32

MINISTERIO DE JUSTICIA E INSTRUCCION PUBLICA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS, Etc.
DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

MATHEMATICÆ NOTÆ

BOLETIN
DEL
INSTITUTO DE MATEMATICA

DIRECTOR
BEPPO LEVI

AÑO PRIMERO - FASC. 1

ROSARIO
REPUBLICA ARGENTINA
1941

—El precio de suscripción a "Mathematicae Notae" es de 8 $ (m/n) anuales.

—El Instituto de Matemática publica también una colección de Notas y Memorias bajo el título "Publicaciones del Instituto de Matemática de la Facultad de Ciencias etc.", cuyo precio de suscripción es de 10 $ (m/n.) por volumen. Se pueden adquirir los fascículos sueltos de las publicaciones al precio señalado en la pág. 3 de esta misma tapa.

—Para todo lo relacionado al Instituto, a las Publicaciones y a "Mathematicae Notae" dirigirse al Director del Instituto de Matemática — Avenida Pellegrini 250 — Rosario (R. Argentina).

—Para suscripciones y adquisición de los fascículos sueltos dirigirse al Bibliotecario de la Facultad de Ciencias Matemáticas etc. — Avenida Pellegrini 250 — Rosario (R. Argentina).

INDICE DEL FASCICULO

MINISTERIO DE JUSTICIA E INSTRUCCION PUBLICA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS, Etc.
DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

MATHEMATICÆ NOTÆ

BOLETIN

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA

DIRECTOR
BEPPO LEVI

AÑO PRIMERO

ROSARIO
REPUBLICA ARGENTINA
1941

QUEDA HECHO EL
DEPOSITO DE LEY

IMPRENTA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL - SANTA FE

ANTECEDENTES DE LA CREACION DE LAS «MATHEMATICAE NOTAE»

El 11 de junio de 1940, el señor Consejero Profesor Doctor Fernando L. Gaspar presentó el proyecto de creación de una publicación periódica, órgano del Instituto de Matemática de la Facultad, en la que se debían plantear problemas, proponer cuestiones, publicar notas de carácter anecdótico, histórico, biográfico, bibliográfico, metodológico, etc.

El objetivo inmediato era procurar la aproximación al Instituto de los estudiantes de la Facultad, utilizando como vínculo de enlace la materia misma, por lo cual también proponía se efectuaran concursos anuales entre los estudiantes que enviaran soluciones de los problemas y cuestiones propuestos.

La finalidad perseguida por el autor del proyecto, era estimular la investigación matemática en nuestro país, impulsando la obra formativa que, junto con la investigación, son las funciones principales que debe realizar el Instituto partiendo del concepto que la matemática, como toda ciencia, es tal mientras es ''problema'', por cuya razón es la investigación, característica inconfundible de la actividad científica.

Destinado el proyecto a estudio de la Comisión de Enseñanza de Ingeniería Civil y recabados del Director del Instituto Profesor Doctor Beppo Levi informes y antecedentes en el extranjero, de casos análogos, ésta dictaminó favorablemente.

En los considerandos de dicho dictamen, que fué aprobado íntegramente por el H. Consejo Directivo en su sesión del 27 de setiembre de 1940, la Comisión aconsejaba sancionar la ordenanza proyectada, por las siguientes razones:

''a) La importancia y trascendencia de la iniciativa que no se reduce ''a la publicación de una revista más y al planteamiento de cuestiones y pro- ''blemas cuya resolución importe un simple esfuerzo de ingenio, sino que se ''trata de facilitar la obra formativa que debe realizar el Instituto de Ma- ''temática, procurando establecer un vínculo entre éste y el alumnado, a fin ''de orientar a los estudiantes hacia el campo de la investigación y mediante ''la exposición de adecuadas cuestiones y proposición de problemas, mostrar ''cómo, aún partiendo de ideas muy simples, las teorías se proyectan en cam- ''pos más vastos. Así, quienes tengan vocación y condiciones para los estudios matemáticos, encontrarán facilidades y orientación.

''b) Que el logro de tales finalidades sólo es posible si el más concien- ''zudo y cuidadoso análisis preside la selección de las cuestiones a proponer, ''así como la apreciación y crítica de las respuestas que se reciban, lo cual ''exige, además de una profunda y amplia cultura matemática, una facultad ''didáctica que no siempre tienen aún los grandes investigadores.

'') Que, en nuestro caso, ambas condiciones están llenadas, en la más ''amplia medida que se pudiera pretender, por el eminente profesor que, para ''honor de la Facultad, dirige el Instituto de Matemática y tendrá a su car- ''go la dirección de la publicación a crearse y el desarrollo del plan de acción ''propuesto.

''d) Que el Profesor Dr. Beppo Levi, Director del Instituto de Mate- ''mática, ha expresado su satisfacción por la iniciativa y su adhesión a la ''resolución que proponemos, colaborando en su redacción y aportando ante- ''cedentes de publicaciones extranjeras, similares a la que se establece en el ''artículo 2º de la ordenanza cuya sanción se propone''.

Dicha ordenanza fué aprobada en la misma sesión. Con un complemento añadido en la sesión del día 30 de mayo 1941, es la siguiente:

Expediente 768 - G - 1940.

Rosario, setiembre 27 de 1940.

EL CONSEJO DIRECTIVO

ORDENA:

Art. 1º — El Instituto de Matemática de la Facultad editará una publicación periódica, cuya regularidad establecerá el Director del Instituto, la cual se titulará ''Mathematicae Notae - Boletín del Instituto de Matemática, etc.''.

Art. 2º — Las ''Mathematicae Notae'' serán dirigidas por el Director del Instituto. Tendrán carácter preferentemente didáctico y en ellas se plantearán problemas, se abordará el estudio de cuestiones metodológicas y se publicarán notas de carácter histórico, biográfico, crítico, bibliográfico, anecdótico, etc.

Art. 3º — Las ''Mathematicae Notae'' se distribuirán gratuitamente, por intermedio del Instituto y en la forma que su director reglamente, a los alumnos de la Facultad. Los pedidos de otros interesados serán atendidos mediante el pago del precio fijado por el Decanato a propuesta del Director por número suelto o suscripción.

Art. 4º — El Director abrirá un concurso entre los estudiantes que envíen soluciones a los temas oportunamente planteados, efectuándose la adjudicación de premios anuales, que serán reglamentados y discernidos por el Director — previa comunicación al Decanato — debiendo tenerse en cuenta el ciclo de estudios realizados por los concursantes en la Facultad.

El Director podrá abrir también otro concurso para la resolución de las mismas cuestiones, problemas y ejercicios, al cual podrán optar todos los demás lectores.

Art. 5º — El Director propondrá la naturaleza de los premios a acordarse.

Art. 6º — Comuníquese, dése al libro de resoluciones y archívese.

(Fdo.): CORTÉS PLA, Decano — LUIS AYMÍ, Secretario.

CONCURSOS — REGLAMENTO

Las "Matematicae Notae" publicarán artículos, cuestiones, ejercicios, soluciones y correspondencia. La resolución de las cuestiones propuestas será publicada en números sucesivos de la revista al cabo de un tiempo razonable, a juicio del Director del Instituto, para obtener contestaciones de los lectores; de las cuestiones publicadas bajo el título de ejercicios la dirección se reserva la decisión, en cada caso, de publicar o no las respuestas.

A fin de año se adjudicarán dos premios:

1º Por concurso entre alumnos de la Facultad que contesten satisfactoriamente a cuestiones, problemas o ejercicios.

2º Por concurso entre todos los demás lectores del país o del extranjero que contesten en modo acertado a los mismos.

Los premios consistirán en tratados de extensión cultural o libros de especialización.

Las soluciones deben ser entregadas al Instituto en redacción clara y en hojas distintas para cada cuestión, problema o ejercicio. En cada hoja deberá señalarse el nombre del autor; los alumnos de la Facultad indicaran el año de estudios que cursan en la misma y, los del primer año, además la escuela media de la cual provienen. Estos elementos serán tenidos en cuenta para el juicio, conjuntamente con el valor intrínseco de las soluciones y la forma expositiva de las mismas, dándose por la dirección la máxima importancia a la disposición por la cual se compararán sólo alumnos de igual preparación.

"Matematicae Notae" no puede, por su naturaleza servir de intermediario para la publicación de cuestiones dudosas que pudieran interesar a algun colaborador; pero la dirección agradece por anticipado todas las sugestiones que le viniesen de los lectores y la colaboración de los colegas.

La revista tendrá una sección de Bibliografía donde se publicarán análisis críticos de libros recientes.

La Noua Scientia de Nicolo Tartaglia con vna gionta al terzo Libro.

Disciplinæ Mathematicæ loquuntur
Qui cupitis Rerum varias cognoscere causas
Discite nos, cunctis hac patet una uia.

"Las disciplinas matemáticas dicen: Vosotros que deseais conocer las varias causas de las cosas, aprendednos; para todos está abierta esta única via".

FACSIMILE DE LA PORTADA DE "LA NOVA SCIENTIA" DE NICOLÓ TARTÁGLIA

PROLOGO

Las «Mathematicae Notae» que con el apoyo entusiasta e iluminado de las autoridades de la Facultad de Ciencias Matemáticas, Físico-Químicas y Naturales se propone editar el Instituto de Matemáticas de Rosario tienen una finalidad muy distinta de la ordinaria de un periódico científico. Se dirigen ellas ante todo a los alumnos de la Facultad a la cual el Instituto está vinculado, pero esperan también encontrar alguna simpatía más allá del recinto de la Facultad, por parte de jóvenes que por primera vez se acercan a esta rama científica tan singular.

