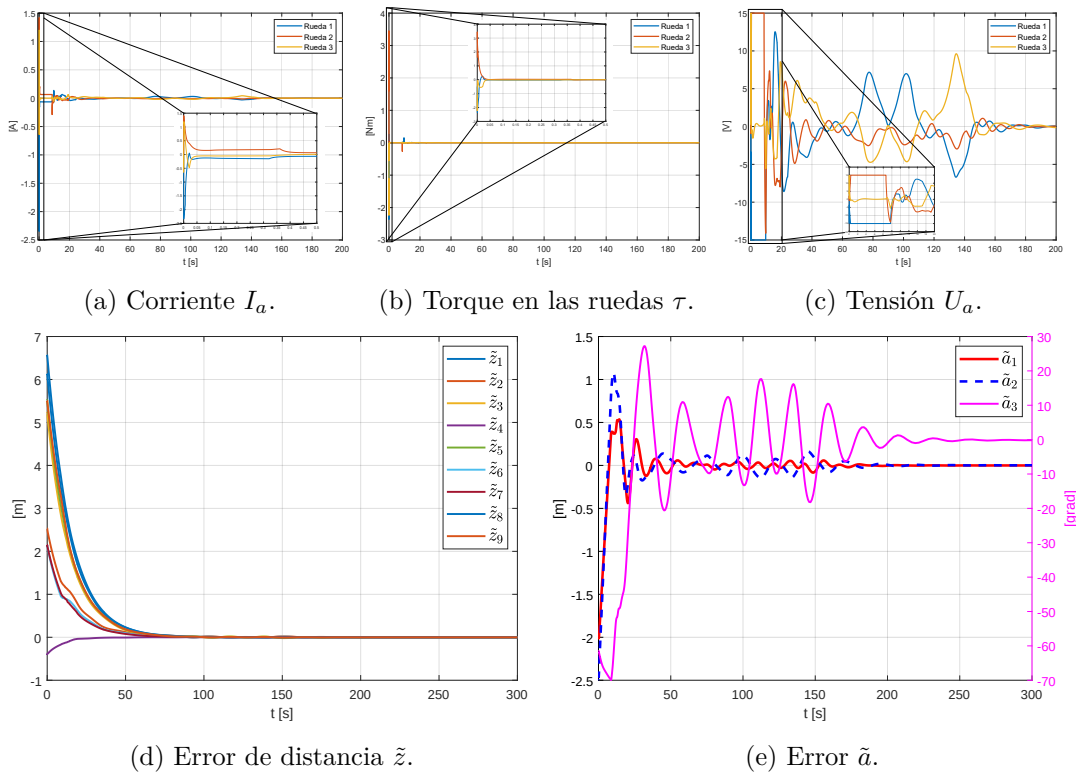


Fig. 8.19 Agentes modelados como BM en el esquema de control **E**.

²Para simplificar el análisis, se muestran las variables de los MCC solamente del primer agente.

que el error de trayectoria presente oscilaciones más importantes como se muestra en la Figura 8.19e. De todos modos, en ambos casos, superada la saturación las variables convergen asintóticamente a sus valores deseados.

Este esquema es el que representa con más grado de realismo la dinámica del MAS y tiene en cuenta todas las etapas de control. Las simulaciones permiten verificar el correcto funcionamiento del control de alto nivel a la vez que posibilitan comprobar que las variables de los motores evolucionan dentro de sus valores nominales.

Como se especificó en la descripción del escenario, las constantes de control se relajaron y se extendieron los tiempos de simulación para que las variables características del motor (corriente y tensión) evolucionen dentro de sus valores nominales. Eso implicó que se modifique la dinámica de la evolución de la formación, con los agentes desplazándose mas despacio y que ocasione, en este caso, el desdoblamiento del agente 4 con el 3.

Escenario F

Los resultados de simulación del escenario **F** se muestran en las gráficas de la Figura 8.20. Interpretaremos los resultados junto con la Figura 8.21, donde se retrata a la formación en los instantes $t = 2s$, $t = 33s$, $t = 47s$, y $t = 80s$.

Inicialmente, en el instante $t = 2s$, los agentes se están desplazando desde sus posiciones iniciales para formarse, al mismo tiempo que el agente líder sigue la trayectoria deseada. Luego, en el instante $t = 33s$, los agentes se encuentran formados en la topología deseada, como se puede apreciar en la gráfica del error distancias $\tilde{z}$ de la Figura 8.20a. Sin embargo, debido a la presencia del obstáculo el agente líder no logra seguir el camino (aunque la orientación de la arista $k = 1$ es la deseada) como se aprecia en el aumento del error de posición de $\tilde{a}$ de la Figura 8.20b. Segundos después en el instante $t = 47s$, la presencia del obstáculo rompe con la formación modificando las distancias z y disminuyendo el ángulo α_1 de la arista $k = 1$, como se aprecia en la Figuras 8.20a y 8.20b, respectivamente. En este instante se produce el momento de mayor cercanía de los agentes con el obstáculo, como se observa en la Figura 8.20c.

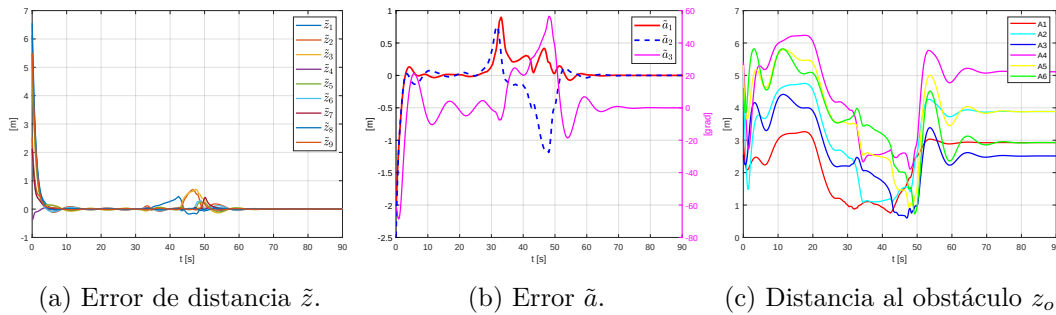
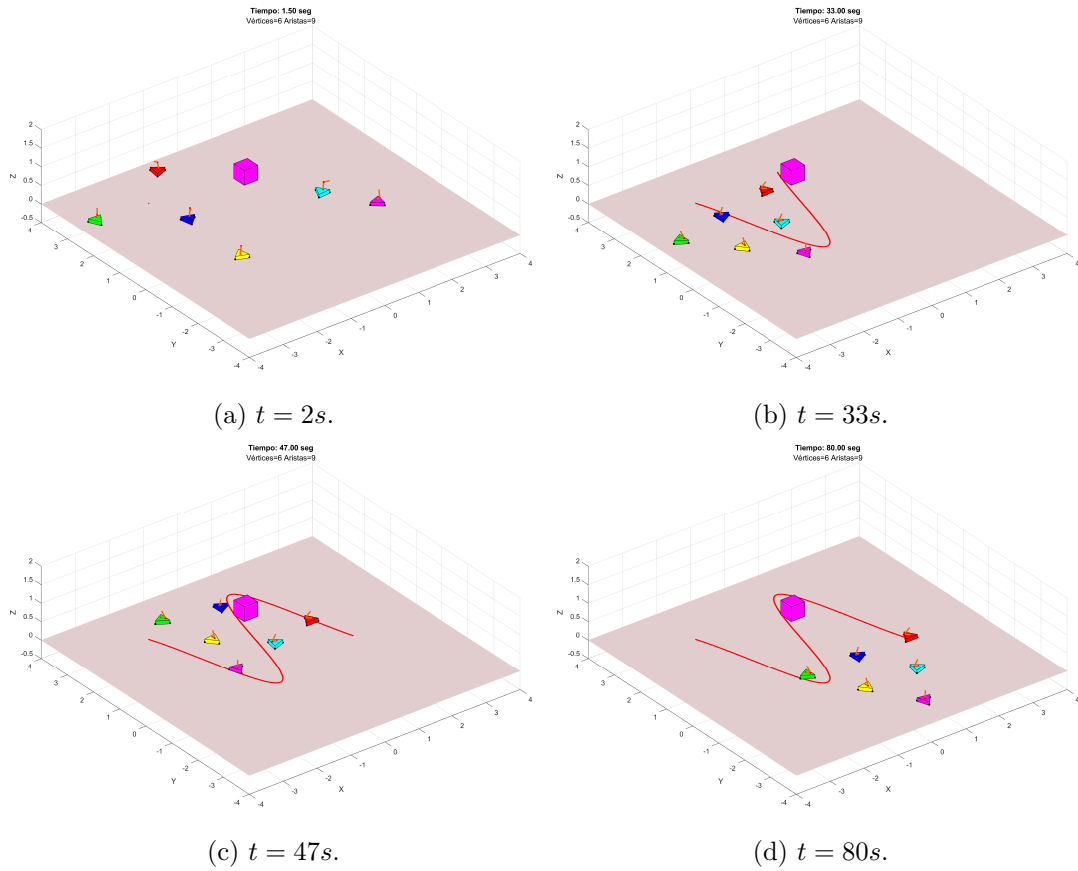


Fig. 8.20 Agentes modelados como MM en el esquema de control **F**.

Fig. 8.21 Esquema de control **F** - evoluciones en el plano.

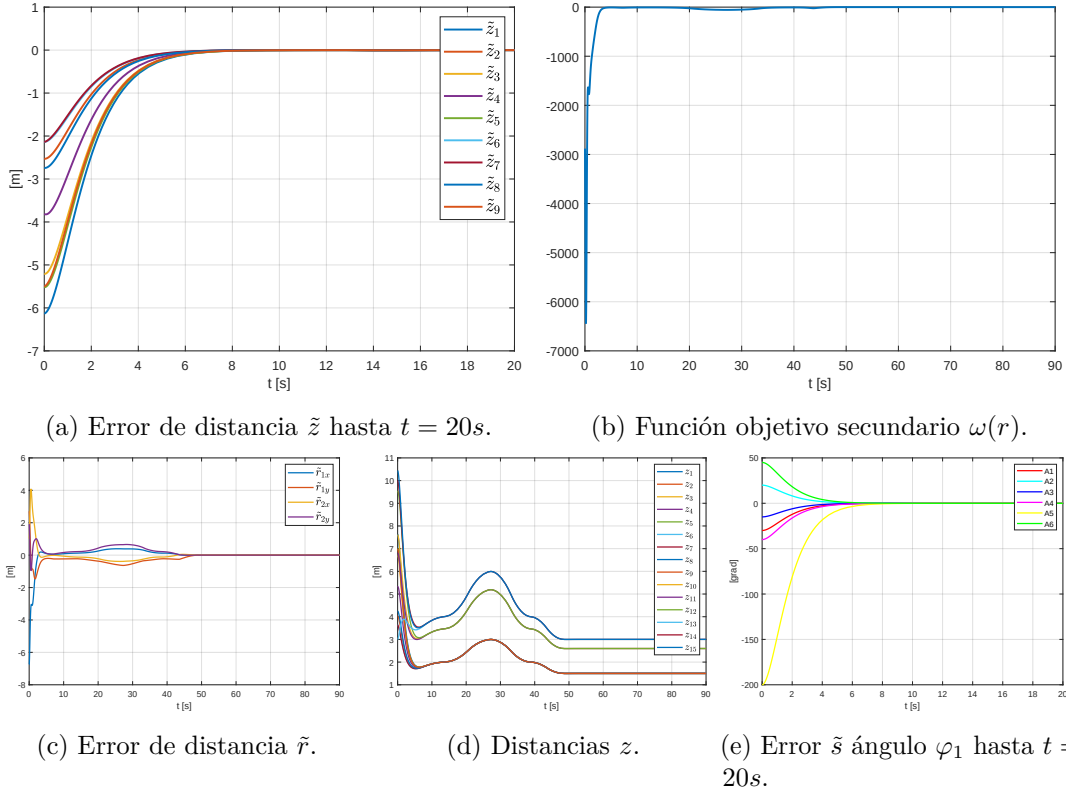
Finalmente en el instante $t = 80s$ y una vez finalizada la trayectoria, el líder logra ubicarse en la posición deseada, y la formación adopta la topología deseada, con los errores $\tilde{z}$ y $\tilde{a}$ en cero.

Se comprueba aquí lo analizado en la Observación 7.13; con los agentes lo suficientemente alejados del obstáculo, el sistema converge a su PE. Además, incluso en el instante en el que la formación pasa lo más cerca del obstáculo, la colisión se evita y los agentes en todo momento se mantienen a una distancia mayor a los $0.8m$ respecto del centro del mismo (ver Figura 8.20c).

Escenario G

Con el esquema de control **G**, incluso si se controlara la posición y orientación de todos los agentes a través del espacio nulo (ver Observación 7.5), ocurren los dos fenómenos no deseados del control de formación por distancia: el espejismo y desdoblamiento³. Para evitar el segundo, que se da entre los agentes 3 y el 4, se modifican las posiciones iniciales de dichos agentes mostradas en la Figura 8.6, alejando al agente 4 del 3.

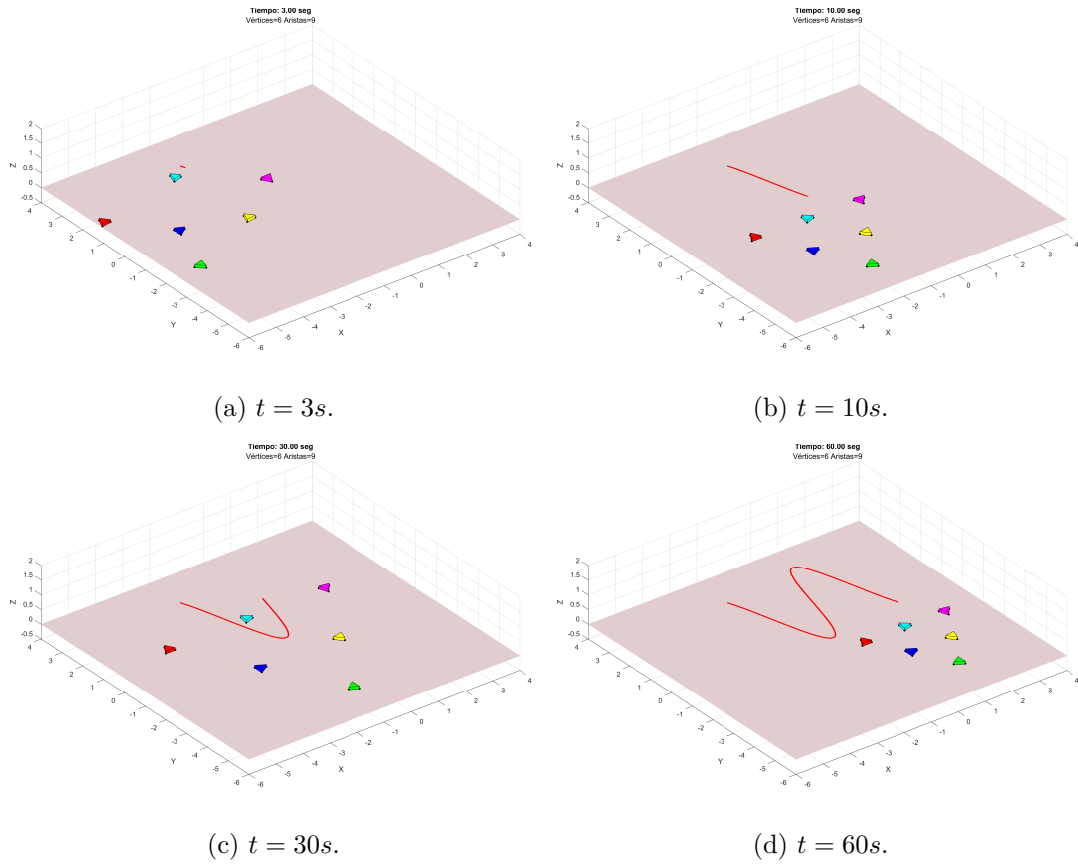
³Se realizaron simulaciones que lo prueban pero no se ilustran aquí con el fin de no entorpecer la lectura.

Fig. 8.22 Esquema de control **G**.

Implementando esta modificación, los resultados de simulación se muestran en la Figura 8.22 y 8.23.

Para comenzar el análisis, en la Figura 8.22a se puede observar que las distancias entre agentes tienden al valor deseado con una tasa de convergencia que depende del valor de K_P y K_D . Por su parte, como se observa en la Figura 8.22b, la maximización de la función $\omega(r)$ indica el cumplimiento de los dos objetivos secundarios propuestos: minimización de la velocidad de los agentes y control de posición y orientación de la formación. Sin embargo, prestando atención a esta gráfica, se puede apreciar que en la ventana de tiempo formada entre los instantes $t = 20s$ y $t = 35s$ la función $\omega(r)$ decae levemente. Para entender qué es lo que ocurre, analicemos el error de distancia $\tilde{r}$ que se muestra en la Figura 8.22c.

En la misma se ve que el error de distancia $\tilde{r}$ aumenta levemente durante esa ventana de tiempo. Esto se debe a que en el instante $t = 27s$ las distancias entre agentes alcanzan su máximo valor (ver Figura 8.8a) mientras que las distancias de referencias de la Figura 8.8b se calculan para una formación con distancias constantes. Es por ello que, si bien la función $\omega(r)$ tiende a cero, en esa ventana de tiempo la función tiende a un máximo local.

Fig. 8.23 Esquema de control $\mathbf{G}$ - evoluciones en el plano.

La formación alcanza la topología deseada, como se observa en la Figura 8.23. En esta última, se puede apreciar cómo las distancias entre agentes aumentan para luego volver a disminuir de acuerdo a la referencia (ver Figura 8.8a).

Finalmente, en la Figura 8.22e se muestra el error $\tilde{s}$ de los ángulos φ_1 que representan las orientaciones de las bases, y presentan una dinámica desacoplada idéntica a la de los esquemas anteriores.

Es interesante advertir que en todos los esquemas presentados hasta aquí, al estar inspirados en el enfoque ECB, las distancias entre agentes debían ser constantes. En contraposición, este escenario $\mathbf{G}$ posee la ventaja de que, como la dinámica del error de distancia a lazo cerrado es estable, permite introducir referencias de distancias variables y por ende, formaciones con topologías variables.

En este esquema nuevamente el fenómeno de espejismo afecta la orientación de la formación, como se puede apreciar en las evoluciones de la Figura 8.23. Esto se debe a que, si bien el error $\tilde{r}_2$ y $\tilde{r}_5$ tiende a cero como se muestra en la Figura 8.22c, la formación se espeja a través del eje formado por la arista $k = 5$ y el agente 1 no sigue el camino deseado de la Figura 8.3c.

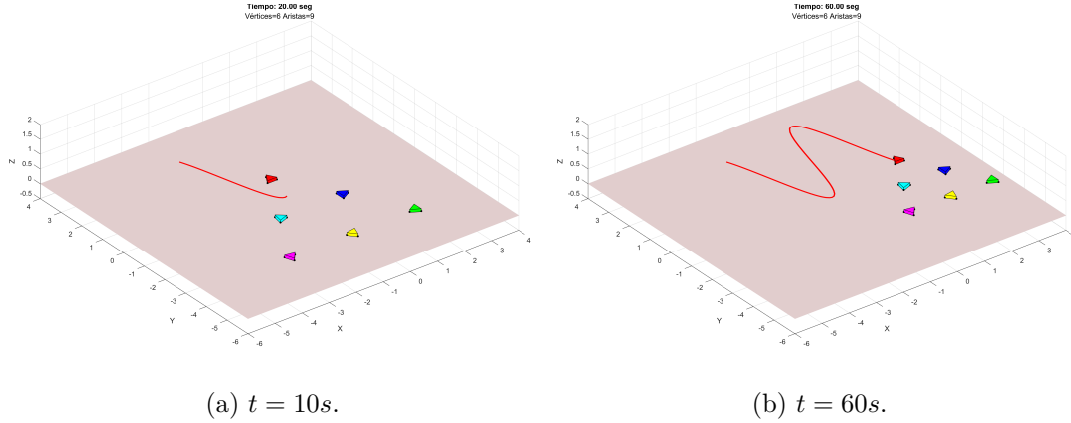


Fig. 8.24 Esquema de control **G** con vector r_0 modificado - evoluciones en el plano.

