

MINISTERIO DE JUSTICIA E INSTRUCCION PUBLICA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS, Etc.
DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

MATHEMATICÆ NOTÆ

BOLETIN

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA

DIRECTOR

BEPPPO LEVI

AÑO TERCERO - FASC. 2



ROSARIO
REPUBLICA ARGENTINA

1943

Las « Mathematicae Notae » publican artículos, cuestiones, ejercicios, soluciones y correspondencia. La resolución de las cuestiones propuestas será publicada en números sucesivos de la revista al cabo de un tiempo razonable, a juicio del Director del Instituto, para obtener contestaciones de los lectores; de las cuestiones publicadas bajo el título de ejercicios la dirección se reserva la decisión, en cada caso, de publicar o no las respuestas.

A fin de año se adjudicarán dos premios:

1º Por concurso entre alumnos de la Facultad que contesten satisfactoriamente a cuestiones, problemas o ejercicios.

2º Por concurso entre todos los demás lectores del país o del extranjero que contesten en modo acertado a los mismos.

Los premios consistirán en tratados de extensión cultural o libros de especialización.

Las soluciones deben ser entregadas al Instituto en redacción clara y en hojas distintas para cada cuestión, problema o ejercicio. En cada hoja deberá señalarse el nombre del autor; los alumnos de la Facultad indicarán el año de estudios que cursan en la misma, y, los de primer año, además, la escuela media de la cual provienen. Estos elementos serán tenidos en cuenta para el juicio, conjuntamente con el valor intrínseco de las soluciones y la forma expositiva de las mismas, dándose por la Dirección la máxima importancia a la disposición por la cual se compararán sólo alumnos de igual preparación.

INDICE

—Algunas desigualdades entre los elementos de un triángulo (LUIS A. SANTALÓ)	pág. 65
—Los orígenes de la teoría algorítmica de Wronski dentro de la doctrina pitagórica (B. LEVI-PEDRO CAPELLI Y MISCHA COTLAR)	» 74
—Flores y hojas - Respuestas	» 101
—Solución a la Cuestión N° 3	» 105
—Ejercicios y Problemas - Soluciones	» 107
—Ejercicios y Problemas - Propuestos	» 120
—Cuestiones	» 122
—Bibliografía. — J. D. STRANATHAN	» 123



ALGUNAS DESIGUALDADES ENTRE LOS ELEMENTOS DE UN TRIANGULO

I. — DESIGUALDADES ENTRE EL PERÍMETRO Y LA SUMA DE LAS ALTURAS, BISECTRICES O MEDIANAS DE UN TRIÁNGULO.

En esta primera parte vamos a tratar el problema siguiente:

Se da el perímetro $2p = a + b + c$ de un triángulo. Encontrar los límites inferior y superior de las sumas: 1° $h_a + h_b + h_c$ de las alturas, 2° $\beta_A + \beta_B + \beta_C$ de las bisectrices, 3° $m_a + m_b + m_c$ de las medianas.

Este problema geométrico, que se relaciona analíticamente con el de hallar los valores extremos de funciones de varias variables, se propone en este mismo número en la sección de « Ejercicios y Problemas » por sugestión del Dr. SERGIO SISPANOV, Catedrático de la Facultad de Ciencias de Asunción (Paraguay) y, como el lector podrá darse cuenta, presenta dificultades para ser resuelto completamente por los métodos corrientes del cálculo infinitesimal. En esta pequeña nota vamos a mostrar cómo, encarando este y otros problemas análogos por medio de un análisis geométrico preliminar, puede obtenerse la completa solución sin el recurso de métodos analíticos, resultando, de paso, algunos teoremas interesantes.

1. DESIGUALDAD ENTRE EL PERÍMETRO Y LA SUMA DE LAS ALTURAS. — Recordemos primero una desigualdad que será útil en lo sucesivo. Dados tres números positivos x, y, z se verifica

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{3(x + y + z)} \quad [1]$$

valiendo el signo igual únicamente en el caso de ser $x = y = z$. En efecto, de la desigualdad evidente $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$ se deduce $x + y \geq 2\sqrt{xy}$, lo cual constituye el conocido teorema de que la

media aritmética entre dos números es igual o mayor que la media geométrica, valiendo únicamente la igualdad cuando los dos números son iguales. Escribiendo esta desigualdad para todas las combinaciones entre x, y, z se tiene

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}, \quad \sqrt{yz} \leq \frac{y+z}{2}, \quad \sqrt{xz} \leq \frac{x+z}{2} \quad [2]$$

de donde, sumando

$$\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{xz} \leq x + y + z.$$

Multiplicando ambos miembros de esta desigualdad por 2 y añadiendo la suma $x + y + z$ queda

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2 \leq 3(x + y + z), \quad [3]$$

de donde, extrayendo la raíz cuadrada, resulta [1].

Puesto que en [2] los signos de igualdad valen únicamente cuando x, y, z son iguales, de la demostración anterior se deduce que también en [1] el signo $=$ valdrá únicamente para el caso de ser $x=y=z$, como habíamos dicho.

Pasemos ahora al problema de hallar el máximo de la suma de las alturas dado el perímetro de un triángulo.

Es bien conocida la fórmula siguiente para el área S de un triángulo

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad [4]$$

y como además

$$2S = ah_a = bh_b = ch_c,$$

resulta

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \quad [5]$$

Pero

$$\begin{aligned} 4(p-b)(p-c) &= (2p-2b)(2p-2c) = \\ &= (a-(b-c))(a+(b-c)) = a^2 - (b-c)^2 \leq a^2, \end{aligned}$$

y por tanto, de [5] se deduce

$$h_a \leq \sqrt{p(p-a)}. \quad [6]$$

Sumando las expresiones análogas para h_b y h_c se obtiene

$$h_a + h_b + h_c \leq \sqrt{p} (\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c}) \quad [7]$$

y según la desigualdad [1]

$$h_a + h_b + h_c \leq \sqrt{p} \sqrt{3(3p-a-b-c)} = \sqrt{3} p. \quad [8]$$

El signo = valdrá únicamente, según se dijo para [1], cuando $p-a = p-b = p-c$, o sea, cuando el triángulo sea equilátero.

En resumen, como las alturas son siempre números positivos, se puede escribir

$$0 \leq h_a + h_b + h_c \leq \sqrt{3} p. \quad [9]$$

La igualdad $h_a + h_b + h_c = 0$ vale para cualquier triángulo reducido a un segmento y un punto interior como tercer vértice. La igualdad $h_a + h_b + h_c = \sqrt{3} p$ vale únicamente para el triángulo equilátero. De otra manera: *entre todos los triángulos de perímetro dado, el equilátero es el que tiene máxima suma de alturas.*

2. DESIGUALDADES ENTRE EL PERÍMETRO Y LA SUMA DE LAS BISECTRICES. — El valor de la bisectriz β_A en función de los lados es

$$\beta_A = \frac{2}{b+c} \sqrt{pbc(p-a)} \quad [10]$$

y como ya recordamos que la media aritmética es siempre igual o mayor que la geométrica, o sea $\frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}$, resulta

$$\beta_A \leq \sqrt{p(p-a)}.$$

Se tiene pues

$$\beta_A + \beta_B + \beta_C \leq \sqrt{p} (\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c}),$$

que es análoga a la [7]. Como antes, vale por tanto la desigualdad

$$\beta_A + \beta_B + \beta_C \leq \sqrt{3} p \quad [11]$$

donde la igualdad vale únicamente para $a = b = c$, o sea, para el triángulo equilátero.

Para obtener una acotación inferior de la suma de las bisectrices observemos que llamando a_1, a_2 a los dos segmentos en que divide

al lado a y escribiendo que en todo triángulo un lado es igual o mayor que la diferencia entre los otros dos, se tiene:

$$\beta_A \geq b - a_1, \quad \beta_A \geq c - a_2, \quad [12]$$

de donde, sumando,

$$2\beta_A \geq b + c - a.$$

Escribiendo las desigualdades análogas para β_B y β_C y sumando, se obtiene

$$2(\beta_A + \beta_B + \beta_C) \geq a + b + c = 2p. \quad [13]$$

Para que valga el signo igual es necesario que en [12] sea $\beta_A = b - a_1$ y $\beta_A = c - a_2$, lo cual exige que el triángulo se reduzca al caso límite de un triángulo isósceles cuyo ángulo desigual A se reduce a cero. En este caso la longitud de la bisectriz del ángulo A es igual a p y las otras dos son cero; por tanto sale efectivamente la igualdad en [13].

Juntando [11] y [13] se obtiene

$$p \leq \beta_A + \beta_B + \beta_C \leq \sqrt{3} p, \quad [14]$$

que se puede enunciar: *entre todos los triángulos de perímetro dado el triángulo equilátero es el que tiene máxima suma de bisectrices interiores y el caso límite de un triángulo isósceles cuyo ángulo desigual se reduce a cero es el que tiene mínima dicha suma.*

Ocorre preguntar qué ocurrirá si en lugar de las bisectrices interiores se consideran las exteriores. Desde luego, dado el perímetro, la suma de las bisectrices exteriores no puede estar acotada superiormente, pues basta tomar un triángulo equilátero o tan sólo isósceles para obtener una suma infinita.

En cuanto al límite inferior, es fácil ver que es cero. En efecto, consideremos el triángulo aplastado formado por 3 puntos en línea recta; sea C el vértice interno al segmento AB . Las longitudes de las bisectrices exteriores correspondientes a los vértices externos A, B han tendido a cero, puesto que su dirección límite es perpendicular a AB . En cuanto a la bisectriz exterior correspondiente al vértice C , su pie C' tiende al punto conjugado armónico de C respecto al par A, B ; su longitud es, pues, CC' , la cual puede hacerse tan pequeña como se quiera con hacer que C tienda a B .

3. DESIGUALDADES ENTRE EL PERÍMETRO Y LA SUMA DE LAS MEDIANAS. — Observemos que prolongando la mediana $MA = m_a$ de un segmento $MA' = m_a$ resulta un paralelogramo $ABA'C$ (fig. 1), Siendo $AA' = 2m_a$, $AC = b$ y $CA' = c$, se tendrá

$$2m_a \leq b + c. \quad [15]$$

Escribiendo las desigualdades análogas para m_b , m_c y sumando se obtiene, después de dividir por 2,

$$m_a + m_b + m_c \leq 2p. \quad [16]$$

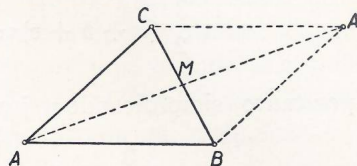


Fig. 1.

Para que valga el signo igual es necesario, según [15], que B y C estén sobre AM , es decir, que los 3 vértices estén en línea recta. En este caso, si suponemos por ejemplo que C es interno al segmento AB y seguimos llamando a, b, c a los lados, es $c = a + b$, y suponiendo que $b > a$, las medianas valen $m_a = b + \frac{a}{2}$, $m_b = a + \frac{b}{2}$, $m_c = b - \frac{c}{2} = \frac{b-a}{2}$. Por tanto, $m_a + m_b + m_c = 2b + a = b + c$ y para que esta suma sea igual a $2p$ es necesario que $a = 0$. Es decir, la igualdad en [16] vale únicamente para el caso límite de un triángulo isósceles cuyo ángulo no igual tiende a cero.

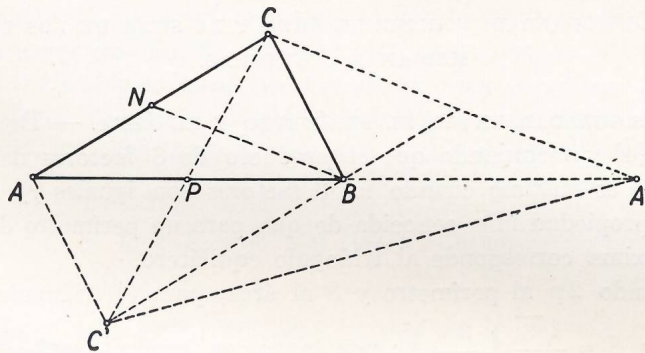


Fig. 2.

Para hallar una acotación inferior de la suma de las medianas, recordemos una construcción muy utilizada en la resolución de problemas de geometría elemental. Si a partir del triángulo ABC trazamos CA' paralela a la mediana $m_b = BN$ y prolongamos la mediana $CP = m_c$ un segmento $PC' = m_c$ (fig. 2) tendremos el

triángulo $CC'A'$ que tiene la propiedad de tener por lados $2m_a$, $2m_b$, $2m_c$ y por medianas $\frac{3}{2}c$, $\frac{3}{2}b$, $\frac{3}{2}a$. Aplicando a este nuevo triángulo la desigualdad [16] se tiene

$$\frac{3}{2}(a + b + c) \leq 2(m_a + m_b + m_c), \quad [17]$$

y por tanto, simplificando y juntando con [15],

$$\frac{3}{2}p \leq m_a + m_b + m_c \leq 2p. \quad [18]$$

La igualdad $m_a + m_b + m_c = \frac{3}{2}p$, según lo dicho para la desigualdad [16], valdrá únicamente cuando el triángulo $CC'A'$ se reduzca al caso límite de un triángulo isósceles cuyo ángulo desigual tiende a cero, lo cual significa que el triángulo ABC se reduce al caso límite de un triángulo isósceles en que el ángulo desigual tiende a 180° .

En resumen: *entre todos los triángulos de perímetro dado la máxima suma de medianas corresponde al caso límite de un triángulo isósceles cuyo ángulo desigual tiende a cero, y la mínima suma de medianas al caso límite de un triángulo isósceles cuyo ángulo desigual tiende a 180° .*

II. — DESIGUALDADES ENTRE EL ÁREA Y LA SUMA DE LOS LADOS, MEDIANAS O ALTURAS.

1. DESIGUALDAD ENTRE EL PERÍMETRO Y EL ÁREA. — De la expresión [4] y recordando que el producto de 3 factores de suma constante es máximo cuando los 3 factores son iguales ⁽¹⁾, se deduce la propiedad bien conocida de que para un perímetro dado el área máxima corresponde al triángulo equilátero.

Llamando $2p$ al perímetro y S al área, para el triángulo equilátero es $S = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{2p}{3} \right)^2$; por tanto, en general, será

$$\frac{\sqrt{3}}{36} (a + b + c)^2 \geq S, \quad [19]$$

valiendo el signo = únicamente para el triángulo equilátero.

⁽¹⁾ Ver, por ejemplo, *Mathematicae Notae*, Año 1º, pág. 153

2. DESIGUALDAD ENTRE LA SUMA DE LAS MEDIANAS Y EL ÁREA. —

En la construcción indicada en la fig. 2, el triángulo $CC'A'$, cuyos lados son $2m_a$, $2m_b$, $2m_c$, tiene por área $3S$, puesto que, en efecto, el triángulo primitivo ABC es equivalente a cada uno de los triángulos BCC' , $BC'A'$, y BCA' . Por tanto, dada la suma de las medianas del triángulo ABC y por tanto el perímetro del triángulo $CC'A'$, el área de este último $3S$ será máxima cuando sea equilátero, o sea, cuando $m_a = m_b = m_c$. Luego el área S será también máxima para $m_a = m_b = m_c$, o sea, cuando el triángulo ABC sea equilátero. Es decir: *dada la suma de las medianas, el triángulo de mayor área es el equilátero.*

Para el triángulo equilátero se calcula fácilmente que es $S = \frac{\sqrt{3}}{3} m_a^2$.

Por tanto, en general será

$$\frac{\sqrt{3}}{27} (m_a + m_b + m_c)^2 \geq S, \quad [20]$$

donde el signo $=$ vale únicamente para el triángulo equilátero.

3. CASO DE DAR LA SUMA DE LAS ALTURAS. — Dado el perímetro o bien dada la suma de las medianas hemos visto que el área S quedaba acotada; ¿ocurrirá lo mismo al dar la suma de las alturas? Vamos a ver que no. Se verifica: *para una suma de alturas dada, el área del triángulo puede ser tan grande como se quiera.*

En efecto, tomemos un triángulo isósceles cuyo ángulo desigual valga $\pi - \theta$, y los lados iguales sean a . La suma de las 3 alturas vale

$$h_a + h_b + h_c = 2a \operatorname{sen} \theta + a \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$$

y, según esto, el área S se puede escribir en la forma

$$S = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{sen} \theta = \frac{(h_a + h_b + h_c)^2 \operatorname{sen} \theta}{2 \left(2 \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right)^2}.$$

Esta expresión, manteniendo fija la suma $h_a + h_b + h_c$, tiende a infinito cuando θ tiende a cero.

III. — OTRAS DESIGUALDADES.

1. DESIGUALDAD ENTRE LA SUMA DE LOS CUADRADOS DE LAS ALTURAS Y LA SUMA DE LOS CUADRADOS DE LOS LADOS. — Queremos demostrar que en todo triángulo se verifica

$$\frac{3}{4} (a^2 + b^2 + c^2) \geq h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 \quad [21]$$

valiendo el signo = únicamente para el triángulo equilátero.

Sea AH la altura h_a y pongamos $a_1 = HB$, $a_2 = HC$ tomados ambos segmentos en valor absoluto. Será

$$h_a^2 = b^2 - a_2^2, \quad h_a^2 = c^2 - a_1^2$$

de donde

$$2 h_a^2 = b^2 + c^2 - (a_1^2 + a_2^2). \quad [22]$$

Si el punto H cae dentro del lado BC , tengamos en cuenta la desigualdad

$$a_1^2 + a_2^2 \geq \frac{1}{2} (a_1 + a_2)^2 = \frac{1}{2} a^2 \quad [23]$$

que equivale a $(a_1 - a_2)^2 \geq 0$ y en la cual, por tanto, solamente vale el signo igual para el caso de ser $a_1 = a_2$.