Digo singular, porque la matemática, si bien es una ciencia en el sentido ordinario de las ciencias positivas, es decir, un sistema de conocimientos, — y en este sentido es sin más la primera ciencia a la que se acerca el niño, — y si bien ella interesa al ingeniero, al físico, al químico como instrumento poderoso para las aplicaciones, más que todo es un modo de pensar, es una filosofía.

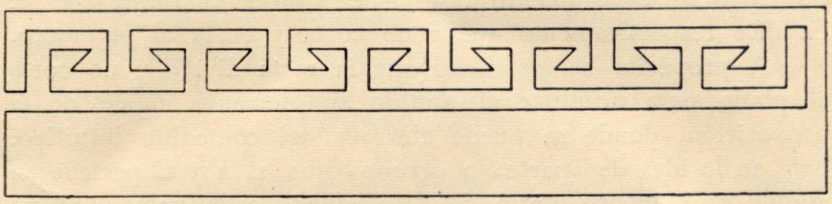
Qué es esta filosofía, resulta muy difícil de decir; no es ciertamente la que tal vez se piensa vulgarmente, la filosofía de la exactitud exterior, la filosofía de la certeza indudable; antes bien como toda la filosofía, como todo el pensamiento, no admite definición. Ni conviene exagerar en considerar lo dicho como nota particular de la matemática; toda ciencia en algo es filosofía; pero es verdad que cuando la ciencia se vuelve filosofía, a lo último se vuelve matemática, sin que haga falta para ello que use para expresarse los símbolos ordinarios de la matemática.

Las «Mathematicae Notae» pretenden, pues, despertar un poco de interés para este pensamiento matemático; y quieren hacerlo en cuanto sea posible de modo ecléctico e indirecto. Entienden publicar preferentemente artículos sencillos, sin pretensiones de investigación en altas esferas, a menudo artículos didácticos. No queremos excluir que alguna vez pudiéramos *acercarnos a algún argumento más abstracto; pero queremos recordar que el pensamiento matemático no se forma sino en contacto con los objetos propios de la matemática.*

Con este intento propondremos problemas y procuraremos que sean adaptados a distintos grados de preparación escolar; nos agradaría fueran considerados por los lectores más que todo como estímulo y que las soluciones exorbitaran, en cualquier sentido digno de consideración, de los términos en que los problemas estarán puestos.

Y estaremos muy contentos si artículos y problemas llegaran a constituir la oportunidad para una correspondencia con amigos del Instituto cercanos y lejanos, cuyos consejos y sugestiones tendremos como actos de amistad.

B. Levi



LOS POLIGONOS PLANOS Y EL TEOREMA DE JORDAN

Tratamos con este ensayo de ofrecer un ejemplo de un argumento que, por los medios matemáticos utilizados se presenta extremadamente simple, por lo cual también la preparación que requiere en el lector puede decirse nula (requiriéndose sin embargo un poco de reflexión), mientras al contrario, como se verá por algo de bibliografía que daremos al final, se enlaza a cuestiones fundamentales para el análisis moderno.

Queremos puntualizar, en primer lugar, la noción intuitiva del *interior* y *exterior* de un polígono plano. Esta idea, que parece muy simple mientras se habla de triángulos y de cuadrángulos, ya para el cuadrángulo, con las dos formas del convexo y del no-convexo, muestra que la noción de «ángulo de un polígono» no es la simple noción de ángulo entre dos semirectas, sino que depende esencialmente del conocimiento de lo que debe considerarse como interior al polígono; y la determinación de este «interior» alrededor de un punto cualquiera depende del trazo entero del polígono en sus partes más lejanas, como se puede averiguar por ej. en el polígono que encabeza el artículo.

1. En los fundamentos de la geometría euclidiana [1] se admite ordinariamente como *postulado* que *una recta r del*

---

[1] Todo lo que decimos seguiría valiendo para la geometría no euclidiana hiperbolica o de Lobachewsky, a lo más con pequeñas variantes.

plano divide el conjunto de los puntos del plano que no le pertenecen en dos partes caracterizadas por la propiedad que, si A y B son puntos de una misma parte, el segmento AB no tiene puntos comunes con r; al contrario si A y B pertenecen a partes distintas el segmento AB tiene puntos comunes con r. Se dice respectivamente que r no corta y corta al segmento.

A propósito hemos dicho que la recta divide y no corta el plano para acentuar el sentido simplemente lógico de la proposición, donde se puede abstraer del contenido intuitivo. Está en la idea de «parte» o «grupo» que, si A y B pertenecen ambos a la misma parte de C o ambos a la parte que no contiene C, A y B pertenecen a la misma parte.

Las dos partes nombradas se llaman *semiplanos* y se dicen *opuestas con respecto a r.*

Admitamos también como postulado que *sobre cada recta con nombrar dos puntos de ella en un orden determinado, se define un orden de sucesión para todos los puntos de la recta*; se dice que se establece un *sentido* sobre la recta. Siendo que dos puntos se pueden nombrar según dos órdenes AB y BA, resulta que sobre cada recta se pueden fijar dos sentidos, que se llaman opuestos.

2. Además de estos postulados geométricos, tendremos que recordar las observaciones siguientes, más bien lógicas, o, si se quiere, topológicas.

Diremos que un grupo (finito) de elementos están dispuestos en sucesión cíclica (o brevemente, constituyen un ciclo) cuando están *nombrados* en un orden determinado, conviniendo que cada uno se dice *preceder* a aquel que es nombrado después (y éste *seguir* al otro), y el último nombrado se dice preceder al primero. No se cambia la sucesión cíclica si, empezando el nombramiento de uno cualquiera de los elementos dados, se sigue nombrándolos en el mismo orden, con sólo que, después del último del primer nombramiento se enuncie el primero y se siga hasta haberlos considerados todos.

Se define una sucesión cíclica que se dice inversa de la anterior con cambiar entre sí las relaciones de preceder y seguir.

Señalando el orden de los elementos de una sucesión cíclica con asignar a ellos índices numéricos progresivos, por ej.:

$$\alpha_1 \; \alpha_2 \; \ldots \; \alpha_m,$$

habrá pues de recordar que se debe considerar a 1 como sucesivo de m. Dos elementos no consecutivos de un ciclo lo dividen en dos trozos, a lo largo de cada uno de los cuales se llega de uno a otro de estos elementos por medio de sucesivos pasajes de un elemento al sucesivo.

3. En un plano definimos *polígono simple* a una sucesión cíclica de puntos del plano

$$A_1 \, A_2 \ldots A_n$$

tal que los segmentos determinados por los pares de puntos sucesivos no tengan puntos comunes además de estos extremos (cada uno de los cuales pertenece necesariamente a dos segmentos y no más). Dichos puntos se llaman *vértices* y los segmentos *lados* del polígono. No se excluye que 3 o más vértices consecutivos puedan estar alineados; pero en este caso tienen que seguirse en un sentido determinado (si no determinarían lados con partes comunes además de los vértices). Se consideran como idénticos polígonos que se obtienen suprimiendo o intercalando vértices intermedios entre vértices alineados.

Un polígono se dice *convexo respecto a determinado lado* cuando todos sus vértices no pertenecientes a la recta de este lado están en el mismo semiplano respecto a ella. Un polígono que sea convexo respecto a todos los lados se llama brevemente *convexo*.

Si un polígono no es convexo respecto a cierto lado, y A_k A_{k+1} son dos vértices consecutivos en semiplanos opuestos respecto a dicho lado, la recta de éste corta en un punto el segmento $A_k \, A_{k+1}$. Por comodidas agregaremos este punto a los vértices, de manera que el pasaje de un semiplano a otro se hará siempre a través de un vértice.

Llamaremos *contorno del polígono* a la sucesión de sus lados.

4. Recordemos algunos particulares de los polígonos convexos: supondremos siempre (n. 3) que en un polígono convexo no existen vértices consecutivos alineados.

Se dice *interno* al polígono todo punto que respecto a cada lado esté en el mismo semiplano de los vértices no pertenecientes a este lado. Se dice *externo* a todo punto ni interno, ni del contorno. Un punto interno y uno externo están siempre en semiplanos opuesto con respecto a uno a lo menos de los lados.

Existen puntos internos al polígono, siendo tales por ej. los puntos de los segmentos que unen vértices no consecutivos.

Existen puntos externos, siendo tales los puntos de la prolongación de un segmento que une un punto interno con un punto de un lado. También *son puntos externos los de las dos prolongaciones de un lado,* porque están respecto a un vértice de este lado en el semiplano opuesto con respecto al segundo lado que pasa por el otro vértice.

El segmento que une dos puntos internos al polígono está constituído de puntos todos internos y por tanto no corta al contorno.

El segmento que une un punto interno con uno externo corta siempre al contorno; en efecto sea A interno y B externo; como ya se observó estarán en semiplanos opuestos con respecto a un lado; el segmento AB cortará luego la recta de este lado en un punto M. Si M está propiamente sobre el lado la proposición está realizada; en caso contrario M es todavía externo y, por la misma razón el segmento AM tendrá que cortar la recta de algún otro lado en un punto M_1; para M_1 se repite la misma observación; notando que las rectas cortadas anteriormente no pueden ser cortadas nuevamente por la misma recta $BMM_1 \ldots A$ y que es finito el número de los lados, se concluye que el razonamiento tiene que terminar con que uno de los sucesivos puntos de intersección se encuentre propiamente sobre un lado.

Más generalmente cualquier poligonal que une un punto interior con un punto exterior al polígono debe cortar al contorno, porque recorriendo los vértices sucesivos de la poligonal habrá de encontrar dos consecutivos, uno interno y uno externo; el lado que los une cortará, por lo dicho, al contorno.

