



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA

# Determinación microscópica del tiempo de vida media en decaimiento alfa

*Autor:* LIC. ALAN CRUZ DASSIE  
*Director:* Dr. Rodolfo Mohamed Id Betan

TESIS DOCTORAL

Presentada a la  
Universidad Nacional de Rosario  
en cumplimiento de los requerimientos  
para optar al título de  
Doctor en Física

Instituto de Física Rosario (CONICET-UNR)  
Noviembre 2023

Esta tesis está dedicada a mis padres,  
por su ayuda vital durante este camino  
de superación personal,  
y a Alejandra, siempre presente estos años  
de trabajo, y de gran ayuda con los últimos  
detalles de este manuscrito.

*Alan, Octubre 2023*

## RESUMEN

### DETERMINACIÓN MICROSCÓPICA DEL TIEMPO DE VIDA MEDIA EN DECAIMIENTO ALFA

*Autor:* LIC. ALAN CRUZ DASSIE  
*Director:* Dr. Rodolfo Mohamed Id Betan

La determinación microscópica del tiempo de vida media en decaimiento alfa ha sido durante décadas un gran desafío de la física nuclear teórica. Establecer un modelo capaz de describir y predecir este fenómeno a lo largo de la tabla de nucleidos sigue siendo uno de los desafíos de la física teórica. El interés en este tipo de decaimiento se da tanto por la característica monoenergética del mismo como por su naturaleza de partícula cargada, lo que genera que a nivel experimental la detección de partículas alfa emitidas en un proceso de reacciones nucleares siga siendo el método principal para identificar núcleos super-pesados como también sus estados excitados.

En la presente tesis doctoral desarrollamos un modelo microscópico basado en el modelo de capas nuclear para obtener los tiempos de vida media en decaimiento alfa de tres núcleos ubicados en diferentes zonas de la tabla de nucleidos: el Polonio-212, el Titanio-44 y el Telurio-104.

En primer lugar, introducimos nuestro marco teórico con el modelo de capas en la representación de Berggren completa: esto es, incluyendo los estados ligados, las resonancias del continuo y los estados de dispersión o del continuo no resonante. Este es el primer trabajo que utiliza la representación completa de Berggren con autovalores del potencial de Woods-Saxon. Con este modelo se construyen los estados de dos neutrones y dos protones sobre los carozos doble mágicos Plomo-208, Calcio-40 y Estaño-100.

En una segunda etapa del marco teórico, se presenta el decaimiento alfa como un fenómeno de dos cuerpos a través de la ecuación de la corriente y la penetrabilidad de la barrera de potencial. Luego, se establece el formalismo que permite calcular las amplitudes de formación y los factores espectroscópicos convencionales de cada estado construido. Fue necesario entonces introducir el formalismo de la renormalización de estas cantidades convencionales para definir de manera apropiada la clusterización alfa de cada estado de cuatro cuerpos. Finalmente, se presenta la ecuación de Arima, la cual es utilizada para el cálculo final de los tiempos de vida media en decaimiento alfa.

La aplicación de nuestro formalismo comienza con la construcción de la familia de núcleos ubicados sobre el Plomo-208. Utilizando tres tipos de representaciones de partícula simple diferenciadas por la

característica física de los estados que incorporan, se calculan los estados de dos cuerpos y finalmente aquellos del núcleo Polonio-212 con momento angular total cero. En él se observa que la representación completa con la condición de configuración principal aplicada (RC-MC) logra reproducir el estado excitado  $0^+$  experimental con energía de excitación de 1.801 MeV [1, 2], además del fundamental.

Con respecto a la clusterización de los estados del  $^{212}\text{Po}$ , se obtienen valores de  $S = 0.02$  y  $S = 0.026$  utilizando la representación completa de partícula simple, los cuales se encuentran en el orden de los obtenidos por la Ref. [3]. Finalmente, se calcula el tiempo de vida media en decaimiento alfa para el estado fundamental, obteniéndose  $T_{1/2} = \left(0.180^{+0.112}_{-0.111}\right) \mu\text{s}$  (en la representación RC-MC), cuya cota superior se encuentra a 2 ns del valor experimental.

Una vez establecida la fiabilidad del formalismo, este se aplica a las familias de núcleos construidas sobre los carozos Calcio-40 y Estaño-100, los cuales son doble mágicos con  $N = Z$ . En ambos casos, se aplica modelo de capas con la simetría del isoespín, pues los estados de valencia de protones y neutrones ocupan la misma capa. Utilizando la representación de partícula simple completa, se obtiene el estado fundamental del Titanio-44 con un isoespín de valor cero, en acuerdo con la Ref. [4], y además, se asocia el estado  $0_3^+$  calculado con energía de excitación 6.563 MeV al experimental  $(0, 2)^+$  con energía de excitación de 6.8 MeV. Para el Telurio-104, se logra reproducir la energía experimental del estado fundamental, a la vez que se obtiene el valor esperado del isoespín, el cual es cero.

Respecto a la clusterización del Titanio-44, se obtienen valores de  $S = 0.56$  y  $S = 0.29$  para el estado fundamental y el excitado, respectivamente. Éstos son del orden de los observados en un núcleo de similares características como es el  $^{20}\text{Ne} = \alpha + ^{16}\text{O}$  [5]. En esta misma línea, para el estado fundamental del Telurio-104 se obtiene una clusterización del  $S = 0.35$ . Además, en ambos núcleos se establece la importancia de los estados de dispersión de partícula simple, pues con la incorporación de estos a la representación del Titanio-44 se logra que todos los estados calculados tengan valores físicos de clusterización, mientras que en el Telurio-104 se incrementa la clusterización alfa de la función de onda en un 14 %.

Finalmente, se estima un tiempo de vida media en decaimiento alfa para el estado  $0_3^+$  del Titanio-44 de valor  $T_{1/2} = (12.46 \pm 4.59) \text{ ns}$ , mientras que para el Telurio-104 se obtiene  $T_{1/2} = \left(16.409^{+7.022}_{-9.438}\right) \text{ ns}$ . Estos tiempos de vida media dieron cuenta de un decaimiento alfa un par de ordenes de magnitud

más rápido que el observado en el Polonio-212, lo cual justifica la idea de decaimiento alfa “super-permitido”[6–8].

## AGRADECIMIENTOS

A mi director de tesis Rolo, por acompañarme en mi proceso de formación tanto técnica como personal durante estos cuatro años. Siempre predispuesto a ayudar y dedicar el tiempo necesario para mejorar este trabajo.

A los jurados de esta tesis, por tomarse el tiempo necesario para poder leerla y evaluarla objetivamente.

A Witek, por su gran ayuda a la hora de entender los aspectos físicos más importantes, gracias a sus explicaciones en la materia y la sugerencia de nuevas lecturas relacionadas a este apasionante mundo.

A Nicolás Michel y Alex Brown, por su ayuda a la hora de comprobar el correcto funcionamiento de nuestros códigos computacionales, poniendo a nuestra disposición los programas desarrollados por ellos.

A Franco, por sus charlas y discusiones en el instituto, útiles para sobrellevar de mejor manera los últimos procesos de este trabajo.

A Nicolás Wolovick, por poner siempre a disposición nuestra los recursos computacionales de la Universidad Nacional de Córdoba, que fueron de gran ayuda.

Al IFIR, por proporcionar el ambiente ideal para realizar este trabajo de investigación.

*Alan, Octubre 2023*

## ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO 1	INTRODUCCIÓN . . . . .	1
1.1.	Breve historia del decaimiento alfa . . . . .	3
CAPÍTULO 2	MARCO TEÓRICO . . . . .	8
2.1.	El modelo de capas nuclear . . . . .	8
2.1.1.	Estados de partícula simple . . . . .	11
2.1.2.	La interacción espín-isoespín y los estados de dos partículas . . . . .	13
2.1.2.1.	Funciones de onda de dos cuerpos . . . . .	17
2.1.2.2.	Elementos de matriz de dos cuerpos . . . . .	19
2.1.2.3.	Estados resonantes de dos cuerpos y los contornos de partícula simple . . . . .	21
2.1.3.	Los estados de cuatro partículas . . . . .	22
2.1.3.1.	Funciones de onda de cuatro cuerpos . . . . .	22
2.1.3.2.	Elementos de matriz protón-neutrón . . . . .	24
2.2.	El tiempo de vida media en decaimiento alfa . . . . .	25
2.2.1.	El decaimiento alfa como un fenómeno de dos cuerpos . . . . .	26
2.2.2.	La amplitud de formación y el factor espectroscópico . . . . .	29
2.2.2.1.	La amplitud de formación convencional . . . . .	30
2.2.2.2.	El factor espectroscópico convencional . . . . .	32
2.2.3.	La renormalización . . . . .	32
2.2.3.1.	La norma de las funciones de onda. . . . .	32
2.2.3.2.	El <i>norm-kernel</i> . . . . .	33
2.3.	Los códigos computacionales . . . . .	35
CAPÍTULO 3	PRUEBA DEL FORMALISMO SOBRE UN NÚCLEO AMPLIAMENTE ESTUDIADO EXPERIMENTAL Y TEÓRICAMENTE . . . . .	38
3.1.	Estados de partícula simple sobre el carozo Plomo-208 . . . . .	39
3.2.	Estados de dos partículas sobre el carozo Plomo-208 . . . . .	40
3.2.1.	Formalismo de la configuración principal en los núcleos par-par en la representación completa . . . . .	46
3.3.	Estados del núcleo Polonio-212 . . . . .	48
3.3.1.	Aproximación truncando el espacio de Hilbert . . . . .	50
3.3.2.	Aproximación de configuración principal . . . . .	52
CAPÍTULO 4	APLICACIÓN DEL FORMALISMO A DOS NÚCLEOS CON $N = Z$ . . . . .	56
4.1.	Estados de partícula simple . . . . .	57
4.1.1.	Carozo Calcio-40 . . . . .	57
4.1.2.	Carozo Estaño-100 . . . . .	59
4.2.	Estados de dos partículas . . . . .	62
4.2.1.	Carozo Calcio-40 . . . . .	62
4.2.2.	Carozo Estaño-100 . . . . .	64
4.3.	Estados de cuatro partículas . . . . .	67
4.3.1.	Titanio-44 . . . . .	67
4.3.1.1.	Aproximación truncando el espacio de Hilbert . . . . .	70

4.3.2.	Telurio-104 . . . . .	74
4.3.2.1.	Aproximación truncando el espacio de Hilbert . . . . .	76
CAPÍTULO 5 DETERMINACIÓN MICROSCÓPICA DEL TIEMPO DE VIDA MEDIA EN DECAIMIENTO ALFA . . . . .		78
5.1.	Modelo de dos cuerpos . . . . .	79
5.1.1.	Polonio-212 como Plomo-208 más $\alpha$ puntual . . . . .	79
5.1.2.	Titanio-44 como Calcio-40 más $\alpha$ puntual . . . . .	81
5.1.3.	Telurio-104 como Estaño-100 más $\alpha$ puntual . . . . .	83
5.2.	Amplitud de formación . . . . .	84
5.2.1.	Polonio-212 . . . . .	85
5.2.2.	Titanio-44 . . . . .	88
5.2.3.	Telurio-104 . . . . .	90
5.3.	Renormalización del factor espectroscópico . . . . .	92
5.3.1.	Análisis general del problema . . . . .	92
5.3.1.1.	Determinando los parámetros $\Delta r$ y $r_{\max}$ de la base gaussiana . . . . .	92
5.3.1.2.	Estableciendo un protocolo . . . . .	94
5.3.2.	Polonio-212 . . . . .	95
5.3.3.	Titanio-44 . . . . .	97
5.3.4.	Telurio-104 . . . . .	99
5.4.	Cálculo de tiempos de vida media . . . . .	102
5.4.1.	Polonio-212 . . . . .	102
5.4.2.	Titanio-44 . . . . .	103
5.4.3.	Estado fundamental del Telurio-104 . . . . .	103
CAPÍTULO 6 DISCUSIONES Y CONCLUSIONES . . . . .		106
APÉNDICES . . . . .		111
APÉNDICE A	ELEMENTOS DE MATRIZ DE DOS NUCLEONES . . . . .	112
APÉNDICE B	LOS ELEMENTOS DE MATRIZ DE LA INTERACCIÓN PROTÓN-NEUTRÓN . . . . .	122
APÉNDICE C	VALOR ESPERADO DEL ISOESPÍN . . . . .	128
APÉNDICE D	LA MATEMÁTICA EN LA CONSTRUCCIÓN DE LA AMPLITUD DE FORMACIÓN . . . . .	135
APÉNDICE E	AUTOVALORES Y AUTOVECTORES DEL <i>NORM KERNEL</i> . . . . .	140
APÉNDICE F	OPTIMIZACIÓN DEL CÓDIGO DE CUATRO CUERPOS . . . . .	144
APÉNDICE G	EL CANAL TRIPLETE-IMPARE DE LA INTERACCIÓN GAUSSIANA EN EL NÚCLEO PLOMO-210 . . . . .	153
APÉNDICE H	EL ISOESPÍN EN LA FAMILIA DE NÚCLEOS DEL CALCIO-40 . . . . .	155
APÉNDICE I	PARAMETRIZACIÓN DE WOODS-SAXON EN EL MODELO DE PARTÍCULA SIMPLE DEL DECAIMIENTO ALFA . . . . .	163
BIBLIOGRAFÍA . . . . .		165
PUBLICACIONES EN REVISTAS CIENTÍFICAS Y CONFERENCIAS . . . . .		176

## ÍNDICE DE TABLAS

2.1.	Simetrías de la función de onda de dos cuerpos (2.23) caracterizadas en función de la simetría de coordenadas y de espín. . . . .	14
2.2.	Relaciones entre las intensidades $V_\xi$ con $\xi \in \{se, so, te, to\}$ y aquellas presentadas en las ecuaciones (2.28-2.31). . . . .	16
2.3.	Relaciones entre los operadores de espín-isoespín $P_\xi$ y el operador proyector $P_S$ . . . . .	16
3.1.	Energías experimentales [1, 113] para neutrones y protones (en MeV) en el carozo $^{208}\text{Pb}$ . Las energías calculadas se obtuvieron a partir de los parámetros de la Tabla 3.2. $\delta_{\text{rel}}$ es el error relativo porcentual respecto a los valores experimentales. . . . .	39
3.2.	Parámetros para Woods-Saxon y Espín-Órbita para $^{209}\text{Pb} = ^{208}\text{Pb} + n$ y $^{209}\text{Bi} = ^{208}\text{Pb} + p$ optimizados mediante el algoritmo de <i>Levenberg-Marquardt</i> [114, 115] a los tres primeros estados de la Tabla 3.1. Además, el radio de Coulomb es el mismo que el Woods-Saxon y su difusividad es tomada cero. Errores entre paréntesis. . . . .	40
3.3.	Energías de todos los niveles de partículas simple calculados utilizando el código GAMOW [105] con los parámetros de la Tabla 3.2. . . . .	41
3.4.	Representación ligada (RL), de polo (RP) y completa (RP) de los estados de partícula simple. Estados ligados y resonancias se nombran como $nl_j$ , los estados de dispersión quedan $cl_j$ . Los estados ligados y aquellos de dispersión puramente reales están en negro, mientras que las resonancias y los estados de dispersión con energía compleja están en azul. . . . .	42
3.5.	Intensidades (en MeV) de los potenciales para el caso de dos neutrones utilizados en las tres bases. Además, se presenta la intensidad que utiliza la Ref. [23]. Las intensidades fueron optimizadas con el algoritmo <i>Levenberg-Marquardt</i> [114, 115] a los cuatro primeros estados pares del $^{210}\text{Pb}$ presentes en la Tabla 3.6. Los rangos de la interacción gaussiana fueron $\beta_{\text{se}} = 1.9$ fm y $\beta_{\text{to}} = 2.92$ fm. . . . .	42
3.6.	Energías (en MeV) experimentales [1] y calculadas utilizando los parámetros de la Tabla 3.5 relativas al carozo inerte $^{208}\text{Pb}$ , como resultado de la optimización de las intensidades de los potenciales. Se presentan los resultados para cada una de las representaciones utilizadas. . . . .	43
3.7.	Intensidades (en MeV) de los potenciales para el caso de dos protones utilizadas en las tres bases. Además, se presenta la intensidad que utiliza la Ref. [23]. Las intensidades fueron optimizadas con el algoritmo <i>Levenberg-Marquardt</i> [114, 115] a los cinco primeros estados pares del núcleo $^{210}\text{Po}$ presentes en la Tabla 3.8. Los rangos de la interacción gaussiana fueron $\beta_{\text{se}} = 1.4$ fm y $\beta_{\text{to}} = 2.15$ fm. . . . .	44

3.8.	Energías (en MeV) experimentales [1] y calculadas utilizando los parámetros de la Tabla 3.7 relativas al carozo inerte $^{208}\text{Pb}$ , como resultado de la optimización de las intensidades de los potenciales. Se presentan los resultados para cada una de las bases utilizadas. . . . .	44
3.9.	Intensidad (en MeV) del potencial triplete-par con rango $\beta_{te} = 1.3$ fm para el caso de un neutrón y un protón utilizadas en las tres bases. Además, se presenta la intensidad que utiliza la Ref. [23], que suma también la parte singlete-par con parámetros $V_{se} = -43.07$ MeV y $\beta_{te} = 1.58$ fm. Las intensidades fueron optimizadas con el algoritmo <i>Levenberg-Marquardt</i> [114, 115] a los primeros tres estados pares (excepto el $0^+$ ) y cinco estados impares del núcleo $^{210}\text{Bi}$ presentes en la Tabla 3.10. . .	45
3.10.	Energías (en MeV) experimentales [1] y calculadas relativas al carozo inerte $^{208}\text{Pb}$ , como resultado de la optimización de las intensidades de los potenciales. Se presentan los resultados para cada una de las representaciones utilizadas. . . . .	45
3.11.	Intensidades (en MeV) de los potenciales para el caso de dos neutrones y dos protones utilizados en la representación completa, con el formalismo de la configuración principal. Las intensidades fueron optimizadas con el algoritmo $\chi^2$ [115] a los primeros estados pares de cada núcleo. . . . .	47
3.12.	Energías (en MeV) experimentales[1] y calculadas en el formalismo MC para la representación RC, relativas al carozo inerte $^{208}\text{Pb}$ como resultado de la optimización de las intensidades de los potenciales. Se presentan los resultados en la representación completa. . . . .	47
3.13.	Intensidades (en MeV) de la interacción protón-neutrón que reproducen la energía del estado fundamental del núcleo $^{212}\text{Po}$ para las dos primeras representaciones. Las intensidades son proporcionales en $\chi_{RL} = 1.1310$ y $\chi_{RP} = 1.1972$ a las de la Tabla 3.9. . . . .	48
3.14.	Energías (en MeV) y cuadrado de las amplitudes parciales de onda de cuatro cuerpos (2.93) de los cuatro primeros estados $0^+$ del $^{212}\text{Po}$ obtenidos en las dos primeras representaciones. El resto de las amplitudes se encuentran localizadas en los estados de dos cuerpos no mencionados (aquellos con $J$ impar o $J > 8$ ), pero en general estas representan menos del 1 % del total. . . . .	49
3.15.	Dimensiones de las bases de dos (2.76-2.77) y cuatro (2.74) cuerpos de cada representación de partícula simple introducida hasta ahora. . . . .	50
3.16.	Porcentaje (wf %) de la amplitud total de la función de onda de los estados $0^+$ del $^{212}\text{Po}$ en la representación de polo perdida al truncar el espacio de Hilbert. Además, se explicita la variación absoluta de la energía $\Delta E$ (en keV). . . . .	51
3.17.	Energías (en MeV) y suma de los cuadrados de las amplitudes parciales de cuatro cuerpos (2.93) de los cuatro primeros estados $0^+$ del $^{212}\text{Po}$ obtenidos con la representación completa RC a nivel partícula simple y con el espacio de Hilbert truncado $\text{EHT}^{(I)}$ . . . . .	52

3.18.	Suma de los cuadrados de las amplitudes parciales de cuatro cuerpos para los primeros cuatro estados $0^+$ discriminadas en función de las configuraciones de partícula simple, como fue explicado en el texto. Las contribuciones de las amplitudes compuestas por estados de dispersión son del orden de $10^{-6}$ . . . . .	52
3.19.	Dimensiones de las bases de dos (2.76-2.77) y cuatro (2.74) cuerpos de la representación completa RC de partícula simple con los dos truncamientos posibles: RC-CO: espacio de Hilbert truncado $EHT^{(I)}$ , RC-MC: disminución del espacio de Hilbert al forzar únicamente la configuración principal como correlación en la base de dos cuerpos.	53
3.20.	Porcentaje (wf %) de la amplitud total de la función de onda de los estados $0^+$ en la representación de polo perdida al truncar el espacio de Hilbert. Además, se explicita la variación absoluta de la energía $\Delta E$ (en keV) respecto a la Tabla 3.14. . . . .	54
3.21.	Amplitudes de onda de cuatro cuerpos (2.93) de los cuatro primeros estados $0^+$ del $^{212}\text{Po}$ obtenidos con la representación completa aplicando <i>main-configuration</i> , y sus energías en MeV. . . . .	54
3.22.	Suma de los cuadrados de las amplitudes parciales de cuatro cuerpos para los primeros cuatro estados $0^+$ discriminadas en función de las configuraciones de partícula simple, como fue explicado en el texto. Las contribuciones puramente del continuo no resonante son del orden de $10^{-9}$ . . . . .	54
4.1.	Energías de partícula simple experimentales [1] y calculadas [105] (en MeV) respecto al carozo $^{40}\text{Ca}$ . Las energías calculadas se obtuvieron con los parámetros de la Tabla 4.2. $\delta_{\text{rel}}$ es el error relativo porcentual respecto a los valores experimentales. . . . .	58
4.2.	Parámetros de campo medio para neutrones y protones (errores en MeV entre paréntesis) optimizados con el algoritmo de <i>Levenberg-Marquardt</i> [114, 115] a los cuatro estados de la capa <i>pf</i> presentes en la Tabla 4.1. El ancho reducido $r_0$ fue fijado del radio medio cuadrado experimental [122] del $^{41}\text{Ca}$ y $^{41}\text{Sc}$ . . . . .	58
4.3.	Niveles de neutrones y protones sobre el carozo $^{40}\text{Ca}$ calculados con el código GAMOW [105], utilizando los parámetros optimizados de la Tabla 4.2. . . . .	58
4.4.	Representación ligada (RL), de polo (RP) y completa (RC) de los estados de partícula simple utilizadas para construir las representaciones de dos y cuatro cuerpos. Estados ligados y resonancias se notan $nl_j$ , mientras que a los estados de dispersión le corresponde la notación $cl_j$ . Estados ligados y de dispersión con energía real se encuentran en negro, mientras que resonancias y estados de dispersión con energía compleja se encuentran en azul. . . . .	59

4.5.	Parámetros para Woods-Saxon y Spin Orbit para $^{101}\text{Sn} = ^{100}\text{Sn} + n$ y $^{101}\text{Sb} = ^{100}\text{Sn} + p$ optimizados con el algoritmo de <i>Levenberg-Marquardt</i> [114, 115] a los estados $1d_{5/2}$ y $0g_{7/2}$ de neutrones y protones. Se fijaron $a = 0.7$ fm y $r_0^v(r_0^\pi) = 1.374(1.275)$ fm a los valores de la Ref. [130]. Además, el radio de Coulomb es el mismo que el de Woods-Saxon y su difusividad es tomada cero. Errores en MeV entre paréntesis. . . . .	60
4.6.	Niveles de neutrones ( $\nu$ ) y protones ( $\pi$ ) sobre el carozo $^{100}\text{Sn}$ calculados con el código GAMOW [105], utilizando los parámetros optimizados de la Tabla 4.5. . . . .	61
4.7.	Bases de partícula simple agrupadas según polos (RP) y completa con estados de dispersión (RC), para generar las representaciones de dos y cuatro cuerpos. Estados ligados y resonancias se notan $nl_j$ , mientras que a los estados de dispersión le corresponde la notación $cl_j$ . Estados ligados y de dispersión con energía real se encuentran en negro, mientras que resonancias y estados de dispersión con energía compleja se encuentran en azul. . . . .	61
4.8.	Vértices (en MeV) ubicados en el plano complejo de energía para estados resonantes de neutrones y la cantidad de estados de dispersión $N_c$ por segmento. . . . .	62
4.9.	Intensidades de dos nucleones (en MeV) de la interacción espín-isoespín para cada una de las representaciones. Las intensidades fueron optimizadas utilizando el algoritmo de <i>Levenberg-Marquardt</i> [114, 115] a los niveles de energía mencionados en el texto. Los rangos fueron fijados al valor de $\beta = 1.6$ fm utilizado por la Ref. [131]. Además, el potencial $V_{to}$ se fija a cero en todas las representaciones. . . . .	63
4.10.	Energías (en MeV) experimentales [1] y calculadas, relativas al carozo inerte $^{40}\text{Ca}$ , como resultado de la optimización que fue explicada en el texto. RL, RP y RC se corresponden a las 3 representaciones de partícula simple utilizadas. . . . .	64
4.11.	Diferentes valores teóricos de la energía de separación de dos protones $S_{2p}$ tomados de la Ref. [132]. . . . .	65
4.12.	Intensidades de dos nucleones (en MeV) de la interacción espín-isoespín para cada una de las representaciones. Las intensidades fueron optimizadas utilizando el algoritmo $\chi^2$ [115]. Los rangos fueron fijados al valor de $\beta = 1.6$ fm utilizado por la Ref. [131]. . . . .	66
4.13.	Energías de los estados fundamentales (en MeV) experimentales [1] o teóricas (el valor teórico del $^{102}\text{Te}$ es un promedio de múltiples modelos tomados de la Ref. [132]) cuyos errores o desviaciones estándar se encuentran entre paréntesis, y calculadas en este trabajo, relativas al carozo inerte $^{100}\text{Sn}$ , como resultado de la optimización que fue explicada en el texto. RP y RC corresponden a las dos representaciones de partícula simple utilizadas. . . . .	66
4.14.	Vértices (en MeV) ubicados en el plano complejo de energía para estados resonantes de protones y la cantidad de estados de dispersión $N_c$ por segmento. . . . .	66

4.15.	Intensidades (en MeV) de la interacción protón-neutrón que reproducen la energía del estado fundamental del núcleo $^{44}\text{Ti}$ para cada una de las representaciones. Las intensidades son proporcionales a las de la Tabla 4.9 siguiendo las constantes mencionadas en el texto. . . . .	68
4.16.	Energía (en MeV) y suma de los cuadrados de las amplitudes de onda parciales (2.93) para el estado fundamental y excitados $0^+$ del núcleo $^{44}\text{Ti}$ obtenidos en las diferentes representaciones, ajustando el canal $T = 0$ de la interacción $V_{pn}$ para obtener la energía experimental del estado fundamental del $^{44}\text{Ti}$ . . . . .	70
4.17.	Amplitudes de onda de cuatro cuerpos para los primeros seis estados $0^+$ del $^{44}\text{Ti}$ discriminadas en función de las configuraciones de partícula simple, como fue explicado en el texto. Las contribuciones de las amplitudes compuestas por estados de dispersión son del orden de $10^{-6}$ . Estos resultados son obtenidos utilizando la representación completa. . . . .	71
4.18.	Dimensiones de las bases de dos (2.76-2.77) y cuatro (2.74) cuerpos de cada representación de partícula simple introducida hasta ahora. . . . .	72
4.19.	Porcentaje wf % de la función de onda de los estados $0^+$ del $^{44}\text{Ti}$ en la representación de polo perdida al truncar el espacio de Hilbert. Además, se explicita la variación absoluta de la energía $\Delta E$ (en keV). . . . .	72
4.20.	Dimensiones de las bases de dos (2.76-2.77) y cuatro (2.74) cuerpos en la representación completa de partícula simple con diferentes espacios de Hilbert truncados. . . . .	72
4.21.	Amplitudes de onda de cuatro cuerpos de los seis primeros estados $0^+$ del $^{44}\text{Ti}$ obtenidos con la representación completa con el espacio de Hilbert truncado $\text{EHT}^{(I)}$ , y sus energías en MeV. . . . .	73
4.22.	Suma de los cuadrados de las amplitudes parciales de onda para el estado fundamental del núcleo $^{104}\text{Te}$ obtenido utilizando la representación de polo. El valor esperado del isoespín en este estado es cero. . . . .	75
4.23.	Porcentaje wf % perdido de la amplitud total de la función de onda de la Tabla 4.22 al utilizar distintos espacios de Hilbert truncados para calcular el estado fundamental del $^{104}\text{Te}$ con la representación de polo. Además, se nota el tamaño de la base de cuatro cuerpos, el cual es $N_{4B} = 1160$ para los cálculos con el espacio de Hilbert completo. . . . .	76
4.24.	Suma de los cuadrados de las amplitudes de ondas de cuatro cuerpos para el estado fundamental del núcleo $^{104}\text{Te}$ obtenido utilizando la representación completa, con diferentes espacios de Hilbert truncados. . . . .	77

5.1.	Norma (notar que $\Im m(\text{Norma}) \times 10^3$ ) y cantidad de amplitudes parciales $n^\circ$ que se tienen en cuenta con diferentes cotas aplicadas a la parte real e imaginaria de las amplitudes del estado fundamental del $^{212}\text{Po}$ . Sus amplitudes y energía fueron introducidas en la Tabla 3.17. . . . .	86
5.2.	Energías de cuatro cuerpos $E_{J\pi}$ (en MeV) y factores espectroscópicos convencionales $S$ de los estados $0^+$ del $^{212}\text{Po}$ calculados a través de las funciones de onda construidas en la sección 3.3 con las representaciones de partícula simple utilizadas. . . . .	87
5.3.	Norma (notar que $\Im m(\text{Norma}) \times 10^3$ ) y cantidad de amplitudes parciales $n^\circ$ que se tienen en cuenta con diferentes cotas aplicadas a la parte real e imaginaria de las amplitudes del estado fundamental del Titanio-44. Sus amplitudes y energía fueron calculadas con la representación completa de partícula simple introducidas en la Tabla 4.16 y la Figura 4.4. . . . .	88
5.4.	Factores espectroscópicos convencionales $S$ del $^{44}\text{Ti}$ calculados con representación completa de partícula simple. . . . .	90
5.5.	Norma (notar que $\Im m(\text{Norma}) \times 10^3$ ) y cantidad de amplitudes parciales $n^\circ$ que se tienen en cuenta con diferentes cotas aplicadas a la parte real e imaginaria de las amplitudes del estado fundamental del $^{104}\text{Te}$ (ver Tabla 4.22). . . . .	91
5.6.	Energías de cuatro cuerpos $E_{J\pi}$ (en MeV) y factores espectroscópicos renormalizados $S$ de los estados $0^+$ del $^{212}\text{Po}$ calculados a través de las funciones de onda construidas en la sección 3.3 con las representaciones de partícula simple utilizadas. . . . .	97
5.7.	Factores espectroscópicos renormalizados $S$ del $^{44}\text{Ti}$ calculados con representación completa de partícula simple. . . . .	100
F.1.	Representaciones utilizadas durante el análisis de performance y optimizaciones. En azul se encuentran las resonancias. . . . .	144
F.2.	Discretización de los contornos de las resonancias presentes en las representaciones de la Tabla F.1. . . . .	145
G.1.	Intensidades (en MeV) de los potenciales para el caso de dos neutrones utilizados en las tres bases. Además, se presenta la intensidad que utiliza la Ref. [23]. Las intensidades fueron optimizadas con el algoritmo de <i>Levenberg-Marquardt</i> [114, 115] a los cuatro primeros estados pares del $^{210}\text{Pb}$ , con los residuos presentados. Los rangos de la interacción gaussiana fueron $\beta_{se} = 1.9$ fm y $\beta_{to} = 2.92$ fm. . . . .	153
G.2.	Energías (en MeV) experimentales[1] y calculadas utilizando los parámetros de la Tabla G.1 relativas al carozo inerte $^{208}\text{Pb}$ , como resultado de la optimización de las intensidades de los potenciales. Se presentan los resultados para cada una de las representaciones utilizadas. . . . .	153

H.1.	Energías (en MeV) experimentales [1] y calculadas relativas al carozo inerte $^{40}\text{Ca}$ , para diferentes simetrías en la base de partícula simple. . . . .	156
H.2.	Intensidades (en MeV) de los potenciales para el caso de dos cuerpos sobre el $^{40}\text{Ca}$ utilizados en las tres representaciones. Estas fueron optimizadas con el algoritmo $\chi^2$ [115] tal cual fue presentado en el texto. Los residuos obtenidos en la representación completa son: 0.127 para $nn$ , 0.423 para $pp$ y del orden de $10^{-6}$ para ambos canales de $pn$ . . . . .	158
H.3.	Intensidades (en MeV) de la interacción protón-neutrón que reproducen la energía del estado fundamental del núcleo $^{44}\text{Ti}$ para cada una de las representaciones. Las intensidades son proporcionales a las de la Tabla 4.9 siguiendo las constantes mencionadas en el texto. . . . .	159
H.4.	Intensidades (en MeV) de la interacción protón-neutrón que reproducen la energía del estado fundamental del núcleo $^{44}\text{Ti}$ para cada una de las representaciones. Las intensidades son proporcionales a las de la Tabla H.2 siguiendo las constantes mencionadas en el texto. . . . .	161
H.5.	Amplitudes de ondas parciales (2.93) para el estado fundamental y excitados del núcleo $^{44}\text{Ti}$ obtenidos en las diferentes representaciones. . . . .	162

## ÍNDICE DE FIGURAS

1.1.	Tabla de nucleidos en función del modo primario de decaimiento de cada uno de ellos. En amarillo se destacan los núcleos para los cuales se ha observado su decaimiento espontáneo en alfa. Fuente: Ref. [29]. . . . .	2
2.1.	Diferencia en MeV entre el valor medido de $B/A$ y el valor calculado mediante la fórmula empírica de masa como función del número de neutrones $N$ . Los puntos negros más grandes son para los elementos estables. Se aprecian los número mágicos para $N = 20, 28, 50, 82$ y $126$ . Las mayores discrepancias, para núcleos doblemente mágicos, son las marcadas. Fuente: <i>Fundamentals in Nuclear Physics - Basdevant, et al</i> [68]. . . . .	9
2.2.	Representación esquemática de los estados ligados (rectángulo verde), resonancias (círculo azul) y estados de dispersión (círculos rojos). Además, se representa el contorno $L^+$ respecto a la resonancia, y como los estados de dispersión se definen de manera discreta sobre el contorno $L^+$ . . . . .	12
2.3.	(a) Representación esquemática del contorno $L^+$ rectangular respecto a un estado de resonante de partícula simple. Los estados de dispersión se definen de manera discreta sobre el contorno. (b) Contorno resultante en el plano de energía de dos cuerpos obtenido a partir de la Figura (a). La región tachada se encuentran superpoblada por estados del continuo de dos cuerpos, mientras que el área blanca se encuentra liberada de estados de dispersión de dos cuerpos. <i>Imágenes tomadas de Ref. [81]</i> . . . . .	21
3.1.	Familia de los núcleos construidos con el modelo de capas sobre el Plomo-208. Además, se notan sus modos de decaimiento. Fuente: Ref. [29]. . . . .	38
3.2.	Niveles de energía del núcleo $^{210}\text{Pb}$ experimentales, de la Ref. [23] y calculadas con la representación completa. Los potenciales fueron optimizados utilizando los cuatro primeros estados pares. . . . .	43
3.3.	Niveles de energía del núcleo $^{210}\text{Po}$ experimentales, de la Ref. [23] y calculadas con la representación completa. Los potenciales fueron optimizados utilizando los cinco primeros estados pares. . . . .	44
3.4.	Niveles de energía del núcleo $^{210}\text{Bi}$ experimentales, de la Ref. [23] y calculadas con la representación completa. Los potenciales fueron optimizados utilizando los primeros tres estados pares (excepto el $0^+$ ) y cinco estados impares, cuyo promedio de los residuos al cuadrado es de $4 \times 10^{-5}$ . . . . .	46
3.5.	Niveles de energía de los núcleo $^{210}\text{Pb}$ y $^{210}\text{Po}$ experimentales, calculados con la representación completa utilizando el formalismo completo (FC) y con configuración principal (MC). . . . .	48

3.6.	Energías de los estados ligados de los núcleos $^{210}\text{Pb}$ y $^{210}\text{Po}$ calculados utilizando la representación completa. El número cuántico $J^\pi$ de cada línea no está explícito para mantener la figura simple. . . . .	50
3.7.	Energías de los estados ligados de los núcleos $^{210}\text{Pb}$ y $^{210}\text{Po}$ calculados utilizando la representación completa y <i>main-configuration</i> . El número cuántico $J^\pi$ de cada línea no está explícito para mantener la figura simple. . . . .	53
3.8.	Comparación entre las energías experimentales [1] y calculadas en las tres representaciones de los primeros cuatro estados $0^+$ del $^{212}\text{Po}$ , utilizando dos formalismos (MC indica configuración principal y CO que el espacio de Hilbert fue truncado) diferentes para describir la representación Completa. En línea punteada negra se incluyen los estados experimentales que fueron observados una única vez en un decaimiento alfa pero no poseen un número cuántico asociado [1, 117]. . . . .	55
4.1.	Familia de los núcleos construidos en este capítulo sobre los carozos $N = Z$ . Se notan además los modos de decaimiento de sus estados fundamentales. Fuente: Ref. [29]. . . . .	56
4.2.	Energías de dos cuerpos experimentales y calculadas en la representación completa. . . . .	64
4.3.	(Izq.) Energías de dos cuerpos de los núcleos $^{100}\text{Sn} + NN$ calculadas en la representación completa. Todas se encuentran ordenadas respecto al estado fundamental para facilitar la apreciación visual. Notemos que los estados son ligados hasta los $\sim 24$ MeV y $\sim 9$ MeV de excitación para los núcleos $^{102}\text{Sn}$ y $^{102}\text{Sb}$ , respectivamente, mientras que para el $^{102}\text{Te}$ todos los estados se ubican en el continuo respecto al carozo $^{100}\text{Sn}$ . Además, las resonancias de dos cuerpos del núcleo $^{102}\text{Te}$ se destacan en rojo. . . . .	67
4.4.	Energías experimentales [1] y calculadas de los primeros estados $0^+$ del $^{44}\text{Ti}$ . Además, se comparan los resultados obtenidos en las distintas representaciones y se presentan los valores del isoespín $T$ para cada nivel. . . . .	71
4.5.	Comparación entre las energías experimentales [1] y calculadas utilizando la representación completa, con el espacio de Hilbert completo (RC) y truncado (RC-CO). . . . .	73
4.6.	Evolución de la energía de cuatro cuerpos $E_{gs}$ en función del tamaño de la base de cuatro cuerpos. Cálculos realizados con la representación de polo de partícula simple. . . . .	75
5.1.	Comportamiento de la función de onda y el ancho del estado fundamental del núcleo $^{212}\text{Po}$ . . . . .	80
5.2.	Comportamiento de la función de onda y el ancho del estado $0_3^+$ del núcleo $^{44}\text{Ti}$ obtenidos con los parámetros de Woods-Saxon de la Tabla 4.2 (azul) y de la Ref. [155] (naranja). . . . .	82

5.3.	Comportamiento de la función de onda y el ancho del estado fundamental del núcleo $^{104}\text{Te}$ . El área pintada encierra los máximos y mínimos presentados en las ecuaciones calculados con los diferentes valores de la difusividad $a$ . . . . .	84
5.4.	Anchos absolutos de partícula simple $\Gamma^{\text{SP}}$ en función del $Q_\alpha$ para el estado fundamental del $^{104}\text{Te}$ . La línea punteada indica los valores calculados con $a = 0.65$ fm, mientras que las áreas pintadas encierran los máximos y mínimos obtenidos con los diferentes valores de la difusividad $a$ . . . . .	85
5.5.	Diferentes amplitudes de formación $g(r)$ obtenidas con las representaciones de partícula simple utilizadas en la construcción del $^{212}\text{Po}$ . . . . .	87
5.6.	Diferentes amplitudes de formación $g(r)$ obtenidas con las representaciones de partícula simple utilizadas en la construcción del $^{44}\text{Ti}$ . . . . .	89
5.7.	Amplitud de formación del estado fundamental del núcleo $^{104}\text{Te}$ calculada con ambas representaciones de partícula simple. . . . .	91
5.8.	$S$ en función de $\Delta r$ , $r_{\text{max}}$ y $n_\nu$ , para el $^{212}\text{Po}$ . . . . .	93
5.9.	Evolución del factor espectroscópico renormalizado del estado fundamental del $^{212}\text{Po}$ con respecto a los autovalores del <i>norm-kernel</i> $\mathcal{N}$ . Los parámetros de la SGB son $\Delta r = 0.41$ fm y $r_{\text{max}} = 9.43$ fm. . . . .	95
5.10.	Diferentes amplitudes de formación renormalizadas $G(r)$ respecto a las convencionales $g(r)$ de la Figura 5.5a correspondientes al núcleo $^{212}\text{Po}$ . . . . .	96
5.11.	Evolución del factor espectroscópico renormalizado del estado fundamental del $^{44}\text{Ti}$ con respecto a los autovalores $n_\nu$ del <i>norm-kernel</i> $\mathcal{N}$ . Los parámetros de la SGB son $\Delta r = 0.41$ fm y $r_{\text{max}} = 9.43$ fm. . . . .	98
5.12.	Diferentes amplitudes de formación renormalizadas $G(r)$ respecto a aquellas presentes en la Figura 5.6a del núcleo $^{44}\text{Ti}$ . . . . .	99
5.13.	Evolución del factor espectroscópico renormalizado del estado fundamental del $^{104}\text{Te}$ obtenido en la representación completa de partícula simple con respecto a los autovalores $n_\nu$ del <i>norm-kernel</i> $\mathcal{N}$ . Los parámetros de la SGB son $\Delta r = 0.41$ fm y $r_{\text{max}} = 9.43$ fm. Notamos con una flecha roja el movimiento necesario para determinar correctamente $\nu_{\text{max}}$ . . . . .	101
5.14.	Amplitud de formación renormalizada del estado fundamental del $^{104}\text{Te}$ calculada con ambas representaciones de partícula simple. . . . .	101
5.15.	Tiempos de vida $T_{1/2}$ y anchos absolutos $\Gamma$ en función del $Q_\alpha$ calculados con la representación completa. Las líneas indican los valores $T_{1/2}$ y $\Gamma$ obtenidos con una difusividad $a = 0.65$ fm en el modelo de dos cuerpos. Las áreas pintadas encierran los máximos y mínimos. . . . .	104

5.16.	Tiempos de vida en decaimiento alfa $T_{1/2}$ calculados para de los estados fundamentales de los núcleos Polonio-212 y Telurio-104, y un estado excitado del Titanio-44. Además, se destacan los valores experimentales en los casos donde se dispone de esta información. . . . .	104
F.1.	Mediciones para el programa compilado con banderas que incorporaban optimizaciones, y dos versiones diferentes del compilador. . . . .	147
F.2.	Resultados del <i>Empirical Roofline Toolkit</i> para la mejor combinación de banderas. . .	148
F.3.	Mediciones para el programa compilado con banderas que incorporaban optimizaciones, y dos versiones diferentes del compilador. . . . .	149
F.4.	Mediciones para distinta cantidad de hilos para casos particulares de las subrutinas paralelizadas. . . . .	150
F.5.	Mediciones para distinta cantidad de hilos y distintos conjuntos del tiempo de ejecución total del programa. . . . .	151
F.6.	Resultados de speedup y eficiencia para las mediciones realizadas en las Figuras F.5a y F.5b. . . . .	152
H.1.	Estados de partícula simple en relación al carozo $^{40}\text{Ca}$ . . . . .	155
H.2.	Energías de dos cuerpos experimentales ( $J$ par) y calculadas utilizando la representación completa o la capa $pf$ . . . . .	156
H.3.	Energías de dos cuerpos experimentales y calculadas utilizando la representación completa o la capa $pf$ apagando la interacción coulombiana. . . . .	157
H.4.	Energías de dos cuerpos experimentales y calculadas en la base completa sin forzar el formalismo de isoespín (" <i>Actual</i> "), y su comparación con los resultados de haber incorporado esta condición (" <i>Isoespín</i> "). . . . .	158
H.5.	Comparación de los diferentes niveles de energía del Titanio-44 mostrando los resultados de las dos parametrizaciones mencionadas: $V_{pn}(T = 0)$ solo parte $T = 0$ de la interacción, $V_{pn}(T = 0, A)$ interacción completa. . . . .	160
H.6.	Comparación entre las energías experimentales [1] y calculadas utilizando la representación RC, donde las energías de dos cuerpos fueron ajustadas con y sin isoespín. . . . .	161
I.1.	Análisis de la dependencia del ancho $\Gamma^{\text{SP}}$ con los parámetros $(r_0, a)$ del potencial de Woods-Saxon utilizado para la interacción $\alpha + A$ . . . . .	163

# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCIÓN

El núcleo atómico del átomo de Helio, cuya nomenclatura es  ${}^4\text{He}$ , se encuentra formado por dos neutrones y dos protones. También conocido como **partícula alfa** ( $\alpha$ ), tiene una estabilidad muy por fuera de la media del resto de los núcleos atómicos. Ésta genera que sea posible encontrar formaciones estructurales con estas características en núcleos más grandes. Esta idea de **clusterización** puede ser ampliada a varios otros elementos, como por ejemplo el  ${}^{12}\text{C}$  [9, 10]. Este proceso microscópico de formación de un clúster  $\alpha$  dentro de un núcleo más pesado se encuentra íntimamente relacionado con el **decaimiento alfa**.

La característica monoenergética del decaimiento alfa (también observada en la radiación  $\gamma$ ) y su naturaleza de partícula cargada (característica compartida con la radiación  $\beta$ ) hacen posible que tengamos precisiones a nivel espectroscópico-experimentales incluso menores al keV. Esta dualidad hace que el decaimiento alfa como tal sea hoy el gran espacio de prueba de diferentes teorías microscópicas que buscan explicar el decaimiento de clústeres exóticos incluso más grandes. El término “microscópico” trata de expresar la idea de que estas teorías describen el fenómeno de decaimiento considerando explícitamente todos los grados de libertad nucleónicos que entran en juego, tratando de limitar los parámetros libres con datos experimentales. A nivel experimental, la detección de partículas alfa emitidas en un proceso de reacciones nucleares fue y sigue siendo el método principal para identificar núcleos super-pesados como también sus estados excitados [11], los cuales pueden ser creados en reacciones de iones pesados.

La física nuclear en general se encuentra en un momento de *renacimiento* gracias a las nuevas facilidades experimentales [12–15] que han abierto posibilidades de investigación en núcleos altamente inestables como también objeto de prueba de formalismos que intentan describir estos núcleos. Respecto al caso particular del decaimiento alfa, el renovado interés surge gracias a datos experimentales en la región del Escandio-100 que indican la presencia del llamado decaimiento alfa *superpermitido* [6, 16, 17], sumado a últimas observaciones del decaimiento alfa del Telurio-104 que definen su tiempo de vida media por debajo de los nano-segundos [18, 19]. Además de los importantes descubrimientos experimentales, a nivel teórico aparece la importancia de correlaciones entre las cuatro partículas de valencia que componen el alfa, que surge en primer lugar, por la clarificación del rol de la mezcla de configuraciones o *configuration-mixing* de estados de partículas [20–22], y por otro lado, por la inclusión de la interacción protón-neutrón [21, 22]. Esto estimuló el desarrollo de métodos más poderosos que incorporan que la interacción entre partículas idénticas y distintas tratadas de la misma manera [23–25].

Gracias al avance informático de los últimos años tanto a nivel de hardware como de software [26], junto con diferentes facilidades computacionales que se tuvieron a disposición durante este trabajo [27, 28], hacen posible la ampliación de las representaciones de partícula simple de forma que se pueda incluir el continuo completo en el estudio del decaimiento alfa, pudiendo incluso cuantificar la significancia de éste en el decaimiento propiamente dicho.

El trabajo aquí presentado está organizado de la siguiente manera: a continuación inmediata, realizaremos un breve repaso por la construcción histórica del decaimiento alfa y del formalismo desarrollado

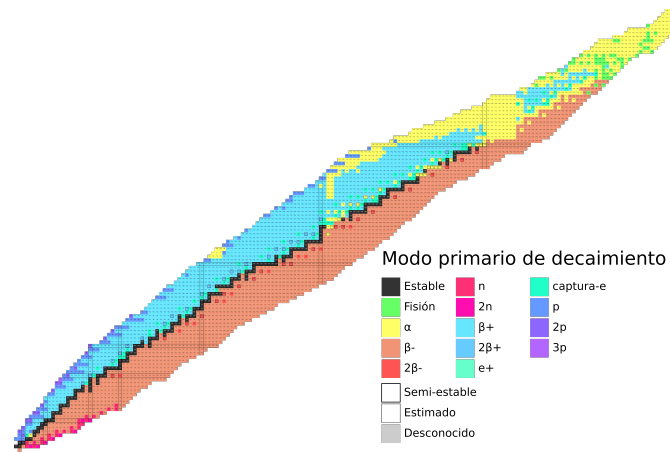


Figura 1.1: Tabla de nucleidos en función del modo primario de decaimiento de cada uno de ellos. En amarillo se destacan los núcleos para los cuales se ha observado su decaimiento espontáneo en alfa.

Fuente: Ref. [29].

en este trabajo. En el capítulo 2, realizaremos el desarrollo del marco teórico necesario para estudiar el decaimiento alfa. Allí describiremos el modelo de capas nuclear con la representación de Berggren [30] utilizado en la construcción de las funciones de onda, y la amplitud de formación renormalizada que incorpora estas funciones de onda al decaimiento. Además, se realizará un breve descripción de cada uno de los códigos computacionales utilizados a lo largo del trabajo. Luego, en el capítulo 4 realizaremos la primera aplicación del modelo de capas a la familia de núcleos construidos sobre el Plomo-208 para llegar al Polonio-212. Este núcleo se ubica en la zona usual del decaimiento alfa dentro de la Tabla de nucleidos (ver Fig. 1.1), por lo cual identificaremos las particularidades del modelo y la eficiencia de cálculo en este punto. Continuando con las aplicaciones del modelo de capas, en el capítulo 5 nos movemos a diferentes zonas no usuales de la Tabla de nucleidos 1.1, en particular analizaremos la familia de núcleos construidos sobre el Calcio-40 para obtener la función de onda del Titanio-44, y aquellos construidos sobre el Estaño-100 para llegar a la función de onda del Telurio-104. La particularidad de éstos es que tienen misma cantidad de neutrones que de protones ( $N = Z$ ), y se ubican en las cercanías de la línea de goteo de protones, por lo cual, la capacidad de nuestro formalismo de incluir las correlaciones con el continuo de energía, que ganan importancia y son decisivas para la correcta representación de los núcleos, se vuelve fundamental. Finalmente, en el capítulo 6 aplicaremos los conceptos de modelo de decaimiento de dos cuerpos, amplitud de formación y renormalización para establecer los tiempos de vida media en decaimiento alfa de los estados fundamentales de los núcleos Polonio-212 y Telurio-104, y predecir éstos para el estado excitado del Titanio-44.