Si H cae fuera del lado BC , con mayor razón

$$a_1^2 + a_2^2 \geq \frac{1}{2} (a_1 - a_2)^2 = \frac{1}{2} a^2. \quad [24]$$

En ambos casos, de [22] se deduce

$$2 h_a^2 \leq b^2 + c^2 - \frac{1}{2} a^2.$$

Escribiendo las desigualdades análogas para h_b , h_c y sumando se obtiene la desigualdad [21] que queríamos demostrar. Según lo dicho, el signo = valdrá únicamente cuando los pies de las alturas dividan a los 3 lados en partes iguales, lo cual exige que el triángulo sea equilátero.

2. DESIGUALDAD ENTRE EL ÁREA Y LA SUMA DE LOS CUADRADOS DE LOS LADOS O DE LAS MEDIANAS. — Queremos demostrar las desigualdades

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3} S \quad [25]$$

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \geq 3\sqrt{3} S, \quad [26]$$

para las cuales el signo = vale únicamente para el triángulo equilátero.

La primera es una desigualdad muy conocida llamada de WEITZENBOCK ⁽¹⁾. Ambas desigualdades se deducen inmediatamente de [19] y [20], respectivamente, observando que la desigualdad [1], poniendo $x = \xi^2$, $y = \eta^2$, $z = \zeta^2$ se puede escribir

$$(\xi + \eta + \zeta)^2 \leq 3(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2), \quad [27]$$

valiendo el signo = únicamente cuando $\xi = \eta = \zeta$.

Aplicando [27] a [19] resulta [25] y aplicándola a [20] resulta [26].

LUIS A. SANTALÓ.

⁽¹⁾ WEITZENBOCK: « Ueber eine Ungleichung in der Dreiecksgeometrie », *Mathematische Zeitschrift*, 5 (1919). Para una generalización de esta desigualdad ver: D. PADOE: « An inequality for two triangles », *Proc. Cambridge Philosophical Soc.*, Vol. 38 (1942).

LOS ORIGENES DE LA TEORIA ALGORITMICA DE WRONSKI DENTRO DE LA DOCTRINA PITAGORICA

Los señores P. CAPELLI y M. COTLAR nos han enviado, para *Mathematicæ Notæ* un artículo, cuyo título encabeza el presente y que a continuación vamos a publicar; pero no sin una presentación que creemos necesaria para resumir un intercambio de ideas que, con tal oportunidad tuvo que pasar entre nosotros y quizás también para aclarar algunos detalles que en el artículo no parecen completos.

Primero, una rápida presentación de WRONSKI que lamentamos no poder hacer totalmente satisfactoria por falta de recursos bibliográficos.

HOËNÉ WRONSKI nació en Posen el año 1778; a la edad de 16 años, oficial de artillería bajo el mando de KOSCIUSKO fué hecho prisionero por los rusos en la batalla de Macieiowicz el 10 de octubre de 1794 y poco después fué nombrado en la misma armada rusa teniente-coronel; pero abandonó el ejército en 1797. Pasó la máxima parte de su vida en Francia, donde falleció a Neuilly el 9 de agosto de 1853. Nuestros estudiantes conocen principalmente el nombre de WRONSKI por el de wronskiano que se acostumbra a dar a cierto determinante funcional y tenemos que agregar que probablemente WRONSKI no está recordado por mucho más también para la mayoría de los matemáticos a pesar de lo mucho que ha escrito. La razón está en la singularidad de su obra como lo vamos a indicar.

WRONSKI consideró en efecto la matemática como un apéndice, posiblemente el que mayormente le interesaba, de una más amplia dirección filosófica, por la cual él pregonaba una reforma general de la ciencia, ofreciendo como modelo una reforma de la matemática que él desarrolló en detalle en varias publicaciones. Pero la lectura de las obras matemáticas de WRONSKI es particularmente difícil, principalmente porque ellas no obedecen a las normas de rigor lógico que caracterizan la matemáticas y que han venido a

constituir siempre más una exigencia esencial sin la cual el entenderse en una ciencia tan abstracta resultaría imposible.

Para aclarar esta observación es bueno tomar en consideración primero la *Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissants, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies*, que LAGRANGE publicó en primera edición el mismo año 1797 ⁽¹⁾ en que WRONSKI, joven todavía de 19 años, abandonó la carrera militar para volverse a los estudios. Obra fundamental, que con su título dió el nombre todavía conserva una rama del análisis; pero este título lo hemos querido reproducir por completo en su forma, extensa fuera de costumbre, porque por este exceso de detalle y por la autoridad del autor, expresa por sí solo las preocupaciones científicas del tiempo; el infinitamente grande y el infinitamente pequeño, no todavía anclados sólidamente a la noción del límite, esta misma noción, con la de fluxión, todavía ligadas más a intuiciones cinemáticas que a una intuición independiente del sentido numérico, chocaba con el positivismo, algún tanto ultrancista de la Enciclopedia y con las primeras preocupaciones logicistas. Reducir el cálculo diferencial al análisis algebraico, independientemente de la noción de límite, es para nosotros un absurdo; LAGRANGE lo consigue con limitar la noción de función a las representables por series de potencias; con una demostración no demasiado rigurosa, LAGRANGE establece que, para valores genéricos de la variable tales potencias tienen que ser de exponente entero, luego las series no difieren

THÉORIE
DES
FONCTIONS ANALYTIQUES,

CONTENANT

Les Principes du Calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissants, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies

PAR J. L. LAGRANGE, de l'Institut des Sciences, Lettres et Arts, et du Bureau des Longitudes; Membre du Sénat-Conservateur, Grand-Officier de la Légion-d'Honneur, et Comte de l'Empire.

NOUVELLE ÉDITION,

revue et augmentée par l'Auteur.

PARIS,

M^{re} V^e COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n^o 57.

1813.

(1) En la figura de al lado está reproducida la contratapa de la segunda edición de 1813, reducida en la razón media.

Pero es evidente que nada positivamente matemático puede esperarse de tan grande generalidad; por el simbolismo complicado por la forma muy frecuentemente polémica, la lectura de las obras matemáticas de WRONSKI resulta extremadamente difícil y cansadora, pero nos deja la impresión de que al repetir en términos generales procedimientos conocidos y muchas veces elementales, al proyectar resoluciones aproximadas sin determinar la aproximación o la convergencia, al pretender haber dado la clave para la resolución de todos los problemas matemáticos pasados y futuros, al pretender, detalle característico, que por calcular LEVERRIER la posición del planeta perturbador del movimiento de Urano habría tenido cuanto menos que citarle a él y a su « reforma de la mecánica celeste », todo se reduzca a un juego de imaginación. Sin ninguna duda podríamos encontrar en WRONSKI ideas identificables con los desarrollos más modernos, sumación de series divergentes, reducción de un problema particular por ascenso a otro más general por la introducción de parámetros y ¿porqué no? desarrollos en series de funciones ortogonales que muy bien pueden ser comprendidos dentro de la *lex suprema*; pero todo eso se encuentra también para casos concretos en EULER y otros fundadores del cálculo infinitesimal del siglo anterior y la generalización, para merecer aprecio, tenía que estar acompañada por la determinación de los límites de su aplicación. La cultura matemática de WRONSKI, en cuanto es de conocimiento, no puede ser puesta en duda; particularmente puede citarse la generalidad con la cual trata sistemas lineales y determinantes y trabaja con un número indeterminado de términos y de variables; pero su obra queda inutilizada por la ilusión de una ciencia superior. Desde 1810, WRONSKI presenta al Instituto de Francia una Memoria proponiendo un propio proyecto de *Reforma de la Matemática*, a la cual LAGRANGE y LACROIX, encargados de examinarla hicieron el comentario siguiente: « Mais ce qui a frappé vos commissaires dans le Mémoire de M. WRONSKI, c'est qu'il tire de sa formule (*la lex suprema*) toutes celles que l'on connaît pour le développement des fonctions — c'est à dire toutes les mathématiques modernes — et qu'elles n'en sont que des cas très particuliers ». Y nos parece que WRONSKI no haya entendido el contenido medio irónico que se transparenta en el elogio, ya que en sus obras posteriores lo reproduce repetidamente, a pesar de que su memoria fuera enviada a los archivos.

No es en efecto propiamente de WRONSKI matemático, que, como verá el lector, van a hablarle en el artículo que sigue los señores CAPELLI y COTLAR (*), sino de una dirección de pensamiento a la cual sus obras están inspiradas. Lo que antes dijimos, y particularmente el título del último libro: *Mesianismo o reforma absoluta de la sabiduría humana; particularmente: reforma de las matemáticas, como prototipo de la realización final de las ciencias y reforma de la filosofía como base de la realización final de la religión*, deja entender bastante claramente la naturaleza de este pensamiento. WRONSKI se opone al lema fundamental de la ciencia positiva, que afirma la incapacidad en el hombre para conocer la esencia de las cosas; se opone en particular a la afirmación de que el fundamento esencial de nuestros conocimientos sea lo experimental. Si tuviésemos que decir un pensamiento nuestro sobre el asunto, sería este primeramente, que con demasiada facilidad cuestiones de esta naturaleza involucren equivocaciones debidas al

(*) Para quien, sin embargo, deseara informarse mayormente de dicha obra matemática, indicaremos todavía que además de los volúmenes antiguos editados viviendo el autor, una reproducción fué editada por la Casa Hermann de París, no hace todavía 20 años, y una serie de artículos fué publicada en los años 1881-83 en el *Journal de Mathématiques* (LIOUVILLE, dirigido en este tiempo por RÉSAI) por West, con la intención declarada de hacer conocer a los matemáticos esos métodos de cálculo, pero, según nos parece, sin progreso notable en precisión y claridad.

Para completar estas noticias, reproducimos del volumen *Messianisme ou réforme absolue du savoir humain*, del cual hemos hablado anteriormente, la nómina siguiente de obras científicas: *Philosophie des Mathématiques* (1881) — *Résolution générale des équations de tous les degrés* (1812) — *Réfutation de la théorie des fonctions analytiques de Lagrange* (1812) — *Philosophie de l'infini* (1814) — *Philosophie de la technie algorithmique, première section, contenant la loi suprême des Mathématiques* (1815) — *Idem, seconde section, contenant les lois des séries, comme préparation à la Réforme des Mathématiques* (1816-17) — *Critique de la théorie des fonctions génératrices de Laplace, contenant, pour le cas fondamental, l'intégration générale des équations aux différences et aux différentielles totales et partielles de tous les ordres* (1819) — *Introduction à un cours de Mathématiques* (en anglais), *offrant un aperçu de la présente réforme des Mathématiques* (1821) — *Canon de Logarithmes, où est donnée la solution des équations de cinquième degré* (1827) — *Loi téléologique du Hasard, comme base de la réforme du calcul des Probabilités* (1833) — *Nouveau système de machines à vapeur, contenant les nouvelles lois physiques* (1834 et 1835). — Una nota advierte que todas estas obras habrían sido destruídas en Francia, por orden, parece de la Academia de ciencias, con excepción de la última. No tenemos una lista de las obras filosóficas, entre las cuales habría que citar, además del « Mesianismo », una anterior, *Prolegomènes du Messianisme*.

sentido indeterminado de las palabras. ¿Cuál sentido puede tener la esencia de las cosas, que permita aplicarle el conocimiento? ¿Y qué significa conocer? Si conocer se refiere solamente a lo que está fuera de nosotros, no hay otro conocimiento sino experimental; y esto no quiere decir que solo ese conocimiento experimental pueda guiar las acciones del hombre. Las razones íntimas que pueden influenciar la dirección de una investigación científica no son discutibles ni tienen importancia con respecto a esa investigación (pueden tenerla con respecto al investigador); pero la investigación y sus resultados sólo dependen de lo experimental (por lo menos si éste se interpreta en sentido bastante amplio como para comprender todos los elementos propios — si necesario, lógicos o subjetivos — de la cuestión investigada). Convicciones extralógicas pueden influenciar a los postulados de una investigación matemática o la importancia que se le atribuye, pero no a los métodos ni las conclusiones. Y el ejemplo de WRONSKI, después de lo que hemos dicho, nos parece más bien negativo que positivo. Por estas razones, sin dejar de coincidir con nuestros amigos en muchas de sus consideraciones, estamos menos convencidos por todo lo que se refiere a dirigirse a la autoridad de maestros, y quisiéramos que la citación de nombres como KEPLER, CANTOR, MINKOWSKI, KLEIN, DEDEKIND u otros, la misma citación de PITÁGORAS, fuese considerada por el lector más bien como una invitación para leer y estudiar que para aceptar la autoridad.

Tenemos que agregar, para terminar, una breve observación sobre cierto juego de números y de palabras. Es la siguiente: es cosa indiscutible que está connaturado en el ánimo del hombre lo de razonar por opuestos; uno de los principios fundamentales de la lógica, el llamado principio de contradicción, dice que cualquier cosa « es o no es »; el dos está luego arraigado muy bajo en las raíces de todo pensamiento; y el tres también, por consecuencia, porque si hay el ser y el no ser, hay también el concepto de uno y otro; si hay las partes hay la separación entre ellas; cierto es que el dos y el tres han adquirido para muchas filosofías el significado de orden, simetría, perfección; pero en el crescendo de estas palabras ya está un peligro; orden y simetría concedemos; pero ¿qué es la perfección? Perfección formal, vaya como guste; mas, la perfección sustancial, depende exclusivamente del pensamiento recto dirigido hacia el objeto y no obedece a normas de simetría

o de analogía; la analogía es instrumento heurístico, es un auxilio para la formación de conceptos como lo es la oposición, pero no es norma de las cosas. Peor cuando el orden formal degenera en



símbolo o en fetichismo antropomórfico; lo saben los conductores de masas. Y hay contradicción entre el propósito de levantarse hacia la esencia de las cosas y el pintarlas con colores demasiado naturalistas.

De lo poco que pudimos leer de las obras de WRONSKI no hemos podido inferir exactamente la importancia que él diera a los números en el sentido que se llama pitagórico ⁽¹⁾; cierto es que *las realidades fundamentales del hombre*, según el mesianismo, son en número de siete y los *problemas* que estas realidades imponen son veintiuno; y siete son las leyes fundamentales de la mecánica. Confirma por otro lado la importancia simbólica del número tres el completamiento a tres de las leyes fundamentales de la reforma de la matemática que puede leerse en griego dentro del zodiaco representado en la contratapa del «Mesianismo» (ver el elisé). Para formar este tres se agrega a la *ley suprema* y al *problema universal*, que hemos recordado anteriormente, una *ley teleológica* representada por una congruencia aritmética cuya trascendencia no hemos sabido interpretar.

B. LEVI.

(1) De eso nos asegura sin embargo el Sr. COTLAR, más profundo conocedor de la obra de WRONSKI.

« ... Algunos de los acordes de la música de esferas de PITÁGORAS y KEPLER han llegado a nuestros oídos ».

WEIL: *Espacio, Tiempo, Materia*.

INTRODUCCIÓN

Al cotejar la obra de HOËNÉ WRONSKI con lo que de ella ha trascendido a la generalidad de los estudiosos, nos encontramos con un fenómeno frecuente: lo que la gran mayoría conoce, es lo que WRONSKI mismo consideraba de importancia secundaria en comparación con lo que él creía ser sus trabajos fundamentales. Así todo estudiante sabe del wronskiano, pero muy pocos han oído hablar del gran sistema filosófico - matemático de WRONSKI, del cual LAGRANGE haya dicho que era la concentración de los conocimientos de la época. WRONSKI como los grandes pensadores de la antigüedad daba menos importancia a los resultados concretos, que tanto valoramos hoy, que a la idea filosófica que ha conducido a dicho resultado. Esta es la característica principal de los pitagóricos para quienes los resultados matemáticos eran tan solo los símbolos de los cuales se servían para expresar sus ideas metafísicas. La influencia de algunos filósofos positivistas del siglo pasado ha tergiversado en tal forma el pitagorismo que aún hoy hay muchos que no se detienen a considerarlo con la seriedad debida. Como en la obra de WRONSKI la doctrina pitagórica, de la cual él era conocedor profundo, aparece en toda su pureza, quizás la exposición de las raíces de las ideas de WRONSKI dentro del pitagorismo mismo, contribuya a destruir algunos de los prejuicios corrientes arraigados sobre la metafísica de los pitagóricos.

Frecuentemente, en textos sobre historia de la aritmética, se lee que debemos a los pitagóricos las bases de la matemática y de la música; mas a continuación el autor refiere como mera curiosidad, que los pitagóricos, neo-platónicos, etc., daban a sus descubrimientos una interpretación mística que un moderno hombre de ciencia no puede repetir sin sonreírse. Se comenta con jocosidad, que por ejemplo DIOFANTOS y NICOMACOS dedicaban sus mayores esfuerzos a obras que llevaban por título: « Discusiones aritméticas sobre

Dios y las cosas divinas », que PITÁGORAS enseñaba que 4 simboliza al Dios manifestado, etc.

Mas no nos apresuremos. ¿Es posible tomar de una obra el fruto que nos parece provechoso y desdeñar la idea en que se ha inspirado el autor? Si estas ideas metafísicas llevaron a descubrimientos concretos de gran valor, en tantas cabezas diferentes, no han de ser del todo despreciables. Estas interpretaciones místicas nos parecen a primera vista extravagantes porque desconocemos el simbolismo del lenguaje en que están dichas. Nos choea el título « discusiones aritméticas sobre cosas divinas » pero consideramos muy natural la memoria que trata sobre « propiedades de una pseudo-integral definida por un proceso transfinito en un espacio de infinitas dimensiones imaginarias generalizadas ».