Si A y B son puntos ambos externos al polígono existe una poligonal que los une sin cortar al contorno; en efecto, si A y B están en el semiplano opuesto al polígono con respecto al mismo lado, el segmento que los une está en este mismo semiplano y luego no corta al contorno; en caso contrario, sean a y b dos lados respecto a los cuales A y B se encuentren respectivamente en el semiplano opuesto del polígono. Si estas rectas no son paralelas, las paralelas a ellas respectivamente por A y B se cortan en un punto C; pues resultan totalmente externas al polígono, la poligonal ACB no corta al polígono. Si a y b son paralelas, puede que exista otro lado b_1 respecto al cual B esté en el semiplano opuesto del polígono; b_1 y b no pueden ser paralelas y por tanto basta repetir lo dicho eligiendo b_1 en lugar de b; finalmente, si no existe esa b_1, el mismo razonamiento anterior se cumple si, en lugar de la paralela a b, se traza por B la recta que lo une a un punto cualquiera de la prolongación de b.

Merece notar que estas propiedades de los puntos internos y externos a un polígono convexo los caracterizan independientemente de la definición dada anteriormente, en el sentido que una vez conocido tan sólo un punto interior o un punto exterior, todos los demás puntos del plano resultan clasificados en internos y externos por la sola propiedad de poderse o no poderse unir por medio de una poligonal que no corte al contorno.

Recordamos que se llama *ángulo* (*interno*) del polígono convexo al ángulo determinado por dos lados consecutivos y que es común a los dos semiplanos que, respecto a estos lados, contienen al polígono. Cada ángulo de un polígono convexo es convexo. Si por el vértice del ángulo se traza una semirecta internamente al ángulo, sus puntos bastante próximos al vértice son internos al polígono; ellos constituyen un segmento de puntos internos que tiene por extremos el vértice y un segundo punto de intersección de la semirecta con el contorno; precisamente, si se descompone el polígono en triángulos por medio de las diagonales que pasan por el vértice, la semirecta será interior al ángulo de uno de estos triángulos y corta al lado opuesto.

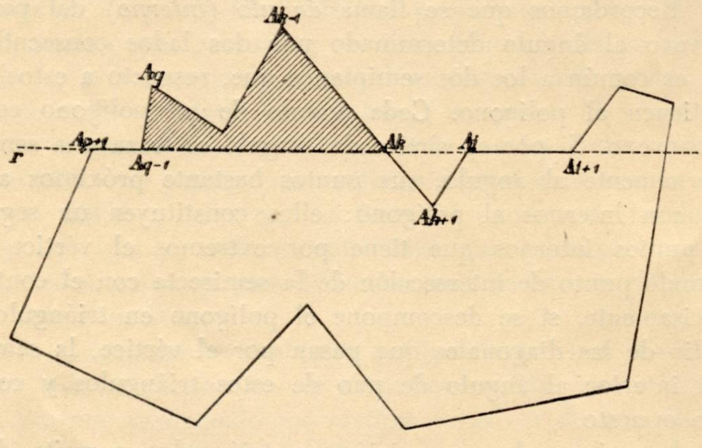
La misma descomposición en triángulos permite demostrar que si n es el número de los vértices de un polígono convexo, la suma de sus ángulos internos vale $(n-2)2R$ (representando con R el ángulo recto) [1].

5. Volvamos ahora a los polígonos generales considerados en el n. 3. Nos proponemos de ver hasta qué punto se pueden

(1) En el caso de la geometría no-euclidiana hiperbolica, la suma de los ángulos de un triángulo es $< 2R$, y por consiguiente también la suma de los ángulos internos del polígono resulta $< (n-2)\ 2R$.

extender las propiedades encontradas en el n. anterior para los convexos.

Si el polígono $A_1 A_2 \ldots A_n$ no es convexo, existe por lo menos un lado $A_i A_{i+1}$ tal que existen dos vértices A_h, A_j en semiplanos opuestos con respecto a la recta $r = A_i A_{i+1}$; recorriendo cada uno de los dos trozos en que A_h, A_j dividen la sucesión cíclica de los vértices habrá que pasar de uno a otro semiplano; y, teniendo en cuenta las convenciones del n. 3, esto no podrá realizarse sino por encontrar un grupo de vértices consecutivos de la forma $A_p\, A_{p+1} \ldots A_{q-1}\, A_q$ $(q \geqq p+2)$ en que A_p y A_q pertenecen a semiplanos opuestos y $A_{p+1} \ldots A_{q-1}$ están sobre la recta r. Llamaremos estos grupos «grupos de vértices de pasaje a través de r». Notamos por claridad que sobre la recta r podrían existir vértices no pertenecientes a grupos de pasaje, en tanto que pueden presentarse grupos de la forma $A_f\, A_{f+1} \ldots A_{g-1}\, A_g$ donde $A_{f+1} \ldots A_{g-1}$ están sobre r y A_f, A_g en el mismo semiplano con respecto a ella.



Fijada ahora una recta como esta r, elijamos sobre ella un sentido; recorriendo la recta según este sentido, sea $A_p A_{p+1} \ldots A_{q-1} A_q$ el primer grupo de pasaje que se encuentra. Por lo dicho existe sobre la recta por lo menos un segundo grupo de pasaje y, por tanto, existe algún vértice no perteneciente a este primer grupo y siguiente a A_{q-1} sobre r, según el sentido fijado. Sea A_k el primer vértice que se encuentra en estas condiciones (pertenezca o no a un grupo de pasaje). Descomponemos entonces el sistema cíclico de los vértices en los dos ciclos parciales

$$A_{q-1} A_q \ldots A_{k-1} A_k \quad y \quad A_k A_{k+1} \ldots A_p \ldots A_{q-1} \quad (1)$$

cada uno define un polígono que diremos *componente* del polígono dado. Se ve que los polígonos componentes tienen, en conjunto, como lados, los mismos lados del polígono dado y además uno (sólo) $A_{q-1} A_k$, perteneciente a r y común a los dos; cada uno de estos componentes podrá tener todavía grupos de vértices de pasaje a través de r; pero todos comprendentes vértices siguientes a A_{q-1} en el sentido fijado sobre r. Si no existen de estos grupos los dos componentes habrán resultado convexos por respecto a r; si al contrario existen, se puede repetir la operación volviendo a recorrer r en el sentido fijado y considerando separadamente los dos polígonos. Continuando en la operación mientras sea posible ,se llegará al fin a agotar los vértices del polígono sobre r y haber descompuesto el polígono dado en cierto número de polígonos parciales, todos convexos respecto a los lados que ellos tienen sobre r.

Se debe notar que por efecto de la descomposición los polígonos parciales seguirán siendo convexos con respecto a sus lados respecto a los cuales el polígono dado fuera convexo (podrán al contrario resultar convexos respecto a algún lado, respecto al cual el polígono dado no lo era). Considerando sucesivamente todas las rectas como r, se llegará así, después de un número finito de operaciones, a haber descompuesto el polígono dado en cierto número de poligonos, todos convexos. Los lados del polígono dado seguirán siendo lados de estos componentes y cada uno de uno sólo de ellos. Se habrán añadido cierto número de lados (pertenecientes a las rectas de los lados respecto a los cuales el polígono dado no era convexo) y cada uno de éstos pertenecerá a dos de los polígonos componentes. Notemos además que, en el caso que, después de la primera operación, los polígonos (1) no sean todavía convexos respecto a r, por haber convenido de seguir obrando con esta misma recta manteniendo el sentido fijado anteriormente, en estas nuevas descomposiciones los grupos de vértices $A_q A_{q-1} A_k$ y $A_p A_{p+1} \ldots A_{q-1} A_k$ seguirán perteneciendo siempre respectivamente al mismo polígono parcial; por tanto, cuando se habrá llegado a tener sólo polígonos convexos respecto a r, estos grupos de vértices pertenecerán respectivamente a dos componentes puestos enteramente en semiplanos opuestos respecto a r (por estar A_p y A_q en semiplanos opuestos); y el segmento $A_{q-1} A_k$ será lado común a estos dos polígonos solamente.

Mostraremos luego (n. 7) que la propiedad se generaliza en tanto que *todos los segmentos añadidos para llegar a la descomposición en polígonos convexos son comunes a dos solos componentes puestos en semiplanos opuestos respecto a ellos.*

6. Llamaremos *puntos internos* al polígono dado a los puntos que son internos a alguno de los polígonos convexos componentes (según la descomposición fijada como se ha descripto arriba) o que son internos a alguno de los segmentos añadidos; *externos* a los puntos externos a todos los componentes; *ángulos* (*internos*) del polígono a los ángulos que tienen por vértice algún vértice del polígono dado y que son ángulos (internos), o sumas de tales, de los polígonos convexos componentes.

Claro está que con sólo lo dicho hasta aquí no se puede asegurar que estas definiciones sean unívocas, es decir que la calidad para un punto de ser interno o externo y para un ángulo de ser ángulo (interno) del polígono sea intrínseca e independiente del modo como se ha efectuado la descomposición (dado que ésta puede cambiar a raíz de la indeterminación del orden en que se consideran las rectas como r y se fija el sentido sobre ellas). Vamos ahora a establecer esta univocidad con demostrar el teorema siguiente:

Si A y B son dos puntos interno a un polígono, existe una poligonal que tiene estos puntos como extremos y no corta al contorno del polígono; si A y B son uno interno y otro externo al polígono, cualquier poligonal que los une corta al contorno.

Cada vértice es vértice de un (solo) ángulo del polígono, cuyos lados pasan respectivamente por el vértice precedente y por el sucesivo; sobre cada semirecta por el vértice, interna al ángulo, el vértice es extremo de un segmento de puntos internos al polígono; sobre cada semirecta por el vértice interna al ángulo explementario (externo al polígono), dicho vértice es extremo de un segmento de puntos externos.