Al final de esta tesis se incluyen los siguientes apéndices: en el apéndice A, se construye la forma analítica de los elementos de matriz correspondientes a dos nucleones; en el apéndice B, se construye la forma analítica de los elementos de matriz correspondientes al par protón-neutrón reescritos como estados de cuatro cuerpos; en el apéndice C, se desarrolla la expresión del valor esperado del isoespín para los estados de cuatro cuerpos; en el apéndice D, se introduce la matemática necesaria para construir la amplitud de formación, como por ejemplo el paso de coordenadas internas a relativas; en el apéndice E, se realiza la deducción de los autovalores y autovectores del operador *norm-kernel* utilizado en el proceso de

renormalización de la amplitud de formación; en el apéndice F, se presentan las optimizaciones realizadas sobre el código computacional que construye la función de onda de cuatro cuerpos; en el apéndice G, se muestra la dependencia de los estados del Plomo-210 con la intensidad del canal triplete-impar de la interacción gaussiana; en el apéndice H, se realizan diferentes pruebas en los núcleos contruidos con dos nucleones sobre el carozo Calcio-40 a fin de demostrar la dependencia de esta familia de núcleos con el isospín; y finalmente en el apéndice I, se presenta el análisis realizado en el modelo de dos cuerpos del decaimiento alfa del estado fundamental del Polonio-212, a fin de establecer la dependencia de la energía con los parámetros del potencial de Woods-Saxon.

## 1.1. Breve historia del decaimiento alfa

El fenómeno físico donde partículas alfa emergen de ciertos núcleos sugiere que éstas existen dentro previamente a su emisión, y además, como este fenómeno no es general a todos los núcleos de la Tabla de nucleidos (Fig. 1.1), se entiende que estas partículas están retenidas por cierta barrera de potencial. La primera observación experimental data de 1896, realizada por Henri Becquerel [31] utilizando sales de Uranio no fosforescente. En cuanto a la descripción teórica del problema, la primera aproximación clásica fue dada por Rutherford en 1899 [32], que pretendía eludir el problema suponiendo que en un estadio inicial del decaimiento, la partícula alfa consistía de cuatro “protones neutros”(recordemos que aun no se había descubierto la existencia del neutrón), y por ende iba a poder atravesar la barrera de Coulomb, y más tarde en el proceso de decaimiento, dos electrones se desprenderían de esta partícula alfa y así quedaría cargada. Este tratamiento fue bastante insatisfactorio para describir el fenómeno, hasta que en 1928, George Gamow [33] y a la par Gurney y Condon [34], presentaron un trabajo pionero en el tratamiento cuántico del fenómeno, utilizando una aproximación semiclásica, implementando el llamado **efecto túnel**. Este formalismo fue el primero que aplicó una interpretación probabilística de la mecánica cuántica, en el sentido de la interpretación de Copenhague. Fue tal el éxito de este trabajo, que convenció a la mayoría de sus contemporáneos que la mecánica cuántica, pese a sus paradojas, era el instrumento indicado para explicar fenómenos microscópicos.

El tratamiento de Gamow tiene la particularidad positiva de que describe muy bien el proceso de penetración de la partícula alfa a través de la barrera de potencial. La idea fue asumir que la partícula alfa se está moviendo dentro del núcleo como una pelota que va rebotando en las paredes hasta que logra atravesar esta barrera/pared. Este modelo intuitivo reproduce muy bien la relación entre los tiempos de vida experimentales de diferentes estados entre los micro-segundos y los giga-años. En esta imagen semiclásica de Gamow, no existió una posibilidad de que la partícula alfa no estuviese pre-formada en el núcleo. En esta idea de la penetrabilidad de la barrera de potencial, uno necesariamente debe definir el punto de retorno, es decir, el lugar donde comienza la zona clásicamente prohibida y entra entonces en juego la fórmula de la penetrabilidad. Este radio  $r_c$  tiene comportamientos no predecibles a lo largo de los núcleos pues expresa estructura nuclear interna, algo más complejo que solo el radio nuclear [35].

Entonces, el principal problema para poder establecer una teoría que describiese correctamente los tiempos de vida absolutos de los estados de un núcleo era el siguiente: el estado inicial y el final del sistema deben ser descritos simultáneamente, para lo cual un debe resolver un problema de muchos cuerpos de un estado ligado y uno no ligado o resonancia (perteneciente al continuo) de manera consistente. Si esto

era satisfecho, uno podía aplicar la teoría de dispersiones y resolver el problema.

El comienzo de la solución viene por el lado de la teoría de reacciones: uno puede asociar las resonancias con un fenómeno nuclear formado por elementos intermedios que viven un cierto tiempo. Entonces, para el decaimiento alfa se tomó esta idea pero asumida diferente: estas resonancias de la teoría de reacciones que poseían cierto ancho, fueron asumidas de tener un tiempo de vida asociado al ancho. Fue entonces que Bethe [36] y Wigner [37] encontraron que, si las resonancias son angostas, los elementos  $S_{ii'}$  de la matriz de colisión (o matriz S) dependen de la energía  $\varepsilon$  y el ancho  $\Gamma$  de la resonancia<sup>1</sup>. Tanto la energía como el ancho caracterizan a la sección eficaz causada por la resonancia.

Fue entonces en 1954 cuando Thomas [39, 40] aplica las ideas de la matriz-R de la teoría de reacciones independiente del tiempo al decaimiento alfa. A partir de ésta, Thomas llega a

$$\Gamma \propto P(r_c)g^2(r_c) \quad (1.1)$$

donde  $g$  es la llamada **amplitud de formación**, es decir, la proyección del estado madre  $\Psi_{A+4}$  en un estado antisimetrizado que es producto de los dos fragmentos  $\phi_\alpha + \Phi_A$ , y  $P$  representa la penetrabilidad a través de la barrera de Coulomb. Ambas variables deben ser calculadas en el punto de retorno  $r_c$  mencionado previamente, y el ancho  $\Gamma$  no debe depender de este valor. Esta propuesta tuvo una gran importancia e influencia en la descripción del decaimiento, incluso comparable con la idea de Gamow. En esta teoría, la novedad no proviene de la penetrabilidad, que ya databa de 1928, sino de la incorporación del ingrediente estructural: la formación de un subsistema que se está desintegrando dentro del sistema principal núcleo madre. La información estructural necesaria solo es una superposición entre el estado inicial y el producto antisimetrizado de los estados de los fragmentos resultantes.

La aparición de la teoría de Thomas se da en el contexto de una explosión en los modelos que describen la estructura del núcleo. A principios de la década de 1950, en trabajos independientes, María Goeppert Mayer [41, 42] y J. Hans D. Jensen [43] realizan las primeras publicaciones sobre el modelo de capas nuclear que lograba explicar los números mágicos. La bases del modelo de capas constituyen la representación más exacta del movimiento nuclear, y son utilizadas para resolver la ecuación de Schrödinger de muchos cuerpos. Este modelo logra explicar no solo el comportamiento de un nucleón en las cercanías de un núcleo, sino que también es capaz de incluir las suficientes correlaciones para construir no solo la partícula alfa, sino muchas otras formas de clusterización.

Unos años después de Thomas, en 1957, Mang [44] desarrolla el formalismo del decaimiento alfa basado en la teoría de perturbaciones dependientes del tiempo. En este trabajo, Mang logra realizar una conexión del modelo de capas pudiendo expresar la amplitud de formación  $g$  o ancho reducido  $\gamma \propto g$  en una base de estados de partícula simple. Formalmente, fue demostrado por Zeh [45] y Mang [46] que el modelo propuesto por él y el de Thomas eran equivalentes.

En las primeras aplicaciones de las teorías de Thomas y Mang junto con el modelo de capas al decaimiento alfa, se utilizaba una representación que incluía solo una configuración o un estado para cada uno de los nucleones. Los valores de los anchos  $\Gamma$  que se obtenían de esta manera eran entre cuatro o cinco órdenes de magnitud menores a los experimentales, pero los cálculos relativos si daban buenos

---

<sup>1</sup>La expresión matemática hoy es conocida como fórmula de Breit-Wigner [38]

resultados como se mencionó previamente. A este estado del arte, el formalismo del decaimiento alfa contaba con dos problemas importantes:

- Como en las teorías de decaimientos que se utilizaban uno debía establecer  $r_c$  más allá del rango de las fuerzas nucleares y el principio de exclusión de Pauli, también se tenía que evaluar la amplitud de formación a grandes distancias. Pero al utilizar un conjunto mínimo de estados de un nucleón como representación o base, se obtenían resultados no necesariamente físicos del modelo de capas en el rango de distancias necesarias.
- Las teorías microscópicas de esos años no incorporaban la interacción residual nucleón-nucleón, por lo cual la descripción de la partícula alfa estaba incompleta.

Poco después de la aplicación de la teoría de apareamiento al núcleo por A. Bohr, B. Mottelson y D. Pines [47], se realizaron intentos de aplicación de esta teoría al decaimiento alfa en si mismo [48–50]. Allí se observó que el apareamiento permitía una correlación entre diferentes configuraciones del modelo de capas, gracias a la cual se lograba aumentar el ancho de decaimiento. Pese a que los resultados aun se encontraban a ordenes de magnitud del experimental, comenzó a ser claro la necesidad de aumentar las representaciones del modelo de capas para mejorar los resultados de los anchos calculados. En este sentido, una de las voces analizando el tamaño de la representación es la de Kai Siegbahn en la Ref [35]:

*“...la función de onda obtenida con un modelo de capas puro discrepa enormemente a la hora de representar la cantidad de clusterización de nucleones en la superficie nuclear, pero podría ser que, ampliando la representación para permitir una mezcla de configuraciones, se represente fehacientemente la clusterización alfa en la superficie nuclear...”*

A mediados de la década de 1960, estaba claro que había que incluir más estados para ampliar la representación. Primeros intentos de esto fueron dados tanto por Harada de manera independiente [48], luego junto con Glendenning realizando un profundo estudio en el Polonio-212 con una interacción Gaussiana entre nucleones [23], y Rasmussen, junto con Mang, aplicando una interacción delta que simplificaba las ecuaciones [49, 51]. Estos trabajos lograban reproducir los anchos reducidos  $\gamma$  relativos entre niveles, pero aun no eran capaces de describir los valores exactos. Una de las mayores dificultades de los modelos de esa época era a nivel computacional, pues pese a que estos modelos utilizaban la representación del modelo de capas con autovalores y autovectores del oscilador armónico, aumentar la base más allá de una capa era imposible en ese entonces. La confirmación de la importancia de la mezcla de configuraciones del modelo de capas sucedió de la mano de Tonzuka-Arima [20] y Janouch-Liotta [52] a fines de los setenta, pero aun los resultados se encontraban a un orden de magnitud del experimento. La física detrás de la ganancia que se esperaba ampliando la representación es que, con la participación de configuraciones de mayor energía, la interacción entre los pares de nucleones idénticos va a clusterizar dos nucleones y dos protones en la superficie del núcleo [53].

En la misma línea de investigación, durante la década de los ochenta, Dodic-Crnković-Janouch-Liotta-Sibanda [21, 22] incorporaron también al problema la interacción entre protones y neutrones, cuya importancia fue confirmada a principio de los 90 por Varga-Lovas-Liotta [54] en bases del modelo de capas lo suficientemente grandes para notar la influencia de la interacción protón-neutrón en la superficie

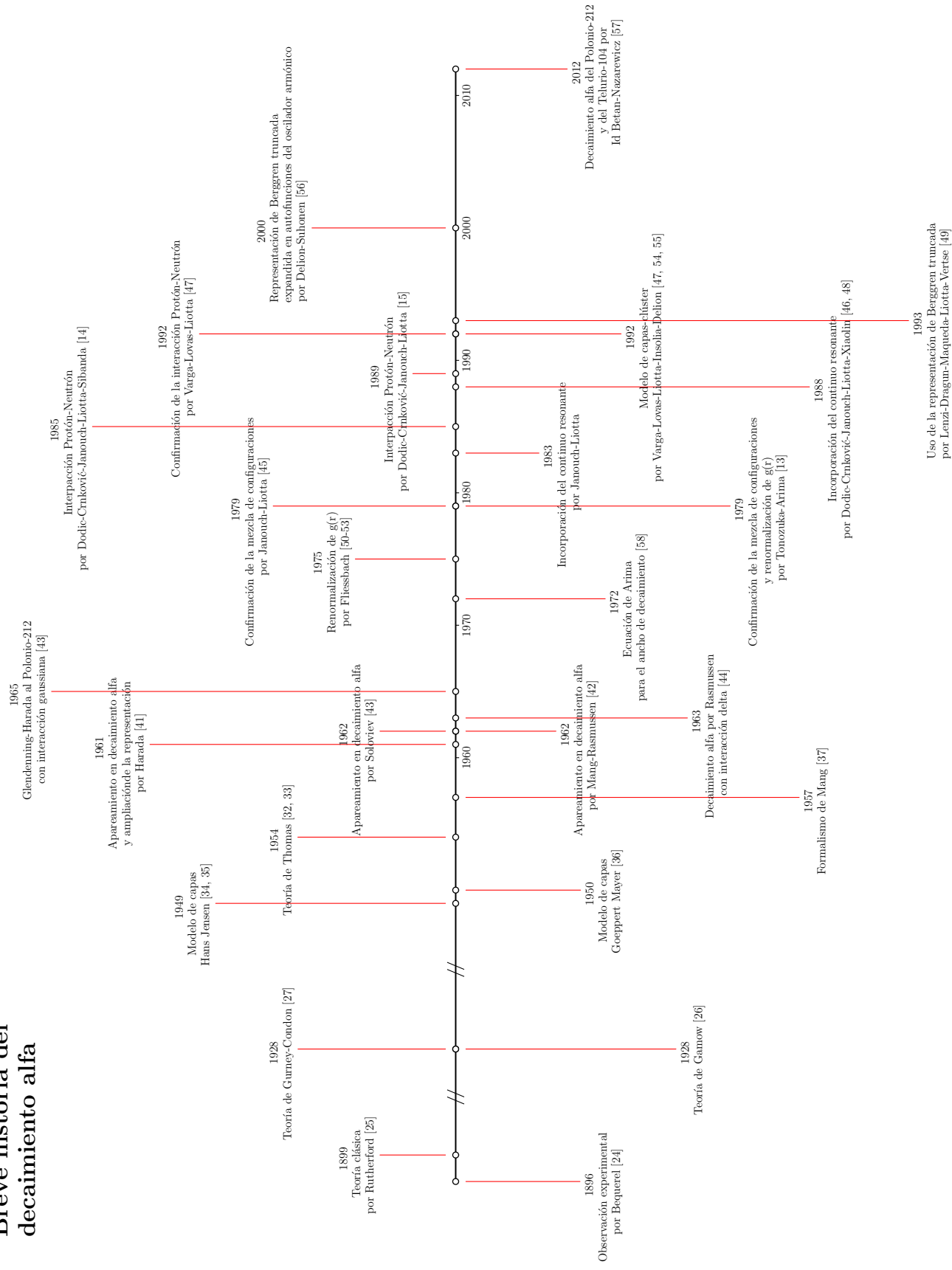
nuclear. Buscando ampliar la representación del modelo de capas a fin de representar fehacientemente la interacción entre nucleones en la superficie nuclear, Janouch-Liotta-Dodic-Crnković-Xiaolin [53, 55] realizan los primeros tratamientos de la amplitud de formación utilizando tanto autovectores del potencial realista de Woods-Saxon como expandidos en autovectores del oscilador armónico de manera que la representación incluya al continuo resonante, y luego a principio de los noventa Lenzi-Dragun-Maqueda-Maqueda-Liotta-Vertse [56] trabajan con una representación de Berggren truncada [57] que incluye estados ligados y resonancias a través de un potencial de Woods-Saxon. Estos tratamientos concluyeron que incorporar los estados de partícula simple correspondientes al continuo resonante como también varios estados correlacionados de dos partículas era necesario para tener una correcta descripción del decaimiento alfa. Pese a esto, los resultados obtenidos aun se encontraban a un orden de magnitud de los experimentales.

En el medio de los desarrollos teóricos respecto de la incorporación de la interacción entre nucleones y el tamaño de la base del modelo de capas, particularmente a mediados de la década de 1970, Fliessbach-Mang realizan un profundo análisis respecto a la matemática del problema y el tratamiento del principio de exclusión de Pauli [58–61]. Se demostró que las funciones de onda que eran utilizadas para la obtención del ancho reducido  $\gamma$  introducido décadas antes no se encontraban correctamente normalizadas, lo cual implicaba que se violase el principio de exclusión de Pauli. Así, se propuso una renormalización de las funciones de onda lo cual aumentaba en un par de ordenes de magnitud el ancho reducido, siempre que las representaciones fuesen pequeñas. La primera publicación que combinaba las ideas de mezcla de configuraciones con la renormalización de Fliessbach fue la de Tonzuka y Arima en 1979 [20], la cual mejoraba la descripción de los tiempos de vida media del decaimiento alfa del Polonio-212, pero aun estos eran entre 14 y 23 veces más pequeños que el experimental.

No fue hasta principios de la década de 1990, cuando Varga-Lovas-Liotta-Insolia-Delion [54, 62, 63], utilizando una correcta inclusión de la interacción protón-neutrón con representaciones lo suficientemente grandes para obtener una clusterización alfa muy significativa más allá de la superficie nuclear y una renormalización apropiada de las funciones de onda, todo esto trabajado en una combinación del modelo de capas con el modelo de clúster, lograron describir el tiempo de vida media experimental del decaimiento alfa del Polonio-212.

Al actual estado del arte, una de las claves es establecer un formalismo dentro del modelo de capas que permita describir el decaimiento alfa, tanto en núcleos estables como en aquellos en la cercanía de la línea de goteo. En este sentido, la inclusión del continuo de energía resulta sumamente importante, cuya significancia la observamos tanto en el trabajo de Delion-Suhonen [64], en el cual se utiliza una representación de Berggren expandida en autofunciones del oscilador armónico para describir la amplitud de formación del Polonio-212, y el proyecto de Id Betan-Nazarewicz [65], en el cual se trabajó con los estados fundamentales del Polonio-212 y Telurio-104, con una alternativa equivalente al formalismo de Thomas. Ésta tenía la característica de independizarse del radio  $r_c$  a través de la ecuación de Arima  $\Gamma = \mathcal{S}\Gamma^{\text{SP}}$  desarrollada en 1972 [66], donde  $\mathcal{S}$  es el factor espectroscópico renormalizado que indica la cantidad de clusterización del sistema, y  $\Gamma^{\text{SP}}$  el ancho absoluto de decaimiento desde el modelo de dos cuerpos introducido por Gamow [33].

# Breve historia del decaimiento alfa



## CAPÍTULO 2

### MARCO TEÓRICO

En este capítulo desarrollaremos todo el marco teórico que nos servirá de sustento en nuestro formalismo. Está ordenado en dos grandes áreas: en la sección 2.1 desarrollamos el modelo de capas nuclear, que nos permitirá construir los estados de una, dos y cuatro partículas; mientras que en la sección 2.2 formulamos los modelos que nos permiten calcular el tiempo de vida media en decaimiento alfa a nivel microscópico.

#### 2.1. El modelo de capas nuclear

El modelo de capas nuclear puede ser pensado como una aproximación para describir un sistema de partículas interactuantes en términos de partículas independientes moviéndose en un potencial central. Al ser los nucleones fermiones, se discretizarán los niveles de partícula simple. Una de las indicaciones más obvias de la existencia de una estructura de capas en un núcleo se obtiene al realizar una comparación con el ordenamiento de los electrones en el átomo. Si se estudia la energía de ionización de un átomo, se observan claramente la existencia de números mágicos en 2, 10, 18, 36, 54, 86. Este comportamiento se explica porque la energía de ionización aumenta suavemente mientras completan las capas electrónicas. Cuando comenzamos a llenar una nueva capa, el último electrón se encuentra en una órbita menos ligada que el anterior, entonces la energía de ionización del electrón muestra rápidas variaciones cuando una capa electrónica es cerrada.

La cantidad análoga en el caso nuclear es la energía de separación  $S_n$  ( $S_p$ ) del neutrón (protón), definida como la diferencia de la energía de ligadura entre los núcleos  $A = N + Z$  y  $A + 1 = N' + Z$  con  $N' = N + 1$ . Para la mayoría de los núcleos,  $S_p \approx S_n \approx 8$  MeV. Esta energía de separación es máxima para los números mágicos 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 (Ver Figura 2.1). Estos saltos en la energía de excitación o separación tienen su reminiscencia en química: los gases nobles están particularmente arraigados a sus electrones, mientras que los metales alcalinos presentan energías de ionización bajas.

Entonces, pese a que existen diferencias entre el movimiento de los electrones en el átomo y los nucleones en el núcleo, la presencia de un potencial nuclear medio actuando sobre los nucleones es clara. La aproximación que haremos entonces es pasar a un sistema de nucleones levemente acoplados [67].

En la *aproximación de campo medio*, cada nucleón se encuentra moviéndose en un campo externo creado por los  $A - 1$  restantes. Uno puede tomar a este potencial  $V_{MF}$  como un promedio temporal, definido en un periodo  $\Delta t$  pequeño, de las interacciones entre un nucleón y sus  $A - 1$  vecinos restantes. En esta idea meramente intuitiva, el campo es [69]

$$V_{MF} = \sum_{i=1}^A v(\mathbf{r}_i), \quad v(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} dt \sum_{j=1; j \neq i}^A v(\mathbf{r}_i(t), \mathbf{r}_j(t)) \quad (2.1)$$

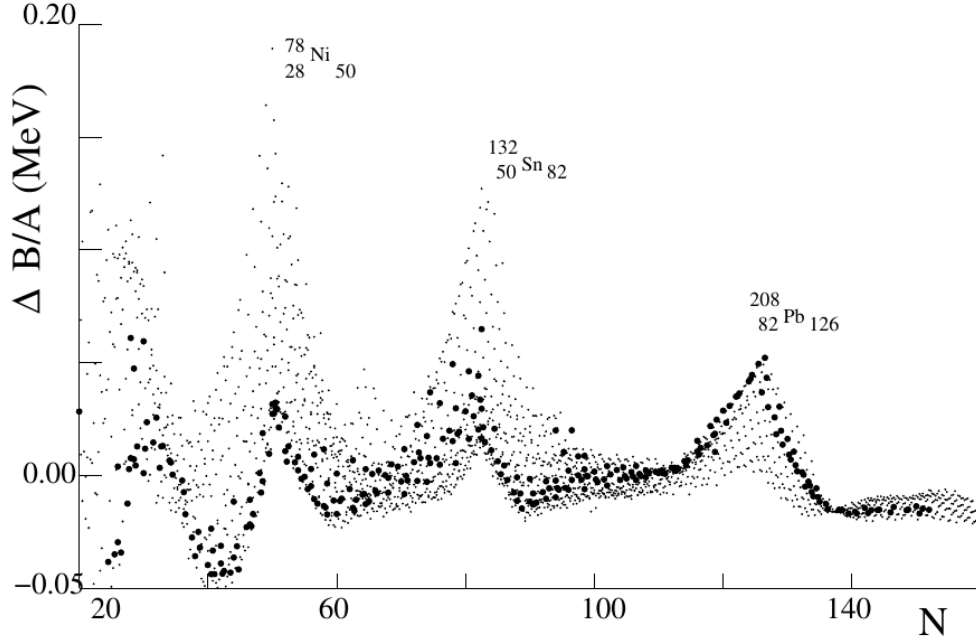


Figura 2.1: Diferencia en MeV entre el valor medido de  $B/A$  y el valor calculado mediante la fórmula empírica de masa como función del número de neutrones  $N$ . Los puntos negros más grandes son para los elementos estables. Se aprecian los número mágicos para  $N = 20, 28, 50, 82$  y  $126$ . Las mayores discrepancias, para núcleos doblemente mágicos, son las marcadas. Fuente: Fundamentals in Nuclear Physics - Basdevant, *et al* [68].

quedando el Hamiltoniano de campo medio definido como

$$H_{MF} = T + V_{MF} \quad (2.2)$$

donde  $T$  es la energía cinética total del sistema  $T = \sum_{i=1}^A \hat{T}(\mathbf{r}_i)$ .

Entonces, la ecuación de Schrödinger a resolver es

$$H_{MF}\Psi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_A) = E\Psi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_A) \quad (2.3)$$

donde  $\Psi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_A) = \varphi_{\alpha 1}(\mathbf{r}_1)\varphi_{\alpha 2}(\mathbf{r}_2)\dots\varphi_{\alpha A}(\mathbf{r}_A)$ , siendo  $\varphi_{\alpha j}(\mathbf{r}_j)$  la función de onda de una partícula. Si reemplazamos esta expresión en la ecuación de Schrödinger, tendremos  $A$  ecuaciones idénticas, una para cada nucleón

$$h(\mathbf{r})\varphi_{\alpha}(\mathbf{r}) = \varepsilon_{\alpha}\varphi_{\alpha}(\mathbf{r}) \quad (2.4)$$

$$\text{con } h(\mathbf{r}) = t(\mathbf{r}) + v(\mathbf{r}) = \frac{-\hbar^2}{2m_N}\nabla^2 + v(\mathbf{r}) \quad (2.5)$$

donde  $\varepsilon_{\alpha}$  satisfacen que  $E = \sum_{\alpha=1}^A \varepsilon_{\alpha}$ .

El problema entonces se resuelve cuando uno define el potencial de campo medio a utilizar. En este trabajo, asumimos que los núcleos tienen simetría esférica y el potencial es central. Es por ello que utilizamos una interacción fenomenológica desarrollada por Roger Woods y David Saxon en 1952 [70],

cuyo potencial hoy llamamos *de Woods-Saxon*, una opción más realista y capaz de describir la función de onda para  $r > R$  de manera precisa. Este potencial se ajusta en el sentido de la distribución de materia nuclear, teniendo la forma

$$v_{WS}(r) = \frac{-V_0}{1 + e^{(r-R)/a}} \quad (2.6)$$

donde  $R = r_0 A^{1/3}$  es el radio nuclear que define la interacción, siendo  $r_0$  el radio reducido, y  $a$  la difusividad.

Para el caso de protones, tendremos también la interacción de Coulomb estática, definida como [69]

$$v_C(r) = Ze^2 \begin{cases} \frac{3-(r/r_c)^2}{2r_c}, & r \leq r_c \\ 1/r, & r > r_c \end{cases} \quad (2.7)$$

la cual representa el potencial generado por una esfera cargada de radio  $r_c$ , siendo  $e$  la carga del electrón.

Por último, se incluye la interacción espín-órbita, acoplando el momento angular orbital y el momento angular intrínseco de espín [71]

$$v_{SO} = \tilde{v}_{SO}(r) \frac{\hat{L} \cdot \hat{S}}{\hbar^2} \quad (2.8)$$

$$\tilde{v}_{SO}(r) = V_{SO} \left( \frac{r_0}{\hbar} \right)^2 \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{dr} \frac{1}{1 + e^{(r-R)/a}} \right] \quad (2.9)$$

Esta expresión de la interacción espín-órbita es fenomenológica, donde el objetivo de la derivada respecto a  $r$  es que la interacción sea máxima en la zona de la superficie nuclear.

Es así, que el hamiltoniano de partícula simple quedará

$$h(r) = \frac{-\hbar^2}{2\mu} \left( \nabla_r^2 - \frac{\hat{L}^2/\hbar^2}{r^2} \right) + v_{WS}(r) + v_C(r) + \tilde{v}_{SO}(r) \frac{\hat{L} \cdot \hat{S}}{\hbar^2} \quad (2.10)$$

donde  $\mu$  es la masa reducida. Este hamiltoniano depende de los momentos angulares  $\hat{L}^2$  y  $\hat{L} \cdot \hat{S}$ , cuyos autovectores serán  $\varphi_\alpha \equiv \left| l \frac{1}{2} j m \right\rangle$ , mientras que los autovalores son

$$\hat{L}^2 \left| l \frac{1}{2} j m \right\rangle = l(l+1)\hbar^2 \left| l \frac{1}{2} j m \right\rangle, \quad (2.11)$$

$$\hat{S}^2 \left| l \frac{1}{2} j m \right\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2 \left| l \frac{1}{2} j m \right\rangle, \quad (2.12)$$

$$\hat{J}^2 \left| l \frac{1}{2} j m \right\rangle = j(j+1)\hbar^2 \left| l \frac{1}{2} j m \right\rangle, \quad (2.13)$$

$$\hat{J}_z \left| l \frac{1}{2} j m \right\rangle = m\hbar^2 \left| l \frac{1}{2} j m \right\rangle \quad (2.14)$$

Utilizando estas expresiones en conjunto con  $\hat{J}^2 = (\hat{L} + \hat{S})^2 = \hat{L}^2 + 2\hat{L} \cdot \hat{S} + \hat{S}^2$ , llegamos a

$$\hat{L} \cdot \hat{S} \left| l \frac{1}{2} j m \right\rangle = \frac{1}{2} \left[ j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right] \hbar^2 \left| l \frac{1}{2} j m \right\rangle \quad (2.15)$$

Recordemos que  $j = l + s$ , y como trabajamos con fermiones  $s = \pm 1/2$ , por lo cual  $j = l + 1/2$  y  $j = l - 1/2$ . Considerando estos dos casos particulares, la última expresión se simplifica como

$$\hat{L} \cdot \hat{S} \left| l \frac{1}{2} j m \right\rangle = \begin{cases} \frac{l\hbar^2}{2} \left| l \frac{1}{2} j m \right\rangle & \text{si } j = l + 1/2 \\ -\frac{(l+1)\hbar^2}{2} \left| l \frac{1}{2} j m \right\rangle & \text{si } j = l - 1/2 \end{cases} \quad (2.16)$$

Proponemos entonces que las autofunciones del hamiltoniano  $h$  sean de la forma  $|nljm\rangle$ , donde prescindimos del factor  $\frac{1}{2}$  por ser indistinto e incorporamos el autovalor  $n$  indicando el número de nodos de la función de onda. Es así que la ecuación de Schrödinger de partícula simple radial para la interacción de Woods-Saxon queda

$$\left\{ \frac{-\hbar^2}{2\mu} \left[ \nabla_r^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] + v_{WS}(r) + v_C(r) + \Theta(j)\hbar^2 \tilde{v}_{SO}(r) \right\} |nljm\rangle = \varepsilon_{nlj} |nljm\rangle \quad (2.17)$$

con  $\Theta(j) = l/2$  si  $j = l + 1/2$  y  $\Theta(j) = -(l+1)/2$  si  $j = l - 1/2$ , y donde  $|nljm\rangle$  se encuentran normalizadas a la delta  $\delta_{nn'}$ .

### 2.1.1. Estados de partícula simple

La construcción de los estados de partícula simple parte de resolver la ecuación de Schrödinger (2.17) utilizando los potenciales de las ecuaciones (2.6,2.7,2.9). En esta sección buscaremos caracterizar las diferentes soluciones de la ecuación de Schrödinger, de manera que podamos identificar aquellas soluciones físicas o con real implicancia en nuestro modelo.

El formalismo que utilizaremos para la descripción de los estados de partícula simple y construcción de las representaciones será el de Berggren [30]. Este establece que la completitud de la base utilizada estará dada cuando se incorporen a los polos de la matriz  $S$  [34, 72] (estados ligados y resonantes) los llamados estados de dispersión o continuo no resonante.

Una propiedad importante de este formalismo es que el producto escalar es definido como la integral de la función de onda  $u_a$  multiplicada por su inversa temporal  $u_{\bar{a}}$ , y no tomando su compleja conjugada como suele ser. Un operador definido con vectores que respeten este producto escalar no será hermítico, y por ende los elementos de matriz serán números complejos. Sin embargo, sabemos que los observables físicos son números reales, condición que se dará siempre y cuando todos los autovectores disponibles sean incorporados en la base, lo cual lleva a trabajar con representaciones cada vez más grandes.

De esta manera, nuestra base utilizada tendría en cuenta el acople con el continuo, sumamente importante cuando se trabaja con núcleos cercanos a la línea de goteo. En este formalismo, la relación de completitud es definida como

$$\delta(r - r') = \sum_a u_a(r)u_a(r') + \int_{L^+} dE u(r, \varepsilon)u(r', \varepsilon) \quad (2.18)$$

con  $a = \{n_a, l_a, j_a, m_a\}$  y  $\varphi_a = u_a(r)/r$ .

La sumatoria se realiza sobre los estados discretos, de manera tal

$$\sum_a u_a(r)u_a(r') = \sum_{a_L} u_{a_L}(r)u_{a_L}(r') + \sum_{a_R} u_{a_R}(r)u_{a_R}(r') \quad (2.19)$$

donde  $a_L$  identifica los **estados ligados** ( $\Re(\varepsilon_{a_L}) < 0$  y  $\Im(\varepsilon_{a_L}) = 0$ ) y  $a_R$  a los **estados resonantes** ( $\Re(\varepsilon_{a_R}) > 0$  y  $\Im(\varepsilon_{a_R}) < 0$ ), siendo la parte real de la energía  $\varepsilon_a$  establecida respecto al carozo [73]. Dicho de otra manera, los estados ligados son todos aquellos polos de la matriz de dispersión  $S$  cuya energía de excitación sea menor que la energía de separación de un neutrón (protón)  $S_n(S_p)$ , mientras que las resonancias son todas aquellas cuya parte real de su energía es superior a estas cotas. No todas estos estados resonantes serán considerados con significado físico, siendo un análisis de cada núcleo particular el que determinará este límite. Situados en el plano complejo de energía (ver Figura 2.2), los estados discretos se definen de manera única. Así, aquellos ligados serán puramente reales y negativos (rectángulo verde), mientras que los estados resonantes o de Gamow (círculo azul) tendrán parte real positiva y parte imaginaria negativa.

Respecto a la integral  $\int_{L^+}$ , esta se realiza sobre un contorno complejo que logre englobar a los estados resonantes. Esta integral es clave para obtener la completitud de la base de Berggren, donde los estados  $u(r, \varepsilon)$  pertenecen a lo que llamamos continuo no resonante. Si volvemos a la imagen del plano complejo de energía (ver Figura 2.2), supongamos que tenemos una resonancia ubicada en el cuarto cuadrante (círculo azul): estableciendo un contorno  $L^+$  alrededor de la resonancia, se definen los **estados de dispersión** sobre este contorno, los cuales pueden ser complejos o reales (círculos rojos). Este contorno en principio puede tener cualquier forma [74], pero mientras que estados ligados de dos cuerpos son descriptibles con contornos triangulares como el de la Figura 2.2, estados resonantes de dos cuerpos se ven beneficiados al definir contornos rectangulares [75]. Matemáticamente, las funciones de onda de los estados de dispersión poseen las condiciones de borde de una función de onda estacionaria. Entonces, para obtener el resultado físico de la norma asociada a estos estados, debemos redefinirla incorporando el método de renormalización introducido por Zel'dovich [76] o la rotación compleja exterior.

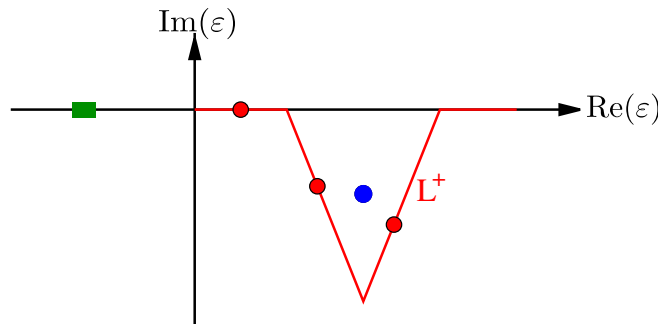


Figura 2.2: Representación esquemática de los estados ligados (rectángulo verde), resonancias (círculo azul) y estados de dispersión (círculos rojos). Además, se representa el contorno  $L^+$  respecto a la resonancia, y como los estados de dispersión se definen de manera discreta sobre el contorno  $L^+$ .

Para poder tratar numéricamente la integral de la ecuación (2.18), debemos discretizar el contorno

utilizando, por ejemplo, el método de integración de Gauss-Legendre [77]:

$$\int_{L^+} d\varepsilon u(r, \varepsilon) u(r', \varepsilon) = \sum_c^{N_c} h_c u_c(r) u_c(r') \quad (2.20)$$

donde  $h_c$  son los respectivos pesos y  $u_c(r)$  las funciones de onda asociadas con energía  $\varepsilon_c$ , siendo  $c = \{n_c, l_c, j_c\}$  el índice que define de manera única cada estado del contorno. Tanto el contorno  $L^+$  como el número de puntos  $N_c$  puede definirse de manera independiente para cada onda parcial. A nivel computacional, siempre es deseable que  $N_c$  sea el menor número posible mediante el cual se obtienen soluciones estables para los estados de dos cuerpos.

En resumen, la base ortonormal de la representación de Berggren utilizada en este trabajo incorpora estados ligados y resonantes  $\langle r | \varphi_a \rangle = \{u_a(r)/r\}$ , y estados de dispersión discretizados  $\langle r | \varphi_c \rangle = \{\sqrt{h_c} u_c(r)/r\}$ .

### 2.1.2. La interacción espín-isoespín y los estados de dos partículas

El formalismo desarrollado hasta este punto, nos describe el movimiento de un nucleón independiente en las cercanías de un carozo. En una primera aproximación, el espectro de energía de un núcleo con dos nucleones sobre el carozo se obtiene simplemente sumando las energías de partícula simple correspondientes a estos dos nucleones. A esto lo llamamos **aproximación de orden cero**.

Pensemos ahora que es posible que dos nucleones interactúen entre sí. Debemos tener en cuenta tres suposiciones que haremos:

1. Los núcleos pueden ser descritos como un sistema de  $A$  nucleones cuya interacción puede ser aproximada por un potencial.
2. Los efectos relativistas son despreciables.
3. Solo fuerzas entre dos cuerpos son importantes.

La fuerza entre nucleones, en primer lugar, tiene una complicación numérica: al presentar una repulsión muy fuerte a cortas distancias, no puede ser tratada de manera perturbativa ni tampoco de manera autoconsistente. Pero si partimos del hecho de que la interacción entre pares se da en presencia de muchos otros cuerpos, una podría tomar una interacción de dos cuerpos *efectiva*, la cual será bien comportada y permite la aplicación de los métodos conocidos por la teoría de muchos cuerpos. En lo que compete a este trabajo, tomaremos una interacción fenomenológica entre los nucleones.

De manera general, un potencial  $V$  de dos cuerpos va a estar completamente definido en función de sus elementos de matriz entre estados de dos cuerpos:

$$\langle \mathbf{r}'_1 s'_1 t'_1 \mathbf{r}'_2 s'_2 t'_2 | V | \mathbf{r}_1 s_1 t_1 \mathbf{r}_2 s_2 t_2 \rangle \quad (2.21)$$

donde  $s_i = \pm 1/2$  y  $t_i = \pm 1/2$  son las coordenadas de espín e isoespín. El espacio de los estados de dos cuerpos  $|\mathbf{r}_1 s_1 t_1 \mathbf{r}_2 s_2 t_2\rangle$  es expandido por un producto de los espacios de coordenadas  $|\mathbf{r}_1\rangle$  y  $|\mathbf{r}_2\rangle$  y los

vectores de espín e isoespín  $|s_1\rangle, |s_2\rangle$  y  $|t_1\rangle, |t_2\rangle$ . Como cualquier operador en el espacio de espín de una partícula se puede escribir como una combinación lineal de las matrices de Pauli  $\sigma_1, \sigma_2$  y  $\sigma_3$  junto con la matriz unitaria  $\sigma_0 = 1$ , la forma más general del operador  $V$  será:

$$V = \sum_{i,k=0}^3 V_{ik} \sigma_i^{(1)} \sigma_k^{(2)} \quad (2.22)$$

La función  $V_{ik}$  depende de los operadores de isoespín  $\tau^{(1)}$  y  $\tau^{(2)}$ , donde (1) y (2) indican a la partícula que pertenecen. En el caso particular de que  $V$  sea un potencial local,  $V_{ik}$  serán operadores en el espacio de coordenadas actuando como  $V |\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2\rangle = V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) |\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2\rangle$ .

Este potencial, debe ser hermítico e invariante traslacional, de intercambio, temporal, espacial y rotacional tanto en las coordenadas espaciales como en las coordenadas de isoespín. Veamos la particularidad de la invariancia frente al intercambio de partículas  $V(1, 2) = V(2, 1)$ : esta propiedad esta conectada con la simetría de la función de onda de dos cuerpos. Como los nucleones son fermiones, su función de onda debe ser asimétrica. Por ejemplo, si la función de onda se construye como producto de las partes espaciales, de espín y de isoespín

$$\langle \mathbf{r}_1 s_1 t_1 \mathbf{r}_2 s_2 t_2 | 12 \rangle = \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \chi(s_1, s_2) \zeta(t_1, t_2) \quad (2.23)$$

tendremos cuatro combinaciones posibles compatibles tanto con el principio de exclusión de Pauli como con la antisimetría de la función de onda, las cuales son caracterizadas en función de la paridad de coordenadas, de espín y de isoespín, presentadas en la Tabla 2.1 [78]. Notemos también que esta distinción de la interacción, nos permitirá distinguir el potencial entre las partes  $T = 1$  y  $T = 0$ .

Tabla 2.1: Simetrías de la función de onda de dos cuerpos (2.23) caracterizadas en función de la simetría de coordenadas y de espín.

$\Psi$	$\chi$	Nomenclatura	$T = t_1 + t_2$
par	singlete	se	1
par	triplete	te	0
impar	singlete	so	0
impar	triplete	to	1

Veamos el caso particular donde el potencial es central, es decir, solo depende de la distancia  $r$  entre nucleones:

$$V_c(r) = V_0(r) + V_\sigma(r) \sigma^{(1)} \sigma^{(2)} + V_\tau(r) \tau^{(1)} \tau^{(2)} + V_{\sigma\tau}(r) \sigma^{(1)} \sigma^{(2)} \tau^{(1)} \tau^{(2)} \quad (2.24)$$

el cual tiene una componente de coordenadas, una de espín, una de isoespín y finalmente una espín-isoespín. Buscando escribir este potencial en función de las nomenclatura de la Tabla 2.1, presentamos dos operadores:

$$P^\sigma = \frac{1}{2} \left( 1 + \sigma^{(1)} \sigma^{(2)} \right) \quad P^\tau = \frac{1}{2} \left( 1 + \tau^{(1)} \tau^{(2)} \right) \quad (2.25)$$

los cuales intercambian las coordenadas de espín e isoespín de los nucleones, respectivamente. Además, podemos definir un operador  $P^r$  que intercambie las coordenadas espaciales de los nucleones. De esta manera, se puede decir que el principio de exclusión de Pauli es respetado siempre que

$$P^r P^\sigma P^\tau = -1 \quad (2.26)$$

Así, podemos reescribir al operador  $P^\tau = -P^r P^\sigma$ , y en la ecuación (2.24) independizarnos de los productos  $\sigma^{(1)}\sigma^{(2)}$  y  $\tau^{(1)}\tau^{(2)}$ :

$$V_c(r) = V_W(r) + V_M(r)P^r + V_B P^\sigma + V_H P^r P^\sigma \quad (2.27)$$

donde

$$V_W = V_0 - V_\sigma - V_\tau + V_{\sigma\tau} \rightarrow \text{fuerza de Wigner} \quad (2.28)$$

$$V_M = -4V_{\sigma\tau} \rightarrow \text{fuerza de Majorana} \quad (2.29)$$

$$V_B = 2V_\sigma - 2V_{\sigma\tau} \rightarrow \text{fuerza de Barlett} \quad (2.30)$$

$$V_H = -2V_\tau + 2V_{\sigma\tau} \rightarrow \text{fuerza de Heisenberg} \quad (2.31)$$

Los nombres de estas diferentes componentes de la fuerza nuclear datan de la década de 1930, cuando se implementaron los primeros modelos y las propiedades de las fuerzas nucleares eran explicadas sin introducir la idea de que las partículas nucleares se volvían altamente repulsivas al acercarse más allá de una distancia crítica [79].

Finalmente, introduciremos los operadores de proyección

$$\Pi_s^\sigma = \frac{1}{2}(1 - P^\sigma), \quad \Pi_t^\sigma = \frac{1}{2}(1 + P^\sigma) \quad (2.32)$$

$$\Pi_s^\tau = \frac{1}{2}(1 - P^\tau), \quad \Pi_t^\tau = \frac{1}{2}(1 + P^\tau) \quad (2.33)$$

$$\Pi_o^r = \frac{1}{2}(1 - P^r), \quad \Pi_e^r = \frac{1}{2}(1 + P^r) \quad (2.34)$$

que proyectan en la parte singlete (s) y triplete (t), y en la parte par (e) e impar (o) de la función de onda de dos cuerpos (2.23) en el sentido de la Tabla 2.1. Utilizando estos operadores, la interacción central entre dos nucleones (2.27) se puede escribir [78]

$$V_c(r) = V_{se}(r)\Pi_e^r\Pi_s^\sigma + V_{so}(r)\Pi_o^r\Pi_s^\sigma + V_{te}(r)\Pi_e^r\Pi_t^\sigma + V_{to}(r)\Pi_o^r\Pi_t^\sigma \quad (2.35)$$

$$V_c(r) = V_{se}(r)P_{se} + V_{so}(r)P_{so} + V_{te}(r)P_{te} + V_{to}(r)P_{to} \quad (2.36)$$

donde las relaciones entre los nuevos  $V_\xi$  ( $\xi \in \{se, so, te, to\}$ ) y los de las ecuaciones (2.28-2.31) se encuentran en la Tabla 2.2, y los operadores  $P_{se} = \Pi_e^r\Pi_s^\sigma$ ,  $P_{so} = \Pi_o^r\Pi_s^\sigma$ ,  $P_{te} = \Pi_e^r\Pi_t^\sigma$  y  $P_{to} = \Pi_o^r\Pi_t^\sigma$ . Como veremos más adelante, esta escritura de la interacción es útil para aplicaciones prácticas, como por ejemplo, la descripción de la interacción entre dos nucleones idénticos se realiza solo con los canales/términos singlete par y triplete impar que corresponden al isoespín  $T = 1$ .

A continuación incorporaremos otro operador que nos será útil a la hora de trabajar con los elementos de matriz de la interacción del sistema:

$$P_S = \frac{1}{4}(1 - \sigma^{(1)}\sigma^{(2)}) \quad (2.37)$$

Tabla 2.2: Relaciones entre las intensidades  $V_\xi$  con  $\xi \in \{se, so, te, to\}$  y aquellas presentadas en las ecuaciones (2.28-2.31).

$V_\xi$	Definición
$V_{se}$	$V_W + V_M - V_B - V_H$
$V_{so}$	$V_W - V_M - V_B + V_H$
$V_{te}$	$V_W + V_M + V_B + V_H$
$V_{to}$	$V_W - V_M + V_B - V_H$

Como  $\langle S|\sigma^{(1)}\sigma^{(2)}|S\rangle = 4s - 3$ , los posibles valores del operador son

$$P_S = \begin{cases} 1 & si \quad s = 0 \\ 0 & si \quad s = 1 \end{cases} \quad (2.38)$$

La relación entre este  $P_S$  y los operadores  $P_\xi$  ( $\xi \in \{se, so, te, to\}$ ) se encuentra en la Tabla 2.3, donde aparece el operador  $P_{12}$  que actúa de manera tal  $P_{12}|\mathbf{r}_1s_1t_1\mathbf{r}_2s_2t_2\rangle = |\mathbf{r}_2s_2t_2\mathbf{r}_1s_1t_1\rangle$ . Además, tenemos definido el momento angular total  $J$  como  $|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2$ , siendo  $j_1 + j_2 + J$  necesariamente un entero.

Tabla 2.3: Relaciones entre los operadores de espín-isoespín  $P_\xi$  y el operador proyector  $P_S$ .

$P_\xi$	Definición
$P_{se}$	$\frac{1}{2} [1 - (-)^{j_1+j_2+J} P_{12}] P_S$
$P_{so}$	$\frac{1}{2} \{ [1 - (-)^{j_1+j_2+J} P_{12}] - [1 - (-)^{j_1+j_2+J} P_{12}] P_S \}$
$P_{te}$	$\frac{1}{2} \{ [1 + (-)^{j_1+j_2+J} P_{12}] - [1 + (-)^{j_1+j_2+J} P_{12}] P_S \}$
$P_{to}$	$\frac{1}{2} [1 + (-)^{j_1+j_2+J} P_{12}] P_S$

En este trabajo, la fuerza central será la única interacción entre dos nucleones. Esta estará compuesta por la interacción de Coulomb:

$$V_{Coul}(r) = \frac{e^2}{r} \quad (2.39)$$

y por una interacción fenomenológica llamada *gaussiana* que efectivamente tiene la forma de una campana de Gauss:

$$V_\xi(r) = V_\xi^0 e^{-\frac{r^2}{\beta_\xi^2}} \quad (2.40)$$

donde  $\xi = \{se, so, te, to\}$  y  $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ .

En las próximas secciones, analizaremos la función de onda de dos cuerpos y los elementos de matriz para cada interacción.