Expondremos a continuación los orígenes de la obra de WRONSKI, con el propósito de poner de relieve dos hechos fundamentales: primero, los pitagóricos no daban a sus descubrimientos matemáticos una interpretación mística, como se cree comúnmente, sino por el contrario los resultados matemáticos eran una interpretación simbólica de las ideas metafísicas abstractas; segundo, los pitagóricos tenían un lenguaje místico propio, así como los matemáticos modernos tienen el suyo; conociendo los principios de este lenguaje esta doctrina mística aparece como un sistema abstracto, que por una parte ayuda a formar un concepto filosófico armonioso de la matemática como conjunto, como síntesis, y por otra orienta la intuición y la mente hacia ideas fecundas y *naturales*, aún dentro de los campos particulares. WRONSKI, conocedor consumado del simbolismo del lenguaje de los pitagóricos, construye su teoría filosófica y de paso encuentra resultados concretos que bastan por sí solos para hacerlo famoso. Su obra filosófica con su profundo sentido universal nos dice que la matemática es algo más que una aglomeración de especulaciones mentales, que su finalidad superior son hondos problemas del espíritu, y que ella es el instrumento más adecuado para expresarlos.

En su libro « Reforma absoluta del saber humano », WRONSKI construye un sistema absoluto de las leyes que rigen todos los procesos mentales de creación; el fundamento de este sistema es el mismo que el de la doctrina pitagórica. Pero como lo indica WRONSKI mismo, tampoco se le debe exclusivamente a PITÁGORAS este sistema, pues él a su vez lo recibió en Egipto, y fué conocido

por los egipcios, hebreos e indos (*). Pero como PITÁGORAS fué su máximo propulsor, es natural referir este sistema a dicho filósofo, cuya influencia sobre casi todos los pensadores del occidente fué enorme (**).

Veremos ahora algunas ideas fundamentales de este sistema de acuerdo al punto de vista de WRONSKI y también de los autores siguientes: FABRE D'OLIVET, SAINT YVES D'ALVEYDRE, BARLET y PAPUS, cuyas ideas sobre el particular concuerdan (***) .

LA CIENCIA DE LA ANTIGÜEDAD Y LA CIENCIA MODERNA

Para delinear la diferencia entre la ciencia de la antigüedad y la moderna, trazaremos un paralelo entre las distintas modalidades de investigación. Hay investigadores que trabajando dentro de un campo determinado utilizan simplemente la técnica de desarrollar o generalizar ideas o cuestiones ya establecidas. El otro polo estaría formado por aquellos que están particularmente dedicados a la síntesis del conocimiento sin distinguir detalles. Finalmente hay quienes armonizan las dos modalidades de la investigación, es decir que, estando en el saber general, se dedican al estudio en un determinado campo. Es interesante observar que los hombres del primer tipo suelen despreocuparse del sentido universal de las cuestiones que estudian, mientras que los segundos se inspiran en ideas de carácter general comunes a todos los conocimientos. Esta división no es absoluta, pues todo hombre de estudio, naturalmente, se siente impulsado hacia la síntesis, pero la distinción subsiste si la entendemos en el sentido de que predomina más una tendencia que la otra.

Los dos tipos de investigación mencionados originan dos corrientes en el desarrollo de la ciencia. La primera deductiva o platónica,

(*) Según indica el eminente sabio francés M.^r A. FRANK en su libro sobre la Kabala (1863) las bases del pitagorismo se encuentran en el antiguo libro hebraico *Sapher Jetsirah*, así como en antiquísimos libros indúes y tibetanos.

(**) Recordemos que KEPLER llegó a sus descubrimientos influenciado por la armonía de esferas de PITÁGORAS, CANTOR se inspiró en la Kabala y en el pitagorismo, así como DEDEKIND en el neoplatonismo; lo mismo recordamos la arifmología de BUGAEW, la monadología de LEIBNIZ, las ideas de MINKOWSKI, etc.

(***) FAVRE D'OLIVET, *Los versos dorados de Pitágoras* (1813), *La lengua hebraica restituída* (1815). SAINT YVES D'ALVEYDRE: *Archeometre*. PAPUS (GERARDO ENCAUSSE): *El método de la ciencia antigua*, *Teoría de números*, *La Kabala*.

va de lo general a lo particular (de lo abstracto a lo concreto) y la segunda, inductiva, va de lo particular a lo general. En el primer caso se parte de leyes generales para aplicarlas a casos cada vez más particulares, mientras que en el segundo se inicia el movimiento en campos particulares y por generalizaciones sucesivas se llega a leyes generales, de tal modo que el comienzo de uno es el final del otro. Cada uno de ellos provoca la existencia del otro; la posesión de un principio general crea la necesidad de aplicarlos a hechos particulares y empieza el descenso hacia la ramificación del conocimiento. A su vez los resultados de las ramas particulares crean la necesidad de unificación y se produce el ascenso a los principios generales.

Aunque esta división existe en cada época, tomadas dos épocas puede aparecer una sintética con respecto a la otra por la mayor o menor manifestación de cualidades expresadas. Desde este punto de vista se nos presenta, panorámicamente, la antigüedad como la expresión del proceso sintético con respecto a la época moderna; agregaremos, además, que los antiguos no concebían la ciencia desvinculada de la moral. Aún siendo igualmente necesarios para el desarrollo de la ciencia los dos métodos indicados, WRONSKI y PITÁGORAS le daban al primero (platónico) el papel de propulsor o activo, mientras que al segundo el papel de plasmador o pasivo, la razón de lo cual se verá más adelante.

En un ejemplo de la vida diaria, PAPUS nos demuestra con claridad la diferencia esencial entre las dos modalidades antes señaladas. Dice este autor:

« Veamos la forma en la cual los modernos tratan los fenómenos naturales, para mejor conocer, por oposición, el método antiguo. ¿Qué diría usted de un hombre que os describiera un libro en esta forma?: El libro que me habéis dado para estudiar está colocado sobre la chimenea a dos metros y cuarenta y nueve centímetros de donde yo estoy, pesa trescientos cuarenta y cinco gramos y ocho decigramos, está formado de ciento cuarenta y dos pequeñas hojas de papel sobre las cuales existen ciento y dieciocho mil doscientos ochenta caracteres de imprenta que han necesitado noventa gramos de tinta negra. He aquí la descripción experimental del fenómeno. Si este ejemplo os choca abrid los libros de ciencia moderna y veréis si ellos no contestan exactamente, como método, a la descripción del Sol o Saturno por el astrónomo que describe el

sitio, el peso, el volumen y la densidad de los astros, o la descripción del espectro del Sol por el físico que cuenta el número de rayas. Lo que os interesa en el libro no es el lado material-físico, sino lo que el autor ha querido expresar por éstos signos, lo que hay escondido bajo sus formas, el lado metafísico por así decir. Volvamos a tomar aquel libro impreso y notamos que hay dos formas de considerarlo: por lo que vemos, los caracteres, el papel, la tinta, es decir por los signos materiales que no son otra cosa sino la representación de una cosa más elevada; y por esta cosa que no podemos ver físicamente: las ideas del autor. Lo que vemos es la manifestación de lo que no vemos. *Lo visible es manifestación de lo invisible*. Este principio, verdadero para este fenómeno particular, lo es también para todos los otros de la naturaleza. Vemos más claramente la diferencia fundamental entre la ciencia de los antiguos y la ciencia de los modernos. La primera se ocupa de lo visible solamente para descubrir lo invisible que representa. La segunda se ocupa del fenómeno por si mismo sin inquietarle sus relaciones metafísicas ».

Este ejemplo nos permite llegar de un modo natural a los fundamentos de la doctrina pitagórica, pues el fundamento de ella es el siguiente principio: « *Lo visible es manifestación de lo invisible* » y la finalidad esencial del pensador es determinar lo invisible conociendo lo visible, « el noumeno conociendo el fenómeno ».

Este principio, en el lenguaje matemático expresa simplemente que toda propiedad concreta (visible) tiene su origen en una teoría general más abstracta (invisible) que abarca, además, otras propiedades concretas. El mencionado principio fundamental, que hemos visto particularmente en el ejemplo de PAPUS, guió a los pitagóricos en todas las cuestiones de la ciencia. Así vemos que éstos consideraban que las propiedades concretas matemáticas eran manifestaciones o reflejos de otras propiedades más generales, metafísicas, y hacían preceder el estudio y comprensión de estas últimas al de aquéllas.

Y, si lo visible es manifestación de lo invisible, ¿cuál será el vínculo que permite pasar de uno a otro? Ese vínculo es la *analogía* que los antiguos utilizaban como un método general de investigación y que, como sabemos, lo es también de la matemática.

LA ANALOGÍA

En cualquier campo de la matemática que consideremos se empieza por el estudio de cuestiones concretas y aparentemente diversas; muy pronto se reemplazan los tipos individuales por grupos, cada uno de los cuales se distingue de los otros por las relaciones que existen entre sus componentes y que ya eran el verdadero motivo del estudio de las cuestiones concretas. Un análisis más profundo nos llevará a reemplazar, a su vez, estos grupos, por otros más amplios y en número cada vez menor, mas siempre con la característica de que en cada grupo ya se vislumbraba la relación que permitió formar grupos más amplios. Así la resolución de los problemas aislados da origen a métodos y los diversos métodos, a su vez se agrupan en principios más generales, etc.

Dicho de otro modo: al estudiar un campo particular se encuentran propiedades que parecen deberse exclusivamente a su estructura particular, mas luego resultan ser, en realidad la manifestación en el mismo de una propiedad más abstracta, la que también se manifiesta en otros campos particulares de acuerdo a la naturaleza de los mismos. La aparente diversidad de propiedades se debe a que las mismas no se ven desde el punto de vista abstracto que las abarca. Por ejemplo: Tomemos el caso del teorema de PICARD de la teoría de las funciones, que a primera vista parece una propiedad exclusiva de las funciones holomorfas de cierto tipo particular; sin embargo, profundizando resulta tener su origen en la teoría abstracta de los espacios compactos que también es la causa de propiedades en otros campos como en los sistemas ortogonales, cálculo de variaciones, etc.; teoremas fundamentales de la teoría de funciones o ecuaciones diferenciales tienen su origen en propiedades topológicas generales; el problema tan concreto como la resolución de ecuaciones algebraicas se reduce al concepto tan abstracto de isomorfismo de cuerpos. ¿Cómo se expresarían estos hechos en el lenguaje pitagórico? Que las primeras cuestiones concretas serían lo visible y el principio abstracto que se manifiesta diversamente en ellas lo invisible. Al descubrir este principio común abstracto se ha utilizado el método de *Analogía*. Podemos, pues, decir con POINCARÉ que lo verdaderamente esencial es que se establezcan relaciones entre hechos aparentemente leja-

nos. Esta es tarea de los genios a quienes otros hombres preparan los detalles en campos particulares.

Por este proceso de abstracción llegaremos seguramente a pocos principios que forman el fundamento abstracto de toda la ciencia matemática y de aquí resulta naturalmente que este fundamento está en todas las cuestiones particulares y que todas ellas están en él, en potencia. Esto equivale a decir que hay un principio primario que, a medida que se sumerge en capas más concretas, se va diferenciando en una diversidad infinita. Esto está expresado en las teorías de los espacios abstractos de los cuales citamos la teoría de estructuras que llega a abarcar en pocos principios los fundamentos de la teoría de límites, de la teoría de grupos, probabilidades, álgebra, topología, teoría de cuantas, geometría, etc.

Los pitagóricos llegaban más lejos al sostener que esos principios fundamentales de las matemáticas no solo sirven para ésta, sino también para la música, la moral y demás conocimientos, por que consideraban que los principios primitivos, primarios de toda ciencia ya dejan de pertenecer a esta ciencia particular para pasar al dominio de la metafísica. En efecto, a medida que abstraemos en cada campo particular, matemática, física, música, etc., observamos que se produce un contacto entre ellos, lo que equivale en esencia a decir que se van vinculando; vínculo que crece a medida que aumenta la abstracción, llegando en el límite a un punto común que es el principio fundamental ya señalado. Este concepto universal de la Analogía los pitagóricos lo enunciaban en la siguiente forma: « El *Todo* está en todas las cosas y todas las cosas están en el *Todo*; por eso la Naturaleza está construída según un tipo primitivo (*arquetipo*) que se encuentra repetido sinó en forma, en esencia en todas sus partes », principio que ya fué enunciado por HERMES hace más de 5000 años. KLEIN expresa en lenguaje moderno los mismos conceptos al decir que toda la matemática se reduce en última esencia al estudio de invariantes o de homeomorfismos, es decir al estudio de las *correspondencias* que dejan *invariantes* ciertas propiedades. Así, pues, el proceso analógico consiste en llevar los conceptos a niveles cada vez más abstractos, hasta llegar a uno primario, denominado fundamental, el que necesariamente nos descubre la relación existente entre dos cuestiones aparentemente lejanas. Esto es lo que los pitagóricos y neo-platónicos llamaban arquetipo, de modo que todas las cuestiones parti-

culares están formadas en su esencia de acuerdo con un arquetipo.

Como todas las cosas, la Analogía puede ser considerada bajo los siguientes tres aspectos fundamentales.

a) En su aspecto inferior (como principio móvil-materia), la analogía es una *orientación* dentro de nuevos campos. Cuando entramos en un campo nuevo, nos apoyamos en lo que ya nos es conocido en campos anteriores, y tratamos de buscar si no se puede encontrar las antiguas propiedades conocidas pero disfrazadas bajo una forma distinta, propia del campo nuevo. Cuando queremos desarrollar la teoría de números para los enteros generales, buscamos la analogía con la teoría de los enteros ordinarios; al desarrollar la teoría de las series de DIRICHLET, nos basamos en la analogía con la serie potencial; la teoría de las integrales infinitas se desarrolla por analogía con las series; la teoría de funciones enteras por analogía a la de polinomios; los puntos singulares con las rectas de JULIA; las ecuaciones diferenciales lineales con las algebraicas. No seguiremos con ejemplos porque tendríamos que citar la matemática íntegra y quisiéramos que se nos indicara un campo en que la investigación no se haya hecho por analogía con otros ya conocidos, a menos que el autor lo hiciera sin decirlo explícitamente.

b) En su aspecto superior (principio director, espíritu), la analogía es la finalidad a la cual aspira la ciencia: *La Unidad*. Todo desde lo más ínfimo a lo más grande, de lo más grosero a lo más sutil, todo tiende consciente o inconscientemente a la *unión*, a la *unidad*. La abstracción, no es acaso sino un proceso de concentración sobre las propiedades comunes a entes cada vez más ajenos, lejanos, diversos; y así — por medio de este proceso de hallar la esencia que es común a todo — establece su unión, su parentesco. La Ciencia, Arte y Religión, obedecen a esta misma Ley Suprema, la Unica Real y Eterna. Cuando el científico después de haber hecho el Análisis y pasando por los detalles ha hecho también la Síntesis, el conjunto de estos Análisis y Síntesis produce en él siempre la misma sensación: la de Analogía, de Unidad. Se da cuenta que siempre son los mismos móviles, los mismos principios, los que dan belleza, vida y desarrollo a una teoría o un campo particular; una misma causa (o como dice RICARDO WAGNER *leit-motiv*) va sumergiéndose en distintas capas particulares, tomando formas distintas, mas quedando en esencia siempre la misma. Para

el caso particular de la matemática esto está muy bien expresado por estas palabras de E. H. MOORE: « La existencia de analogías entre los rasgos principales de diversas teorías implica la existencia de una teoría general de la cual estas teorías particulares no son más que ramas y que las *unifica* en lo que se refiere a su *esencia* ». Descubrir la unidad subyacente en manifestaciones aparentemente diferentes en forma, es descubrir la armonía, la esencia, el invisible que actúa sobre lo visible, es realizar el Ideal máximo: la búsqueda de la Unidad, de Dios o como quiera llamárselo.

c) En su tercer aspecto la Analogía es un método, un instrumento de enlace (principio motor). Cuando se ha compenetrado, consciente o inconscientemente de la existencia de la ley de Analogía, se la busca entonces *conscientemente* y se hace de ella un método de descubrimiento y de exploración de nuevas regiones. Es este el aspecto que interesa más al matemático y está expresado en la frase bien conocida de POINCARÉ: « la matemática es el arte de dar el mismo nombre a cosas distintas. Es necesario entenderse. Es conveniente que estas cosas, diferentes por la materia, sean semejantes en la forma, que ellas puedan, por decir así, ser ajustadas a un mismo molde. Cuando el lenguaje haya sido bien elegido se ve que todas las demostraciones hechas para un objeto conocido se aplican inmediatamente a muchos objetos nuevos, no hay nada que cambiar, ni siquiera las palabras, porque los nombres son los mismos ». FRÉCHET comenta así este pasaje en su libro sobre los Espacios Abstractos: « Así nació por ejemplo el cálculo vectorial. Después de haber desarrollado de una forma independiente las teorías de fuerzas, de cuplas, de velocidades, de rotaciones, de torbellinos, etc., se ha apercibido que por un cierto número de proposiciones, los mismos razonamientos se repiten, pero sobre entidades diferentes... Reteniendo de estas entidades solamente sus *atributos comunes*, se constituye la noción de vector y la teoría correspondiente. LAPLACE expresa una idea análoga en estos términos: « La comparación de los métodos sirve a aclararlos mutuamente, y lo que ellos *tienen en común encierra frecuentemente su verdad metafísica* ». Y nosotros agregaremos que lo más maravilloso en los espacios abstractos es el *hecho de que exista* la unidad entre los campos más diferentes posibles en apariencia.

Resumiendo: Cuando el hombre de ciencia después de un proceso de análisis y otro de síntesis llega a la conclusión de que la

construcción del átomo (microcosmo) es la misma que la de un sistema solar (macrocosmo); cuando del estudio del desarrollo del embrión se deducen las propiedades en el hombre; cuando el matemático se da cuenta de que una misma teoría matemática se manifiesta en la Astronomía, en la Electricidad, en la Mecánica, en la Óptica, en la Química, en la Probabilidad, en la vida diaria y en muchísimos otros campos aparentemente distintos; cuando el físico llega a vislumbrar la profunda unidad existente en la Mecánica, Electricidad, Óptica, entonces estamos delante de la Analogía: es entonces cuando también *el alma del investigador toma parte* en la investigación. Entonces es que el científico se llena de mayor admiración, entusiasmo y veneración delante de la Maravilla del Universo y empieza a vislumbrar la Unidad existente en el Universo, el *origen común* de todas las cosas, la existencia de una Causa Suprema.