La suma de los ángulos de un polígono de n vértices

(n-gono) vale $(n-2)\,2R$, donde R representa el ángulo recto [1].

Resulta inmediatamente de este teorema que: 1°. Apenas se reconozca un punto como interno al polígono, todos los restantes puntos internos están determinados por la propiedad de poderse unir con este punto por medio de una poligonal que no corte el contorno; 2°. En cada par de ángulos determinados por las semirectas de dos lados con un vértice común, uno de estos ángulos es interno y otro externo. Se forman así dos clases de ángulos, las cuales, por la observación anterior, no pueden permutarse (en la clasificación como internos y externos) sino en conjunto; 3°. Pero la última propiedad determina la clase de los internos por ser su suma $=(n-2)\,2R$ (o $<(n-2)\,2R$), mientras que, por consiguiente, la suma de los ángulos externos será $=(n+2)\,2R$ (o $>(n+2)\,2R$).

El teorema enuciado se completa además en las observaciones siguientes:

Un punto P del contorno de un polígono se puede siempre unir con un punto cualquiera Q interno por medio de una poligonal que no tiene otro punto común con dicho contorno, porque el punto P está sobre el contorno de un polígono convexo componente del polígono dado; bastará elegir un punto M dentro de este polígono, el cual será por consecuencia interno al dado y unir M a Q por medio de una poligonal sin puntos comunes con el contorno y trazar el segmento MP. Sigue que:

Si cada uno de los polígonos Γ_1, Γ_2 tiene sus lados externos al otro, todos los puntos internos a uno de ellos son externos al otro, porque un punto Q intenno a Γ_1 se podrá unir, por la observación anterior, a un punto cualquiera P del contorno de Γ_1 por medio de una poligonal que no contiene puntos externos a Γ_1 y por tanto no corta a Γ_2; no podría luego ser Q interno a Γ_2 y P externo.

7. Demostremos ahora el teorema por inducción.

Dado el polígono $A_1 A_2 \ldots A_n$, con la construcción indicada en el n. 5 se define una sucesión de operaciones de descomposición cuyo primer paso es la consideración de los dos polígonos

[1] Como ya dijimos hablando de los polígonos convexos, si se tratara de geometría hiperbólica este número sería mayor que la sume de los ángulos.

$$A_{q-1}A_q \ldots A_{k-1}A_k \quad , \quad A_k A_{k+1} \ldots A_p \ldots A_{q-1} \qquad (1)$$

y las operaciones sucesivas consisten en la aplicación del mismo procedimiento a estos polígonos parciales; sólo que el número de las operaciones aplicadas a cada uno de estos es menor, por lo menos en 1, del número de las operaciones aplicadas al polígono primitivo. Al final de todas estas operaciones se llega a polígonos componentes convexos los cuales realizan (como hemos recordado en el n. 4) el teorema que se quiere demostrar. Bastará pues admitir que el teorema está ya realizado por los polígonos (1) (o, si se quiere decir diversamente, cuando el número de las operaciones análogas a (1) necesarias para descomponer un polígono cualquiera en polígonos convexos es menor que el número necesario para el polígono dado); y mostrar que se realiza entonces también para este polígono.

Las observaciones del n. 5 nos muestran que, una vez admitido nuestro teorema para los dos polígonos (1), los ángulos internos a estos polígonos con el vértice A_{q-1} deben estar en semiplanos opuestos respecto a r y por tanto sus lados distintos de $A_{q-1}A_k$ (es decir $A_{q-1}A_q$ para el primer polígono y $A_{q-1}A_{p+1}$ o $A_{q-1}A_p$ para el segundo) son externos, cada uno, al polígono al cual no pertenece.

Observando que los dos polígonos (1), además del lado $A_{q-1}A_k$ no tienen puntos comunes, resulta que cada uno es completamente externo al otro.

Sean ahora A y B dos puntos internos al polígono dado según la definición del n. 6; puede que sean internos al mismo polígono (1); ellos pueden entonces unirse por medio de una poligonal de puntos todos internos a dicho polígono y por consiguiente todos externos al otro; esta poligonal no corta pues al contorno del polígono. Si al contrario A es interno a uno y B al otro polígono (1), sea P un punto cualquiera del segmento $A_{q-1}A_k$; según una observación anterior se puede trazar una poligonal que una A y P y, salvo el punto P, sea totalmente interna al primer polígono y una poligonal que una B y P y, salvo el punto P, sea totalmente interna al segundo. Estas poligonales forman, en conjunto, una poligonal que une A y B sin cortar al polígono dado.

Sean al contrario A punto interno y B externo al polígono dado; A será interno a uno de los polígonos (1); sea por ej. al primero; cualquiera poligonal que una A y B tiene que cortar este polígono; si el punto de intersección no está sobre $A_{q-1} A_k$, pertenece también a algún lado del polígono dado. En el caso contrario, sea P el primer punto de intersección de dicha poligonal con $A_{q-1} A_k$ que se encuentra recorriéndola a partir de B; se llega así a P por un segmento que tiene un extremo en P y está en el semiplano opuesto a A_q; los puntos de este segmento próximos a P son por tanto internos a un polígono convexo componente del segundo polígono al cual pertenece el lado $A_{q-1} A_k$; sea N uno de estos puntos, que será por consiguiente interno al segundo polígono. El trozo de la poligonal considerada, entre B y N tendrá que cortar al contorno del segundo polígono; pero el punto de intersección no podrá encontrarse sobre $A_{q-1} A_k$, por la definición de P; luego pertenecerá al contorno del polígono dado.

Lo dicho vale naturalmente también si en todos los razonamientos anteriores el punto A estuviese sobre el segmento $A_{q-1} A_k$. Teniendo en cuenta la observación final del n. anterior, se sigue que todos los segmentos que puede haber ocurrido añadir para la descomposición de cada uno de los polígonos (1) son externos al otro y por tanto estos segmentos no tienen puntos comunes; luego si la proposición final del n. 5 se admite realizada por los polígonos (1), lo es también por el dado.

El primer aparte de nuestro teorema queda demostrado.

Pasemos a la consideración de los ángulos; notemos que las afirmaciones del teorema no sufren alteración por añadir o suprimir ángulos llanos resultantes de vértices insertados internamente a un lado (n. 3); en efecto, un tal ángulo pertenece al polígono por pertenecer al polígono convexo componente al que pertenece el lado considerado y contribuirá en 2R a la suma de los ángulos, mientras que, por considerar este ángulo, se habrá aumentado en 1 el número de los vértices.

Si ahora consideramos los ángulos del polígono $A_1 A_2 \ldots A_n$ ellos serán los mismos de los dos polígonos (1) separadamente, salvo por los ángulos de vértices A_{q-1} y A_k, que por estar para los dos polígonos en semiplanos opuestos respecto al lado común serán, para el polígono total, las sumas de los dos ángulos pertenecientes a los dos polígonos. Al final resulta como suma de los ángulos del polígono total la suma de las sumas correspondientes a los dos polígonos parciales; sea n_1 el número de los vértices del primero de los polígonos (1), n_2 el número de los vértices del segundo; por tener los dos polígonos dos vértices comunes, se tiene $n_1 + n_2 = n + 2$; la suma de los ángulos es por tanto:

$$(n_1 - 2)\,2R + (n_2 - 2)\,2R = (n - 2)\,2R.$$

8. Podemos ahora completar en un punto importante el teorema del n. 6. Resulta evidente por lo dicho que si *una poligonal que une dos puntos A, B corta al contorno del polígono, el número de los puntos de intersección es par si los dos puntos son ambos internos o ambos externos, es impar si los dos puntos pertenecen a clases distintas,* porque a cada intersección se pasa de puntos interiores (pertenecientes a polígonos convexos componentes) a puntos exteriores, o vice versa.

Queremos mostrar que *si A y B son puntos externos al polígono, existe una poligonal que tiene A y B por extremos y no corta al contorno.*

Para esto, siendo dado el polígono $A_1 A_2 \ldots A_n$, consideremos un polígono convexo, por ej. un cuadrado, que contenga este polígono en su interior; sea $B_1 B_2 B_3 B_4$. Uniendo un punto arbitrario M de un lado de este cuadrado con un punto del contorno del polígono se tiene una recta que cortará al polígono en el punto elegido y, además, eventualmente, en otros puntos; sea N el primero de estos puntos que se encuentra recorriendo la recta a partir de M. Trazamos otra recta próxima a MN y que no corte este segmento, por ej. una paralela que se puede elegir bastante próxima para que corte los mismos lados del cuadrado y del polígono en dos puntos M_1 y N_1 de manera que también el segmento M_1N_1 no corte ulteriormente el polígono y el cuadrado. Consideremos entonces el polígono simple cuyos vértices son, tomados en orden conveniente, los mismos del cuadrado y del polígono dado, y además M, N, N_1, N_1; salvo los segmentos MM_1, NN_1, el nuevo polígono tendrá los mismos lados del dado y del cuadrado. Si la numeración de los vértices ha sido elegida convenientemente, se puede fijar que este nuevo polígono sea $MNA_1 A_2 \ldots A_n\ N_1 M_1 B_1 B_2 B_3 B_4$. Si vamos a buscar de determinar respecto a este polígono cuáles son los puntos internos y cuáles los externos, notamos que los puntos externos al cuadrado y los puntos internos al polígono dado pueden unirse por medio de una poligonal de la cual un lado pase por un punto del segmento MN y uno de $M_1 N_1$, sin cortar a los otros lados; tienen pues que pertenecer a la misma clase; pues los primeros son externos como se puede confirmar por la construcción del n. 5, tendrán que ser todos externos. Los puntos internos deberán por consiguiente buscarse entre los que son internos al cuadrado y externos al polígono dado y al cuadrángulo MNN_1M_1. Por las propiedades de los ángulos internos y externos, resultan ciertamente internos los puntos que satisfacen a esta condición [1] y son suficientemente próximos a los lados; luego, si por un punto A cualquiera satisfaciente a esta condición trazamos una recta que encuentre al contorno y llamamos P al primer punto del contorno que se encuentra a partir de A, un punto M de este segmento, bastante próximo a P será interno, y por tanto será tal también A que está unido a M por un segmento que no corta al contorno.