### 2.1.2.1. Funciones de onda de dos cuerpos

En primer lugar, para trabajar la función de onda de dos cuerpos debemos reescribir la función de onda de un cuerpo tanto desacoplada

$$\varphi_a(\mathbf{r}, s) = \frac{u_a(r)}{r} \chi_{s, m_s} Y_{l_a}^{m_{l_a}}(\hat{r}) \quad (2.41)$$

como acoplada al momento angular total  $j$

$$\varphi_a(\mathbf{r}, s) = \frac{u_a(r)}{r} \sum_{m_s, m_{l_a}} \langle sm_s l_a m_{l_a} | j a m_a \rangle \chi_{s, m_s} Y_{l_a}^{m_{l_a}}(\hat{r}) \quad (2.42)$$

$$\varphi_a(\mathbf{r}, s) = \frac{u_a(r)}{r} [\chi_s Y_{l_a}(\hat{r})]_{j a m_a} \quad (2.43)$$

donde  $a = \{n_a, l_a, j_a\}$ ,  $\hat{r}$  representa a los ángulos  $\theta, \phi$  de  $\mathbf{r}$  en coordenadas esféricas,  $\langle sm_s l_a m_{l_a} | j a m_a \rangle$  es un coeficiente de Clebsch–Gordan [69], y  $[ ]_{j a m_a}$  es una manera simplificada de notar el acople.

La función de onda de dos cuerpos va a poder ser escrita en el acople  $SL$  o en el acople  $jj$ . Ambos serán necesarios durante diferentes momentos del trabajo, por lo que a continuación presentamos las funciones de onda ya antisimetrizadas y normalizadas. Para el acople  $SL$ , la función será

$$\Psi_{ab, S_i, L_i}^{J_i M_i}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \delta_{ab})}} (\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 | l_a l_b S_i L_i, J_i M_i \rangle - \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 | l_a l_b S_i L_i, J_i M_i \rangle) \quad (2.44)$$

donde por simplicidad  $\mathbf{x} = (\mathbf{r}, s)$ ,  $i$  se incorpora para notar explícitamente a los pares de nucleones: neutrón-neutrón ( $nn$ ), protón-protón ( $pp$ ) y protón-neutrón ( $pn$ ), y hemos definido:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 | l_a l_b S_i L_i, J_i M_i \rangle &= \frac{u_a(r_1) u_b(r_2)}{r_1 r_2} \\ &\cdot \left[ [\chi_1 \chi_2]_{S_i} \left[ Y_{l_a}(\hat{r}_1) Y_{l_b}(\hat{r}_2) \right]_{L_i} \right]_{J_i M_i} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Para el caso del acople  $jj$  [80], la función de onda normalizada y antisimetrizada es

$$\Psi_{ab}^{J_i M_i}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = N_{ab}(J_i) \left( \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 | j_a j_b, J_i M_i \rangle - (-1)^{j_a + j_b - J} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 | j_b j_a, J_i M_i \rangle \right) \quad (2.46)$$

donde nuevamente hemos definido

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 | j_a j_b, J_i M_i \rangle &= \frac{u_a(r_1) u_b(r_2)}{r_1 r_2} \\ &\cdot \left[ [\chi_1 Y_{l_a}(\hat{r}_1)]_{j_a} \left[ \chi_2 Y_{l_b}(\hat{r}_2) \right]_{j_b} \right]_{J_i M_i} \end{aligned} \quad (2.47)$$

y

$$N_{ab}(J_i) = \frac{\sqrt{1 + \delta_{ab} (-1)^{J_i}}}{1 + \delta_{ab}} \quad (2.48)$$

Si definimos al operador de permutaciones  $P$  de manera que  $(-1)^P = 1$  si no hay permutaciones y  $(-1)^P = (-1)^{j_a + j_b - J_i + 1}$  si hay permutaciones, podemos reescribir las funciones de onda como

$$\Psi_{ab}^{J_i M_i}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = N_{ab} \sum_P (-1)^P P[\varphi_a(\mathbf{r}_1) \varphi_b(\mathbf{r}_2)]_{J_i M_i} \quad (2.49)$$

Notemos que para el caso protón-neutrón,  $N_{ab}(J_i) = 1$  y no hay permutaciones posibles. En notación de Dirac, tendremos entonces que para partículas idénticas le corresponde la función de onda

$$\left| \Psi_{ab(cd)}^{J\pi p(n)} \right\rangle = N_{ab(cd)} \sum_P (-1)^P P [|\varphi_{a(c)}\rangle |\varphi_{b(d)}\rangle]_{JM} \quad (2.50)$$

mientras que para protón neutrón tenemos

$$\left| \Psi_{ac}^{J\pi pn} \right\rangle = [|\varphi_a\rangle |\varphi_c\rangle]_{JM} \quad (2.51)$$

Estas funciones de onda de dos cuerpos definidas hasta ahora representan el caso particular donde el par de nucleones tiene a disposición únicamente a los estados de partícula simple  $a$  y  $b$ , los cuales pueden ser ligados, resonantes o de dispersión. Si ampliamos esta definición para incluir todas las correlaciones posibles, para el caso de partículas idénticas, definimos la **función de onda de dos cuerpos correlacionada** como

$$\left| \Psi^{J\pi p} \right\rangle = \sum_{b \leq a} X_{ab}^{J\pi p} \left| \Psi_{ab}^{J\pi p} \right\rangle \quad (2.52)$$

$$\left| \Psi^{J\pi n} \right\rangle = \sum_{d \leq c} X_{cd}^{J\pi n} \left| \Psi_{cd}^{J\pi n} \right\rangle \quad (2.53)$$

siendo  $X_{ab(cd)}^{J\pi p(n)}$  las amplitudes de las funciones de onda de dos cuerpos, y normalizadas en el sentido del producto escalar de Berggren como

$$\sum_{b \leq a} \left( X_{ab}^{J\pi p} \right)^2 = 1 \quad (2.54)$$

$$\sum_{c \leq d} \left( X_{cd}^{J\pi n} \right)^2 = 1 \quad (2.55)$$

mientras que para el caso protón-neutrón tendremos

$$\left| \Psi^{J\pi pn} \right\rangle = \sum_{ac} X_{ac}^{J\pi pn} \left| \Psi_{ac}^{J\pi pn} \right\rangle \quad (2.56)$$

la cual está normalizada como

$$\sum_{ac} \left( X_{ac}^{J\pi pn} \right)^2 = 1 \quad (2.57)$$

La gran ventaja de estas funciones de onda respecto a aquellas presentes en otros modelos, es que permiten la correlación entre estados ligados o resonantes con estados del continuo no resonante, importante a la hora de asegurarnos la completitud de la base y la capacidad de descripción de núcleos en el borde de la estabilidad.

Es así que las ecuaciones de Schrödinger para dos nucleones quedan

$$H_p \left| \Psi^{J_p^\pi} \right\rangle = E_{J_p^\pi} \left| \Psi^{J_p^\pi} \right\rangle \quad (2.58)$$

$$H_n \left| \Psi^{J_n^\pi} \right\rangle = E_{J_n^\pi} \left| \Psi^{J_n^\pi} \right\rangle \quad (2.59)$$

$$H_{pn} \left| \Psi^{J_{pn}^\pi} \right\rangle = E_{J_{pn}^\pi} \left| \Psi^{J_{pn}^\pi} \right\rangle \quad (2.60)$$

siendo  $H_p = h_p(\mathbf{r}_1) + h_p(\mathbf{r}_2) + V_p(r)$ ,  $H_n = h_n(\mathbf{r}_3) + h_n(\mathbf{r}_4) + V_n(r)$  y  $H_{pn} = h_p(\mathbf{r}_1) + h_n(\mathbf{r}_3) + V_{pn}(r)$  (1 y 2 indican protones, y 3 y 4 indican neutrones), con  $V_{p(n)}(r)$  la interacción central (2.36) con forma gaussiana más la interacción de Coulomb (2.39) para el caso de protones. Notemos que estas autofunciones también dependen de la proyección  $M$ , que fue quitada únicamente para simplificar notación.

### 2.1.2.2. Elementos de matriz de dos cuerpos

Ahora vamos a calcular los elementos de matriz para una dada interacción central entre nucleones. En primer lugar, vamos a trabajar con la interacción gaussiana definida en las ecuaciones (2.36) y (2.40), tomando como base las funciones de onda en el acople  $jj$  hasta ahora definidas en la ecuación (2.46).

El elemento de matriz entonces será:

$$\begin{aligned} \left\langle \Psi_{ab}^{J_i M_i} \left| V_c(r) \right| \Psi_{cd}^{J_i M_i} \right\rangle &= \left\langle \Psi_{ab}^{J_i M_i} \left| P_{se} V_{se}(r) \right| \Psi_{cd}^{J_i M_i} \right\rangle + \left\langle \Psi_{ab}^{J_i M_i} \left| P_{so} V_{so}(r) \right| \Psi_{cd}^{J_i M_i} \right\rangle \\ &+ \left\langle \Psi_{ab}^{J_i M_i} \left| P_{te} V_{te}(r) \right| \Psi_{cd}^{J_i M_i} \right\rangle + \left\langle \Psi_{ab}^{J_i M_i} \left| P_{to} V_{to}(r) \right| \Psi_{cd}^{J_i M_i} \right\rangle \end{aligned} \quad (2.61)$$

donde en lugar de notar los nucleones 1, 2, 3, 4 notamos sus estados cuánticos  $a, b, c, d$ .

Trabajando con esta expresión (ver Apéndice A), uno llega a que los elementos de matriz de la interacción gaussiana serán: para  $nn$  y  $pp$

$$\begin{aligned} \left\langle \Psi_{ab}^{J_i M_i} \left| V_c(r) \right| \Psi_{cd}^{J_i M_i} \right\rangle &= 2N_{ab}N_{cd} \\ &\cdot \left\{ \sum_k \left[ F_k^{se}(abcd) - F_k^{to}(abcd) \right] f_k^S(abcd) \right. \\ &- (-)^{jc+jd-J} \sum_k \left[ F_k^{se}(abdc) - F_k^{to}(abdc) \right] f_k^S(abdc) \\ &+ \sum_k F_k^{to}(abcd) f_k(abcd) \\ &\left. - (-)^{jc+jd-J} \sum_k F_k^{to}(abdc) f_k(abdc) \right\} \end{aligned} \quad (2.62)$$

mientras que para  $pn$

$$\begin{aligned}
& \left\langle \Psi_{ab}^{JpnMpn} \left| V_c(r) \right| \Psi_{cd}^{JpnMpn} \right\rangle = \frac{1}{2} \\
& \cdot \left\{ \sum_k [F_k^{\text{se}}(abcd) - F_k^{\text{to}}(abcd) + F_k^{\text{so}}(abcd) - F_k^{\text{te}}(abcd)] f_k^S(abcd) \right. \\
& - (-)^{jc+jd-Jpn} \sum_k [F_k^{\text{se}}(abdc) - F_k^{\text{to}}(abdc) - F_k^{\text{so}}(abdc) + F_k^{\text{te}}(abdc)] f_k^S(abdc) \\
& + \sum_k [F_k^{\text{to}}(abcd) + F_k^{\text{te}}(abcd)] f_k(abcd) \\
& \left. - (-)^{jc+jd-Jpn} \sum_k [F_k^{\text{to}}(abdc) - F_k^{\text{te}}(abdc)] f_k(abdc) \right\} \quad (2.63)
\end{aligned}$$

siendo los coeficientes definidos como

$$F_k^\xi(abcd) = V_\xi \int \int u_a(r_1) u_b(r_2) e^{-\frac{(r_1^2+r_2^2)}{\beta_\xi^2}} i^k j_k \left(-i \frac{2r_1 r_2}{\beta_\xi^2}\right) u_c(r_1) u_d(r_2) dr_1 dr_2 \quad (2.64)$$

$$\begin{aligned}
f_k(abcd) = & (-)^{jd+Ji+Jb} W(j_a j_c j_b j_d, k J_i) \\
& \left[ \frac{1 + (-)^{l_a+k+l_c}}{2} \right] \hat{j}_a \hat{j}_c \langle j_c 1/2 j_a - 1/2 | k 0 \rangle \\
& \left[ \frac{1 + (-)^{l_b+k+l_d}}{2} \right] \hat{j}_b \hat{j}_d \langle j_d 1/2 j_b - 1/2 | k 0 \rangle \quad (2.65)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_k^S(abcd) = & \frac{1}{2} (-)^{jd+Ji+Jb-1} \hat{j}_a \hat{j}_b \hat{j}_c \hat{j}_d \hat{l}_a \hat{l}_b \hat{l}_c \hat{l}_d \\
& W(l_a j_a l_b j_b, 1/2 J_i) W(l_c j_c l_d j_d, 1/2 J_i) \\
& \left[ \frac{1 + (-)^{l_a+k+l_c}}{2} \right] \left[ \frac{1 + (-)^{l_b+k+l_d}}{2} \right] \\
& \langle l_a 0 l_c 0 | k 0 \rangle \langle l_b 0 l_d 0 | k 0 \rangle W(l_a l_c l_b l_d, k J_i) \quad (2.66)
\end{aligned}$$

fueron desarrollados en el apéndice A, y  $k = k_{\min} \dots k_{\max}$ , con

$$k_{\min} = \text{máx}\{0, |l_a - l_c|, |l_d - l_b|\} \quad (2.67)$$

$$k_{\max} = \text{mín}\{(l_a + l_c), (l_d + l_b)\} \quad (2.68)$$

en los términos que contengan  $f_k^S$  y

$$k_{\min} = \text{máx}\{0, |j_a - j_b|, |j_d - j_c|, |j_a - j_c|, |j_d - j_b|, |l_a - l_c|, |l_d - l_b|\} \quad (2.69)$$

$$k_{\max} = \text{mín}\{(j_a + j_b), (j_d + j_c), (j_a + j_c), (j_d + j_b), (l_a + l_c), (l_d + l_b)\} \quad (2.70)$$

para aquellos términos con  $f_k$ . Notemos que el canal de isoespín  $T = 0$  de la interacción gaussiana, solamente será efectivo para el caso protón-neutrón.

Asimismo, para la interacción de Coulomb, los elementos de matriz se escribirán de la siguiente manera:

$$\left\langle \Psi_{ab}^{J_p M_p} \left| V_{\text{Coul}}(r) \right| \Psi_{cd}^{J_p M_p} \right\rangle = 2N_{ab}N_{cd} \cdot \left\{ \sum_k F_k^{\text{Coul}}(abcd) f_k(abcd) - (-)^{j_c+j_d-J_p} \sum_k F_k^{\text{Coul}}(abdc) f_k(abdc) \right\} \quad (2.71)$$

donde  $f_k(abcd)$  mantiene la expresión (2.65) y en el apéndice A se desarrolló

$$F_k^{\text{Coul}} = \frac{e^2}{2k+1} \int \int u_a(r_1) u_b(r_2) \frac{r_{\leq}^k}{r_{>}^{k+1}} u_c(r_1) u_d(r_2) dr_1 dr_2 \quad (2.72)$$

con  $k$  dentro de los límites definidos en las expresiones (2.69) y (2.70).

### 2.1.2.3. Estados resonantes de dos cuerpos y los contornos de partícula simple

Durante este trabajo, los estados de dos cuerpos identificados por sus números cuánticos  $J_\tau$  con  $\tau = n, p, pn$  y funciones de onda definidas en la sección 2.1.2.1 podrán ser ligados ( $\Re(E_{J_\tau}) < 0$ ), resonantes o de dispersión ( $\Re(E_{J_\tau}) > 0$  y  $\Im(E_{J_\tau}) \leq 0$ ). En esta sección prestaremos especial atención a la descripción de los estados del continuo, ya sean resonantes o no. Los **estados del continuo de dos cuerpos** se encuentran compuestos por estados de partícula simple ligados y/o del continuo. Lo que nos interesa particularmente es poder aislar aquellos estados de dos cuerpos compuestos mayoritariamente por polos de la matriz  $S$  de partícula simple (llamados **resonancias de dos cuerpos**), de aquellos compuestos únicamente por estados de dispersión de partícula simple (llamados **estados del continuo no resonante de dos cuerpos**). Estudios previos [81–83] demuestran que para que esto sea posible, los contornos de las resonancias de partícula simple deben ser rectangulares (ver Figura 2.3 (a)) y estar discretizados de tal manera que se observe una estabilidad en el valor de la parte imaginaria de la energía del estado de dos cuerpos en función de la cantidad de estados del contorno  $N_c$ .

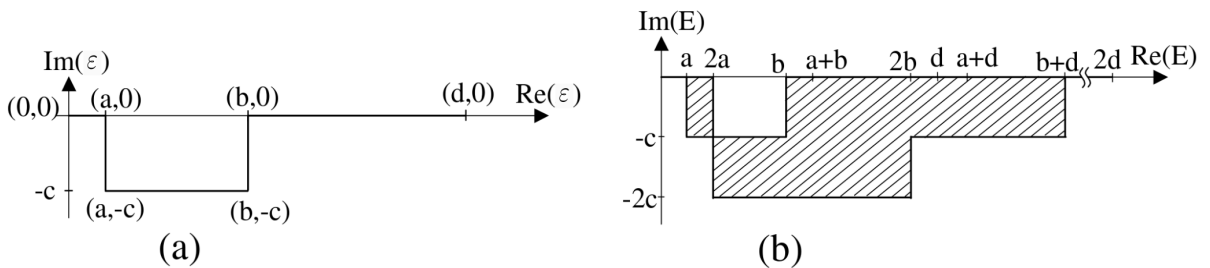


Figura 2.3: (a) Representación esquemática del contorno  $L^+$  rectangular respecto a un estado de resonante de partícula simple. Los estados de dispersión se definen de manera discreta sobre el contorno.

(b) Contorno resultante en el plano de energía de dos cuerpos obtenido a partir de la Figura (a). La región tachada se encuentran superpoblada por estados del continuo de dos cuerpos, mientras que el área blanca se encuentra liberada de estados de dispersión de dos cuerpos. *Imágenes tomadas de Ref. [81]*

Teniendo en cuenta esta consideración, observemos en la Figura 2.3 el correspondiente mapa de los estados de dos cuerpos consecuencia del contorno discreto de partícula simple. En el área rayada, se ubicarán principalmente estados del continuo no resonante de dos cuerpos, por lo cual resultará especialmente difícil aislar las resonancias de dos cuerpos en esta zona. En cambio, el área blanca resultante encerrada en el rectángulo delimitado por los puntos  $(2a, 0)$ ,  $(2a, c)$ ,  $(b, c)$ ,  $(b, 0)$ , se encuentra libre de estados del continuo no resonante de dos cuerpos. Es en esta zona donde limitaremos nuestra búsqueda de los estados de dos cuerpos resonantes, siendo de interés físico aquellos en los que su función de onda se encuentre constituida por lo menos de algún polo de la matriz  $S$  de partícula simple [83].

### 2.1.3. Los estados de cuatro partículas

Presentadas hasta ahora las funciones de onda de uno y dos cuerpos, estas serán nuestros cimientos para la construcción de los estados de cuatro cuerpos, de la misma manera que hemos pensado nuestro problema hasta este punto: un carozo inerte, y uno, dos y ahora cuatro nucleones sobre él que interactúan entre si y con el carozo mismo.

Primero introduciremos la función de onda de cuatro cuerpos, donde presentaremos nuevas notaciones a tener en cuenta. Luego, se establecerán los elementos de matriz necesarios para la construcción del sistema. Y finalmente, introduciremos la ecuación de autovalores a resolver.

#### 2.1.3.1. Funciones de onda de cuatro cuerpos

La función de onda de cuatro cuerpos será calculada utilizando el modelo de nucleones débilmente acoplados o *weak-coupling* [67, 84, 85]. La idea principal de este modelo es diagonalizar el Hamiltoniano de cuatro cuerpos  $\mathcal{H}$  por secciones, es decir, diagonalizar primero los hamiltonianos de dos cuerpos y luego utilizar estos estados como base, ya sea de manera completa o truncando el espacio de Hilbert, de manera que diagonalizar  $\mathcal{H}$  se reduzca a únicamente el canal  $pn$ .

Escribamos en primer lugar el Hamiltoniano del sistema de cuatro cuerpos como:

$$\mathcal{H} = H_p + H_n + V_{pn} \quad (2.73)$$

siendo  $H_p$  y  $H_n$  los Hamiltonianos de dos protones y dos neutrones definidos en la sección 2.1.2.1, respectivamente; y  $V_{pn} = V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) + V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4) + V(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) + V(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4)$  notando la interacción protón-neutrón de forma gaussiana (2.36), un avance respecto a estudios previos [23, 65]. De la sección 2.1.2, para dos protones y dos neutrones tenemos las ecuaciones de Schrödinger definidas en las expresiones (2.58) y (2.59), respectivamente.

Para construir el **estado de cuatro cuerpos**  $|\Psi^{JM}\rangle$  debemos definir la base de cuatro cuerpos  $\mathcal{L}_{4B}$  de dimensión  $N_{4B}$  en la cual este será representado. Entonces, definimos a los estados que conforman la

base  $\mathcal{L}_{4B}$  como:

$$\left| \Psi_{J_p^\pi J_n^\pi}^{JM} \right\rangle = \left| \left[ \Psi_{J_p^\pi}^{J_p^\pi} \Psi_{J_n^\pi}^{J_n^\pi} \right]_{JM} \right\rangle \quad (2.74)$$

$$= \left| J_p^\pi J_n^\pi, JM \right\rangle \quad (2.75)$$

haciéndose efectivo el acople  $JM$ , donde  $J_p^\pi$  y  $J_n^\pi$  son aquellas soluciones de las ecuaciones de Schrödinger (2.58) y (2.59) que se incorporan en la base de dos cuerpos de dimensiones  $N_p$  y  $N_n$ :

$$\mathcal{L}_p = \left\{ J_p^\pi(1), J_p^\pi(2), \dots, J_p^\pi(N_p) \right\} \quad (2.76)$$

$$\mathcal{L}_n = \left\{ J_n^\pi(1), J_n^\pi(2), \dots, J_n^\pi(N_n) \right\} \quad (2.77)$$

y respetan junto con  $J$  la desigualdad triangular  $\left| J_p^\pi - J_n^\pi \right| \leq J \leq J_p^\pi + J_n^\pi$ . Recordemos que mantenemos la notación [ ] de secciones anteriores.

La ecuación de Schrödinger para el problema de cuatro cuerpos entonces será

$$\mathcal{H} \left| \Psi^{JM} \right\rangle = E^J \left| \Psi^{JM} \right\rangle \quad (2.78)$$

cuyos autovectores se escriben en término de las funciones de onda (2.74) como

$$\left| \Psi^{JM} \right\rangle = \sum_{J_p^\pi J_n^\pi} Z_{J_p^\pi J_n^\pi}^J \left| J_p^\pi J_n^\pi, JM \right\rangle \quad (2.79)$$

normalizados en el sentido

$$\sum_{J_p^\pi J_n^\pi} \left( Z_{J_p^\pi J_n^\pi}^J \right)^2 = 1 \quad (2.80)$$

donde las amplitudes son solución de la ecuación de autovalores

$$\sum_{J_p' J_n'} \left[ \left( E_{J_p'} + E_{J_n'} \right) \delta_{J_p' J_p} \delta_{J_n' J_n} + \left\langle J_p J_n, JM \left| V_{pn} \right| J_p' J_n', JM \right\rangle \right] Z_{J_p' J_n'}^J = E^J Z_{J_p J_n}^J \quad (2.81)$$

Notar que quitamos la paridad  $\pi$  para simplificar notación. De la última ecuación, solo los elementos de matriz

$$\bar{V}_{pn}^{JM} = \left\langle J_p J_n, JM \left| V_{pn} \right| J_p' J_n', JM \right\rangle \quad (2.82)$$

no representan una información contenida en la base de dos cuerpos. Por lo tanto, hemos reducido un problema de cuatro cuerpos a construir la matriz  $\bar{V}_{pn}^{JM}$ .

Una aproximación usualmente utilizada para simplificar la ecuación (2.81) es suponer que  $V_{pn} = 0$ , por lo cual estaremos trabajando con funciones de onda a **orden cero**. En este caso, las energías del estado de cuatro cuerpos simplemente son

$$E_{(0)}^J = \sum_{J_p J_n} \left( E_{J_p} + E_{J_n} \right) \quad (2.83)$$

con  $E_{J_p}$  y  $E_{J_n}$  definidos en las ecuaciones (2.58) y (2.59), y la función de onda será

$$\left| \Psi_{(0)}^{JM} \right\rangle = \sum_{J_n, J_p} |J_p J_n, JM\rangle \quad (2.84)$$

$$= \sum_{J_n, J_p} \sum_{b \leq a, d \leq c} X_{ab}^{J_p} X_{cd}^{J_n} \left| \left[ \Psi_{ab}^{J_p} \Psi_{cd}^{J_n} \right]_{JM} \right\rangle \quad (2.85)$$

Otra simplificación de los cálculo se obtiene si se aplica la restricción de *main-configuration* o configuración principal (MC). Esta aproximación es efectiva cuando se trabaja con núcleos pesados [86–92], e implica que a nivel de dos cuerpos, de todos los acoples posibles  $[|n_a l_a j_a\rangle - |n_b l_b j_b\rangle]$  asociados a un estado de dos cuerpos  $|\Psi^{J\tau}\rangle$ , solo consideraremos aquellos donde  $l_a = l_b$  y  $j_a = j_b$ , esto es, los dos nucleones posean los mismos momentos angulares orbitales y totales. A diferencia de los trabajos citados, nosotros permitiremos acoples cuando el número cuántico principal de los estados sea diferente, gracias a lo cual seremos aun capaces de tener acoples entre estados ligados o resonancias con estados del continuo no resonante.

### 2.1.3.2. Elementos de matriz protón-neutrón

A continuación, resolveremos explícitamente los elementos de matriz  $\bar{V}_{pn}^{JM}$  dados en la ecuación (2.82). Utilizando las ecuaciones (2.52), (2.53) y (2.74), podemos escribir los elementos de matriz en función de los estados de dos cuerpos definidos en la sección 2.1.2.2:

$$\begin{aligned} \left\langle J_p J_n, JM \left| V_{pn} \right| J'_p J'_n, JM \right\rangle &= \sum_{b \leq a} \sum_{b' \leq a'} \sum_{d \leq c} \sum_{d' \leq c'} X_{ab}^{J_p} X_{a'b'}^{J'_p} X_{cd}^{J_n} X_{c'd'}^{J'_n} \\ &\left\langle \left[ \Psi_{ab}^{J_p} \Psi_{cd}^{J_n} \right]_{JM} \left| V_{pn} \right| \left[ \Psi_{a'b'}^{J'_p} \Psi_{c'd'}^{J'_n} \right]_{JM} \right\rangle \end{aligned} \quad (2.86)$$

Teniendo en cuenta que trabajamos con partículas idénticas, podemos reescribir:

$$\left\langle \left[ \Psi_{ab}^{J_p} \Psi_{cd}^{J_n} \right]_{JM} \left| V_{pn} \right| \left[ \Psi_{a'b'}^{J'_p} \Psi_{c'd'}^{J'_n} \right]_{JM} \right\rangle = 4 \left\langle \left[ \Psi_{ab}^{J_p} \Psi_{cd}^{J_n} \right]_{JM} \left| V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) \right| \left[ \Psi_{a'b'}^{J'_p} \Psi_{c'd'}^{J'_n} \right]_{JM} \right\rangle \quad (2.87)$$

Si incorporamos la expresión 2.49, podremos reescribir la ecuación (2.87) como:

$$\begin{aligned} \left\langle \left[ \Psi_{ab}^{J_p} \Psi_{cd}^{J_n} \right]_{JM} \left| V_{pn} \right| \left[ \Psi_{a'b'}^{J'_p} \Psi_{c'd'}^{J'_n} \right]_{JM} \right\rangle &= 4 N_{ab} N_{cd} N_{a'b'} N_{c'd'} \sum_P (-)^P \\ &P \left\langle [\varphi_a \varphi_b]_{J_p} [\varphi_c \varphi_d]_{J_n}; JM \left| V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) \right| [\varphi_{a'} \varphi_{b'}]_{J'_p} [\varphi_{c'} \varphi_{d'}]_{J'_n}; JM \right\rangle \end{aligned} \quad (2.88)$$

Para simplificar, pasaremos a notación Dirac  $[\varphi_a(\mathbf{r}_1) \varphi_b(\mathbf{r}_2)]_{J_i M_i} = \langle \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 | j_a j_b, J_i M_i \rangle$  de forma que

$$\begin{aligned} \left\langle \left[ \Psi_{ab}^{J_p} \Psi_{cd}^{J_n} \right]_{JM} \left| V_{pn} \right| \left[ \Psi_{a'b'}^{J'_p} \Psi_{c'd'}^{J'_n} \right]_{JM} \right\rangle &= 4 N_{ab} N_{cd} N_{a'b'} N_{c'd'} \sum_P (-)^P \\ &P \left\langle (j_a j_b, J_p) (j_c j_d, J_n); JM \left| V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) \right| (j_{a'} j_{b'}, J'_p) (j_{c'} j_{d'}, J'_n); JM \right\rangle \end{aligned} \quad (2.89)$$

En resumen, pasamos de tener que calcular los elementos de matriz  $\bar{V}_{pn}^{JM}$ , a tener que calcular los siguientes:

$$\bar{V}_{13}^{JM} = \left\langle (j_a j_b, J_p)(j_c j_d, J_n); JM \left| V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) \right| (j_{a'} j_{b'}, J'_p)(j_{c'} j_{d'}, J'_n); JM \right\rangle \quad (2.90)$$

Realizando un re-acople de las funciones de onda para pasar de  $nn$  y  $pp$  a  $pn$  (ver apéndice B), llegamos a

$$\bar{V}_{13}^{JM} = \sum_{J_{13} J_{24}} \begin{bmatrix} j_a & j_b & J_p \\ j_c & j_d & J_n \\ J_{13} & J_{24} & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{a'} & j_{b'} & J'_p \\ j_{c'} & j_{d'} & J'_n \\ J_{13} & J_{24} & J \end{bmatrix} \delta_{bb'} \delta_{dd'} \left\langle j_a j_c, J_{13} M_{13} \left| V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) \right| j_{a'} j_{c'}, J_{13} M_{13} \right\rangle \quad (2.91)$$

Finalmente, debemos calcular los elementos de matriz

$$\bar{V}_{pn}^{JM} = \sum_{b \leq a} \sum_{b' \leq a'} \sum_{d \leq c} \sum_{d' \leq c'} X_{ab}^{J_p} X_{a'b'}^{J'_p} X_{cd}^{J_n} X_{c'd'}^{J'_n} 4 N_{ab} N_{cd} N_{a'b'} N_{c'd'} \sum_P (-)^P P(\bar{V}_{13}^{JM}) \quad (2.92)$$

donde  $\sum_P (-)^P P$  implica 16 permutaciones de los números cuánticos. El detalle de estas se encuentra en el apéndice B.

A nivel computacional, el cálculo de estos elementos de matriz es costoso desde la siguiente perspectiva: un elemento de matriz  $\bar{V}_{pn}^{JM}$  queda definido por los números cuánticos  $\{J_p, J_n, J'_p, J'_n\}$ , los cuales definen la cantidad de estados de partícula simple  $\{a, b, c, d, a', b', c', d'\}$  de las primeras sumatorias de la ecuación (2.92). Ahora bien, para cada combinación posible de estos estados de partícula simple, debemos realizar las 16 permutaciones sobre cada elemento de matriz  $\bar{V}_{13}^{JM}$  re-acoplado a  $pn$ .

En la presentación de resultados, cada estado de cuatro cuerpos va a estar caracterizado por su número cuántico  $J$ , el isospín  $T$  (ver apéndice C) y las diferentes amplitudes de cuatro cuerpos  $Z_{J_p J_n}^J$ . Estas últimas amplitudes estarán presentadas dentro de  $\mathcal{Z}_J^2$ , entendida como la contribución de cada amplitud parcial  $J_i$  (de dos cuerpos) a la función de onda de cuatro cuerpos, definida como:

$$\mathcal{Z}_J^2 = \sum_i (Z_i^J)^2 \quad (2.93)$$

donde  $Z_i^J = Z_{J_p J_n}^J$  viene de la función de onda de cuatro cuerpos correlacionada (2.79),  $i$  identificando a todas las configuraciones  $[\Psi^{J_p}, \Psi^{J_n}]_{JM}$ . Definiremos a  $\mathcal{Z}_J^2$  como la suma de las amplitudes al cuadrado.

## 2.2. El tiempo de vida media en decaimiento alfa

En esta sección nos centraremos en los principales modelos que nos permiten, partiendo de las energías y funciones de onda de cuatro cuerpos desarrolladas en la sección 2.1, obtener un tiempo de vida en decaimiento alfa a nivel microscópico de nuestros núcleos bajo estudio.

Nuestro acercamiento al tiempo de vida media en decaimiento alfa parte principalmente de la *expresión de Arima* [61, 66, 93]:

$$\Gamma_L = \mathcal{S}_L \Gamma_L^{\text{sp}} \quad (2.94)$$

donde  $\mathcal{S}_L$  es el factor espectroscópico renormalizado, mientras que el ancho absoluto de partícula simple  $\Gamma^{\text{sp}}$  se obtiene a partir de un modelo simplificado de dos cuerpos. Entonces, el tiempo de vida media (para el caso  $L = 0$ ) será

$$T_{1/2} = \frac{T_{1/2}^{\text{sp}}}{\mathcal{S}} \quad (2.95)$$

donde

$$T_{1/2}^{\text{sp}} = \frac{\hbar \ln(2)}{\Gamma^{\text{sp}}} \quad (2.96)$$

La ecuación (2.94) surge como una alternativa de la ecuación de Thomas del ancho absoluto, obtenida en el marco de la Matriz-R [39, 44]

$$\Gamma_L(r) = 2\gamma_L^2(r)P_L(r) \quad (2.97)$$

siendo  $P_L(r)$  la penetrabilidad de la barrera de potencial y  $\gamma_L(r)$  el ancho reducido. Notemos que en la principal diferencia respecto a la expresión que nosotros utilizaremos durante el trabajo, es la dependencia con la distancia  $r$  entre el núcleo residual  $A$  y la partícula  $\alpha$ .

En primer lugar, presentaremos la descripción teórica de los anchos  $\Gamma_L^{\text{sp}}$  y su relación con las secciones previas. Luego, analizaremos los factores espectroscópicos convencionales  $\mathcal{S}_L$  y su relación con las amplitudes de formación convencionales  $g_L(r)$  pensada como una superposición de funciones de onda. Finalmente, estudiaremos la renormalización de estos valores convencionales, para obtener la amplitud de formación renormalizada  $G_L(r)$  y el factor espectroscópico renormalizado o “cantidad de clusterización”  $\mathcal{S}_L$ .

### 2.2.1. El decaimiento alfa como un fenómeno de dos cuerpos

En esta sección presentamos el primer acercamiento teórico para describir al decaimiento alfa en un núcleo atómico. El modelo de esta sección consiste en aproximar a la partícula alfa como una entidad puntual e indivisible, de forma que su interacción con el núcleo residual  $A$  se modelice por un Hamiltoniano de dos cuerpos. Asumimos que la partícula alfa y el núcleo residual se encuentran a una distancia límite en la cual no existe ninguna interacción que pueda generar excitaciones o desexcitaciones del núcleo  $A$ . Tomando la interacción como un potencial central  $V(r)$ , y como la partícula alfa posee momento angular nulo  $l = 0$  [46], el Hamiltoniano será:

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 + V(r) \quad (2.98)$$

donde  $\mu = \frac{m_\alpha M_A}{m_\alpha + M_A}$  es la masa reducida del sistema  $\alpha + A$ , y la interacción es [39]:

$$V(r) = -V_0 f(r) + \theta(r - r_c) \frac{2Ze^2}{2r_c} \left[ 3 - \frac{r^2}{r_c^2} \right] + \theta(r_c - r) \frac{2Ze^2}{r} \quad (2.99)$$

siendo  $Z$  es la carga del núcleo  $A$ ,  $f(r) = [1 + \exp(\frac{r-R}{a})]^{-1}$  el potencial de Woods-Saxon,  $\theta(r)$  la función escalón, y  $r_c$  es el radio de la distribución de carga asumiendo densidad constante.

Para poder establecer la intensidad  $V_0$ , primero debemos definir la energía de la partícula alfa. Partamos de que para la reacción  $(N + 2, Z + 2) \rightarrow A + \alpha$ , la cantidad de energía absorbida o liberada en función de las energías cinéticas de los fragmentos es

$$Q_\alpha = (K_A + K_\alpha) - K_{A+4} \quad (2.100)$$

la cual puede escribirse en función de las masas

$$Q_\alpha = (M_{A+4} - M_A - M_\alpha)c^2 \quad (2.101)$$

Si tomamos que el núcleo madre  $A + 4$  está inicialmente en reposo ( $K_{A+4} = 0$ ), por conservación del momento lineal, la energía  $E^\alpha$  de la partícula alfa será:

$$E^\alpha = \frac{M_A}{M_{A+4}} Q_\alpha \quad (2.102)$$

donde el factor de corrección  $\frac{M_A}{M_{A+4}}$  aparece por haber asumido que  $K_{A+4} = 0$ .

La definición del  $Q_\alpha$  dada en la ecuación 2.101 es la expresión teórica, de un observable que puede ser medido en laboratorios. Las mediciones experimentales difieren mínimamente de esta definición porque en la realidad, se trabaja con núcleos que se encuentran dentro de átomos, por lo cual hay una nube electrónica de por medio. Es entonces que debemos incorporar la corrección por el apantallamiento [46]

$$\Delta E_{se} = 65.3Z^{7/5} - 80Z^{2/5} \text{ eV} \quad (2.103)$$

Entonces, la energía corregida de la partícula alfa es

$$E^\alpha = \frac{M_A}{M_{A+4}} (Q_\alpha - \Delta E_{se}) \quad (2.104)$$

Esta energía se encuentra relacionada al valor experimental que uno puede obtener de diferentes fuentes [1].

Volviendo a nuestro hamiltoniano (2.98), debemos resolver la ecuación de Schrödinger para la partícula alfa con la condición de borde saliente  $u^\alpha(R) \rightarrow e^{-ikR}$  con  $k$  complejo (pues será un estado resonante) y obtener así la autofunción  $u^\alpha(R)$ . Por nuestra condición de borde, vamos a obtener una energía compleja  $\varepsilon^\alpha = \varepsilon_R^\alpha - i\Gamma^{\text{sp}}/2$ , donde  $\Gamma^{\text{sp}}$  es el ancho del estado alfa resonante. El superíndice sp se incluye para notar que los valores obtenidos corresponden al modelo del alfa como partícula simple. Para construir la parte real de la energía  $\varepsilon^\alpha$  que debe ser ajustada por la intensidad  $V_0$  del potencial central del hamiltoniano  $\mathcal{H}$ , utilizaremos la ecuación

$$\Re(\varepsilon^\alpha) = \frac{M_{A+4}}{M_A} E^\alpha + \Delta E_{se} = Q_\alpha + \Delta E_{se} \quad (2.105)$$

la cual es válida si el estado fundamental es inestable por decaimiento alfa, es decir, si  $Q_\alpha > 0$ . Para el caso contrario ( $Q_\alpha < 0$ ), uno puede calcular  $\Re(\varepsilon_i^\alpha)$  para los estados excitados  $J_i^\pi$  a través de

$$\Re(\varepsilon_i^\alpha) = E(J_i^\pi) - E(\text{gs}) + Q_\alpha + \Delta E_{\text{se}} \quad (2.106)$$

donde  $E(J_i^\pi)$  es la energía del estado  $J_i^\pi$  de cuatro cuerpos y  $E(\text{gs})$  es la energía del estado fundamental, ambas respecto al núcleo  $A$ . Los valores de  $E^\alpha$  o  $Q_\alpha$  son experimentales y dependen de cada núcleo madre  $A + 4$ .

Destaquemos que para un tiempo de vida media  $T_{1/2}^{\text{SP}}$  del orden de los microsegundos, el ancho  $\Gamma^{\text{SP}} = \hbar \ln(2)/T_{1/2}^{\text{SP}}$  será del orden de los nano-electrón voltios. Resolver la ecuación de autovalores con esta resolución requiere de cierta precisión numérica y computacional. Una manera más estable de obtener los anchos  $\Gamma^{\text{SP}}(r)$  ( $L = 0$ ) es a través de la ecuación de la corriente [94–97]:

$$\Gamma^{\text{SP}}(r) = \frac{2\kappa}{c} \frac{|u^\alpha(r)|^2}{|H_0^+(\eta, \kappa r)|^2} \quad (2.107)$$

donde utilizamos la relación de dispersión  $E_\alpha = k_\alpha^2/c$ , siendo  $c = 2\mu/\hbar^2$ ,  $\kappa = \Re(k_\alpha)$ .  $H_0^+(\chi, \kappa r)$  es la función esférica saliente de Coulomb-Hankel, mientras  $\eta$  es el parámetro de Sommerfeld-Coulomb

$$\eta = \frac{2\mu Z e^2}{\hbar^2 \kappa}, \quad (2.108)$$

En principio, la expresión aproximada del ancho a través de la ecuación de la corriente converge para  $r > r_M$ , donde  $r_M$  es tal que el potencial nuclear que utilizamos (Woods-Saxon) se aproxima a cero cuando  $r > r_M$ . Es por esto que la expresión (2.107) es válida para todas las coordenadas  $r > r_M$ . Otra aproximación que se utiliza es asumir que

$$I(r_M) = \int_0^{r_M} |u^\alpha(r)|^2 dr = 1 \quad (2.109)$$

es decir, la función de onda de la partícula alfa se encuentra normalizada dentro de una esfera de radio  $r_M$ .

Como completitud, veamos que podemos escribir el ancho  $\Gamma^{\text{SP}}$  en función de la penetrabilidad  $P(r)$  de la barrera de potencial [33] y el ancho reducido  $\gamma^{\text{SP}}(r)$  [39]:

$$\Gamma^{\text{SP}}(r) = 2P(r)\gamma^2(r) \quad (2.110)$$

$$P(r) = \frac{\kappa r}{|H_0^+(\eta, \kappa r)|^2}, \quad (2.111)$$

$$\gamma^2(r) = \frac{|u^\alpha(r)|^2}{cr} \quad (2.112)$$

donde  $|u^\alpha(r)|^2$  es pensada como la probabilidad de encontrar a la partícula alfa en la posición  $R$ . Uno puede generalizar para el caso  $L \neq 0$ , quedando:

$$\Gamma_L^{\text{sp}}(r) = 2P_L(r) \left( \gamma_L^{\text{sp}}(r) \right)^2 \quad (2.113)$$

$$P_L(r) = \frac{\kappa r}{|H_L^+(\eta, \kappa r)|^2}, \quad (2.114)$$

$$\left( \gamma_L^{\text{sp}}(r) \right)^2 = \frac{|u_L^\alpha(r)|^2}{cr} \quad (2.115)$$

La función de onda  $u_L^\alpha(R)$  asociada a la energía  $\varepsilon_L^\alpha$  por el hamiltoniano  $\mathcal{H}$  debe respetar la cantidad de nodos  $N$  establecidos de la siguiente manera [63, 98–100]: pensemos en el modelo de capas con autovalores del oscilador armónico, donde los nucleones de valencia poseen  $\mathcal{N}_i = 2n_i + l_i$  cuantos (por ejemplo,  $\mathcal{N}_i = 1$  si estamos en la capa  $0p$ ,  $\mathcal{N}_i = 2$  si estamos en la capa  $1s0d$ , etc.). Si el clúster que se está simulando como una partícula puntual tiene  $\nu$  nucleones teniendo  $\mathcal{N}_i$  cuantos, entonces la energía total de éste será  $\nu \mathcal{N}_i \hbar \omega$ . Por otro lado, si la configuración interna de este clúster tiene  $\mathcal{N}_{\text{int}} = 2n_{\text{int}} + l_{\text{int}}$  cuantos, tendremos que el movimiento del clúster-carozo con momento angular  $L$  tendrá  $N$  nodos (sin contar el origen ni el infinito) que aseguran la conservación de la energía

$$(2N + L)\hbar\omega + \mathcal{N}_{\text{int}}\hbar\omega = \nu\mathcal{N}_i\hbar\omega \quad (2.116)$$

$$(2N + L) + \mathcal{N}_{\text{int}} = \nu\mathcal{N}_i \quad (2.117)$$

esta ecuación es también considerada como de Wildermouth [63, 98]. En este trabajo, tendremos siempre dos neutrones y dos protones integrando el clúster, con la particularidad de que la función de onda de la partícula alfa se encontrará siempre en su estado  $s$ , por lo cual  $\mathcal{N}_{\text{int}} = 0$ . Es así que el número de nodos en la función de onda  $u^\alpha(r)$  de la ec. (2.107) será

$$N = \frac{2\mathcal{N}_n + 2\mathcal{N}_p - L}{2} \quad (2.118)$$

con  $\mathcal{N}_n$  y  $\mathcal{N}_p$  cuantos correspondientes a la capa del oscilador armónico ocupada por el neutrón y el protón de valencia, respectivamente.

## 2.2.2. La amplitud de formación y el factor espectroscópico

Siguiendo en la línea del cálculo de la vida media del decaimiento alfa, a continuación presentamos el modelo principal de este estudio, el cual justifica la necesidad de el modelo de la sección 2.1, pues su principal diferencia respecto al formalismo de la sección previa es la incorporación de la estructura de la partícula alfa. De esta manera, incorporamos al problema un aspecto importante a la hora de modelizar el fenómeno.

Esta sección estará dividida en dos partes: primero, presentaremos la amplitud de formación  $g_L(R)$ , indicador de la posible existencia de la partícula alfa  $\alpha$  dentro del núcleo madre  $A + 4$ . Luego, introduciremos el factor espectroscópico, el cual buscará modelar la probabilidad de encontrar a esta estructura  $\alpha$  dentro de  $A + 4$ , pero que aún no podremos asociarlo a la “cantidad de clusterización” del núcleo.

### 2.2.2.1. La amplitud de formación convencional

En 1954, Thomas [39] partió de la teoría de la matriz-R independiente del tiempo para reacciones nucleares para obtener la relación entre el ancho absoluto  $\Gamma_L(R)$  y los anchos reducidos  $\gamma_L^2(R)$ , presentada en la ecuación (2.97), la cual volvemos a notar

$$\Gamma_L(r) = 2\gamma_L^2(r)P_L(r) \quad (2.119)$$

donde  $P_L(r)$  fue definida en la sección anterior. La principal diferencia respecto a la sección previa, es que la amplitud de ancho reducido  $\gamma_L(r)$  ahora se expresa como

$$\gamma_L(r) = \sqrt{\frac{\hbar^2 r}{2\mu}} g_L(r) \quad (2.120)$$

donde  $r$  es la distancia relativa entre los dos fragmentos ( $\alpha$  y  $A$  en nuestro caso),  $\mu$  la masa reducida definida de manera usual y  $g_L(r)$  es la llamada **amplitud de formación** [48]

$$g_L(r) = \int d\Omega_r Y_L^{ML}(\Omega_r) g(\mathbf{r}) \quad (2.121)$$

$$g(\mathbf{r}) = \int d\xi_\alpha \int d\xi_d \Psi^{JM*} \mathcal{A} \left[ \frac{1}{r^2} \phi_\alpha(\xi_\alpha) \Phi_{j_A}(\xi_A) \right]_{JM} \Big|_{\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{r}} \quad (2.122)$$

donde  $\phi_\alpha$  es la función de onda de la partícula alfa en coordenadas internas  $\xi_\alpha$ ,  $\Phi_{j_A m_A}$  la función de onda del núcleo residual en coordenadas internas  $\xi_A$ ,  $\Psi^{JM}$  la función de onda del núcleo  $A + 4$  descrita con la teoría de la sección 2.1.3,  $Y_L$  la parte angular del movimiento del centro de masa del compuesto  $A + \alpha$ ,  $\Omega_R$  el ángulo asociado al vector  $\mathbf{r}$ , y  $\mathbf{r}_\alpha$  la distancia entre  $\alpha$  y  $A$ . Esta amplitud de formación busca describir la probabilidad de que la estructura  $A + \alpha$  constituida por la partícula alfa y el núcleo residual ubicados a una distancia  $R$  se encuentre contenida en la función de onda  $\Psi^{JM}$ .