Y es justamente en los jóvenes que hay que despertar *antes que todo* este entusiasmo, este fuego sagrado, y así abrirles las puertas de la Intuición, del sentido de la belleza, llevarlos a saber experimentar el éxtasis de la ciencia pura y desinteresada. Son estas cualidades que contribuyen más a formar pensadores, y verdaderos investigadores.

EL TERNARIO

Como ya dijimos lo que distingue a los antiguos es que les interesaban más que los resultados concretos, el proceso por el cual se ha llegado a los mismos, es decir el « proceso de creación » en general y matemático en particular. En esta búsqueda ellos llegaron a su origen que es común, en virtud de la ley de analogía, a todas las creaciones particulares. Este origen del proceso de creación lo llamaron Ley del Ternario y consiste en lo siguiente:

Al observar los fenómenos de creación en la naturaleza, vemos que siempre un principio activo (de proyección) fecunda a otro pasivo (de absorción), siendo el producto la neutralización de ambos que participa de las cualidades de los dos. A la fecundación le asociamos la idea de un acto discontinuo, a la germinación del proceso continuo de devenir, de crecer. Este proceso natural de creación los pitagóricos lo expresaban utilizando los números, simbolizando con el número 1 el principio activo que también deno-

minaban genéricamente Voluntad, con el número 2 el principio pasivo que denominaban Amor, el fruto de los anteriores con el número 3 que denominaban Sabiduría. La razón de elegir el número 1 para simbolizar el primer principio en lugar de otro cualquiera, obedece seguramente al hecho de que éste es el que origina la formación de los restantes números y precisamente simboliza la unidad a la cual ellos aspiraban (*).

De modo que la ley del ternario la expresaban 1, 2, 3 ó Voluntad-Amor-Sabiduría, y los consideraban como los tres atributos *primitivos* (por lo que hemos dicho antes) de la divinidad creadora. En este Ternario primitivo la voluntad y el amor son los dos polos opuestos: la Voluntad es la representación abstracta de la fecundación, del estado potencial, del padre, cuya manifestación tiene carácter discontinuo; el Amor es la representación abstracta de la germinación, del crecimiento, del estado de devenir, de la madre, cuya manifestación tiene carácter continuo. La oposición de estos dos polos opuestos produce la Sabiduría o hijo que participa de los atributos de ambos. Este es el arquetipo de la creación abstracta y, por ley de analogía, toda otra creación particular se efectúa a imagen de este arquetipo.

(Se observa la influencia de esta antigua ley en el sistema teológico de LEIBNIZ quien también considera a Dios en su triple aspecto de potencia, ciencia, gracia: ver por ejemplo *Les Principes de la nature et la grace*). Las categorías de PITÁGORAS tal como las expuso ARISTÓTELES son también una aplicación de esta ley del ternario en el campo de la matemática (**).

Por corresponder la discontinuidad a la fecundación y la continuidad a la germinación los pitagóricos consideraban que las teorías discretas deben representar al polo activo del proceso matemático en oposición a las teorías continuas que representan el polo pasivo. En efecto, la historia de la matemática nos comprueba que por la reunión de estos dos principios y especialmente cuando en el con-

(*) También lo simbolizaban por la terna fundamental de la escala proyectiva o del acorde musical, por ser ésta la que generaba y determinaba toda la escala; éste fué posiblemente el origen de la famosa música de las esferas pitagóricas en que se inspiraron muchos pensadores.

(**) Una hermosa y profunda exposición de las categorías pitagóricas hemos oído en una conferencia del profesor YASINOVSKI, cuyo resumen puede verse en la Revista de la Unión Matemática.

tinuo se presentan discontinuidades, es cuando se alcanza la máxima belleza matemática; la teoría de residuos, la teoría de funciones elípticas, automorfas, etc., nos dan ejemplo de que si se fusionan los métodos del discontinuo y del continuo se obtienen las teorías más fecundas. Podemos ahora ver también la razón de porqué PITÁGORAS y WRONSKI daban al método platónico el papel de activo y al método inductivo el de pasivo, el de plasmador: el método inductivo o estudio que parte de los campos particulares es un proceso equivalente al crecimiento o germinación y como él de carácter continuo, mientras que el método sintético representa el impulso de la fecundación e implica la característica del discontinuo o aditividad.

Por doquier vemos la existencia de entes opuestos, de pares de opuestos. Mas al profundizar nos damos cuenta de que estos pares de opuestos son en esencia una misma cosa manifestada en aspectos opuestos para poder así ser percibida; en efecto, vemos que siempre dos opuestos tienen entre sí otro intermediario, que es la resultante de ellos. En otras palabras, los opuestos no son más que el distinto grado de condensación de una sola y misma cosa. Así el concepto de seguir y preceder no son más que expresión de una misma cosa que es el orden; solamente que para que este orden pueda ser concebido por nuestra mente, es necesaria la oposición de dos polos, es necesario que este mismo orden se presente en forma dual, y entonces de esta oposición nace en nosotros la idea de orden. Así la idea de mayor-menor, crea en nosotros la sensación del número que es el intermediario, el resultante de estos opuestos; es esto justamente la cortadura de DEDEKIND. En este ejemplo vemos que para que una idea abstracta pueda ser concebida ella necesita de una oposición de dos diferentes grados de manifestación de ella misma. Tomemos otro ejemplo: en la geometría tenemos los postulados, que son relaciones o ideas abstractas, y los elementos (recta, punto, etc.) sobre los que actúan estas relaciones. Las *relaciones* y los *elementos* son los dos polos opuestos, son grados distintos de una misma cosa; nos es imposible concebir las relaciones en sí sin pensarlas aplicadas a los elementos; ni los elementos tienen existencia sin pensarlos ya manifestando aquellas relaciones. Generalizando, podemos dividir las sustancias en dos tipos: las manifestadas y las inmanifestadas (para nuestro intelecto). Una sustancia manifestada es una « creación », y la ley

del proceso de la creación, es decir del proceso por el cual la sustancia se manifiesta, es según los pitagóricos la ley del ternario que hemos formulado más arriba. En este proceso se encuentran, se oponen y se neutralizan los dos polos opuestos de la sustancia, manifestados en forma estática y dinámica, discontinua y continua, activo y pasivo, de fecundación y absorción: de potencia y energía. Para formular esta ley abstracta en símbolos suelen utilizarse aspectos particulares de ella, como por ejemplo: activo-pasivo-neutro; espíritu-materia-alma; luz-sombra-penumbra; gaseoso-sólido-líquido; calor-frío-tibio; atracción-repulsión-equilibrio; ácido-base-sal; positivo-negativo-neutro; exterior-interior-frontera; macho-hembra-hijo; Padre-Hijo-Espíritu Santo; Horus-Isis-Osiris; Brhama-Shiva-Visnú; cóncavo-convexo-recto; continuo-discontinuo-periódico; elíptico-hiperbólico-parabólico; etc., etc. (*).

Mas cualquiera de estos términos que se utiliza no es más que para simbolizar una ley abstracta. Así también se utiliza el término Voluntad-Amor-Sabiduría: con la voluntad se simboliza el aspecto positivo, el primer principio de proyección (cualquiera que sea el aspecto de la voluntad, ella siempre manifiesta el carácter de proyección, como lo aclaró SCHOPENHAUER); el amor es siempre de carácter de recepción, pasivo; y la sabiduría participa de los dos, es más suave que la voluntad y más serena que el amor; tiene la sabiduría al mismo tiempo el *proceso* de la comprensión, y el *acto volitivo* de la síntesis o adquisición, es discontinuo y continuo, dinámico y estático, reúne ambos opuestos, los neutraliza. Lo mismo se puede decir Potencia-Ciencia-Gracia; la potencia representa el primer principio (positivo), la gracia el segundo (negativo-femenino) y la ciencia es el intermedio, participa de las cualidades de ambos. Observemos que el orden en que se enuncian estos términos no tiene importancia; da lo mismo decir luz-sombra-penumbra o decir luz-penumbra-sombra; es cuestión de escritura, lo importante es la característica que expresa cada palabra y su mutua entre-relación.

(*) La teoría de estructuras, por ejemplo, nos muestra cómo en el fundamento de la mayoría de las teorías matemáticas se encuentra los pares de opuestos que dan por resultado un ente, o sea que el ternario es la base de casi toda la matemática. Uno de los autores de este artículo hizo conscientemente aplicación de esta ley pitagórica introduciendo el método de « anagenos » que también fué hecho independientemente por STONE y MAC LANE partiendo de consideraciones matemáticas y no filosóficas.

También en la historia de la matemática observamos primero, en la antigüedad, la manifestación del primer principio: la matemática griega estudia lo estático, lo discontinuo, lo correspondiente al espíritu; más tarde vemos predominar el *proceso*, lo continuo, lo concerniente a la materia; finalmente viene la época de fusión, la resultante de aquellas dos en que se combinan ambas. Así en el número transfinito de CANTOR vemos la tendencia de la reunión de los dos conceptos, de lo finito con lo infinito, mejor dicho de lo estático con lo cambiante del discontinuo con el continuo.

Cuando en los números de 1-era especie pasamos de uno a otro por medio de la *agregación* de la unidad, estamos en el principio de fecundación, por actos aislados, en el impulso a la generación. Cuando después de infinitos actos se genera el *proceso* del infinito pasando al número de 2-da especie, estamos entonces en el principio de germinación, de lo dinámico. El resultado de estos dos polos, es la unión del concepto de finito con el de infinito, que es el transfinito.

Cuando estudiamos las funciones continuas, las propiedades que más nos ocupan es que ellas alcanzan un máximo o mínimo, en general las propiedades extremas. Y si profundizamos veremos que la propiedad de máximo es una manifestación de lo discontinuo dentro de un proceso; hasta intuitivamente nos imaginamos los máximos y mínimos como irregularidades en un terreno llano. También el máximo o mínimo está íntimamente ligado al ciclo, período, y según el pitagorismo el ciclo o el período es la resultante de lo discontinuo y lo continuo, puesto que los pitagóricos afirman que toda la ciencia descansa en este ternario: Discontinuo-Continuo-Período.

Estas consideraciones llevan a la teoría pitagórica de Involución-Evolución-Descanso, pero no podemos entrar aquí en estos detalles. En WRONSKI pueden verse indicaciones al respecto y la aplicación a los números π y e .

EL CUATERNARIO Y LA TEORÍA ALGORÍTMICA DE WRONSKI

El ternario representa la esencia del arquetipo primario *en sí*; mas por la ley de analogía hemos visto que dicho principio debe originar las expresiones más concretas y por lo tanto debe poseer un atributo que le permita tal descenso. Los pitagóricos expresa-

ban metafísicamente esta propiedad en la siguiente forma: los tres atributos de la divinidad *en sí* son Voluntad-Amor-Sabiduría; pero, para poder pasar a su primera creación, necesita este ternario de un nuevo atributo primitivo que es la Acción. He aquí otra deducción metafísica del cuaternario debida a WRONSKI: La Voluntad y la Sabiduría producen la Justicia, la Sabiduría y el Amor producen el Sacrificio; pero estos dos atributos, Justicia y Sacrificio ya no son primitivos sino derivados. Vemos pues que la Sabiduría es común a los dos atributos derivados y establece entre ellos una ligazón, de donde resulta la necesidad de un atributo *primitivo* que establezca la transición entre el Sacrificio y la Justicia y recíprocamente. Este atributo es evidentemente la Acción, que es la *transición* entre Justicia y Sacrificio, formándose así el cuaternario metafísico *primitivo*: Voluntad-Amor-Sabiduría-Acción.

Por eso los pitagóricos consideraban que el 4 tiene el carácter de transición o impulso hacia el movimiento, en la generación de la escala de las creaciones sucesivas. Con este proceso pudieron descubrir el principio de la cuaterna armónica geométrica y musical. En efecto, para la generación de una escala, se parte de una terna primaria o fundamental que necesita del cuarto armónico conjugado para formar la cuaterna armónica, que a su vez permite una nueva terna y un nuevo grupo armónico, continuando así en los dos infinitos. Metafísicamente, por analogía, estas ternas sucesivas vendrían a ser las creaciones más concretas antes mencionadas de las cuales daremos un ejemplo: Así en el hombre vemos el ternario cabeza-ventre-pecho, correspondiendo la cabeza al órgano director, simbolizado por 1, el vientre el órgano plasmador 2, y el pecho vincula las funciones de ambos y se simboliza por el 3. El número 4 determinado por la terna que representa la realización de este ternario, es el hombre mismo, nueva unidad en un orden más elevado; de la misma manera el hombre, la mujer y el hijo representan el nuevo ternario en el plano del cual el cuaternario sería la familia, nueva unidad en un orden más abstracto aún, cuya oposición a otra familia da origen a las tribus, etc. Vemos pues, que la generación de la escala: célula-órgano-aparato-hombre-familia-tribu-nación, etc., se produce siempre por la ley del ternario combinado con el cuaternario, análogamente a como se genera la escala proyectiva.

Ya hemos expuesto los principios fundamentales de toda creación en general, según la concepción pitagórica. Veremos ahora como WRONSKI haciendo uso de la analogía, los transporta al campo particular de la matemática, investigando su proceso de creación.

Si consideramos el intelecto humano encontramos en su constitución la imagen del arquetipo metafísico de los pitagóricos. El *Entendimiento* corresponde a la Voluntad, tiene como él, el carácter de fecundación, de agregación; en el entendimiento está implícito el discontinuo, puesto que es una adquisición completa o un estado potencial. La *Razón* corresponde al Amor, es un proceso de continuo devenir, de crecimiento. El entendimiento fecunda la razón y, por un proceso continuo, resulta el *Juicio* como producto, nacimiento, y que corresponde a la Sabiduría del arquetipo. Estos son los atributos primitivos del intelecto, pero para concretar el pensamiento este ternario primitivo necesita de un otro atributo primitivo que es la *Idea*, formando así el cuaternario primitivo del intelecto: Entendimiento-Razón-Juicio-Idea. Así como la combinación de la Voluntad y la Sabiduría da Justicia y la de Amor y Sabiduría da Sacrificio, así las combinaciones del Entendimiento y la Razón con el Juicio producen la *Síntesis* y el *Análisis*, siendo la Idea la que establece la transición entre estos dos atributos derivados. Veamos cómo estableciendo las correspondencias matemáticas de estos principios, WRONSKI llega a una concepción de los fundamentos de la matemática, muy distinta de la que corrientemente se usa. Dice WRONSKI:

« Dos algoritmos elementales, primitivos y esencialmente opuestos, a saber, la *sumación* y la *graduación*, se presentan en la primera de las dos partes de la teoría algorítmica. El primer algoritmo tiene dos ramas particulares, una progresiva y otra regresiva (adición y sustracción); el segundo igualmente dos ramas, una progresiva y otra regresiva (potencias y raíces). Son, por así decir, los polos intelectuales del saber humano en sus aplicaciones a las cantidades algorítmicas. En la sumación las partes de la cantidad son discontinuas y extensivas, tienen propiamente el carácter de agregación (*per juxta positionem*). En la graduación por el contrario son continuas y son en cierto modo intensivas. Ellas tienen de esta manera, el aspecto del carácter del crecimiento (*per intus susceptionem*). Estas dos funciones algorítmicas de nuestro saber que tienen cada una sus leyes particulares son enteramente he-

terogéneas y es imposible deducir la una de la otra. He aquí su deducción metafísica, o al menos su principio trascendental: la primera, la función intelectual de la sumación está fundada sobre las leyes *constitutivas del entendimiento estrictamente dicho*; la segunda, la función intelectual de la graduación está fundada sobre las leyes *reguladoras de la razón*. La neutralización de estas dos funciones intelectuales y por tanto de los dos algoritmos elementales que le corresponden, produce una función intermedia a la que corresponde un algoritmo intermedio que tiene de la sumación y graduación: nosotros llamaremos a este algoritmo *reproducción*; sus ramas son multiplicación y división. Este tercer algoritmo elemental que considerado bajo el punto de vista metafísico, se relaciona esencialmente a la facultad del *Juicio*, debe todavía a causa de su origen, ser considerado como algoritmo *primitivo*. Combinación de sumación y graduación, se encuentra ya en el origen de la reproducción; de modo que quedan las combinaciones de reproducción con sumación y graduación. Reproducción y sumación dan el algoritmo necesario que forma la *numeración*. Reproducción y graduación dan el algoritmo necesario que forma las *facultades*. Los esquemas de estos algoritmos derivados son:

$$A_0 \varphi_0(x) + A_1 \varphi_1(x) + \dots ; \varphi_0(x) \cdot \varphi_1(x) \dots$$

A_0 , A_1 , cantidades independientes de x y $\varphi_1(x)$ funciones cualesquiera de x ligadas entre ellas por una ley. Se encuentra en la naturaleza de la numeración y de las facultades el principio de una consecuencia ulterior e igualmente necesaria. Este principio consiste en el hecho que la reproducción que es común a los dos algoritmos derivados establece entre ellos una ligazón, una especie de unidad; de donde resulta como conclusión necesaria, la proposición, al menos problemática, de la transición de la teoría de la numeración a aquella de las facultades y recíprocamente. Los esquemas de estas dos cuestiones necesarias, que deben definitivamente terminar el sistema de todos los algoritmos elementales posibles para el hombre, son:

1º Transición de numeración a las facultades:

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \dots = \varphi(x_1 x_2 \dots).$$

2º) Transición de las facultades a la numeración:

$$\varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2) \cdot \varphi(x_3) \dots = \varphi(x_1 + x_2 + \dots),$$

x_i , cantidades variables cualesquiera.