Puesto esto, sean A y B dos puntos externos al polígono $A_1 A_2 \dots A_n$. Se puede siempre elegir un cuadrado como $B_1 B_2 B_3 B_4$ que contenga A y B en su interior y trazar las rectas MN, $M_1 N_1$ de manera que A y B no estén dentro del cuadrángulo $MN M_1 N_1$; A y B resultan entonces internos al polígono $MNA_1 \dots A_m N_1 M_1 B_1 B_2 B_3 B_4$ y pueden unirse por una poligonal toda de puntos internos, la cual por lo tanto no corta al contorno del polígono dado.

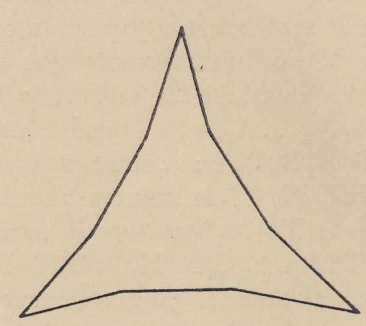
9. Un ángulo de un polígono se llama cóncavo o convexo según sea menor o mayor del ángulo llano. *Cada polígono simple tiene por lo menos 3 ángulos convexos*, porque siendo $(n - 2)\, 2R$ la suma de los ángulos del polígono de n vértices, no es posible tener $n - 2$ ángulos $\geqq 2R$. Se puede demostrar la proposición independientemente de esta consideración aritmética, por inducción; en efecto, por definición, todos los ángulos de un polígono convexo son convexos. Suponemos que un polígono $A_1 A_2 \dots A_n$ tenga un ángulo cóncavo, sea por ej. $A_1 A_2 A_3$; esto significa que, prolongando $A_2 A_3$, de la parte de A_2, los puntos próximos a A_2 son internos; este prolongamiento encontrará una primera vez al contorno en un

[1] Se confirma fácilmente por el cálculo de los ángulos que son ángulos internos al nuevo polígono los ángulos externos al dado; en efecto $MNA \dots A_n N_1 M_1 B_1 B_2 B_3 B_4$ tiene $n + 8$ vértices; la suma de los ángulos tiene que ser $(n + 6)\, 2R$; y son $4R$, ángulos internos del cuadrado, $4R$ en M, N. N_1, M_1 y finalmente $(n + 2)\, 2R$ suma de los ángulos externos del polígono dado.

punto M que, según las convenciones anteriores, puede suponerse él mismo un vértice. Repitiendo una observación anterior, cada uno de los dos polígonos $A_2 M \ldots A_1$, $A_2 A_3 \ldots M$ tiene a lo máximo n—1 vértices; suponemos de saber que cada uno tiene al menos tres ángulos convexos; son así 6 ángulos convexos, de los cuales por lo menos tres no tienen por vértices A_2 ni M, porqué, para el segundo polígono, el ángulo MA_2A_3 es llano. Son así tres ángulos convexos del polígono dado.

Existen polígonos de un número cualquiera de lados con sólo tres ángulos convexos, como muestra la figura adjunta.

10, La teoría que precede podríase ampliar muchísimo para establecer otras propiedades de los polígonos que nos parecen intuitivas principalmente por la costumbre. Notamos, por ej. que las observaciones últimas nos han demostrado que, siendo dada una poligonal simple (no cerrada) que una a dos puntos A, B, se pueden siempre trazar otras poligonales simples que no cortan a la anterior y unen igualmente A y B de manera de cerrar con ella otros tantos polígonos simples. Cada par de lados consecutivos de la dada poligonal determina dos ángulos explementarios y cada uno de ellos puede actuar, indiferentemente, como ángulo interno de uno u otro de estos polígonos. Empero las reflexiones anteriores permiten comprobar fácilmente que, como lo muestra un examen intuitivo, dichos ángulos se disponen en dos sucesiones bien definidas tales que, si para uno de estos polígonos uno de estos ángulos es interno (externo) lo son también todos los ángulos de la misma sucesión.



Sean Γ_1, Γ_2, Γ_3 tres de estas poligonales que unan los puntos A, B sin cortarse entre sí y supongamos, en primer lugar que el lado que pasa por A de Γ_3 sea interior al ángulo de vértice A en el polígono formado por Γ_1 y Γ_2; sobre dicho lado existe pues un punto M interno a este polígono, y por tanto la poligonal Γ_3 se encuentra totalmente interna a él, porque en la hipótesis opuesta cortaría Γ_1 o Γ_2; sigue entre tanto que también el lado de Γ_3 por B es interno al polígono $\Gamma_1 \Gamma_2$. Además Γ_1 es exterior al polígono $\Gamma_2 \Gamma_3$ y Γ_2 es exterior al polígono $\Gamma_1 \Gamma_3$ porque los lados por A de Γ_1 y de Γ_2 resultan externos respectivamente a los ángulos de vértice A de los polígonos $\Gamma_2 \Gamma_3$ y $\Gamma_1 \Gamma_3$. Resulta de aquí que los puntos internos a cada uno de estos polígonos son internos a $\Gamma_1 \Gamma_2$; basta observar que la afirmación se realiza para los puntos bastante próximos a A (o a B); si entonces M es uno de estos puntos, por ej. de $\Gamma_2 \Gamma_3$, y N es otro punto interno al mismo polígono, una poligonal que una M, N y no corte al contorno, no puede tampoco cortar a Γ_1 porque los puntos de Γ_1 distintos de A, B son externos a dicho polígono.

Sean C y D dos puntos elegidos respectivamente sobre Γ_1 y sobre Γ_2 distintos de A y B y pensemos trazada una poligonal que una C, D y sea interna a $\Gamma_1 \Gamma_2$ (se puede suponer que C y D sean vértices (n. 3)); sus puntos próximos a C serán internos a $\Gamma_1 \Gamma_3$, mientras D es externo; se concluye que dicha poligonal cortará Γ_3. Se puede expresar el resultado obtenido diciendo que *si sobre el cortorno de un polígono simple se fijan 4 puntos, A, B, C, D, que se siguen en el orden mismo que les hemos nombrados y se unen alternadamente por medio de dos poligonales internas al polígono, estas dos poligonales se cortan.*

La condición necesaria y suficiente para que dos polígonos con una parte del contorno común, como los anteriores $\Gamma_1 \Gamma_3$, $\Gamma_1 \Gamma_3$, sean uno interior al otro es que a lo largo de la parte común del contorno tengan los mismos ángulos internos; se sigue entonces, como se vió, que los ángulos internos de vértice A (o B) son también uno parte del otro. Luego, si tres poligonales Γ_1, Γ_2, Γ_3 que unen dos puntos A, B (sin cortarse) pudieran constituir, tomadas dos a dos, tres polígonos sin puntos internos comunes, debería realizarse que respecto a los pares de polígonos que tienen como parte común del contorno una determinada de estas poligonales, los ángulos internos determinados por los lados de esta poligonal son explementarios; además el ángulo en A (o en B) de uno cualquiera de estos polígonos sería explementario de la suma de los otros dos. Llamamos n_1, n_2, n_3 a los números de los vértices de Γ_1, Γ_2, Γ_3, además de A y B; la suma de los ángulos internos de todos los polígonos sería por tanto $(n_1 + n_2 + n_3)\, 4R +$

$2 \cdot 4R$; pero la suma de los ángulos de cada polígono es respectivamente $(n_1 + n_2)\, 2R$, $(n_1 + n_3)\, 2R$, $(n_2 + n_3)\, 2R$; y luego la suma total resulta $2\,(n_1+n_2+n_3) \cdot 2R$. Resultaría así una contradicción que sólo se elimina con admitir que *siempre cuando tres poligonales simples unen dos puntos A, B sin cortarse, una de ellas es interior al polígono formado por las otras dos.*

Por la aplicación repetida de estas observaciones dejamos al lector de mostrar que *dados tres polígonos simples externos uno a otro, de cualquier manera se tracen dos poligonales abiertas cada una de las cuales tenga un vértice común (y no más) con cada uno de los polígonos, sin cortarse entre sí, no es más posible trazar una tercera poligonal que encuentre cada polígono en un solo punto y no corte a ninguna de las dos.*

La teoría de los polígonos, además de su interés directo de puntualización geométrica, tiene otro importantísimo por su extensión a los contornos curvos. Se presenta entonces ante todo el problema de definir qué es curva y qué es contorno y para esto es necesario introducir consideraciones de continuidad.

Se define ordinariamente como *curva* (*curva de Jordan*) al conjunto de los puntos cuyas coordenadas se pueden representar por los valores simultáneos de dadas funciones continuas de una variable real t definidas en un cierto intervalo a—b, finito o infinito. La curva se llama *abierta y simple* (sin puntos dobles) si a valores distintos del parámetro t corresponden siempre puntos distintos; se llama *cerrada* (y simple) si a los valores $t = a$ y $t = b$ del parámetro corresponde el mismo punto, pero corresponden puntos distintos entre sí y de éste a todos los restantes valores del parámetro. En el caso de la curva cerrada se acostumbra a menudo extender el intervalo de variabilidad del parámetro t a toda la recta real por medio de la convención que a valores de t diferentes en un múltiplo de la diferencia $b - a$ correspondan valores iguales de las funciones que representan las coordenadas; brevemente se expresa esto diciendo que se define una curva cerrada cuando las coordenadas se ponen iguales a funciones continuas periódicas, de igual período, del parámetro real t.