Todas las funciones de onda utilizadas están normalizadas respecto a sus coordenadas internas [101] y a las coordenadas del centro de masa:

$$\int d\xi_\alpha |\phi_\alpha(\xi_\alpha)|^2 = 1 \quad (2.123)$$

$$\int d\xi_A |\Phi_{j_A m_A}(\xi_A)|^2 = 1 \quad (2.124)$$

$$\int d\xi_\alpha \int d\xi_A \int d\mathbf{r} |\Psi^{JM}|^2 = 1 \quad (2.125)$$

La expresión (2.121) debe tener en cuenta la normalización y antisimetrización entre los nucleones que componen la partícula alfa y aquellos que componen al núcleo residual [101, 102]. Para esto, debe incorporarse una suma sobre las diferentes permutaciones posibles de tomar dos neutrones y dos protones del núcleo madre, junto con un factor de normalización. En nuestro modelo, el núcleo madre y el residual comparten la misma capa cerrada, por lo cual podemos considerar solamente los neutrones  $N_v$  y los protones  $Z_v$  de valencia. Así, la amplitud de formación ya proyectada se reescribe [48, 101]

$$g_L(r) = \binom{N_v}{2}^{1/2} \binom{Z_v}{2}^{1/2} \int d\Omega_r \int d\xi_\alpha \int d\xi_d \Psi^{JM*} \mathcal{A} \left[ \frac{1}{r^2} \phi_\alpha(\xi_\alpha) \Phi_{j_A}(\xi_A) Y_L(\Omega_r) \right]_{JM} \quad (2.126)$$

La función de onda intrínseca de la partícula alfa  $\phi_\alpha(\xi_\alpha)$  se define como el estado  $0s$  del oscilador armónico (ver apéndice D)

$$\begin{aligned}\phi_\alpha(\rho_1\rho_2\rho_3, \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4) &= \phi(\rho_1\rho_2\rho_3)\chi_{00}(\sigma_1\sigma_2)\chi_{00}(\sigma_3\sigma_4) \\ \chi_{00}(\sigma_1\sigma_2) &= [\chi_{1/2}(\sigma_1)\chi_{1/2}(\sigma_2)]_{00} \\ \phi(\rho_1\rho_2\rho_3) &= \left(\frac{8\beta}{\pi}\right)^{9/4} e^{-4\beta(\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2)}\end{aligned}\quad (2.127)$$

siendo  $\rho_i$  sus coordenadas internas,  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  el espín de los dos protones, y  $\sigma_3$  y  $\sigma_4$  el espín de los neutrones. Realizando reescrituras y sustituciones sobre la expresión 2.121 (ver apéndice D), llegamos a que la expresión más general para la amplitud de formación para el canal de espín más importante  $S = 0$  es [53]

$$\begin{aligned}g_L(r) &= \sqrt{8} \sqrt{\frac{N_v!}{2!(N_v-2)!}} \sqrt{\frac{Z_v!}{2!(Z_v-2)!}} \sum_{J_n J_p} \sum_{j_1 j_2 j_3 j_4} \left( b_{j_1 j_2 j_3 j_4}^{J_n J_p J} \right)^* \\ & \quad (-1)^{J_n+J_p-j_1-j_3-l_2-l_4+1} \frac{\hat{j}_1 \hat{j}_2 \hat{j}_3 \hat{j}_4}{2} \\ & \quad W(l_1 j_1 l_2 j_2; 1/2 J_n) W(l_3 j_3 l_4 j_4; 1/2 J_p) \\ & \quad \int d\Omega_{Rr} \int d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3 \phi(\rho_1\rho_2\rho_3) Y_L^{M_L}(\Omega_r) \\ & \quad \left[ \mathbb{S}[\Phi_1^* \Phi_2^*]_{J_n} \mathbb{S}[\Phi_3^* \Phi_4^*]_{J_p} \right]_{LM_L}\end{aligned}\quad (2.128)$$

donde  $\Phi_i(\mathbf{r}) = \varphi_i(r) Y_l^{m_l}(\Omega_r)$  son las funciones de onda de partícula simple tridimensionales,  $\mathbb{S}$  es el operador de simetrización y normalización, y  $W$  son los coeficientes de Racah [38, 103]. Se definió  $b_{j_1 j_2 j_3 j_4}^{J_n J_p J}$  como el producto de las amplitudes de dos y cuatro cuerpos, definido apropiadamente para poder separar la configuración de cuatro nucleones de aquella encontrada en la función de onda del núcleo madre

$$b_{j_1 j_2 j_3 j_4}^{J_n J_p J} = X_{12}^{J_p} X_{34}^{J_n} Z_{J_p J_n}^J \quad (2.129)$$

Es decir, para cada estado  $J$  de cuatro partículas, se definen  $n^\circ$  amplitudes  $b$  cuya cantidad dependerá de las dimensiones de las representaciones de partícula simple y de dos cuerpos que utilizemos. Una característica importante de este trabajo es la inclusión del continuo no resonante como completitud de las representaciones de partícula simple, lo cual genera que las dimensiones de éstas se amplíen significativamente. La inclusión del continuo no resonante como autofunciones del potencial de Woods-Saxon destaca a nuestro trabajo del resto, ya que en la bibliografía solo existen casos que trabajan con la representación de Berggren pero truncada [56, 57, 64].

Notemos también que las integrales tenemos funciones de onda definidas en coordenadas intrínsecas, que deben pasarse a coordenadas relativas (ver sección D.1 del apéndice D). Además, notemos que se simplifican las integrales en  $\phi$  pues asumimos una simetría esférica del sistema. Estas transformaciones de coordenadas junto con las integrales tiene como consecuencia grandes tiempos de cómputo. En las aplicaciones veremos ejemplos de diferentes cantidades de amplitudes  $b$  y como esto se relaciona con tiempo de cálculo. Además, propondremos alternativas para disminuir éste tiempo.

### 2.2.2.2. El factor espectroscópico convencional

Como se mencionó en la introducción de la sección 2.2, bien el ancho absoluto puede ser obtenido a través de la ecuación (2.97) y depender de la coordenada  $r$ , como así también a través de la ecuación 2.94. En este último caso, vemos que necesitamos tener definidos los anchos de partícula simple  $\Gamma^{\text{SP}}$  (sección 2.2.1), pero también necesitamos los factores espectroscópicos renormalizados  $\mathcal{S}$ . Antes de pasar al factor renormalizado, es necesario calcular los factores espectroscópicos convencionales  $S_L$ , que definiremos a continuación.

El factor espectroscópico convencional  $S_L$  contiene información sobre la formación de un clúster alfa dentro del núcleo madre  $A + 4$  [66]:

$$S_L = \left| \left\langle \mathcal{A} \left[ \phi_\alpha \Phi_{j_A} \hat{\varphi}_L \right]_{JM} \left| \Psi^{JM} \right\rangle \right| \quad (2.130)$$

donde  $\hat{\varphi}_{LM_L}(\mathbf{r}) = \frac{u_L^\alpha(r)}{r} Y_L^{M_L}(\Omega_r)$  representa el movimiento relativo entre una partícula alfa y el núcleo residual. Es decir,  $S_L$  debe indicarnos que tan probable es encontrar dentro de nuestro núcleo inicial  $A + 4$  una estructura del tipo  $\alpha + A$ . Si asumimos que  $g_L(r)$  definida en la ecuación (2.128) está expresando esta probabilidad para cada  $r$ , podemos relacionar ambas cantidades a través de [3, 63, 94]:

$$S_L = \int r^2 g_L(r)^2 dr \quad (2.131)$$

De esta manera, obtenemos una expresión que nos permite independizarnos del radio  $r$ . Estas definiciones convencionales tanto del factor espectroscópico como de la amplitud de formación no se encuentran correctamente normalizadas [59], lo cual impide que uno realmente relacione las ecuaciones presentadas hasta este punto con la definición física de probabilidad. En la próxima sección presentaremos formalmente la noción de renormalización que ya hemos comentado, y la aplicaremos a la amplitud  $g_L(r)$ .

### 2.2.3. La renormalización

En esta sección realizaremos un análisis para llegar a la expresión correcta de la amplitud de formación, y por ende, el factor espectroscópico. Partimos de ideas que surgen durante la década de 1970, en primer lugar con la publicación de Fliessbach en 1975 [58]. La sección está organizada tal que presentamos el problema encontrado en la amplitud de formación convencional, para luego analizar la solución propuesta y finalizar con las nuevas magnitudes renormalizadas.

#### 2.2.3.1. La norma de las funciones de onda.

Volvamos entonces a nuestra expresión original de la amplitud de formación dada en la ecuación (2.122). En notación de Dirac, esta expresión puede escribirse como [59, 63]

$$g(\mathbf{r}) = \left\langle \mathcal{A} \left[ \frac{1}{r^2} \phi_\alpha \Phi_{j_A} \delta(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}) \right]_{JM} \left| \Psi^{JM} \right\rangle \right| \quad (2.132)$$

la cual, como se menciona anteriormente, intenta describir la probabilidad de encontrar dentro de la función de onda  $\Psi^{JM}$  al conjunto  $\alpha$  y núcleo residual a una dada distancia  $r$  entre ellos [61]. Sabemos que para una función  $g(\mathbf{r})$  será interpretada como una amplitud de probabilidad siempre que esta se encuentre correctamente normalizada. Es decir, necesitamos que en su expresión (2.132) el bra se encuentre normalizado a una delta de Dirac  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  y su ket a la unidad.

Como vimos previamente en la sección 2.1.3 la función de onda  $\Psi^{JM}$  que describe el movimiento del núcleo  $A + 4$  construida con el formalismo del modelo de capas se encuentra correctamente normalizada y antisimetrizada. En cambio, cuando vamos a calcular la norma del bra, tendremos que [3, 58–61]

$$\left\langle \mathcal{A} \left[ \frac{1}{r^2} \phi_\alpha \Phi_{j_A} \delta(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}) \right] \middle| \mathcal{A} \left[ \frac{1}{r'^2} \phi_\alpha \Phi_{j_A} \delta(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}') \right] \right\rangle = \mathcal{N}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (2.133)$$

Es decir, necesariamente debemos normalizar la función de onda  $\left| \mathcal{A} \left[ \frac{1}{r^2} \phi_\alpha \Phi_{j_A} \delta(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}) \right]_{JM} \right\rangle$  a la delta  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  antes de poder pensar en una amplitud de probabilidad.

A partir de la ecuación (2.133), Fliessbach propuso [58, 59] que la función de onda correctamente normalizada sea

$$\left| \mathcal{A} \left[ \mathcal{N}^{-1/2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') r^{-2} \phi_\alpha \Phi_{j_A} \delta(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}) \right]_{JM} \right\rangle \quad (2.134)$$

mediante la cual definiremos la amplitud de formación renormalizada como

$$G(\mathbf{r}) = \left\langle \mathcal{A} \left[ \mathcal{N}^{-1/2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') r^{-2} \phi_\alpha \Phi_{j_A} \delta(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}) \right]_{JM} \middle| \Psi^{JM} \right\rangle \quad (2.135)$$

El operador  $\mathcal{N}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  se denomina *norm-kernel*.

### 2.2.3.2. El *norm-kernel*

A continuación, buscaremos una expresión calculable del operador  $\mathcal{N}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ . Por simplicidad, trabajaremos con la expresión de la amplitud de formación renormalizada (2.135) pero proyectada al momento angular orbital  $L$  asociado a la función de onda  $\hat{\phi}_{LM_L}(\mathbf{r})$  del movimiento relativo  $\alpha$ -carozo

$$G_L(r) = \left\langle \mathcal{A} \left[ \mathcal{N}_L^{-1/2}(r, r') r^{-2} \phi_\alpha \Phi_{j_A} Y_L \delta(r_\alpha - r) \right]_{JM} \middle| \Psi^{JM} \right\rangle \quad (2.136)$$

la cual en notación integral se define en función de (2.126) como

$$G_L(r) = \int_0^\infty r'^2 \mathcal{N}_L^{-1/2}(r, r') g_L(r') dr' \quad (2.137)$$

de manera que el factor espectroscópico renormalizado  $\mathcal{S}_L$  asociado a la “cantidad de clusterización” será

$$\mathcal{S}_L = \int_0^\infty r^2 G_L^2(r) dr \quad (2.138)$$

$$= \int_0^\infty r^2 \int_0^\infty r'^2 \mathcal{N}_L^{-1/2}(r, r') g_L(r') dr' dr \quad (2.139)$$

La clave de nuestro problema es poder trabajar el operador  $\mathcal{N}_L(r, r')$  o  $\mathcal{N}_L^{-1/2}(r, r')$ , el cual se obtiene a partir de

$$\mathcal{N}_L(r, r') = \left\langle \mathcal{A} \left[ r^{-2} \phi_\alpha \Phi_{j_A} Y_L \delta(r_\alpha - r) \right]_{JM} \middle| \mathcal{A} \left[ r'^{-2} \phi_\alpha \Phi_{j_A} \Phi_{j_A} Y_L \delta(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}') \right]_{JM} \right\rangle \quad (2.140)$$

expresión compleja que envuelve no solo la antisimetrización  $\mathcal{A}$ , sino que se define además en un espacio continuo  $(r, r')$ . A priori, este operador tendrá autovalores  $n_\nu$  y autofunciones  $u_\nu^L(r)$  obtenidas de

$$\int dr' \mathcal{N}_L(r, r') u_\nu^L(r') = n_\nu u_\nu^L(r) \quad (2.141)$$

Pero volviendo a su expresión (2.140), vemos que involucra a  $\phi_\alpha$  cuya forma funcional es la de una gaussiana, por lo cual decidimos expandirlo en una base ortonormalizada de gaussianas (*shifted gaussian basis* o SGB por su siglas en inglés) pues nos permite convertir las funciones de onda en coordenadas intrínsecas a coordenadas nucleónicas, definidas como [59, 62] (ver apéndice E)

$$\bar{F}_L(r, r_k) = \sum_{k'} \left( N_F^{-1/2} \right)_{kk'} F_L(r, r_{k'}) \quad (2.142)$$

en un intervalo  $(0, R_{\max})$  discretizado con  $M$  puntos  $r_k$  equidistantes separados una cantidad  $\Delta R$ , siendo  $M$  la dimensión de la base. Además

$$F_L(r, r_k) = 4\pi \left( \frac{8\beta'}{\pi} \right)^{3/4} e^{-4\beta'(r^2+r_k^2)} i^L j_L(-i 8\beta' r r_k) \quad (2.143)$$

y

$$(N_F)_{kk'} = 4\pi e^{-2\beta'(r_k^2+r_{k'}^2)} i^L j_L(-i 4\beta' r_k r_{k'}) \quad (2.144)$$

En esta nueva base, tendremos que

$$\sum_k^M \mathcal{N}_L^{\bar{F}}(r_k, r_{k'}) c_\nu^L(r_{k'}) = n_\nu c_\nu^L(r_k) \quad (2.145)$$

donde los autovectores  $c_\nu^L(r_k)$  se relacionan a los  $u_\nu^L(r)$  mediante

$$u_\nu^L(r) = \sum_k^M c_\nu^L(r_k) \bar{F}_L(r, r_k) \quad (2.146)$$

y

$$\mathcal{N}_L^{\bar{F}}(r_k, r_{k'}) = \sum_{nn'}^M \left( N_F^{-1/2} \right)_{kn} \mathcal{N}_{Lnn'}^F \left( N_F^{-1/2} \right)_{n'k'} \quad (2.147)$$

siendo  $\mathcal{N}_{Lnn'}^F$  un producto de determinantes de Slater por tomar  $\beta' = 4\beta$  de la ecuación (2.127) [54, 62] (ver ecuaciones (E.12) y (E.13) del apéndice E).

Como conocemos la forma funcional de los autovectores  $u_\nu^L(r)$  de la ec. (2.146) y podremos calcular los autovalores  $n_\nu$  a partir de la ec. (2.145), vamos ahora a escribir el operador  $\mathcal{N}_L(r, r')$  en su notación espectral tal que [59, 65]

$$\mathcal{N}_L(r, r') = \sum_\nu n_\nu u_\nu^{*L}(r) u_\nu^L(r') \quad (2.148)$$

y entonces

$$\mathcal{N}_L^{-1/2}(r, r') = \sum_\nu n_\nu^{-1/2} u_\nu^{*L}(r) u_\nu^L(r') \quad (2.149)$$

Siguiendo las ecuaciones (E.17) y (E.19) del apéndice E junto con la ecuación (2.137), vemos que la amplitud de formación renormalizada será

$$G_L(r) = \sum_\nu n_\nu^{-1/2} g_L^\nu(r) \quad (2.150)$$

donde  $g_L^\nu(r)$  son los coeficientes de expandir a la amplitud convencional  $g_L(r)$  en la nueva base SGB (ver ecuaciones (E.20) y (E.21) del apéndice E). Entonces, el factor espectroscópico renormalizado  $\mathcal{S}_L$  será

$$\mathcal{S}_L = \sum_\nu \int r^2 \frac{[g_L^\nu(r)]^2}{n_\nu} dr \quad (2.151)$$

Notemos que este factor espectroscópico depende de los autovalores  $n_\nu$  en su denominador. Estos autovalores pueden ser muy pequeños [20, 99], causando divergencias en la expresión (2.151) y haciendo que esta magnitud carezca de sentido físico. En particular, usando funciones de onda del oscilador armónico, existen casos para los cuales estos autovalores son nulos [59, 104]. Estos son definidos como **estados prohibidos** pues violan el principio de exclusión de Pauli (en la sección E.1 del apéndice E se presenta un ejemplo de esto) y se excluyen de la suma en la ec. 2.151. En nuestro caso, trabajamos con funciones de onda de Woods-Saxon, por lo cual en su lugar tendremos autovalores casi nulos, que constituyen los **estados casi prohibidos** [59], los cuales también deben ser excluidos de la suma. En el capítulo 2.2 estableceremos un protocolo con criterios generales, el cual aplicado a diferentes núcleos estudiados, permite calcular sin ambigüedad la cantidad de clusterización  $\mathcal{S}$ .

### 2.3. Los códigos computacionales

En esta sección presentamos los diferentes códigos computacionales utilizados a lo largo del trabajo de Tesis. Estos códigos son en su mayoría de producción propia, a partir del proyecto que comenzó en 2012 [65]. Con el comienzo del presente trabajo en el año 2020, se han implementado múltiples mejoras tanto a nivel de cálculo como a nivel físico que detallaremos a continuación. Todos los códigos son desarrollados en el lenguaje computacional Fortran a menos se indique lo contrario. Esta sección está ordenada de forma que iremos presentando los programas correspondientes a cada sección teórica de este capítulo.

Antes de pasar a analizar cada uno de los códigos, destacamos que los resultados presentes en este trabajo fueron obtenidos utilizando los recursos del Centro de Cómputos de CCT-Rosario [28] y del CCAD de la Universidad Nacional de Córdoba [27], miembros del Sistema Nacional de Computación de Alto Desempeño (SNCAD, MincyT- Argentina).

## El modelo de capas nuclear

A continuación detallaremos los códigos que se utilizan para la construcción del modelo de capas desarrollado en la sección 2.1:

- 2.1.1. La construcción de los **estados de partícula simple** sobre un carozo particular se realiza utilizando dos códigos: **GAMOW** [105] y **ANTI** [106]. En particular, GAMOW data de 1982, cuya construcción se realizó para resolver la ecuación radial de Schrödinger en un potencial central óptico. Como detallamos previamente, en nuestro caso este potencial es una mezcla de la interacción Woods-Saxon con espín-órbita, y Coulomb para el caso de protones. Durante nuestro trabajo, GAMOW es utilizado para calcular los estados ligados de protones y neutrones de cada una de las familias de núcleos. Por otro lado, el código ANTI es un poco más moderno (1995), cuyo objetivo es también el de resolver la ecuación radial de Schrödinger, pero éste es capaz de trabajar con estados antiligados y de dispersión. Es por esto que para calcular los estados de partícula simple que pertenecen al continuo en este trabajo se utiliza ANTI.
- 2.1.2. El cálculo de los **estados de dos partículas** se realiza utilizando un código de producción propia. Éste se desarrolló por primera vez para el proyecto de la Ref. [65] con una interacción delta entre nucleones. El código toma como punto de partida los estados de partícula simple generados por GAMOW y ANTI para construirse la función de onda correlacionada (2.52,2.53,2.56) para un estado  $J_i$  de un determinado par de nucleones. En nuestro trabajo actual, la interacción delta de la Ref. [65] fue sustituida por la gaussiana (2.40), mientras que a nivel computacional se realizaron optimizaciones para disminuir los tiempos de cálculo. En particular, se paralelizó la subrutina que construye los elementos de matriz de la sección 2.1.2.2 utilizando OPENMP4.5 [107].
- 2.1.3 Finalmente, la construcción del modelo de capas finaliza con el cálculo de los **estados de cuatro partículas**. Para ello, utilizamos también un código de producción propia que utiliza tanto los estados de partícula simple calculados por GAMOW y ANTI como los de dos partículas, para de esa manera establecer las bases con las que se construyen los estados de cuatro cuerpos. En él se calculan los elementos de matriz (2.92) para resolver la ecuación de autovalores (2.81) y así obtener las funciones de onda y energías de los estados de cuatro cuerpos. Además, durante nuestro trabajo de tesis se implementó en este programa la capacidad de calcular numéricamente el isoespín asociado a cada autovalor  $E^J$ . Para ello, primero se realizó un análisis matemático del isoespín (ver apéndice C) y luego se codificó.

Notemos que los cálculos numéricos tanto de los elementos de matriz (2.92) como de los valores esperados del isoespín (C.18) implican sumas anidadas de gran cantidad de elementos cuando las representaciones son grandes, por lo cual se requiere de un correcto tratamiento a nivel computacional, no solo para evitar que los errores se propaguen, sino también para realizar los cálculos de la manera más eficiente posible.

Durante el proyecto actual se realizaron mejoras significativas a nivel computacional para disminuir el tiempo de cálculo, las cuales son resumidas en el apéndice F. Además, se implementó un código complementario desarrollado en el lenguaje computacional Python que se utiliza para ajustar los autovalores  $E^J$  a las energías experimentales necesarias.

En los próximos dos capítulos, aplicaremos estos tres códigos para la construcción final de los estados de cuatro cuerpos del Polonio-212, Titanio-44 y Telurio-104.

**El tiempo de vida media en decaimiento alfa** A continuación detallaremos los códigos que se utilizan para la construcción de los modelos desarrollados en la sección 2.2:

- 2.2.1. El cálculo del decaimiento alfa pensado como un **fenómeno de dos cuerpos** se realizó a partir de una modificación al programa **ANTI** [106]. Éste fue modificado de manera tal que el proyectil sea una partícula con la masa de dos protones más dos neutrones y la carga de dos protones. Así, el código resuelve entonces la ecuación de Schrödinger utilizando un potencial del tipo (2.99) para obtener la energía  $\varepsilon^\alpha$  y la correspondiente función de onda  $u^\alpha(r)$ . A partir de esta, la construcción del ancho absoluto de partícula simple se realiza a través de la ecuación de la corriente 2.107, en la cual la función esférica saliente de Coulomb-Hankel  $H_0^+$  se calcula utilizando el programa COULCC [108].
- 2.2.2. La construcción de la **amplitud de formación** se realiza utilizando un código de fabricación propia. Para calcular  $g(r)$  se codificó la ecuación 2.128. Ésta depende de las amplitudes  $b_{j_1 j_2 j_3 j_4}^{J_n J_p J}$ , y como vimos en la sección 2.2.2.1, la cantidad de  $b$  puede llegar a ser importante. Es por ello que durante este trabajo de tesis, al código computacional se le realizó una paralelización híbrida (MPI [109] + OPENMP4.5 [107]) de manera tal que al trabajar en los clúster disponibles, cada núcleo de cada nodo trabaje con una única amplitud parcial  $b$ . Esto permite reducir el tiempo de cálculo en varios ordenes de magnitud si se trabaja con la máxima capacidad disponible de los clúster.
- 2.2.3. Finalmente, el cálculo de la renormalización de  $g(r)$  también se realiza utilizando un código de producción propia. Éste construye los autovalores y autovectores del *norm-kernel* habiendo codificado las expresiones presentes en la sección 2.2.3.2 y en el apéndice E. Luego, calcula los valores renormalizados  $G(r)$  y  $S$  a través de las expansiones (2.150) y (2.151). El tiempo de cómputo de este programa es mínimo, por lo cual durante el trabajo de tesis nos centramos en mejorar la manera de obtención resultados, ya que buscamos realizar múltiples comparaciones del *norm-kernel* que no se hicieron en trabajos previos. Para ello, se desarrollaron códigos en el lenguaje Python que realizan cálculos de  $G(r)$  y  $S$  variando los límites de las expansiones (2.150) y (2.151) como también los parámetros de la base gaussiana SGB. Esto es utilizado en el capítulo 5, en el cual un análisis completo de la renormalización y del *norm-kernel* nos permite establecer un protocolo de para evitar ambigüedades.

En el capítulo 5 se presentarán las aplicaciones de estos últimos tres códigos para obtener finalmente el tiempo de vida en decaimiento alfa de los estados de interés de los núcleos Polonio-212, Titanio-44 y Telurio-104.

### CAPÍTULO 3

#### PRUEBA DEL FORMALISMO SOBRE UN NÚCLEO AMPLIAMENTE ESTUDIADO EXPERIMENTAL Y TEÓRICAMENTE

De la tabla de nucleidos, son múltiples los núcleos en los cuales fue observado experimentalmente su decaimiento alfa, y muchos más los que han sido modelizados con esta idea. Pero probablemente el más estudiado es el Polonio-212, cuya primer observación experimental del decaimiento alfa de su estado fundamental data de 1948 [110], cuya vida media fue estimada en  $0.3 \mu\text{sec}$ . En esta primera etapa del problema, estudiaremos la función de onda del núcleo Polonio-212 y sus respectivos núcleos base que conforman a la familia de núcleos que podremos construir encima del carozo doble mágico Plomo-208 ( $^{208}\text{Pb}$ ) (ver Figura 3.1).

$^{210}\text{Po}$ $\alpha$	$^{211}\text{Po}$ $\alpha$	$^{212}\text{Po}$ $\alpha$
$^{209}\text{Bi}$ $\alpha$	$^{210}\text{Bi}$ $\beta^-$	$^{211}\text{Bi}$ $\alpha$
$^{208}\text{Pb}$ $\alpha$	$^{209}\text{Pb}$ $\beta^-$	$^{210}\text{Pb}$ $\beta^-$

Figura 3.1: Familia de los núcleos construidos con el modelo de capas sobre el Plomo-208. Además, se notan sus modos de decaimiento. Fuente: Ref. [29].

La descripción de estos núcleos a partir del modelo de capas también tiene una larga trayectoria [23, 51, 63–65, 92], en la cual se ha buscado tener una estructura nuclear que permita llegar a un tiempo de vida media que se acerque al experimental, el cual fue medido de manera precisa. Estos trabajos previos encuentran problemas con la descripción de la función de onda del Polonio-212 ya sea por prescindir de la interacción protón-neutrón, como dejar de lado la contribución del continuo no resonante, necesario para la completitud de la base. Es por eso que, a continuación realizaremos paso a paso la construcción de nuestro formalismo del modelo de capas introducido en la sección 2.1, con el objetivo principal de mejorar los resultados teóricos hasta ahora obtenidos con el modelo de capas. Además, durante el camino de la construcción se destacarán características estructurales de esta familia de núcleos, cumpliendo ciertos objetivos secundarios de nuestro trabajo.

Los apéndices F y G cuentan con información complementaria a este capítulo y serán citados durante las distintas secciones.

### 3.1. Estados de partícula simple sobre el carozo Plomo-208

A nivel estructura, el Polonio-212 ( $^{212}\text{Po}$ ) es pensado como dos neutrones y dos protones sobre el carozo doblemente mágico Plomo-208 ( $^{208}\text{Pb}$ ), el cual consta de 126 neutrones y 82 protones. Es por esto que en primer lugar debemos construir los estados ocupados por un neutrón y un protón sobre el  $^{208}\text{Pb}$ . Para ello, buscaremos describir los estados de los núcleos Plomo-209 ( $^{209}\text{Pb} = n + ^{208}\text{Pb}$ ) y Bismuto-209 ( $^{209}\text{Bi} = p + ^{208}\text{Pb}$ ), utilizando el potencial central descrito en la sección 2.1.

Como la idea de los modelos microscópicos es que dependan de la menor cantidad de parámetros ajustables, fijamos el radio reducido  $r_0$  a partir del radio cuadrático medio experimental  $r_\tau = \sqrt{3/5}R_\tau$  ( $\tau = \{n, p\}$ ), con  $R = r_0A^{1/3}$  el radio de los potenciales de Woods-Saxon (2.6) y Espín-Órbita (2.9): de la Ref. [111], el radio cuadrático medio experimental del neutrón es  $r_n = 5.860$  fm, el cual coincide con las Refs. [57, 65], mientras que de la Ref. [112], el radio cuadrático medio experimental del protón es  $r_p = 5.444$  fm. Con ellos, construimos el radio reducido  $r_0^\tau = r_\tau/A^{1/3}\sqrt{3/5}$  que será nuestra forma de presentar resultados, obteniendo:  $r_0^n = 1.277$  fm y  $r_0^p = 1.186$  fm.

En la Tabla 3.1 se presentan los estados de protones y neutrones experimentales [1, 113] y aquellos calculados utilizando el código GAMOW [105] con los parámetros de la Tabla 3.2. En particular,  $V_0$ ,  $V_{SO}$  y  $a$  fueron optimizados con el algoritmo de *Levenberg-Marquardt* [114, 115] de manera que se reproduzcan las energías de los tres primeros estados de los núcleos estudiados. Observamos que los errores relativos de la Tabla 3.1 son mínimos para los estados fundamentales y crecen para los excitados. En particular, notemos que para los 3 estados optimizados de cada núcleo (excepto el  $1f_{7/2}$  de protones) se tiene  $\delta_{\text{rel}} < 8\%$ .

Tabla 3.1: Energías experimentales [1, 113] para neutrones y protones (en MeV) en el carozo  $^{208}\text{Pb}$ . Las energías calculadas se obtuvieron a partir de los parámetros de la Tabla 3.2.  $\delta_{\text{rel}}$  es el error relativo porcentual respecto a los valores experimentales.

$^{209}\text{Pb}$				$^{209}\text{Bi}$			
Estado	$\varepsilon_{\text{exp}}$	$\varepsilon_n$	$\delta_{\text{rel}}(\%)$	Estado	$\varepsilon_{\text{exp}}$	$\varepsilon_p$	$\delta_{\text{rel}}(\%)$
$1g_{9/2}$	-3.937	-3.960	1	$0h_{9/2}$	-3.799	-3.793	0
$0i_{11/2}$	-3.154	-3.129	1	$1f_{7/2}$	-2.827	-3.310	17
$0j_{15/2}$	-2.507	-2.336	7	$0i_{13/2}$	-2.065	-1.924	7
$2d_{5/2}$	-2.370	-1.939	18	$1f_{5/2}$	-0.746	-0.216	71
$3s_{1/2}$	-1.904	-1.261	34	$2p_{3/2}$	-0.676	-0.322	52
$1g_{7/2}$	-1.446	-0.698	52				
$2d_{3/2}$	-1.400	-0.606	57				

Ampliando el espacio de las funciones de onda calculadas, y siguiendo el diagrama del modelo de capas, podemos ver en la Tabla 3.3 las energías para diferentes números cuánticos  $nlj$ . Notemos que aparecen las primeras resonancias, caracterizadas por parte real positiva y parte imaginaria negativa. Para

Tabla 3.2: Parámetros para Woods-Saxon y Espín-Órbita para  $^{209}\text{Pb} = ^{208}\text{Pb} + n$  y  $^{209}\text{Bi} = ^{208}\text{Pb} + p$  optimizados mediante el algoritmo de *Levenberg-Marquardt* [114, 115] a los tres primeros estados de la Tabla 3.1. Además, el radio de Coulomb es el mismo que el Woods-Saxon y su difusividad es tomada cero. Errores entre paréntesis.

$\tau$	$V_0$ (MeV)	$V_{\text{SO}}$ (MeV fm)	$a$ (fm)	$r_0$ (fm)
$n$	43.936(0.6)	16.798(3)	0.652(0.1)	1.277
$p$	65.785(1)	19.147(4)	0.708(0.1)	1.186

restringir las representaciones de partícula simple a utilizar, incorporaremos a nuestra base solo aquellas resonancias cuya parte imaginaria no supere los 100 keV.

Los estados de dispersión que componen la base de partícula simple son definidos de la siguiente manera: en primer lugar, vamos a definir 6 estados de dispersión discretizados en el segmento  $[0, 12]$  MeV puramente reales con  $l = 0$  y  $l = 1$ , por la importancia de estos sobre la función de onda de dos cuerpos [81, 82]. En segundo lugar, para las resonancias  $2f_{7/2}$ ,  $1h_{9/2}$  y  $1h_{9/2}$  de neutrones y  $2f_{7/2}$  de protones, definimos contornos puramente reales discretizados con  $N_c = 4$ , con mayor densidad en las cercanías de la parte real de la energía (recordemos que estas resonancias no se incluyen en la base como polo pues su  $\Im m > 100$  keV). Finalmente, tomamos contornos del estilo de la Figura 2.2 para las resonancias cuya parte imaginaria cumpla la condición  $\Im m < 100$  keV), los cuales discretizaremos en cantidades independientes  $N_c \equiv N_{nlj}$  utilizando el método de cuadratura de Gauss-Legendre. Este número  $N_{nlj}$  es fijado de manera que la parte imaginaria del estado fundamental de los núcleos  $^{210}\text{Pb}$  y  $^{210}\text{Po}$  sea por lo menos cinco ordenes de magnitud menor que la parte real. Para estos núcleos en particular, es necesario incluir 44 y 60 estados de dispersión de neutrones y protones, respectivamente, para poder cumplir esta condición.

De esta manera, las representaciones de partícula simple que quedarán definidas para este núcleo se encuentran en la Tabla 3.4. La representación de Polo (RP) de neutrones es más grande que la utilizada en la referencia [65], ya que incorpora 2 nuevas resonancias con  $l = 8, 9$ . Respecto a RP de protones, pese a que tenemos la misma cantidad de estados que en la referencia [65], incorporamos al estado  $0k_{17/2}$ , el cual es importante en la construcción del núcleo. Respecto a las Ref. [23, 51, 92], presentamos representaciones mucho más grandes, mientras que respecto a la Ref. [64], tenemos una representación mayor para protones (16 contra 14) y menor para neutrones (11 en lugar de 13). La mejora de nuestro trabajo actual respecto a todos los previos es la inclusión del continuo no resonante, que nos lleva a tener 60 y 71 estados de partícula simple para neutrones y protones, respectivamente.

### 3.2. Estados de dos partículas sobre el carozo Plomo-208

Aquí presentamos las optimizaciones y los niveles de energía calculados para los tres nucleos con un par de nucleones sobre el carozo  $^{208}\text{Pb}$ : Plomo-210 ( $^{210}\text{Pb} = nn + ^{208}\text{Pb}$ ), Polonio-210 ( $^{210}\text{Po} = pp + ^{208}\text{Pb}$ ) y Bismuto-210 ( $^{210}\text{Bi} = pn + ^{208}\text{Pb}$ ). Como rango  $\beta$  de la interacción Gaussiana (2.40) tomamos los datos de las publicaciones de Glendenning y Harada [23], y de Kim y Rasmussen [116]. Además realizamos una comparación tanto de las intensidades de los potenciales como de las energías

Tabla 3.3: Energías de todos los niveles de partículas simple calculados utilizando el código GAMOW [105] con los parámetros de la Tabla 3.2.

Estado	$\varepsilon_n$ (MeV)	Estado	$\varepsilon_p$ (MeV)
$1g_{9/2}$	-3.960	$0h_{9/2}$	-3.793
$0i_{11/2}$	-3.129	$1f_{7/2}$	-3.310
$0j_{15/2}$	-2.336	$0i_{13/2}$	-1.924
$2d_{5/2}$	-1.939	$1f_{5/2}$	-0.322
$3s_{1/2}$	-1.261	$2p_{3/2}$	-0.216
$1g_{7/2}$	-0.698	$2p_{1/2}$	0.892
$2d_{3/2}$	-0.606	$1g_{9/2}$	$4.350 - i5 \times 10^{-8}$
$2f_{7/2}$	$2.280 - i1.030$	$0i_{11/2}$	$5.511 - i1 \times 10^{-8}$
$1h_{11/2}$	$2.288 - i0.026$	$0j_{15/2}$	$5.913 - i8 \times 10^{-9}$
$0k_{17/2}$	$4.541 - i0.538 \times 10^{-3}$	$2d_{5/2}$	$7.222 - i3.885 \times 10^{-3}$
$0j_{13/2}$	$5.122 - i6.029 \times 10^{-3}$	$3s_{1/2}$	$8.342 - i0.062$
$1h_{9/2}$	$5.622 - i0.762$	$1g_{7/2}$	$8.525 - i1.514 \times 10^{-3}$
$1i_{13/2}$	$7.828 - i1.032$	$2d_{3/2}$	$9.043 - i0.046$
$0l_{19/2}$	$11.549 - i0.065$	$1h_{11/2}$	$11.812 - i0.027$
$0k_{15/2}$	$13.549 - i0.344$	$2f_{7/2}$	$13.298 - i0.782$
$0m_{21/2}$	$18.682 - i0.408$	$0k_{17/2}$	$14.077 - i0.690 \times 10^{-3}$
		$0j_{13/2}$	$15.302 - i4.750 \times 10^{-3}$
		$1h_{9/2}$	$16.554 - i0.448$
		$1i_{13/2}$	$18.694 - i0.625$

obtenidas.

Analicemos a continuación los resultados para cada núcleo. Para este caso, el carozo no solo presenta la relación  $N > Z$ , sino que los neutrones de valencia se ubican en una capa superior a los protones de valencia. Además, las referencias y comparaciones bibliográficas de este caso son abundantes, siendo las Ref. [23, 65, 116] las principales fuentes de comparación.

En primer lugar, estudiamos al núcleo  $^{210}\text{Pb}$ , pensado como dos neutrones sobre el carozo. Para este, el rango de la interacción gaussiana (2.40) es tomado de la Ref. [23]:  $\beta_{\text{se}} = 1.9$  fm. Esta referencia solo activó la parte singlete-par del potencial (2.36), dejando la parte triplete-impar desactivada. Gracias a un análisis realizado en el apéndice G, sabemos que para mejorar la descripción de los estados es necesario activar el canal triplete-impar, lo cual realizamos en este trabajo.

Entonces, debemos construir los elementos de matriz (2.62) para cada estado  $J_n^\pi$  de dos neutrones que calcularemos. Para ello, realizamos una optimización de las intensidades de la interacción gaussiana con el algoritmo de *Levenberg-Marquardt* [114, 115] buscando que se reproduzcan las energías experimentales de los cuatro primeros estados ligados del  $^{210}\text{Pb}$  presentes en la Tabla 3.6. Las energías calculadas se obtiene al diagonalizar cada matriz que fue construida para distintos estados  $J_n^\pi$  de dos neutrones. Entonces, presentamos en la Tabla 3.5 las intensidades obtenidas en las representaciones RL, RP y RC. Allí también vemos que a medida que aumenta nuestra representación, las intensidades tienden

Tabla 3.4: Representación ligada (RL), de polo (RP) y completa (RC) de los estados de partícula simple. Estados ligados y resonancias se nombran como  $nl_j$ , los estados de dispersión quedan  $cl_j$ . Los estados ligados y aquellos de dispersión puramente reales están en negro, mientras que las resonancias y los estados de dispersión con energía compleja están en azul.

Repr.	Estados de neutrones	Estados de protones
RL	$1g_{9/2}, 0i_{11/2}, 0j_{15/2}, 2d_{5/2}$ $3s_{1/2}, 1g_{7/2}, 2d_{3/2}$	$0h_{9/2}, 1f_{7/2}, 0i_{13/2}, 1f_{5/2}$ $2p_{3/2}$
RP	RL + $1h_{11/2}, 0k_{17/2}, 0j_{13/2}, 0l_{19/2}$	RL + $2p_{1/2}, 1g_{9/2}, 0i_{11/2}, 0j_{15/2}$ $2d_{5/2}, 3s_{1/2}, 1g_{7/2}, 2d_{3/2}$ $1h_{11/2}, 0k_{17/2}, 0j_{13/2}$
RC	RP + $ch_{11/2}, ck_{17/2}, cj_{13/2}, cl_{19/2}$ $cs_{1/2}, cp_{1/2}, cp_{3/2}$ $cf_{7/2}, ch_{9/2}$	RP + $cp_{1/2}, cg_{9/2}, ci_{11/2}, cj_{15/2}$ $cd_{5/2}, cs_{1/2}, cg_{7/2}, cd_{3/2}$ $ch_{11/2}, ck_{17/2}, cj_{13/2}$ $cp_{3/2}, cf_{7/2}$

a disminuir, efecto causado únicamente por el tamaño de las bases de partícula simple. Además, el ajuste a los estados excitados (excepto al  $2^+$ ) mejora los valores obtenidos por la Ref. [23]. En la Figura 3.2 podemos confirmar de manera visual estas afirmaciones, a la vez que mostramos los resultados experimentales comparados con los de la Ref. [23] y los nuestros utilizando la representación RC.

Tabla 3.5: Intensidades (en MeV) de los potenciales para el caso de dos neutrones utilizados en las tres bases. Además, se presenta la intensidad que utiliza la Ref. [23]. Las intensidades fueron optimizadas con el algoritmo *Levenberg-Marquardt* [114, 115] a los cuatro primeros estados pares del  $^{210}\text{Pb}$  presentes en la Tabla 3.6. Los rangos de la interacción gaussiana fueron  $\beta_{se} = 1.9$  fm y  $\beta_{to} = 2.92$  fm.

	Ref. [23]	RL	RP	RC
$V_{se}$	-36.07	-40.677	-37.717	-36.558
$V_{to}$	-	5.564	4.580	4.490

Veamos ahora los resultados del núcleo  $^{210}\text{Po}$ , en este caso dos protones sobre el carozo. También para éste, tomamos el rango de la interacción gaussiana de la Ref. [23]:  $\beta_{se} = 1.4$  fm y  $\beta_{to} = 2.15$  fm. Notemos que en esta Ref., la parte triplete-impar solo se activa para el estado  $J = 0^+$  buscando simular el efecto de una fuerza tensorial, pero nosotros, tal cual realizamos en el  $^{210}\text{Pb}$ , la activamos para todos los  $J$  calculados esperando mejores ajustes a los valores experimentales de energía.

Entonces, volvemos a construir los elementos de matriz (2.62), ahora sumada la interacción de Coulomb (2.71), para cada estados  $J_p^\pi$  de dos protones, donde nuevamente las intensidades son optimizadas con el algoritmo de *Levenberg-Marquardt* [114, 115] para describir las energías experimentales de los cinco primeros estados pares del  $^{210}\text{Po}$  presentes en la Tabla 3.8. En la Tabla 3.7 se presentan estas

Tabla 3.6: Energías (en MeV) experimentales [1] y calculadas utilizando los parámetros de la Tabla 3.5 relativas al carozo inerte  $^{208}\text{Pb}$ , como resultado de la optimización de las intensidades de los potenciales. Se presentan los resultados para cada una de las representaciones utilizadas.

$J^\pi$	Exp.	Ref. [23]	RL	RP	RC
$0^+$	-9.122	-9.12	-9.129	$-9.129 + i0.006$	-9.128
$2^+$	-8.323	-8.31	-8.268	$-8.261 + i0.001$	-8.262
$4^+$	-8.025	-8.08	-8.040	-8.043	-8.042
$6^+$	-7.928	-7.99	-7.970	-7.975	-7.975
$8^+$	-7.845	-	-7.936	-7.941	-7.941

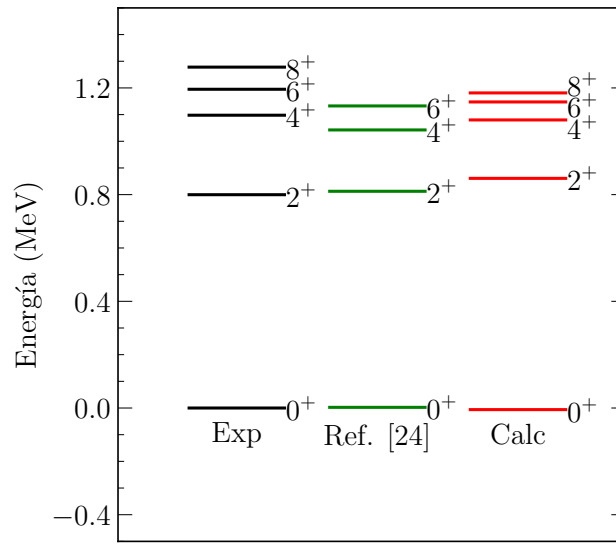


Figura 3.2: Niveles de energía del núcleo  $^{210}\text{Pb}$  experimentales, de la Ref. [23] y calculadas con la representación completa. Los potenciales fueron optimizados utilizando los cuatro primeros estados pares.

intensidades, para cada una de las representaciones estudiadas. Al igual que el caso anterior, no existen discrepancias significativas respecto a los valores obtenidos por la Ref. [23], y también se observa una disminución de la intensidad a medida que aumenta la representación. Así, en la Tabla 3.8 presentamos los resultados obtenidos utilizando esta interacción, donde podemos apreciar que las tres representaciones de partícula simple generan energías similares, y RC corrige la parte imaginaria de RP. Además, en la Figura 3.3 se encuentran los resultados en la base completa comparados con los experimentales y los de la Ref. [23]. Se observa un comportamiento similar al obtenido en el núcleo  $^{210}\text{Pb}$ , pues perdemos precisión en el estado  $2^+$  pero ganamos en los demás estados excitados.

Finalmente, analizaremos los resultados para el núcleo  $^{210}\text{Bi}$ , el cual posee un neutrón y un protón encima del carozo. Para este caso, la Ref. [23] utiliza los potenciales  $V_{se}$  y  $V_{te}$  con rangos  $\beta_{se} = 1.58$  fm y  $\beta_{te} = 1.30$  fm. En nuestro estudio, observamos que la inclusión del potencial  $V_{se}$  no disminuía los

Tabla 3.7: Intensidades (en MeV) de los potenciales para el caso de dos protones utilizadas en las tres bases. Además, se presenta la intensidad que utiliza la Ref. [23]. Las intensidades fueron optimizadas con el algoritmo *Levenberg-Marquardt* [114, 115] a los cinco primeros estados pares del núcleo  $^{210}\text{Po}$  presentes en la Tabla 3.8. Los rangos de la interacción gaussiana fueron  $\beta_{se} = 1.4$  fm y  $\beta_{to} = 2.15$  fm.

	Ref. [23]	RL	RP	RC
$V_{se}$	-64.54	-59.274	-52.010	-51.742
$V_{to}$	12.84	14.421	14.562	14.547

Tabla 3.8: Energías (en MeV) experimentales [1] y calculadas utilizando los parámetros de la Tabla 3.7 relativas al carozo inerte  $^{208}\text{Pb}$ , como resultado de la optimización de las intensidades de los potenciales. Se presentan los resultados para cada una de las bases utilizadas.

$J^\pi$	Exp.	Ref. [23]	RL	RP	RC
$0^+$	-8.782	-8.78	-8.795	$-8.795 + i0.002$	-8.795
$2^+$	-7.601	-7.60	-7.530	$-7.530 + i0.001$	-7.530
$4^+$	-7.356	-7.41	-7.385	-7.386	-7.386
$6^+$	-7.299	-7.34	-7.330	-7.325	-7.325
$8^+$	-7.226	-	-7.252	-7.256	-7.256

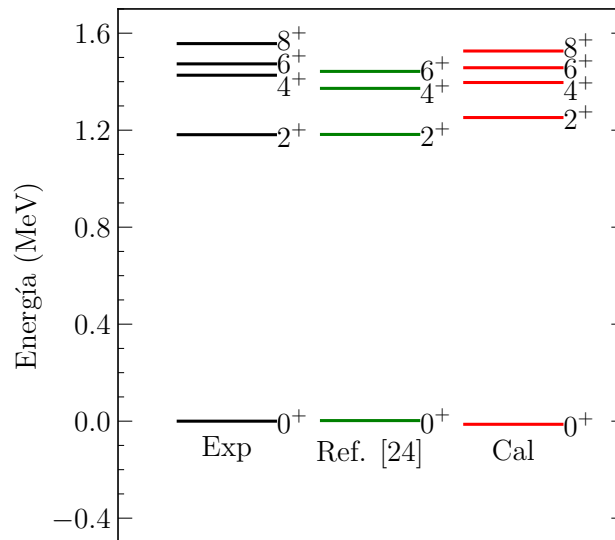


Figura 3.3: Niveles de energía del núcleo  $^{210}\text{Po}$  experimentales, de la Ref. [23] y calculadas con la representación completa. Los potenciales fueron optimizados utilizando los cinco primeros estados pares.

residuos de las energías calculadas, a la vez que las intensidades tenían valores más arbitrarios que se alejaban de los presentados en la Ref. [23]. Es por ello que, tal cual se muestra en la Tabla 3.9, para las tres bases solo optimizamos el canal triplete-par de manera que se describan las energías de los primeros

tres estados pares (excepto el  $0^+$ ) y primeros cinco estados impares del núcleo  $^{210}\text{Bi}$  presentes en la Tabla 3.10. Al ser este núcleo del tipo protón-neutrón, los elementos de matriz construidos son los de la ecuación (2.63).

Cuando comparamos en la Tabla 3.10 con las energías experimentales y calculadas en la Ref. [23] observamos que, pese a no incluir el canal singlete-par de la interacción, logramos reproducir los valores experimentales con gran precisión, como se aprecia también en los promedios de los residuos al cuadrado presentes en la Tabla 3.9. Además, al igual que lo presente en la citada referencia, al no incluir la fuerza tensorial entre el par protón-neutrón, no se reproduce la inversión de los estados  $0^-$  y  $1^-$ . Esto lo observamos en la Figura 3.4 para RC. Por otro lado, logramos un mejor ajuste a los estados impares excitados, incluso siendo capaces de describir la “degeneración” que se observa entre los estados  $5^-$  y  $7^-$ .

Tabla 3.9: Intensidad (en MeV) del potencial triplete-par con rango  $\beta_{te} = 1.3$  fm para el caso de un neutrón y un protón utilizadas en las tres bases. Además, se presenta la intensidad que utiliza la Ref. [23], que suma también la parte singlete-par con parámetros  $V_{se} = -43.07$  MeV y  $\beta_{te} = 1.58$  fm. Las intensidades fueron optimizadas con el algoritmo *Levenberg-Marquardt* [114, 115] a los primeros tres estados pares (excepto el  $0^+$ ) y cinco estados impares del núcleo  $^{210}\text{Bi}$  presentes en la Tabla 3.10.

	Ref. [23]	RL	RP	RC
$V_{te}$	-96.05	-97.776	-92.071	-89.569

Tabla 3.10: Energías (en MeV) experimentales [1] y calculadas relativas al carozo inerte  $^{208}\text{Pb}$ , como resultado de la optimización de las intensidades de los potenciales. Se presentan los resultados para cada una de las representaciones utilizadas.

$J^\pi$	Exp.	Ref. [23]	RL	RP	RC
$1^-$	-8.404	-8.37	-8.370	$-8.371 + i0.001$	-8.370
$0^-$	-8.367	-8.64	-8.748	$-8.762 + i0.003$	-8.757
$9^-$	-8.132	-8.17	-8.144	-8.143	-8.138
$2^-$	-8.084	-8.09	-8.120	$-8.120 + i0.001$	-8.115
$3^-$	-8.057	-7.98	-8.037	-8.034	-8.030
$7^-$	-7.968	-7.94	-7.969	-7.966	-7.963
$5^-$	-7.965	-7.91	-7.964	-7.965	-7.962
$4^-$	-7.901	-7.88	-7.949	-7.947	-7.944
$6^-$	-7.854	-7.82	-7.882	-7.881	-7.878
$8^-$	-7.821	-7.78	-7.982	-7.976	-7.969

Las diferencias respecto a la Ref. [23], la cual utilizó estados del oscilador armónico, provienen de utilizar estados de Woods-Saxon como los de partícula simple, así como también de utilizar representaciones significativamente más grandes.