Si se modifican las condiciones iniciales r_0 , al igual que se hizo en el escenario **B**, nuevamente la topología adquiere la orientación deseada como se muestra en la Figura 8.24.

Así, todos los esquemas de control de formación presentados hasta el momento tienen como desventaja el hecho de que la topología de la formación puede quedar espejada respecto a la deseada o puede existir más de una posición de equilibrio que satisfaga las restricciones de distancia entre agentes. Dichas desventajas se superan con el control de posición del escenario **H**.

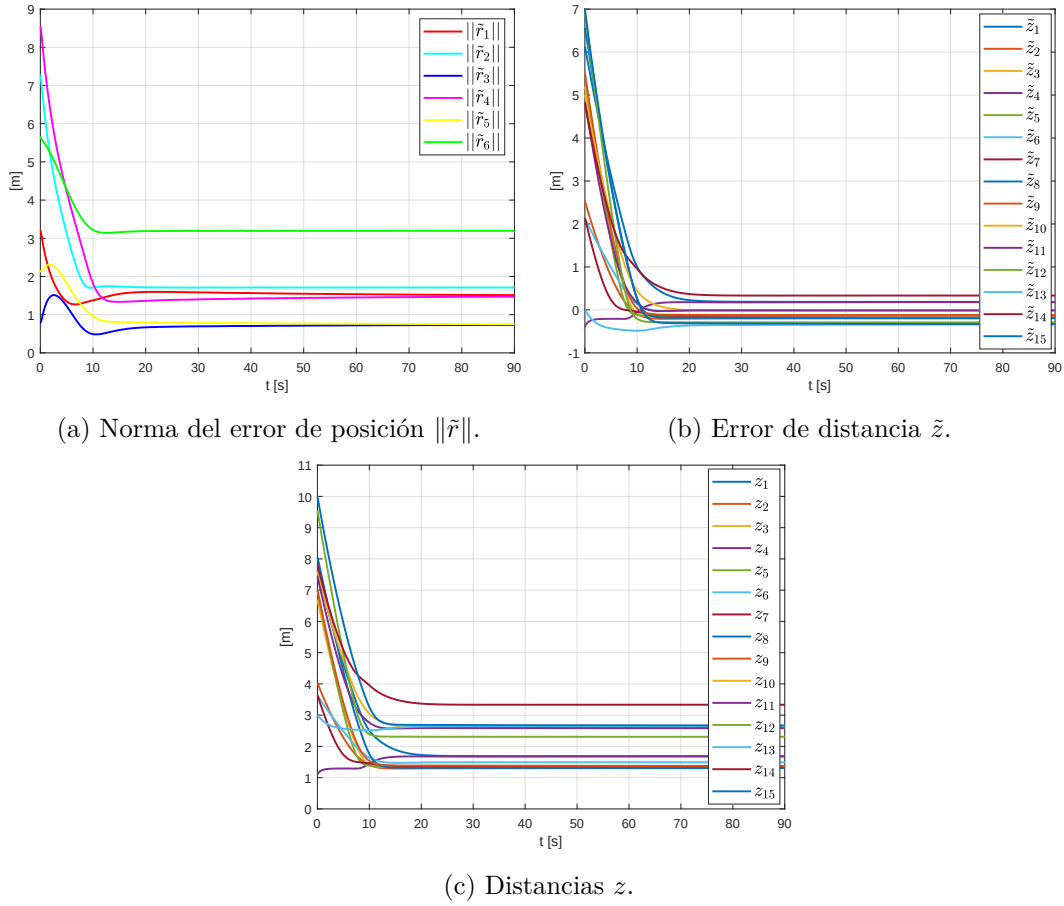
Escenario H

En este esquema de control, tal cual se destacó en la Observación 7.8, dado que los ECB se utilizan sólo a los efectos de evitar colisiones y no de formación, conviene utilizar la mayor cantidad posible, de modo que se elige el grafo de la Figura 8.5b con $m = 15$.

En las gráficas de la Figura 8.25 se puede verificar que el sistema tiende al equilibrio que no es el deseado tal como habíamos anticipado que podía ocurrir en la Observación 7.7. Esto se aprecia en la norma del error de posición $\|\tilde{r}\|$ y el error de distancia $\tilde{z}$, de las Figuras 8.25a y 8.25b, respectivamente. Ambos no convergen a cero, si no que lo hacen a un valor tal que, en el equilibrio dinámico $\ddot{\tilde{r}} = \dot{\tilde{r}} = \mathbf{0}_{12 \times 1}$, los agentes no se forman en la topología deseada.

Por su parte, la prevención de colisiones se realiza satisfactoriamente al comprobar que en la Figura 8.25c las distancias entre agentes se mantienen mayores a un metro⁴.

⁴De este escenario en adelante, a fines de una mayor claridad en la presentación, se omite graficar las evoluciones de las coordenadas s .

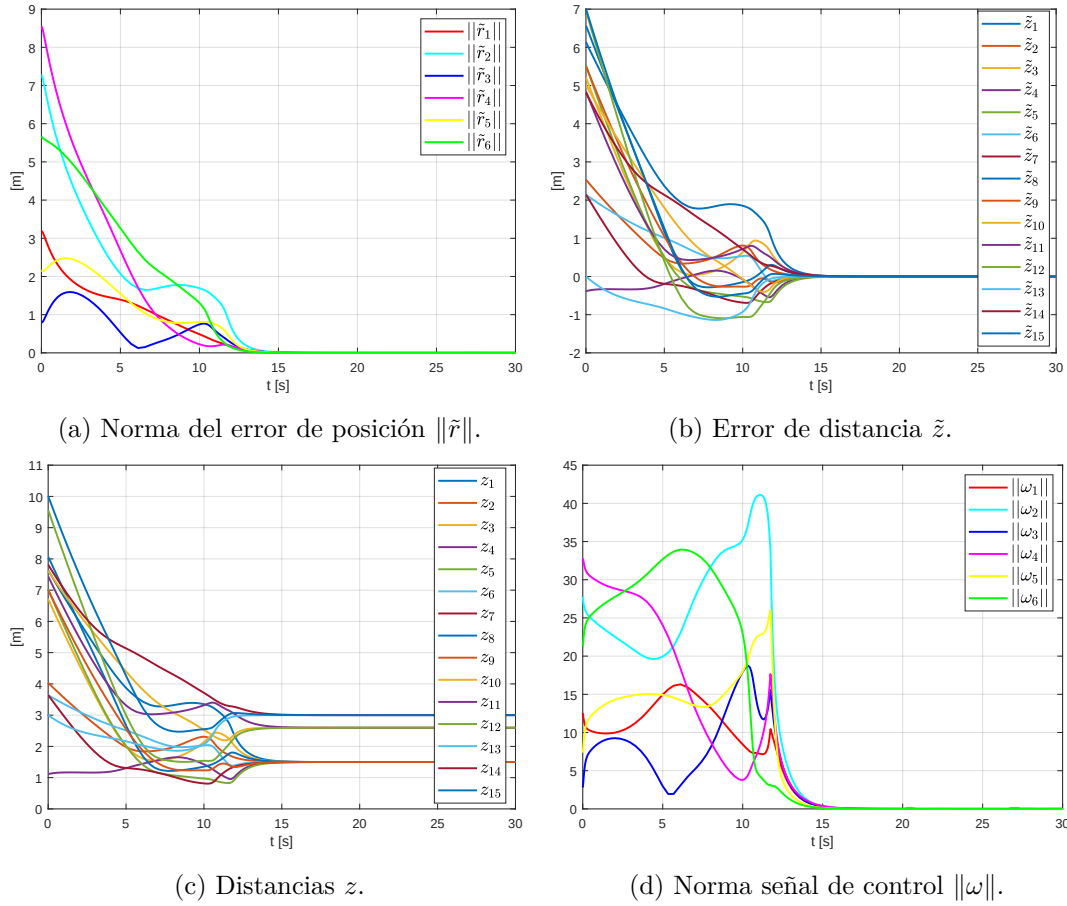
Fig. 8.25 Esquema de control **H**.

Escenario I

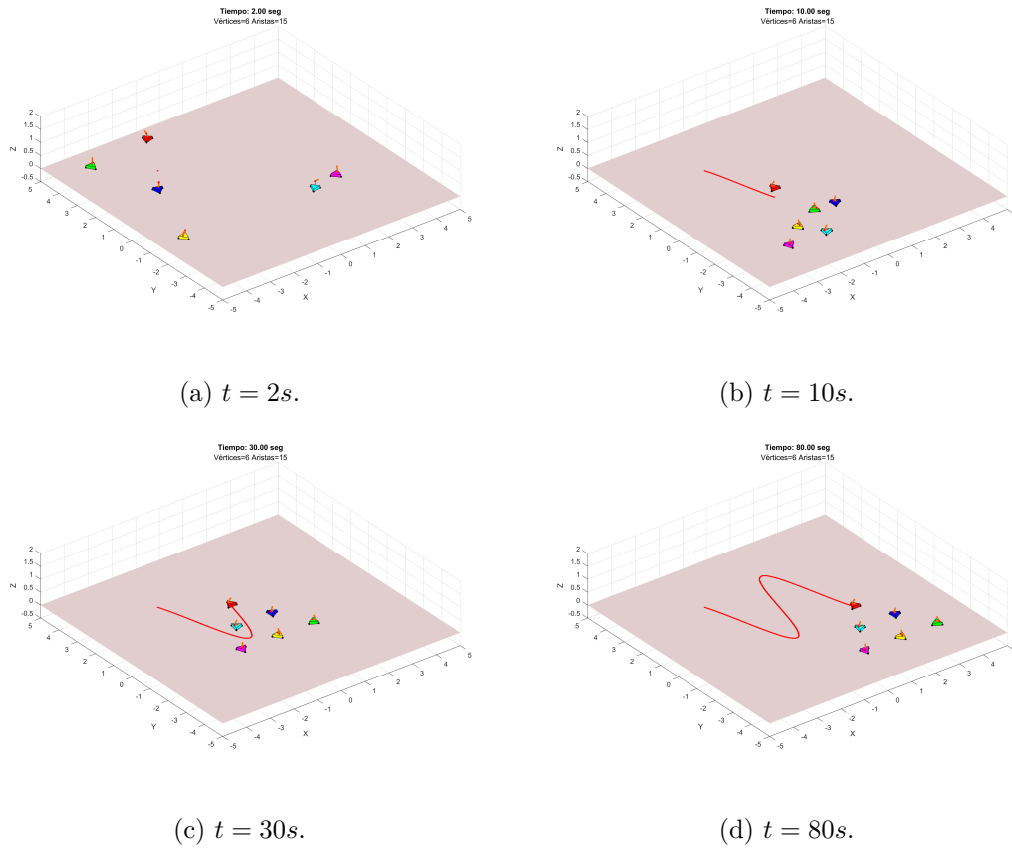
La incorporación del bloque de control *Robusto* en el escenario **I** permite que efectivamente el error de trayectoria $\tilde{r}$ y el error de distancias entre agentes $\tilde{z}$ tiendan a cero, como se puede apreciar en las Figuras 8.26a y 8.26b, respectivamente. Se comprueba de esta manera que el control robusto asegura estabilidad asintótica del PE deseado y lo afirmado en la Observación 7.6, i.e., que los valores finales de z son los deseados y el error de posición cero.

Además en la Figura 8.26c se observa que las distancias se mantienen por arriba de los 0.9m durante toda la simulación, de modo que los agentes nunca colisionan entre sí y se verifica así el análisis realizado sobre la acción de control robusto (ver Observación 7.9).

La evolución de la señal de control ω se muestra en la Figura 8.26d donde se aprecia que, una vez que los agentes comienzan a seguir sus trayectorias deseadas, la misma se hace cero. No se observa aquí el fenómeno de chattering ya que, como se mencionó en la Observación 7.10, el control robusto se implementa para asegurar convergencia al PE deseado y no para rechazar perturbaciones.

Fig. 8.26 Esquema de control **I** hasta $t = 30s$.

En las capturas de la evolución, que se muestran en la Figura 8.27 se aprecia gráficamente la acción del control robusto para reacomodar a los agentes en la topología deseada. Transcurridos el instante $t = 10s$ los agentes se forman en la topología y orientación deseada y el agente 1 sigue a la trayectoria de referencia. Se puede ver por primera vez que no ocurre el fenómeno de espejismo que aparecía en el resto de los controles de formación.

Fig. 8.27 Esquema de control **I** - evoluciones en el plano.

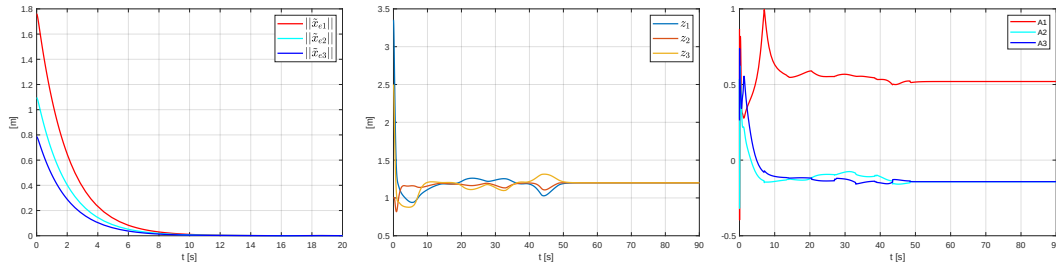
Control de Cooperación

A continuación se presentan los resultados de simulación de los 3 escenarios de control de cooperación.

Escenario J

Los resultados de simulación del esquema **J** se muestran en las Figuras 8.28 y 8.29. En la Figura 8.28a se observa que la norma del error de posición de los tres efectores finales tiende a cero con una tasa de convergencia que depende de las matrices K_P y K_D , cumpliéndose así objetivo principal de control que es el seguimiento de trayectoria por parte de los efectores finales de los MM.

Para corroborar el cumplimiento del objetivo secundario, analicemos la Figura 8.28b. Vemos que las distancias entre agentes oscilan alrededor de los valores deseados ($z_i^* = 1,2m$ con $i = 1, 2, 3$) y una vez finalizada la trayectoria, tienden a ese valor. Si se hubiese querido separar las bases la mayor distancia posible, habría que haber seleccionado una distancia de referencia z_i^* mucho mayor o bien haber elegido prevención de colisiones como el objetivo secundario.



(a) Norma del error de posición $\|\tilde{x}\|$ hasta $t = 20s$.
 (b) Distancias entre agentes z .
 (c) Índice de estabilidad de vuelco ZMP.

Fig. 8.28 Esquema de control **J**.

Nuevamente en este escenario se resalta la desventaja de que el esquema carezca de control de elusión de colisiones. Incluso con el objetivo secundario de prevención de colisiones en el espacio nulo, no se puede asegurar que los agentes no colisionen entre sí. Una posible solución en ese sentido sería modificar la altura de la trayectoria de referencia por una más baja o incluso reemplazar los manipuladores robóticos por uno de eslabones más largos para darle más libertad a los MM de distanciar sus bases entre sí.

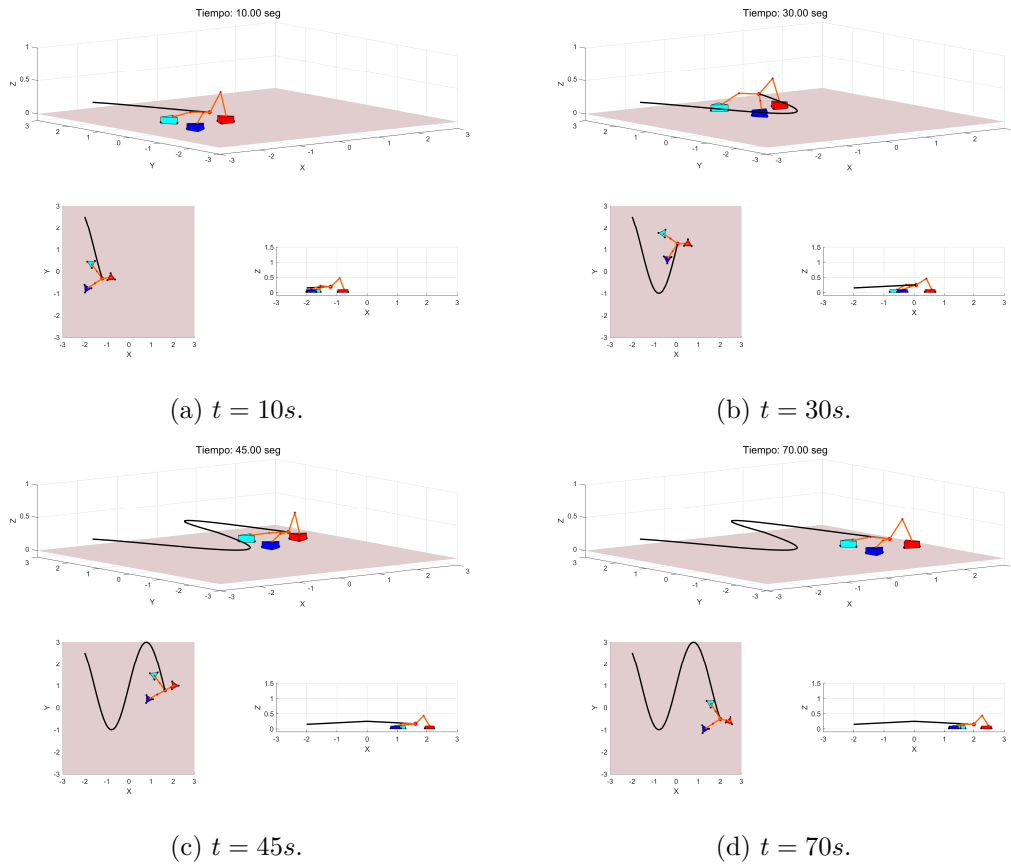


Fig. 8.29 Esquema de control **J** - evoluciones en el plano.

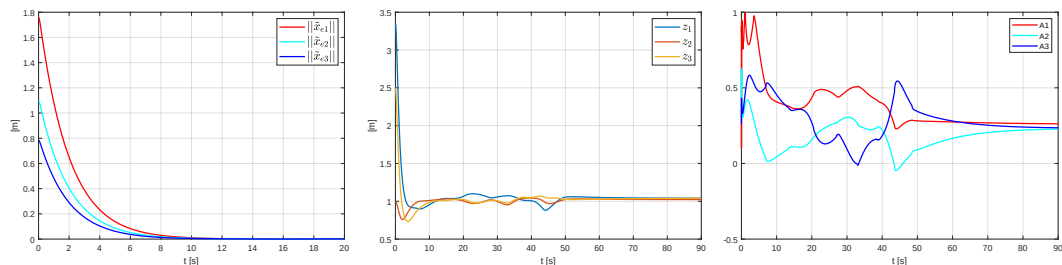
Respecto a los índices de estabilidad que se muestran en la Figura 8.28c, vemos que el del agente 1 es el único que se mantiene positivo a lo largo de toda la simulación. Esto se puede verificar visualmente en las capturas de las evoluciones de la Figura 8.29; aquí se aprecia efectivamente que los brazos de los agentes 2 y 3 están completamente extendidos, por lo que el riesgo de que se tumben es mayor. Para superar este inconveniente, en el escenario **K** introducimos la estabilidad de vuelco como objetivo secundario en el espacio nulo.

Escenario K

Los resultados de simulación del escenario **K** se muestran en la Figura 8.30. Vemos en la Figura 8.30a que el error de seguimiento de trayectoria tiene la misma dinámica que el escenario anterior, lo cual es obvio porque es el objetivo primario.