En el análisis infinitesimal de las funciones de más variables ocurre frecuentemente de referirse al hecho de que una curva simple cerrada del plano divide el plano en una parte exterior y una interior a la curva. El teorema que hemos demostrado afirma esto para el caso de que la curva sea un polígono. Mientras la atención de los matemáticos fué dirigida prnicipalmente a dominios convexos o poco más complicados, el hecho fué admitido como intuitivo. Una demostración general fué dada por primera vez por Camille Jordan en su *Cours d'Analyse* (1893) y el teorema se recuerda corrientemente como *teorema de Jordan*. Muchos estudios sobre este argumento siguieron y varias otras demostraciones fueron dadas después; pero la mayoría de ellas se fundan sobre la propiedad misma admitida para los polígonos. Adquiere por tanto interés la demostración preliminar de este caso particular, el cual, además (como se ha visto en la tratación anterior) resulta independiente de consideraciones de continuidad (pudiendo la teoría anterior desenvolverse por ej. en un plano constituído por sólos puntos de coordenadas racionales). Este complemento necesario fué dado, según creemos, la primera vez por O. Veblen (*A system of axioms for geometrie* — Transactions of the Amer. Math. Society — 1904) y por H. Hahn (*Ueber die Anordnungssätze der Geometrie* — Monatshefte für Math. und Phisyk — 1908) siguiendo direcciones distintas de la que hemos adoptado arriba.

Una dirección para la demostración del teorema de Jordan que no requiere tratar aparte el caso de los polígonos (pero usando abundantemente de consideraciones de continuidad) se basa sobre la noción de *orden de un punto del plano con respecto a un contorno cerrado,* llamando así al número de las vueltas que una semirecta que tenga como origen este punto dá cuando un punto de ella recorre con continuidad dicho contorno hasta volver al punto de partida. Una exposición muy detenida de esta dirección se puede leer en el *Lehrbuch der Funktionentheorie* de W. F. Osgood (5ª. ed. I vol. — 1928 — p. 157—183) donde sin embargo se supone que las funciones que representan las coordenadas realicen condiciones mucho más estrictas de lo efectivamente necesario. La definición del orden no requiere que la curva considerada sea simple (es decir no se corte a sí misma); pero esta hipótesis es necesaria para concluir el teorema de Jordan; mientras para curvas cualesquiera el orden de un punto puede tomar valores enteros cualesquiera (también ∞) para las curvas de Jordan no puede tomar más que los valores 0 y 1. El lector puede proponerse de demostrar este hecho para los polígonos (tienen orden cero los puntos exteriores y 1 los interiores) siguiendo, por ej. un método de inducción, después de haber observado que se realiza para los polígonos convexos.

Noticias bibliográficas sobre el argumento pueden verse en la *Encyclopaedie der Mathematischen Wissenschaften* — Band II C, 12 y también, pero en forma mucho más reducida, en la edición francesa de la misma (*Encyclopédie des sc. math.*, Tome II, Vol. 1 Fasc. 1, p. 140). Véase también la memoria de O. Feigl, *Ueber einigen Eigenschaften der einfachen stetigen Kurven*; (*sobre algunas propiedades de las curvas simples continuas*) — Math. Zeitschrift, 27, 1928).

B. Levi

NICOLO TARTAGLIA Y LA RESOLUCION DE LA ECUACION DE TERCER GRADO

Es sabido que la fórmula para la resolución algebraica de la ecuación cúbica sin segundo término se llama, según los autores, fórmula de Cardano o fórmula de Tartaglia. En efecto, Hieronimo Cardano publicó por primera vez la fórmula en su «Ars Magna» aparecida en 1545; pero como él mismo declara, la había obtenido de Tartaglia en 1539, quien dice haberla descubierto en 1534. Finalmente, según se acepta universalmente por declaración del mismo Cardano y de su discípulo Ferrari, se debe conceder a Tartaglia a lo sumo el mérito de un redescubrimiento, porque desde el principio del siglo Scipione del Ferro, de la Universidad de Bolonia, la habría enseñado a algún conocido.

Nos proponemos detallar un poco la historia de este descubrimiento, uno de los que más apasionaron a los matemáticos de la época y que ha sido más debatido por los historiadores posteriores.

En aquellos tiempos (principios del siglo XVI) era costumbre frecuente entre matemáticos el proponerse mutuamente problemas y cuestiones en forma de desafío público para probar y comparar su ingenio. De aquí que muchas veces quien lograba encontrar reglas o métodos nuevos para resolver determinados tipos de problemas, procuraba guardarlos para sí, ocultándolos a los demás, con lo cual además de poseer un medio para resolver las cuestiones en que las reglas tuvieran aplicación, podía a su vez proponer multitud de problemas análogos, cuya solución resultase extremadamente difícil para otro que no poseyera la regla rápida de solución. De esta manera se explica que quien primero encontrase la fórmula para resolver la ecuación de tercer grado tuviera interés en guardarla.

Ya hemos dicho que Hieronimo Cardano en su famosa «Ars Magna», atribuye el descubrimiento de la fórmula que resuelve la ecuación cúbica sin término de segundo grado (o sea de la forma $x^3+px+q=0$) a Scipione del Ferro, lector de la Universidad de Bolonia, quien debió encontrarla a principio del siglo XVI. Sin embargo, comunicada sólo a un reducido círculo de amigos y familiares, no tuvo divulgación y pasó desconocida por los matemáticos de la época.

Más tarde, en 1534, Nicoló Fontana de sobrenombre Tartalea o Tartáglia, descubre por su cuenta la misma regla, estimulado probablemente por los problemas que le fueron puestos por cierto Anton Maria Fiore o Florido (1), (discípulo de del Ferro), pero se negó a comunicarla a los demás matemáticos, de lo cual se justifica del modo siguiente en una conversación que él declara haber sostenido con Cardano en 1539 (2):

''Io ve dirò, io non fazzo tanto il carestioso, per il simplice capitolo, ne per le cose ritrovate per lui, ma per quelle, che per notitia de quello si possono ritrovare, perche egli e una chiave, che ne apre la via a potere investigare infiniti altri capitoli, et si il non fuse che al presente io son occupato nella traduttione di Euclide in volgare (3) (e per fin a quest'hora l'ho tradutto per fin al suo 13 libro) a molti altri capitoli haveria gia trovato regola gene-

(1) Estos problemas se encuentran reproducidos en la obra de Tartaglia ''*Quesiti et inventioni diverse*'' publicado en 1554, hoja 114.

(2) l. c., Libro noveno, Quesito 34, hoja 120

(3) Esta traducción apareció en efecto en 1543.

rale, ma spedito che habbia questa mia fatica di Euclide gia principiata, ho designato di componere un'opera di pratica, et insieme con quella una nuova Algebra, nella quale non solamente ho deliberato di publicare ad ogni huomo tutte la dette mie inventioni de capitoli nuovi, ma molti altri, che spero di ritrovare, et anchora voglio mostrare la regola di poterne investigarne infiniti altri qual spero che la sara una cosa utile et bella; et questa e la causa che me gli fa negar ad ogniuno, perche io al presente non vi pongo alcuna cura sopra di loro (per esser como detto occupato sopra Euclide) et insignandoli ad alcuno speculativo (come e vostra Eccelentia) facilmente potria con tale evidentia trovar altri capitoli, per esser facile lo aggiongere alle cose trovate, et publicarli come inventore; il che facendo mi guastaria ogni mio dissegno''.

Unicamente después de muchos ruegos y solicitudes Tartaglia accede a comunicar su regla a Cardano, pero no sin antes escuchar de éste la promesa por juramento de que no revelará nunca el secreto (4).

''Non volendo io prestar fede a tanti vostri giuramenti io mereteria certamente da esser giudicato huomo senza fede... voglio che sappiati, che per potermi aricordare in ogni mia improvisa occorentia tal modo operativo, io l'ho redutto in uno capitolo in rima, perche se io non havesse usato questa cautela, spesso me saria uscito di mente; quatunque tal mio dire in rima non sia molto terso, non mi ho curato, perche mi basta che mi serva a ridurme in memoria tal regola ogni volta che io il dica, il qual capitolo ve lo voglio scrivere de mia mano, accio che siati sicuro, che vi dia tale inventione giusta et buona''.

Y escribe a continuación los siguientes versos que traducimos lo más literalmente posible al castellano:

Quando chel cubo con le cose appresso	Cuando el cubo con las cosas después
Se agguaglia a qualche numero discreto	Se iguala a cierto número discreto
Trovan dui altri differenti in esso.	Existen otros dos que difieren en éste.
Dapoi terrai questo per consueto	Entonces tendrás esto por regla
Che'l loro produtto sempre sia eguale	Que su producto siempre sea igual
Al terzo cubo delle cose neto,	Al tercio cubo de las cosas netas,
El residuo poi suo generale	La diferencia luego general
Delli lor lati cubi ben sotratti	De sus lados cubos bien restados
Varra la tua cosa principale.	Valdrá tu cosa principal.
In el secondo de cotesti atti	En la segunda de estas gestiones
Quando che'l cubo restasse lui solo	Cuando el cubo se quedase solo
Tu osservarai quest'altri contratti,	Observarás estos otros ajustes,

(4) Loc. cit., Quesito 34.