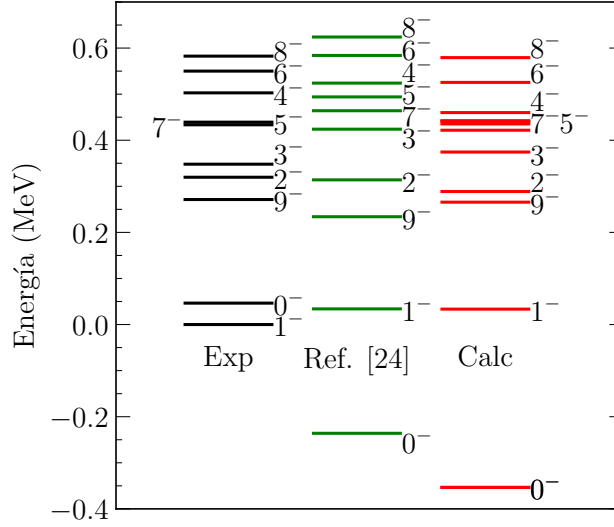


Figura 3.4: Niveles de energía del núcleo  $^{210}\text{Bi}$  experimentales, de la Ref. [23] y calculadas con la representación completa. Los potenciales fueron optimizados utilizando los primeros tres estados pares (excepto el  $0^+$ ) y cinco estados impares, cuyo promedio de los residuos al cuadrado es de  $4 \times 10^{-5}$ .

### 3.2.1. Formalismo de la configuración principal en los núcleos par-par en la representación completa

A continuación, vamos a implementar una forma de truncamiento de las bases para reducir las dimensiones del problema. Esto se basa en que pasamos de tener 222 y 253 estados en las bases de dos cuerpos (2.76-2.77) para las representaciones RL y RP respectivamente, a tener 354 en RC, lo cual incrementará enormemente el tamaño del sistema de cuatro cuerpos  $\mathcal{L}_{4B}$  (2.74) a calcular (de 1134 y 1437 para RL y RP, respectivamente, pasamos a 12926 en RC). Esto dificulta las posibles interpretaciones físicas que uno pueda hacer, pues se obtendrían inmensidad de estados de cuatro cuerpos, la mayoría sin contraparte experimental, y funciones de onda enormes que impedirían realizar un análisis de ellas.

Es por esto, como se mencionó en la sección 2.1.3.2, podemos recurrir a la aproximación de configuración principal (MC). A nivel de dos cuerpos esto nos permite simplificar los elementos de matriz de la siguiente manera:

$$\text{de } \langle \Psi_{ab}^{JM} | V | \Psi_{cd}^{JM} \rangle = 2N_{ab}N_{cd} \left[ 1 - (-)^{j_c + j_d - J} P_{cd} \right] \langle j_a j_b; JM | V | j_c j_d; JM \rangle \quad (3.1)$$

$$\text{pasamos a } \left\langle \begin{matrix} \Psi_{n_a n_b}^{JM} \\ l_a j_a \end{matrix} \middle| V \middle| \begin{matrix} \Psi_{n_c n_d}^{JM} \\ l_c j_c \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{2} \left[ 1 - (-)^{2j_c - J} P_{n_c n_d} \right] \langle j_a j_a; JM | V | j_c j_c; JM \rangle \quad (3.2)$$

con

$$\langle j_a j_a; JM | V | j_c j_c; JM \rangle \equiv \langle n_a l_a j_a n_b l_a j_a; JM | V | n_c l_c j_c n_d l_c j_c; JM \rangle \quad (3.3)$$

lo cual reducirá el tamaño del espacio de Hilbert. Esto implica también, que solo se crearán estados de dos cuerpos con  $J^\pi$  par. Recordemos que esta aproximación es efectiva siempre que trabajemos con núcleos pesados. Por otro lado, al permitir que los números cuánticos principales sean distintos  $n_a \neq n_b$ , se

conservan las correlaciones entre una resonancia y su estados de dispersión. Estas correlaciones, aunque bastante menor en importancia que la correlación resonancia-resonancia, pueden llegar a ser significativas [[81]].

En la Tabla 3.11 presentamos las nuevas intensidades del canal  $T = 1$  optimizadas para describir los mismos estados de la sección 3.2, donde también se mantuvieron los valores de  $\beta$  de la misma sección. Respecto a las Tablas 3.5 y 3.7, vemos que la principal diferencia se encuentra en los valores de la parte triplete-impar, cuyas intensidades se vieron disminuidas hasta en un 50 %. Este reajuste del canal triplete-par a causa de las nuevas bases, logra contrarrestar el efecto de la reducción del espacio de Hilbert en los estados fundamentales, pues vemos que sus energías se mantienen en las obtenidas en la sección anterior.

Tabla 3.11: Intensidades (en MeV) de los potenciales para el caso de dos neutrones y dos protones utilizados en la representación completa, con el formalismo de la configuración principal. Las intensidades fueron optimizadas con el algoritmo  $\chi^2$  [115] a los primeros estados pares de cada núcleo.

	$^{210}\text{Pb}$	$^{210}\text{Po}$
$V_{se}$	-35.717	-50.398
$V_{to}$	2.394	9.671

Utilizando estas nuevas intensidades, podemos calcular los niveles de energía, los cuales son presentados en la Tabla 3.12 y en la Figura 3.5 comparándolos con los de la sección previa. Vemos que las diferencias en todos los casos son menores a unas decenas de keV, lo cual se corresponde con los nuevos residuos obtenidos en la optimización. Notemos también, que la mayor de las discrepancias se da en los estados excitados, particularmente en el  $2^+$ , que ya era pobremente ajustado con los resultados de la sección previa. Estos niveles obtenidos en la representación completa con configuración principal (RC-MC) constituirán una de las bases a la hora de trabajar con cuatro cuerpos.

Tabla 3.12: Energías (en MeV) experimentales[1] y calculadas en el formalismo MC para la representación RC, relativas al carozo inerte  $^{208}\text{Pb}$  como resultado de la optimización de las intensidades de los potenciales. Se presentan los resultados en la representación completa.

$J^\pi$	$^{210}\text{Po}$		$^{210}\text{Pb}$	
	Exp.	RC-MC	Exp.	RC-MC
$0^+$	-8.782	-8.792	-9.122	-9.129
$2^+$	-7.601	-7.525	-8.323	-8.247
$4^+$	-7.356	-7.402	-8.025	-8.052
$6^+$	-7.299	-7.354	-7.928	-7.985
$8^+$	-7.226	-7.288	-7.845	-7.941

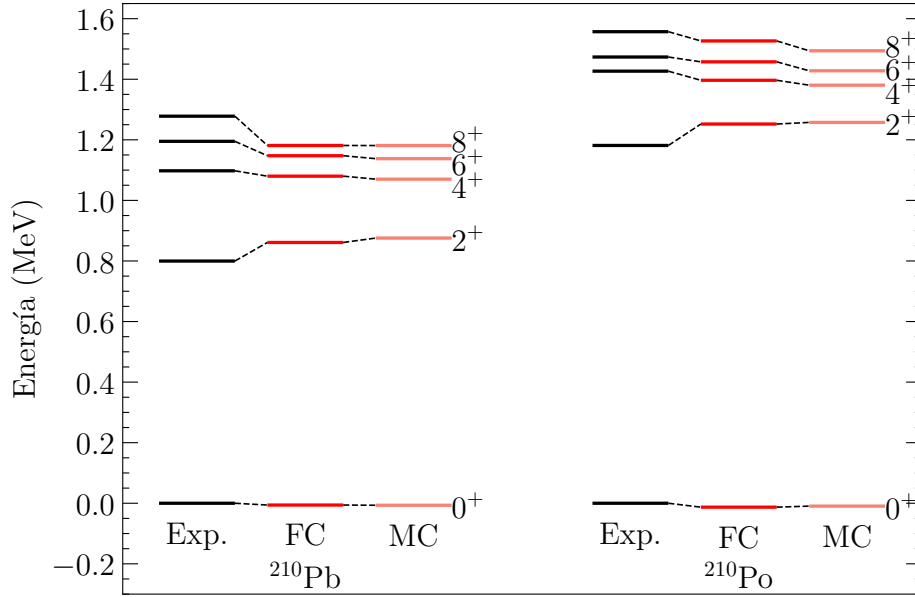


Figura 3.5: Niveles de energía de los núcleo  $^{210}\text{Pb}$  y  $^{210}\text{Po}$  experimentales, calculados con la representación completa utilizando el formalismo completo (FC) y con configuración principal (MC).

### 3.3. Estados del núcleo Polonio-212

A continuación presentaremos los resultados de la función de onda de cuatro cuerpos sobre el carozo  $^{208}\text{Pb}$  utilizando las bases correlacionadas con los estados construidos en la sección 3.2. En este caso, ajustamos la interacción protón-neutrón hasta describir el estado fundamental del  $^{212}\text{Po}$ , con energía  $E_{\text{gs}}(^{212}\text{Po}) = -19.341 \text{ MeV}$  [1] respecto al carozo. Este ajuste se realiza sobre el canal  $T = 0$  ( $V_{\text{te}}$ ) de la interacción  $V_{pn}$  utilizando el algoritmo de mínimos cuadrados de la librería `SCIPY` de `PYTHON`<sup>1</sup>, de manera que la energía calculada se corresponda con la experimental en las cifras presentadas.

Trabajamos en una primera instancia con las representaciones RL y RP. Para cada una de estas, vamos a resolver la ecuación de Schrödinger (2.81), donde vamos a establecer una constante  $\chi$  de proporcionalidad a la interacción  $V_{\text{te}}$  protón-neutrón de la Tabla 3.9 de manera que se corrijan los elementos de matriz (2.82) y así obtener una energía  $E^{JM}$  en el estado de cuatro cuerpos de  $-19.341 \text{ MeV}$ . Entonces, las constantes para las representaciones RL y RP resultan:  $\chi_{\text{RL}} = 1.1310$  y  $\chi_{\text{RP}} = 1.1972$ , a través de las cuales se obtienen las intensidades de la Tabla 3.13.

Tabla 3.13: Intensidades (en MeV) de la interacción protón-neutrón que reproducen la energía del estado fundamental del núcleo  $^{212}\text{Po}$  para las dos primeras representaciones. Las intensidades son proporcionales en  $\chi_{\text{RL}} = 1.1310$  y  $\chi_{\text{RP}} = 1.1972$  a las de la Tabla 3.9.

	RL	RP
$te$	-110.585	-110.227

<sup>1</sup>[https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.least\\_squares.html](https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.least_squares.html)

Observamos que las intensidades son prácticamente iguales, ya que la dispersión entre ellas es de unas centenas de keV. En este núcleo en particular, la interacción  $V_{pn}$  representa aproximadamente 200 keV.

Ahora compararemos las funciones de onda y las energías de los cuatro primeros estados  $0^+$ . Recordemos que para caracterizar un estado de cuatro cuerpos podemos utilizar su energía, su número cuántico  $J$  y sus amplitudes parciales  $Z_{J\pi}^2$  definidas en la ecuación (2.93). Entonces, en la Tabla 3.14 presentamos estos resultados.

Tabla 3.14: Energías (en MeV) y cuadrado de las amplitudes parciales de onda de cuatro cuerpos (2.93) de los cuatro primeros estados  $0^+$  del  $^{212}\text{Po}$  obtenidos en las dos primeras representaciones. El resto de las amplitudes se encuentran localizadas en los estados de dos cuerpos no mencionados (aquellos con  $J$  impar o  $J > 8$ ), pero en general estas representan menos del 1 % del total.

Rep	$Z_{J\pi}^2$	$E_{0_1^+}$	$E_{0_2^+}$	$E_{0_3^+}$	$E_{0_4^+}$
		-19.341	-18.432	-18.025	-17.495
RL	$Z_{0^+}^2$	0.850	0.715	0.545	0.367
	$Z_{2^+}^2$	0.096	0.211	0.202	0.153
	$Z_{4^+}^2$	0.029	0.049	0.108	0.116
	$Z_{6^+}^2$	0.013	0.014	0.080	0.159
	$Z_{8^+}^2$	0.009	0.007	0.058	0.202
	$\sum_J Z_J^2$	0.997	0.996	0.993	0.997
		(-19.341, 0.012)	(-18.434, 0.009)	(-17.960, 0.006)	(-17.448, 0.004)
RP	$Z_{0^+}^2$	(0.851, 0.000)	(0.716, -0.001)	(0.497, 0.001)	(0.406, -0.002)
	$Z_{2^+}^2$	(0.097, 0.001)	(0.207, 0.001)	(0.211, 0.002)	(0.144, -0.003)
	$Z_{4^+}^2$	(0.028, 0.000)	(0.050, 0.000)	(0.121, 0.002)	(0.103, -0.002)
	$Z_{6^+}^2$	(0.012, 0.000)	(0.015, 0.000)	(0.093, 0.002)	(0.147, -0.002)
	$Z_{8^+}^2$	(0.008, 0.000)	(0.009, 0.000)	(0.070, 0.002)	(0.197, -0.002)
	$\sum_J Z_J^2$	(0.996, 0.001)	(0.997, 0.000)	(0.992, 0.009)	(0.997, -0.011)

Los cálculos realizados a este punto en las representaciones ligada y de polo implicaron trabajar con dimensiones en la base de cuatro cuerpos  $\mathcal{L}_{4B}$  del orden de 1000. Desde un punto de vista computacional, si este problema se trabaja de manera secuencial (en un único núcleo del procesador) se tienen tiempos de cálculo que incluso exceden la semana. Es por ello que, para poder disminuir los tiempos de cálculo, fue necesario realizar un estudio profundo del funcionamiento del código computacional que era utilizado con este fin. En el apéndice F se presenta la optimización detallada que debió realizarse para trabajar con los sistemas de cuatro cuerpos de esta tesis, con pruebas realizadas sobre representaciones de “juguete”. Con estos códigos mejoras, los tiempos reales de cálculo en las representaciones ligada y de polo se disminuyeron al orden de minutos.

Volviendo a las dimensiones del problema, en la Tabla 3.15 se presenta un resumen de los tamaños de las bases de dos (2.76-2.77) y cuatro (2.74) cuerpos en cada una de las representaciones utilizadas

hasta este punto. La dimensión de la representación completa RC lleva a tiempos de cálculo vuelven a ser del orden de la semana, pese a que estamos trabajando con un código computacional optimizado en los clúster disponibles [27, 28]. Es por esto que para la representación completa de partícula simple es necesario realizar alguna aproximación que nos permita reducir el espacio de Hilbert. A continuación, presentamos dos aproximaciones que nos permitirán trabajar con espacios de Hilbert manejables a nivel computacional.

Tabla 3.15: Dimensiones de las bases de dos (2.76-2.77) y cuatro (2.74) cuerpos de cada representación de partícula simple introducida hasta ahora.

	RL	RP	RC
$N_p + N_n$	222	253	354
$N_{4B}$	1134	1437	12926

### 3.3.1. Aproximación truncando el espacio de Hilbert

Los resultados de la sección anterior fueron obtenidos partiendo del hecho de que las bases de dos cuerpos (2.76-2.77) incluían a todos los estados correlacionados  $nn$  y  $pp$  ligados posibles, los cuales son mostrados en la Fig. 3.6.

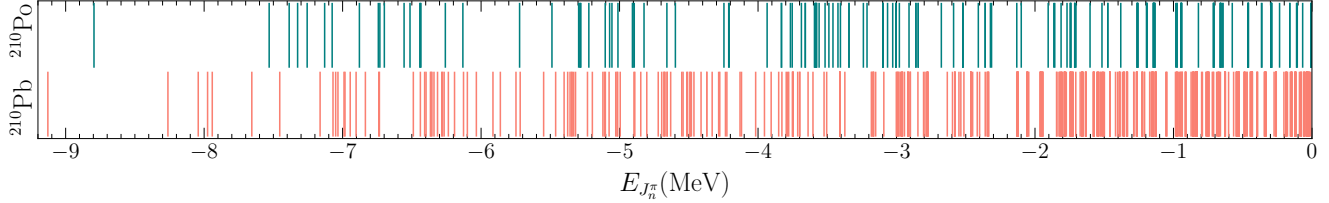


Figura 3.6: Energías de los estados ligados de los núcleos  $^{210}\text{Pb}$  y  $^{210}\text{Po}$  calculados utilizando la representación completa. El número cuántico  $J^\pi$  de cada línea no está explícito para mantener la figura simple.

A fin de determinar si es necesario la incorporación de todos estos estados, y visto y considerando que el tamaño del problema al pasar a la representación completa aumenta en más de un orden de magnitud (ver Tabla 3.15), se realiza un análisis de las energías y funciones de onda para saber hasta que punto podemos disminuir la cantidad de estados utilizados en las bases de dos cuerpos. Éste estudio realizado en la representación RP es presentado en la Tabla 3.16, en la cual mostramos el porcentaje de la amplitud total de la función de onda que es perdida respecto a aquella de la Tabla 3.14 al truncar el espacio de Hilbert de dos cuerpos. Los truncamientos del espacio son llevados a cabo de la siguiente manera (EHT: espacio de Hilbert truncado):

- EHT<sup>(I)</sup>: Se limitan los espacios de manera que las bases de dos cuerpos no contengan aquellos estados con paridad negativa. Esto es equivalente a incorporar todos los estados dentro de los primeros 5 MeV de excitación en ambas bases.

- EHT<sup>(II)</sup>: Se limitan los espacios de forma que la base de dos cuerpos contenga los primeros y segundos estados con  $J$  par y  $\pi$  positivo. Esto es equivalente a incorporar todos los estados dentro de los primeros 2 MeV de excitación.

Tabla 3.16: Porcentaje (wf %) de la amplitud total de la función de onda de los estados  $0^+$  del  $^{212}\text{Po}$  en la representación de polo perdida al truncar el espacio de Hilbert. Además, se explicita la variación absoluta de la energía  $\Delta E$  (en keV).

Espacio		$0_1^+$	$0_2^+$	$0_3^+$	$0_4^+$
EHT <sup>(I)</sup>	wf %	2.1 %	6.7 %	1.8 %	2.1 %
	$\Delta E$	0	117	57	36
EHT <sup>(II)</sup>	wf %	2.4 %	7.9 %	4.5 %	3.5 %
	$\Delta E$	0	136	8	14

Como nuestro principal interés es el estado fundamental del  $^{212}\text{Po}$ , y necesitamos a su vez incorporar la mayor cantidad que nos sea posible de estados del continuo no resonante en la función de onda, el estudio con la representación completa se llevará a cabo con el espacio EHT<sup>(I)</sup>, pasando entonces a un problema donde las dimensiones de las bases de dos cuerpos son  $N_p = N_n = 16$ , y una base de cuatro cuerpos de dimensión  $N_{4B} = 32$ . Los resultados utilizando este espacio de Hilbert truncado son presentados en la Tabla 3.17. La principal diferencia con los resultados de la Tabla 3.14 es que los estados de cuatro cuerpos se localizan más en las amplitudes presentadas (observar que  $\sum_J Z_J^2 \sim 1$ ) a consecuencia de que el resto de  $J$  de la base de dos cuerpos fueron quitados al truncar la base. Respecto a la configuración de cada uno de los estados, tenemos que el fundamental se encuentra principalmente localizado en las amplitudes  $Z_{0^+}^2$ , al igual que el primer excitado. En cambio, los estados  $0_3^+$  y  $0_4^+$  presentan alguna distribución de su función de onda, donde cada onda parcial aporta por lo menos un  $\sim 10\%$ . Este es uno de los primeros acercamientos a la colectividad o clusterización de un estado, visto desde el punto de vista de su función de onda.

En un análisis detallado, vemos que en la Tabla 3.18 se discriminan las funciones de onda en función del tipo de estado de partícula simple que compone a la amplitud parcial. Así, B-B implica que las cuatro partículas ocupan estados ligados, B-R implica que por lo menos una ocupa una resonancias y el resto ligados, y P-C implica que por lo menos una ocupa un estado de dispersión. Allí observamos que la contribución de las interacciones entre estados ligados y aquellos de energía positiva llegan a representar poco más del 2%. Pese a que este es un valor que resulta pequeño, en las próximas secciones aplicadas al decaimiento alfa se verá el real impacto de la incorporación del continuo de energía. Si podemos concluir, que para este núcleo en particular a nivel función de onda, el aporte del continuo es insignificante, pero sí es capaz de afectar a las energías de los estados.

Tabla 3.17: Energías (en MeV) y suma de los cuadrados de las amplitudes parciales de cuatro cuerpos (2.93) de los cuatro primeros estados  $0^+$  del  $^{212}\text{Po}$  obtenidos con la representación completa RC a nivel partícula simple y con el espacio de Hilbert truncado EHT<sup>(I)</sup>.

$Z_{J\pi}^2$	$E_{0_1^+}$	$E_{0_2^+}$	$E_{0_3^+}$	$E_{0_4^+}$
	-19.341	-18.234	-18.024	-17.482
$Z_{0^+}^2$	0.857	0.754	0.477	0.416
$Z_{2^+}^2$	0.099	0.217	0.211	0.095
$Z_{4^+}^2$	0.026	0.013	0.124	0.082
$Z_{6^+}^2$	0.011	0.008	0.102	0.162
$Z_{8^+}^2$	0.007	0.006	0.085	0.245
$\sum_J Z_J^2$	1	0.998	0.999	1

Tabla 3.18: Suma de los cuadrados de las amplitudes parciales de cuatro cuerpos para los primeros cuatro estados  $0^+$  discriminadas en función de las configuraciones de partícula simple, como fue explicado en el texto. Las contribuciones de las amplitudes compuestas por estados de dispersión son del orden de  $10^{-6}$ .

$E_{0^+}$ (MeV)	-19.341			-18.234			-18.024			-17.482		
$Z_{J\pi}^2$	B-B	B-R	P-C	B-B	B-R	P-C	B-B	B-R	P-C	B-B	B-R	P-C
$0^+$	0.834	0.020	0.002	0.744	0.019	0	0.456	0.005	0.001	0.470	0.007	0.001
$2^+$	0.098	0.001	0	0.196	0.002	0	0.206	0.001	0	0.090	0.001	0
$4^+$	0.026	0	0	0.016	0.001	0	0.117	0.001	0	0.069	0	0
$6^+$	0.012	0	0	0.012	0	0	0.113	0	0	0.145	0	0
$8^+$	0.008	0	0	0.009	0	0	0.099	0	0	0.216	0.001	0
$\sum_J Z_J^2$	0.975	0.021	0.002	0.977	0.022	0	0.991	0.007	0.001	0.990	0.009	0.001

### 3.3.2. Aproximación de configuración principal

Otra forma de aproximar la función de onda para el cálculo en la representación completa de partícula simple, es utilizar el formalismo de configuración principal, que presentamos en el caso de dos cuerpos en la sección 3.2.1. Allí mencionamos que, para este núcleo pesado, tenemos la particularidad de que la representación completa tiene una gran cantidad de estados de partícula simple, por lo cual las dimensiones de las matrices a calcular y diagonalizar se vuelven inmanejables. Esto trae acarreado que los autovalores y autovectores de estas matrices que son interpretados como funciones de onda sean muy complejos.

Así, al incorporar únicamente la configuración principal, podemos reducir la dimensión de la base de cuatro cuerpos de 12926 a 119 configuraciones. En la Tabla 3.19 presentamos un comparativo de las

tres posibilidad de la representación completa. Allí notamos que utilizando la configuración principal, obtenemos una base un poco más grande y completa que si aplicamos el truncamiento de la sección anterior, y también, que las dos reducciones aplicadas disminuyen enormemente los tamaños de las bases.

Tabla 3.19: Dimensiones de las bases de dos (2.76-2.77) y cuatro (2.74) cuerpos de la representación completa RC de partícula simple con los dos truncamientos posibles: RC-CO: espacio de Hilbert truncado EHT<sup>(I)</sup>, RC-MC: disminución del espacio de Hilbert al forzar únicamente la configuración principal como correlación en la base de dos cuerpos.

	RC	RC-CO	RC-MC
$N_p + N_n$	354	32	52
$N_{4B}$	12926	32	119

En la Fig. 3.7 vemos como esto afecta a los niveles de energía de dos cuerpos, donde vemos una clara disminución en la cantidad de estados cuando comparamos con la Fig. 3.6 de la sección previa. En la Tabla 3.20 mostramos la pérdida energética (en keV) y porcentual de la función de onda de cada estado respecto al calculado con la representación RP en la sección 3.3. Allí vemos que, pese a que la variación de las funciones de onda no representa valores significativos, energeticamente los estados se encuentran más corridos que lo obtenido en la sección 3.3.1. Finalmente, en la Tabla 3.21 presentamos las energías obtenidas utilizando la representación completa RC con la configuración principal. Las mismas características que fueron observadas en la sección anterior respecto a las funciones de onda siguen siendo visibles en este caso. Lo que si podemos notar es que la distribución de las amplitudes tiende a ser un poco más equitativa en este caso, por lo que cuando en futuras secciones comparemos las cantidades de clusterización  $\mathcal{S}$ , esperamos confirme esta observación preliminar.

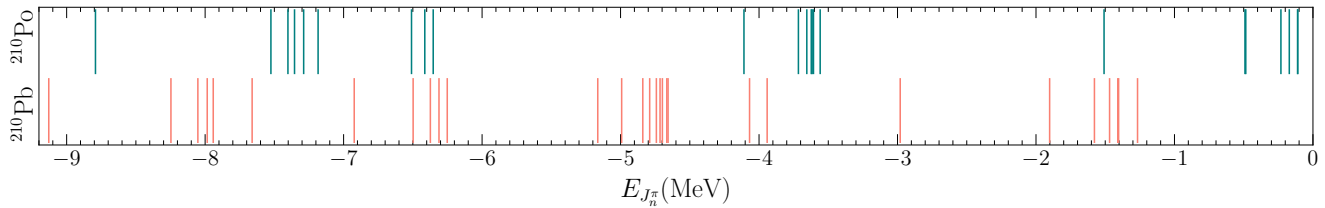


Figura 3.7: Energías de los estados ligados de los núcleos  $^{210}\text{Pb}$  y  $^{210}\text{Po}$  calculados utilizando la representación completa y *main-configuration*. El número cuántico  $J^\pi$  de cada línea no está explícito para mantener la figura simple.

En la Tabla 3.22 comparamos el aporte de diferentes configuraciones (B-B: solo estados ligados, B-R: estados ligados y resonancias, P-C: Polos y estados de dispersión) a la función de onda de los cuatro estados  $0^+$  calculados con el formalismo de configuración principal. De la misma manera que lo observado en la sección previa, el aporte de las configuraciones estado ligado más estado del continuo ronda el 2%.

En la Figura 3.8 compara estos resultados, con aquellos obtenidos en la sección 3.3.1 y los calculados con las representaciones Ligada y de Polo al principio de la sección. Esta Figura nos permite hacer

Tabla 3.20: Porcentaje (wf %) de la amplitud total de la función de onda de los estados  $0^+$  en la representación de polo perdida al truncar el espacio de Hilbert. Además, se explicita la variación absoluta de la energía  $\Delta E$  (en keV) respecto a la Tabla 3.14.

Estado	wf %	$\Delta E$
$0_1^+$	1.8 %	0
$0_2^+$	3.1 %	86
$0_3^+$	3.9 %	101
$0_4^+$	5.4 %	67

Tabla 3.21: Amplitudes de onda de cuatro cuerpos (2.93) de los cuatro primeros estados  $0^+$  del  $^{212}\text{Po}$  obtenidos con la representación completa aplicando *main-configuration*, y sus energías en MeV.

	$E_{0_1^+}$	$E_{0_2^+}$	$E_{0_3^+}$	$E_{0_4^+}$
$Z_{J\pi}^2$	-19.341	-18.507	-18.073	-17.522
$Z_{0^+}^2$	0.846	0.693	0.493	0.446
$Z_{2^+}^2$	0.100	0.226	0.207	0.120
$Z_{4^+}^2$	0.032	0.055	0.119	0.089
$Z_{6^+}^2$	0.014	0.017	0.097	0.144
$Z_{8^+}^2$	0.007	0.009	0.084	0.200
$\sum_J Z_J^2$	0.999	1	1	0.999

Tabla 3.22: Suma de los cuadrados de las amplitudes parciales de cuatro cuerpos para los primeros cuatro estados  $0^+$  discriminadas en función de las configuraciones de partícula simple, como fue explicado en el texto. Las contribuciones puramente del continuo no resonante son del orden de  $10^{-9}$ .

$E_{0^+}$ (MeV)	-19.341			-18.509			-18.074			-17.523		
$Z_{J\pi}^2$	B-B	B-R	P-C	B-B	B-R	P-C	B-B	B-R	P-C	B-B	B-R	P-C
$Z_{0^+}^2$	0.824	0.018	0.002	0.676	0.016	0	0.486	0.005	0.001	0.439	0.006	0
$Z_{2^+}^2$	0.100	0	0	0.225	0.001	0	0.207	0	0.001	0.119	0	0.001
$Z_{4^+}^2$	0.032	0	0	0.054	0	0	0.119	0	0	0.089	0	0
$Z_{6^+}^2$	0.014	0	0	0.017	0	0	0.097	0	0	0.144	0	0
$Z_{8^+}^2$	0.007	0	0	0.009	0	0	0.084	0	0	0.200	0	0
$\sum_J Z_J^2$	0.982	0.019	0.002	0.982	0.017	0	0.993	0.006	0.001	0.992	0.006	0.001

la siguiente comparación energética entre cada representación: como todas fueron ajustadas al estado fundamental, este es un nivel para el cual no hay problema de descripción, en cambio, los estados excitados se comportan diferente. Las dos primeras bases y aquella de RC con el espacio de Hilbert truncado, presentan un estado  $0_3^+$  que parece alejarse de su posible compañero experimental (de líneas

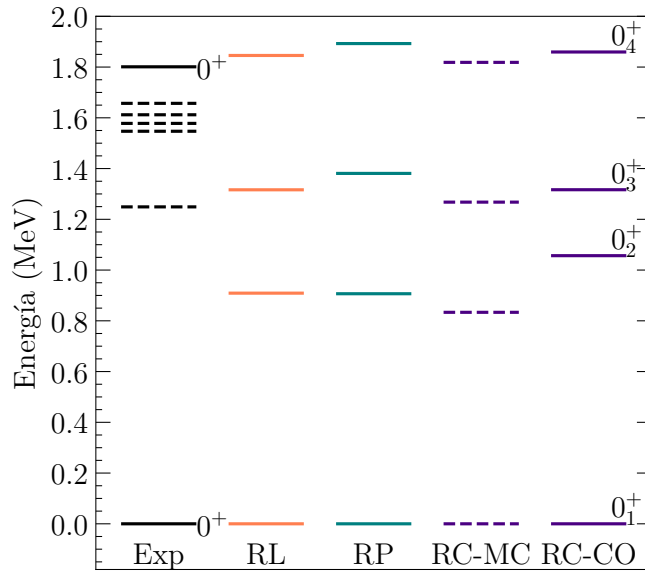


Figura 3.8: Comparación entre las energías experimentales [1] y calculadas en las tres representaciones de los primeros cuatro estados  $0^+$  del  $^{212}\text{Po}$ , utilizando dos formalismos (MC indica configuración principal y CO que el espacio de Hilbert fue truncado) diferentes para describir la representación Completa. En línea punteada negra se incluyen los estados experimentales que fueron observados una única vez en un decaimiento alfa pero no poseen un número cuántico asociado [1, 117].

punteadas con energía 1.249 MeV respecto al fundamental [1, 117]), mientras que la representación completa con configuración principal corrige este comportamiento. Esto mismo es observado para el estado  $0_4^+$  con respecto a su compañero experimental (de energía 1.801 MeV respecto al fundamental [1, 2], que recordemos decae en alfa). Como conclusión, la aproximación de configuración principal aplicada a la representación completa hace un buen trabajo a la hora de describir energéticamente los estados excitados del  $^{212}\text{Po}$ , pese a que es una simplificación importante del problema.

En resumen, en este capítulo pudimos construir los estados  $0^+$  del Polonio-212, cuyas funciones de onda serán utilizadas en el capítulo 2.2 para establecer la clusterización alfa de cada uno de ellos. Además, pudimos realizar un análisis puntual de las representaciones de partícula simple, pudiendo individualizar la importancia del continuo resonante como no resonante. Así también, hemos implementado dos aproximaciones como son el truncamiento del espacio de Hilbert o la aplicación de la configuración principal, a través de las cuales pudimos obtener resultados con la representación completa.

## CAPÍTULO 4

### APLICACIÓN DEL FORMALISMO A DOS NÚCLEOS CON $N = Z$

En este capítulo aplicaremos el formalismo del modelo de capas que fue desarrollado durante la sección 2.1 del capítulo **MARCO TEÓRICO** y probado en el Polonio-212 en el capítulo 3 a dos núcleos que comparten la característica estructural de tener misma cantidad de protones que de neutrones  $N = Z$ : el Titanio-44 ( $^{44}\text{Ti}$ ), el cual es pensado como dos neutrones y dos protones sobre el núcleo Calcio-40 ( $^{40}\text{Ca}$ ), por lo cual construiremos la familia de núcleos sobre éste (ver Figura 4.1a); y el Telurio-104 ( $^{104}\text{Te}$ ), el cual es construido de la misma manera pero sobre el Estaño-100 ( $^{100}\text{Sn}$ ) (ver Figura 4.1b).

$^{42}\text{Ti}$ $\beta^+$	$^{43}\text{Ti}$ $\beta^+$	$^{44}\text{Ti}$ e- capture
$^{41}\text{Sc}$ $\beta^+$	$^{42}\text{Sc}$ $\beta^+$	$^{43}\text{Sc}$ $\beta^+$
$^{40}\text{Ca}$ $2\beta^+$	$^{41}\text{Ca}$ e- capture	$^{42}\text{Ca}$ Stable

(a) Familia de los núcleos construidos con el modelo de capas sobre el Calcio-40.

		$^{104}\text{Te}$ $\alpha$
		$^{102}\text{Sb}$ $p$
		$^{103}\text{Sb}$ $p$
$^{100}\text{Sn}$ $\beta^+$	$^{101}\text{Sn}$ $\beta^+$	$^{102}\text{Sn}$ $\beta^+$

(b) Familia de los núcleos construidos con el modelo de capas sobre el Estaño-100. Notemos que los núcleos Antimonio-101 ( $^{101}\text{Sb}$ ) y Telurio-102 ( $^{102}\text{Te}$ ) necesarios para la construcción de los estados de uno y dos protones, respectivamente, no fueron observados experimentalmente.

Figura 4.1: Familia de los núcleos construidos en este capítulo sobre los carozos  $N = Z$ . Se notan además los modos de decaimiento de sus estados fundamentales. Fuente: Ref. [29].

En primer lugar, trabajaremos sobre el Titanio-44, el cual es de gran interés a nivel astrofísico, pues se encuentra directamente implicado en el colapso del núcleo de una supernova [118–121]. A nivel estructural, éste resulta de gran interés, ya sea por su similitud con el Neón-20, su característica de poseer misma cantidad de neutrones y protones, o de construirse sobre un núcleo doblemente mágico estable como es el Calcio-40. En cuanto a la aplicabilidad de nuestro formalismo a este núcleo, tendremos en cuenta que existe un único estado ligado para los protones, por lo cual esperamos que una parte significativa de la función de onda tanto del núcleo Titanio-42 ( $^{42}\text{Ti}$ ) como del mismo  $^{44}\text{Ti}$  se encuentre construida por estados del continuo. Es por esto que debemos trabajar correctamente tanto las resonancias como los estados de dispersión de protones. Por otro lado, a nivel de dos cuerpos tendremos la característica

$N = Z$ , por lo cual forzaremos que estos núcleos respeten la simetría de isoespín.

En segundo lugar, construiremos el Telurio-104 realizando comparaciones tanto con el Titanio-44 como con el Polonio-212. Al igual que el  $^{44}\text{Ti}$ , este núcleo pertenece a una familia caracterizada por una cantidad  $N = Z$  de nucleones, lo cual lleva desde el punto de vista estructural a poder compararlo justamente con el  $^{44}\text{Ti}$ . Como observamos en la Figura 4.1b, la dificultad de este núcleo es que se encuentra sobre la línea de goteo de protones, por lo cual tanto el Antimonio-101 ( $^{101}\text{Sb}$ ) como el Telurio-102 ( $^{102}\text{Te}$ ) se ubican completamente en el continuo. Un correcto tratamiento de estos estados es sumamente necesario para poder establecer la estructura del  $^{104}\text{Te}$ .

El capítulo está ordenado de la siguiente manera: en la sección 4.1 construiremos los estados disponibles de un neutrón y un protón sobre los carozos  $N = Z$  Calcio-40 y Estaño-100; luego, en la sección 4.2 construiremos los estados de dos nucleones sobre los mismos carozos, haciendo uso de los resultados previos; y finalmente en la sección 4.3 construiremos los estados  $0^+$  de los núcleos  $N = Z$  Titanio-44 y Telurio-104. Los apéndices C, F y H cuentan con información complementaria a este capítulo y serán citados durante las distintas secciones.

## 4.1. Estados de partícula simple

De manera similar al estudio realizado en el  $^{212}\text{Po}$ , la construcción de los estados de cuatro cuerpos necesitan de el primer ladrillo: los estados de partícula simple. En esta sección aplicaremos el formalismo desarrollado en la sección 2.1.1 del capítulo **MARCO TEÓRICO** a los núcleos construidos como un neutrón y un protón sobre los carozos  $N = Z$  Calcio-40 y Estaño-100.

### 4.1.1. Carozo Calcio-40

El  $^{44}\text{Ti}$  es pensado como dos neutrones y dos protones sobre el carozo doblemente mágico Calcio-40 ( $^{40}\text{Ca}$ ), cuyas energías de partícula simple se ubican en la capa  $pf$  tanto para neutrones como para protones. Para establecer los niveles de energía disponible, buscaremos describir los estados experimentales de los núcleos Calcio-41 ( $^{41}\text{Ca} = n + ^{40}\text{Ca}$ ) y Escandio-41 ( $^{41}\text{Sc} = p + ^{40}\text{Ca}$ ), utilizando el potencial central descrito en la sección 2.1. En esta familia de núcleos también decidimos fijar los radios  $R$  de los potenciales de Woods-Saxon (2.6) y Espín-Órbita (2.9) en función de sus valores experimentales:  $r_\tau = \sqrt{3/5}R_\tau$  ( $\tau = \{n, p\}$ ), donde  $r_\tau$  es el radio cuadrático medio experimental  $r_n = 3.375$  fm o  $r_p = 3.385$  fm [122] de protones y neutrones, respectivamente. Con ellos, construimos el radio reducido  $r_0^\tau = r_\tau/A^{1/3}\sqrt{3/5}$  que será nuestra forma de presentar resultados, obteniendo:  $r_0^n = 1.274$  fm y  $r_0^p = 1.278$  fm

Los niveles de energía experimentales de partícula simple son adquiridos de toda la información disponible en la *Evaluated Nuclear Structure Data File* tomada de la Ref. [1], de forma que los factores espectroscópicos de partícula simple  $C^2S$  estén normalizados a un mismo valor en el estado fundamental:  $C^2S = 0.77$  de la Ref. [123]. A partir de estos datos, se realizó entonces un promedio ponderado de las energías en función de los factores espectroscópicos [124]. La energías de partícula simple fueron calculadas utilizando el código GAMOW [105]. Los potenciales fueron optimizados con el algoritmo de *Levenberg-Marquardt* [114, 115] a los cuatro estados pertenecientes a la capa  $pf$ , tanto para neutrones

como para protones. Todos estos valores se encuentran en las Tablas 4.1 y 4.2. El ajuste a los valores experimentales es en general muy bueno, donde todos los estados calculados (excepto el  $1p_{3/2}$  de protones) se encuentran a menos de un  $\sim 10\%$  del valor experimental, lo cual indica un mejor ajuste que el observado para en la sección 3.1. Todas las energías posibles calculadas dentro del modelo de capas se encuentran en la Tabla 4.3.

Tabla 4.1: Energías de partícula simple experimentales [1] y calculadas [105] (en MeV) respecto al carozo  $^{40}\text{Ca}$ . Las energías calculadas se obtuvieron con los parámetros de la Tabla 4.2.  $\delta_{\text{rel}}$  es el error relativo porcentual respecto a los valores experimentales.

Estado	$^{41}\text{Ca}$			$^{41}\text{Sc}$		
	$\varepsilon_{\text{exp}}$	$\varepsilon_n$	$\delta_{\text{rel}} (\%)$	$\varepsilon_{\text{exp}}$	$\Re(\varepsilon_p)$	$\delta_{\text{rel}} (\%)$
$0f_{7/2}$	-8.363	-8.354	0	-1.085	-1.105	2
$1p_{3/2}$	-6.246	-6.277	0	0.633	0.707	12
$1p_{1/2}$	-4.225	-4.188	1	2.386	2.178	9
$0f_{5/2}$	-1.560	-1.573	1	4.668	4.690	0

Tabla 4.2: Parámetros de campo medio para neutrones y protones (errores en MeV entre paréntesis) optimizados con el algoritmo de *Levenberg-Marquardt* [114, 115] a los cuatro estados de la capa  $pf$  presentes en la Tabla 4.1. El ancho reducido  $r_0$  fue fijado del radio medio cuadrado experimental [122] del  $^{41}\text{Ca}$  y  $^{41}\text{Sc}$ .

$\tau$	$V_0(\text{MeV})$	$V_{so}(\text{MeV fm})$	$a(\text{fm})$	$r_0(\text{fm})$
$n$	52.311(1)	17.847(5)	0.861(0.2)	1.274
$p$	51.671(1)	15.272(5)	0.786(0.2)	1.278

Tabla 4.3: Niveles de neutrones y protones sobre el carozo  $^{40}\text{Ca}$  calculados con el código GAMOW [105], utilizando los parámetros optimizados de la Tabla 4.2.

Estado	$\varepsilon_n$ (MeV)	$\varepsilon_p$ (MeV)
$0f_{7/2}$	-8.354	-1.109
$1p_{3/2}$	-6.277	(0.707, $-0.003 \times 10^{-3}$ )
$1p_{1/2}$	-4.188	(2.178, -0.037)
$0f_{5/2}$	-1.573	(4.690, -0.057)
$0g_{9/2}$	(1.407, -0.002)	(8.047, -0.230)
$0g_{7/2}$	(7.967, -1.546)	(14.195, -2.580)
$2d_{5/2}$	(0.631, -0.092)	(6.088, -1.737)
$2d_{3/2}$	(1.764, -1.101)	(6.961, -3.708)
$0h_{11/2}$	(10.040, -1.075)	(16.718, -2.126)
$0h_{9/2}$	(16.927, -7.285)	(23.944, -8.722)

Para armar las diferentes representaciones de partícula simple que caracterizarán nuestro trabajo, de los estados de la Tabla 4.3 incorporamos solo aquellas resonancias cuya parte imaginaria no supere los 100 keV, tal cual fue realizado en el capítulo previo. En cuanto a los estados de dispersión, estos se establecieron tomando como referencia el proceso realizado en el caso de los núcleos  $^{209}\text{Pb}$  y  $^{209}\text{Bi}$ : en primer lugar, se definieron 4 estados de dispersión puramente reales con  $l = 0$  y  $l = 1$  en el segmento  $[0, 12]$  MeV, por la importancia de estos sobre la función de onda de dos cuerpos [81, 82]. En segundo lugar, se construyeron los contornos de cada resonancia al estilo de la Figura 2.2, los cuales se discretizaron en una cantidad  $N_{nl_j}$  utilizando cuadratura de Gauss-Legendre, donde  $N_{nl_j}$  es fijado de manera que la parte imaginaria del estado fundamental de los núcleos  $^{42}\text{Ca}$  y  $^{42}\text{Ti}$  sea por lo menos cinco ordenes de magnitud menor que su parte real. Para este caso en particular, esta condición se cumple si incluimos 32 estados de dispersión en cada base, llevando a un total de 64.

Así, en la Tabla 4.4 presentamos las tres representaciones de partícula simple utilizadas durante el estudio de esta familia de núcleos. Notemos la diferencia de tamaño entre la representación de Polo y la Completa, donde pasamos de tener 11 estados de partícula simple totales a tener 75. Esto tendrá un gran impacto no solo en los resultados, sino también en el tiempo de cómputo necesario.

Tabla 4.4: Representación ligada (RL), de polo (RP) y completa (RC) de los estados de partícula simple utilizadas para construir las representaciones de dos y cuatro cuerpos. Estados ligados y resonancias se notan  $nl_j$ , mientras que a los estados de dispersión le corresponde la notación  $cl_j$ . Estados ligados y de dispersión con energía real se encuentran en negro, mientras que resonancias y estados de dispersión con energía compleja se encuentran en azul.

Bases	Estados de neutrones $\nu$	Estados de protones $\pi$
RL	$0f_{7/2}, 1p_{3/2}, 1p_{1/2}, 0f_{5/2}$	$0f_{7/2}$
RP	RL + $2d_{5/2}, 0g_{9/2}$	RL + $1p_{3/2}, 1p_{1/2}, 0f_{5/2}, 0g_{9/2}$
RC	RP + $cd_{5/2}, cg_{9/2}, cs_{1/2}, cp_{1/2}, cp_{3/2}$	RP + $cp_{3/2}, cp_{1/2}, cf_{5/2}, 0g_{9/2}, cs_{1/2}$

#### 4.1.2. Carozo Estaño-100

A continuación, comenzaremos con la construcción de los estados de partícula simple ubicados sobre el Estaño-100. La particularidad de los isótopos en la región del Estaño-100 es que prácticamente no existe observación experimental de ellos. Es por ello, que trabajar con nuestro formalismo tomando al  $^{100}\text{Sn}$  como carozo se presenta como una gran dificultad a la hora de establecer los parámetros de campo medio a utilizar.

El primer paso es establecer las energías de partícula simple experimentales a las cuales vamos a ajustar nuestro modelo. El valor de la energía de separación de un neutrón  $S_n(^{101}\text{Sn}) = 11.23(0.38)$  MeV es tomado de la Ref. [125], mientras que el valor de la energía de separación de un protón  $S_p(^{101}\text{Sb}) = -2.75(1.13)$  MeV es el promedio de diferentes modelos teóricos presentados en la Ref. [126] (ver Tabla).

Notemos que el valor de  $S_p$  obtenido se encuentra en concordancia con los encontrados en las Ref. [127–129], y además, implica que la representación de partícula simple de protones esté formada por estados puramente del continuo. De este modo, la representación de Berggren [30] es de fundamental importancia pues permite separar la parte resonante de la no resonante del continuo. A diferencia de los cálculos anteriores [65], este trabajo incluirá en su representación los estados del continuo no resonantes y utilizará una interacción efectiva entre todos los tres pares de nucleones.

A diferencia de la construcción realizada en el capítulo 3 para la familia de núcleos del Plomo-208, en este caso nos encontramos completamente inmersos en la línea de goteo de protones. Además, incluso respecto a la familia de núcleos del Calcio-40 construidos en la sección 4.1.1, todos nuestros estados de un protón serán del continuo, por lo cual esperamos que la influencia de los estados de dispersión sea la mayor de las tres familias estudiadas. Por último, destacamos que la similitud con la construcción de los estados en la sección 4.1.1 surge de que en la familia de núcleos aquí trabajada también tenemos la particularidad de que su carozo tendrá la misma cantidad de neutrones que de protones.

Fijada entonces la energía del estado fundamental de los núcleos  $^{101}\text{Sn}$  y  $^{101}\text{Sb}$  en función de  $S_n$  y  $S_p$ , respectivamente, es necesario establecer los números cuánticos de cada uno de los niveles que esperamos calcular. Así, tomaremos como estado fundamental tanto de protones como neutrones al  $1d_{5/2}$ , mientras que el ordenamiento de los estados excitados se seguirá según lo siguiente: para el  $^{101}\text{Sn}$ , existe un valor experimental del  $0g_{7/2}$  ( $\varepsilon_{0g_{7/2}}^v = -11.058 \text{ MeV}$  [1]); mientras que para protones realizamos una extrapolación de los vecinos con  $Z = 51$  y  $N \in [54, 62]$ . A partir de un ajuste con un polinomio de grado 2 a los datos existentes del estado  $0g_{7/2}$  en los otros núcleos con  $Z = 51$  (con un coeficiente de determinación de  $r^2 = 0.998$ ), obtuvimos que para el  $^{101}\text{Sb}$  este estado tendría una energía  $\varepsilon_{0g_{7/2}}^p = 3.022 \text{ MeV}$ . Entonces, teniendo los valores de referencia de dos estados tanto en protones como neutrones, optimizamos las intensidades  $V_{ws}$  y  $V_{so}$  utilizando el algoritmo de *Levenberg-Marquardt* [114, 115], con  $a = 0.7 \text{ fm}$  y  $r_0^y(r_0^\pi) = 1.374(1.275) \text{ fm}$  fijos a sus valores tomados de la Ref. [130].

Tabla 4.5: Parámetros para Woods-Saxon y Spin Orbit para  $^{101}\text{Sn} = ^{100}\text{Sn} + n$  y  $^{101}\text{Sb} = ^{100}\text{Sn} + p$  optimizados con el algoritmo de *Levenberg-Marquardt* [114, 115] a los estados  $1d_{5/2}$  y  $0g_{7/2}$  de neutrones y protones. Se fijaron  $a = 0.7 \text{ fm}$  y  $r_0^y(r_0^\pi) = 1.374(1.275) \text{ fm}$  a los valores de la Ref. [130]. Además, el radio de Coulomb es el mismo que el de Woods-Saxon y su difusividad es tomada cero.

Errores en MeV entre paréntesis.

$\tau$	$V_0(\text{ MeV})$	$V_{SO}(\text{ MeV fm})$
$n$	46.602(1)	15.365(7)
$p$	51.833(1)	12.508(6)

Tomando todo esto en cuenta, en la Tabla 4.5 se presentan las intensidades de Woods-Saxon y espín-órbita ajustadas para describir las energías de los estados  $1d_{5/2}$  y  $0g_{7/2}$  en ambos núcleos. Con estas intensidades se obtienen los niveles de energía de la Tabla 4.6. A partir de estos, armamos las representaciones de polo RP y completa RC que utilizaremos a lo largo de los cálculos de esta familia de núcleos. Tengamos en cuenta que las resonancias fueron limitadas a un ancho no mayor a los 200 keV,

tal cual realizamos en los núcleos previos. Observamos también como se diferencian las capas *sdgh* y *pfhi*, separándose los niveles de partícula simple  $0h_{11/2}$  y  $1f_{7/2}$  unos  $\sim 4$  MeV, en ambas bases.