Sin embargo, en la Figura 8.30c vemos una mejoría en los índices de estabilidad de vuelco respecto al escenario anterior, con todas las evoluciones positivas a lo largo de la simulación. Esta mejoría se logra a costa de dos factores. El primero, las distancias entre las bases de los MM no tienden a sus valores deseados. Esto se debe básicamente a que, para evitar tumbarse, los brazos se tienen que retraer sobre las bases. Y si los efectores finales deben mantener su posición fija (objetivo primario) la única alternativa es que las bases se acerquen a ese punto y por lo tanto, disminuyan las distancias entre ellas. El segundo factor, y que también está relacionado con el anterior, es que los índices de estabilidad de los agentes 2 y 3 aumentan en detrimento del 1, que disminuye. Esto significa que para que los brazos de los agentes 2 y 3 estén menos extendidos y las bases separadas, es necesario que el del agente 1 se extienda un poco.

Analizando un poco más el esquema de control, el objetivo de mejorar el índice de estabilidad de vuelco puede pensarse como incompatible con el objetivo de formación ya que este último restringe la posición de las bases de los agentes. Simulaciones de prueba se han llevado a cabo quitando el objetivo de formación y si bien los índices de estabilidad mejoran notablemente, lo hacen a costa de que las bases colisionen entre sí



(a) Norma del error de posición $\|\tilde{x}\|$ hasta $t = 20s$.
 (b) Distancias entre agentes z_i .
 (c) Índice de estabilidad de vuelco ZMP hasta $t = 90s$.

Fig. 8.30 Esquema de control **K**.

lo cual, teniendo en cuenta las jerarquías presentadas a principios del capítulo 7 en la Figura 7.1, hace que dichos resultados sean inadmisibles.

Escenario L

Para ilustrar el comportamiento del escenario **L** mostramos las gráficas de la Figura 8.31 y 8.32. El camino de referencia ingresa a la zona de "exclusión" delimitada por la circunferencia en el instante $t_i = 29s$ y sale en $t_o = 43,5s$ (ver Figura 8.10).

En la Figura 8.31a se aprecia que las distancias al obstáculo, si bien disminuyen por debajo del radio de la circunferencia de exclusión $z_o^* = 1$, se mantienen mayores a los $0.6m$ en todo momento.

En correspondencia, analizando la fuerza del resorte virtual de la Figura 8.31b, se pueden ver los picos de la misma ante la intrusión de los agentes dentro de la zona de "exclusión" y cómo se hace cero cuando los agentes se encuentran lo suficientemente alejados del obstáculo. Aquí también se puede apreciar también que el resorte trabaja en tracción a distancias muy cercanas a la circunferencia y con valores muy pequeños.

Por su parte, vemos que la norma del error de trayectoria del efector final en la Figura 8.31c converge a cero y aumenta temporalmente ante la presencia del obstáculo.

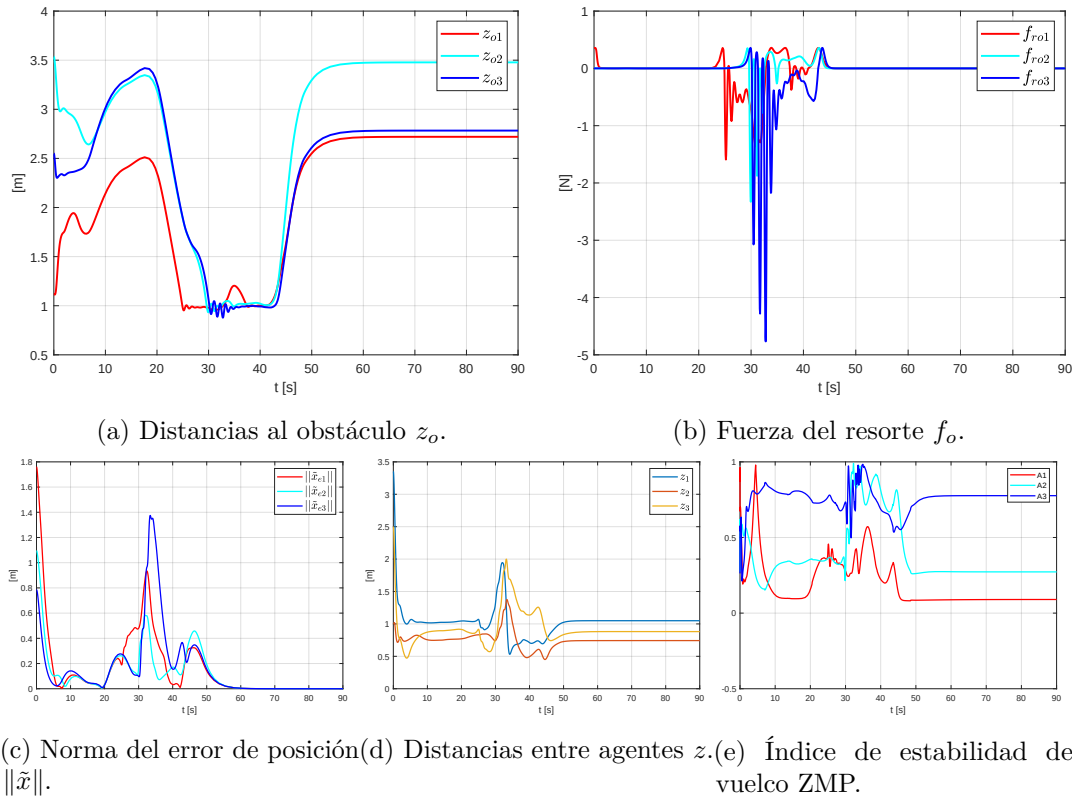
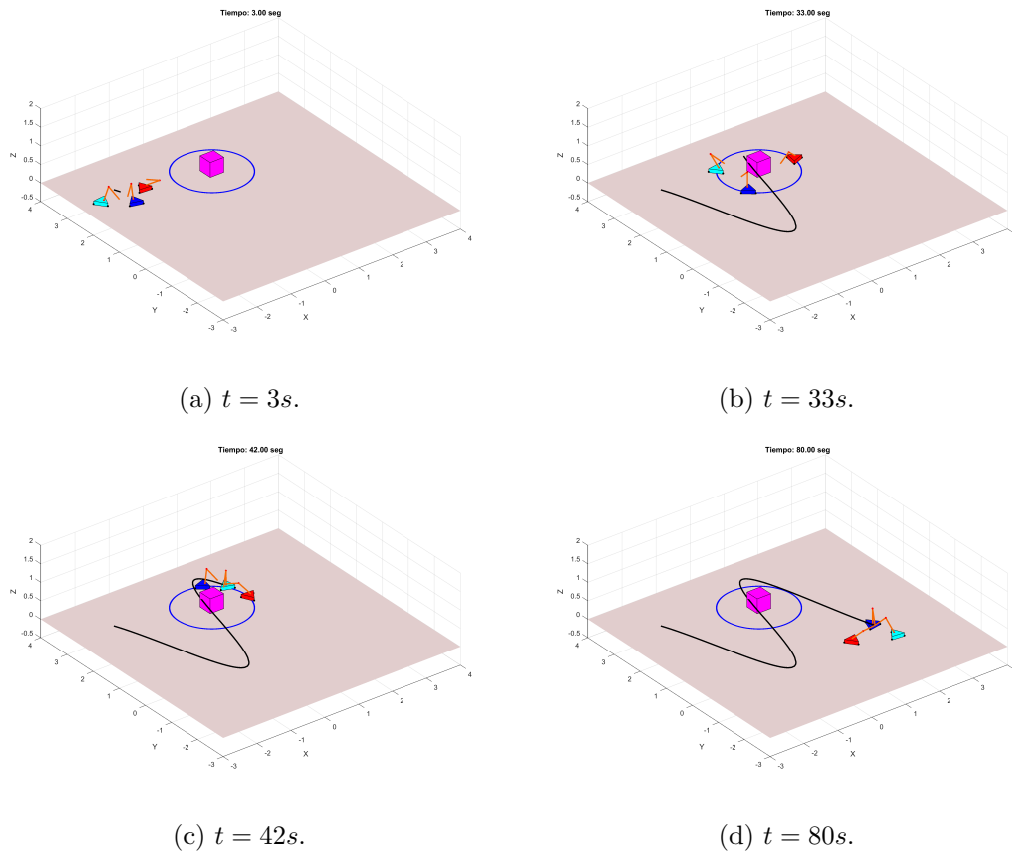


Fig. 8.31 Esquema de control **L**.

Fig. 8.32 Esquema de control $\mathbf{L}$ - evoluciones en el plano.

Se aprecia así la jerarquía superior del control de elusión de obstáculos sobre el de control de trayectoria.

En la Figura 8.31d se muestran las distancias entre agentes cuyo control se realiza en el espacio nulo de la formación. Aquí se puede observar que cuando los agentes se aproximan al obstáculo las mismas no son las deseadas.

Finalmente, en la Figura 8.31e se muestran los índices de estabilidad de vuelco ZMP. Se observa que no existe riesgo de vuelco ya que los tres se mantienen positivos durante toda la simulación. Este comportamiento es a costa de priorizar, como objetivo secundario, la estabilidad anti vuelco por sobre el control de distancia. Nuevamente, puede pensarse a los tres objetivos secundarios como "compitiendo" entre ellos; el peso que se le da a cada uno a través del ajuste del parámetro k_0 es empírico y depende del escenario.

También se puede observar que, como los ECB se aplican a las bases de los MM, nada impide que los brazos de los mismos no colisionen con el obstáculo. Una posible solución a este inconveniente sería añadir una prevención de colisiones para los brazos empleando la misma técnica pero con los ECB sujetos a los CM de los eslabones.

Finalmente, los efectores finales de los tres MM tienden al punto de referencia deseado y las distancias entre las bases tienden a un valor constante. Notar que el

efecto del amortiguador de los ECB está presente en todo el plano, no solamente dentro de la circunferencia. Sin embargo, como su efecto desaparece cuando los agentes se detienen, se comprueba lo afirmado en la Observación 7.13.

8.4 Conclusiones

Ventajas

Las principales ventajas de los esquemas de control presentados son:

- Del escenario **A** al **F** tienen la ventaja de que el control de formación y prevención de colisiones se realiza a través de un solo controlador y que además el mismo tiene una interpretación física.
- El escenario **G**, que tiene una formulación matemática más abstracta y menos inspirada en la física, permite incorporar distancias de referencia variables de modo que se puedan obtener topologías variantes en el tiempo siendo esta la principal ventaja de dicho esquema.
- Los esquemas de control por posición de **H** y **I** son los únicos que aseguran que la orientación de la topología sea la deseada, evitando los efectos indeseados de espejismo y desdoblamiento.
- En los escenarios de cooperación del **J** al **L** el aprovechamiento del espacio nulo de los MM permite combinar la cooperación con el control de formación y estabilidad anti-vuelco.

Jerarquías

En lo que concierne a las jerarquías (ver Figura 7.1), en los esquemas de control de formación por distancia con agente líder -**B** al **E**-, elusión de obstáculos **F** y espacio nulo de la formación **G**, por distintas razones (para que la matriz $\mathcal{T}(r)$ sea de rango pleno o para que exista la inversa de la matriz $\mathcal{F}W^{-1}\mathcal{F}^T$) la cantidad de aristas del grafo que caracteriza a la formación debe ser $m = 9$. Esta limitación hace que no se puedan evitar colisiones entre los agentes cuyas distancias no vienen representadas por el grafo $\mathcal{G}_1$, violándose así la jerarquía deseada y siendo esta la principal desventaja de los esquemas mencionados. Por esta causa también en estos escenarios se pueden producir desdoblamientos entre agentes. Y si bien en el esquema **G** se pueden incorporar objetivos como prevención de colisiones a través del espacio nulo, estos son secundarios y se cumplen en la medida que lo haga el principal. El resto de las jerarquías se respetan: el control de formación por sobre el seguimiento de trayectoria y en el escenario **F**, la elusión de obstáculos por sobre el resto. Por su parte, en los esquemas de control de formación por posición de los escenarios **H** y **I** todas las jerarquías se respetan.

En los escenarios de control de cooperación -**J** al **L**- el seguimiento de la trayectoria por parte de los efectores finales es el objetivo principal. En todos los casos no se respetó la jerarquía de la prevención de colisiones, ya que la misma se incorporó como objetivo secundario a través del espacio nulo. En los escenarios **K** y **L** el objetivo de formación y estabilidad de vuelco tienen el mismo nivel jerárquico; el cumplimiento de ambos queda supeditado al control de los efectores finales. En el escenario **L** sí se cumplió el nivel máximo de jerarquía para la estrategia de elusión de obstáculos.

Particularidades

En todos los controles de formación por distancia -**A** al **G**-, el valor de las condiciones iniciales r_0 ocasionó que la formación quedara espejada respecto a la original, independientemente de si se utilizaban los ECB o el control en el espacio de las aristas. En estos escenarios además se podía producir la colisión entre agentes cuyas distancias no venían representadas por la matriz de incidencia D del grafo $\mathcal{G}_1$.

En contraposición, en los esquemas de los escenarios **H** y **I** se respetan las jerarquías, no existen riesgos de colisiones entre ninguno de los agentes, y la topología posee la orientación deseada sin espejismos ni desdoblamiento. Sin embargo, los mismos carecen de una interpretación física y el control está más enfocado en cada agente en particular que en la formación en sí.

Notar que tanto en el escenario de control de formación por distancia **G** como en el de cooperación **J**, se utilizan los espacios nulos de la matriz de formación $\mathcal{F}(r)$ y el Jacobiano $J(q)$, respectivamente, para incorporar objetivos secundarios. La principal desventaja de ambos esquemas es que no existe un control de prevención de colisiones.

En los escenarios de cooperación -**J** - **L**- los objetivos secundarios "compiten" entre ellos. Por ejemplo un peso bajo al objetivo secundario de *minimización de las velocidades de las juntas* con respecto al de *estabilidad de vuelco* ocasiona que, una vez finalizada la trayectoria, los agentes continúen moviéndose para disminuir el riesgo de vuelco. De este modo el ajuste de los pesos de cada objetivo se adoptará a través de una situación de compromiso que dependerá de los objetivos del escenario.

El **E** es un escenario que contiene un modelo riguroso del MAS con su respectivo control de bajo nivel, donde se relajaron los parámetros y se aumentaron los tiempos de simulación para analizar el comportamiento del MAS en condiciones lo más próximas a la realidad posible. Todo el resto de los escenarios tuvieron tiempos de simulación cortos con el objetivo de verificar tanto el correcto desempeño de las leyes de control como el de los modelos de las BM y MM. Estos esquemas, si bien sus entradas de control exceden los límites reales, sirven para verificar el correcto desempeño de las leyes de control desarrolladas y convergencia de las variables a sus respectivos puntos de equilibrio.

Capítulo 9

Conclusiones

En este último capítulo se realiza un balance de todos los resultados mostrados a lo largo de la tesis, analizando distintos aspectos de las técnicas de modelado y control. Dentro de las conclusiones generales se presenta un análisis comparativo de las propiedades, resultados de simulación y cuestiones relacionadas con la implementación física de los esquemas de control, las estrategias de elusión de obstáculos y las técnicas de modelado del MAS. Luego, se mencionan las contribuciones a la metodología producto de utilizar dichas técnicas de modelado y control. Finalmente se muestran las perspectivas de trabajo a futuro.

9.1 Conclusiones Generales

El objetivo de esta sección se divide en dos partes. Por un lado, brindar un análisis comparativo y unificador de las estrategias de modelado y control implementadas, y por el otro, resaltar las contribuciones hechas en la metodología utilizada.

9.1.1 Análisis Comparativo

Ante la diversidad de resultados, se busca brindar un análisis comparativo y unificador sobre tres aspectos diferentes que atañen a la tesis y que se pueden resumir en:

- Propiedades: teóricas de los modelos y esquemas de control
- Simulación: análisis de las características conceptuales y cualitativas de los resultados obtenidos
- Implementación: análisis de los requerimientos, en términos de carga computacional y sensores, que implican las estrategias utilizadas

En base a estos puntos se presentarán reflexiones y se buscará brindar una conclusión que sustente los distintos resultados de la tesis. Estos últimos se organizan en tres *ejes temáticos* distintos: (i) esquemas de control, (ii) estrategias de elusión de obstáculos y (iii) técnicas de modelado.

Eje temático 1: Esquemas de Control

Para simplificar la lectura, los esquemas de control se enumeran como (I) Control de formación por distancia y agente líder con cancelación exacta, (II) Control de formación por distancia en el espacio de las aristas y en el espacio nulo con cancelación exacta y (III) Control de formación robusto de posición con prevención de colisiones y cancelación exacta. A continuación se brinda un análisis comparativo de los tres esquemas:

- **Propiedades:** Los tres esquemas de formación se pueden diferenciar según su inspiración, de acuerdo a la Figura 9.1. El esquema de control I surge de utilizar elementos básicos de la mecánica (resortes y amortiguadores) y de considerar al MAS como un cuerpo semi-rígido compuesto de subsistemas interconectados (a través de los ECB) y por ende, sus resultados tienen una interpretación física. La estrategia de control II, si bien parte de la definición de la matriz de formación, luego prescinde del enfoque físico con el que surgió la misma y plantea un esquema análogo al control de manipuladores robóticos redundantes. Por último, el esquema III plantea una estructura de referencia virtual donde las expresiones de las leyes de control surgen de considerar la geometría de la estructura, por ende la interpretación de las mismas es puramente matemática.

Para clasificar a los controladores tomamos la definición brindada en [79], donde se diferencian según la variable que se controle sea posición, desplazamiento o distancia. Se puede ver fácilmente que el esquema III clasifica como un control de formación por posición, mientras que la clasificación de los esquemas I y II resulta en un híbrido entre control por distancia y desplazamiento. Esto último se debe a que, si bien en los esquemas I y II se controla activamente la distancia, el cómputo de las señales de control implica la medición de los desplazamientos globales entre todos los agentes ya que es necesario el procesamiento de los cosenos y senos de la matriz de formación. Dicho de otra manera, en ambos

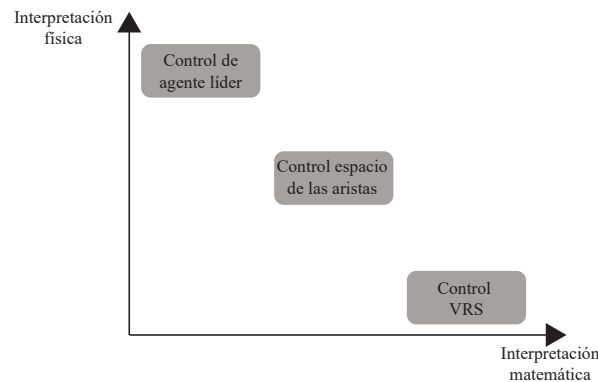


Fig. 9.1 Clasificación de los tipos de control de formación en base a su interpretación física y matemática.

esquemas se controlan las distancias para lograr una determinada formación (definida por las distancias deseadas) pero para el cómputo de las leyes de control es necesario conocer el desplazamiento entre los agentes respecto a un sistema global fijo. Incluso más, como para el esquema I es necesario conocer la posición del agente líder y su vecino, el esquema I podría entrar también dentro de la clasificación de control por posición.

En relación a la estabilidad, en los tres esquemas se demuestra la estabilidad en el sentido Lyapunov. En el caso particular del esquema III, el objetivo de implementar la ley de control robusta es para demostrar y asegurar convergencia al PE deseado.

- **Simulación:** Los resultados de simulación muestran que la principal desventaja de los esquemas I y II es que, aún respetándose las distancias deseadas de la formación, existe la posibilidad de que ocurra el fenómeno de desdoblamiento y espejismo. Esto se debe a que el espíritu de ambos controladores reside en el concepto de la matriz de formación y, como se demostró, para que la misma sea de rango pleno es necesario que el grafo que caracteriza al MAS sea mínimamente rígido, por lo que la cantidad de aristas debe ser menor al conjunto de distancias posibles entre agentes. De ahí que exista la posibilidad de que se cumplan con los objetivos de control sin llegar a la topología deseada.