Es claro que es el exponente de una cantidad dada que forma con este exponente la variable, es decir $a^{\varphi(x)} = x$. En efecto

$$x_1 x_2 \dots = a^{\varphi(x_1)} a^{\varphi(x_2)} \dots = a^{\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \dots}$$

y por tanto

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \dots = \varphi(x_1 x_2 \dots).$$

Falta determinar la naturaleza de φ y saber si es función derivada *elemental* o simplemente combinación de otras funciones elementales. De la anterior, tomando la raíz m -ma,

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^{\varphi(x)} = x^{\frac{1}{m}}$$

Pero

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[m]{a}\right)^{\varphi(x)} &= \left\{1 + \left(\sqrt[m]{a} - 1\right)\right\}^{\varphi(x)} = 1 + \frac{\varphi(x)}{1} \left(\sqrt[m]{a} - 1\right) + \\ &+ \frac{\varphi(x)}{1} \frac{\varphi(x) - 1}{2} \left(\sqrt[m]{a} - 1\right)^2 + \dots \end{aligned}$$

y por tanto

$$x^{\frac{1}{m}} - 1 = \frac{\varphi(x)}{1} \left(\sqrt[m]{a} - 1\right) + \dots$$

Cuando $m \rightarrow \infty$ se obtiene,

$$\varphi(x) = \frac{x^{\frac{1}{\infty}} - 1}{\sqrt{\infty} - 1}.$$

Tal es la *naturaleza* de la función. Esta expresión es evidentemente la de la generación teórica primitiva de esta función: esta es la *Idea* o la concepción primera propuesta por la razón al entendimiento para ser *realizada* en el dominio de la experiencia.

Esta es entonces la función primitiva formando lo que se llama logaritmo »(*).

Vemos pues claramente la aplicación del ternario y cuaternario pitagórico en la filosofía de WRONSKI. Así como en la filosofía pitagórica la generación de la escala de creaciones sucesivas se realiza por medio del cuaternario, también WRONSKI llega a concebir la generación de los números naturales por medio del logaritmo y de los tres algoritmos primitivos. Esta idea domina toda la teoría algorítmica de WRONSKI y es también la base de su reforma del saber humano. Vemos cuán distinta es la concepción de WRONSKI de las operaciones fundamentales de la Aritmética de las que se usan generalmente; más aún, los principios o relaciones son

(*) En las líneas precedentes está evidentemente vislumbrada una posible intuición trascendente de la noción del logaritmo. Personalmente nos parece creíble que nunca esta intuición hubiera surgido en quien no hubiera conocido de antemano los logaritmos y mucho más; pero estimamos conveniente aclarar un poco para el lector los pasajes de forma algorítmica. Proponiéndose el autor resolver la ecuación funcional $a^{\varphi(x)} = x$, la transforma primero en

$$x^{\frac{1}{m}} = \left(\sqrt[m]{a} \right)^{\varphi(x)} = \left\{ 1 + \left(\sqrt[m]{a} - 1 \right) \right\}^{\varphi(x)}$$

y aplica al último miembro el desarrollo de NEWTON; puesto que no se sabe todavía qué es el exponente $\varphi(x)$ (y nosotros sabemos que es irracional), esta aplicación del desarrollo de NEWTON depende en rigor de teoremas bastante elevados del cálculo infinitesimal, y sólo está justificada por valores pequeños de $\sqrt[m]{a} - 1$; esta condición se realiza en efecto si m es bastante grande. Después de haber restado 1 a los dos miembros, el autor desprecia en el segundo los términos siguientes al primero; todavía esto está permitido para valores pequeños de $\sqrt[m]{a} - 1$, después de un análisis conveniente. Pasando luego al límite por $m \rightarrow \infty$, el autor encuentra la relación

$$\varphi(x) = \frac{x^{\frac{1}{\infty}} - 1}{a^{\frac{1}{\infty}} - 1},$$

en la cual el segundo miembro tiene forma indeterminada, pero que, teniendo en cuenta lo expuesto, si admitimos conocer la función buscada $\varphi(x)$, que en efecto es un logaritmo, podría servir para encontrar lo que no hace mucho se llamaba todavía el *valor* de esa expresión indeterminada. Efectivamente, si ponemos por comodidad, $1 : m = \xi$, tenemos, por la regla de DE L'HOSPITAL,

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{x^{\xi} - 1}{a^{\xi} - 1} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{x^{\xi} \log x}{a^{\xi} \log a} = \frac{\log x}{\log a} = \log_a x.$$

(Nota de B. L.).

para él previas a los números mismos a los cuales se aplican, pues estos quedan generados más tarde por medio del ternario y cuaternario. Observemos que efectivamente la sumación $a + x$ tiene el mismo carácter descripto de discontinuidad y fecundación, como su arquetipo el Entendimiento. La función a^x se corresponde por su carácter de crecimiento a la Razón y Amor; se sabe que generalmente las funciones de crecimiento se representan por medio de exponenciales; la razón matemática profunda de ello es que e^x es la única función que coincide con su derivada, o sea que la causa que impulsa es igual a la naturaleza de lo impulsado.

Para finalizar, aclaremos la concepción de WRONSKI de la sumación y graduación como los polos opuestos del algoritmo matemático, citando estas palabras del famoso matemático ruso A. KHINTCHINE referente a las dificultades que presenta el teorema FERMAT (*): « ¿A qué se debe que reflexionando sobre el teorema de FERMAT nos vemos en medio de las relaciones más agudas y esenciales que conoce la matemática? La historia de la aritmética ha puesto en evidencia que cuando queremos ligar las operaciones de potencias con las de suma nos encontramos delante de tales dificultades que la razón se siente delante de problemas irresolubles. A menudo es necesario para la demostración apelar al análisis que es una rama hondamente lejana a la aritmética para poder unir conceptos que se originaron en un mundo común del número natural y que sin embargo no quieren reconocer ningún parentesco, no quieren saber nada el uno del otro. Sin detenernos en ejemplos basta recordar el problema de WARING cuya solución aritmética no tenemos todavía; y el binomio de NEWTON ¿no es acaso la primera tentativa de ligar estas dos operaciones? su importancia es bien conocida y tal vez no aprovechada del todo aún. Y el teorema de FERMAT es justamente el problema más natural surgido de la combinación de aquellas dos operaciones ».

Vemos pues cuán hondo es el sentido de las concepciones de WRONSKI. Bajo las mismas ideas directivas WRONSKI desarrolla su teoría hasta abarcar la sistematización de los conocimientos más importantes de su época.

PEDRO CAPELLI y MISCHA COTLAR.

(*) A. KINTCHINE, *El teorema de Fermat*, U. N. T. I., 1934 (en ruso).

FLORES Y HOJAS

RESPUESTAS

Por no haber llegado respuestas de lectores externos al Instituto, damos las soluciones siguientes:

IV. — Donde está equivocado el razonamiento siguiente:

Se sabe que para cada punto de una cuádrica pasan dos generatrices (reales o imaginarias); consideremos una cuádrica de revolución y uno de sus puntos sobre el eje de rotación; consideremos también por este punto una de las generatrices. Haciendo girar la figura alrededor del eje, la cuádrica gira sobre sí misma y la generatriz considerada recorre un cono, o, por lo menos, un plano. Se concluye que de cada cuádrica de rotación son partes conos o planos.

SOLUCIÓN. — Si la cuádrica es un cono de revolución no hay cuestión. En cualquier otro caso, el plano tangente a la cuádrica en un punto de intersección con su eje de rotación se superpone sobre sí mismo al girar la cuádrica; es decir, la única posibilidad es que las generatrices consideradas describieran este plano tangente. Además, las generatrices contenidas en el plano tangente en un punto de intersección de la cuádrica con su eje de rotación son las rectas isotropas del mismo plano. Ahora bien, se sabe que las rectas isotropas pueden definirse precisamente como las rectas dobles de una rotación alrededor de un punto, y por consiguiente, al hacer girar la figura tal como se dice en el enunciado, estas generatrices permanecen invariables. En otras palabras, basta recordar que las rectas isotropas por un punto son las que unen este punto con los puntos cíclicos, intersecciones fijas de todos los círculos del plano con la recta del infinito. Al girar el plano sobre sí mismo, estos puntos quedan fijos y por tanto también las mencionadas rectas isotropas. Más generalmente, al considerar la rotación como una homografía, se sabe que debe tener (salvo casos de multiplicidad o de degeneración) 4 puntos unidos y 4 planos unidos; en el caso presente, frente a una recta de puntos unidos (el eje) hay otra recta unida, no de puntos unidos, al infinito, normal al eje y por consiguiente, frente a un haz de planos unidos (perpendiculares al eje) un par

de planos unidos (los planos cíclicos por el eje), tangentes al círculo absoluto.

Analíticamente la mencionada invariancia de las rectas isotropas por rotaciones alrededor del origen, resulta observando que cualquier recta $y = \lambda x$, por el giro de un ángulo φ tal que $\tan \varphi = m$ se transforma en $y = \frac{\lambda + m}{1 - \lambda m} x$. Si la recta es isotropa, o sea es $\lambda = \pm i$, se tiene $\frac{m \pm i}{1 \mp im} = \pm i$, es decir, la recta permanece inmóvil.

L. S.

VI. — Se pide la corrección del cálculo siguiente: Siendo m, p números enteros primos entre sí, m impar $< 2p$ se considera la integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{m-1} dx}{1 + x^{2p}}.$$

Las raíces del denominador son, como se sabe,

$$x_k = \exp \left(\frac{\pi i}{2p} + \frac{k\pi i}{p} \right) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 2p-1)$$

y por tanto, descomponiendo la diferencial en fracciones simples se tiene

$$I = \frac{1}{2p} \sum_k \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \frac{(2k+1)(m-2p)\pi i}{2p} \frac{dx}{x - \exp \frac{(2k+1)\pi i}{2p}} \quad [1]$$

$$= \frac{-1}{2p} \sum_k \exp \frac{(2k+1)m\pi i}{2p} \lim_{\xi \rightarrow \infty} \log \frac{\xi - \exp \frac{(2k+1)\pi i}{2p}}{-\xi - \exp \frac{(2k+1)\pi i}{2p}} \quad [2]$$

$$= \frac{-\pi i}{2p} e^{\frac{m\pi i}{2p}} \sum_k \exp \frac{k m \pi i}{p} - \frac{1}{2p} \sum_k \exp \frac{(2k+1)m\pi i}{2p} \lim_{\xi \rightarrow \infty} \log \frac{1 - \frac{1}{\xi} \exp \frac{(2k+1)\pi i}{2p}}{1 + \frac{1}{\xi} \exp \frac{(2k+1)\pi i}{2p}} \quad [3]$$

En la segunda suma los límites son evidentemente 0; queda, pues, sólo la primera suma, que puede escribirse todavía

$$\frac{-\pi i}{2p} e^{\frac{m\pi i}{2p}} \sum_{k=0}^{2p-1} \left(e^{\frac{m\pi i}{p}} \right)^k = \frac{-\pi i}{2p} e^{\frac{m\pi i}{2p}} \frac{1 - \left(e^{\frac{m\pi i}{p}} \right)^{2p}}{1 - e^{\frac{m\pi i}{p}}}.$$

Pero

$$\left(e^{\frac{m\pi i}{p}}\right)^{2p} = e^{2m\pi i} = 1;$$

por lo tanto el resultado final es 0. Sin embargo no hay duda de que la integral tiene valor finito $\neq 0$, puesto que la función por integrar es siempre finita > 0 para todos los valores reales de x y además en el infinito es infinitésima de orden ≤ 2 (por ser $m \leq 2p - 1$).

SOLUCIÓN. — Como se indica al final del enunciado, la integral que se quiere calcular es convergente; por lo tanto puede interpretarse como el límite, cuando ξ tiende a infinito, de la integral entre $-\xi$ y ξ . La expresión [1] puede, pues, considerarse correcta, a condición de poner $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x - x_k} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_{-\xi}^{\xi} \frac{dx}{x - x_k}$; no lo sería en cambio si se tomase $\lim \int_{-\xi_1}^{\xi_2} \frac{dx}{x - x_k}$ cuando ξ_1 y ξ_2 tienden independientemente hacia ∞ , porque este último límite no existe.

La expresión [2] también es aceptable, a condición de atribuir al logaritmo un valor conveniente. En efecto, dicha expresión está basada en la fórmula

$$\int_{-\xi}^{\xi} \frac{dx}{x - x_k} = [\log(x - x_k)]_{-\xi}^{\xi},$$

donde es $\log(x - x_k) = \log|x - x_k| + i \arg(x - x_k)$; este argumento, como se sabe, es indeterminado, pues admite un término aditivo, múltiplo entero de 2π ; ahora bien, efectuando la integración en el intervalo $-\xi + \xi$ la elección de ese múltiplo no puede hacerse arbitrariamente; poniendo en efecto $x_k = \alpha + i\beta$, tenemos

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x - x_k} &= \int \frac{dx}{x - \alpha - i\beta} = \int \frac{[(x - \alpha) + i\beta] dx}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} \\ &= \int \frac{(x - \alpha) dx}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} + i \int \frac{d \frac{x}{\beta}}{\left(\frac{x - \alpha}{\beta}\right)^2 + 1} \\ &= \frac{1}{2} \log[(x - \alpha)^2 + \beta^2] + i \operatorname{arctg} \frac{x - \alpha}{\beta}; \end{aligned}$$

esta fórmula puede bien resumirse en la anterior

$$\int \frac{dx}{x - x_k} = \log|x - x_k| + i \arg(x - x_k),$$

pero se ve en ella que, para grandes valores absolutos de $x, (x - \alpha)/\beta$, y luego el correspondiente $\arctg$ tienen el mismo signo de x o el signo opuesto según sea β positivo o negativo; con otras palabras el

$\lim \log \frac{\xi - x_k}{-\xi - x_k}$ debe tomarse igual a πi o a $-\pi i$, según que el punto x_k esté por arriba o por debajo del eje real, es decir según sea $k < p$ o $k \geq p$.

Para obtener [3] se ha puesto

$$\log \frac{\xi - x_k}{-\xi - x_k} = \log(-1) + \log \frac{1 - \frac{x_k}{\xi}}{1 + \frac{x_k}{\xi}}$$

y se ha pasado al límite. Pero las determinaciones de $\log(-1)$ y $\log 1$ que se adopten no pueden ser independientes, ya que la suma debe ser $\pm \pi i$ según el caso. En esto radica precisamente el error cometido, pues se toma, para todo k , $\log(-1) = \pi i$ y $\log 1 = 0$.

Dicho error puede subsanarse de distintas maneras. Por ejemplo, puede ponerse $\log 1 = 0$ y $\log(-1) = \pm \pi i$, según sea $k < p$ o $k \geq p$; entonces en [3] habrá que reemplazar $\sum \exp \frac{km\pi i}{p}$ por

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{p-1} \exp \frac{km\pi i}{p} - \sum_{k=p}^{2p-1} \exp \frac{km\pi i}{p} &= \\ &= (1 - \exp m\pi i) \sum_{k=0}^{p-1} \exp \frac{km\pi i}{p} = \frac{4}{1 - \exp \frac{m\pi i}{p}} \end{aligned}$$

de donde

$$I = \frac{\pi}{p} : \operatorname{sen} \frac{m\pi}{2p}.$$

Al mismo resultado se llega tomando en [3] $\log(-1) = \pi i$ y $\log 1 = 0$ o $-2\pi i$ según sea $k < p$ o $k \geq p$. Pero lo más breve es prescindir de [3] y reemplazar directamente en [2] $\lim \log \frac{\xi - x_k}{-\xi - x_k}$ por los valores calculados más arriba.

R. L.

SOLUCION A LA CUESTION N° 3

No habiéndose recibido contestación a la cuestión N° 3, damos a continuación una explicación en forma resumida de la misma.

En dicha cuestión se proponía hacer un estudio comparativo de los hechos siguientes: Si un punto cae a lo largo de un arco de circunferencia en plano vertical, el tiempo de caída en arcos de pequeña amplitud es independiente de la misma (es decir de la altura del punto de partida); si el mismo punto cae a lo largo de la cuerda que une el punto de partida con el punto más bajo de la circunferencia, todavía el tiempo de caída no depende de la posición del punto de partida sobre la circunferencia; estos dos tiempos no son iguales a pesar que, cuando la amplitud del arco considerado tiende a 0, la cuerda y el arco tienden a coincidir.

La primera idea que se presenta es la de comparar esta observación con la otra bien conocida de que un arco puede componerse de puntos tan próximos como se quiera a los de un segmento y tener longitud en tanto como se quiera mayor que la del segmento; pero aquí hay que notar también que la tangente al arco en un punto cualquiera resulta tan próxima como se quiera a la cuerda considerada y en general tienden a igualarse todos los números que dependen de infinitésimos del primer orden, en particular también las velocidades.

La diferencia de los tiempos de los dos recorridos depende luego esencialmente de los infinitésimos de orden superior, lo que resulta natural cuando se piensa que al tender el arco a cero tiende a 0 la velocidad y también la aceleración.

Si se llama α a la amplitud del arco, la aceleración según la cuerda es constante e igual a $g \sin \frac{\alpha}{2}$, mientras la aceleración según el arco varía entre $g \sin \alpha$ y 0. Las velocidades finales serán iguales por ser la fuerza conservativa y precisamente iguales a

$$\sqrt{2 g \sin \frac{\alpha}{2} \cdot 2 r \sin \frac{\alpha}{2}} = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{gr} ; \quad [1]$$

pero al comienzo del movimiento las aceleraciones a lo largo del arco y a lo largo de la cuerda tienen por razón $\alpha : \sin \frac{\alpha}{2}$, es decir, para pequeños valores de α , aproximadamente $\frac{1}{2}$; se sigue que después de un primer intervalo elemental de tiempo la velocidad a lo largo del arco será aproximadamente el doble que a lo largo de la cuerda. Teniendo en cuenta que sólo al término de la caída las dos velocidades tienden a igualarse, se infiere que la velocidad a lo largo del arco será siempre mayor que a lo largo de la cuerda y se hace intuitivo que, a pesar de la mayor longitud del arco (pero diferente sólo por infinitésimos de segundo orden), deba éste ser recorrido en tiempo menor.