Tabla 4.6: Niveles de neutrones ( $\nu$ ) y protones ( $\pi$ ) sobre el carozo  $^{100}\text{Sn}$  calculados con el código GAMOW [105], utilizando los parámetros optimizados de la Tabla 4.5.

state	$\varepsilon_n$ (MeV)	$\varepsilon_p$ (MeV)
$1d_{5/2}$	-11.230	(2.750, $-5 \times 10^{-6}$ )
$0g_{7/2}$	-11.058	(3.022, $-1 \times 10^{-7}$ )
$2s_{1/2}$	-9.432	(4.147, -0.006)
$1d_{3/2}$	-9.155	(4.554, $-2.5 \times 10^{-3}$ )
$0h_{11/2}$	-7.834	(6.798, $-5.6 \times 10^{-4}$ )
$1f_{7/2}$	-3.700	(9.473, -0.411)
$2p_{3/2}$	-2.306	(9.196, -1.753)
$0h_{9/2}$	-1.785	(12.401, -0.093)
$2p_{1/2}$	-1.439	(9.687, -2.327)
$1f_{5/2}$	-0.919	(11.477, -1.141)
$0i_{13/2}$	(0.050, $-5 \times 10^{-12}$ )	
$1g_{9/2}$	(2.794, -0.203)	
$0i_{11/2}$	(7.477, -0.137)	
$0j_{15/2}$	(7.986, -0.055)	

Tabla 4.7: Bases de partícula simple agrupadas según polos (RP) y completa con estados de dispersión (RC), para generar las representaciones de dos y cuatro cuerpos. Estados ligados y resonancias se notan  $nl_j$ , mientras que a los estados de dispersión le corresponde la notación  $cl_j$ . Estados ligados y de dispersión con energía real se encuentran en negro, mientras que resonancias y estados de dispersión con energía compleja se encuentran en azul.

Rep.	Estados de neutrones	Estados de protones
RP	$1d_{5/2}, 0g_{7/2}, 2s_{1/2}, 1d_{3/2}, 0h_{11/2}$ $1f_{7/2}, 2p_{3/2}, 0h_{9/2}, 2p_{1/2}, 1f_{5/2}$ $0i_{13/2}, 0j_{15/2}$	$1d_{5/2}, 0g_{7/2}, 2s_{1/2}, 1d_{3/2}, 0h_{11/2}$ $0h_{9/2}$
RC	RP + $ci_{13/2}, cj_{15/2}, cg_{9/2}, ci_{11/2}$	RP + $cd_{5/2}, cg_{7/2}, cs_{1/2}, cd_{3/2}, ch_{11/2}$ $ch_{9/2}, cp_{1/2}, cp_{3/2}, cf_{7/2}, cf_{5/2}$

En la Tabla 4.7 se presentan las dos representaciones de partícula simple que utilizaremos en la familia de núcleos de dos nucleones sobre el  $^{100}\text{Sn}$  constituida por el Estaño-102 ( $^{102}\text{Sn} = nn + ^{100}\text{Sn}$ ), el Antimonio-102 ( $^{102}\text{Sb} = pp + ^{100}\text{Sn}$ ) y el Telurio-102 ( $^{102}\text{Te} = pn + ^{100}\text{Sn}$ ). Respecto a los estados de dispersión, seguimos el proceso de construcción de las dos familias de núcleos previas: se definieron 6 estados para neutrones y 4 para protones puramente reales cuyos números cuánticos son los de las

resonancias no incluidas en las representaciones por presentar anchos mayores a nuestro límite:  $1g_{9/2}$  y  $0i_{11/2}$  de neutrones, y  $2p_{1/2}$ ,  $2p_{3/2}$ ,  $1f_{7/2}$  y  $1f_{5/2}$  de protones. Respecto a los estados de dispersión asociados a las resonancias que sí fueron incluidas en las representaciones, para el caso de neutrones estos fueron definidos sobre contornos de forma triangular, tal cual se realizó en los núcleos previos (ver Tabla 4.8). Pero por otro lado, para el caso de protones los estados de dispersión complejos fueron definidos sobre contornos rectangulares con vértices  $\{(0, 0), (1, 0), (1, -0.5), (18, -0.5), (18, 0), (20, 0)\}$  de manera que las resonancias de dos cuerpos se encuentren dentro de esta región (ver sección 2.1.2.3). La cantidad de estados discretos  $N_c$  definidos sobre este contorno rectangular está íntimamente relacionado a los estados de dos cuerpos, por lo cual dejamos un análisis detallado para la próxima sección.

Tabla 4.8: Vértices (en MeV) ubicados en el plano complejo de energía para estados resonantes de neutrones y la cantidad de estados de dispersión  $N_c$  por segmento.

$ci_{13/2}$		$cj_{15/2}$	
Vértice	$N_c$	Vértice	$N_c$
(0, -0.5)	1	(0, 0)	1
(2, 0)	1	(7, 0)	2
(5, 0)	1	(8, -0.8)	2
(10, 0)	1	(9, 0)	1
(16, 0)	-	(16, 0)	-

## 4.2. Estados de dos partículas

En esta sección se construyen los niveles de energía y funciones de onda de dos cuerpos sobre los carozos  $N = Z$  Calcio-40 y Estaño-100 a partir del formalismo desarrollado en la sección 2.1.2 del capítulo **MARCO TEÓRICO**. En particular, se optimizan las intensidades de los potenciales de dos cuerpos (2.40) de manera que se reproduzcan los niveles experimentales de los distintos núcleos estudiados.

### 4.2.1. Carozo Calcio-40

En esta sección presentamos los resultados de la optimización de los potenciales Gaussianos de dos cuerpos (2.40) de manera que se reproduzcan los niveles experimentales de los núcleos par-par Calcio-42 ( $^{42}\text{Ca} = nn + ^{40}\text{Ca}$ ) y Titanio-42 ( $^{42}\text{Ti} = pp + ^{40}\text{Ca}$ ) presentes en la Tabla 4.10. A diferencia del  $^{212}\text{Po}$ , como las bases de partícula simple son idénticas pues el carozo es de tipo  $N = Z$ , utilizaremos el formalismo del *isoespín*, lo que implica que las intensidades de la interacción gaussiana (2.40) de dos cuerpos son idénticas para cada par  $nn$ ,  $pp$  y  $pn$ . El núcleo Escandio-42 ( $^{42}\text{Sc} = pn + ^{40}\text{Ca}$ ) que pertenece a esta familia se utiliza para optimizar el canal  $T = 0$  (singlete-impar y triplete-par) de la interacción Gaussianas. Para estos tres núcleos, se utilizaron todos los rangos de la interacción iguales con

valor  $\beta = 1.6$  fm tomados de la Ref. [131], y se tomar como base los estados de partícula simple definidos en la sección anterior.

En base a esto, tendremos que los estados con  $J$  par de los tres núcleos  $^{42}\text{Ca}$ ,  $^{42}\text{Sc}$  y  $^{42}\text{Ti}$  deben reproducirse por un mismo par de potenciales  $T = 1$  (singlete-par y triplete-impar). Para el canal singlete-par, su intensidad fue optimizada con el algoritmo de *Levenberg-Marquardt* [114, 115] a los primeros estados  $0^+$  por un lado y  $2^+$  por otro lado de los núcleos  $^{42}\text{Ca}$  y  $^{42}\text{Ti}$ , de forma que tendremos diferentes intensidades en función del momento angular  $J^\pi$  de dos cuerpos. Además, en la práctica se observó que incorporar la parte triplete-impar no generaba ninguna ventaja en la descripción de las energías experimentales, por lo que se mantuvo  $V_{to} = 0$ , tal cual lo realizan los trabajos [116, 131]. De esta manera, se obtienen las intensidades del canal  $T = 1$  para cada una de las representaciones, las cuales son mostradas en la Tabla 4.9.

Para el canal  $T = 0$  del potencial, éste se optimiza de manera que se reproduzcan los estados impares del  $^{42}\text{Sc}$ , en particular al  $1^+$  y el  $7^+$ . La inclusión de la intensidad singlete-impar es fundamental para que se respete el orden de los dos estados optimizados. Los resultados también se encuentran en la Tabla 4.9.

Tabla 4.9: Intensidades de dos nucleones (en MeV) de la interacción espín-isoespín para cada una de las representaciones. Las intensidades fueron optimizadas utilizando el algoritmo de *Levenberg-Marquardt* [114, 115] a los niveles de energía mencionados en el texto. Los rangos fueron fijados al valor de  $\beta = 1.6$  fm utilizado por la Ref. [131]. Además, el potencial  $V_{to}$  se fija a cero en todas las representaciones.

	$J$	RL	RP	RC
$V_{se}$	$= 0$	-58.565	-52.169	-50.872
	$> 0$	-70.659	-66.497	-62.418
$V_{so}$		-4.947	-4.579	-4.462
$V_{te}$		-8.679	-8.676	-8.700

Para la intensidad singlete-par observamos lo mismo que sucede en las intensidades del capítulo anterior: aumentar la representación implica que los potenciales bajen su intensidad. Además, se observa que necesitamos un mayor valor para describir los estados  $J \neq 0$  que para los estados  $J = 0$ . Utilizando entonces estos valores, obtenemos las energías de la Tabla 4.10, las cuales son presentadas también en la Figura 4.2 los demás niveles de energía para los tres núcleos calculados con la representación RC. Notemos que para el estado fundamental de los núcleos par-par, la diferencia respecto a los valores experimentales es menor a los 100 keV en la representación RC, mientras que los excitados  $4^+$  y  $6^+$  se obtienen mucho más ligados que los datos experimentales. Este comportamiento de los estados excitados es una indicación de que la intensidad singlete-par debería disminuir en estos casos. Respecto al núcleo impar-impar  $^{42}\text{Sc}$ , notemos la consecuencia en la reproducción de los niveles pares experimentales al no haber sido estos ajustados con las intensidades  $T = 1$ . Sin embargo, como se observa en la sección H.1 del apéndice H la reproducción del espaciado entre niveles de este núcleo sí respeta los datos experimentales.

Respecto a los resultados de diferentes representaciones de partícula simple, a diferencia de lo que ocurría en los núcleos  $^{208}\text{Pb} + NN$ , aquí las mejoras generadas por pasar de la representación RL a la RP son significativas en cuanto al ajuste a los valores experimentales. Esto se debe a que la diferencia entre

las representaciones de neutrones y protones son menores en la representación RP, y tal como vemos en el apéndice H, esto es importante para la descripción del isoespín. En cuanto a la representación completa, vemos que perdemos un poco de precisión en el caso de los estados  $0^+$ , pero mejora el ajuste de los estados  $1^+$  y  $7^+$  del  $^{42}\text{Sc}$ . Además, se corrigen las intensidades de las partes imaginarias.

Tabla 4.10: Energías (en MeV) experimentales [1] y calculadas, relativas al carozo inerte  $^{40}\text{Ca}$ , como resultado de la optimización que fue explicada en el texto. RL, RP y RC se corresponden a las 3 representaciones de partícula simple utilizadas.

$J^\pi$	Exp.	RL	RP	RC
$^{42}\text{Ca}$				
$0^+$	-19.843	-20.107	$-19.927 + i0.012$	-19.950
$2^+$	-18.319	-18.428	$-18.315 + i0.007$	-18.322
$^{42}\text{Ti}$				
$0^+$	-4.836	-4.492	$-4.743 + i0.091$	-4.713
$2^+$	-3.282	-2.993	$-3.285 + i0.035$	-3.279
$^{42}\text{Sc}$				
$0^+$	-10.411	-12.201	$-12.540 + i0.058$	-12.519
$2^+$	-8.825	-10.715	$-10.966 + i0.025$	-10.961
$1^+$	-9.799	-9.800	$-9.800 + i0.001$	-9.799
$7^+$	-9.795	-9.793	-9.794	-9.795

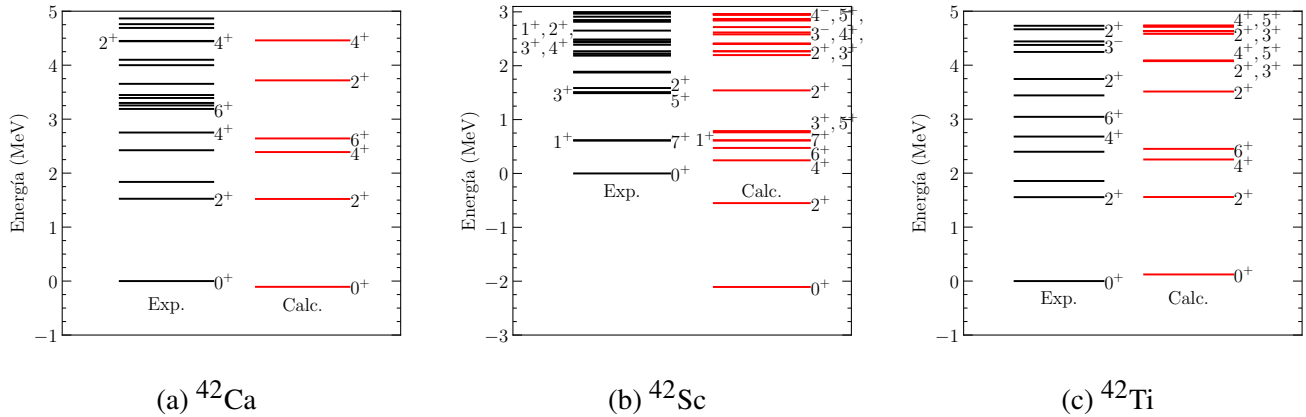


Figura 4.2: Energías de dos cuerpos experimentales y calculadas en la representación completa.

#### 4.2.2. Carozo Estaño-100

En esta sección construiremos los estados de dos cuerpos correlacionados sobre el carozo Estaño-100. Se presentan entonces los resultados de la optimización de las intensidades de los potenciales de dos cuerpos con el algoritmo de *Levenberg-Marquardt* [114, 115] de forma que se reproduzca la energía de

ligadura experimental del núcleo  $^{102}\text{Sn}$ . La elección de trabajar únicamente sobre el  $^{102}\text{Sn}$  resulta de que es el único de la familia para el cual uno experimentalmente conoce los números cuánticos de su estado fundamental, y la energía de separación de dos neutrones  $S_{2n}$ . Además, al ser esta familia de núcleos construida sobre un carozo con  $N = Z$ , se justifica que las mismas intensidades de la interacción de dos cuerpos sean utilizadas para cada núcleo con  $nn$ ,  $pp$  y  $pn$ , tal cual fue realizado en la sección 4.2.1. Así, las intensidades del canal  $T = 1$  de la interacción gaussiana optimizadas en el Estaño-102 se usarán en el Telurio-102 y en el Antimonio-102. Respecto al canal  $T = 0$  de la interacción, del cual tomaremos solamente la parte triplete-par tal cual se realizó en la familia del Plomo-208, su intensidad será fijada para ajustar a la energía del estado fundamental del Telurio-104 en la próxima sección.

Para esta familia de núcleos ubicados sobre el Estaño-100, se utilizaron todos los rango iguales  $\beta = 1.6$  fm [131] para todos los potenciales, de la misma manera que se implementó en la familia del Calcio-40. Para poder optimizar las intensidades de la interacción, tenemos los siguientes datos experimentales: de [1, 125] obtenemos valores de la energía de separación de dos neutrones  $S_{2n} = -23.93(0.26)$  MeV y  $J^\pi = 0^+$  para el estado fundamental del  $^{102}\text{Sn}$ , mientras que no existen datos experimentales de estados excitados. Entonces, como solo se conoce experimentalmente el estado fundamental del  $^{102}\text{Sn}$ , decidimos optimizar únicamente el canal singlete-par de la interacción de pares para reproducir la energía de ese estado. Esta decisión se tomó en base a que el singlete-par suele ser el más intenso [23, 116], además de que los estados fundamentales de los núcleos estudiados en la sección 4.2.1 eran igualmente bien ajustados utilizando solamente ese canal de la interacción.

Establecidas estas condiciones, optimizamos la intensidad del canal singlete-par utilizando el algoritmo de *Levenberg-Marquardt* [114, 115] de manera que se obtenga la energía del estado fundamental del  $^{102}\text{Sn}$ . Así, obtenemos los valores de la Tabla 4.12 y las energías de la Tabla 4.13. El valor teórico del  $^{102}\text{Te}$  con el que comparamos es un promedio de múltiples modelos (ver Tabla 4.11) tomados de la Ref. [132]. Notemos que los estados fundamentales de los tres núcleos tienen números cuánticos  $J^\pi = 0^+$ , tal cual sucedía en la familia de núcleos del Calcio-40 construidos en la sección 4.2.1.

Tabla 4.11: Diferentes valores teóricos de la energía de separación de dos protones  $S_{2p}$  tomados de la Ref. [132].

Modelo	(A)	(B)	(C)	(D)	(E)	(F)	(G)	(H)
$S_{2p}$	5.28	4.41	5.58	4.24	3.89	5.15	4.71	4.19

(A) Finite Range Droplet Model [133]    (B) Extended Thomas-Fermi Strutinsky Integral [134]

(C) Relativistic Mean Field [135, 136]    (D) Hartree-Fock-Bogolubov fitted to the fission data [137]

(E) Hartree-Fock-Bogolubov fitted to the mass data [138]    (F) Duflo-Zucker mass formula [139]

(G) Image Reconstruction Nuclear Masses [140]    (H) Koura-Ueno-Tachibana-Yamada mass formula [141]

Si analizamos los resultados utilizando la representación de polo RP, notamos que para los casos  $nn$  y  $pn$ , sus estados fundamentales tienen partes imaginarias espurias que deben ser disminuidas en cinco ordenes de magnitud respecto a su parte real cuando se incorporan los contornos. Además, el estado fundamental del  $^{102}\text{Te}$  calculado con RP presenta una parte imaginaria positiva, pero sabemos que por ser una resonancia, su parte imaginaria necesariamente debe ser negativa.

Tabla 4.12: Intensidades de dos nucleones (en MeV) de la interacción espín-isoespín para cada una de las representaciones. Las intensidades fueron optimizadas utilizando el algoritmo  $\chi^2$  [115]. Los rangos fueron fijados al valor de  $\beta = 1.6$  fm utilizado por la Ref. [131].

	RP	RC
$V_{se}$	-32.605	-32.287

Tabla 4.13: Energías de los estados fundamentales (en MeV) experimentales [1] o teóricas (el valor teórico del  $^{102}\text{Te}$  es un promedio de múltiples modelos tomados de la Ref. [132]) cuyos errores o desviaciones estándar se encuentran entre paréntesis, y calculadas en este trabajo, relativas al carozo inerte  $^{100}\text{Sn}$ , como resultado de la optimización que fue explicada en el texto. RP y RC corresponden a las dos representaciones de partícula simple utilizadas.

Núcleo	Exp/Teo	RP	RC
$^{102}\text{Sn}$	-23.93(0.26)	$-23.928 + i0.001$	-23.928
$^{102}\text{Te}$	4.7(0.6)	$4.642 + i0.004$	$4.640 - i0.011$
$^{102}\text{Sb}$	-9.30(0.65)	$-9.750 + i0.003$	-9.748

A partir de las observaciones del párrafo anterior, pasamos a la representación completa buscando corregir los resultados de la representación RP. Al trabajar con estados de dos protones que son resonancias, debemos tomar contornos de protones con forma rectangular (ver sección 2.1.2.3). Éstos se definen en la Tabla 4.14, mientras que los contornos de neutrones ya fueron definidos en la Tabla 4.8. De esta manera, la parte imaginaria del estado fundamental del  $^{102}\text{Sn}$  es corregida, tal cual vemos en la Tabla 4.13. Esta misma corrección se observa para el estado fundamental del  $^{102}\text{Sb}$ , el cual también es ligado, y además, observamos que el estado fundamental del  $^{102}\text{Te}$  tiene parte imaginaria negativa, en total acuerdo con lo esperado.

Si analizamos las dimensiones de las bases de partícula simple, notemos que en RP tenemos 12 estados de neutrones y 6 de protones, mientras que teniendo en cuenta la incorporación de los contornos definidos en las Tablas 4.8 y 4.14, junto con la incorporación de contornos puramente reales mencionados en la sección previa, para la representación RC finalmente tendremos 34 estados de neutrones y 76 de protones.

Tabla 4.14: Vértices (en MeV) ubicados en el plano complejo de energía para estados resonantes de protones y la cantidad de estados de dispersión  $N_c$  por segmento.

Vértice	$cd_{5/2}$	$cg_{7/2}$	$cs_{1/2}$	$cd_{3/2}$	$ch_{11/2}$	$ch_{9/2}$
(0, 0)	1	1	1	1	1	1
(1, 0)	2	2	2	2	2	2
(1, -0.5)	4	4	2	2	2	4
(18, -0.5)	2	2	2	2	2	2
(18, 0)	1	1	1	1	1	1
(20, 0)	-	-	-	-	-	-

Finalmente, la Figura 4.3 presentamos todos los niveles de energía calculados dentro de los primeros 5 MeV de excitación. Esta imagen nos será útil para notar la cantidad de estados que tendremos en la representación completa cuando trabajemos en la próxima sección el estado fundamental del  $^{104}\text{Te}$ . Notemos que las energías del  $^{102}\text{Te}$  son todas positivas, destacándose en rojo aquellos estados que son resonancias de dos cuerpos. Las partes imaginarias de éstos son menores a los 100 keV.

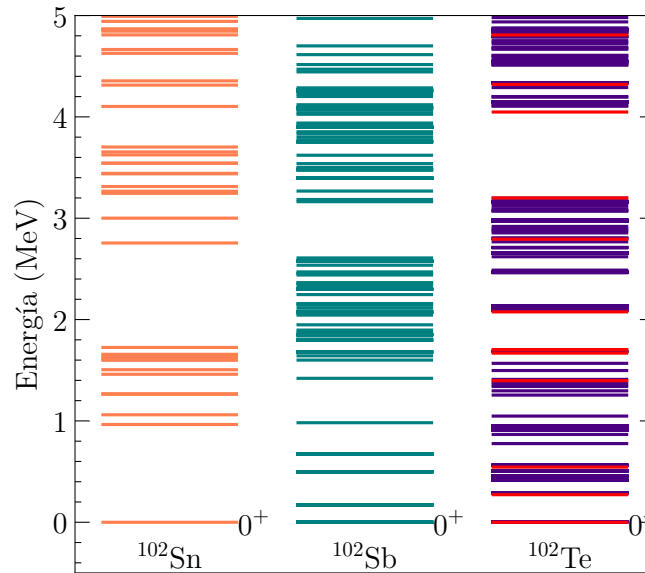


Figura 4.3: (Izq.) Energías de dos cuerpos de los núcleos  $^{100}\text{Sn} + NN$  calculadas en la representación completa. Todas se encuentran ordenadas respecto al estado fundamental para facilitar la apreciación visual. Notemos que los estados son ligados hasta los  $\sim 24$  MeV y  $\sim 9$  MeV de excitación para los núcleos  $^{102}\text{Sn}$  y  $^{102}\text{Sb}$ , respectivamente, mientras que para el  $^{102}\text{Te}$  todos los estados se ubican en el continuo respecto al carozo  $^{100}\text{Sn}$ . Además, las resonancias de dos cuerpos del núcleo  $^{102}\text{Te}$  se destacan en rojo.

### 4.3. Estados de cuatro partículas

En esta sección construiremos los estados  $J^\pi = 0^+$  de dos neutrones y dos protones construidos sobre los carozos  $N = Z$  Calcio-40 y Estaño-100. Para ello, utilizamos el formalismo de la sección 2.1.3 del capítulo **MARCO TEÓRICO**, de forma que ajustaremos las intensidades de la interacción protón-neutrón para recuperar las energías experimentales de los núcleos Titanio-44 y Telurio-104.

#### 4.3.1. Titanio-44

A continuación presentamos los resultados del espectro de energía y funciones de onda del núcleo  $^{44}\text{Ti}$ , estudiado como cuatro nucleones sobre el carozo  $^{40}\text{Ca}$ . Siguiendo la idea del trabajo realizado

en el  $^{212}\text{Po}$ , vamos a ajustar<sup>1</sup> el canal  $T = 0$  de la interacción protón-neutrón de forma que la energía calculada del estado fundamental del  $^{44}\text{Ti}$  reproduzca el valor experimental  $E_{\text{exp}}^{44\text{Ti}}(0^+) = -33.423 \text{ MeV}$  [1]. A diferencia de lo que sucedía en el Polonio-212, en este caso el canal  $T = 0$  de la interacción gaussiana tiene activa tanto su parte singlete-impar como triplete-par. Es por ello, que a la hora de ajustar las intensidades, se estableció una constante de proporcionalidad  $\chi$  de manera que la relación  $V_{\text{so}}/V_{\text{te}}$  se mantuviese constante a la de cada representación de la Tabla 4.9.

En primer lugar, vamos a resolver la ecuación de Schrödinger (2.81), para la cual ajustamos la interacción protón-neutrón hasta que la energía de menor valor obtenida se corresponda con la del estado fundamental del  $^{44}\text{Ti}$ . Notemos que en este caso, esta interacción protón-neutrón debe aportarnos aproximadamente 8 MeV, pues la energía a orden cero se encuentra en los  $\sim -25 \text{ MeV}$ . Tomando las tres representaciones de partícula simple, se utilizan las siguientes constantes de proporcionalidad  $\chi_{\text{RL}} = 8.6340$ ,  $\chi_{\text{RP}} = 8.8212$  y  $\chi_{\text{RC}} = 8.9420$  respecto a las intensidades de la Tabla 4.9 para obtener los nuevos potenciales  $T = 0$  presentados en la Tabla 4.15. Allí podemos observar que al aumentar la representación utilizada en la base, la interacción singlete-impar disminuye, mientras que la parte triplete-par aumenta. Recordemos que en el caso del  $^{212}\text{Po}$ , observábamos que la interacción triplete-par se mantenía constante a través de las representaciones. Esto indica una mayor sensibilidad de esta interacción respecto a la representación en sistemas con  $N = Z$ . Una alternativa de ajuste de la interacción protón-neutrón cuyo resultado no es compatible con el isoespín del estado fundamental se presenta en la sección H.3 del apéndice H, lo cual indica que ciertos mínimos de la optimización pueden dar resultados no físicos.

Tabla 4.15: Intensidades (en MeV) de la interacción protón-neutrón que reproducen la energía del estado fundamental del núcleo  $^{44}\text{Ti}$  para cada una de las representaciones. Las intensidades son proporcionales a las de la Tabla 4.9 siguiendo las constantes mencionadas en el texto.

	RL	RP	RC
so	-42.714	-40.390	-39.897
te	-74.935	-76.533	-77.795

Utilizando los potenciales de la Tabla 4.15, calculamos las energías y funciones de onda de los estados  $0^+$  del  $^{44}\text{Ti}$  correspondientes, y realizamos una comparación entre cada una de las representaciones utilizadas en la Tabla 4.16. Notemos que utilizamos la notación de la suma de los cuadrados de las amplitud de ondas parciales definida en la ecuación (2.93). Además, gracias a la característica particular de enmarcarse dentro del formalismo de isoespín, también presentamos para cada nivel de energía el valor aproximado del valor medio del isoespín  $T$  (ver apéndice C). Estos valores son aproximados en el sentido numérico, pues del apéndice C vemos que su valor es obtenido como una suma de elementos que dependen de la función de onda, por lo cual su resultado no necesariamente sea cero, sino un valor cercano a cero.

<sup>1</sup>Utilizando la librería SCIPY de PYTHON [https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.least\\_squares.html](https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.least_squares.html)

Respecto a las funciones de onda, podemos notar que el estado fundamental es algo más colectivo que el estado fundamental del  $^{212}\text{Po}$ , que los estados  $0_3^+$  y  $0_5^+$  calculados son los más colectivos, entendiendo como *colectivos* a aquellos estados que tienen amplitudes comparables en cada una de las configuraciones posibles. El espectro de energía de RL es muy diferente al de las otras dos, generado esto por la gran diferencia de tamaño entre las representaciones. Observemos también que agregar los estados no resonantes del continuo, afectan a las energías excitadas del núcleo, moviéndolas casi  $\sim 200$  keV en la mayoría de los casos, lo cual es muy significativo y enfatiza la importancia de los estados de dispersión en un núcleo cuya representación de partícula simple de protones se encuentra en gran parte embebida en el continuo.

Respecto al isoespín de los estados, estos fueron calculados numéricamente a partir de la función de onda obtenida para cada estado (ver apéndice C). Notemos en primer lugar que el fundamental posee el valor físico  $T = 0$  ( $T_z = (N - Z)/2$ ), por lo que podemos decir que el ajuste de la intensidad  $V_{np}$  solo en el canal  $T = 0$  nos lleva a resultados físicamente correctos. Por otro lado, existen diferencias en la identificación de los estados con su respectivo isoespín entre la representación ligada y las dos más grandes, pero las representaciones RP y RC sí logran reproducir seis estados en los primeros 10 MeV de excitación como la Ref. [4], con valores similares de isoespín. En particular, nosotros obtenemos dos estados más con  $T = 1$  entre el fundamental y el primer  $T = 2$  que la Ref. [4]. También obtenemos un estado  $T = 1$  sobre el  $T = 2$ , tal cual la Ref. [4], pero nuestra representación no captura los estados  $T = 0$  sobre el  $T = 2$  que se observan en dicha referencia. Notemos que un ajuste diferente de las intensidades del potencial central de un cuerpo a los niveles de partícula simple experimentales (Tablas 4.1 y 4.2) puede llevar a una modificación del isoespín de los estados  $0_2^+$  y  $0_3^+$  [142].

En la Figura 4.4, presentamos los niveles de energía calculados en cada base comparados con los datos experimentales. Observamos que nuestro estado  $0_2^+$  en RC se encuentra prácticamente por encima del valor de  $Q_\alpha$ , exactamente a 339 keV del último estado experimental por debajo del  $Q_\alpha$ . Pero también, experimentalmente [143], se observó un estado con energía  $-28.118(2)$  MeV al cual no se le identificó un momento angular  $J$ , que se encuentra a  $\sim 100$  keV de nuestro valor, siendo entonces posible identificar ese estado con nuestro  $0_2^+$ . También puede verse que el estado  $0_3^+$  es el que se encuentra en las cercanías del experimental  $(0, 2)^+$ , por lo cual es un estado candidato para decaimiento alfa. Respecto a nuestro estado más colectivo, el  $0_5^+$ , vemos que no se ha observado experimentalmente ningún estado en ese orden, mientras que el estado  $0_6^+$  se encuentra en la zona del cúmulo experimental de estados  $0^+$  de los 9 MeV.

Una información complementaria que resulta importante para poder estimar la importancia de los estados resonantes y de dispersión en la base de partícula simple es generada siguiendo la idea de la Tabla 3.18. Recordemos que B-B implica que las cuatro partículas ocupan estados ligados, B-R implica que por lo menos una ocupa un estado resonante y el resto ligados, y P-C implica que por lo menos una ocupa un estado de dispersión. En la Tabla 4.17 observamos que, a diferencia de lo ocurrido para el núcleo  $^{212}\text{Po}$  la contribución de las interacciones entre estados ligados y aquellos del continuo representan más del 10 %, llegando incluso al 40 %. Esto indica que este núcleo en particular se encuentra más cerca del continuo, por lo cual la incorporación de estados resonantes y de dispersión es importante para poder describir correctamente la física del mismo.

Tabla 4.16: Energía (en MeV) y suma de los cuadrados de las amplitudes de onda parciales (2.93) para el estado fundamental y excitados  $0^+$  del núcleo  $^{44}\text{Ti}$  obtenidos en las diferentes representaciones, ajustando el canal  $T = 0$  de la interacción  $V_{pn}$  para obtener la energía experimental del estado fundamental del  $^{44}\text{Ti}$ .

$Z_{J\pi}^2$	RL	RP	RC	$Z_{J\pi}^2$	RL	RP	RC
$E_{0^+}_1$	-33.423	(-33.423, 0.174)	-33.423	$E_{0^+}_2$	-27.354	(-28.022, 0.137)	-28.244
$Z_{0^+}^2$	0.616	(0.615, 0.000)	0.606	$Z_{0^+}^2$	0.164	(0.086, 0.000)	0.098
$Z_{2^+}^2$	0.318	(0.325, 0.000)	0.332	$Z_{2^+}^2$	0.497	(0.670, 0.010)	0.710
$Z_{4^+}^2$	0.058	(0.054, 0.001)	0.056	$Z_{4^+}^2$	0.024	(0.083, 0.001)	0.086
$Z_{6^+}^2$	0.007	(0.005, 0.000)	0.005	$Z_{6^+}^2$	0.316	(0.157, 0.021)	0.104
$T$	0	0	0	$T$	0	1	1
$E_{0^+}_3$	-25.731	(-26.743, 0.112)	-26.860	$E_{0^+}_4$	-25.567	(-25.603, 0.063)	-25.607
$Z_{0^+}^2$	0.188	(0.213, -0.008)	0.218	$Z_{0^+}^2$	0.037	(0.029, -0.001)	0.025
$Z_{2^+}^2$	0.168	(0.437, -0.005)	0.396	$Z_{2^+}^2$	0.044	(0.196, -0.002)	0.173
$Z_{4^+}^2$	0.048	(0.039, 0.003)	0.027	$Z_{4^+}^2$	0.898	(0.605, -0.001)	0.680
$Z_{6^+}^2$	0.596	(0.281, 0.000)	0.328	$Z_{6^+}^2$	0.022	(0.162, -0.019)	0.114
$T$	2	1	1	$T$	1	0	0
$E_{0^+}_5$	-25.067	(-25.310, 0.073)	-25.230	$E_{0^+}_6$	-22.504	(-24.032, 0.121)	-24.223
$Z_{0^+}^2$	0.352	(0.232, 0.003)	0.270	$Z_{0^+}^2$	0.507	(0.385, 0.000)	0.371
$Z_{2^+}^2$	0.496	(0.137, 0.006)	0.187	$Z_{2^+}^2$	0.378	(0.430, 0.008)	0.404
$Z_{4^+}^2$	0.107	(0.313, -0.012)	0.200	$Z_{4^+}^2$	0.105	(0.135, -0.002)	0.153
$Z_{6^+}^2$	0.046	(0.308, 0.000)	0.339	$Z_{6^+}^2$	0.010	(0.011, -0.001)	0.026
$T$	1	2	2	$T$	1	1	1

#### 4.3.1.1. Aproximación truncando el espacio de Hilbert

En los cálculos realizados hasta este punto, todos los estados ligados de dos cuerpos correlacionados eran incluidos en las bases  $\mathcal{L}_p$  y  $\mathcal{L}_n$  definidas en las ecuaciones (2.76-2.77). Esto implicó que las dimensiones del sistema sean las presentes en la Tabla 4.18.

Tal cual realizamos en la construcción del  $^{212}\text{Po}$  en la sección 3.3.1, podemos restringir los tamaños de las bases  $\mathcal{L}_p$  y  $\mathcal{L}_n$  para disminuir el tiempo de cálculo sin afectar significativamente a la energía y/o la función de onda de cada estado, además de identificar la dependencia de los resultados con el tamaño final del problema. En la Tabla 4.19 se presenta que porcentaje de la función de onda total de cada estado  $0^+$  del  $^{44}\text{Ti}$  en la representación de polo se pierde al truncar el espacio de Hilbert respecto a los resultados de la Tabla 4.16. Los truncamientos al espacio de Hilbert se realizan de la siguiente manera:

- EHT<sup>(I)</sup>: Se limita el espacio de forma que no contenga estados de dos cuerpos con paridad  $\pi = -$ , ni aquellos con excitación mayor al  $J^-$  más ligado. Esto es equivalente a incluir todos los estados

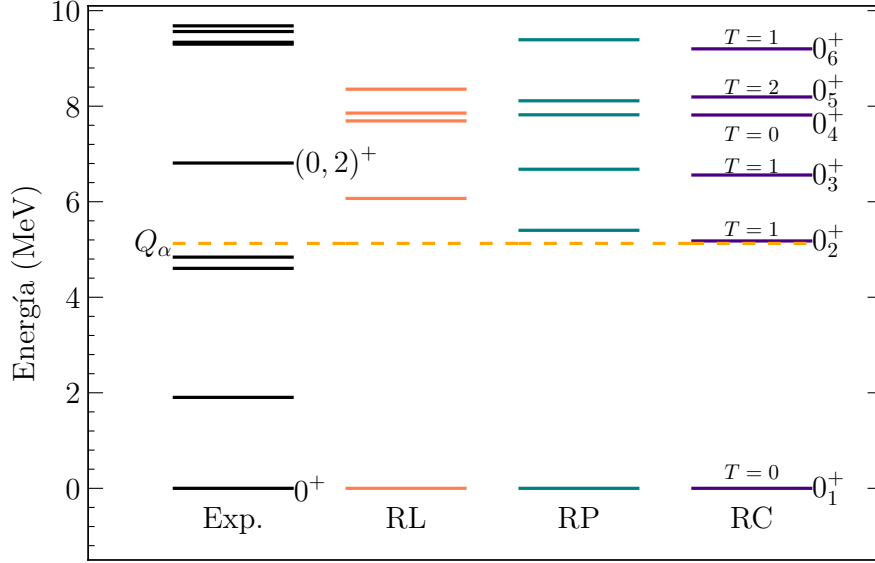


Figura 4.4: Energías experimentales [1] y calculadas de los primeros estados  $0^+$  del  $^{44}\text{Ti}$ . Además, se comparan los resultados obtenidos en las distintas representaciones y se presentan los valores del isoespín  $T$  para cada nivel.

Tabla 4.17: Amplitudes de onda de cuatro cuerpos para los primeros seis estados  $0^+$  del  $^{44}\text{Ti}$  discriminadas en función de las configuraciones de partícula simple, como fue explicado en el texto. Las contribuciones de las amplitudes compuestas por estados de dispersión son del orden de  $10^{-6}$ . Estos resultados son obtenidos utilizando la representación completa.

$E_{0^+}$ (MeV)	-33.423			-28.244			-26.860		
$Z_{J\pi}^2$	B-B	B-R	P-C	B-B	B-R	P-C	B-B	B-R	P-C
$Z_{0^+}^2$	0.543	0.042	0.003	0.087	0.006	0.002	0.195	0.015	0.002
$Z_{2^+}^2$	0.264	0.059	0.003	0.392	0.299	0.007	0.264	0.122	0.003
$Z_{4^+}^2$	0.050	0.005	0	0.054	0.030	0.001	0.022	0.005	0
$Z_{6^+}^2$	0.005	0	0	0.101	0.003	0	0.317	0.009	0
$\sum_J Z_J^2$	0.862	0.106	0.006	0.634	0.338	0.010	0.798	0.151	0.005
$E_{0^+}$ (MeV)	-25.607			-25.230			-24.223		
$Z_{J\pi}^2$	B-B	B-R	P-C	B-B	B-R	P-C	B-B	B-R	P-C
$Z_{0^+}^2$	0.022	0.002	0	0.242	0.018	0.001	0.332	0.023	0.005
$Z_{2^+}^2$	0.113	0.056	0.001	0.154	0.029	0.002	0.109	0.284	0.005
$Z_{4^+}^2$	0.620	0.051	0.002	0.178	0.019	0	0.058	0.091	0
$Z_{6^+}^2$	0.110	0.003	0	0.327	0.010	0	0.025	0.001	0
$\sum_J Z_J^2$	0.865	0.112	0.003	0.901	0.076	0.003	0.524	0.399	0.010

de dos protones, pues allí no existen estados con  $J^-$ , y permitir estados de dos neutrones dentro de

Tabla 4.18: Dimensiones de las bases de dos (2.76-2.77) y cuatro (2.74) cuerpos de cada representación de partícula simple introducida hasta ahora.

	RL	RP	RC
$N_p + N_n$	34	73	463
$N_{4B}$	20	83	1651

los primeros 10 MeV de excitación.

- EHT<sup>(II)</sup>: Se limita el espacio de forma que contenga solo dos estados por cada  $J$  par. Esto es equivalente a incluir todos los estados de dos neutrones dentro de los primeros 5 MeV de excitación, mientras que todos los estados ligados de dos protones dentro de los 4.5 MeV de excitación deben ser incluidos.

Tabla 4.19: Porcentaje wf % de la función de onda de los estados  $0^+$  del  $^{44}\text{Ti}$  en la representación de polo perdida al truncar el espacio de Hilbert. Además, se explicita la variación absoluta de la energía  $\Delta E$  (en keV).

Espacio		$0_1^+$	$0_2^+$	$0_3^+$	$0_4^+$	$0_5^+$	$0_6^+$
EHT <sup>(I)</sup>	wf %	0.1 %	0.1 %	0.2 %	0.0 %	0.2 %	0.5 %
	$\Delta E$	0	6	18	6	17	38
EHT <sup>(II)</sup>	wf %	0.9 %	9.6 %	16 %	3.9 %	3.0 %	– %
	$\Delta E$	0	369	663	103	147	–

A partir de estos resultados, notemos que el estado fundamental incluso sigue siendo bien descripto con el espacio de Hilbert truncado EHT<sup>(II)</sup>, mientras que todos los excitados se ven totalmente perjudicados con este truncamiento. En cambio, si utilizamos el espacio EHT<sup>(I)</sup>, vemos que todos los estados calculados pierden menos del 1 % de su función de onda, y sufren variaciones energéticas por debajo de los 50 keV. Para entender su efecto a nivel computacional, mostramos en la Tabla 4.20 las diferencias de tamaño de las bases de la representación completa en cada uno de los espacios de Hilbert truncados. La ventaja más importante que se obtiene al aplicar el truncamiento al espacio de Hilbert es la disminución del tiempo de cálculo, pues esta reducción del tamaño  $N_{4B}$  en un par de órdenes de magnitud nos lleva a tiempos que rondan el minuto, cuando los cálculos sin truncar pueden demorar doce horas.

Tabla 4.20: Dimensiones de las bases de dos (2.76-2.77) y cuatro (2.74) cuerpos en la representación completa de partícula simple con diferentes espacios de Hilbert truncados.

	RC	RC-(I)	RC-(II)
$N_p + N_n$	463	43	20
$N_{4B}$	1651	76	8

Utilizando el espacio EHT<sup>(I)</sup>, volvemos a calcular los autovalores y autovectores de la ecuación de Schrödinger del  $^{44}\text{Ti}$  en representación completa, los cuales presentamos en la Tabla 4.21. Además, una

comparación visual con los resultados de la Tabla 4.16 se encuentra en la Figura 4.5. Quitando al estado fundamental, las diferencias a nivel energético son menores a 100 keV, siendo el estado  $0_6^+$  el de mayor discrepancia (81 keV) y el  $0_4^+$  el de menor (0 keV). Respecto a las diferencias a nivel función de onda, podremos identificarlas con mayor precisión cuando estemos calculando las amplitudes de formación, pero por lo pronto, no aparentan ser significativas. Si nos centramos únicamente en lo energético, podemos decir que para los estados  $0_1^+$  y  $0_4^+$  podemos aplicar un límite a la base de dos cuerpos pues la diferencia es nula, mientras que el resto de los estados poseen pérdidas al restringir la base de dos cuerpos, generando posibles diferencias significativas a la hora de calcular el decaimiento alfa en el formalismo de dos cuerpos.

Tabla 4.21: Amplitudes de onda de cuatro cuerpos de los seis primeros estados  $0^+$  del  $^{44}\text{Ti}$  obtenidos con la representación completa con el espacio de Hilbert truncado  $\text{EHT}^{(I)}$ , y sus energías en MeV.

$Z_{J\pi}^2$	$E_{0_1^+}$	$E_{0_2^+}$	$E_{0_3^+}$	$E_{0_4^+}$	$E_{0_4^+}$	$E_{0_6^+}$
	-33.423	-28.194	-26.823	-25.607	-25.196	-24.142
$Z_{0^+}^2$	0.607	0.093	0.218	0.024	0.262	0.373
$Z_{2^+}^2$	0.331	0.707	0.402	0.176	0.182	0.422
$Z_{4^+}^2$	0.055	0.085	0.028	0.676	0.214	0.146
$Z_{6^+}^2$	0.005	0.114	0.326	0.116	0.338	0.023
$\sum_J Z_J^2$	0.998	0.999	0.974	0.992	0.996	0.964

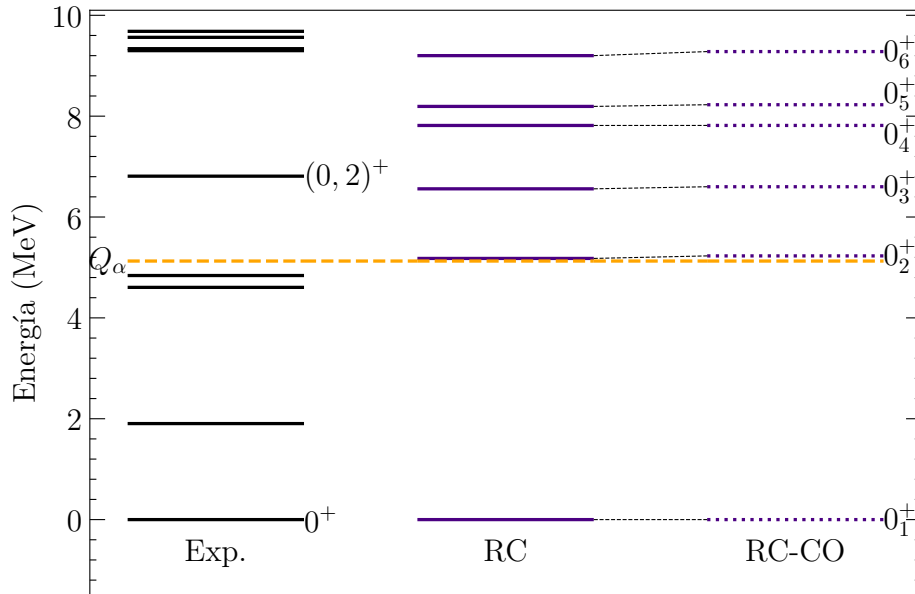


Figura 4.5: Comparación entre las energías experimentales [1] y calculadas utilizando la representación completa, con el espacio de Hilbert completo (RC) y truncado (RC-CO).

### 4.3.2. Telurio-104

Finalmente, en esta sección presentamos los resultados de la función de onda de cuatro cuerpos sobre el carozo  $^{100}\text{Sn}$  utilizando los resultados de la sección 4.2.2. En este caso, ajustamos el canal triplete-par de la interacción protón-neutrón para describir el estado fundamental del  $^{104}\text{Te}$ , con energía experimental  $E_{\text{gs}}^{\text{exp}}(^{104}\text{Te}) = -23.17(0.55)$  MeV de las Ref. [1, 18]. Este ajuste se realiza utilizando el algoritmo de mínimos cuadrados de la librería `SCIPY` de `PYTHON`<sup>2</sup> para obtener la intensidad necesaria en el canal triplete-par de la interacción protón-neutrón.

En primer lugar, vamos a trabajar con la representación de polo únicamente a fin de establecer las dimensiones necesarias de las bases de dos cuerpos para que la energía del estado fundamental del  $^{104}\text{Te}$  no varíe. Así, es necesario definir la cantidad de estados a incorporar dentro de las bases de dos cuerpos  $\mathcal{L}_n$  y  $\mathcal{L}_p$ . Para el par de neutrones, como su estado fundamental es ligado, podemos definirla de la manera usual: se incluyen todos los estados correlacionados cuya energía sea menor a la energía de separación de dos neutrones  $S_{2n} = 23.93(0.26)$  MeV. En cambio, para protones la estrategia debe ser diferente pues el estado fundamental ya pertenece al continuo de energía. Como nos ubicamos en la representación RP, todos los estados de dos protones pertenecen al continuo resonante de dos cuerpos.

Es entonces que podemos realizar un análisis de estabilidad de los resultados de la energía de cuatro cuerpos en función del tamaño de las bases  $\mathcal{L}_n$ ,  $\mathcal{L}_p$  y  $\mathcal{L}_{4B}$ . Si dejamos fijo el tamaño de la base  $\mathcal{L}_n$  en  $N_n = 302$ , restringimos el tamaño de  $\mathcal{L}_p$  en función de la parte real de las energías de dos protones. En la Figura 4.6 vemos que la energía del estado fundamental de cuatro cuerpos se estabiliza cuando tenemos más de  $N_{4B} = 2000$  elementos en la base de cuatro cuerpos, lo que equivale a incluir todos los estados del  $^{102}\text{Te}$  con una energía de excitación menor a los 10 MeV. Si comparamos este tamaño con los obtenidos en la representación de polo de los núcleos  $^{212}\text{Po}$  y  $^{44}\text{Ti}$ , vemos que 2000 elementos supera la cantidad de 1437 en la Tabla 3.15 y 83 en la Tabla 4.15, valores que ya implicaban tiempos de cálculo altos. Por lo cual, decidimos limitar la base de cuatro cuerpos a aproximadamente  $N_{4B} = 1000$  elementos, o una cota de 5 MeV de excitación en el  $^{102}\text{Te}$ . Para estos valores, la energía del estado fundamental del  $^{104}\text{Te}$  ya comienza a estabilizarse, como vemos en la Figura 4.6.