Se observó, sin embargo, que ante una adecuada selección de condiciones iniciales de posición y velocidad de los agentes, el riesgo que ocurra desdoblamiento es bajo. En el esquema II se verificó además que, a través del espacio nulo de la matriz de formación, también se pueden controlar indirectamente las posiciones, disminuyendo así las posibilidades de espejismos y desdoblamientos.

Con el esquema III, los agentes alcanzan al PE deseado y durante el transitorio se evitan las colisiones entre ellos. El robustecimiento de la ley de control basado en métodos deslizantes permite reacomodar a los agentes en la topología con su orientación deseada, permitiendo evitar espejismos y desdoblamientos.

- **Implementación:** Otra manera natural de distinguir distintos tipos de control de formación es clasificándolos de acuerdo a los niveles de interacción y las capacidades de sensado de los agentes que componen el MAS [79]. Así, para un control de formación por posición los niveles de interacción serán bajos y las capacidades de sensado altas, mientras que para un control de formación por distancia, será a la inversa.

Como se explicitó anteriormente, para todos los esquemas aquí tratados es necesario medir los desplazamientos y/o posiciones de los agentes, incluso si en los esquemas I y II se controla activamente la distancia.

La medición del desplazamiento implica que cada agente sea capaz de medir las posiciones relativas con los otros agentes respecto a un sistema de coordenadas global. Esto implica que, si bien los agentes necesitan conocer la orientación del sistema de coordenadas global, no necesitan conocer sus posiciones con respecto al mismo (por supuesto que conociendo la posición de los agentes respecto a un sistema global se pueden calcular los desplazamientos). Así, ya sea que se mida la posición o el desplazamiento, el cálculo de la matriz de formación para el cómputo de las leyes de control se deberá realizar de manera centralizada.

La principal ventaja de ello es que la unidad de cómputo se realiza en un sólo procesador centralizado encargado del control global, el cual debe ser lo suficientemente potente para recibir, procesar y enviar en tiempo real los valores de referencia de las señales de control a todos los agentes que componen el MAS. Así, los agentes sólo necesitan sensores, actuadores y potencia de procesamiento básica para permitir acciones en tiempo real. La vida útil de la batería se extiende y la plataforma robótica se vuelve más liviana y menos costosa, con hardware más fácil de mantener [107].

Como desventajas se puede mencionar el hecho de que, tener centralizado al procesador encargado del cómputo de la ley de control supone una comunicación fluida entre el procesador central y cada uno de los agentes. Una interrupción de la misma implicaría la pérdida de autonomía de los agentes. Además, a sabiendas de que los desafíos de control surgen principalmente en controlar el MAS basados en información parcial e información relativa sin la intervención de un controlador central [79], la implementación de un controlador centralizado es una desventaja. Por consiguiente, para implementar los tres esquemas propuestos, es indispensable medir todas las posiciones de los agentes en tiempo real. Eso se puede realizar:

- Dotando a cada agente con una unidad de medición inercial (IMU, Inertial Measurement Unit)
- Con tecnología de comunicación inalámbrica
- Procesando la imagen con una cámara

La primera es la opción más económica; esta tecnología se ha utilizado en los proyectos 1 y 3 (ver capítulo 1) implementando las IMU *MPU9250-6500* y en el proyecto 4 la IMU *LSM9DS1*. Como desventaja se encuentran la presencia de ruido y baja precisión en las mediciones realizadas.

La segunda opción agrupa un conjunto de estrategias. Una de las más conocidas en ambientes exteriores es georreferenciando con un sistema de posicionamiento global (GPS, Global Positioning System) la posición de cada agente. La misma posee la ventaja que provee una estimación de la posición del agente respecto de un sistema de coordenadas global. Sin embargo, si las mediciones se realizan

en ambientes interiores, las mismas suele ser insuficientes para llevar adelante la localización de un robot debido a la baja precisión que presentan los GPS en ambientes interiores. Los sistemas de posicionamiento interior (IPS, Indoor Position System) más usados actualmente son Wi-Fi, Banda Ultraancho y Bluetooth [108] [109].

Por último, la tercera opción asegura localización exacta de los patrones de referencia ARTag¹ de cada agente para la localización y mapeo simultáneo (SLAM, Simultaneous Localization and Mapping) a través de las cámaras, a la vez que sirve para elusión de obstáculos. Si bien su implementación se debe hacer en escenarios fijos y conocidos, también existe la posibilidad de montar las cámaras sobre drones en el caso de ambientes exteriores y desconocidos [110].

Eje temático 2: Estrategias de Elusión de Obstáculos

Nuevamente, para simplificar la lectura, las dos estrategias de elusión de obstáculos se enumeran en (I) elusión de obstáculos con ECB y (II) campos de potencial. Hecha esta aclaración, se procede con el análisis:

- **Propiedades:** Como se destacó con anterioridad, la principal diferencia entre las dos estrategias de elusión de obstáculos radica en que II requiere de un conocimiento previo del escenario para la localización de obstáculos, mientras que I se puede implementar en escenarios desconocidos.

Ambas estrategias, basadas en funciones potenciales, tienen una inspiración física donde las leyes de control se pueden interpretar tanto como fuerzas elásticas o como fuerzas gravitacionales, según las estrategias sean I o II, respectivamente. Sin embargo, la estrategia con ECB tiene un comportamiento antiintuitivo ya que, cuando el móvil se encuentra en el borde de la circunferencia que rodea al obstáculo, para asegurar pasividad del resorte, este ejerce una fuerza de atracción sobre el móvil hacia el obstáculo.

Por su parte, si bien en esta tesis no se trabajó con obstáculos móviles, la técnica I hubiera funcionado sin inconvenientes en dicho escenario, no así la estrategia II donde la generación de funciones potenciales hubiera requerido otro enfoque (ver punto implementación más adelante).

Finalmente, el uso de ambas estrategias se puede incorporar en paralelo con cualesquiera de los esquemas de control vistos. Su nivel de jerarquía superior hace que la formación del MAS rompa su topología ante la presencia de un obstáculo y una vez superado el mismo vuelva a formarse.

¹Un ARTag es un sistema de marcadores fiduciales que sirve para respaldar el registro en 3D. Más información en: <https://en.wikipedia.org/wiki/ARTag>.

- **Simulación:** Los resultados de simulación demuestran que todos los agentes que componen el MAS eluden los obstáculos satisfactoriamente con ambas estrategias. Además se comprueba que los mismos convergen al PE cuando los obstáculos se encuentran a una distancia razonable.
- **Implementación:** La implementación práctica de la estrategia I es por lejos la más simple ya que, para la detección de los obstáculos sean estos fijos o móviles, sólo requiere del uso de sensores de distancia en los agentes. Dependiendo del principio de funcionamiento, existen dos tipos de sensores de distancia:
 - Ultrasonidos
 - Infrarrojos

Los primeros son los más económicos y entregan un pulso cuyo ancho es proporcional a la distancia con el obstáculo. Los sensores de ultrasonido *HY-SRF05* y *HC-SR04* se han utilizado en los proyectos 1 y 3, respectivamente, siendo su comportamiento aceptable para obstáculos fijos y de tamaño considerable. En escenarios cerrados, pueden resultar bastante ineficientes ya que el sonido puede revertirse numerosas veces, afectando la precisión de la medición. Por su parte, los infrarrojos emiten una onda infrarroja y en base a ella evalúan la distancia al obstáculo más cercano; son los más populares y existe una gran variedad, entre los que se encuentran los LiDAR (Light Detection and Ranging). El LAC cuenta con dos modelos de este sensor: el *RPLIDARA1M8* que realiza un escaneo en 360° y el *TF02* de alta precisión y sensibilidad basado en la tecnología ToF (Time of Flight). Ambos serán utilizados para dotar de autonomía a la base móvil grande del proyecto 3 y a la plataforma de asistencia a la movilidad del proyecto 5, respectivamente.

La estrategia II en cambio, requiere de una implementación más compleja. Si bien la localización de obstáculos fijos en escenarios cerrados se puede hacer manualmente identificando previamente la localización de cada uno, lo ideal es automatizar el proceso a través de la instalación de cámaras. Las mismas sirven para la identificación de los obstáculos (fijos y móviles) y vale aclarar que en este caso la cámara puede ser la misma que la utilizada para la medición de la posición de los agentes. El posterior procesamiento de los datos para la confección de la función potencial se debe realizar en un procesador central. En el caso de que los obstáculos sean móviles, dicho procesamiento debe ser en tiempo de real.

Independientemente del esquema de control que se implemente, la estrategia I supone sólo la medición de la distancia al obstáculo mientras que la II requiere el conocimiento exacto de la posición del móvil en el plano global para su posterior ubicación en la grilla discretizada. Esto, sumado al hecho de que para la generación de las funciones potenciales en tiempo real se requiere de

un procesador central potente, hace que la estrategia con ECB sea mucho más ventajosa que la de campos de potencial.

Eje temático 3: Técnicas de Modelado del MAS

Las técnicas de modelado que se comparan y analizan a continuación son las vistas en esta tesis: EL, PHS y BG.

- **Propiedades:** Cada una posee diferentes propiedades particulares que las hacen más apropiadas para distintos objetivos. Así, el modelado EL es el más comúnmente utilizado para el diseño de controladores en robótica, mientras que los PHS están haciendo una irrupción acelerada en I+D en esa área. Por su parte, los BG son ideales para el modelado práctico y, en esta tesis en particular, se utilizaron como *lingua franca* para obtener analogías entre los distintos tipos de modelos y como fuentes de inspiración física para desarrollar ideas de control que se formalizan y/o generalizan en el marco de métodos matemáticos estándares como EL y PHS.
- **Simulación:** Los modelos utilizados para simulación fueron los de EL y se implementaron en la extensión de programación visual de alto nivel *Simulink*, correspondiente al entorno de programación *Matlab*.

La técnica BG sirvió para obtener leyes de control (ver por ejemplo prototipado virtual en el Apéndice C), realizar una interpretación física de las mismas y analizar la causalidad de los modelos y controladores. Los mismos se pueden implementar en la herramienta de software de simulación gráfica *20-sim*.

Para analizar la estabilidad de vuelco, como no se modeló la rotación respecto a los ejes X ni Y con ninguna de las técnicas, se utilizó el simulador de robótica 3D *Gazebo*.

- **Implementación:** En el bloque de cancelación exacta en los esquemas de control vistos se utilizó el modelo EL. La principal desventaja de este enfoque radica en el tiempo de cómputo que requiere la inversión de la matriz de inercia $M(q)$. A su vez la implementación de las leyes de control basadas en modelos EL, requiere del conocimiento del vector de coordenadas y velocidades generalizadas q y $\dot{q}$. La obtención del mismo se puede realizar midiendo con una IMU la posición y rotación de la base, o midiendo con encoders las velocidades angulares de rotación de los motores y realizando la transformación cinemática correspondiente.

Común a la implementación de los tres ejes temáticos, es el uso de placas de control para el procesamiento de los datos de entrada y la generación de las correspondientes consignas de control en tiempo real de cómputo. Para ello es necesario diferenciar los esquemas de control en capas de alto y bajo nivel. La primera debe procesar

los datos de entrada provenientes de los distintos sensores y referencias, computar la correspondiente ley de control y generar las referencias de torque para el control de bajo nivel. Esta última por su parte, es la encargada de comandar los motores que generan los torques de acción.

En los proyectos del LAC, para el control de alto nivel se utilizó la placa *Odroid XU4*. A la misma se le pueden añadir periféricos como cámara para tratamiento de imágenes, módulo de interfaz y módulos USB-Wi-Fi para establecer comunicación con PC remotas. En el caso de que sean necesarios análisis y procesamientos más complejos, o incluso controladores centrales por ejemplo, se puede implementar directamente una mini PC que tiene una capacidad de cómputo mucho mayor.

Por su parte, el control de bajo nivel se implementó (salvo para los casos como el proyecto 5 donde el control de bajo nivel ya venía incorporado a las ruedas) en las placas *EK-TM4C1294XL* y *LAUNCHXL-F28379D* pertenecientes a la familia de microcontroladores de la marca *Texas Instruments*.

9.1.2 Contribuciones a la Metodología Utilizada

A continuación se resumen las contribuciones realizadas a la metodología descrita en la sección 2.6 del capítulo 1.

Por un lado, en los capítulos de la *Parte I: Modelado* se presentaron modelos de bases y manipuladores móviles con distintos grados de complejidad y metodología. Las diferentes complejidades permitieron utilizar a los más simples para derivar, validar y verificar el correcto funcionamiento de las leyes de control propuestas. Los más complejos permitieron un análisis experimental numérico, un paso previo necesario para la experimentación física final con los elementos del LAC. Por su parte, las distintas metodologías posibilitaron interpretar la influencia de fenómenos físicos (como por ejemplo las fuerzas de restricción cinemática) en los distintos modelos, formalizar conceptos (modelos BG y PHS en CbI) y realizar analogías (Jacobiano y matriz de Formación). Sobre este último punto, resulta valioso destacar las relaciones presentadas entre el control de manipuladores robóticos y el control de formación de MAS de manera que se puede aprovechar, *mutatis mutandi*, la extensa bibliografía existente en el área control de manipuladores robóticos para el análisis de MAS.

Por otra parte, se mostró cómo la solución a un problema de control primero puede ser planteada desde un punto de vista físico-ingenieril para luego ser formalizada en un marco teórico-matemático. Dicho enfoque se presentó particularmente en el capítulo 6 con el uso de bloques de resortes y amortiguadores virtuales para el control de formación de MAS y su posterior formalización con los conceptos de la teoría de CbI. Resaltamos nuevamente aquí como fue fundamental el uso de distintos tipos de modelos (BG-Teoría de grafos-PHS) para la formalización y conceptualización matemática de las leyes de control.

Finalmente, se confirmó la conveniencia de emplear una batería de métodos cuando se atacaron los problemas de control de formación, elusión de obstáculos y control de motores en el capítulo 7 y su posterior validación a través de simulaciones numéricas en el capítulo 8. De cada grupo se explicitaron las distintas interpretaciones, las ventajas y desventajas de su implementación en una eventual experimentación física. Además se demostró cómo distintas estrategias pueden ser combinadas en un mismo esquema de control para lograr alcanzar los diferentes objetivos que se enmarcan dentro de la teoría de control de formación de MAS (Figura 7.1). Aquí nuevamente resultaron claves los distintos grados de complejidad de los modelos usados en los esquemas de control.

9.2 Prospectivas

A continuación se detallan los posibles trabajos a futuro que se pueden desprender de esta tesis. Para una mayor claridad se los diferencia en experimentales y teóricos.

9.2.1 Fase Experimental

A nivel implementación, la línea de trabajo a futuro es la verificación experimental de los esquemas de control desarrollados. Se prevé que dicha implementación sea financiada por los proyectos de investigación del LAC y llevada a cabo a través de proyectos finales de ingeniería por alumnos de los últimos años, tal como se describió en las secciones 1.2.2 y 1.2.3 del capítulo 1, respectivamente. Es por este motivo que en este capítulo se realizó un énfasis en la etapa de implementación y, si bien satisfacen también otros intereses, en el primer capítulo se hizo mención a todos los proyectos de investigación.

Particularmente se trabajará con las bases chica y grande (Figuras 1.1a y 1.1c, respectivamente) y los robots manipuladores *PincherX 100* y el *ReactorX 200* de la empresa *Trossen Robotics* adquiridos con fines educativos y de investigación. El objetivo es montar estos últimos sobre las BM de manera de poder también validar los modelos de los MM.

Uno de los desafíos a nivel experimental es la medición de las posiciones globales de los agentes. Una solución es combinar las distintas técnicas de medición de posición (odometría, IMU, GPS), realizando una ponderación diferenciada de cada una de ellas y luego un promedio. Otra posible solución factible a implementar puede ser un control compartido de información limitada (LISC, por sus siglas en inglés). LISC se utiliza en aplicaciones donde no todos los estados del sistema o las trayectorias de referencia son medibles por la automatización [111].

Otro de los desafíos es la comunicación con los agentes. Ante la presencia de obstáculos fijos o móviles, por ejemplo, el agente podría colisionar si se pierde la comunicación ya que, como se mencionó anteriormente, el controlador central es el

encargado de la generación de la ley de elusión de obstáculos. Este es un requisito importante en aplicaciones realistas y, por lo tanto, debería considerarse en el modelo en trabajos futuros.

También se buscarán posibles soluciones con el objetivo de, en lugar de un controlador centralizado, computar las leyes de control en controladores locales de los agentes y así dotar de autonomía a la formación.

Finalmente, si bien la extensión de la estrategia campos de potencial a obstáculos móviles ya existe, la implementación experimental representa un desafío desde el punto de vista del cómputo y una posible línea de trabajo.

9.2.2 Fase Teórica

Respecto a los aportes mostrados en la tesis, un trabajo interesante sería extender el concepto de matriz de formación para agentes en el espacio con orientación y posición en el espacio euclídeo de tres dimensiones. Por su parte, como muchas formaciones no son mínimamente rígidas ya que se busca que ante la pérdida de una arista la formación se mantenga, se podría extender el análisis de estabilidad para ese tipo de formaciones. En ese aspecto, resulta interesante también el estudio de robustez de la formación ante la pérdida de agentes y/o restricciones en el intercambio de información entre estos.

A partir de la analogía mostrada entre la matriz de formación y el jacobiano, se pretende ahondar en la búsqueda de posibles vinculaciones que permitan extender las propiedades de la teoría de control de manipuladores al control de MAS.

El bloque de *Control de Agente Líder* puede interpretarse como un par de resorte amortiguadores virtuales que conduce a la formación a una determinada posición y un par resorte-amortiguador de torsión sujeto a la artista para controlar orientación de la formación. En esa línea, al igual que se hizo con los ECB del MAS interconectado, se puede plantear el modelo PHS -vía BG-, reemplazar el esquema de control entrada-salida de la Figura 7.5 por un CbI y obtener una interpretación física del mismo.

Se explorará la posibilidad de emplear las funciones potenciales, en esta tesis utilizadas para la elusión de obstáculos, para evitar colisiones entre los agentes asignándole un determinado potencial a cada uno de los mismos.

Respecto a los controles desarrollados, se buscará robustecer los mismos ante las distintas incertidumbres que puedan llegar a surgir, tanto a nivel teórico como práctico. Así, dentro de las primeras se encuentran las incertidumbres paramétricas de los modelos propuestos y el incumplimiento de las hipótesis de rodadura perfecta debido al terreno donde se mueven las bases. Las restricciones prácticas son mayores y van desde interferencias en las comunicaciones hasta errores de medición, capacidad de cómputo, falla de los actuadores, etc.

Por último, una línea interesante a explotar es la extensión de los resultados a BM diferenciales no holonómicas ya que las restricciones de movimiento de las mismas

hacen que la interpretación de las fuerzas virtuales de los ECB sea completamente distinta. Para sistemas mecánicos con restricciones no holonómicas se estudiará la vinculación entre el método de *fuerzas generalizadas* con el de fuentes virtuales de esfuerzo en el modelado BG.