En efecto, por la [1], el tiempo de caída a lo largo de la cuerda es

$$\frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{gr}}{g \sin \frac{\alpha}{2}} = 2 \sqrt{\frac{r}{g}};$$

el tiempo de caída según el arco es $\frac{1}{4}$ de una completa oscilación del péndulo de longitud r , es decir

$$\sim \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{r}{g}}$$

y la razón entre los dos tiempos es $4 : \pi > 1$.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

SOLUCIONES

Nº 16. — Sean dos puntos A y B sobre una recta, y C, D , otros dos puntos de la misma interiores al segmento AB . Entre todas las proyectividades que sobre la recta dada tienen A y B como puntos unidos y transforman al segmento AB en sí mismo. ¿Cuál será la que transformará el segmento CD en uno de longitud máxima y cuál es el valor de esta máxima longitud?

SOLUCIÓN. — Vamos a resolver el problema analíticamente. Tomemos un sistema de abscisas cuyo origen sea el punto medio del segmento AB y sea $AB = 2a$. La abscisa de A será $-a$ y la de B será a . Sean c, d las abscisas de C, D respectivamente. Llamemos ρ a la razón doble

$$\rho = (ABCD) = (-a, a, c, d) = \frac{c+a}{c-a} : \frac{d+a}{d-a}. \quad [1]$$

Si C', D' son los puntos homólogos de C, D en cualquier proyectividad que tenga A y B como puntos unidos, como las razones dobles se conservan, será también $\rho = (ABC'D')$. Suponiendo únicamente las proyectividades que transforman el interior de AB en sí mismo, si los 4 puntos dados están en el orden A, C, D, B , los transformados estarán en el orden análogo A, C', D', B . Por lo tanto, si x es la abscisa de C' y llamamos λ a la longitud del segmento transformado $C'D'$, la abscisa de D' será $x + \lambda$. Tendremos, pues;

$$\rho = (ABC'D') = \frac{x+a}{x-a} : \frac{x+\lambda+a}{x+\lambda-a}.$$

De aquí

$$\lambda = \frac{(1-\rho)(a^2-x^2)}{(1-\rho)x + (1+\rho)a}. \quad [2]$$

Esta expresión nos da la longitud del segmento transformado en función del valor ρ de la razón doble $(ABCD)$ y del pará-

metro x (abscisa de C') que caracteriza la proyectividad particular.

Observemos que para $x \rightarrow \pm a$, $\lambda \rightarrow 0$, es decir, existen proyectividades con las condiciones del enunciado que transforman cualquier segmento CD en otro de longitud tan pequeña como se quiera.

Para hallar el valor de x para el cual λ es máximo, escribiremos que la derivada de [2] es nula. Se obtiene la ecuación de segundo grado

$$(1 - \rho) x^2 + 2 a (1 + \rho) x + (1 - \rho) a^2 = 0$$

la cual nos da

$$x = a \frac{-1 - \rho \pm 2 \sqrt{\rho}}{1 - \rho}.$$

De estas raíces la correspondiente al signo $-$ no es aceptable puesto que la condición del problema de que C' esté dentro del segmento AB exige que $|x| < a$. Observemos además que de [1], dado el orden A, C, D, B de los puntos, se deduce $0 \leq \rho \leq 1$ y por tanto la raíz correspondiente al signo $+$ es efectivamente menor que a puesto que $2 \sqrt{\rho} - 1 - \rho < 1 - \rho$. Por tanto, la abscisa x del punto C' homólogo del C en la proyectividad que transforma el segmento CD en uno de longitud máxima es

$$x = a \frac{2 \sqrt{\rho} - (1 + \rho)}{1 - \rho}. \quad [3]$$

Que este valor corresponde efectivamente a un máximo se comprende, bien observando la forma de [2] cuyo gráfico aproximado para valores de x comprendidos entre $-a$ y $+a$ es fácil de dibujar, bien teniendo en cuenta que un mínimo no puede ser, puesto que hemos dicho que el mínimo era cero y correspondía a $x = \pm a$ y que un máximo debe existir por ser $\lambda(x)$ acotada entre $-a$ y $+a$.

Con esto queda resuelta la primera parte del problema, puesto que dado por [3] el homólogo del punto C la proyectividad está perfectamente determinada.

Para hallar ahora el valor de esta máxima longitud, bastará sustituir el valor anterior de x en [2]. Resulta

$$\lambda_{\text{máx}} = 2 a \frac{1 + \rho - 2 \sqrt{\rho}}{1 - \rho}.$$

Siendo $\lambda + x$ la abscisa del punto D' homólogo del D , sustituyendo los valores anteriores se obtiene

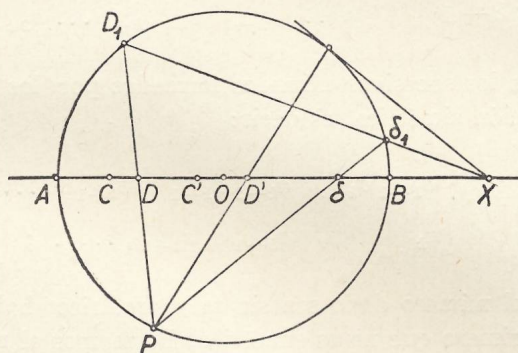
$$\lambda_{\text{máx}} + x = a \frac{(1 + \rho) - 2 \sqrt{\rho}}{1 - \rho}$$

que vemos que es precisamente igual a $-x$. Podemos, por tanto, enunciar: *entre las proyectividades consideradas en el enunciado del problema, la que transforma el segmento CD en uno de longitud máxima es aquella que lo transforma en un segmento $C'D'$ cuyo punto medio coincide con el punto medio del segmento AB .*

En consecuencia, si el segmento dado CD tiene el mismo punto medio que el segmento AB , su longitud no puede aumentar por ninguna proyectividad que tenga A, B como puntos unidos y transforme el interior de AB en sí mismo.

Se puede dar una construcción geométrica de la proyectividad que transforma CD en un segmento simétrico respecto el punto medio de AB . Es la siguiente:

Construcción: Sobre la cuerda AB se describe una circunferencia (no es necesario que lo contenga como diámetro como ocurre en



la figura). Respecto del punto medio O de AB se señala δ simétrico de C . Desde un punto P de la circunferencia se proyectan D y δ en D_1 , δ_1 . Se trazan las tangentes desde X a la circunferencia; de los puntos de contacto, uno se proyecta desde P en un punto interno del segmento AB (el otro se proyecta en un punto externo y no sirve). Proyectando dicho punto desde P sobre AB se obtiene el punto D' . Entonces C' es naturalmente el simétrico de D' respecto de O .

Demostración: Debe ser $A B C C' \nabla A B D D'$ y también $A B C C' \nabla B A \delta D'$ (por simetría respecto O); luego $A B D D' \nabla \nabla B A \delta D'$, es decir, D' es punto doble en la involución que tiene por conjugados A, B y D, δ . La construcción anterior da este punto doble.

Nº 23. — Se da vulgarmente el nombre de números « capicúa » a aquellos que pueden leerse indistintamente en los dos sentidos. Los llamaremos números simétricos. Un número cualquiera se puede siempre expresar de varias maneras como suma de números simétricos. Se pide una fórmula que exprese un número mínimo de sumandos simétricos necesarios para formar cualquier número de n cifras.

SOLUCIÓN. — Para dar una regla de efectuar esta operación y contar el número de veces que será necesario repetirla haremos la observación siguiente: siendo dado un número $a_1 a_2 \dots a_n$ (del cual $a_1, a_2, \dots, a_n$ representan las cifras sucesivas y se supone $a_1 \neq 0$), partiendo de su punto medio — que será una cifra si n es impar o entre dos cifras si n es par, según los esquemas:

$$\begin{aligned} n = 2k & \quad a_1 \dots a_{k-2} a_{k-1} \parallel a_k a_{k+1} \dots a_{2k} \\ n = 2k - 1 & \quad a_1 \dots a_{k-1} \mid a_k \mid a_{k+1} \dots a_{2k-1}, \end{aligned}$$

— extraigamos los sucesivos números formados por los grupos de cifras en posición simétrica, es decir:

$$\begin{aligned} (n = 2k) & \quad a_{k-1} a_k, \quad a_{k-2} a_{k-1} a_k a_{k+1}, \dots \\ (n = 2k - 1) & \quad a_k, \quad a_{k-1} a_k a_{k+1}, \dots; \end{aligned}$$

si no es que el número dado sea sin más simétrico, habrá en esta sucesión un primero que no es simétrico. Formemos el máximo número simétrico menor que él; este número se obtiene evidentemente con sustituir la primera cifra a la última si ésta es mayor; si al contrario esta última cifra es menor, la primera será necesariamente $\neq 0$; entonces se considerará el número formado por esta cifra y las siguientes hasta la mediana (respectivamente a_{k-1} o a_k) y se disminuirá este número en una unidad, completándolo luego al número de cifras primitivo repitiendo oportunamente las cifras obtenidas en orden invertido (ver ejemplo a continuación). Se completará finalmente el número en n cifras con anteponerle las

cifras iniciales del número dado que todavía no se habían considerado y posponerle las mismas cifras en orden inverso.

Ejemplos: 1° si el número dado es 35462000021829, los grupos de cifras centrales hasta el primero no simétrico serán 00, 0000, 200002, 62000021; el número formado con la primera mitad de las cifras 6200 disminuído de 1 resulta 6199; lo completaremos en 61999916 y finalmente en 35461999916453.

2° Con el número 25603134671 tendremos los grupos centrales 1,313,03134; este último se hace simétrico en 03130 y finalmente en 25603130652.

Restando el número obtenido del número dado se reducen a 0 evidentemente todas las cifras que preceden la mediana, salvo eventualmente la última, es decir la a_{k-1} o la a_k según sea n par o impar; y en el caso que ésta no haya desaparecido, sólo habrá dejado el residuo 1.

En todo caso el número de las cifras del resto será $\leq \frac{n}{2} + 1$. Repitiendo la misma operación sobre este resto se obtendrá un nuevo resto cuyo número de cifras será $\leq \frac{1}{2} \left(\frac{n}{2} + 1 \right) + 1 = \frac{n}{4} + 1 + \frac{1}{2}$. Prosiguiendo del mismo modo, resulta claro que después de un número de operaciones expresable por

$$\left[\frac{\log n}{\log 2} \right] = [\log_2 n] \quad (1)$$

se habrá obtenido un número cuyo número de cifras es

$$\begin{aligned} &\leq \left[\frac{n}{2^{[\log_2 n]}} + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{[\log_2 n] - 1}} \right] \\ &< \frac{n}{2^{[\log_2 n]}} + 2. \end{aligned} \quad [\alpha]$$

Si indicamos por

$$m \log_2 n = \log_2 n - [\log_2 n]$$

(1) Representamos por $[n]$ la « parte entera del número n » o « máximo entero $\leq n$ »; se representa a menudo también por E_n .

la *mantisa* (parte fraccionaria) de $\log_2 n$

$$\frac{n}{2^{[\log_2 n]}} = 2^{m \log_2 n} < 2,$$

y, por cuanto el número de cifras del cual hablamos es necesariamente entero, concluimos que este número será $< 2 + 2$ y por tanto

$$\leq 3.$$

Si a un número de 3 o de 2 cifras aplicamos todavía la operación indicada, obtenemos como resto un número de una sola cifra o bien un número de dos cifras de las cuales la primera es 1. Este último número, se ve directamente que es siempre la suma de dos de una cifra o de 11 más un número de una cifra; en todos los casos, cualquier número con 3 o menos cifras es la suma de 3 o menos términos simétricos. Concluimos que un número de n cifras se expresa siempre como suma de números simétricos, siendo el número de los términos

$$\leq [\log_2 n] + 3. \quad [1]$$

Este número se puede mejorar con la observación siguiente: si n no es potencia entera de 2, $[\log_2 n] = [\log_2 (n - 1)]$; pero si n es potencia entera de 2 la expresión $[\alpha]$ se reduce precisamente a $1 + 2 = 3$ y se concluye por lo tanto que el último resto que quedará por analizar tiene al máximo 2 cifras y, en el caso de alcanzar este máximo, la primera cifra será 1 y este resto se compone de sólo 2 sumandos. Podemos luego sustituir a la fórmula [1] la otra

$$\leq [\log_2 (n - 1)] + 3 = \left\lceil \frac{\log_8 (n - 1)}{\log 2} \right\rceil. \quad [2]$$

Nótese que esta fórmula expresa sólo una acotación, obtenida suponiendo que la descomposición se haga con cierto método; para $n = 2$ y $n = 3$ se dan fácilmente ejemplos en los cuales la fórmula da efectivamente el mínimo número de sumandos; pero para n cualquiera, queda abierto el problema de si no pudiera haber acotación mejor, no sólo porque el mismo método explicado puede concluir más rápidamente para clases de números bastante amplias, sino también porque, para un número dado, la descomposición no

es necesariamente única y es fácil dar ejemplos en los cuales, poniendo de lado toda regla, se encuentran descomposiciones con menos términos. Si, por ej., consideramos el número 2375, el método de arriba nos da la descomposición

$$2375 = 2332 + 33 + a + b \quad (a + b = 10, a, b \neq 0)$$

con 4 sumandos, según la regla

$$\left[\frac{\log 8 \cdot 3}{\log 2} \right] = \left[\frac{1,38}{0,30} \right] = 4 ;$$

pero tenemos también

$$2375 = 2222 + 151 + 2$$

con 3 sumandos solamente.

Una solución de este problema, menos completa, pero fundada esencialmente sobre los mismos conceptos de la anterior, fué enviada por el Sr. ABRAHAM H. BENDER, alumno de la Facultad de Ciencias Matemáticas de Rosario.

Nº 28. — Determinar las constantes A, B, C para que la expresión

$$\frac{\operatorname{sen} x (1 - \cos x)}{1 + \operatorname{sen} x} - \frac{A}{\left(x - \frac{3}{2}\pi\right)^2} - \frac{B}{x - \frac{3}{2}\pi} - C,$$

tienda a cero cuando x tiende a $\frac{3}{2}\pi$.

SOLUCIÓN. — Haremos previamente el siguiente cambio de variables con el objeto de simplificar los cálculos.

$$x = \frac{3}{2}\pi + y, \quad \operatorname{sen} x = -\cos y, \quad \cos x = \operatorname{sen} y.$$

Con esto, el problema consiste en determinar A, B, C de manera que sea

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos y (1 - \operatorname{sen} y) y^2 + (A + By + Cy^2) (1 - \cos y)}{(1 - \cos y) y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y)}{g(y)} = 0.$$

Se trata de una de las llamadas expresiones indeterminadas. Aplicaremos la regla de l'Hospital hasta que el límite del denominador deje de ser 0. Es

$$f'(y) = 2y \cos y (1 - \operatorname{sen} y) - y^2 \operatorname{sen} y (1 - \operatorname{sen} y) - y^2 \cos^2 y + \\ + (A + By + Cy^2) \operatorname{sen} y + (B + 2Cy) (1 - \cos y)$$

$$g'(y) = 2y (1 - \cos y) + y^2 \operatorname{sen} y$$

$$f''(y) = 2 \cos y (1 - \operatorname{sen} y) - 4y \operatorname{sen} y (1 - \operatorname{sen} y) - 4y \cos^2 y - \\ - y^2 \cos y (1 - \operatorname{sen} y) + 3y^2 \operatorname{sen} y \cos y + (A + \\ + By + Cy^2) \cos y + 2(B + 2Cy) \operatorname{sen} y + 2C (1 - \cos y)$$

$$g''(y) = 2(1 - \cos y) + 4y \operatorname{sen} y + y^2 \cos y$$

$$f'''(y) = -6 \operatorname{sen} y (1 - \operatorname{sen} y) - 6 \cos^2 y - 6y \cos y (1 - \operatorname{sen} y) + \\ + 18y \operatorname{sen} y \cos y + y^2 \operatorname{sen} y (1 - \operatorname{sen} y) + 4y^2 \cos^2 y - 3y^2 \operatorname{sen}^2 y - \\ - \operatorname{sen} y (A + By + Cy^2) + 3(B + 2Cy) \cos y + 6C \operatorname{sen} y$$

$$g'''(y) = 6 \operatorname{sen} y + 6y \cos y - y^2 \operatorname{sen} y$$

$$f''''(y) = -12 \cos y (1 - \operatorname{sen} y) + 36 \operatorname{sen} y \cos y + \\ + 8y \operatorname{sen} y (1 - \operatorname{sen} y) + 32y \cos^2 y - 24y \operatorname{sen}^2 y + \\ + y^2 \cos y (1 - \operatorname{sen} y) - 15y^2 \operatorname{sen} y \cos y - (A + \\ + By + Cy^2) \cos y - 4 \operatorname{sen} y (B + 2Cy) + 12C \cos y$$

$$g''''(y) = 12 \cos y - 8y \operatorname{sen} y - y^2 \cos y.$$

Siendo para $y \rightarrow 0$, $\lim_{y \rightarrow 0} g'(y) = \lim_{y \rightarrow 0} g''(y) = \lim_{y \rightarrow 0} g'''(y) = 0$, para que el límite del cociente sea distinto de infinito, también los límites de f' , f'' , f''' deben ser cero, o sea

$$\lim_{y \rightarrow 0} f'(y) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0} f''(y) = 2 + A = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0} f'''(y) = -6 + 3B = 0 \quad [1]$$

Además es $\lim_{y \rightarrow 0} g''''(y) = 12$ y por tanto para que el límite del cociente de las derivadas cuartas sea igual a cero debe ser también:

$$\lim_{y \rightarrow 0} f''''(y) = -12 - A + 12C = 0. \quad [2]$$

Del sistema [1] y [2] se deduce

$$A = -2, \quad B = 2, \quad C = \frac{5}{6}.$$

Esta solución ha sido enviada por el Sr. ABRAHAM H. BENDER, alumno de la Facultad de Ciencias Matemáticas de Rosario.