A partir de esto, en la representación de polo llevamos la intensidad del canal triplete-par ( $T = 0$ ) de la interacción  $V_{pn}$  a  $V_{\text{te}} = -58.797$  MeV para obtener la energía experimental del estado fundamental del  $^{104}\text{Te}$ . En la Tabla 4.22 presentamos la suma de los cuadrados de las amplitudes parciales obtenidas para el estado fundamental del  $^{104}\text{Te}$ . Allí observamos que por la distribución de estas amplitudes, la mayor localización se da en los estados  $0^+$  de dos cuerpos, y el resto se encuentra casi equitativamente distribuido en las otras amplitudes allí mostradas. Notemos que se muestra un  $\sim 90\%$  de la amplitud total, lo cual indica que aproximadamente un  $10\%$  de la función de onda se encuentra localizada en otros estados  $J$  de dos cuerpos que no aparecen en la Tabla ( $J$  impar o  $J$  par mayor a seis). Esta localización por fuera de los  $J$  pares representa valores superiores a los observados en los estados fundamentales del  $^{212}\text{Po}$  y del  $^{44}\text{Ti}$ . Finalmente, notemos que el valor del isoespín es el mismo que en el caso del núcleo  $^{44}\text{Ti}$ , donde ambos comparten la característica  $N = Z$ . Recordemos que este valor esperado del isoespín

---

<sup>2</sup>[https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.least\\_squares.html](https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.least_squares.html)

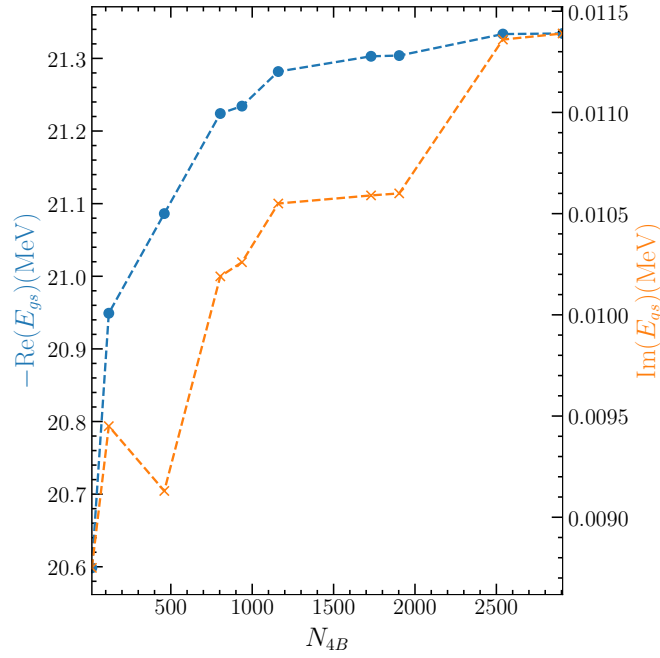


Figura 4.6: Evolución de la energía de cuatro cuerpos  $E_{gs}$  en función del tamaño de la base de cuatro cuerpos. Cálculos realizados con al representación de polo de partícula simple.

surge de un cálculo numérico, tal cual se desarrollo en el apéndice C, por lo cual podemos decir que su resultado es aproximadamente cero.

Tabla 4.22: Suma de los cuadrados de las amplitudes parciales de onda para el estado fundamental del núcleo  $^{104}\text{Te}$  obtenido utilizando la representación de polo. El valor esperado del isoespín en este estado es cero.

$Z_{J\pi}^2$	RP
$E_{gs}$	(-23.168, 0.016)
$Z_{0+}^2$	(0.535, 0.000)
$Z_{2+}^2$	(0.227, 0.000)
$Z_{4+}^2$	(0.100, 0.000)
$Z_{6+}^2$	(0.123, 0.001)

Para pasar a los cálculos en la representación completa, nos vemos obligados a realizar un estudio sobre el truncamiento del espacio de Hilbert en este núcleo. Esto no solo se debe a que en  $\mathcal{L}_n$  tendremos  $N_n = 925$  estados en la representación completa de partícula simple si incluimos a todos los ligados de dos neutrones correlacionados, sino que también para dos protones, existirán tanto estados del continuo resonante como no resonante, por lo cual el truncamiento de esta base es de suma necesidad para obtener un problema de dimensiones manejables a nivel computacional. Es así que seguiremos los pasos realizados en las secciones 3.3.1 y 4.3.1.1 de los núcleos previos.

### 4.3.2.1. Aproximación truncando el espacio de Hilbert

En primer lugar, intentemos establecer límites lógicos al espacio de Hilbert generado por los estados de dos cuerpos, basándonos en la Figura 4.3. Allí se aprecia que existen saltos marcados entre los niveles de energía de los núcleos  $^{102}\text{Sn}$  y  $^{102}\text{Te}$  alrededor de los 2 MeV y 4 MeV de excitación. Teniendo esto en cuenta, definimos los siguientes espacios de Hilbert truncados en función de la energía de excitación de los estados de dos nucleones:

- $\text{EHT}^{(I)}$ : Se limita el espacio de forma que se incluyan todos los estados dentro de los 4 MeV de excitación, tanto en  $nn$  como en  $pp$ .
- $\text{EHT}^{(II)}$ : Se limita el espacio de forma que se incluyan todos los estados dentro de los 2 MeV de excitación, tanto en  $nn$  como en  $pp$ .

Siguiendo la idea de lo realizado en los núcleos previos, utilizando la representación de polo, en la Tabla 4.23 comparamos que porcentaje de la amplitud total del estado fundamental se pierde cuando se limita el espacio, respecto a la función de onda de la Tabla 4.22. Además, presentamos el tamaño  $N_{4B}$  de la base de cuatro cuerpos en la representación de polo. Allí podemos observar que con estos espacios de Hilbert truncados se pierde el 2.1 % y 12 % de la función de onda, respectivamente, y la base de cuatro cuerpos pasa de tener 1160 elementos a tener 115 y 29, respectivamente.

Tabla 4.23: Porcentaje wf % perdido de la amplitud total de la función de onda de la Tabla 4.22 al utilizar distintos espacios de Hilbert truncados para calcular el estado fundamental del  $^{104}\text{Te}$  con la representación de polo. Además, se nota el tamaño de la base de cuatro cuerpos, el cual es  $N_{4B} = 1160$  para los cálculos con el espacio de Hilbert completo.

	$\text{EHT}^{(I)}$	$\text{EHT}^{(II)}$
wf %	2.1 %	12 %
$N_{4B}$	115	29

Si ahora pasamos a trabajar con la representación completa, como mencionamos previamente, tendremos estados de dos protones que pertenecen al continuo resonante y no resonante. Como sabemos que las resonancias de dos cuerpos tienen partes imaginarias de su energía que no supera los 100 keV, decidimos incorporar a la base todos los estados cuya parte imaginaria sea menor a los 100 keV, tal cual se realizó en el espacio de partícula simple, buscando además incorporar a la base de dos cuerpos la menor cantidad de estados correlacionados con el continuo no resonante de partícula simple, pues estos influyen mínimamente en el resultado de la función de onda final [75, 81]. De esta manera, las dimensiones de la base de cuatro cuerpos serán de  $N_{4B} = 348$  y  $N_{4B} = 68$  cuando limitamos los espacios de Hilbert  $\text{EHT}^{(I)}$  y  $\text{EHT}^{(II)}$ , respectivamente.

Teniendo todo esto en consideración, presentamos en la Tabla 4.24 la suma de los cuadrados de las amplitudes parciales del estado fundamental del  $^{104}\text{Te}$  obtenidas en la representación completa con el espacio de Hilbert truncado. Notemos que las amplitudes se ven levemente modificadas al pasar del espacio  $(I)$  al  $(II)$ . Más aun, utilizando el espacio  $\text{EHT}^{(II)}$  se pierde el 9 % de la función de onda total

obtenida con el espacio  $\text{EHT}^{(I)}$ , valor que es sumamente significativo. Es por ello que en los cálculos correspondientes al decaimiento alfa de este núcleo utilizaremos los resultados obtenidos con el espacio de Hilbert truncado  $\text{EHT}^{(I)}$ .

Tabla 4.24: Suma de los cuadrados de las amplitudes de ondas de cuatro cuerpos para el estado fundamental del núcleo  $^{104}\text{Te}$  obtenido utilizando la representación completa, con diferentes espacios de Hilbert truncados.

$Z_{J\pi}^2$	$\text{EHT}^{(I)}$	$\text{EHT}^{(II)}$
$E_{\text{gs}}$	-23.168	-23.168
$Z_{0^+}^2$	(0.584, 0.000)	(0.570, 0.000)
$Z_{2^+}^2$	(0.221, 0.000)	(0.213, 0.000)
$Z_{4^+}^2$	(0.063, 0.000)	(0.064, 0.000)
$Z_{6^+}^2$	(0.165, 0.000)	(0.149, 0.000)
$T$	0	0

En resumen, en este capítulo no solo se calcularon las funciones de onda de los estados fundamentales del Titanio-44 y del Telurio-104, ambos doblemente mágicos con  $N=Z$ , sino que también se obtuvieron los resultados de los estados excitados del Titanio-44. De esta manera, se identificó al estado  $0_3^+$  del  $^{44}\text{Ti}$  como candidato al decaimiento en alfa. Además, se identificó la importancia del continuo no resonante en ambos núcleos, con mayor significancia en el Telurio-104. Finalmente, destacamos que los estados de cuatro cuerpos construidos durante este capítulo se utilizarán en el próximo no solo para identificar la clusterización alfa, sino también para calcular los tiempos de vida media en decaimiento alfa.

## CAPÍTULO 5

### DETERMINACIÓN MICROSCÓPICA DEL TIEMPO DE VIDA MEDIA EN DECAIMIENTO ALFA

En este capítulo vamos a calcular el tiempo de vida del decaimiento alfa de los tres núcleos estudiados utilizando los resultados de los dos capítulos previos.

En primer lugar, describiremos el decaimiento alfa del estado fundamental del Polonio-212 tomando como base la construcción de la función de onda realizada en la sección 3.3 del capítulo 3, utilizando la representación completa de partícula simple. A nivel experimental, múltiples observaciones se han desarrollado a lo largo de los años en este núcleo, estableciendo hoy día el valor más exacto del tiempo de vida media en  $T_{1/2}^{\text{exp}}(^{212}\text{Po}_{\text{gs}}) = 0.2943(8) \mu\text{s}$ <sup>1</sup>.

Luego, nos centraremos en los estados excitados del Titanio-44, a fin de estudiar la clusterización del estado fundamental y poder establecer un tiempo de vida media del decaimiento alfa de nuestro estado candidato para describir el estado excitado  $(0, 2)^+$  experimental con una energía de excitación de 6.8 MeV. Respecto a la evidencia de una estructura  $\alpha$  constituida en este núcleo [147–149], son múltiples las reacciones nucleares que han observado esta características, incluso con energías de excitación superiores al límite del  $Q_\alpha$ . En cuanto a nivel teórico, múltiples cálculos se han realizado utilizando el modelo de capas con autofunciones del oscilador armónico o incluso el modelo de clúster [99, 150–153].

Finalmente, estudiaremos el decaimiento alfa del estado fundamental del Telurio-104. Para ello, tomaremos la función de onda construida en la sección 4.3.2.1 del capítulo 4. Notemos que la zona de la tabla de isótopos ubicados en las cercanías del Estaño-100 no solo cuenta con resultados recientes a nivel experimental de otros núcleos [16, 17], sino que también existen estimaciones del tiempo de vida principalmente del Telurio-104 [18, 19]. Estos últimos resultados que datan del 2019 establecen un tiempo de vida media menor a los 4 ns, es decir, tres órdenes de magnitud menor que el decaimiento alfa en el Polonio-212. Es por este motivo que el decaimiento alfa del Titanio-104 sea considerado “superpermitido” (*superallowed alpha decay* en inglés) [6–8].

El capítulo está ordenado de la siguiente manera: en la sección 5.1 construiremos el decaimiento alfa pensado como un problema de dos cuerpos, cuyo formalismo fue introducido en la sección 2.2.1, aplicado a los tres núcleos deseados; en la sección 5.2 calcularemos la amplitud de formación y los factores espectroscópicos, antes y después de renormalizar, partiendo del formalismo de las secciones 2.2.2 y 2.2.3; y finalmente en la sección 5.4 calcularemos los anchos absolutos y los tiempos de vida media en decaimiento alfa de los tres núcleos a partir de la ecuación de Arima (2.94). Los apéndices E y I cuentan con información complementaria a este capítulo y serán citados durante las distintas secciones.

---

<sup>1</sup>Promedio ponderado de 293.9 ns de la ref. [144] y 294.7 ns de la Ref. [145], con incertezas sistemáticas y estadísticas combinadas en cuadratura previo a haber tomado el promedio ponderado. Un estudio reciente [146] reporta una vida media de 298.8 ns, y si se incorpora este valor, el promedio ponderado queda en 295.2 ns. Información sacada de la Ref. [1].

## 5.1. Modelo de dos cuerpos

En esta sección, calcularemos los anchos absolutos de partícula simple  $\Gamma^{\text{SP}}$  desarrollados en el modelo de dos cuerpos del decaimiento introducido en la sección 2.2.1 del capítulo **MARCO TEÓRICO**. Los calcularemos para los estados fundamentales de los núcleos Polonio-212 y Telurio-104, y uno de los estados excitados del Titanio-44.

### 5.1.1. Polonio-212 como Plomo-208 más $\alpha$ puntual

Para el Polonio-212, tendremos que el valor  $Q_\alpha = 8.954$  MeV, por lo cual su estado fundamental decae en alfa espontáneamente. A partir de la ecuación (2.105), vemos que la energía de la partícula alfa  $\varepsilon^\alpha$  depende también del apantallamiento electrónico. El valor en este caso es  $\Delta E_{\text{se}} = 31.8$  keV, por lo cual, la energía de la partícula alfa en el estado fundamental será:

$$\varepsilon_{\text{gs}}^\alpha = 8.986 \text{ MeV} \quad (5.1)$$

Entonces, en nuestro modelo de dos cuerpos buscamos obtener la misma energía. Así, utilizando el código computacional ANTI [106], calculamos la energía de la partícula alfa en el modelo de dos cuerpos. Notemos que  $\varepsilon_{\text{gs}}^\alpha > 0$ , por lo cual decimos que el estado fundamental se encuentra en el continuo de energía del decaimiento alfa, y siguiendo la idea de nuestro modelo de capas complejo, esta energía tendrá una parte imaginaria no nula.

Para modelizar la interacción entre la partícula alfa y el carozo, como se definió en la sección 2.2.1, utilizaremos un potencial de Woods-Saxon con parámetros de difusividad  $a$  y radio reducido  $r_0$  tomados de la Ref. [154], junto con la interacción coulombiana. La intensidad del potencial se establece de manera que la función de onda de partícula simple  $u^\alpha$  obtenida respete la cantidad de nodos  $N$  definidos teniendo en cuenta la conservación de cuantos del oscilador armónico definida en la ecuación (2.117). Para esta caso, tendremos

$$L = 0 \quad (5.2)$$

$$\mathcal{N}_p = 4 \quad (5.3)$$

$$\mathcal{N}_n = 5 \quad (5.4)$$

Entonces,

$$N = 11 \quad (5.5)$$

Antes de presentar los resultados, notemos que existe una dependencia importante de los resultados modelados con los parámetros  $a$  y  $r_0$  del potencial (ver apéndice I y Ref. [154]). Teniendo en cuenta lo realizado por la Ref. [154], fijamos  $r_0$  de forma que  $R = 7.79$  fm y la difusividad será limitada por ( $0.60 \leq a \leq 0.75$ ) fm, valores que aseguran un ajuste aceptable a los datos experimentales. Por esto, decidimos presentar nuestros resultados calculados con  $a = 0.65$  fm, y al finalizar la sección incorporaremos los resultados con los máximos y mínimos  $a_{\text{max}} = 0.75$  fm y  $a_{\text{min}} = 0.6$  fm, respectivamente, de manera tal que podamos estimar una cota de error.

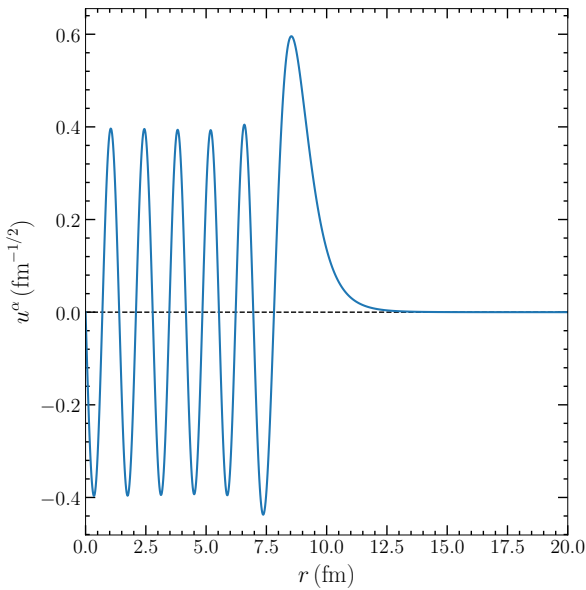
Teniendo esto en cuenta, el potencial que describe la energía de la partícula alfa ubicada en el estado fundamental será  $V_0 = 143.465$  MeV. Notemos que éste valor es del orden de los obtenidos en la Ref. [154]. Utilizando este valor de intensidad, obtenemos que la energía del estado fundamental será

$$\Re(\varepsilon_{gs}^\alpha) = 8.986 \text{ MeV} \quad (5.6)$$

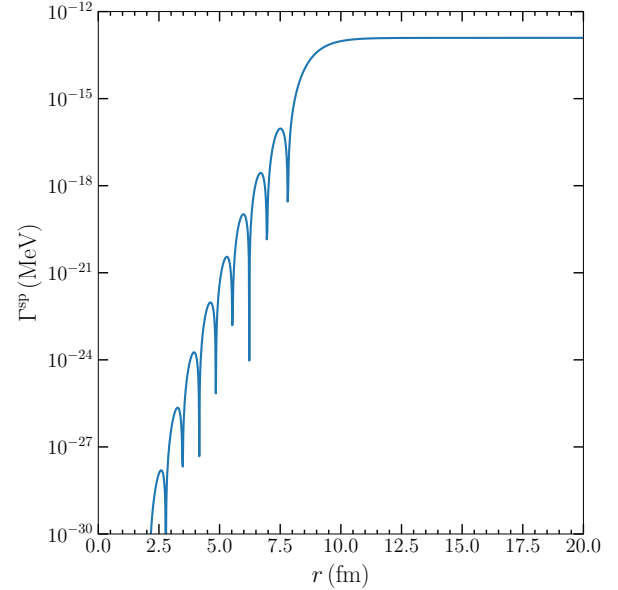
$$\Im(\varepsilon_{gs}^\alpha) = -0.619 \times 10^{-13} \text{ MeV} \quad (5.7)$$

La función de onda correspondiente a la partícula alfa en el estado fundamental se presenta en la Fig. 5.1a. A partir de esta función de onda, partimos de la ecuación de la corriente (2.107) con  $L = 0$  para obtener el correspondiente ancho de partícula simple (ver su convergencia en la Figura 5.1b)

$$\Gamma^{\text{SP}} = 0.123 \times 10^{-12} \text{ MeV} \quad (5.8)$$



(a) Parte real de la función de onda de la partícula alfa en el modelo de dos cuerpos correspondiente a la energía del estado fundamental del  $^{212}\text{Po}$ . La parte imaginaria no se aprecia en estos ordenes de magnitud.



(b) Convergencia del ancho en el modelo de dos cuerpos correspondiente a la energía del estado fundamental del  $^{212}\text{Po}$  calculada con una difusividad  $a = 0.65$  fm.

Figura 5.1: Comportamiento de la función de onda y el ancho del estado fundamental del núcleo  $^{212}\text{Po}$ .

Si consideramos las posibles variaciones en la determinación del parámetro  $a$  en el potencial de Woods-Saxon, podemos determinar que el ancho absoluto de partícula simple se encuentra limitado por las siguientes cotas:  $\Gamma_{a=0.75 \text{ fm}}^{\text{SP}}(\text{gs}) = 0.322 \times 10^{-12} \text{ MeV}$  y  $\Gamma_{a=0.6 \text{ fm}}^{\text{SP}}(\text{gs}) = 0.076 \times 10^{-12} \text{ MeV}$ . A partir de esto, podemos establecer que el ancho absoluto de partícula simple para el estado fundamental del  $^{212}\text{Po}$  será:

$$\Gamma^{\text{SP}} = \left(0.123^{+0.199}_{-0.047}\right) \times 10^{-12} \text{ MeV} \quad (5.9)$$

Este ancho será combinado en las próximas secciones con el factor espectroscópico renormalizado  $S$  a través de la ecuación de Arima (2.94) para finalmente obtener una estimación del tiempo de vida medio en decaimiento alfa del estado fundamental del  $^{212}\text{Po}$ .

Como curiosidad, notemos que en la Ref. [154] se comenta que tomar funciones de onda que difieran en un nodo, modifica el resultado en un 25 %. Además, en la Ref. [63], se menciona que cuando uno de los elementos es pesado, la ecuación de Wildermuth se vuelve ambigua, pues las capas del oscilador comienzan a mezclarse y la identificación ya no es tan obvia. Teniendo esto en cuenta, calculamos  $\bar{\Gamma}^{\text{SP}}$  para el estado fundamental, pero ahora la función de onda tendrá 12 nodos. Así, obtenemos  $\bar{\Gamma}^{\text{SP}}(g_{N=12}) = 0.177 \times 10^{-12} \text{ MeV}$ , por lo que efectivamente aumentar el número de nodos aumenta el ancho, pero en nuestro caso la diferencia es de más del 40 %.

### 5.1.2. Titanio-44 como Calcio-40 más $\alpha$ puntual

En este núcleo en particular, como mencionamos en la sección 4.3.1, nuestro candidato a decaimiento alfa es el estado  $0_3^+$  obtenido con la representación completa, que se encuentra en las cercanías del estado experimental  $(0, 2)^+$ .

La principal diferencia respecto al Polonio-212 es que el estado fundamental del  $^{44}\text{Ti}$  no decae en alfa pues  $Q_\alpha = -5.127 \text{ MeV}$ . Recordemos que este valor fue marcado en la Figura 4.4. Así, a partir de la ecuación (2.105), y como  $\Delta E_{\text{se}} = 4.7 \text{ keV}$ , tendremos que una partícula alfa puntual asociada a nuestro estado  $0_3^+$  de la representación completa tendrá una energía

$$\varepsilon_3^\alpha = 1.437 \text{ MeV} \quad (5.10)$$

Entonces, tal cual realizamos para el estado fundamental del Polonio-212, utilizando el código computacional ANTI [106], calculamos la energía de la partícula alfa en el modelo de dos cuerpos. Del análisis realizado en el apéndice I y su aplicación al  $^{212}\text{Po}$ , sabemos que existe una dependencia entre los parámetros  $a$  y  $r_0$  del potencial central y los tiempos de vida media de partícula simple obtenidos. Es por ello que para este núcleo proponemos dos parametrizaciones posibles de estos: (I):  $r_0 = 1.278 \text{ fm}$  y  $a = 0.786 \text{ fm}$  correspondientes al campo medio utilizado para protones (ver Tabla 4.2), y (II):  $r_0 = 0.68 \text{ fm}$  y  $a = 1.05 \text{ fm}$  tomados de la Ref. [155].

Por último, antes de calcular la función de onda de partícula simple correspondiente al estado  $0_3^+$ , debemos establecer la cantidad de nodos que esta función debe tener a partir de la ecuación (2.117). Para esta caso, tendremos

$$L = 0 \quad (5.11)$$

$$\mathcal{N}_p = 3 \quad (5.12)$$

$$\mathcal{N}_n = 3 \quad (5.13)$$

Entonces,

$$N = 6 \quad (5.14)$$

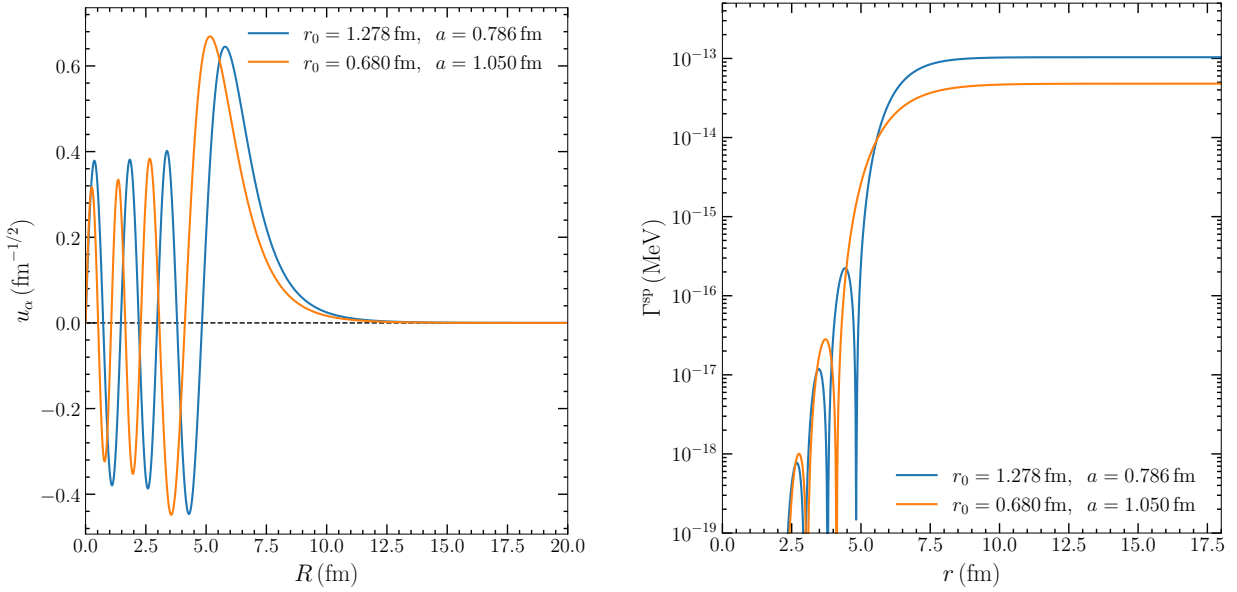
Teniendo esto en cuenta, las intensidades del potencial de Woods-Saxon en cada parametrización que describen correctamente a una partícula alfa con energía  $\varepsilon_3^\alpha = 1.437 \text{ MeV}$  serán  $V_0^{(I)} = 124.341 \text{ MeV}$  y  $V_0^{(II)} = 276.740 \text{ MeV}$ . Utilizando estas intensidades obtenemos las siguientes energías

$$\Re(\varepsilon_{\text{gs}}^\alpha)(I, II) = 1.437 \text{ MeV} \quad (5.15)$$

$$\Im(\varepsilon_{\text{gs}}^\alpha)(I) = -0.517 \times 10^{-13} \text{ MeV} \quad (5.16)$$

$$\Im(\varepsilon_{\text{gs}}^\alpha)(II) = -0.238 \times 10^{-13} \text{ MeV} \quad (5.17)$$

Mientras que en la Figura 5.2a presentamos la función de onda obtenida con las dos parametrizaciones posibles del potencial de Woods-Saxon. Notemos que la parametrización de la Ref. [155] tiene el efecto de comprimir la función de onda obtenida con los parámetros de la Tabla 4.2 y localizarla más en el pico a la vez que pierde probabilidad a distancias más cortas.



(a) Parte real de la función de onda de la partícula alfa en el modelo de dos cuerpos correspondiente a la energía del estado  $0_3^+$  del  $^{44}\text{Ti}$  obtenida con diferentes conjuntos de parámetros.

(b) Convergencia del ancho en el modelo de dos cuerpos correspondiente a la energía del estado  $0_3^+$  del  $^{44}\text{Ti}$  calculada con diferentes conjuntos de parámetros.

Figura 5.2: Comportamiento de la función de onda y el ancho del estado  $0_3^+$  del núcleo  $^{44}\text{Ti}$  obtenidos con los parámetros de Woods-Saxon de la Tabla 4.2 (azul) y de la Ref. [155] (naranja).

Tomando entonces las funciones de onda calculadas, podemos utilizar la ecuación de la corriente (2.107) para obtener los anchos de partícula simple  $\Gamma^{\text{sp}}(I) = 0.104 \times 10^{-12} \text{ MeV}$  y  $\Gamma^{\text{sp}}(II) = 0.048 \times 10^{-12} \text{ MeV}$  (ver su convergencia en la Figura 5.2b). Notemos que la diferencia de los resultados obtenidos con las dos parametrizaciones son importante. Cuantitativamente, los parámetros  $r_0$  y  $a$  de la Ref. [155] generan anchos absolutos que valen la mitad que los obtenidos utilizando los parámetros  $r_0$  y  $a$  de la Tabla 4.2. Es por ello que estableceremos un valor  $\bar{\Gamma}^{\text{sp}}$  como el promedio de ambas parametrizaciones,

y estimaremos una cota de error en función de los valores individuales. De esta manera, obtenemos el siguiente ancho absoluto de partícula simple

$$\Gamma_3^{\text{sp}} = (0.076 \pm 0.028) \times 10^{-12} \text{ MeV} \quad (5.18)$$

### 5.1.3. Telurio-104 como Estaño-100 más $\alpha$ puntual

Para este núcleo en particular, tenemos que  $Q_\alpha = 5.1(2) \text{ MeV}$  de la Ref. [18], lo cual indica que el estado fundamental decae espontáneamente en alfa. Este valor difiere mínimamente del utilizado en la Ref. [65], y es mayor que aquel extrapolado en la Ref. [156]. Así, podemos construir la energía de una partícula alfa en el estado fundamental a partir de la ecuación (2.105). Además,  $\Delta E_{\text{se}} = 16.1 \text{ keV}$ , por lo cual, la energía será:

$$\varepsilon_{\text{gs}}^\alpha = 5.116 \text{ MeV} \quad (5.19)$$

Tengamos en cuenta que  $Q_\alpha$  está indeterminado en 200 keV. Por ello, podemos obtener un rango también de energías alfa tal que:  $4.916 \text{ MeV} \leq \varepsilon^\alpha(\text{gs}) \leq 5.316 \text{ MeV}$ .

Utilizando el código ANTI [106], modelizamos el problema como una interacción de dos cuerpos, donde la intensidad del potencial central es ajustada a la energía  $\varepsilon_\alpha(\text{gs})$  a fin de obtener la parte imaginaria correspondientes a estas energías que pertenecen al continuo del alfa. Como vimos durante el trabajo realizado con los dos núcleos previos, la modelización de la interacción a través de Coulomb+Woods-Saxon depende de los parámetros  $a$  y  $r_0$ . Para el estado fundamental de este núcleo en particular, utilizaremos los mismos parámetros del  $^{212}\text{Po}$  tomados de la Ref. [154], teniendo en cuenta sus tres valores  $a = 0.65 \text{ fm}$ ,  $a_{\text{max}} = 0.75 \text{ fm}$  y  $a_{\text{min}} = 0.6 \text{ fm}$ . La decisión de utilizar los datos de la Ref. [154] es que nos permitirá realizar una comparación con la Ref. [65]. En cuanto al número de nodos de la función de onda  $u^\alpha$  asociada a  $\varepsilon^\alpha$ , partiendo de la ecuación (2.117) con:

$$L = 0 \quad (5.20)$$

$$\mathcal{N}_p = 4 \quad (5.21)$$

$$\mathcal{N}_n = 4 \quad (5.22)$$

Entonces,

$$N = 8 \quad (5.23)$$

La correspondiente función de onda se presenta 5.3a.

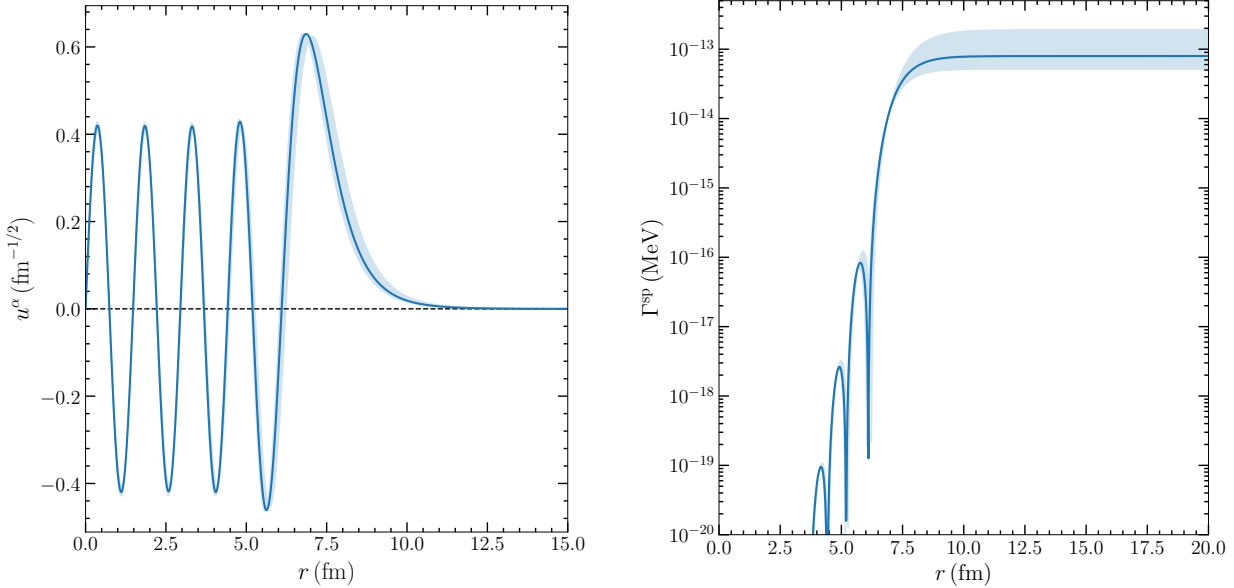
Si calculamos entonces el ancho absoluto de partícula simple para una energía  $\varepsilon = 5.116 \text{ MeV}$  del estado fundamental del  $^{104}\text{Te}$ , obtenemos:

$$\Gamma^{\text{sp}}(\text{gs}) = 0.079 \times 10^{-12} \text{ MeV} \quad (5.24)$$

cuya convergencia se presenta en la Figura 5.3b. Tal cual realizamos para el caso del estado fundamental del Polonio-212, podemos estimar una cota mínima y máxima del ancho absoluto en función de los límites del parámetro  $a$  establecidos por la Ref. [154]. Entonces, obtenemos que el ancho absoluto de partícula simple estará limitado por  $\Gamma_{a=0.75 \text{ fm}}^{\text{sp}}(\text{gs}) = 0.190 \times 10^{-12} \text{ MeV}$  y  $\Gamma_{a=0.6 \text{ fm}}^{\text{sp}}(\text{gs}) = 0.052 \times 10^{-12} \text{ MeV}$ .

De esta manera, podemos establecer que el ancho absoluto de partícula simple para el estado fundamental del  $^{104}\text{Te}$  con  $Q_\alpha = 5.1 \text{ MeV}$  será:

$$\Gamma^{\text{SP}} = \left(0.079^{+0.111}_{-0.027}\right) \times 10^{-12} \text{ MeV} \quad (5.25)$$



(a) Parte real de la función de onda de la partícula alfa asociada al estado fundamental del  $^{104}\text{Te}$  con la representación completa. La parte imaginaria no se distingue en estos ordenes de magnitud.

(b) Convergencia del ancho en el modelo de dos cuerpos correspondiente a la energía del estado fundamental del  $^{104}\text{Te}$ .

Figura 5.3: Comportamiento de la función de onda y el ancho del estado fundamental del núcleo  $^{104}\text{Te}$ . El área pintada encierra los máximos y mínimos presentados en las ecuaciones calculados con los diferentes valores de la difusividad  $a$ .

Si consideramos que el valor  $Q_\alpha$  presenta una cota de error de 200 keV, podemos construir el ancho  $\Gamma^{\text{SP}}$  del estado fundamental a través de la ecuación de la corriente (2.107) dependiente del  $Q_\alpha \propto \varepsilon^\alpha$ . Así, presentamos en la Figura 5.4 los resultados obtenidos. Allí notamos que la dependencia del  $\Gamma^{\text{SP}}$  con  $Q_\alpha$  es exponencial, lo cual implica que nuestros resultados estarán fuertemente ligados al valor de él. Además, en la misma Figura se denota como un área pintada los valores encerrados por los máximos y mínimos obtenidos con los diferentes valores de la difusividad  $a$ . En próximas secciones, combinaremos estos anchos absolutos con el factor espectroscópico renormalizado  $\mathcal{S}$  para obtener los tiempos de vida media en decaimiento alfa estimados del núcleo Telurio-104.

## 5.2. Amplitud de formación

En esta sección construiremos la amplitud de formación  $g_L(r)$  definida en la ecuación (2.128) para los estados bajo estudio de los tres núcleos Polonio-212, Titanio-44 y Telurio-104. Como estos siempre serán estados de momento angular  $J^\pi = 0^+$  y la función de onda de la partícula alfa corresponde al

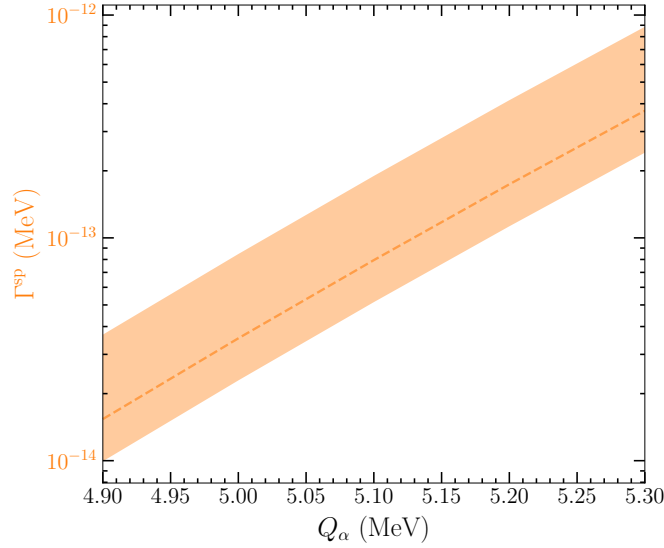


Figura 5.4: Anchos absolutos de partícula simple  $\Gamma^{\text{sp}}$  en función del  $Q_\alpha$  para el estado fundamental del  $^{104}\text{Te}$ . La línea punteada indica los valores calculados con  $a = 0.65$  fm, mientras que las áreas pintadas encierran los máximos y mínimos obtenidos con los diferentes valores de la difusividad  $a$ .

estado  $0s$  del oscilador armónico, tendremos que  $L = 0$ . Además, calcularemos los respectivos factores espectroscópicos convencionales  $S$ .

### 5.2.1. Polonio-212

Comenzaremos en esta sección con la construiremos la amplitud de formación  $g_L(r)$  para los estados  $0^+$  del  $^{212}\text{Po}$  obtenidos utilizando las tres representaciones de partícula simple. Recordemos que para este núcleo teníamos dos aproximaciones para estudiar la representación completa: MC, aplicando la configuración principal a la función de onda (sección 3.3.2); y CO, truncando el espacio de Hilbert (sección 3.3.1).

En las Tablas 3.14, 3.17 y 3.21 de la sección 3.3 pudimos caracterizar los diferentes estados del núcleo  $^{212}\text{Po}$  en función de sus amplitudes parciales. A partir de estas podremos calcularemos las amplitudes de formación correspondientes a partir de la ecuación (2.128). Antes de pasar a los resultados, vamos a puntualizar la importancia de las amplitudes  $b_{j_1 j_2 j_3 j_4}^{J_n J_p J}$ , en particular a la cantidad de ellas. En el caso de este núcleo, tendremos  $n^\circ \approx \{83000, 1400000, 4200000, 14000000\}$  amplitudes  $b$  para las representaciones RL, RP, RC-MC y RC-CO, respectivamente. Esto implica que debemos realizar las integrales  $\int d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3$  con sus respectivos cambios de variable (ver sección D.1 del apéndice D) unas  $10^6$  veces. Esto tiene como consecuencia tiempos de cálculo extremadamente largos, incluso superiores al mes de cálculo con la representación  $RC - CO$ , por lo cual debemos establecer una manera de limitar esta cantidad. Para fijar un límite de manera que afecte los menos posible al resultado físico final, probamos diferentes cotas  $b^{\text{max}}$  a los valores de la parte real y parte imaginaria de las amplitudes  $b_{j_1 j_2 j_3 j_4}^{J_n J_p J}$ , y calculamos la amplitud total del estado de cuatro cuerpos en cada caso, el cual debe estar normalizado a uno. En la Tabla 5.1 se muestra como ejemplo la norma correspondiente que obtenemos con cada valor de

$b^{\max}$ , y la cantidad de amplitudes parciales que se incorporan  $n^{\circ}$ , para el estado fundamental utilizando la representación RC-CO. Notamos como *Full* aquellos resultados que se obtienen sin límite alguno.

Tabla 5.1: Norma (notar que  $\Im m$  (Norma)  $\times 10^3$ ) y cantidad de amplitudes parciales  $n^{\circ}$  que se tienen en cuenta con diferentes cotas aplicadas a la parte real e imaginaria de las amplitudes del estado fundamental del  $^{212}\text{Po}$ . Sus amplitudes y energía fueron introducidas en la Tabla 3.17.

$b^{\max}$	$n^{\circ}$	Norma
Full	14435078	(1, 0.023)
$10^{-6}$	67193	(1, 0.023)
$10^{-5}$	18551	(1, 0.023)
$10^{-4}$	4212	(1, 0.021)
$10^{-3}$	768	(1, 0.006)

En función de este análisis, vemos que las diferencias de las normas son mínimas en la parte real y en la segunda cifra en la parte imaginaria, para todos los límites  $b^{\max}$  excepto el mayor  $10^{-3}$ . La diferencia significativa está en la cantidad de amplitudes parciales que tendremos que calcular, lo que implica tiempos de cálculo del orden de la veintena de horas en lugar de la veintena de días. De esta manera, decidimos aplicar a ambos casos la cota  $10^{-4}$ . Este mismo comportamiento que fue observado para la representación RC-CO, sucede con las demás, y para los estados excitados, por lo cual la cota  $b^{\max} = 10^{-4}$  es la misma.

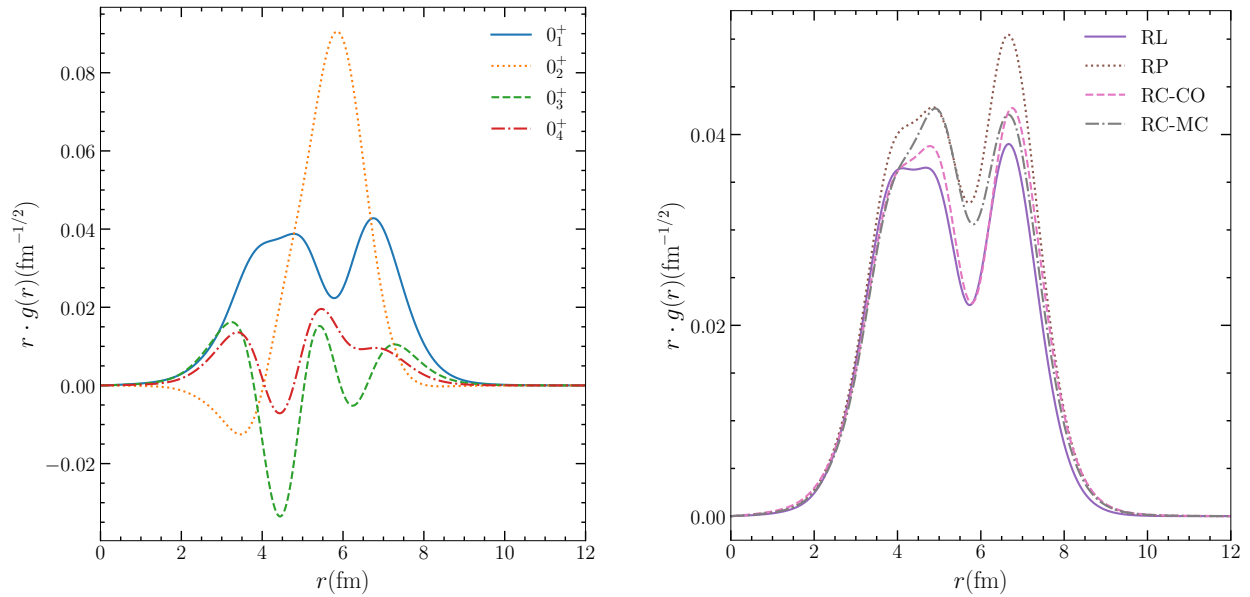
En la Figura 5.5a se presentan las amplitudes de formación de los estados del Polonio-212 calculadas con la representación RC-CO, mientras que en la Figura 5.5b se presentan las amplitudes del estado fundamental obtenidas para cada una de las representaciones de partícula simple. El comportamiento general de  $g(r)$  se corresponde con observaciones previas [65], donde se nota que su forma funcional no se corresponde a la función de onda de partícula simple de la Figura 5.1a, ni mantiene un número de nodos constante. En particular, notemos que el estado fundamental posee la amplitud de formación que más probabilidad ocupa para  $R > 8$  fm, pero no es la más intensa y localizada. Estas características pertenecen al primer estado excitado, con un máximo cercano a los  $R = 6$  fm. Los demás estados excitados presentan un comportamiento más oscilatorio. Respecto a la comparación entre las representaciones, vemos en la Figura 5.5b que para el caso del estado fundamental, el primer máximo de  $g(r)$  se observa que las representaciones RL y RC-CO tiene una intensidad prácticamente igual, mientras que las representaciones RP y RC-MC tienen un primer máximo más intenso. Además, vemos que en el segundo máximo la representación RP es la más intensa, mientras que la representación completa en sus dos aproximaciones tiene intensidades similares.

Estas amplitudes se traducen entonces en los factores espectroscópicos de la Tabla 5.2. De manera general, notemos que todos los  $S$  son menores o iguales a  $10^{-2}$ , por lo que indican una clusterización de estos estados por debajo del 1 %. Si comparamos con la bibliografía los valores del estado fundamental, vemos que nuestros  $S$  son dos órdenes de magnitud más intensos que los de la Ref. [3] y un orden de magnitud mayor que los obtenidos en la Ref. [63] con el modelo de capas, cuya principal diferencia entre estos modelos y el nuestro es el tamaño de la representación de partícula simple y la inclusión del continuo no resonante. Igualmente, estos valores aun se ubican lejos del 30 % de clusterización

Tabla 5.2: Energías de cuatro cuerpos  $E_{J\pi}$  (en MeV) y factores espectroscópicos convencionales  $S$  de los estados  $0^+$  del  $^{212}\text{Po}$  calculados a través de las funciones de onda construidas en la sección 3.3 con las representaciones de partícula simple utilizadas.

$i$	RL		RP		RC-MC		RC-CO	
	$E_{J\pi}_i$	$S$	$\Re e(E_{J\pi}_i)$	$S$	$E_{J\pi}_i$	$S$	$E_{J\pi}_i$	$S$
1	-19.341	0.0047	-19.341	0.0071	-19.341	0.0058	-19.341	0.0052
2	-18.432	0.0095	-18.434	0.0119	-18.507	0.0102	-18.234	0.0107
3	-18.025	0.0012	-17.960	0.0012	-18.073	0.0011	-18.024	0.0011
4	-17.495	0.0005	-17.448	0.0006	-17.522	0.0005	-17.482	0.0006

obtenido con el modelo de clúster [63]. Este principal dilema es el que nos lleva a pensar en la necesidad una renormalización de la amplitud de formación introducida, tal cual fue presentada en la sección 2.2.3. Respecto a una comparación entre representaciones, notemos que en los dos primeros estados la inclusión del continuo no resonante actúa como corrector del factor espectroscópico obtenido en RP, pues los valores de la representación completa se ubican entre aquellos de la representación ligada y la de polo. En cambio, para el estado  $0_3^+$  prácticamente no hay diferencias entre las representaciones de partícula simple, mientras que para el estado  $0_4^+$ , el valor de  $S$  varía mucho en función de la aproximación que se haya tomado.



(a) Amplitudes de formación de los diferentes estados  $0^+$  del núcleo  $^{212}\text{Po}$  obtenidas utilizando la representación RC-CO de partícula simple.

(b) Amplitudes de formación del estado fundamental obtenidas utilizando diferentes representaciones de partícula simple.

Figura 5.5: Diferentes amplitudes de formación  $g(r)$  obtenidas con las representaciones de partícula simple utilizadas en la construcción del  $^{212}\text{Po}$ .

### 5.2.2. Titanio-44

A continuación calculamos  $g_L(r)$  para los seis primeros estados  $0^+$  del  $^{44}\text{Ti}$ . El proceso de análisis es similar al desarrollado en el  $^{212}\text{Po}$ , por lo cual centraremos nuestro estudio únicamente en los resultados obtenidos con la representaciones de polo y completa de partícula simple. Esto también pues la importancia del continuo resonante se determinó en la sección 4.3.1 al apreciar la variación del espectro de energía entre RL y RP.

Tal cual realizamos para los estados del  $^{212}\text{Po}$ , vamos a restringir la cantidad de amplitudes  $b_{j_1 j_2 j_3 j_4}^{J_n J_p J}$  que tenemos en este nuevo núcleo. En particular, tendremos  $n^\circ \approx 8 \times 10^7$  amplitudes  $b$  para los estados estudiados, por lo cual es de suma necesidad limitar esta cantidad a la hora de calcular la amplitud de formación  $g(r)$  a través de la ecuación (2.128). En la Tabla 5.3 mostramos como ejemplo la amplitud total obtenida en el estado fundamental calculado con la representación completa a medida que se limitan la cantidad de amplitudes parciales en función de una cota  $b^{\max}$  a los valores de su parte real e imaginaria. Notamos como *Full* aquellos resultados que se obtienen sin cota alguna.

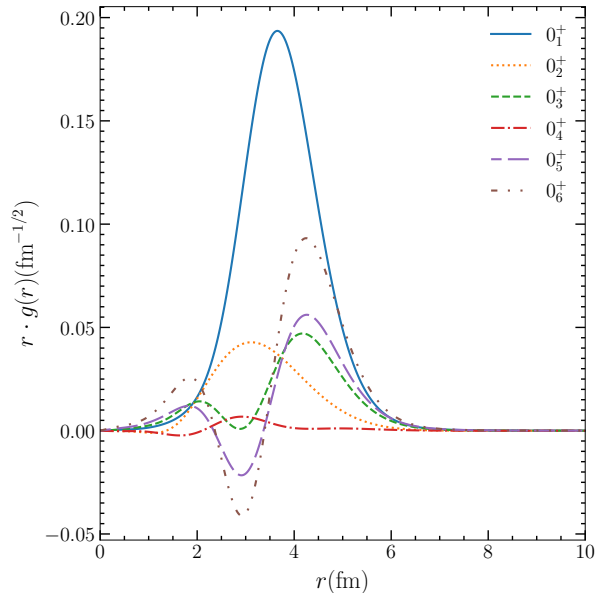
Tabla 5.3: Norma (notar que  $\Im\text{m}(\text{Norma}) \times 10^3$ ) y cantidad de amplitudes parciales  $n^\circ$  que se tienen en cuenta con diferentes cotas aplicadas a la parte real e imaginaria de las amplitudes del estado fundamental del Titanio-44. Sus amplitudes y energía fueron calculadas con la representación completa de partícula simple introducidas en la Tabla 4.16 y la Figura 4.4.