Bibliografía

- [1] Darren M Dawson, Jun Hu, and Timothy C Burg. *Nonlinear control of electric machinery*. CRC Press, 2019.
- [2] Bruno Siciliano, Lorenzo Sciavicco, Luigi Villani, and Giuseppe Oriolo. *Robotics: modelling, planning and control*. Springer, 2009.
- [3] Martín Crespo, Matías Nacusse, and Sergio Junco. Comparison of trajectory tracking and obstacle avoidance strategies for a multi-agent dynamic system. In *Int. Conf. on Integrated Modeling and Analysis in Applied Control and Automation (IMAACA 2019)*, 2019.
- [4] Matías Nacusse, Martín Crespo, and Sergio Junco. Bond graphs based formation control of holonomic robots. In *Int. Conf. on Integrated Modeling and Analysis in Applied Control and Automation (IMAACA 2019)*, 2019.
- [5] Martín Crespo, Matías Nacusse, and Sergio Junco. Stabilization of mobile robotic manipulator through independent base control. In *Asociación Argentina de Control Automático (AADECA 2018)*, 2018.
- [6] Martín Crespo, Matías Nacusse, Sergio Junco, Vitalram Rayankula, and Pushparaj Mani Pathak. Control of mobile robotic manipulator: a combined design approach. In *Int. Conf. on Integrated Modeling and Analysis in Applied Control and Automation (IMAACA 2018)*, 2018.
- [7] Matías Nacusse, Martín Crespo, Sergio Junco, Vitalram Rayankula, and Pushparaj Mani Pathak. Bond graph model conditioning for analysis, simulation and control system design: application to a planar mobile robotic manipulator. In *Int. Conf. on Integrated Modeling and Analysis in Applied Control and Automation (IMAACA 2017)*, 2017.
- [8] Martín Crespo, Martín Mujica, Mourad Benoussaad, and Sergio Junco. Robust control in task space for redundant manipulator. In *XIX Workshop on Information Processing and Control (RPIC 2021)*, pages 1–6. IEEE, 2021.
- [9] Martín Crespo, Alejandro Donaire, Fabio Ruggiero, Vincenzo Lippiello, and Bruno Siciliano. Design, implementation and experiments of a robust passivity-based controller for a rolling-balancing system. In *Int. Conf. on Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO 2016)*, 2016.
- [10] Martín Mujica, Martín Crespo, Mourad Benoussaad, Sergio Junco, and Jean-Yves Fourquet. Robust variable admittance control for human–robot co-manipulation of objects with unknown load. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 79:102408, 2023.
- [11] Alejandro Donaire, Jose Guadalupe Romero, Romeo Ortega, Bruno Siciliano, and Martín Crespo. Robust ida-pbc for underactuated mechanical systems subject to

- matched disturbances. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 27(6):1000–1016, 2017.
- [12] Alejandro Donaire, Martín Crespo, Fabio Ruggiero, Vincenzo Lippiello, and Bruno Siciliano. Passivity-based control design and experiments for a rolling-balancing system. In *Informatics in Control, Automation and Robotics*, pages 230–255. Springer, 2018.
- [13] Facundo Chamena, Ezequiel Remersaro, Matías Nacusse, Martín Crespo, Guillermo Rolle, and Sergio Junco. A systematic approach to the design and implementation of a control system for a robotic mobility assistance platform. In *XX Workshop on Information Processing and Control (RPIC 2023)*, pages 1–6. IEEE, 2023.
- [14] Guillermo Rolle, Matías Nacusse, Martín Crespo, and Sergio Junco. Model-based design and implementation of dynamic controller for autonomous guidance of a scale automobile. In *IEEE Biennial Congress of Argentina (ARGENCON 2022)*, 2022.
- [15] Sergio Junco, Matías Nacusse, Martín Crespo, Mauro Carignano, and Daniel Ades. Educating in robotics and producing experimental resources through final engineering projects. In *XV Congreso Tecnología Aprendizaje y Enseñanza de la Electrónica (TAAE 2022)*, 2022.
- [16] Felipe Cinto, Franco Seguezzo, Matías Nacusse, Martín Crespo, Pablo Gallucci, Daniel Ades, and Sergio Junco. Diseño, construcción y control de movimiento de una base móvil con dos sistemas de locomoción alternativos. In *XI Jornadas Argentinas de Robótica (JAR 2022)*, 2022.
- [17] Facundo Piombo, Matías Nacusse, Martín Crespo, Joaquín Ezpeleta, Daniel Alba, Edgardo Arnejo, and Sergio Junco. Diseño e implementación de hardware y software de control a bajo nivel de un manipulador robótico de tipo industrial. In *XI Jornadas Argentinas de Robótica (JAR 2022)*, 2022.
- [18] Matías Nacusse, Guillermo Rolle, Sergio Junco, Martín Crespo, Felipe Cinto, Franco Seguezzo, Manuel Sobrero, Mauro Carignano, and Daniel Ades. Diseño mecatrónico de plataformas electromecánicas para robots móviles con sistemas de locomoción con ruedas y con patas. In *VII Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica (CAIM 2021)*, 2021.
- [19] Sergio Junco, Daniel Alba, Matías Nacusse, Joaquín Ezpeleta, Javier Cabello, and Martín Crespo. Aprendizaje por la práctica: proyectos finales de ingeniería integrando proyectos de i+d. In *XI Congreso Argentino de Enseñanza de la Ingeniería (CAEDI 2021)*, 2021.
- [20] Clara Bureu, José Casá, Matías Nacusse, Martín Crespo, Gustavo Migoni, and Sergio Junco. Omni-directional mobile robot control system design and implementation. In *X Jornadas Argentinas de Robótica (JAR 2019)*, 2019.
- [21] Rodolphe Sepulchre, Mrdjan Jankovic, and Petar V Kokotovic. Introduction. In *Constructive nonlinear control*, chapter 1, pages 1–25. Springer Science & Business Media, 2012.
- [22] Rodolphe Sepulchre, Mrdjan Jankovic, and Petar V Kokotovic. *Constructive nonlinear control*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [23] Frank L Lewis. Introduction to modern control theory. In *Applied optimal control and estimation*, chapter 1, pages 3–24. Prentice Hall PTR, 1992.

- [24] Romeo Ortega, Julio Antonio Loría Perez, Per Johan Nicklasson, and Hebertt J Sira-Ramirez. Introduction. In *Passivity-based control of Euler-Lagrange systems: mechanical, electrical and electromechanical applications*, chapter 1, pages 1–15. Springer Science & Business Media, 2013.
- [25] Eduardo F Camacho and Carlos Bordons Alba. Introduction to model based predictive control. In *Model predictive control*, chapter 1, pages 1–10. Springer Science & Business Media, 2013.
- [26] J-JE Slotine. Putting physics in control-the example of robotics. *IEEE Control Systems Magazine*, 8(6):12–18, 1988.
- [27] Romeo Ortega, Arjan J Van Der Schaft, Iven Mareels, and Bernhard Maschke. Putting energy back in control. *IEEE Control Systems Magazine*, 21(2):18–33, 2001.
- [28] Jan C Willems. The behavioral approach to open and interconnected systems. *IEEE control systems magazine*, 27(6):46–99, 2007.
- [29] Arjan Van der Schaft. *L2-gain and passivity techniques in nonlinear control*, volume 2. Springer, 2000.
- [30] Romeo Ortega, Arjan Van Der Schaft, Bernhard Maschke, and Gerardo Escobar. Interconnection and damping assignment passivity-based control of port-controlled hamiltonian systems. *Automatica*, 38(4):585–596, 2002.
- [31] Romeo Ortega, Julio Antonio Loría Perez, Per Johan Nicklasson, and Hebertt J Sira-Ramirez. *Passivity-based control of Euler-Lagrange systems: mechanical, electrical and electromechanical applications*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [32] Christopher I Byrnes, Alberto Isidori, and Jan C Willems. Feedback equivalence to passive nonlinear systems. In *Analysis of Controlled Dynamical Systems*, pages 118–135. Springer, 1991.
- [33] Romeo Ortega and Mark W Spong. Adaptive motion control of rigid robots: A tutorial. *Automatica*, 25(6):877–888, 1989.
- [34] Romeo Ortega and Eloisa Garcia-Canseco. Interconnection and damping assignment passivity-based control: A survey. *European Journal of control*, 10(5):432–450, 2004.
- [35] Romeo Ortega, Arjan Van Der Schaft, Fernando Castanos, and Alessandro Astolfi. Control by interconnection and standard passivity-based control of port-hamiltonian systems. *IEEE Transactions on Automatic control*, 53(11):2527–2542, 2008.
- [36] Charles A Desoer and Mathukumalli Vidyasagar. *Feedback systems: input-output properties*. SIAM, 2009.
- [37] Karl Johan Åström and Tore Hägglund. The future of PID control. *Control engineering practice*, 9(11):1163–1175, 2001.
- [38] Meng Zhang, Pablo Borja, Romeo Ortega, Zhitao Liu, and Hongye Su. Pid passivity-based control of port-hamiltonian systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 63(4):1032–1044, 2017.

- [39] Anthony M Bloch, Naomi Ehrich Leonard, and Jerrold E Marsden. Controlled lagrangians and the stabilization of mechanical systems. i. the first matching theorem. *IEEE Transactions on automatic control*, 45(12):2253–2270, 2000.
- [40] Anthony M Bloch, Dong Eui Chang, Naomi Ehrich Leonard, and Jerrold E Marsden. Controlled lagrangians and the stabilization of mechanical systems. ii. potential shaping. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(10):1556–1571, 2001.
- [41] Eloísa García-Canseco, Dimitri Jeltsema, Romeo Ortega, and Jacquélien MA Scherpen. Power-based control of physical systems. *Automatica*, 46(1):127–132, 2010.
- [42] Romeo Ortega, Dimitri Jeltsema, and Jacquélien MA Scherpen. Power shaping: A new paradigm for stabilization of nonlinear rlc circuits. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(10):1762–1767, 2003.
- [43] Henry M Paynter. *Analysis and design of engineering systems*. MIT press, 1961.
- [44] Dean C Karnopp, Donald L Margolis, and Ronald C Rosenberg. *System dynamics: modeling, simulation, and control of mechatronic systems*. John Wiley & Sons, 2012.
- [45] Alejandro Donaire and Sergio Junco. On the addition of integral action to port-controlled hamiltonian systems. *Automatica*, 45(8):1910–1916, 2009.
- [46] Alejandro Donaire and Sergio Junco. Energy shaping, interconnection and damping assignment, and integral control in the bond graph domain. *Simulation Modelling Practice and Theory*, 17(1):152–174, 2009.
- [47] Sergio Junco. Virtual prototyping of bond graphs models for controller synthesis through energy and power shaping. In *Int. Conf. on Integrated Modeling and Analysis in Applied Control and Automation (IMAACA 2004)*, pages 28–31, 2004.
- [48] Yong Liu, J Jim Zhu, Robert L Williams II, and Jianhua Wu. Omni-directional mobile robot controller based on trajectory linearization. *Robotics and autonomous systems*, 56(5):461–479, 2008.
- [49] Douglas Cline. Calculus of variations. In *Variational principles in classical mechanics*, chapter 5, pages 148–179. University of Rochester River Campus Librarie, 2017.
- [50] Bruno Siciliano, Lorenzo Sciavicco, Luigi Villani, and Giuseppe Oriolo. Motion control. In *Robotics: modelling, planning and control*, chapter 11, pages 369–521. Springer Science & Business Media, 2009.
- [51] G Campion, G Bastin, D Rolin, and B Raucent. External linearization control for an omnidirectional mobile robot. In *Robot Control 1988 (Syroco’88)*, pages 293–298. Elsevier, 1989.
- [52] A De Luca and Giuseppe Oriolo. Modelling and control of nonholonomic mechanical systems. In *Kinematics and dynamics of multi-body systems*, pages 277–342. Springer, 1995.
- [53] Rafael Fierro and Frank L Lewis. Control of a nonholomic mobile robot: Back-stepping kinematics into dynamics. *Journal of robotic systems*, 14(3):149–163, 1997.

- [54] Arjan Van Der Schaft and Dimitri Jeltsema. Port-hamiltonian systems theory: An introductory overview. *Foundations and Trends in Systems and Control*, 1(2-3):173–378, 2014.
- [55] Arjan Van der Schaft. Dissipative systems theory. In *L2-gain and passivity techniques in nonlinear control*, chapter 3, pages 33–55. Springer, 2000.
- [56] Alejandro Donaire and Sergio Junco. Derivation of input-state-output port-hamiltonian systems from bond graphs. *Simulation Modelling Practice and Theory*, 17(1):137–151, 2009.
- [57] R Balakrishna and Ashitava Ghosal. Modeling of slip for wheeled mobile robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 11(1):126–132, 1995.
- [58] Robert L Williams, Brian E Carter, Paolo Gallina, and Giulio Rosati. Dynamic model with slip for wheeled omnidirectional robots. *IEEE transactions on Robotics and Automation*, 18(3):285–293, 2002.
- [59] Carlos Canudas de Wit, Bruno Siciliano, and Georges Bastin. *Theory of robot control*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [60] Patrick Hamill. *A student's guide to Lagrangians and Hamiltonians*. Cambridge University Press, 2014.
- [61] Han-Shue Tan and Yuen-Kwok Chin. Vehicle traction control: variable-structure control approach. *Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 113:223–231, 1991.
- [62] Daniel Stonier, Se-Hyoung Cho, Sung-Lok Choi, Naveen Suresh Kuppaswamy, and Jong-Hwan Kim. Nonlinear slip dynamics for an omniwheel mobile robot platform. In *Proceedings 2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 2367–2372. IEEE, 2007.
- [63] Bruno Siciliano, Lorenzo Sciavicco, Luigi Villani, and Giuseppe Oriolo. Differential kinematics and statics. In *Robotics: modelling, planning and control*, chapter 3, pages 105–161. Springer Science & Business Media, 2009.
- [64] Oussama Khatib. Inertial properties in robotic manipulation: An object-level framework. *The international journal of robotics research*, 14(1):19–36, 1995.
- [65] Jonghoon Park, Chung Wangkyun, and Youm Youngil. Computation of gradient of manipulability for kinematically redundant manipulators including dual manipulators system. *Transactions on Control, Automation and Systems Engineering*, 1(1):8–15, 1999.
- [66] Fanny Ficuciello, Luigi Villani, and Bruno Siciliano. Variable impedance control of redundant manipulators for intuitive human–robot physical interaction. *IEEE Transactions on Robotics*, 31(4):850–863, 2015.
- [67] Mark W Spong and Mathukumalli Vidyasagar. *Robot dynamics and control*. John Wiley & Sons, 2008.
- [68] Wisama Khalil and Etienne Dombre. *Modeling identification and control of robots*. CRC Press, 2002.
- [69] Kevin M Lynch and Frank C Park. *Modern robotics: mechanics, planning and control*. Cambridge University Press, 2017.

- [70] Jacques Denavit and Richard S Hartenberg. A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 22:215–221, 1955.
- [71] Wisama Khalil and J Kleinfinger. A new geometric notation for open and closed-loop robots. In *Proceedings. 1986 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 3, pages 1174–1179. IEEE, 1986.
- [72] Roger W Brockett. Robotic manipulators and the product of exponentials formula. In *Mathematical theory of networks and systems*, pages 120–129. Springer, 1984.
- [73] Fabrizio Caccavale, Bruno Siciliano, and Luigi Villani. The role of euler parameters in robot control. *Asian journal of control*, 1(1):25–34, 1999.
- [74] Oussama Khatib. A unified approach for motion and force control of robot manipulators: The operational space formulation. *IEEE Journal on Robotics and Automation*, 3(1):43–53, 1987.
- [75] Y-C Chen and Ian D Walker. A consistent null-space based approach to inverse kinematics of redundant robots. In *[1993] Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 374–381. IEEE, 1993.
- [76] Hamid Sadeghian, Luigi Villani, Mehdi Keshmiri, and Bruno Siciliano. Task-space control of robot manipulators with null-space compliance. *IEEE Transactions on Robotics*, 30(2):493–506, 2013.
- [77] Paul C Krause, Oleg Wasynczuk, Scott D Sudhoff, and Steven D Pekarek. *Analysis of electric machinery and drive systems*, volume 75. John Wiley & Sons, 2013.
- [78] Juan Luis Rosendo, Fernando Valenciaga, and Fabricio Garelli. Sistemas multirrobot: etapas de diseño, aplicaciones y problemas abiertos. In *Asociación Argentina de Control Automático (AADECA 2021)*, 2021.
- [79] Kwang-Kyo Oh, Myoung-Chul Park, and Hyo-Sung Ahn. A survey of multi-agent formation control. *Automatica*, 53:424–440, 2015.
- [80] Julien M Hendrickx, Brian DO Anderson, Jean-Charles Delvenne, and Vincent D Blondel. Directed graphs for the analysis of rigidity and persistence in autonomous agent systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-Affiliated Journal*, 17(10-11):960–981, 2007.
- [81] Mehran Mesbahi and Magnus Egerstedt. *Graph theoretic methods in multiagent networks*. Princeton University Press, 2010.
- [82] Chris Godsil and Gordon F Royle. *Algebraic graph theory*, volume 207. Springer Science & Business Media, 2001.
- [83] Martin Jafarian, Ewoud Vos, Claudio De Persis, Arjan J van der Schaft, and Jacquélien MA Scherpen. Formation control of a multi-agent system subject to coulomb friction. *Automatica*, 61:253–262, 2015.
- [84] Silvia Mastellone, Juan S Mejía, Dušan M Stipanović, and Mark W Spong. Formation control and coordinated tracking via asymptotic decoupling for lagrangian multi-agent systems. *Automatica*, 47(11):2355–2363, 2011.
- [85] Li Chang-Sheng and Wang Yu-Zhen. Protocol design for output consensus of port-controlled hamiltonian multi-agent systems. *Acta Automatica Sinica*, 40(3):415–422, 2014.

- [86] Arjan J Van der Schaft and Bernhard M Maschke. Port-hamiltonian systems on graphs. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 51(2):906–937, 2013.
- [87] Peng Shi and Bing Yan. A survey on intelligent control for multiagent systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 51(1):161–175, 2020.
- [88] Ali Dorri, Salil S Kanhere, and Raja Jurdak. Multi-agent systems: A survey. *Ieee Access*, 6:28573–28593, 2018.
- [89] Michael Wooldridge. *An introduction to multiagent systems*. John wiley & sons, 2009.
- [90] Eloísa García-Canseco, Ramkrishna Pasumathy, Arjan van der Schaft, and Romeo Ortega. On control by interconnection of port hamiltonian systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 38(1):330–335, 2005.
- [91] M Anthony Lewis and Kar-Han Tan. High precision formation control of mobile robots using virtual structures. *Autonomous robots*, 4(4):387–403, 1997.
- [92] Kar-Han Tan and M Anthony Lewis. Virtual structures for high-precision cooperative mobile robotic control. In *Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. IROS’96*, volume 1, pages 132–139. IEEE, 1996.
- [93] Randal W Beard, Jonathan Lawton, and Fred Y Hadaegh. A coordination architecture for spacecraft formation control. *IEEE Transactions on control systems technology*, 9(6):777–790, 2001.
- [94] Ahmed Benzerrouk, Lounis Adouane, Laurent Lequievre, and Philippe Martinet. Navigation of multi-robot formation in unstructured environment using dynamical virtual structures. In *2010 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 5589–5594. IEEE, 2010.
- [95] Emmanuel Nuño, Romeo Ortega, Bayu Jayawardhana, and Luis Basañez. Coordination of multi-agent euler–lagrange systems via energy-shaping: Networking improves robustness. *Automatica*, 49(10):3065–3071, 2013.
- [96] Ewoud Vos, Jacqueliën MA Scherpen, Arjan J van der Schaft, and Ate Postma. Formation control of wheeled robots in the port-hamiltonian framework. *IFAC Proceedings Volumes*, 47(3):6662–6667, 2014.
- [97] Murat Arcak. Passivity as a design tool for group coordination. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(8):1380–1390, 2007.
- [98] Hassan K Khalil. Differential kinematics and statics. In *Nonlinear systems third edition*, chapter 14, pages 551–625. Prentice Hall, 2002.
- [99] Christopher I Connolly, John B Burns, and R Weiss. Path planning using laplace’s equation. In *Proceedings., IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 2102–2106. IEEE, 1990.
- [100] Peter Knabner and Lutz Angerman. *Numerical Methods for Elliptic and Parabolic Partial Differential Equations*. Springer-Verlag New York, 2003.
- [101] Sergio Junco. Sistemas de control de motores eléctricos, control del motor de corriente continua, estructura de control: Cascada. *Cátedra DSF –CurMot / DyCSMecatrónicos*, 2021.