Del numer farai due tal part'a volo	Del número harás dos partes tales
Che l'una in l'altra si produca schietto	Que al multiplicarlas entre sí resulte
El terzo cubo delle cose in stolo.	El tercio cubo de las cosas solas.
Delle qual poi, per commun precetto	De ellas después, por común precepto
Torrai li lati cubi insieme gionti	Tomarás juntos los lados cubos
Et cotal somma sara il tuo concetto.	Y esa suma será bien tu concepto.
El terzo poi de questi nostri conti	La tercera de estas nuestras cuentas
Se solve col secondo se ben guardi	Resulta de la segunda si bien miras
Che per natura son quasi congionti.	Que en la substancia son casi conjuntas.
Questi trovai e non con passi tardi	Esto encontré y no con pasos tardos
Nel mille cinquecente, quatro e trenta	El año mil quiniento treinta y cuatro
Con fondamenti ben sald'e gagliardi	Con fundamentos sólidos gallardos
Nella citta dal mar'intorno centa.	En la ciudad que el mar entorno ciñe.

Para poder entender esta regla y ponerla de acuerdo a la nomenclatura actual hay que hacer algunas aclaraciones. La *cosa* era el nombre que daban en aquella época a la incógnita y en los versos anteriores cuando se habla de las *cosas*, debe entenderse el término px de la ecuación, que se leería «p *cosas*». La expresión *lati cubi* que hemos traducido literalmente por «lados cubos» se refiere a las «raíces cúbicas».

Los tres casos a que se refieren los versos corresponden respectivamente a $x^3 + px = q$, $x^3 = px + q$, $x^3 + q = px$, donde p y q se suponían positivos.

Para el primero de ellos Tartaglia reduce la solución a buscar dos números u, v tales que $u - v = q$, $u \cdot v = \left(\frac{p}{3}\right)^3$; esta última expresión es lo que llama el «terzo cubo delle cose neto». La solución de este sistema, que es de segundo grado, era conocida y lo es ahora por todos los alumnos de escuela media.

La diferencia de las raíces cúbicas $\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$ es la solución positiva de la ecuación $x^3 + px = q$.

Análogamente, el segundo caso se reduce a resolver el sistema $u + v = q$, $u \cdot v = \left(\frac{p}{3}\right)^3$ y tomar luego $x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$.

Para el último caso $(x^3 + q = px)$ Tartaglia dice, sin más explicaciones, que se resuelve por el segundo; se refiere, posiblemente, al hecho de que, aplicando la misma regla, basta al final cambiar el signo del resultado obtenido.

Es notable el hecho de que el mismo Cardano no supo interpretar sin previa aclaración los versos anteriores y necesitó insistir a Tartaglia en una carta (5):

"...Quanto alla questione del vostro capitolo di cosa e cubo equal a numero vi ringratio assai che mi dasesti tal capitolo, et vi faro conoscere ch'io non vi saro ingrato. Ma pero io confesso il mio errore di non haver havuto tanto ingenio che io lo habbia potuto anchora intendere, e pero vi supplico per l'amor che mi portati, et per l'amicitia ch'é tra noi che spero durara fin che viveremo che mi mandati sciolta questa questione, 1. cubo piu 3. cose, equal a 10, et spero che mandandomela ve ne trovareti si contento quanto io di haverla ricevuta...".

A esta carta contestó Tartaglia (5):

"Circa al detto mio capitolo de cosa e cubo equal a numero molto mi maraviglio che vostra eccelетia no habbia inteso massime che ió parlo chiaro nel detto mio capitolo, ma ho pensato che voi vi siati ingannato in quel ditto che dice al terzo cubo delle cose netto, cioe penso che voi habbiati tolto il terzo del cubo delle cose, et bisogna tor il cubo del terzo delle cose essempi gratia a voler risolvere quella equatione de 1. cubo piu 3. cose equal a 10, che vostra eccelletia mi ha mandata dico che bisogna trovar dui numeri (over quantita) che la differentia de luno a laltro sia 10 (cioe tanto quanto é il nostro numero) et che il produtto de queste due quantita multiplicate luna sia l'altra facciano a ponto 1, cioe el cubo della terza parte delle cose, liquali dui numeri, over quantita, operando per Algebra, over per qual altra via piu commoda se trovara luna de loro, cioe la menore esser R. 26. men 5 et laltra cioe la maggiore R. 26 piu 5. Hor de cadauna di queste due quantita bisogna trovar il suo lato cubo, cioe la sua R. cuba et quella della menor sara R. universale cuba de R. 26 piu 5.... Hor bisogna sotrare il lato menore del maggiore, et il restante sara el valor della nostra cosa principale... la qual conclusione, oltra che la isperienza ne renda bona testimonianza,... anchora Geometricamète facilmente se dimostra la bonta et causa di tal operare...".

Con estas explicaciones queda ya satisfecho Cardano y escribe de nuevo a Tartaglia agradeciendo y reiterando su promesa de guardar el secreto (6):

"Quanto al capitolo vostro et al mio caso per voi assolto ve ne ringratio singolarissimamente, et laudo il vostro ingegno sopra tutto quelli che ho conosciuti, et me stato accaro piu che se mi havesti donato duc. 100, et vi co-

(5) Loc. cit. Quesito 35.
(6) Loc. cit. Quesito 36.

nosco per mio amicissimo et ne ho fatto prova et l'ho trovato generalissimo. Quanto al dubbio che voi haveti che non vi faccia stampare tai vostre inventioni, la mia fede che vi ho data con giuramento, vi doveva bastare,... chel non é mazor tradimento che a esser mancator di fede, et far dispiacere a chi ha fatto appiacere...''.

A pesar de estas promesas, en 1545, en su ya citada *Ars Magna,* publica Cardano la regla de resolución de la ecuación cúbica, hecho éste que motivó la indignación de Tartaglia y dió origen a una clásica disputa entre éste y Cardano o más bien entre Tartaglia y Ferrari, discípulo y defensor de Cardano.

Debe observarse sin embargo que Cardano no pretende ser el descubridor de la regla sino que, como se dijo al principio, la atribuye a Scipion dal Ferro y luego añade: «Nicolo Tartáglia de Brescia, amigo nuestro, habiendo entrado en discusión con Anton Maria Florido, discípulo de dal Ferro, para vencer en la discusión encontró la misma solución y la confió a mí. que con insistentes ruegos se la había solicitado».

La falta de Cardano ha sido juzgada de distintas maneras según los historiadores. Los defensores de Cardano, como por ej. E. Bortolotti (7), expresan dos argumentos a su favor. En primer lugar el haber dispuesto Tartaglia de un margen de tiempo suficiente (de 1534 a 1545) para poder publicar su prometida obra sobre dicha solución de la ecuación cúbica y generalizaciones, publicación que Tartaglia iba demorando constantemente. En segundo lugar, observan que si bien una solemne promesa impedía a Cardano revelar el secreto de Tartaglia, nada podía impedirle de exponer las mismas cuestiones después que habían llegado a su conocimiento por otro camino. Esta es la razón con que Ludovico Ferrari contesta a los ataques de Tartaglia (8). Para Tartaglia este hecho, que no intenta discutir, no justifica la falta de Cardano (9):

(7) E. BORTOLOTTI. ''I contributi del Tartaglia, del Cardano, del Ferrari, e della scuola matematica bolognese alla teoria algebrica delle equazioni cubiche''. Imola 1926.

(8) ''I sei Cartelli di Matematica Disfida, primamente intorno alla generale risoluzione delle equazioni cubiche, di Ludovico Ferrari coi sei contro-cartelli in risposta di Nicolo Tartaglia'' Riccolti, autografati e publicati da Enrico Giordani. Milano 1876. II° Cartello.

(9) Loc. cit. Risposta al II Cartello, pag. 5.

''Questa particolarita non mi par cosa licita a doverla desputare ne manco negare, perche saria presuzione grandissima la mia a darme ad intendere, quelle cose che da me sono state ritrovate che per altri tempi le non potessero esser state ritrovate da altri, et similmente che per l'avvenire altri non le potesse ritrovare...''.

Se nota también en defensa de Cardano que su *Ars Magna* contiene mucho más que la regla para resolver la ecuación cúbica sin término de segundo grado, pues resuelve la ecuación completa, considera por primera vez las distintas raíces que pueden tener las ecuaciones de grado superior al primero, observa como se puede reducir el grado de una ecuación cuando se conoce una raíz, etc. Pero Tartaglia, aunque exagerado por la pasión, no deja de tener cierta razón cuando escribe a Ferrari (9):

''... Non vedeti voi che eglie cosa nota a cada uno intelligente, et lui medesimo lo confessa in detta opera che tal mia invenzione e l'anima di tutto il detto suo volume. Non vedeti voi che cavando la detta mia pianta del detto vostro giardino, tal vostro giardino restaria una oscura selva, perche tutte le altre cose sostanciale derivano da detta mia pianta...''.

Dejando esta singular discusión que se prolongó durante varios años (se puede decir hasta la muerte de Tartaglia en 1557), volvamos a estudiar la solución de la ecuación cúbica.

De una manera cierta no sabemos si Tartaglia conocía una demostración de su regla o si la había obtenido de manera empírica y luego comprobada. Pero aunque no dejó ninguna demostración, de sus escritos parece deducirse que debía conocer alguna basada en consideraciones geométricas, muy frecuentes en aquella época en todos los razonamientos algebraicos. En efecto, el penúltimo de sus versos «con fondamenti ben sald'è gagliardi» parece indicar que encontró, al mismo tiempo que la regla, su fundamentación y además, en la carta que escribió a Cardano para aclararle la regla que éste no había comprendido, hemos visto como puntualiza de nuevo que, acerca de la validez de la regla «oltra che la isperienza ne renda bona testimonianza,... anchora Geometricamète si dimostra la bonta et causa di tal operare...».