N. de la Redacción. — También se puede resolver el problema utilizando los desarrollos en serie del seno y del coseno. Después del cambio de variable $x = \frac{3}{2}\pi + y$, como en la solución anterior, queda

$$\begin{aligned} & \frac{\cos y (1 - \sin y) y^2 + (A + By + Cy^2) (1 - \cos y)}{(1 - \cos y) y^2} = \\ & = \frac{\left(1 - \frac{y^2}{2} + \dots\right) \left(1 - y + \frac{y^3}{6} - \dots\right) y^2 + (A + By + Cy^2) \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4!} + \dots\right)}{y^2 \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4!} + \dots\right)} = \\ & = \frac{\left(1 + \frac{A}{2}\right) - \left(1 - \frac{B}{2}\right) y - \left(\frac{1}{2} + \frac{A}{4!} - \frac{C}{2}\right) y^2 + (\dots) y^3 + \dots}{y^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{y^2}{4!} + \dots\right)}. \end{aligned}$$

Para que el límite de este cociente sea cero para $y \rightarrow 0$, es necesario y suficiente que

$$1 + \frac{A}{2} = 0, \quad 1 - \frac{B}{2} = 0, \quad \frac{1}{2} + \frac{A}{24} - \frac{C}{2} = 0$$

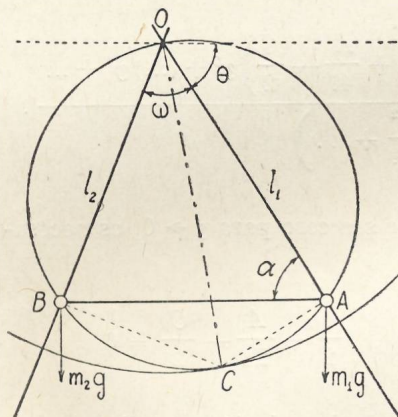
de donde sale el mismo resultado de la solución anterior.

Nº 32. — Se considera una barra rígida móvil sobre un plano con la condición de tener sus extremos sobre dos rectas fijas de este. Se pide el lugar de los centros instantáneos de rotación.

Suponiendo que el plano sea vertical y que la barra sin peso propio une dos puntos materiales de pesos dados, móviles sobre las dos rectas dadas se pide: 1º Determinar la posición de equilibrio de la barra. 2º Estudiar las pequeñas oscilaciones de la barra alrededor de esta posición.

SOLUCIÓN. — 1° *Lugar de los centros instantáneos de rotación.* — Como se sabe el centro instantáneo de rotación de una figura móvil en un plano, conocidas las trayectorias de dos de sus puntos y la posición de éstos en cada instante, se encuentra en la intersección de las normales a las trayectorias en dichos puntos. Por lo tanto en nuestro caso, supuesta la barra en una posición cualquiera AB , bastará trazar en A y B las normales a las rectas fijadas encontrándose en su intersección el centro instantáneo correspondiente. Si O es el punto de intersección de las dos rectas fijas, se sigue que los triángulos OAC , OBC son rectángulos, es decir que OC es diámetro del círculo circunscrito al triángulo AOB . Este diámetro vale $b : \sin \omega$, donde b es la longitud de la barra; por lo tanto no depende de la posición de los puntos A y B . Luego: *el lugar geométrico de los centros instantáneos de rotación es una circunferencia de centro O y radio $b : \sin \omega$.*

Con respecto al sistema móvil el centro instantáneo de rotación recorre la circunferencia que pasa por A y B y de radio $\frac{1}{2} b : \sin \omega$. Se sigue que el movimiento es idéntico, cinemáticamente, al movimiento epicycloidal generado por una circunferencia que rueda internamente a otra de radio doble.



2° *Posición de equilibrio de la barra.* — Sean $m_1 g$ y $m_2 g$ los pesos en los extremos de la barra. Para una posición cualquiera se tiene

$$\begin{aligned} l_1 &= b \frac{\sin(\omega + \alpha)}{\sin \omega} \\ l_2 &= b \frac{\sin \alpha}{\sin \omega} \end{aligned} \quad [1]$$

Se observa que para definir todas las posiciones posibles de la barra compatibles con los vínculos es suficiente conocer el ángulo α que la misma forma con una de las rectas fijas. Adoptando dicho ángulo como variable independiente se tiene

$$dl_1 = b \frac{\cos(\omega + \alpha)}{\sin \omega} d\alpha, \quad dl_2 = b \frac{\cos \alpha}{\sin \omega} d\alpha.$$

Aplicando el principio de los trabajos virtuales, indicando con α_0 una hipotética posición de equilibrio, tenemos que debe ser

$$L = b \left(m_1 g \frac{\cos (\omega + \alpha_0)}{\sin \omega} \sin \theta + \right. \\ \left. + m_2 g \frac{\cos \alpha_0}{\sin \omega} \sin (\theta + \omega) \right) dz = 0, [2]$$

de donde

$$\frac{\cos (\omega + \alpha_0)}{\cos \alpha_0} = - \frac{m_2}{m_1} \frac{\sin (\theta + \omega)}{\sin \theta} \quad [3]$$

y, si $\sin \theta \neq 0$, se deduce fácilmente

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \left(\frac{m_2}{m_1} + 1 \right) \operatorname{ctg} \omega + \frac{m_2}{m_1} \operatorname{ctg} \theta;$$

para $\sin \theta = 0$ (es decir cuando una de las rectas fijas es horizontal) se deduce directamente de [2]

$$\cos \alpha_0 = 0, \quad \alpha_0 = \pm \frac{\pi}{2};$$

en ambos casos se obtienen para α_0 dos valores posibles en cuadrantes opuestos y, como veremos más adelante, corresponde uno a la posición de equilibrio estable y el otro a la del equilibrio inestable.

Observamos que en la posición de equilibrio la resultante de $m_1 g$ y $m_2 g$ debe pasar por el centro instantáneo de rotación. En efecto, para un desplazamiento virtual del punto de aplicación de la resultante el trabajo debe ser nulo. Pero, como la resultante no es nula, dicho desplazamiento debe ser normal a su dirección; para que ello ocurra la resultante debe pasar por el centro instantáneo de rotación. Esta observación nos da otra manera de hallar la posición de equilibrio. En efecto, tomando momentos con respecto al centro instantáneo tenemos

$$m_1 g \overline{AC} \cdot \sin \theta - m_2 g \overline{BC} \sin (\omega + \theta) = 0,$$

de donde

$$\frac{m_2 \sin (\theta + \omega)}{m_1 \sin \theta} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}.$$

Por otra parte en el triángulo ABC se tiene, evidentemente,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{-\cos(\omega + \alpha_0)}{\cos \alpha_0};$$

luego

$$\frac{\cos(\omega + \alpha_0)}{\cos \alpha_0} = -\frac{m_2}{m_1} \frac{\sin(\theta + \omega)}{\sin \theta}$$

expresión idéntica a la [3] de donde se deduce α_0 .

3° *Estudio de las pequeñas oscilaciones de la barra alrededor de la posición de equilibrio.*— Haremos en lo que sigue $b = 1$. Pongamos

$$\alpha = \alpha_0 + \varepsilon \quad [4]$$

luego

$$\dot{\alpha} = \dot{\varepsilon}, \quad \ddot{\alpha} = \ddot{\varepsilon}. \quad [4']$$

Tratándose de pequeñas oscilaciones supondremos estar bastante próximos a la posición de equilibrio y con velocidades iniciales pequeñas de manera que podamos considerar que se verifica

$$\dot{\varepsilon}^2 \cong \varepsilon \ddot{\varepsilon} \cong \varepsilon^2 \cong 0. \quad [5]$$

Si queremos utilizar las ecuaciones de Lagrange, como se trata de un sistema con un solo grado de libertad, dichas ecuaciones se reducen a una sola:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \alpha} = Q$$

donde T es la energía cinética del sistema y Q es el coeficiente de $d\alpha$ en la expresión [2] del trabajo virtual. De [1] tenemos

$$l_1' = \frac{\cos(\omega + \alpha)}{\sin \omega} \dot{\alpha}, \quad l_2' = \frac{\cos \alpha}{\sin \omega} \dot{\alpha}$$

por lo tanto

$$T = \frac{1}{2} \frac{m_1 \cos^2(\omega + \alpha) + m_2 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \omega} \dot{\alpha}^2.$$

Reemplazando en la ecuación de Lagrange y despreciando los términos en $\dot{\alpha}^2$ obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{m_1 \cos^2 (\omega + \alpha) + m_2 \cos^2 \alpha}{\text{sen}^2 \omega} \ddot{\alpha} &= \\ &= \frac{m_1 \cos (\omega + \alpha) \text{sen } \theta + m_2 \cos \alpha \text{sen } (\theta + \omega)}{\text{sen } \omega} g \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta [2], [4] y las aproximaciones [5] resulta

$$\begin{aligned} \frac{m_1 \cos^2 (\omega + \alpha_0) + m_2 \cos^2 \alpha_0}{\text{sen}^2 \omega} \ddot{\varepsilon} &= \\ &= -g \varepsilon \frac{m_1 \text{sen } (\omega + \alpha_0) \text{sen } \theta + m_2 \text{sen } \alpha_0 \text{sen } (\theta + \omega)}{\text{sen } \omega} . \end{aligned}$$

El segundo miembro, teniendo en cuenta [3], puede escribirse

$$\begin{aligned} -g \varepsilon \frac{m_1 \text{sen } (\omega + \alpha_0) \text{sen } \theta - m_1 \text{sen } \theta \frac{\cos (\omega + \alpha_0)}{\cos \alpha_0} \text{sen } \alpha_0}{\text{sen } \omega} &= \\ &= -g \varepsilon \frac{m_1 \text{sen } \theta}{\cos \alpha_0} \end{aligned}$$

luego

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{g m_1 \frac{\text{sen } \theta}{\cos \alpha_0} \text{sen}^2 \omega}{m_1 \cos^2 (\omega + \alpha_0) + m_2 \cos^2 \alpha_0} \varepsilon = 0 .$$

Poniendo para abreviar

$$\frac{g m_1 \frac{\text{sen } \theta}{\cos \alpha_0} \text{sen}^2 \omega}{m_1 \cos^2 (\omega + \alpha_0) + m_2 \cos^2 \alpha_0} = k ,$$

resulta

$$\ddot{\varepsilon} + k \varepsilon = 0 . \quad [6]$$

El signo de k es el mismo del cociente $\text{sen } \theta : \cos \alpha_0$. Si dicho cociente es negativo el equilibrio es inestable pues la aceleración tiene el mismo signo que la elongación. Si, por el contrario, es positivo el equi-

librio es estable y la [6] es la ecuación diferencial de un movimiento armónico cuya conocida solución general es

$$\varepsilon = C_1 \cos \sqrt{k} t + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{k} t$$

y cuyo período vale

$$T = 2\pi : \sqrt{k}.$$

Podemos proponernos determinar la longitud del péndulo simple sincrónico del sistema. En efecto, el período de un péndulo simple es $T_s = 2\pi \sqrt{l:g}$. Igualando T con T_s se deduce

$$l = g : k$$

Esta solución es del Ing. PEDRO E. ZADUNAISKY.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

PROPUESTOS

51. — ERRATA: En el exponente de la integral que figura en el segundo miembro de la primera fórmula en el enunciado de este problema, como fué publicado en el fasc. anterior falta añadir — 1. Debe por tanto leerse

$$\int_0^1 t^{\frac{p+1}{\alpha} + \frac{q+1}{\beta} + \frac{r+1}{\gamma} - 1} F(t) dt.$$

52. — Demostrar que cualquiera que sea el número entero n se verifica

$$n^2 - (n-1)^2 + (n-2)^2 - (n-3)^2 + \dots \pm 2^2 \mp 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

53. — Dados n números $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ se hacen las medias aritméticas de los n grupos de $n-1$ números formados con ellos. Se repite la operación con estas n medias y así sucesivamente. De-

mostrar que los sucesivos grupos de n números tienden a la media aritmética de los números dados. Aplicar esta observación para demostrar que la media aritmética de n números positivos es mayor o igual que su media geométrica.

54. — Resolver la ecuación

$$x^6 + 6ax^4 + 4bx^3 + 9cx^2 + 12dx = 4 \frac{b^2c - 2abd + d^2}{a^2 - c}.$$

55. — De cuántas maneras diferentes se pueden colocar n torres en un tablero de ajedrez de n^2 casillas de tal manera que ninguna coma a otra y además una determinada de las diagonales del tablero esté libre de figuras? Aplicación al caso particular $n = 8$.

56. — Se pide una resolución analítica del problema siguiente que, por consideraciones sintéticas está discutido en la Nota «*Algunas desigualdades entre los elementos de un triángulo*» en este mismo fascículo (pág. 65):

Se da el perímetro $2p = a + b + c$ de un triángulo. Encontrar los límites inferiores y superiores de las sumas: 1º $h_a + h_b + h_c$ de las alturas; 2º $\beta_A + \beta_B + \beta_C$ de las bisectrices; 3º $m_a + m_b + m_c$ de las medianas.

Los problemas 54, 55, 56 han sido propuestos por el Dr. S. SISPÁNOV, Profesor de la Facultad de Ciencias de Asunción (Paraguay).

57. — Demostrar que siempre se pueden trazar n rectas que corten a una figura convexa del plano de manera que la dividan en

$$\frac{n^2 + n + 2}{2}$$

regiones.

58. — Se supone dado un cono circular recto y una cuerda del círculo base. Por esta cuerda se trazan los dos únicos planos que son paralelos a algún plano tangente del cono. Sean α_1, α_2 estos planos. Se pide:

1º Expresar en función de la distancia x de la cuerda al centro del círculo de la base las áreas, Σ_1, Σ_2 de las secciones (segmentos de parábola) del cono por los planos α_1, α_2 .

2º Determinar x de manera que el valor absoluto de la diferencia $\Sigma_1 - \Sigma_2$ tenga un valor dado S .

3º Encontrar el valor de x para el cual el área de la sección mayor deviene máxima.

CUESTIONES

8. — Sea un triángulo ABC y E, F, G , tres puntos situados respectivamente sobre los lados AB, AC, BC . Entre todas las homografías planas que tienen como puntos unidos los vértices A, B, C y transforman en sí mismo el interior del triángulo, determinar la que transforma el triángulo EFG en otro de área máxima y calcular esta área.

9. — En el tomo XIV del *Journal de Liouville* (1850), F. FAA DI BRUNO hace la siguiente observación interesante:

« La ecuación

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \dots + Rx^2 + Sx + T = 0,$$

admite raíces imaginarias si

$$P^2 - 2Q < m \sqrt[m]{T^2}.$$

La deducción depende del conocido teorema según el cual la media aritmética de m números es igual o mayor que su media geométrica. Los m números que se toman son los cuadrados de las m raíces de la ecuación.

Se propone extender el razonamiento para obtener otros criterios de existencia de raíces imaginarias de una ecuación.

BIBLIOGRAFIA

J. D. STRANATHAN: *The «Particles» of modern physics*. The Blakiston Company. Philadelphia, 1942, p. 571 + XVI.

Como nos dice el autor, este libro ha nacido de la recolección de una serie de cursos dados en los últimos 15 años y puestos al día para la publicación. Se presenta por tanto como una serie de monografías, sobre las principales investigaciones que han constituido la parte más deslumbrante de la física experimental del último medio siglo, desde la introducción de los conceptos de iones y electrones, hasta los descubrimientos del positrón, neutrón, etc.

Encontramos ordenadamente un primer capítulo sobre *los iones gaseosos y su comportamiento*, donde se habla de la conductibilidad de los gases, de la movilidad de los iones, de la manera de su formación, etc.; el segundo sobre *el carácter atómico de la electricidad y la medida de la carga del electrón*; el tercero sobre *la descarga en los gases rarefactos*, que nos introduce al estudio de los rayos catódicos y de la relación e/m para el electrón (cap. IV) y de los rayos positivos y de los isótopos (cap. V). En el VI capítulo se habla de *las teorías de Bohr y del efecto fotoeléctrico*; en el VII de *los rayos X* analizados en sus características (producción, velocidad de propagación, fenómenos de difracción, reflexión, etc.) y en su origen atómico (ley de Moseley); en el capítulo VIII se trata de la radioactividad natural; los capítulos IX, X y XI respectivamente del *positrón*, del *neutrón* y de la *desintegración artificial del núcleo*, hasta las experiencias más recientes, sobre la desintegración del núcleo de uranio; en los capítulos XII y XIII encontramos los *rayos cósmicos* y el descubrimiento del *mesotrón*. Terminamos con el capítulo XIV sobre la *difracción de las partículas materiales* (electrones, átomos y moléculas) en los cristales.

Cada uno de estos argumentos está tratado con el evidente propósito de informar al lector sobre las dificultades experimentales y teóricas y sobre los obstáculos que se interponen a la completa interpretación de los fenómenos, dando abundancia de detalles, sacados la mayoría directamente de las publicaciones originales de los investigadores, que permiten formarse una idea clara y precisa, cuanto puede esperarse de una exposición de carácter general.

La bibliografía sigue paso a paso la exposición, con el fin expreso de facilitar al lector que quiera profundizar mayormente los argumentos tratados.

Veamos, por ejemplo, como desde el primer capítulo se encara el tema de la ionización de los gases.

La exposición empieza con una breve introducción histórica, donde se recuerda a Coulomb como el primero el cual pudo afirmar en forma experimentalmente fundada que los cuerpos cargados eléctricamente se descargan a través del aire;

luego el nombre de otros experimentadores más modernos que fueron agregando sus resultados en el mismo sentido; finalmente una experiencia de Crooks claramente demostrativa. Luego se describen las principales características de estos fenómenos de descarga; su variación con la diferencia de potencial entre el cuerpo cargado y el ambiente que lo rodea, con las condiciones atmosféricas, con la magnitud del recipiente en que se trabaja, con la naturaleza de las paredes; se recuerdan los medios con que podemos cambiar artificialmente la conductibilidad de un gas (rayos ultravioletas, rayos X, radiaciones radioactivas). En todas estas experiencias hay que medir a menudo corrientes muy débiles, algunas veces inferiores a la sensibilidad que se puede obtener con un galvanómetro. El autor completa pues la exposición explicando el uso de los electroscopios para tales medidas.