- [102] Pablo Gonzalez De Santos, Elena Garcia, and Joaquin Estremera. Stability in walking robots. In *Quadrupedal locomotion: an introduction to the control of four-legged robots*, chapter 2, pages 33–54. Springer, 2006.
- [103] Yiguang Hong, Jiangping Hu, and Linxin Gao. Tracking control for multi-agent consensus with an active leader and variable topology. *Automatica*, 42(7):1177–1182, 2006.
- [104] Zhiyun Lin, Lili Wang, Zhimin Han, and Minyue Fu. Distributed formation control of multi-agent systems using complex laplacian. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 59(7):1765–1777, 2014.
- [105] Liangming Chen, Hector Garcia de Marina, and Ming Cao. Maneuvering formations of mobile agents using designed mismatched angles. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 67(4):1655–1668, 2021.
- [106] Oussama Khatib. Real-time obstacle avoidance for manipulators and mobile robots. In *Autonomous robot vehicles*, pages 396–404. Springer, 1986.
- [107] Guoqiang Hu, Wee Peng Tay, and Yonggang Wen. Cloud robotics: architecture, challenges and applications. *IEEE network*, 26(3):21–28, 2012.
- [108] Pavel Pascacio, Sven Casteleyn, Joaquin Torres-Sospedra, Elena Simona Lohan, and Jari Nurmi. Collaborative indoor positioning systems: A systematic review. *Sensors*, 21(3):1002, 2021.
- [109] Jayakanth Kunhoth, AbdelGhani Karkar, Somaya Al-Maadeed, and Abdulla Al-Ali. Indoor positioning and wayfinding systems: a survey. *Human-centric Computing and Information Sciences*, 10(1):1–41, 2020.
- [110] Paulo Costa, Hugo Fernandes, Paulo Martins, João Barroso, and Leontios J Hadjileontiadis. Obstacle detection using stereo imaging to assist the navigation of visually impaired people. *Procedia Computer Science*, 14:83–93, 2012.
- [111] Balint Varga, Jairo Inga, and Sören Hohmann. Limited information shared control: A potential game approach. *IEEE Transactions on Human-Machine Systems*, 2022.
- [112] EG Papadopoulos and Daniel A Rey. A new measure of tipover stability margin for mobile manipulators. In *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 4, pages 3111–3116. IEEE, 1996.
- [113] Evangelos Papadopoulos and Daniel A Rey. The force-angle measure of tipover stability margin for mobile manipulators. *Vehicle System Dynamics*, 33(1):29–48, 2000.
- [114] A Ghasempoor and N Sepehri. A measure of stability for mobile manipulators with application to heavy-duty hydraulic machines. *Dynamic Systems Measurement and Control*, 120(3):360–370, 1998.
- [115] Pablo Gonzalez De Santos, Elena Garcia, and Joaquin Estremera. *Quadrupedal locomotion: an introduction to the control of four-legged robots*, volume 1. Springer, 2006.
- [116] Jinhyun Kim, Wan Kyun Chung, Youngil Youm, and Beom H Lee. Real-time zmp compensation method using null motion for mobile manipulators. In *Proceedings 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No. 02CH37292)*, volume 2, pages 1967–1972. IEEE, 2002.

- [117] Shigeki Sugano, Qiang Huang, and Ichiro Kato. Stability criteria in controlling mobile robotic systems. In *Proceedings of 1993 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS'93)*, volume 2, pages 832–838. IEEE, 1993.
- [118] Miomir Vukobratović and Branislav Borovac. Zero-moment point—thirty five years of its life. *International journal of humanoid robotics*, 1(01):157–173, 2004.
- [119] A Takanishi, M Tochizawa, T Takeya, H Karaki, and I Kato. Realization of dynamic biped walking stabilized with trunk motion under known external force. In *Advanced Robotics: 1989*, pages 299–310. Springer, 1989.
- [120] Qiang Huang, Kazuo Tanie, and Shigeki Sugano. Coordinated motion planning for a mobile manipulator considering stability and manipulation. *The International Journal of Robotics Research*, 19(8):732–742, 2000.
- [121] I Kanellakopoulos, PV Kokotovic, and AS Morse. A toolkit for nonlinear feedback design. *Systems & Control Letters*, 18(2):83–92, 1992.
- [122] Sergio Junco, Alejandro Donaire, and Gerardo Garnero. Speed control of series dc motor: a bond graph based backstepping design. In *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, volume 3, pages 6–pp. IEEE, 2002.
- [123] Sergio Junco and Alejandro Donaire. Bg-supported synthesis of speed-and position-tracking controllers for brushless dc-motor drives. *2005 International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation (ICBGM)*, pages 245–251, 2005.

Apéndice A

Matrices Manipulador Móvil

En este Apéndice se presentan las expresiones matemáticas de los elementos que componen las matrices de transformación T_i^F , inercia $M(q)$, gravedad $g(q)$ y fuerzas de Coriolis y centrífugas $C(q, \dot{q})$ del modelo cinemático y dinámico de manipulador móvil desarrollado en el capítulo 4. Se muestran también las relaciones de transformación de los **MTF** del BG de la Figura 4.3. Por último se presenta el procedimiento para generar una matriz simétrica y positiva para el rediseño de control del capítulo 7.

A.1 Cinemática Directa

Las transformaciones entre Marcos de referencia son

$$\begin{aligned} T_0^F = A_0^F &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & T_1^F = T_0^F A_1^0 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ T_2^F = T_1^F A_2^1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & T_3^F = T_2^F A_3^2 &= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & x + c_1 a_3 \\ s_1 & 0 & -c_1 & y + s_1 a_3 \\ 0 & 1 & 0 & h_b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ T_4^F = T_3^F A_4^3 &= \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -c_1 s_2 & s_1 & x + c_1(a_3 + a_4 c_2) \\ s_1 c_2 & -s_1 s_2 & -c_1 & y + s_1(a_3 + a_4 c_2) \\ s_2 & c_2 & 0 & h_b + a_4 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ T_5^F = T_4^F A_5^4 &= \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 & x + c_1(a_3 + a_4 c_2 + a_5 c_{23}) \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & -c_1 & y + s_1(a_3 + a_4 c_2 + a_5 c_{23}) \\ s_{23} & c_{23} & 0 & h_b + a_4 s_2 + a_5 s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A.2 Modelo Dinámico

La matriz de inercia es

$$M(q) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & 0 & \mathbf{M}_{13} & \mathbf{M}_{14} & \mathbf{M}_{15} \\ 0 & \mathbf{M}_{22} & \mathbf{M}_{23} & \mathbf{M}_{24} & \mathbf{M}_{25} \\ \mathbf{M}_{31} & \mathbf{M}_{32} & \mathbf{M}_{33} & 0 & 0 \\ \mathbf{M}_{41} & \mathbf{M}_{42} & 0 & \mathbf{M}_{44} & \mathbf{M}_{45} \\ \mathbf{M}_{51} & \mathbf{M}_{52} & 0 & \mathbf{M}_{54} & \mathbf{M}_{55} \end{bmatrix}$$

y las expresiones de sus componentes

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{11} &= (m_3 + m_4 + m_5) & \mathbf{M}_{13} &= (-l_3m_4 - l_3m_5 + (-l_4m_4 - a_4m_5)c_2 - l_5m_5c_{23})s_1 \\ \mathbf{M}_{14} &= c_1((-l_4m_4 - a_4m_5 - l_5m_5c_3)s_2 - l_5m_5c_2s_3) & \mathbf{M}_{15} &= l_5m_5c_1(-c_3s_2 - c_2s_3) \\ \mathbf{M}_{22} &= (m_3 + m_4 + m_5) & \mathbf{M}_{23} &= c_1(l_3m_4 + l_3m_5 + (l_4m_4 + a_4m_5)c_2 + l_5m_5c_{23}) \\ \mathbf{M}_{24} &= s_1((-l_4m_4 - a_4m_5 - l_5m_5c_3)s_2 - l_5m_5c_2s_3) & \mathbf{M}_{25} &= l_5m_5s_1(-c_3s_2 - c_2s_3) \\ \mathbf{M}_{31} &= \mathbf{M}_{13} & \mathbf{M}_{32} &= \mathbf{M}_{23} & \mathbf{M}_{33} &= (0.5I_{x4} + 0.5I_{x5} + I_{z3} + 0.5I_{y4} + 0.5I_{y5} + l_3^2m_4 \\ & & & & & + 0.5l_4^2m_4 + 0.5a_4^2m_5 + l_3^2m_5 + 0.5l_5^2m_5 + l_3(2l_4m_4 + 2a_4m_5)c_2 + (-0.5I_{x4} + 0.5I_{y4} \\ & & & & & + 0.5l_4^2m_4 + 0.5a_4^2m_5)\cos(2q_2) + a_4l_5m_5c_3 + 2l_3l_5m_5c_{23} - 0.5I_{x5}\cos(2(q_2 + q_3)) \\ & & & & & + 0.5I_{y5}\cos(2(q_2 + q_3)) + 0.5l_5^2m_5\cos(2(q_2 + q_3)) + a_4l_5m_5\cos(2q_2 + q_3)) \\ \mathbf{M}_{41} &= \mathbf{M}_{14} \\ \mathbf{M}_{42} &= \mathbf{M}_{24} & \mathbf{M}_{44} &= (I_{z4} + I_{z5} + l_4^2m_4 + a_4^2m_5 + l_5^2m_5 + 2a_4l_5m_5c_3) & \mathbf{M}_{45} &= (I_{z5} \\ & & & & & + l_5^2m_5 + a_4l_5m_5c_3) \\ \mathbf{M}_{51} &= \mathbf{M}_{15} & \mathbf{M}_{52} &= \mathbf{M}_{25} & \mathbf{M}_{54} &= \mathbf{M}_{45} & \mathbf{M}_{55} &= (I_{z5} + l_5^2m_5) \end{aligned}$$

Por su parte, la matriz de fuerzas de Coriolis y centrífugas es

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{C}_{13} & \mathbf{C}_{14} & \mathbf{C}_{15} \\ 0 & 0 & \mathbf{C}_{23} & \mathbf{C}_{24} & \mathbf{C}_{25} \\ 0 & 0 & \mathbf{C}_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{C}_{43} & 0 & \mathbf{C}_{45} \\ 0 & 0 & \mathbf{C}_{53} & \mathbf{C}_{54} & 0 \end{bmatrix}$$

cuyos componentes son

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_{13} &= c_1(-l_3m_4 - l_3m_5 + (-l_4m_4 - a_4m_5)c_2 - l_5m_5c_{23})\dot{q}_1 + s_1((2l_4m_4 + 2a_4m_5)s_2 \\
&\quad + 2l_5m_5s_{23})\dot{q}_2 \quad \mathbf{C}_{14} = c_1((-l_4m_4 - a_4m_5)c_2 - l_5m_5c_{23})\dot{q}_2 \\
\mathbf{C}_{15} &= (2l_5m_5s_1s_{23}\dot{q}_1 + l_5m_5c_1(-2c_2c_3 + 2s_2s_3)\dot{q}_2) + l_5m_5c_1(-c_2c_3 + s_2s_3)\dot{q}_3 \\
\mathbf{C}_{23} &= (-l_3m_4 - l_3m_5 + (-l_4m_4 - a_4m_5)c_2 - l_5m_5c_{23})s_1\dot{q}_1 \\
&\quad + c_1((-2l_4m_4 - 2a_4m_5)s_2 - 2l_5m_5s_{23})\dot{q}_2 \quad \mathbf{C}_{24} = ((-l_4m_4 - a_4m_5)c_2 - l_5m_5c_{23})s_1\dot{q}_2 \\
\mathbf{C}_{25} &= (-2l_5m_5c_1s_{23}\dot{q}_1 + l_5m_5s_1(-2c_2c_3 + 2s_2s_3)\dot{q}_2) + l_5m_5s_1(-c_2c_3 + s_2s_3)\dot{q}_3 \\
\mathbf{C}_{33} &= (l_3(-2l_4m_4 - 2a_4m_5)s_2 + (I_{x4} - I_{y4} - l_4^2m_4 - a_4^2m_5)\sin(2q_2) - 2l_3l_5m_5s_{23} \\
&\quad + I_{x5}\sin(2(q_2 + q_3)) - I_{y5}\sin(2(q_2 + q_3)) - l_5^2m_5\sin(2(q_2 + q_3)) - 2a_4l_5m_5\sin(2(q_2 + q_3))\dot{q}_2 \\
&\quad + (-a_4l_5m_5s_3 - 2l_3l_5m_5s_{23} + I_{x5}\sin(2(q_2 + q_3)) - I_{y5}\sin(2(q_2 + q_3)) \\
&\quad - l_5^2m_5\sin(2(q_2 + q_3)) - a_4l_5m_5\sin(2(q_2 + q_3))\dot{q}_3 \\
\mathbf{C}_{43} &= (l_3(l_4m_4 + a_4m_5)s_2 + (-0.5I_{x4} + 0.5I_{y4} + 0.5l_4^2m_4 + 0.5a_4^2m_5)\sin(2q_2) \\
&\quad + l_3l_5m_5s_{23} - 0.5I_{x5}\sin(2(q_2 + q_3)) + 0.5I_{y5}\sin(2(q_2 + q_3)) + 0.5l_5^2m_5\sin(2(q_2 + q_3)) \\
&\quad + a_4l_5m_5\sin(2(q_2 + q_3))\dot{q}_1 \quad \mathbf{C}_{45} = -2a_4l_5m_5s_3\dot{q}_2 - a_4l_5m_5s_3\dot{q}_3 \\
\mathbf{C}_{53} &= (0.5a_4l_5m_5s_3 + l_3l_5m_5s_{23} - 0.5I_{x5}\sin(2(q_2 + q_3)) + 0.5I_{y5}\sin(2(q_2 + q_3)) \\
&\quad + 0.5l_5^2m_5\sin(2(q_2 + q_3)) + 0.5a_4l_5m_5\sin(2(q_2 + q_3))\dot{q}_1 \quad \mathbf{C}_{54} = a_4l_5m_5s_3\dot{q}_2
\end{aligned}$$

Finalmente, la matriz de gravedad es

$$g(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{G}_4 & \mathbf{G}_5 \end{bmatrix}^T$$

donde

$$\mathbf{G}_4 = g_r((l_4m_4 + a_4m_5)c_2 + l_5m_5c_{23}) \quad \mathbf{G}_5 = g_rl_5m_5c_{23}$$

Se verificó el cumplimiento de la propiedad de los sistemas mecánicos

$$\dot{q}^T (\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})) \dot{q} = 0$$

A.3 Relaciones de Transformación del Esquema BG

Las expresiones de las relaciones de transformación de los **MTF** son:

$$\begin{aligned}
j_{P1}^{l_3} &= j_{P1}^{l_4} = j_{P1}^{l_5} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & j_{P2}^{l_3} &= j_{P2}^{l_4} = j_{P2}^{l_5} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
j_{P3}^{l_3} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & j_{P3}^{l_4} &= \begin{bmatrix} -s_1(a_3 + l_4c_2) \\ c_1(a_3 + l_4c_2) \\ 0 \end{bmatrix} & j_{P3}^{l_5} &= \begin{bmatrix} -s_1(a_3 + l_5c_{23} + a_4c_2) \\ c_1(a_3 + l_5c_{23} + a_4c_2) \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j_{P4}^{l4} &= \begin{bmatrix} -l_4 c_1 s_2 \\ -l_4 s_1 s_2 \\ l_4 c_2 \end{bmatrix} & j_{P4}^{l5} &= \begin{bmatrix} -c_1(l_5 s_{23} + a_4 s_2) \\ -s_1(l_5 s_{23} + a_4 s_2) \\ l_5 c_{23} + a_4 c_2 \end{bmatrix} & j_{P5}^{l5} &= \begin{bmatrix} -l_5 s_{23} c_1 \\ -l_5 s_{23} s_1 \\ l_5 c_{23} \end{bmatrix} \\
z_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & z_3 = z_4 &= \begin{bmatrix} s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
R_3 &= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & R_4 &= \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -c_1 s_2 & s_1 \\ s_1 c_2 & -s_1 s_2 & -c_1 \\ s_2 & c_2 & 0 \end{bmatrix} & R_5 &= \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & -c_1 \\ s_{23} & c_{23} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

A.4 Matriz Simétrica y Positiva

Para generar la matriz P del rediseño de control de posición del capítulo 7, se comienza generando una matriz P de dimensión $(4n \times 4n)$ con valores aleatorios del cero a uno. Luego se construye una matriz simétrica como

$$P = \frac{1}{2} (P + P^T)$$

Considerando que cada elemento de la nueva P es menor a uno y que una matriz simétrica diagonalmente dominante¹ es definida positiva, sumando el valor n a cada elemento de la diagonal

$$P = P + n\mathbf{I}_n$$

se asegura que la matriz P es simétrica y definida positiva.

¹Una matriz es diagonalmente dominante cuando los elementos de la diagonal son mayores (en valor absoluto) a la suma de los valores absolutos de los demás elementos de la misma fila.

Apéndice B

Índices de Estabilidad de Vuelco

En este Apéndice se presentan tres índices distintos - M_{FA} , M_E y M_{ZMP} - para la medición de la estabilidad de vuelco en MM.

La principal ventaja de los MM respecto a aquellos cuya base se encuentra fija radica en que los primeros tienen un espacio de trabajo mucho mayor ya que se pueden desplazar largas distancias para realizar una determinada tarea con el efector final. Sin embargo, dicha mejora trae aparejada como desventaja el hecho de que surjan fuerzas no compensadas en la base del manipulador móvil, producto del movimiento del brazo, que pueden ocasionar el vuelco del manipulador móvil.

Un vuelco o inestabilidad de vuelco ocurre cuando un vehículo con carrocería vertical experimenta una rotación, lo que se traduce en una reducción del número de puntos de contacto con el suelo, de manera que todos los puntos restantes quedan en una sola línea (el eje de vuelco). Así, se pierde el control de la movilidad y finalmente, si la situación no se revierte, el vehículo vuelca [112].

Existen distintos índices de estabilidad de vuelco que miden el riesgo de vuelco de una MB, pudiéndose dividir en dos grandes grupos [102]. Por un lado, los índices de estabilidad estática cuya definición es que un robot es estáticamente estable si la proyección del centro de gravedad o CM¹ en el piso se proyecta dentro del polígono formado por los puntos de contacto con el piso. Por otra lado, los índices de estabilidad dinámica que tienen en cuenta además las fuerzas dinámicas generadas producto del movimiento del robot.

Antes de introducir los distintos índices, presentamos el equilibrio de fuerzas en el CM de la base cuya expresión es

$$\begin{aligned} f_I &= f_G + f_M + f_S + f_E \\ n_I &= n_G + n_M + n_S + n_E \end{aligned}$$

donde los subíndices I , G , M , S y E corresponden a fuerzas y torques inerciales, gravitacionales, de manipulación (transmitidas por el manipulador a la base), soporte

¹Cuando el campo gravitacional es uniforme, el CM equivale al centro de gravedad.

y externas², respectivamente. Notar que en este caso las fuerzas y torques de soporte equivalen a las fuerzas y torques de reacción del piso.

Se define luego la fuerza neta que influye sobre la estabilidad de vuelco en el CM de la base como

$$\begin{aligned} f_r &:= f_G + f_M + f_E - f_I \\ &= -f_S \end{aligned}$$

Del mismo modo, el torque neto es

$$\begin{aligned} n_r &:= n_G + n_M + n_E - n_I \\ &= -n_S \end{aligned}$$

De este modo, para el caso particular del MM, a partir de la ecuación general de EL

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau + J^T(q)h_e$$

y como se muestra en la Figura B.1, las expresiones de las fuerzas y torques gravitacionales, de manipulación, externas e inerciales en la base son³

$$\begin{aligned} f_G &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_3 g_r \end{bmatrix} & n_G &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & f_M &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & n_M &= \begin{bmatrix} -s_\varphi \tau_4 \\ c_\varphi \tau_4 \\ 0 \end{bmatrix} & f_E &= \begin{bmatrix} J_1^T(q)h_e \\ J_2^T(q)h_e \\ 0 \end{bmatrix} \\ n_E &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_3^T(q)h_e \end{bmatrix} & f_I &= \begin{bmatrix} M_1(q)\ddot{q} + C_1(q, \dot{q})\dot{q} \\ M_2(q)\ddot{q} + C_2(q, \dot{q})\dot{q} \\ 0 \end{bmatrix} & n_I &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_3(q)\ddot{q} + C_3(q, \dot{q})\dot{q} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Notar que las contribución de la tercera componente de la fuerza de gravedad f_G no se ve reflejada en la ecuación general de EL. Esto se debe a que la misma se compensa

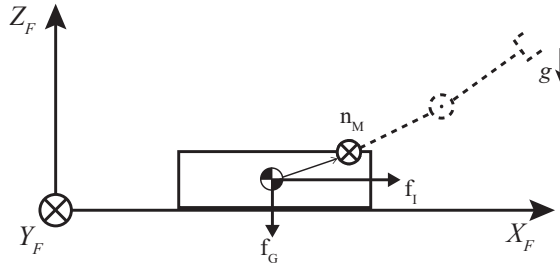


Fig. B.1 Fuerzas y torques netos en los CM de un MM.