El método comúnmente utilizado en los libros de texto actuales para resolver la ecuación cúbica sin término de segundo grado consiste en reducir el problema a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas muy parecido al de Tartaglia, pero justifica de una manera racional el camino de llegar a él. Es el método de Hudde, publicado por este matemático holandés en una memoria titulada *Epistola prima de Reductione Aequationum*. Encontramos esta memoria como apéndice a la Geometría de R. Descartes, segunda edición, publicada en 1659 por Francisco Schooten (*). En este trabajo, para aplicar la última de ciertas 21 reglas para reducir el grado de algunos tipos de ecuaciones, necesita Hudde resolver la ecuación $x^3 = px + q$. Para ello pone $x = y + z$, y sustituyendo obtiene

$$y^3 + 3zy^2 + 3yz^2 + z^3 = px + q,$$

que se puede escribir en la forma

$$y^3 + z^3 + 3yz(y + z) = p(y + z) + q,$$

y esta igualdad conduce a poner

$$y^3 + z^3 = q \qquad yz = \frac{p}{3}$$

Este sistema vemos que es en esencia el mismo de Tartaglia y la novedad consiste sólo en la manera simple y natural de llegar a él.

Este método fué generalizado más tarde por Euler para las ecuaciones de 4°. grado, por lo que algunos autores lo llaman también método de Euler.

Es interesante señalar de paso que Hudde parece ser el primero que, en la memoria citada, observa que la fórmula de resolución de la ecuación cúbica sin término de segundo grado es la misma para los tres casos $x^3 = px + q$, $x^3 = -px + q$, $x^3 = px - q$ con sólo tener en cuenta los signos de p y q. Así por ejemplo Descartes en la misma geometría (pág. 93) distingue todavía los tres casos, asignando a cada uno fórmulas distintas de resolución.

Luis A. Santaló

(*) Amstelaedami, apud Ludovicum et Danielem Elzevirios.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. - Probar que si n es un número entero impar

$$1 + \frac{n-1}{n-2} + \frac{n-1}{n-2} \cdot \frac{n-3}{n-4} + \ldots + \frac{n-1}{n-2} \cdot \frac{n-3}{n-4} \ldots \frac{1}{2} = n$$

¿Cómo hay que modificar la fórmula para el caso de n par?

2. - Demostrar que entre los triángulos que tienen el mismo perímetro $2p$ el triángulo equilátero tiene máximo radio del círculo inscripto. Establecer la relación $p^2 \geqq 27 r^2$.

3. - Calcular el área del triángulo inscripto en una elipse de semiejes a y b, el cual tiene un vértice en el vértice $(0, b)$ de la elipse y el lado opuesto sobre la recta $y = \eta$. ¿Para cuál valor de η esta área es maxima?

4. - Demostrar que toda cuerda de una parábola pasante por el foco es igual a cuatro veces el radio vector desde el foco al punto de contacto de la tangente paralela a la cuerda.

5. - Dibujar la curva de ecuación $x^2 y - x^2 + y = 0$; determinar alguno de sus elementos notables (puntos de inflexión, puntos de máxima curvatura, asíntotas...); calcular el área comprendida entre la curva y la recta $y = 1$.

6. - Un punto de masa m está vinculado a moverse sobre un plano y es atraído hacia un punto fijo O del plano por una fuerza proporcional a la distancia mientras el plano rueda alrededor de un eje situado en el plano y pasante por el punto fijo O, con velocidad constante. Escribir las ecuaciones de la trayectoria sobre el plano (movimiento relativo) y discutir el movimiento.

CUESTIONES

1. - Es conocido que para calcular valores numéricos de funciones trascendentes sirve esencialmente la aproximación de ellas mediante funciones racionales y, más que todo, mediante polinomios. El método más tradicional para la determinación de estos polinomios está dado por los desarrollos en serie de potencias. Son conocidos por ej., para las funciones trigonométricas, los desarrollos

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \ldots$$

de donde se deducen las desigualdades

$$x > \operatorname{sen} x > x - \frac{x^3}{6}, \qquad 1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

Se propone de calcular alguna limitación prácticamente equivalente con el solo uso de consideraciones elementales, inclusive naturalmente las fórmulas trigonométricas, pero excluyendo consideraciones infinitesimales o de límite. Como ejemplo se señalan las desigualdades

$$x - \frac{x^3}{5{,}33} < \operatorname{sen} x < x - \frac{x^3}{6{,}75}.$$

2. - Se llama resto cuadrático de un número entero a con respecto a un entero positivo m (módulo) al resto de la división $a^2 : m$. El número de los posibles restos cuadráticos respecto a m no pasa de $m : 2$. Aplicar estas nociones para demostrar alguna proposición como las siguientes: 1°. si tres números x, y, z realizan la igualdad $x^2 + y^2 = z^2$ hay entre ellos siempre uno par, uno múltiplo de 3 y uno múltiplo de 5 (nótese que podría el mismo número realizar dos de estas condiciones o las tres); 2°. si dos enteros x, y realizan la relación $24\,x^2 + 1 = y^2$, uno de ellos es múltiplo de 5.

3. - Se sabe desde Galileo que si un cuerpo cae a lo largo de una cuerda de un círculo vertical dado, un extremo de la cual esté fijado en el extremo inferior del diámetro vertical, partiendo del otro extremo con velocidad cero, emplea siempre el mismo tiempo para recorrerla, cualquiera que sea dicha cuerda.

Se sabe también, por una ley del mismo Galileo, que si el cuerpo cae a lo largo de la circunferencia, también el tiempo empleado para llegar al punto más bajo es independiente de la longitud del arco cuando éste sea suficientemente pequeño.

Estos dos tiempos constantes no son iguales, si bien la cuerda y el arco tienden a coincidir cuando su longitud tiende a cero. Se desea un análisis crítico de este hecho, aparentemente paradójico.

FLORES Y HOJAS

I. Se desearía una crítica del razonamiento siguiente, que encontramos en un importante tratado: Se tiene que demostrar que *si una función continua en un intervalo a^-b tiene como límite superior de sus valores 0, existe en a^-b un punto en el cual la función toma el valor cero.* Observemos por esto que, si la función $f(x)$ no alcanzara el valor 0, sería continua en a^-b también la función $\frac{1}{f(x)}$; pero una función continua en un intervalo finito es acotada; existiría pues un número $M > 0$ tal que en todo a^-b sería $\frac{1}{f(x)} > -M$ y $f(x) < -(1 : M)$, contrariamente a la hipótesis.

II. Dónde está el error del razonamiento siguiente: Dos superficies algebraicas se cortan según una curva; consideremos una función trigonométrica del ángulo de los planos tangentes a las dos superficies en un punto variable de dicha curva, apta a caracterizar este ángulo (por ej. la tangente). El valor de esta tangente se vincula algebraicamente con las coordenadas de aquel punto variable; por el teorema fundamental del álgebra, existirá pues uno o más puntos de la curva que realizan el sistema de ecuaciones que se obtiene poniendo esta tangente $= 0$; es decir, que habrá siempre algún punto en el cual las dos superficies se tocan.

PUBLICACIONES

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICAS

DE LA

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, FISICO - QUÍMICAS Y NATURALES
APLICADAS A LA INDUSTRIA
DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

Año 1939 - Vol. I.

m$n.

1 - B. LEVI — *Sobre el sistema* $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(xy)dx=p(y);\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(xy)dy=q(x)$ 1.00
2 - L. A. SANTALÓ — *Geometría integral de figuras ilimitadas* 1.80
3 - F. AMODEO — *Origen y desarrollo de la Geometría proyectiva.* Trad. de Nicolás y José Babini 8.00
4 - B. LEVI — *Una teoría intuicionista de las funciones racionales enteras de una variable* 1.00

Año 1940 - Vol. II.

1 - P. MONTEL — *Funciones armónicas y subarmónicas* 1.00
2 - G. FUBINI — *La ley de la media para funciones no derivables.*
B. LEVI — *Sobre un teorema de Weierstrass, el teorema de Rolle y el anterior teorema de Fubini* 1.00
3 - L. A. SANTALÓ — *Una demostración de la propiedad isoperimétrica del círculo* 1.20
4 - L. A. SANTALÓ — *Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas* 1.50
5 - I. Antecedentes de la creación del Instituto.
II. Acto de inauguración oficial del Instituto.
C. PLÁ — *Origen y propósitos del Instituto.*
J. REY PASTOR — *La matemática italiana en el último medio siglo y la posición del Dr. Beppo Levi en ella.*
B. LEVI — *Evolución del pensamiento matemático* 1.50
6 - E. GASPAR — *Fórmulas integrales referentes a intersección de una figura plana con bandas variables* 1.50
7 - A. ROSENBLATT — *Sobre el teorema de los grandes números en la teoría de la probabilidad* 1.00
8 - M. COTLAR — *Sobre conjuntos no medibles y generalización de la integral de Lebesgue* - Prólogo por B. Levi 1.50
9 - B. LEVI — *La noción de "dominio deductivo" como elemento de orientación en las cuestiones de fundamentos de las teorías matemáticas* 1.50

Año 1941 - Vol. III.

1 - Homenaje a la memoria de V. Volterra y J. J. Thomson.
C. PLÁ — *Semblanza de Sir Joseph J. Thomson.*
B. LEVI — *La personalidad de Vito Volterra* 1.00

Imprenta de la Universidad
Nacional de Litoral
Santa Fe - República Argentina