Presentadas así las principales características experimentales del fenómeno, el autor pasa a las interpretaciones.

Para dar una explicación de conjunto de los fenómenos basta evidentemente la hipótesis iónica, admitiendo como causas ionizadoras por ej. las radiaciones cósmicas o las emanaciones radioactivas del suelo. Pero el análisis se hace más complicado cuando se estudia el fenómeno en una cámara de ionización y con potenciales crecientes. Llevando en abscisas la diferencia de potencial en los electrodos, y la intensidad de corriente en ordenadas, esta curva se puede considerar como una recta en la primera parte; luego la corriente va aumentando siempre más rápidamente, hasta que alcanza la intensidad de saturación, donde la curva sigue por un trecho paralelamente a las abscisas; para campos elevados la corriente crece de nuevo rápidamente y estalla la descarga disruptiva.

Sigamos el autor en el desarrollo del análisis teórico de este fenómeno. Supongamos que por alguna causa una masa de gas se encuentre ionizada. Al aplicar un campo eléctrico E , éste imprimirá a los iones de carga e y de masa m una aceleración igual a eE/m ; en el tiempo medio τ que transcurre entre una colisión y la sucesiva de los iones con las moléculas del gas, éstos adquirirán una velocidad media

$$U = \frac{e\tau}{2m} E = u E \quad [1]$$

A la constante u se da el nombre de «movilidad».

El autor no hace por ahora ninguna hipótesis sobre los valores de la masa y de la carga de los iones; y, para considerar el fenómeno en la forma más general admite que los iones positivos y negativos puedan tener movilidades distintas, respectivamente u y w .

Indicando entonces con $U = uE$ y $W = wE$ las relativas velocidades medias en el campo considerado, y llamando n al número de pares de iones presentes en la unidad de volumen del gas y A a la superficie de los electrodos, se encuentra, para la corriente de ionización, la expresión

$$i = NAe(u + w)E \quad [2]$$

Unos párrafos más adelante el autor expone los resultados obtenidos experimentalmente para la determinación de u y w . Encontramos allí unas interesantes consideraciones relacionadas al fenómeno de « envejecimiento » de los iones. Este fenómeno había sido observado por primera vez por H. A. Erickson, el cual pudo determinar que los iones positivos y negativos del aire atmosférico tienen, al momento de su formación, la misma movilidad (Erickson encontraba el valor de 1,87 cm/sec/volt/cm), pero que, después de pocos segundos, la movilidad de los iones positivos se reducía a 1,36, mientras quedaba invariada aquélla de los iones negativos.

Investigaciones sucesivas confirmaron que los iones positivos y negativos tienen, en origen, igual movilidad, pero que, tanto en los unos como en los otros, se observan a menudo fenómenos de envejecimiento. Se ha podido establecer también que cada ión pasa bruscamente de una movilidad a la otra, y que la forma de esta variación depende de la naturaleza y de la cantidad de las impurezas en el gas (que es casi imposible eliminar completamente). Se ha concluido entonces con atribuir los fenómenos observados a la formación de iones complejos por choque entre los iones primitivos y las moléculas de las impurezas.

Volviendo ahora a la corriente de ionización, encontramos que la expresión [2] aparentemente sencilla, resulta complicada por depender también n del campo eléctrico. El autor la analiza entonces en dos casos particularmente sencillos. El primero se presenta cuando el campo es muy débil y el número de iones presentes es sencillamente aquel que se encontraría para $E = 0$. En estas condiciones la corriente de ionización resulta proporcional al campo, como efectivamente demuestra el primer trecho lineal de la curva experimental.

El segundo caso está ofrecido por las condiciones de saturación, que se obtienen cuando el campo es suficientemente elevado como para dirigir hacia los electrodos todos los iones que se forman en el gas, antes de que puedan recombinarse. La intensidad de la corriente no depende entonces, entre ciertos límites, de un ulterior aumento del campo.

Pero la interpretación de la última parte del gráfico es la que mayormente se presta a la discusión.

El autor expone al principio la teoría de Townsend. Se supone que, para estos campos elevados, los iones positivos y negativos adquieran energía suficiente para ionizar otras moléculas; representando entonces con α y β el número de moléculas que los iones respectivamente negativos y positivos desdoblán en el recorrido de un cm., para un valor determinado del campo eléctrico y de la presión del gas, y siendo d la distancia entre los electrodos, se encuentra, para la corriente de ionización, la expresión

$$i = i_0 \frac{(\alpha - \beta) e^{(\alpha - \beta) d}}{\alpha - \beta e^{(\alpha - \beta) d}} \quad [3]$$

donde experimentalmente se demuestra que es siempre $\forall \alpha$.

El cálculo de esta expresión está desarrollado en el texto, pasando antes por el caso simplificado en el cual la ionización por choque se atribuye a un

solo tipo de iones (por razones que se verán luego se adoptan los iones negativos).

Una tabla demuestra claramente que los resultados experimentales satisfacen con buena aproximación la fórmula [3].

Sin embargo se presentan luego algunas dificultades de orden teórico, que confirman la hipótesis fundamental. En efecto, calculando según la teoría cinética de los gases el camino medio de los iones gaseosos, resulta que éstos no pueden adquirir en su trayecto energía suficiente para ionizar otras moléculas. Se ha pensado por esto que la ionización por choque debiera atribuirse solo a los electrones libres, los cuales, por su pequeñez, tienen menor probabilidad de choque y luego un camino medio mucho más largo. Resultó entonces necesario completar la hipótesis admitiendo una emisión adicional de electrones en el cátodo, que se atribuyó, según los autores, a un efecto fotoeléctrico debido a las radiaciones emitidas por el gas o al bombardeo de los iones positivos.

Una y otra hipótesis permiten igualmente construir una nueva expresión para la corriente de ionización en campos elevados, que coincide bien cuanto la anterior con la experiencia y que se escribe

$$i = i_0 \frac{e^{\alpha d}}{1 - \gamma (e^{\alpha d} - 1)} \quad [4]$$

donde α y d conservan el significado que tenían en la [3], y γ representa el número de electrones liberados en el cátodo.

Encontradas así las expresiones [3] y [4] para la intensidad de la corriente de ionización de un gas, en campos elevados, quedan por determinar las condiciones necesarias para la formación de la descarga disruptiva. Se observa con este fin que, fijados los valores de α y β en la [3] o de α y γ en la [4], se puede determinar la distancia d , de manera que sea respectivamente

$$\alpha = \beta e^{(\alpha - \beta) d} \quad 1 = \gamma (e^{\alpha d} - 1)$$

Es evidente que, en estas condiciones, los denominadores de las expresiones [3] y [4] se hacen cero, la intensidad de la corriente se hace infinita y se produce la descarga disruptiva.

Comparando con los resultados experimentales, las dos teorías resultan, también en este punto, igualmente satisfactorias. Sin embargo el autor hace notar que, según experimentos modernos y particularmente exactos, ni una ni otra fórmula interpretan exactamente los hechos; se concluye que el fenómeno de la descarga disruptiva es en realidad mucho más complejo y no perfectamente conocido.

El mismo método histórico-analítico determina el desarrollo de los capítulos siguientes, evidenciándose siempre el propósito del autor de nunca adelantar, en cuanto sea posible, las teorías con respecto a los hechos, de manera que el lector pueda aprender estos últimos sin ideas preconcebidas, y pueda tener luego una base bien fundada para comprender las primeras.

Son particularmente interesantes en este sentido por ejemplo el capítulo III, que habla de la descarga en los gases rarefactos, y el capítulo XII, sobre los rayos cósmicos. En los dos casos se trata de fenómenos muy complejos, y, particularmente el segundo, no perfectamente interpretados, donde solo un conocimiento detallado de los resultados experimentales permite darse cuenta de las dificultades que se presentan en su interpretación y de los puntos débiles de las teorías propuestas.

Muchas veces da vida e interés a la exposición la forma con que el autor nos presenta al principio un fenómeno tal como lo vieron los primeros investigadores; luego, siguiendo la bibliografía, nos permite rehacer el mismo camino que han hecho experiencias y teorías en su desarrollo.

Así vemos, en la última parte del tercer capítulo, que la más antigua teoría de la descarga en los gases rarefactos parecía explicar satisfactoriamente los fenómenos que se observan en el espacio obscuro de Crooks (elevado número de iones positivos y fuerte absorción de energía), partiendo del principio que los electrones, liberados en el cátodo originaran en esta región una elevada ionización; pero esta explicación resultó inaceptable cuando Thomson, y después de él, otros experimentadores, pudieron demostrar que los electrones, tienen, a la salida de esta región, sensiblemente toda la energía que les corresponde por haber cruzado la caída de potencial catódica y, por consiguiente, no pueden haber producido en ella sino un pequeñísimo número de iones; y el resultado fué confirmado por la observación que la longitud del espacio obscuro de Crooks es del mismo orden que el camino medio de los electrones en la presión en la cual se trabaja, y luego el número de choques debe ser en ella despreciable. Para la interpretación completa del fenómeno queda abierta la discusión.

Análoga evolución de los conceptos nos demuestra en el capítulo VIII, sobre la radioactividad natural, el estudio de los rayos α .

Los resultados más antiguos, obtenidos fotográficamente por medio de la cámara de Wilson, o midiendo la corriente producida en una cámara de ionización, conducían a afirmar que los rayos α emitidos por una sustancia radioactiva tienen un poder de penetración medio característico del elemento considerado; y la longitud del camino de cada partícula oscila alrededor de este valor medio; se llegaba a la conclusión de que todas las partículas emitidas por el mismo núcleo tienen, al momento de la emisión, la misma energía, mientras las pequeñas diferencias de camino podían atribuirse a la distribución probabilística, no perfectamente homogénea, del número de los choques entre partículas y moléculas del gas. Pero más tarde se descubre que dos elementos radioactivos, el ThC' y el RaC' , emiten también un pequeño número de partículas notablemente más veloces que la media. Esta observación es origen de nuevas investigaciones más delicadas, de las cuales se llega finalmente a la conclusión que casi todos los elementos emiten partículas α de energías diferentes y distribuidas según niveles característicos. De estas conclusiones ha nacido la teoría de los niveles energéticos del núcleo.

Otros capítulos podrían citarse por las numerosas descripciones de carácter experimental, como por ejemplo el capítulo II, donde se describen los métodos

para medir la carga electrónica y particularmente, la experiencia de Millikan; como el capítulo IV, donde podemos seguir el perfeccionarse de métodos y dispositivos para obtener el valor de la relación e/m para el electrón, su variación con la velocidad y, por extrapolación, el valor e/m_0 para el electrón en reposo; como el capítulo V, sobre los rayos positivos y los isótopos.

Tenemos, para terminar, los últimos capítulos, sobre el positrón, el neutrón, la desintegración artificial del núcleo, etc., donde, penetrando siempre más en la física modernísima, se nos presentan aquellas experiencias características de la nueva física, cuya interpretación se apoya en gran parte sobre la hipótesis de la equivalencia entre masa y energía y la ley de Einstein. También en esta parte se da cuenta de un gran número de resultados obtenidos con varios métodos y por varios autores, pero se pasa un poco más rápidamente sobre los detalles experimentales.

El último capítulo se abre con la pregunta «¿Partículas u ondas?». ¿Existen verdaderamente las ondas de De Broglie? El autor deja la contestación última al futuro, pero con evidente preferencia para la hipótesis; recuerda en detalle las experiencias de Davisson y Germer, donde el fenómeno de difracción de electrones se observa por reflexión sobre la cara de un cristal; luego otras experiencias más recientes, que han permitido obtener figuras de difracción, por haces de electrones atravesando una delgada lámina cristalina y han demostrado que fenómenos de difracción aproximadamente en las mismas condiciones de la experiencia de Davisson y Germer pueden obtenerse también con haces de átomos y moléculas.

La analogía entre los fenómenos que se observan cuando un haz de rayos X penetra en una sustancia cristalina, y aquellos que se observan utilizando haces de electrones, átomos y moléculas, son en realidad, sugestivamente análogos. Y sugestiva es también la buena concordancia entre los resultados que se obtienen aplicando la teoría de De Broglie, y los resultados experimentales.

Sin embargo unos detalles aun parecen poco seguros. Nos preguntamos por ejemplo, porqué en el caso de la experiencia de Davisson y Germer, se observan unos pequeños desplazamientos entre las longitudes de ondas obtenidas experimentalmente y aquellas previstas teóricamente, y estas se interpretan como un efecto de refracción de las ondas de De Broglie en los cristales, mientras que tales desplazamientos parecen desaparecer en las figuras de difracción obtenidas por transparencia.

LAURA LEVI.

- El precio de suscripción a « Mathematicae Notae » es de 8 \$ (m/n) anuales.
- El Instituto de Matemática publica también una colección de Notas y Memorias bajo el título « Publicaciones del Instituto de Matemática de la Facultad de Ciencias etc. », cuyo precio de suscripción es de 10 \$ (m/n) por volumen. Se pueden adquirir los fascículos sueltos de las publicaciones al precio señalado en la pág. 4 de esta misma tapa.
- Para todo lo relacionado al Instituto, a las Publicaciones y a « Mathematicae Notae » dirigirse al Director del Instituto de Matemática — Avenida Pellegrini 250 — Rosario (R. Argentina).
- Para suscripciones y adquisición de los fascículos sueltos dirigirse al Director del Instituto o bien al Bibliotecario de la Facultad de Ciencias Matemáticas, etc., Avenida Pellegrini 250, Rosario (Rep. Argentina). Los importes deberán remitirse en efectivo o bien por giros postales o bancarios pagaderos en la ciudad de Rosario.
- Los suscriptores en la República Oriental del Uruguay pueden dirigirse al señor Prof. Rodolfo F. Sayagués, Constituyente 1863, Montevideo.
- En la sección de Bibliografía se publicarán los análisis críticos de libros recientes que sean enviados al Instituto de Matemática.

INDICE DEL FASCICULO 1

Fascículo 1.

—Sobre la resolución aproximada de ecuaciones trascendentes re-		
presentadas por desarrollos de Taylor (B. LEVI)	pág.	1
—Sobre algunas desigualdades (ROBERTO FRUCHT)	»	41
—Ejercicios y Problemas - Soluciones	»	46
—Ejercicios y Problemas - Propuestos	»	57
—Bibliografía.— C. PLÁ - E. KASNER AND J. NEWMAN	»	60

PUBLICACIONES
DEL
INSTITUTO DE MATEMATICAS
DE LA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, FÍSICO-QUÍMICAS Y NATURALES
APLICADAS A LA INDUSTRIA
DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

Año 1939 - Vol. I.

	m\$ñ
1 - B. LEVI — Sobre el sistema $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xy) dx = p(y) ; \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xy) dy = q(x)$	1.00
2 - L. A. SANTALÓ — Geometría integral de figuras ilimitadas	1.80
3 - F. AMODEO — Origen y desarrollo de la Geometría proyectiva. Trad. de Nicolás y José Babini	8.00
4 - B. LEVI — Una teoría intuicionista de las funciones racionales enteras de una variable	1.00
Año 1940 - Vol. II.	
1 - P. MONTEL — Funciones armónicas y subarmónicas	2.00
2 - G. FUBINI — La ley de la media para funciones no derivables. B. LEVI — Sobre un teorema de Weierstrass, el teorema de Rolle y el anterior teorema de Fubini	1.00
3 - L. A. SANTALÓ — Una demostración de la propiedad isoperimétrica del círculo	1.20
4 - L. A. SANTALÓ — Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas	1.50
5 - I. Antecedentes de la creación del Instituto. II. Acto de inauguración oficial del Instituto. C. PLÁ — Origen y propósitos del Instituto. J. REY PASTOR — La matemática italiana en el último medio siglo y la posición del Dr. Beppo Levi en ella. B. LEVI — Evolución del pensamiento matemático	1.50
6 - E. GASPAS — Fórmulas integrales referentes a intersección de una figura plana con bandas variables	1.50
7 - A. ROSENBLATT — Sobre el teorema de los grandes números en la teoría de la probabilidad	1.00
8 - M. COTLAR — Sobre conjuntos no medibles y generalización de la integral de Lebesgue - Prólogo por B. Levi	1.50
9 - B. LEVI — La noción de « dominio deductivo » como elemento de orientación en las cuestiones de fundamentos de las teorías matemáticas ...	1.50
Año 1941 - Vol. III.	
1 - Homenaje a la memoria de V. Volterra y J. J. Thomson. C. PLÁ — Semblanza de Sir Joseph J. Thomson. B. LEVI — La personalidad de Vito Volterra	1.00
2 - G. FUBINI — Algunas propiedades de los grupos discontinuos finitos ...	2.00
3 - B. LEVI — Teoría de la integral de Lebesgue independiente de la noción de medida	3.00
4 - B. LEVI — Sobre la inversión de una integral definida	1.20
5 - L. A. SANTALÓ — Curvas extremales de la torsión total y curvas-D ...	2.00
6 - A. TERRACINI — Orígenes de algunos conceptos geométricos	2.00
7 - L. A. SANTALÓ — Complemento a la Nota « Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas »	1.00
Año 1942 - Vol. IV.	
1 - L. A. SANTALÓ. — Sobre ciertas variedades con carácter de desarrollable en el espacio euclidiano de 4 dimensiones	3.00
2 - M. COTLAR. — Funciones univalentes sobre un conjunto de puntos del contorno de un dominio de holomorfismo	2.00
3 - JOSÉ L. MASSERA. — Fórmulas en diferencias finitas con aplicación a la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales de primer orden	3.50