²En la literatura a las fuerzas externas se las suele denominar también fuerzas de manipulación.

³Los subíndices representan los vectores fila o la fila, de las matrices o vectores columna, respectivamente.

con la fuerza soporte y no aporta a la dinámica del MM. Por otro lado, los torques de manipulación n_M es la reacción en la base que genera el torque externo del primer eslabón τ_4 .

B.1 Fuerza-Ángulo

A continuación se presenta el concepto de índice de estabilidad Fuerza-Ángulo M_{FA} , desarrollado en [112] [113], analizando el caso planar de la Figura B.2, donde se considera un vehículo con dos puntos de contacto cuyo CM está sometido a la fuerza neta f_r . Dicha fuerza genera dos ángulos con los dos ejes l_1 y l_2 normales a los ejes de vuelco. El índice de estabilidad Fuerza-Ángulo está dado por el menor de estos ángulos, ponderado por la magnitud de f_r como

$$M_{FA} = \min(\theta_i) \|f_r\|$$

La estabilidad de vuelco se vuelve crítica cuando alguno de los ángulos θ tiende a cero (y por lo tanto f_r coincide con l_1 o l_2) o, cuando la magnitud de f_r se hace cero, de modo que una pequeña perturbación puede volcar al vehículo. Si f_r se encuentra fuera del cono descrito por l_1 y l_2 , el mínimo ángulo se vuelve negativo, y el vehículo comienza a volcar.

Considerando nuevamente el caso del MM visto en en capítulo 4, definimos

$$r_1 = \begin{bmatrix} x + L \cos(\frac{\pi}{6} - \varphi) \\ y - L \sin(\frac{\pi}{6} - \varphi) \end{bmatrix} \quad r_2 = \begin{bmatrix} x - L \sin(\varphi) \\ y + L \cos(\varphi) \end{bmatrix} \quad r_3 = \begin{bmatrix} x - L \cos(\frac{\pi}{6} + \varphi) \\ y - L \sin(\frac{\pi}{6} + \varphi) \end{bmatrix}$$

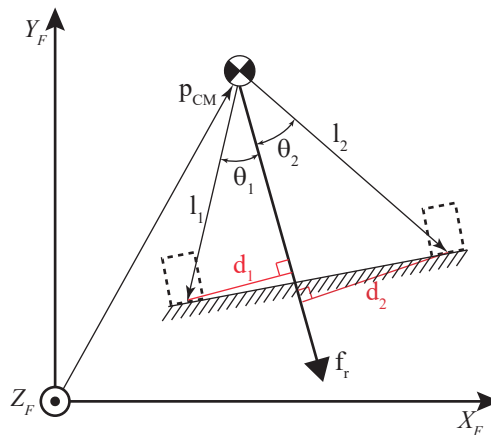


Fig. B.2 Índice de estabilidad Fuerza-Ángulo planar.

como la posición de los puntos de contacto de las ruedas de la base con el piso y

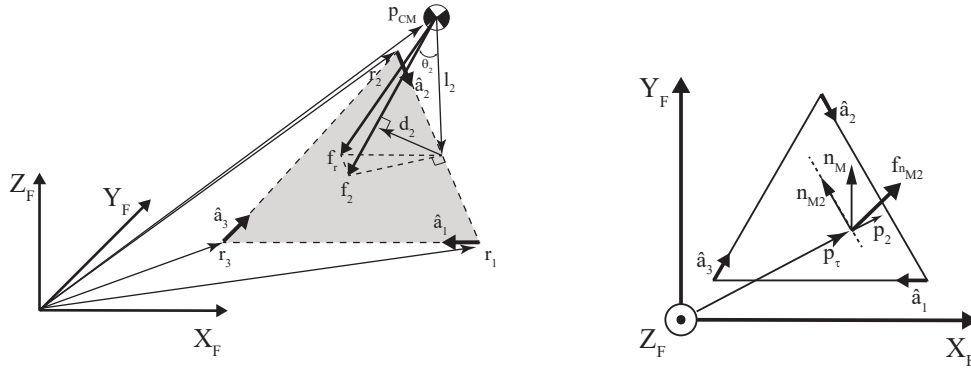
$$p_{CM} = \frac{p_{l1}m_1 + p_{l2}m_2 + p_{l3}m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

como el vector posición del CM del MM, como se muestra en la Figura B.3a.

Las líneas que unen a los puntos de contacto contienen a los ejes de vuelco a_i , cuya expresión es

$$a_i = \begin{cases} r_3 - r_i & \text{para } i = 1 \\ r_{i-1} - r_i & \text{para } i = 2, 3 \end{cases}$$

donde la dirección a_i se eligió de manera que los torques aplicados en esa dirección contribuyan a la estabilidad del MM.



(a) Índice de estabilidad Fuerza-Ángulo del manipulador móvil.

(b) Uso de la fuerza equivalente para el reemplazo del torque.

Fig. B.3 Fuerzas en la base.

La componente l_i , normal al eje de vuelco a_i y que pasa por el CM, se obtiene sustruyendo la parte del vector $r_{i+1} - p_{CM}$ que está a lo largo de a_i , i.e.,

$$l_i = \begin{cases} (\mathbf{I}_3 - \hat{a}_i \hat{a}_i^T) (r_3 - p_{CM}) & \text{para } i = 1 \\ (\mathbf{I}_3 - \hat{a}_i \hat{a}_i^T) (r_{i-1} - p_{CM}) & \text{para } i = 2, 3 \end{cases}$$

donde $\hat{a}_i = a_i / \|a_i\|$ son los versores de los ejes de vuelco. De igual modo, p_i es la distancia normal al eje de vuelco a_i que pasa por el punto donde se aplica el torque de manipulación n_M

$$p_i = \begin{cases} (\mathbf{I}_3 - \hat{a}_i \hat{a}_i^T) (r_3 - p_\tau) & \text{para } i = 1 \\ (\mathbf{I}_3 - \hat{a}_i \hat{a}_i^T) (r_{i-1} - p_\tau) & \text{para } i = 2, 3 \end{cases}$$

donde p_τ es la ubicación del torque de manipulación.

Teniendo en cuenta que f_r y n_r son las fuerzas y torques netos que actúan sobre el CM, respectivamente, las causantes de vuelco son aquellas componentes de f_r y n_r

que actúan sobre un determinado eje de vuelco a_i , siendo

$$\begin{aligned} f_i &= (\mathbf{I}_3 - \hat{a}_i \hat{a}_i^T) f_r \\ n_{Ii} &= (\hat{a}_i \hat{a}_i^T) n_I \\ n_{Mi} &= (\hat{a}_i \hat{a}_i^T) n_M \end{aligned}$$

Como el índice de estabilidad Fuerza-Ángulo se basa en el cálculo del ángulo entre el vector de toda la fuerza neta f_i^* y cada uno de los ejes de vuelco normales, es necesario reemplazar cada momento por una fuerza equivalente, cuyo valor produciría el mismo efecto que el torque en cada eje de vuelco (i.e. $n_{Ii} = f_{Ii} \times l_i$ y $n_{Mi} = f_{Mi} \times p_i$). De este modo, la fuerza neta total en el i -ésimo eje de vuelco es

$$f_i^* = f_i + f_{n_{Ii}} + f_{n_{Mi}}$$

donde

$$f_{n_{Ii}} = \frac{\hat{l}_i \times n_{Ii}}{\|l_i\|} \quad f_{n_{Mi}} = \frac{\hat{p}_i \times n_{Mi}}{\|p_i\|}$$

y $\hat{l}_i = l_i / \|l_i\|$, $\hat{p}_i = p_i / \|p_i\|$. Así, el ángulo que tiene la fuerza f_i^* con la normal l_i del i -ésimo eje de vuelco es

$$\theta_i = \sigma_i \cos^{-1}(\hat{f}_i^* \cdot \hat{l}_i)$$

donde $-\pi \leq \theta_i \leq \pi$ y σ_i determina el signo como

$$\sigma_i = \begin{cases} +1 & \text{si } (\hat{l}_i \times \hat{f}_i^*) \cdot \hat{a}_i < 0 \\ -1 & \text{c.o.c} \end{cases}$$

Así, el índice de estabilidad Fuerza-Ángulo es

$$M_{FA} = \min(\theta_i) \|f_r\|$$

para $i = 1, 2, 3$.

B.2 Estabilidad de Energía

En esta sección se introduce el índice normalizado de Estabilidad de Energía M_E [114], cuya interpretación gráfica se puede apreciar en la Figura B.4⁴, y se define como el cociente entre la mínima energía necesaria para hacer girar el robot alrededor del

⁴La gráfica fue tomada de [115] y adaptada con las definiciones de parámetros y variables de esta tesis.

i -ésimo eje de vuelco y la masa del robot, es decir

$$M_E = \frac{\min(E_i)}{mg}$$

donde E_i se puede expresar como

$$E_i = mg\|R_i\|(\cos \phi_i - \cos \varphi_i) \cos \psi_i + \left(f_s^T \hat{t}_i \|R_i\| + n_r^T \hat{a}_i\right) (\phi_i + \varphi_i) - \frac{1}{2} I_i \omega_i^2$$

y φ_i , ϕ_i y ψ_i , es el ángulo requerido para posicionar el CM en el plano vertical, el ángulo de rotación entre el plano vertical y el crítico, y el ángulo de inclinación del i -ésimo eje de vuelco del polígono, respectivamente. R_i es un vector ortogonal al i -ésimo eje de vuelco del polígono que apunta al CM, el versor $\hat{t}_i$ es perpendicular al plano que contiene R_i y $\hat{a}_i$, y f_s es la fuerza f_r sin la componente gravitacional f_g . Finalmente I_i y ω_i es la inercia de rotación y la velocidad angular del CM alrededor del eje de vuelco $\hat{a}_i$, respectivamente. En este caso es

$$R_i = -l_i$$

$$\psi = 0$$

$$t_i = R_i \times \hat{a}_i$$

y $\hat{t}_i = t_i / \|t_i\|$, para $i = 1, 2, 3$. Los vectores l_i , a_i , f_r y n_r son los mismos definidos para el caso del índice Fuerza-Ángulo.

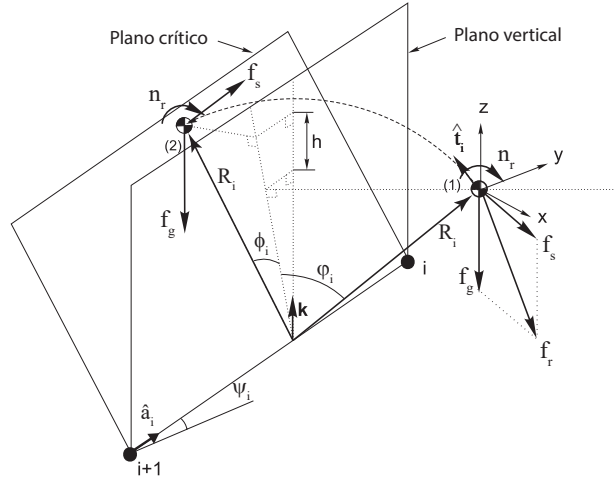


Fig. B.4 Descripción geométrica del índice de estabilidad energética para el eje de vuelco a_i .

B.3 Punto de Momento Cero

Existen varias definiciones del Punto de Momento Cero (ZMP) [116][117][118], pero en resumen se puede definir como el punto en el suelo sobre el cual la resultante de fuerza neta es cero. Si el ZMP se encuentra dentro del polígono definido por los puntos de contacto de la base con el piso, entonces el manipulador móvil es estable.

Tomando como ejemplo el manipulador móvil visto en el capítulo 4, la posición $r_{zmp} = [x_{zmp}, y_{zmp}]^T$ del ZMP en el plano puede calcularse como [119] [120]

$$x_{zmp} = \frac{\sum_{i=3}^5 m_i (\ddot{z}_i + g) x_i - \sum_{i=3}^5 m_i \ddot{x}_i z_i}{\sum_{i=3}^5 m_i (\ddot{z}_i + g)}$$

$$y_{zmp} = \frac{\sum_{i=3}^5 m_i (\ddot{z}_i + g) y_i - \sum_{i=3}^5 m_i \ddot{y}_i z_i}{\sum_{i=3}^5 m_i (\ddot{z}_i + g)}$$

donde g es la aceleración de la gravedad, m_i y $q_i = [x_i, y_i, z_i]^T$, la masa y posición del CM del enlace i , respectivamente.

Considerando que el CM coincide con el centro geométrico de la base, la zona de estabilidad es la que se muestra en la Figura B.5, donde el límite de la región estable está delimitado por el polígono de la base móvil.

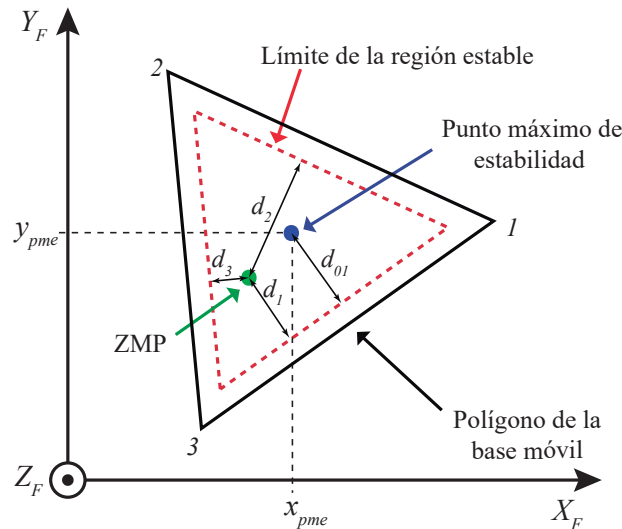


Fig. B.5 Esquema de la zona estable.

Así, el índice de estabilidad M_{ZMP} se define como [117]

$$M_{ZMP} = \min(d_i/d_{0i}) i_{in/out}$$

donde d_i es la mínima distancia entre el ZMP y el borde i del polígono de la región estable y d_{0i} la máxima distancia del punto de máxima estabilidad $r_{pme} = [x_{pme}, y_{pme}]^T$ al borde i del polígono de la región estable, con $i = 1, 2, 3$ la cantidad de bordes del polígono. Por su parte $i_{in/out}$ es 1 o -1 , según el ZMP se encuentre dentro o fuera de la región estable, respectivamente. Así, el límite de estabilidad se da para

$$0 < M_{ZMP} \leq 1$$

mientras que el límite de inestabilidad es

$$M_{ZMP} < 0$$

B.4 Simulaciones

En esta sección se validan los tres índices de estabilidad de vuelco. Para ello se simula un manipulador móvil en un escenario en el que, partiendo del reposo, realiza un recorrido de $5m$ en línea recta en la dirección x , se detiene y luego extiende el brazo. En la Figura B.6 se muestran tres instantes de la evolución.

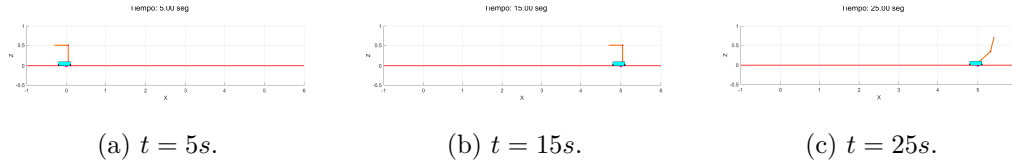


Fig. B.6 Evolución del manipulador móvil.

Por su parte, en la Figura B.7 se ilustran las evoluciones de los tres índices de estabilidad. Se puede observar que cuando el manipulador móvil realiza la trayectoria en línea recta hay una disminución y luego un aumento de los índices que se corresponden con la aceleración y posterior desaceleración, respectivamente, de la base. Dichas variaciones son pequeñas ya que como la base no posee gran altura es suficientemente estable ante los cambios bruscos de aceleración.⁵

Luego se puede apreciar que una vez detenido, cuando el manipulador móvil extiende el brazo, el peso del mismo provoca la consecuente pérdida de estabilidad y los índices comienzan a disminuir. En el instante de vuelco $t_v = 25s$, todos los índices cruzan el cero (línea punteada en rojo), lo que implica que en dicho instante existe riesgo de vuelco.

⁵Simulaciones de prueba se han llevado a cabo con bases de mayor altura y los resultados muestran que las variaciones del índice, ante los mismos cambios de aceleración, son mayores.

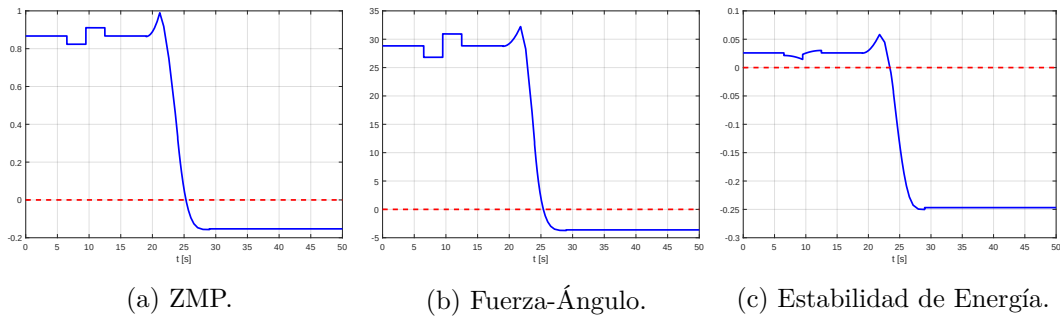


Fig. B.7 Índices de estabilidad de vuelco.

Ahora bien, como en esta tesis no se modeló la dinámica de rotación del manipulador móvil respecto a los ejes globales X_F y Y_F (sólo se modeló la rotación respecto a Z_F), nos valdremos de un modelo de simulación construido *ad hoc* en Gazebo para corroborar el instante en el que el manipulador móvil se tumba. En ese sentido se corre una simulación en Gazebo forzando que tanto los ángulos de las ruedas como los del brazo evolucionen como lo hacen en la simulación de Matlab.

En la Figura B.8 las capturas de pantalla del simulador Gazebo corroboran efectivamente que el manipulador móvil comienza a tumbarse en el instante en el cual los índices pasan por cero. En la Figura B.8a vemos que el manipulador comienza a

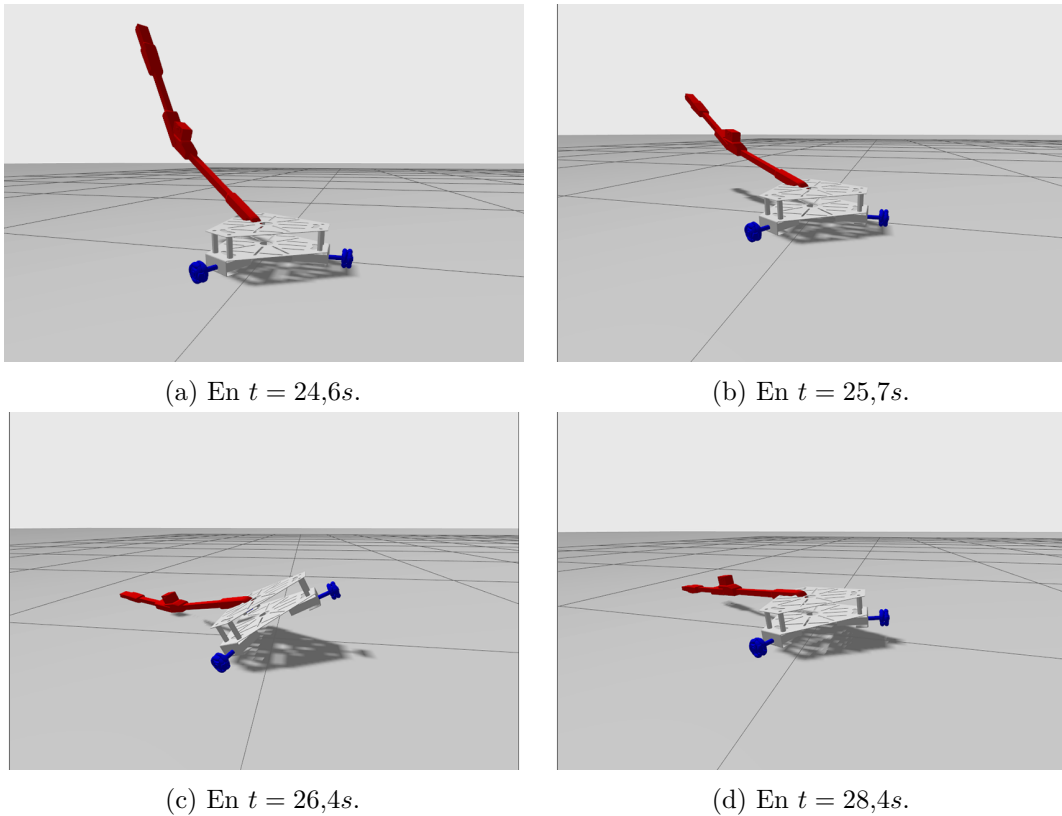
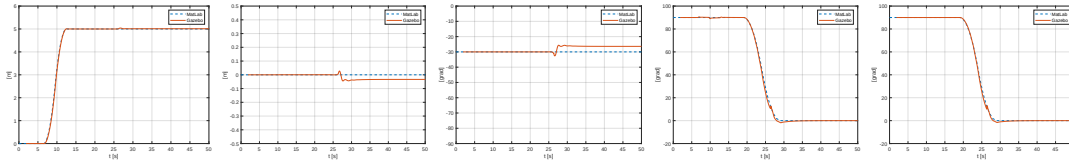


Fig. B.8 Evolución en Gazebo en distintos instantes.

extender el brazo. Luego, en la Figura B.8b se aprecia que la rueda derecha (rueda número 3) se despega levemente del piso. En la Figura B.8c, 1,4 segundos luego del instante de vuelco t_v , el manipulador se encuentra completamente tumbado sobre el piso. Finalmente, en la Figura B.8d se aprecia que con el brazo completamente extendido, la base está tumbada y la rueda 3 en el aire.

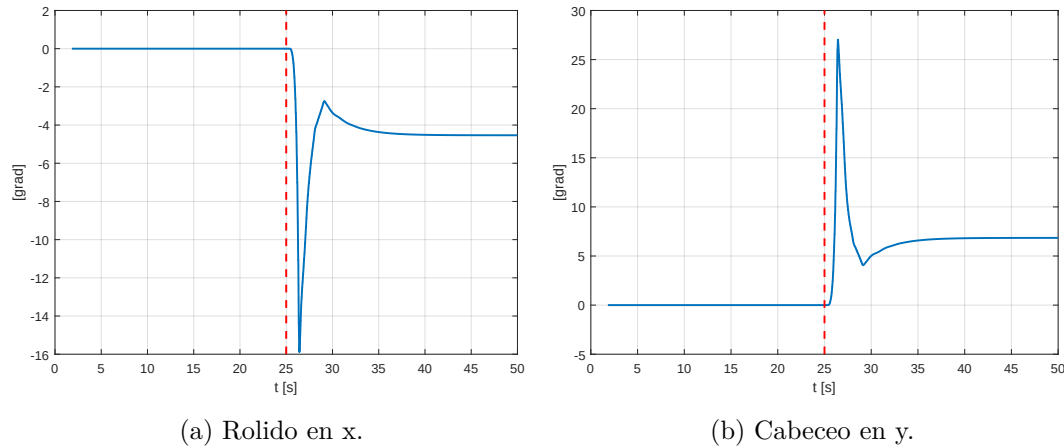
En la Figura B.9 se muestran las evoluciones de las coordenadas generalizadas producto de las simulaciones en MatLab y Gazebo. Se puede apreciar aquí que luego de $t_v = 25s$, tanto la posición en y como la rotación respecto a Z_F (el ángulo de φ_1) difieren ya que el modelo en Gazebo logra capturar el fenómeno de vuelco, no así el modelo restringido implementado en Matlab. En el resto de las gráficas también se observa en dicho instante un pico que representa la caída del manipulador móvil.



(a) Posición en x. (b) Posición en y. (c) Ángulo φ_1 . (d) Ángulo φ_2 . (e) Ángulo φ_3 .

Fig. B.9 Evolución de las coordenadas generalizadas.

Por último, si analizamos los ángulos de rotación alrededor de los ejes X_F y Y_F , ilustrados en la Figura B.10, vemos que en $t_v = 25s$ dichos ángulos presentan un pico. Los valores finales corresponden al de la base tumbada en el piso.



(a) Rolido en x.

(b) Cabeceo en y.

Fig. B.10 Ángulos de rolido y cabeceo del manipulador móvil.

Se agradece al Ing. Guillermo Rolle por haber realizado el modelado del manipulador móvil y las simulaciones en Gazebo.

Apéndice C

Prototipado Virtual: Usos y Equivalencias

En este Apéndice primero se muestra la técnica de prototipado virtual implementada en el marco de un control *backstepping* y luego las analogías con el control por seguimiento de trayectoria y cancelación por dinámica inversa y sus interpretaciones físicas.

C.1 Introducción

El moldeado de la energía de un sistema a lazo cerrado se puede resolver utilizando el modelado BG a través de una técnica denominada *prototipado virtual*. La misma consiste en reemplazar las acciones de control por una estructura BG, denominada *virtual BG*, de manera que el comportamiento de todo el modelo BG sea equivalente al deseado, denominado aquí *target BG*. Luego, leyendo los caminos causales del *virtual BG* se obtiene la ley de control deseada [47].

C.2 Backstepping

El diseño de controladores a través de *backstepping* es una técnica sistemática que combina el rigor matemático con la intuición. La misma consiste en particionar al sistema dinámico entrada-salida en una serie de subsistemas en cascada y resolver en cada uno de ellos el problema de seguimiento de trayectoria. Luego, se acoplan todos los controladores locales en una estructura según su jerarquía, e implementando el denominado *rediseño de Lyapunov*, se garantiza la estabilidad general del conjunto sistema-controlador. La síntesis de los controladores, empleando técnicas de cancelación dinámica o manipulación de energía, se puede realizar en el dominio BG con la técnica de prototipado virtual. Es precisamente cuando sobre el prototipado virtual se realiza un rediseño de Lyapunov, con el fin de asegurar teóricamente la estabilidad asintótica

en bucle cerrado, que el controlador resultante equivale a un diseño backstepping [121][122][123].

En el capítulo 7 se presentó un controlador *backstepping* para el control de un MCC. A continuación se presenta la técnica, describiendo cada bloque de la Figura C.1 por separado para el caso particular de un controlador de tracking de velocidad de un motor Brushless de Corriente Continua (BLDC) desarrollado en [123].

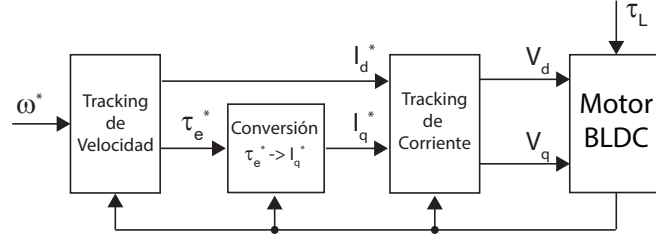


Fig. C.1 Estructura del control en cascada.

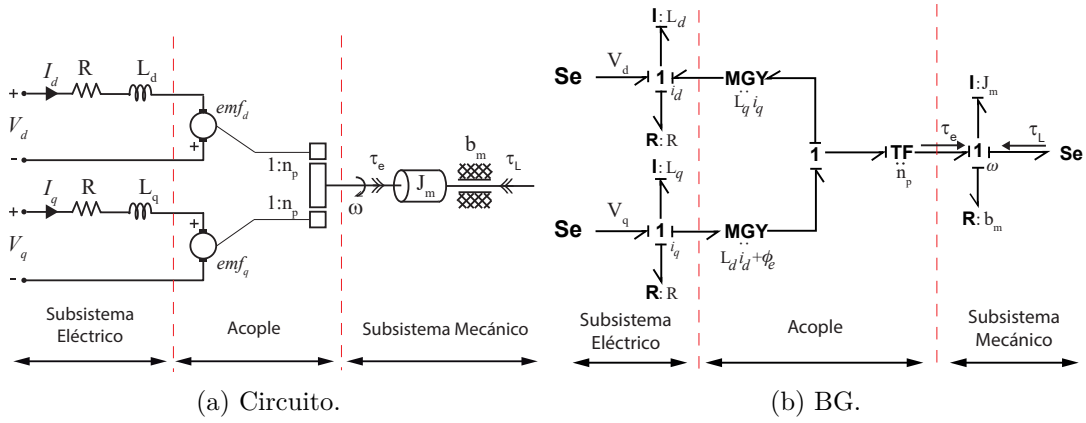


Fig. C.2 Modelo de un motor BLDC.

• Control de Torque

El modelo de un motor BLDC se muestra en la Figura C.2. Planteando el prototipado virtual solamente en el subsistema mecánico, como se muestra en la Figura C.3, y leyendo el camino causal se obtiene la siguiente expresión de control

$$\tau_e^* = J_m \dot{\omega}^* + b_T \omega^* + (b_m - b_T) \omega + k_T \int (\omega^* - \omega) dt \quad (C.1)$$

donde se cumple que la dinámica del error de velocidad $\tilde{\omega} = \omega^* - \omega$ a lazo cerrado, considerando $\tau_l = cte$, es

$$\begin{aligned} J_m \ddot{\tilde{\omega}} + b_T \dot{\tilde{\omega}} + k_T \tilde{\omega} &= \dot{\tau}_L \\ &= 0 \end{aligned} \quad (C.2)$$

en el torque de control, donde $\tilde{\tau}_e = \tau_e^* - \tau_e$, de manera que el torque aplicado τ_e es diferente al torque deseado τ_e^* y la dinámica del error $\tilde{\omega}$ a lazo cerrado de la ecuación (C.2) cambia a

$$\ddot{\tilde{\omega}} + \frac{b_T}{J_m} \dot{\tilde{\omega}} + \frac{k_T}{J_m} \tilde{\omega} = \frac{n_p}{J_m} \tilde{I}_q [(L_d - L_q)I_d + \phi_e]$$

Finalmente, se realiza el *rediseño de Lyapunov* planteando la función candidata

$$V(\tilde{\omega}, \dot{\tilde{\omega}}, \tilde{I}_q, \tilde{I}_d) = \frac{1}{2} \left(\frac{k_T}{J_m} \tilde{\omega}^2 + \dot{\tilde{\omega}}^2 + L_q \tilde{I}_q^2 + L_d \tilde{I}_d^2 \right)$$

y derivando con respecto al tiempo se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{k_T}{J_m} \tilde{\omega} \dot{\tilde{\omega}} + \dot{\tilde{\omega}} \ddot{\tilde{\omega}} + L_q \tilde{I}_q \dot{\tilde{I}}_q + L_d \tilde{I}_d \dot{\tilde{I}}_d \\ &= -\frac{b_T}{J_m} \dot{\tilde{\omega}}^2 + \frac{n_p}{J_m} \tilde{I}_q \dot{\tilde{\omega}} [(L_d - L_q)I_d + \phi_e] - L_q k_q \tilde{I}_q^2 - L_d k_d \tilde{I}_d^2 - L_q \tilde{I}_q u_q \end{aligned}$$

Así, eligiendo

$$u_q = \frac{n_p}{L_q J_m} \dot{\tilde{\omega}} [(L_d - L_q)I_d + \phi_e]$$

la derivada orbital

$$\dot{V} = -\frac{b_T}{J_m} \dot{\tilde{\omega}}^2 - L_q k_q \tilde{I}_q^2 - L_d k_d \tilde{I}_d^2$$

resulta ser semidefinida negativa ya que

$$\dot{V} = 0 \quad \dot{\tilde{\omega}} = 0, \tilde{I}_q = 0, \tilde{I}_d = 0, \forall \tilde{\omega}$$

Sin embargo, la estabilidad asintótica se prueba fácilmente a través del teorema de LaSalle ya que el subespacio de estado definido por $\{\tilde{\omega}, \dot{\tilde{\omega}}, \tilde{I}_q, \tilde{I}_d\} = \{0, 0, 0, 0\}$ no es invariante a lazo cerrado.

De este modo, reemplazando u_q en (C.3), la expresión final de la tensión de control V_q es

$$V_q = L_q \dot{I}_q^* + L_q k_q I_q^* + (R - L_q k_q) I_q + \frac{n_p}{J_m} \omega (L_d I_d + \phi_e) + n_p \dot{\tilde{\omega}} [(L_d - L_q)I_d + \phi_e]$$

C.3 Control de Seguimiento Trayectoria

En el capítulo 6 se presentó el control de seguimiento de trayectoria de un MAS. Dicho control de seguimiento de trayectoria, que consiste en estabilizar en el origen el error de posición, puede interpretarse como el moldeado de las funciones de energía y potencia del sistema a lazo cerrado.

Consideremos que el comportamiento deseado a lazo cerrado del MAS es el de un sistema masa-resorte-amortiguador (MRA). El correspondiente *target BG* se muestra

en la Figura C.4a y la dinámica del error a lazo cerrado es

$$M_D \ddot{\tilde{r}} + K_D \dot{\tilde{r}} + K_P \tilde{r} = 0 \quad (C.4)$$

donde K_P , K_D , y M_D son matrices positivas de dimensión $(2n \times 2n)$ que representan los valores del resorte, amortiguador y masa del sistema MRA, respectivamente.

Para lograr dicho comportamiento a lazo cerrado, en el *virtual BG* se debe realizar una cancelación de la dinámica del sistema y luego reemplazarla por la del *target BG*. En la Figura C.4b se muestra el prototipado virtual, y la ley de control que se determina leyendo el camino causal del *virtual BG* es

$$u = M \ddot{r} + (M_D \ddot{\tilde{r}} + K_D \dot{\tilde{r}} + K_P \tilde{r}) \quad (C.5)$$

De este modo, reemplazando el controlador del sistema por el *virtual BG* de la Figura C.4b, se cancela la dinámica del mismo y se reemplaza por aquella correspondiente al *target BG* de la Figura C.4a.

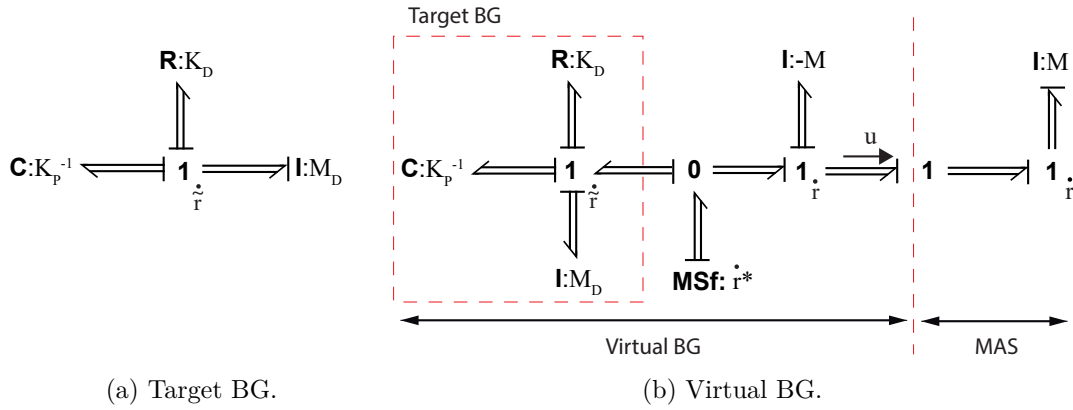


Fig. C.4 Prototipado virtual BG.

Observación C.1. La dinámica asociada a la masa se cancela en el *virtual BG* sólo para el caso en que la masa deseada a lazo cerrado sea la misma que la del sistema, i.e., $M_D = M$. Esto implica que, como se aprecia en la ecuación (C.5), no es necesario realimentar la aceleración $\ddot{r}$ para construir la ley de control, y la dinámica del error a lazo cerrado (C.4) coincide con (7.12).

C.3.1 Interpretación Física

Cuando $M_D = M$, la dinámica a lazo cerrado de un agente i equivale físicamente a unir al mismo a través de un ECB virtual, con un punto material virtual de igual masa que la del agente, como se aprecia en la Figura C.5.

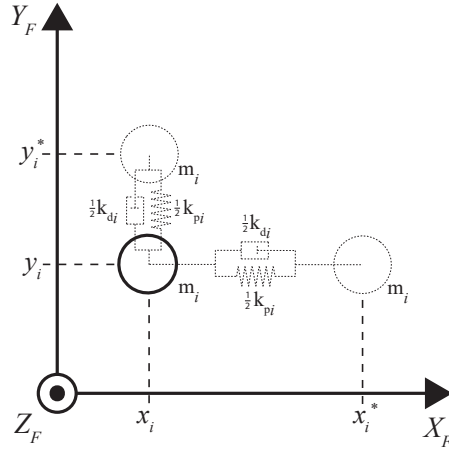


Fig. C.5 Interpretación física del controlador.

La dinámica tanto de los agentes reales como de los agentes virtuales es

$$\begin{aligned} M\ddot{r} &= \frac{1}{2}K_P\tilde{r} + \frac{1}{2}K_D\dot{\tilde{r}} \\ M\ddot{r}^* &= -\frac{1}{2}K_P\tilde{r} - \frac{1}{2}K_D\dot{\tilde{r}} \end{aligned}$$

De la combinación de ambas ecuaciones se obtiene la ecuación

$$M\ddot{\tilde{r}} + K_D\dot{\tilde{r}} + K_P\tilde{r} = 0$$

que se corresponde con la dinámica del error de posición del *target* BG de la Figura C.4a expresada en (C.4).

Observación C.2. Dicha interpretación física del error se puede realizar sólo en el caso de que la matriz de masa M sea diagonal, de manera que se pueda obtener una dinámica del error desacoplada a lazo cerrado.

C.4 Control por Dinámica Inversa

La dinámica a lazo cerrado (7.20) obtenida por el control por dinámica inversa en el capítulo 7 es de segundo orden y asintóticamente estable, al igual que la dinámica (C.4) obtenida por el método de prototipado virtual.

Sin embargo, a diferencia de (7.20) donde la dinámica a lazo cerrado queda definida por K_D y K_P , en (C.4) si la matriz de masa no es diagonal como se destaca en la Observación C.2, no se puedan obtener evoluciones lineales y desacopladas. Incluso más, si la matriz de masa dependiese de las coordenadas generalizadas q , la tasa de convergencia a cero del error no quedaría determinada por los parámetros constantes de frecuencia natural de oscilación ω_n ni coeficiente de amortiguamiento ζ .

Se aprecia a través de esta comparación que la técnica de prototipado virtual genera resultados con los cuales se pueden establecer analogías físicas, como se vio en la sección anterior, mientras que la cancelación por dinámica inversa deriva en ecuaciones matemáticas fáciles de manipular pero difíciles de interpretar físicamente.