$b^{\max}$	$n^\circ$	Norma
Full	79489996	(1, -0.129)
$10^{-6}$	183846	(1, -0.129)
$10^{-5}$	47550	(1, -0.129)
$10^{-4}$	9029	(1, -0.134)
$10^{-3}$	1292	(1, -0.237)

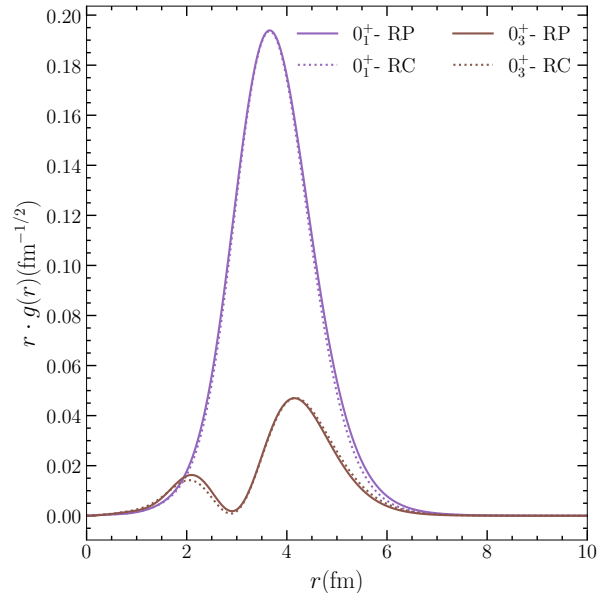
A partir de este análisis, notamos que las diferencias de las normas son nulas en la parte real y en la segunda cifra significativa en la parte imaginaria, para todas las cotas excepto la mayor  $10^{-3}$ . El beneficio de este proceso está en la cantidad de amplitudes parciales que tendremos que calcular, ya que sin cota tenemos cerca de  $10^9$ , mientras que para la cota  $10^{-4}$  logramos disminuir esta cantidad en casi 4 órdenes de magnitud, y tal cual sucedía con el Polonio-212, esto implica tiempos de cálculos reducidos. El mismo comportamiento es observado en los estados excitados, por lo cual la cota  $b^{\max} = 10^{-4}$  es la misma para todos los estados y todas las representaciones.

Así, obtenemos las amplitudes de formación de la representación RC para los estados bajo estudio, las cuales son presentadas en la Figura 5.6a. Si analizamos la forma funcional de la amplitud de formación, el comportamiento es similar al observado en el estudio del núcleo  $^{212}\text{Po}$  y valen las mismas consideraciones del caso. En particular, vemos que el estado fundamental posee la amplitud más intensa, cuyo máximo se localiza antes de los 4 fm, mientras que el primer excitado también presenta un único pico pero localizado más cerca de los 3 fm, y el resto de las amplitudes tienen características más ondulatorias. Notemos también la particularidad del estado  $0_4^+$  cuya amplitud es casi nula, y solo presenta alguna intensidad antes de los 4 fm. De las funciones de onda de la Tabla 4.16 teníamos que el estado  $0_3^+$  era uno de

los que aparentaba mayor colectividad, pero su  $g(r)$  aun no aparenta esta característica. A diferencia de lo ocurrido para el  $^{212}\text{Po}$ , donde se observaba que la amplitud que más perduraba a medida que se aumentaba la distancia  $r$  era la del estado fundamental, aquí vemos que la amplitud del estado  $0_6^+$  es la que luego de los 5 fm es más intensa. Para completar la información, en la Figura 5.6b realizamos una comparación para el estado fundamental y el  $0_3^+$  de interés de decaimiento una comparación de sus amplitudes obtenidas en las dos representaciones de partícula simple que incluyen el continuo. Notamos así que las diferencias no son apreciables en ninguno de los dos estados.



(a) Amplitudes de formación de los diferentes estados  $0^+$  del núcleo  $^{44}\text{Ti}$  obtenidas utilizando la representación completa de partícula simple.



(b) Amplitudes de formación del estado fundamental y el  $0_3^+$  del núcleo  $^{44}\text{Ti}$  obtenidas utilizando diferentes representaciones de partícula simple.

Figura 5.6: Diferentes amplitudes de formación  $g(r)$  obtenidas con las representaciones de partícula simple utilizadas en la construcción del  $^{44}\text{Ti}$ .

A partir de la amplitud de formación  $g(r)$  podemos calcular los factores espectroscópicos  $S$  de estos estados siguiendo la ecuación (2.131), cuyos valores se presentan en la Tabla 5.4a. Respecto al estado fundamental, notemos que sus valores son del orden de 0.05 en ambas representaciones, el cual es superior incluso al renormalizado del  $^{212}\text{Po}$ . Respecto a los estados excitados, tenemos las particularidades del  $0_4^+$ , cuyo valor se encuentra por debajo de 0.0002, y del  $0_6^+$ , cuyos valores son los segundos más intensos. El resto de los excitados presentan valores similares entre sí. Con respecto a la inclusión del contorno no resonante en la representación de partícula simple, notemos que corrige el valor del estado fundamental en un 3%, mientras que en los estados excitados  $0_2^+$  y  $0_5^+$  afecta de manera significativa. Notemos la particularidad del  $0_4^+$ , para el cual su valor se disminuye en un orden de magnitud al pasar de representaciones. Además, nuestro estado candidato  $0_3^+$  no se ve afectado por la inclusión de los estados de dispersión.

Para completar el análisis, veremos como se modifican los resultados hasta ahora obtenidos cuando

(a) Energías de cuatro cuerpos  $E_{J\pi}$  (en MeV) y factores espectroscópicos convencionales  $S$  de los seis primeros estados del  $^{44}\text{Ti}$  calculados con los resultados de la sección 4.3.1.

$i$	RP		RC	
	$\Re(E_{J\pi}_i)$	$S$	$E_{J\pi}_i$	$S$
1	-33.423	0.0516	-33.423	0.0499
2	-28.022	0.0018	-28.244	0.0030
3	-26.743	0.0027	-26.860	0.0028
4	-25.693	0.0002	-25.607	0.0001
5	-25.310	0.0024	-25.230	0.0038
6	-24.032	0.0119	-24.223	0.0104

(b) Energías de cuatro cuerpos  $E_{J\pi}$  (en MeV) y factores espectroscópicos convencionales  $S(\times 10^3)$  de los seis primeros estados del  $^{44}\text{Ti}$  calculados con los resultados de la sección 4.3.1.1.

$i$	RC-CO	
	$E_{J\pi}_i$	$S$
1	-33.423	0.0513
2	-28.194	0.0029
3	-26.823	0.0025
4	-25.607	0.0001
5	-25.196	0.0027
6	-24.142	0.0100

Tabla 5.4: Factores espectroscópicos convencionales  $S$  del  $^{44}\text{Ti}$  calculados con representación completa de partícula simple.

se trunca el espacio de Hilbert en la representación completa. Para ello, partimos de los resultados de la sección 4.3.1.1, a partir de los cuales construiremos la amplitud de formación y el factor espectroscópico de los estados. En la Tabla 5.4b presentamos los factores espectroscópicos  $S$  calculados habiendo utilizado los resultados de la Tabla 4.21. Si comparamos con los resultados de la Tabla 5.4a, vemos que para el estado fundamental obtenemos un valor un  $\sim 3\%$  mayor, mientras que para los excitados las variaciones son de ese orden, excepto para el  $0_4^+$  y  $0_5^+$ , donde el truncamiento modifica en más de un  $30\%$  el valor de  $S$ . Notemos que estas variaciones del factor espectroscópico al truncar la base son incluso mayores que la parte de la función de onda total perdida que dábamos en la Tabla 4.19.

### 5.2.3. Telurio-104

En esta sección calculamos  $g_L(r)$  para el estado fundamental  $0^+$  del  $^{104}\text{Te}$  tomando los resultados de la sección 4.3.2.1. De la misma manera que realizamos para los dos núcleos previos, buscamos limitar la cantidad de amplitudes  $b_{j_1 j_2 j_3 j_4}^{J_n J_p J}$  presentes en la ecuación (2.128) para limitar los tiempos de cálculo sin perder precisión en las funciones de onda. Equivalente a las Tablas 5.1 y 5.3 de los núcleos previos, en la Tabla 5.5 se muestra este análisis para Telurio-104 en la representación completa. Notamos como *Full* aquellos resultados que se obtienen sin cota alguna.

Vemos que la norma difiere recién con el límite  $b^{\max} = 10^{-3}$ , solo en la tercer cifra significativa. Al igual que en los núcleos previos, la ganancia de este proceso está en la cantidad de amplitudes parciales que tendremos que calcular, ya que sin límite alguno tenemos cerca de  $10^8$ , mientras que si limitamos en  $10^{-4}$  logramos disminuir esta cantidad en 4 órdenes de magnitud, lo que implica muchísimo tiempo computacional ahorrado. Este mismo comportamiento que fue observado para la representación de polo, por lo cual la cota  $b^{\max} = 10^{-4}$  es la misma.

Con esta condición sobre los coeficientes  $b$ , obtenemos las amplitudes de formación del estado

Tabla 5.5: Norma (notar que  $\Im m(\text{Norma}) \times 10^3$ ) y cantidad de amplitudes parciales  $n^\circ$  que se tienen en cuenta con diferentes cotas aplicadas a la parte real e imaginaria de las amplitudes del estado fundamental del  $^{104}\text{Te}$  (ver Tabla 4.22).

$b^{\max}$	$n^\circ$	Norma
Full	72489841	(1, 0.016)
$10^{-6}$	145995	(1, 0.016)
$10^{-5}$	38094	(1, 0.016)
$10^{-4}$	7833	(1, 0.016)
$10^{-3}$	1389	(0.999, 0.015)

fundamental del  $^{104}\text{Te}$  presentadas en la Figura 5.7. Si analizamos la forma funcional de estas, el comportamiento es bien distinto a los observado en los estados fundamentales de los núcleos anteriores. Notemos que en este caso  $g(r)$  tiene forma ondulatoria, la cual era observada en los excitados del  $^{212}\text{Po}$  y  $^{44}\text{Ti}$ . En particular, vemos ahora tienen tres máximos, donde el último se encuentra ubicado más allá de  $R = 6$  fm. Al comparar entre las representaciones usadas, vemos que en RP el máximo del medio es más intenso que los otros dos, mientras que en RC, el máximo más intenso es el primero y luego disminuyen monótonamente. Más aún, vemos que la representación completa genera una amplitud de formación que por encima de los 6 fm es más intensa que la obtenida con la representación de polo.

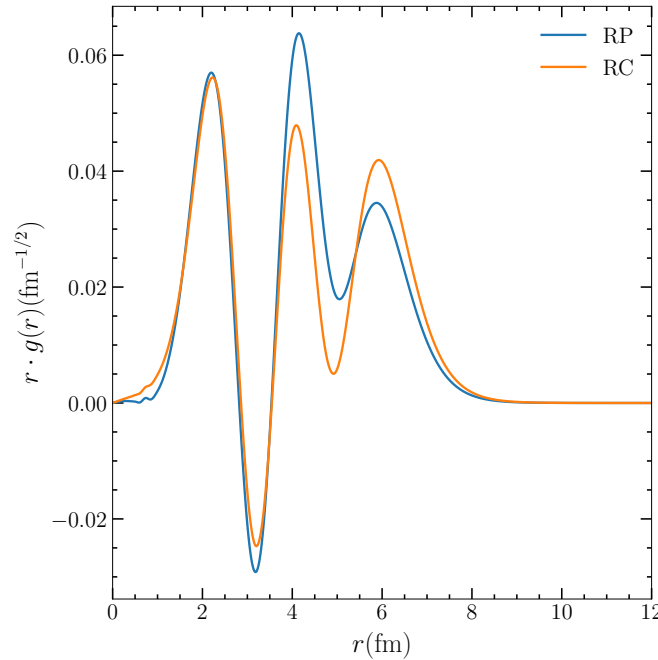


Figura 5.7: Amplitud de formación del estado fundamental del núcleo  $^{104}\text{Te}$  calculada con ambas representaciones de partícula simple.

Respecto al factor espectroscópico convencional asociado a este estado fundamental, lo calculamos a través de la ecuación (2.131), con la cual obtenemos que en la representación de polo vale

$$S_{\text{RP}} = 0.0069 \quad (5.26)$$

mientras que para la representación completa el valor es

$$S_{RC} = 0.0058 \quad (5.27)$$

Notemos que los valores difieren mínimamente entre si. Estos son comparables con los obtenidos en la Tabla 5.2 para el estado fundamental del  $^{212}\text{Po}$ . Si uno compara las funciones de onda del estado fundamental del  $^{104}\text{Te}$  (ver Tabla 4.24) con las del estado fundamental del  $^{212}\text{Po}$  (ver Tablas 3.17 y 3.21), uno podría esperar que en el  $^{104}\text{Te}$  se observe mayor clusterización que en el  $^{212}\text{Po}$ , lo cual no sucede. Veremos como se comporta esta relación cuando renormalicemos los resultados actuales.

### 5.3. Renormalización del factor espectroscópico

En esta sección estudiaremos el proceso de renormalización de  $g(r)$  y  $\mathcal{S}$  definido en la sección 2.2.3 del capítulo **Marco Teórico**, de forma que estableceremos un protocolo de discretización de la base SGB y determinación de los autovalores prohibidos y casi-prohibidos que se aplicará a los tres núcleos bajo estudio.

#### 5.3.1. Análisis general del problema

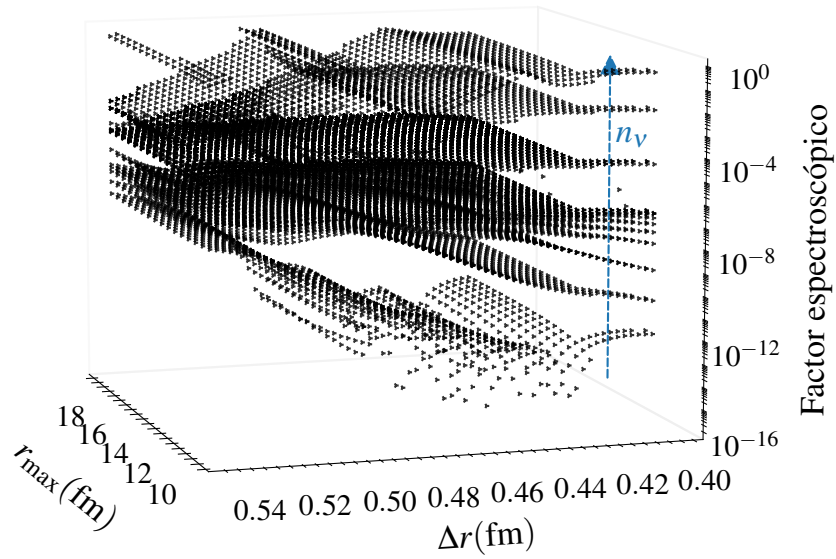
A continuación, aplicaremos a los resultados previos los conceptos e ideas desarrollados en la sección 2.2.3. Para ello, primero analizaremos la dependencia del operador con los parámetros y su posterior convergencia, y luego presentaremos las nuevas amplitudes de formación renormalizadas  $G(R)$  y sus respectivos factores espectroscópicos renormalizados  $\mathcal{S}$ . Todos estos análisis son realizados sobre el estado fundamental.

##### 5.3.1.1. Determinando los parámetros $\Delta r$ y $r_{\max}$ de la base gaussiana

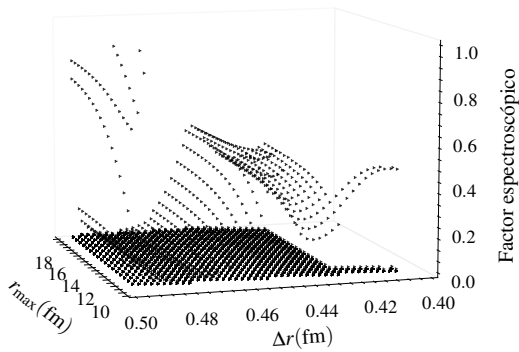
Las expresiones para  $G_L(r)$  (2.150) y  $\mathcal{S}_L$  (2.151) dependen de la discretización que hemos utilizado (ver apéndice E). El proceso fue discretizar la variable  $r$  en  $r_k$  puntos, teniendo en cuenta los parámetros  $\Delta r$  y  $r_{\max}$  o  $M = r_{\max}/\Delta r$ . Además, como fue mencionado en la sección 2.2.3.2, no todos los autovalores del *norm kernel* son válidos para representar físicamente las cantidades  $G_L(r)$  y  $\mathcal{S}_L$ . Es por esto que se debe definir un valor máximo  $\nu_{\max}$  de autovalores que impacta directamente en la suma  $\sum_{\nu=1}^{\nu_{\max}}$  de las expresiones (2.150) y (2.151).

Es decir, la amplitud de formación renormalizada y el factor espectroscópico renormalizado pueden pasar a notarse como  $G_L(r, \Delta r, r_{\max}, \nu_{\max})$  y  $\mathcal{S}_L(\Delta r, r_{\max}, \nu_{\max})$ , respectivamente. En esta sección, presentaremos un análisis cualitativo en el Polonio-212 del comportamiento del factor  $\mathcal{S}_L$  en función de  $\Delta r$  y  $r_{\max}$ . Este análisis es igualmente válido para los tres núcleos estudiados.

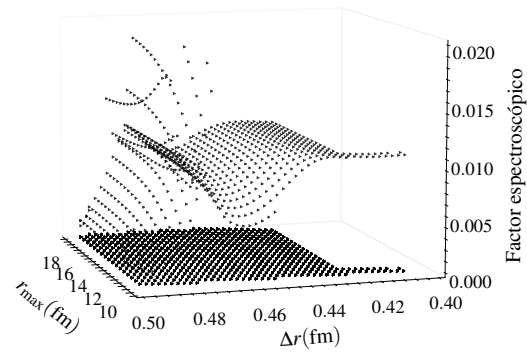
En la Figura 5.8, tomando como caso testigo el  $^{212}\text{Po}$ , podemos ver diferentes superficies de  $\mathcal{S}_L$  en función de los parámetros  $(\Delta r, r_{\max})$  que discretizan la base SGB. En particular, en la Figura 5.8a presentamos estos resultados pero en escala logarítmica, donde notamos que cada “superficie” se corresponde con los resultado de  $\mathcal{S}_L$  al limitar la suma en la ecuación (2.151) hasta un determinado  $n_{\nu_{\max}}$ . Allí vemos



(a) Factores espectroscópicos renormalizados  $S$  en función de  $\Delta r$ ,  $r_{\max}$  y  $n_v$  en escala logarítmica, para el  $^{212}\text{Po}$ .



(b) Factores espectroscópicos renormalizados  $S$  en función de  $\Delta r$  y  $r_{\max}$ , en la zona de convergencia de un posible  $n_{v\max}$ , para el  $^{212}\text{Po}$ .



(c) Factores espectroscópicos renormalizados  $S$  en función de  $\Delta r$  y  $r_{\max}$ , en la zona de convergencia de otro posible  $n_{v\max}$ , para el  $^{212}\text{Po}$ .

Figura 5.8:  $S$  en función de  $\Delta r$ ,  $r_{\max}$  y  $n_v$ , para el  $^{212}\text{Po}$ .

que, en acuerdo con lo establecido en las Ref. [59, 60] que trabajaron sobre el Polonio-212, las superficies se estabilizan cuando  $\Delta r \rightarrow 0.4$  fm. Si observamos las dos superficies que se encuentran más cercanas a  $S = 1$  en las Figuras 5.8b y 5.8c, allí podemos observar esta estabilización, cuya meseta abarca un mayor espacio de  $\Delta r$  para la superficie de la Figura 5.8c que la de la Figura 5.8b. En éstas figuras también

podemos apreciar que la dependencia con  $r_{\max}$  indica que este parámetro debe ser el menor posible para poder obtener resultados en la zona de estabilidad de  $\Delta r$ . Por ello, tomaremos  $r_{\max} = 9.43$  fm, que implican  $M = 23$ .

Determinados los parámetros  $\Delta r$  y  $r_{\max}$ , aun nos falta identificar el correcto valor de  $\nu_{\max}$ , de forma tal que podamos establecer, por ejemplo, si la superficie correcta es la de la Figura 5.8b o 5.8c.

### 5.3.1.2. Estableciendo un protocolo

A continuación buscaremos determinar el correcto valor de  $\nu_{\max}$  sin ambigüedades. Para lograr esto estableceremos un protocolo que sea general para los tres núcleos estudiados. De la bibliografía disponible, existen ciertas condiciones necesarias que tanto  $G(r)$  como  $\mathcal{S}$  deben cumplir cuando se determina el valor de  $\nu_{\max}$ . En particular, tenemos que:

- La inclusión del término  $\nu_{\max}$  en la descripción de  $G(r)$  y  $\mathcal{S}$  implica que la mayor parte de la física se encuentre en  $\nu_{\max}$  [59, 62]. Dicho de otra manera, el término  $G_{\nu_{\max}}(r) = n_{\nu_{\max}}^{-1/2} g_L^{\nu_{\max}}(r)$  de la expansión (2.150) tiene la mayor parte de la contribución al valor de  $G(r)$  o  $\mathcal{S}$ .
- Cuando uno analiza el comportamiento de los valores de  $n_\nu$  versus  $\nu$ , tenemos que  $n_{\nu_{\max}}$  se encuentra en las vecindades de un quiebre de pendiente [59, 62, 65, 99].
- De las Ref. [54, 59, 104], vemos que aquellos autovalores  $n_j$  con  $j > \nu_{\max}$  corresponden a autoestados casi prohibidos que vulneran el principio de exclusión de Pauli.
- Por ser  $\mathcal{S}$  un valor probabilístico, debe estar restringido entre 0 y 1, y en particular entre el factor espectroscópico convencional  $S$  y 1.
- La cantidad de nodos de  $G(r)$  se corresponde, en buena aproximación, con la establecida por la ecuación de Wildermuth (2.117) para el sistema. Esto fue aplicado por las Ref. [59, 63, 99] en el núcleo  $^{212}\text{Po}$ . En los núcleos estudiados en esta tesis, hemos encontrado que se verifica en forma aproximada.

Teniendo esto en cuenta, para determinar el valor de  $\nu_{\max}$  nosotros seguiremos los siguientes pasos:

1. Se establece el valor de  $\nu'$  para el cual  $G(r)$  respeta la cantidad de nodos según la ec. (2.117).
2. Si para este  $\nu'$ , la contribución de  $\frac{[g_L^{\nu'}(r)]^2}{n_{\nu'}}$  al factor espectroscópico es máxima, se concluye que  $\nu' = \nu_{\max}$ .
3. Si en cambio  $\nu'$  no se corresponde con una contribución máxima,  $\nu_{\max}$  es el primer autovalor  $\nu'' > \nu'$  para el cual la contribución sea máxima.

La última condición del protocolo es la que nos permite ser flexibles a la hora de definir el número de nodos de  $G(r)$ . Este protocolo será aplicado a cada núcleo en particular para lograr que la amplitud de formación renormalizada y el factor espectroscópico renormalizado queden independizados de las variables  $(\Delta r, r_{\max}, \nu_{\max})$ .

### 5.3.2. Polonio-212

A continuación, aplicaremos el protocolo establecido en la sección anterior para el estado fundamental del  $^{212}\text{Po}$ . En primer lugar, notemos que con  $\nu = 12$  la función  $G(r)$  cuenta con los  $n = 11$  nodos establecidos por la ecuación de (2.117) (ver sección 5.1.1). En la Figura 5.9, vemos el comportamiento de  $\mathcal{S}$  y  $n_\nu$  en función del valor de  $\nu$  para el estado fundamental en las diferentes representaciones de partícula simple utilizadas. Allí, notemos que si  $\nu = 12$  se cumple la segunda condición del protocolo, por lo cual podemos concluir que  $\nu_{\max} = 12$ .

Notemos ciertas particularidades de la Figura 5.9: los autovalores  $n_\nu$  con  $\nu \in [1, 3]$ , son mayores a uno, lo cual contradice la condición de la teoría. Pese a esto, a lo sumo influyen en un orden de  $10^{-6}$  en el factor espectroscópico  $\mathcal{S}$ , por lo cual podemos despreciarlos. Además, también obtuvimos un autovalor  $n_\nu \sim -10^{-9} < 0$ , indicando el límite de la precisión de cálculo. Este también observado en la Ref. [20], y de la misma manera nosotros lo incluimos tomado positivo.

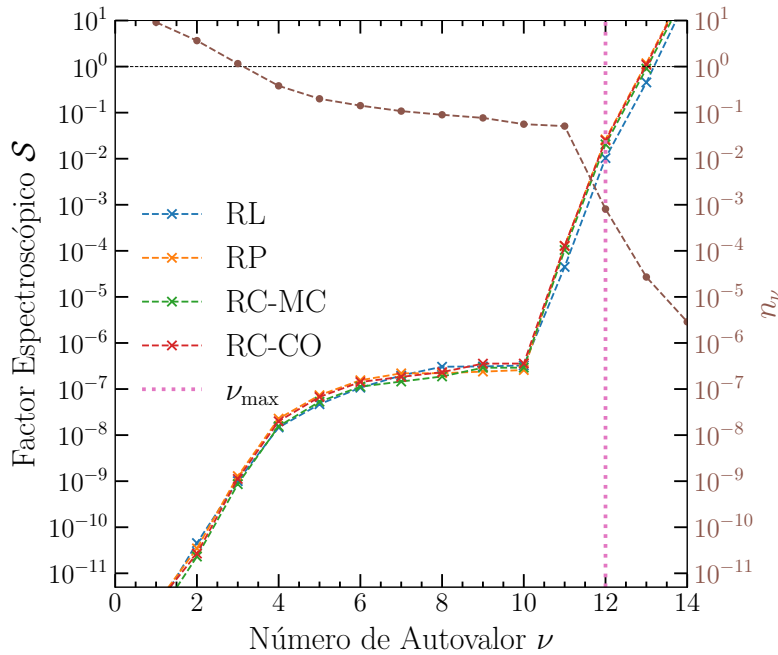


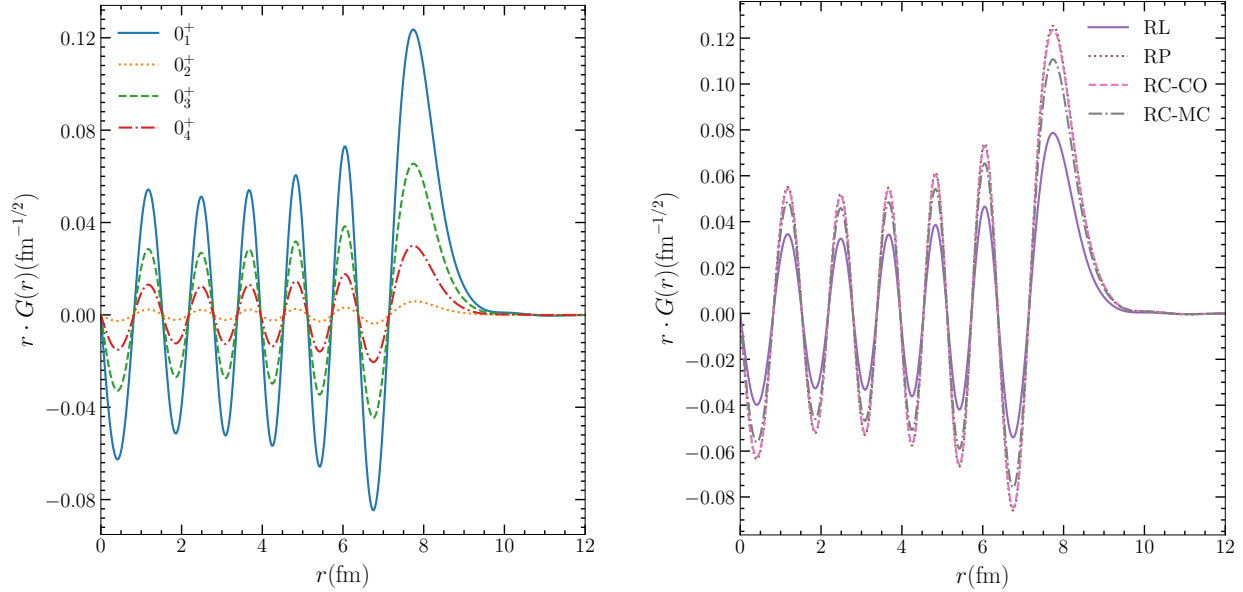
Figura 5.9: Evolución del factor espectroscópico renormalizado del estado fundamental del  $^{212}\text{Po}$  con respecto a los autovalores de la *norm-kernel*  $\mathcal{N}$ . Los parámetros de la SGB son  $\Delta r = 0.41$  fm y  $r_{\max} = 9.43$  fm.

De esta manera, queda  $\mathcal{S}$  totalmente independizado, habiendo fijado los siguientes valores de sus parámetros:

$$(\Delta r = 0.41 \text{ fm}, r_{\max} = 9.43 \text{ fm}, \nu_{\max} = 12) \quad (5.28)$$

Este análisis es válido para todos los estados calculados del  $^{212}\text{Po}$ . Tomando entonces los resultados de la sección 5.2.1 aplicaremos las condiciones actuales para calcular cada una de las amplitudes de formaciones renormalizadas y los correspondientes factores espectroscópicos renormalizados. En la Figura 5.10a, vemos las  $G(r)$  para los cuatro estados del  $^{212}\text{Po}$  calculados con la representación RC-CO. Notemos que todas estas amplitudes sí tienen el comportamiento observado en las Refs. [63–65],

presentando un máximo en el último pico alrededor de  $r \sim 8$  fm. En cuanto a su número de nodos, vemos que tiene 11, mismo valor que las Refs. [54, 64, 65, 157]. Mientras tanto, en la Figura 5.10b observamos  $G(r)$  para el estado fundamental en todas las representaciones de partícula simple. Allí podemos ver que prácticamente no hay diferencias entre las representaciones RP y RC-CO, las cuales tienen los máximos más intensos, mientras que luego le siguen la representación RC-MC y finalmente RL.



(a) Amplitudes de formación renormalizadas  $G(r)$  de los diferentes estados  $0^+$  del núcleo  $^{212}\text{Po}$  obtenidas utilizando la representación RC-CO de partícula simple.

(b) Amplitudes de formación renormalizadas  $G(r)$  del estado fundamental obtenidas utilizando diferentes representaciones de partícula simple.

Figura 5.10: Diferentes amplitudes de formación renormalizadas  $G(r)$  respecto a las convencionales  $g(r)$  de la Figura 5.5a correspondientes al núcleo  $^{212}\text{Po}$ .

En cuanto a los nuevos factores espectroscópicos  $\mathcal{S}$ , estos se presentan en la Tabla 5.6. Si los comparamos con los obtenidos en la Tabla 5.2, para el estado fundamental y el excitado  $0_4^+$  vemos que los nuevos factores son entre dos y cinco veces mayores, para el estado  $0_2^+$  vemos que son prácticamente iguales, mientras que para el estado  $0_3^+$  vemos que pueden llegar a ser casi un orden de magnitud mayor. Si comparamos entre las representaciones, vemos que para el estado fundamental la inclusión del continuo resonante implica casi triplicar la clusterización del sistema, mientras que si incorporamos el continuo no resonante, tenemos diferencias significativas en función de la aproximación que utilizemos: con MC, notamos que se corrige de manera significativa el valor de la representación RP, obteniendo una clusterización final del 2 %; mientras que con CO la corrección es mínima, obteniéndose una clusterización final del 2.5 % del sistema. Estos valores son cercanos al 2.6 % de la Ref. [3], pero aun se encuentran por debajo en un orden de magnitud de la clusterización esperada por el modelo de clúster [62]. Finalmente, notemos la particularidad del estado  $0_2^+$  en RC-CO, que recordemos no era bien descrito por esta representación (ver sección 3.3.1): el factor  $\mathcal{S}$  es prácticamente dos ordenes de magnitud menor que el  $S$ . Esto es causado justamente por la incorrecta representación de este estado.

Tabla 5.6: Energías de cuatro cuerpos  $E_{J\pi}$  (en MeV) y factores espectroscópicos renormalizados  $\mathcal{S}$  de los estados  $0^+$  del  $^{212}\text{Po}$  calculados a través de las funciones de onda construidas en la sección 3.3 con las representaciones de partícula simple utilizadas.

$i$	RL		RP		RC-MC		RC-CO	
	$E_{J\pi}_i$	$\mathcal{S}$	$\Re(E_{J\pi}_i)$	$\mathcal{S}$	$E_{J\pi}_i$	$\mathcal{S}$	$E_{J\pi}_i$	$\mathcal{S}$
1	-19.341	0.0103	-19.341	0.0262	-19.341	0.0205	-19.341	0.0255
2	-18.432	0.0115	-18.434	0.0121	-18.507	0.0153	-18.232	0.0001
3	-18.025	0.0055	-17.960	0.0097	-18.073	0.0080	-18.024	0.0071
4	-17.495	0.0007	-17.448	0.0009	-17.522	0.0010	-17.482	0.0015

### 5.3.3. Titanio-44

A continuación, aplicaremos a los resultados hasta ahora construidos para este núcleo en la sección 5.2.2 los conceptos e ideas desarrollados en la sección 2.2.3. Partiendo del análisis desarrollado en la sección 5.3.1.1, un mismo análisis en el  $^{44}\text{Ti}$  nos lleva también a que los parámetros de la base gaussiana SGB que expande al operador  $\mathcal{N}$  definido en la sección 2.2.3.2 sean:

$$(\Delta r = 0.41 \text{ fm}, r_{\max} = 9.43 \text{ fm}) \quad (5.29)$$

Para establecer la cantidad de autovalores permitidos en la expansión del factor espectroscópico renormalizado (2.151), seguimos los pasos determinados en la sección 5.3.1.2 que fueron aplicados para el caso del  $^{212}\text{Po}$ . Para el  $^{44}\text{Ti}$ , tenemos que la cantidad de nodos deben ser  $N = 6$  a partir del análisis realizado en la sección 5.1.2, valor que se obtiene para  $G(r)$  cuando  $\nu_{\max} = 17$ . Así, en la Figura 5.11, mostramos el comportamiento de  $\mathcal{S}$  y  $n_\nu$  en función del valor de  $\nu$ , para el estado fundamental. Allí vemos que efectivamente  $\nu = 17$  respeta la segunda condición del protocolo. De esta manera, queda  $\mathcal{S}$  totalmente independizado, habiendo fijado los siguientes valores de sus parámetros:

$$(\Delta r = 0.41 \text{ fm}, r_{\max} = 9.43 \text{ fm}, \nu_{\max} = 17) \quad (5.30)$$

Notemos que, al igual que sucedía en el Polonio-212, existen autovalores  $n_\nu$  con  $\nu \in [1, 4]$  superiores a uno, pero con un efecto del orden de  $10^{-6}$  sobre el factor espectroscópico, por lo cual podemos despreciarlos. Notamos que también existen 2 autovalores  $n_\nu < 0$ , los cuales son del orden de  $-10^{-9}$  e incluidos positivos en la representación. Tanto en el  $^{212}\text{Po}$  como en la Ref. [20] se observa este mismo efecto, entendido que es causado posiblemente como resultado de la diagonalización de matrices grandes.

Teniendo esto en cuenta, construimos la amplitud de formación  $G(r)$  a partir de la ecuación (2.150). Estas son presentadas en la Figura 5.12a para los seis estados  $0^+$  del  $^{44}\text{Ti}$  bajo estudio, los cuales fueron calculados utilizando la representación completa de partícula simple. Podemos observar que el comportamiento general es similar al observado en la Figura 5.10a del Polonio-212. En este caso, notemos que el máximo de los estados se ubica cerca de los 5 fm, valor que es superior al del  $\mathcal{S}$  (ver Figura 5.6a) e inferior a los 8 fm observados en el Polonio-212. Notemos también que el estado que posee el máximo más grande es el  $0_6^+$ , lo cual indicaría un estado excitado con mayor clusterización alfa que el fundamental. Respecto a nuestro estado candidato  $0_3^+$ , su amplitud de formación renormalizada es similar a la del

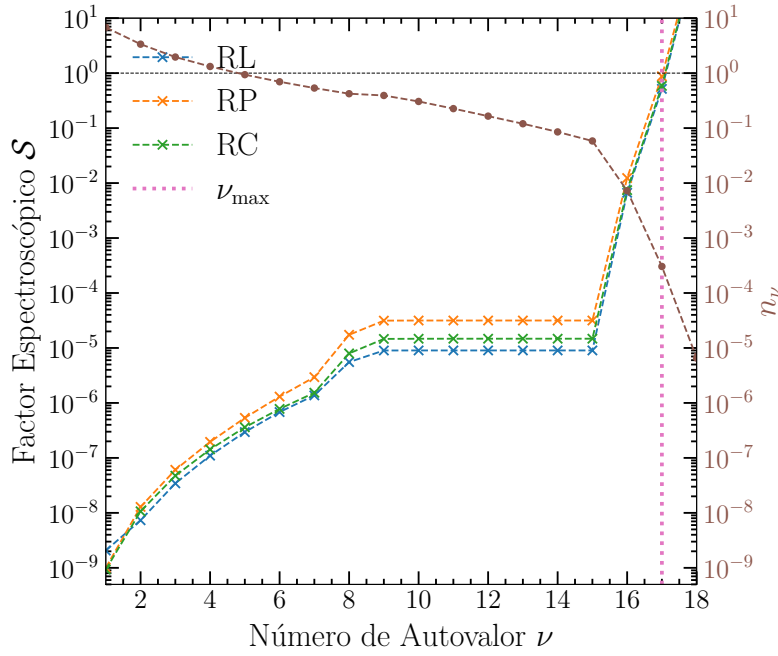


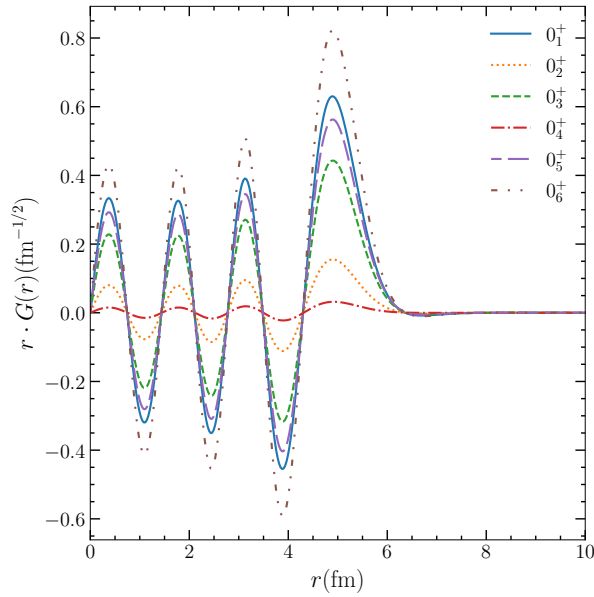
Figura 5.11: Evolución del factor espectroscópico renormalizado del estado fundamental del  $^{44}\text{Ti}$  con respecto a los autovalores  $n_\nu$  del *norm-kernel*  $\mathcal{N}$ . Los parámetros de la SGB son  $\Delta r = 0.41$  fm y  $r_{\text{max}} = 9.43$  fm.

fundamental y del  $0_5^+$ , que también poseía una función de onda que aparentaba colectividad (ver Tabla 4.16).

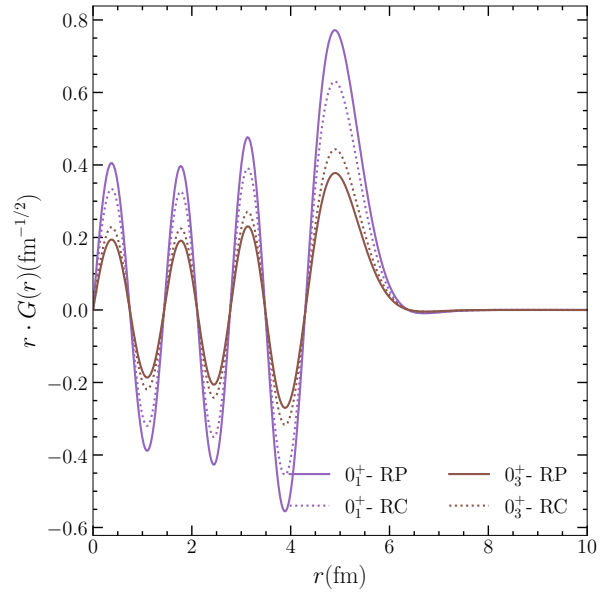
Además, en la Figura 5.12b realizamos una comparación para el estado fundamental y el  $0_3^+$  de interés de decaimiento con las amplitudes de formación renormalizadas obtenidas en las dos representaciones que incluyen al continuo. A diferencia de lo que observamos en la Figura 5.6b, ahora si se aprecian diferencias cuando se incorpora el continuo no resonante: para el estado fundamental, la  $G(r)$  presenta pico de menor intensidad, mientras que para el estado  $0_3^+$  la amplitud tiene picos de mayor intensidad, respecto a la representación RP.

Así mismo, en la Tabla 5.7a se presentan los factores espectroscópicos renormalizados calculados. De manera general, se observa la misma sistemática del núcleo  $^{212}\text{Po}$  y de estudios previos [3, 63, 65], donde la renormalización aumenta en órdenes de magnitud el valor de los factores al comparar respecto al convencional  $S$ . Al renormalizar los resultados, se hace más evidente la importancia de la inclusión del continuo no resonante. No solo que disminuye la clusterización del estado fundamental en un 30 %, sino que corrige a los estados excitados de manera que el estado  $0_6^+$  tenga finalmente un valor físico, ya que en RP su valor era de  $S = 1.63$ , el cual es corregido para determinar una clusterización final del 100 %, aproximadamente. Más aun, la inclusión del continuo no resonante aumenta la clusterización del estado  $0_2^+$  en un orden de magnitud, aumenta un 8 % de clusterización del estado  $0_3^+$ , mientras que corrige los resultados de los estados  $0_4^+$  y  $0_5^+$ .

Este valor de clusterización que obtenemos para el estado fundamental se encuentra en el orden de observaciones previas en un núcleo de similares características como es el  $^{20}\text{Ne} = \alpha + ^{16}\text{O}$  [5], es cuatro veces mayor que el valor dado por la Ref. [153] y es un orden de magnitud mayor que la clusterización



(a) Amplitudes de formación renormalizadas de los diferentes estados  $0^+$  del núcleo  $^{44}\text{Ti}$  obtenidas utilizando la representación completa de partícula simple.



(b) Amplitudes de formación renormalizadas del estado fundamental  $0_1^+$  y el  $0_3^+$  del núcleo  $^{44}\text{Ti}$  obtenidas utilizando diferentes representaciones de partícula simple.

Figura 5.12: Diferentes amplitudes de formación renormalizadas  $G(r)$  respecto a aquellas presentes en la Figura 5.6a del núcleo  $^{44}\text{Ti}$ .

del estado fundamental del Polonio-212 y el valor dado en la Ref. [155] para el  $^{44}\text{Ti}$ . Respecto al estado excitado  $0_3^+$ , su clusterización sigue siendo menor al fundamental, pero en este caso la diferencia con el fundamental es de aproximadamente la mitad. Esta relación entre el excitado y el fundamental se corresponde con lo observado en la Ref. [155].

Para completar el análisis, tal cual se realizó con los factores espectroscópicos convencionales, en la Tabla 5.7b se presentan los factores renormalizados  $\mathcal{S}$  para los resultados habiendo truncado el espacio de Hilbert (ver sección 4.3.1.1). A comparación de lo que observábamos para el  $\mathcal{S}$  en la sección previa, aquí truncar la base afecta en una mayor medida. En particular, vemos que las clusterizaciones del estado fundamental y del excitado de interés variarían un 25 %, lo cual es significativo si uno busca obtener resultados cuantitativos, mientras que para el estado  $0_6^+$  se obtienen resultados no físicos.

### 5.3.4. Telurio-104

A continuación, aplicaremos a las amplitudes de formación convencionales del estado fundamental del  $^{104}\text{Te}$  obtenidas los conceptos e ideas desarrollados en la sección 2.2.3. Siguiendo lo realizado en el  $^{212}\text{Po}$  y en el  $^{44}\text{Ti}$ , un mismo análisis concluye que podemos tomar los mismos parámetros de la sección 5.3.1.1

$$(\Delta r = 0.41 \text{ fm}, r_{\max} = 9.43 \text{ fm}) \quad (5.31)$$

como parámetros de la base gaussiana SGB que expande al operador  $\mathcal{N}$  definido en la sección 2.2.3.2.

(a) Energías de cuatro cuerpos  $E_{J\pi}$  (en MeV) y factores espectroscópicos renormalizados  $\mathcal{S}$  de los estados  $0^+$  del  $^{44}\text{Ti}$  calculados con los resultados de la sección 4.3.1.

$i$	RP		RC	
	$\Re(E_{J\pi}_i)$	$\mathcal{S}$	$E_{J\pi}_i$	$\mathcal{S}$
1	-33.423	0.87	-33.423	0.56
2	-28.022	0.0015	-28.244	0.0035
3	-26.743	0.21	-26.860	0.29
4	-25.693	0.0085	-25.607	0.0014
5	-25.310	0.43	-25.230	0.46
6	-24.032	1.63	-24.223	0.99

(b) Energías de cuatro cuerpos  $E_{J\pi}$  (en MeV) y factores espectroscópicos renormalizados  $\mathcal{S}$  de los estados  $0^+$  del  $^{44}\text{Ti}$  calculados con los resultados de la sección 4.3.1.1.

$i$	RC-CO	
	$E_{J\pi}_i$	$\mathcal{S}$
1	-33.423	0.69
2	-28.194	0.0015
3	-26.823	0.22
4	-25.607	0.0040
5	-25.196	0.40
6	-24.142	1.35

Tabla 5.7: Factores espectroscópicos renormalizados  $\mathcal{S}$  del  $^{44}\text{Ti}$  calculados con representación completa de partícula simple.

En cuanto a la cantidad de autovalores que incorporamos en la suma del factor espectroscópico renormalizado 2.151, seguimos los pasos determinados en la sección 5.3.1.2 que fueron aplicados a los dos núcleos previos. Como vimos en la sección 5.1.3 la cantidad de nodos es  $N = 8$ , por lo cual buscamos que nuestra amplitud de formación renormalizada  $G(r)$  tenga esta cantidad, lo cual se satisface si  $\nu_{\max} = 15$ . Pero si analizamos el comportamiento de  $\mathcal{S}$  y  $n_\nu$  en función del valor de  $\nu$  en la Figura 5.13 para el estado fundamental del  $^{104}\text{Te}$ , notamos que  $\nu = 15$  no cumple la segunda condición del protocolo, que pide un máximo aporte al factor espectroscópico del término  $\frac{[g_L^\nu(r)]^2}{n_\nu}$ . Es por ello que pasamos al tercer punto del protocolo, por el cual nos movemos a  $\nu = 16$ , lo que nos asegura que el aporte de  $\frac{[g_L^\nu(r)]^2}{n_\nu}$  sea máximo. Notemos que al establecer esta cantidad máxima de autovalores, la cantidad de nodos de  $G(r)$  pasan a ser 8.

De esta manera, queda  $\mathcal{S}$  totalmente independizado, habiendo fijado los siguientes valores de sus parámetros:

$$(\Delta r = 0.41 \text{ fm}, r_{\max} = 9.43 \text{ fm}, \nu_{\max} = 16) \quad (5.32)$$

Definidos los parámetros correctos de la renormalización, en la Figura 5.14 presentamos la amplitud de formación renormalizada del estado fundamental del  $^{104}\text{Te}$  calculada con ambas representaciones. Vemos que el comportamiento es el mismo que fue observado en los otros dos núcleos, solo que en este caso la función  $G(r)$  tiene un nodo menos que la función de onda  $u^\alpha$  de la Figura 5.3a. Si comparamos la representaciones entre si, vemos que ahora el máximo de RC es mayor al máximo de RP, además de que la intensidad de la amplitud de formación calculada en RC es más intensa que la calculada con RP cuando  $r > 6 \text{ fm}$ .

A partir de la ecuación (2.151) construimos el factor espectroscópico renormalizado para el estado

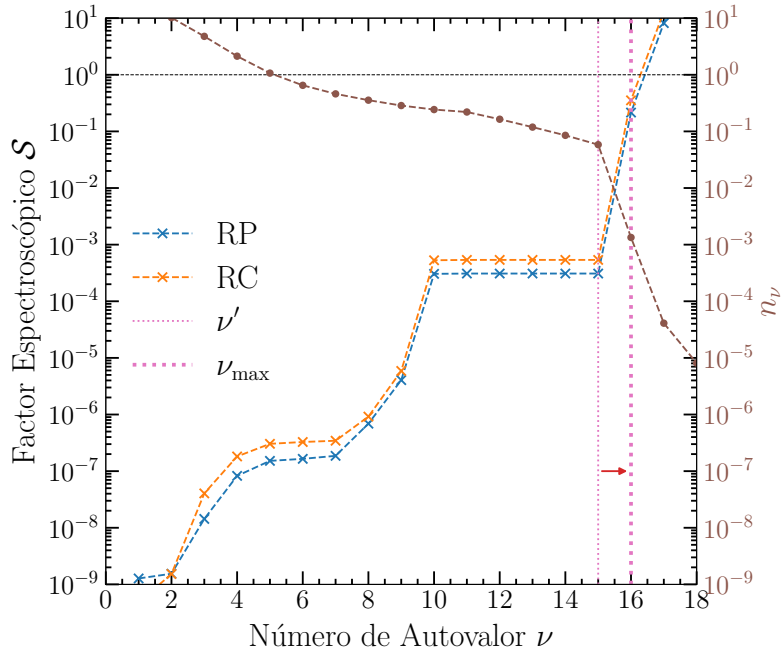


Figura 5.13: Evolución del factor espectroscópico renormalizado del estado fundamental del  $^{104}\text{Te}$  obtenido en la representación completa de partícula simple con respecto a los autovalores  $n_\nu$  del *norm-kernel*  $\mathcal{N}$ . Los parámetros de la SGB son  $\Delta r = 0.41$  fm y  $r_{\text{max}} = 9.43$  fm. Notamos con una flecha roja el movimiento necesario para determinar correctamente  $\nu_{\text{max}}$ .

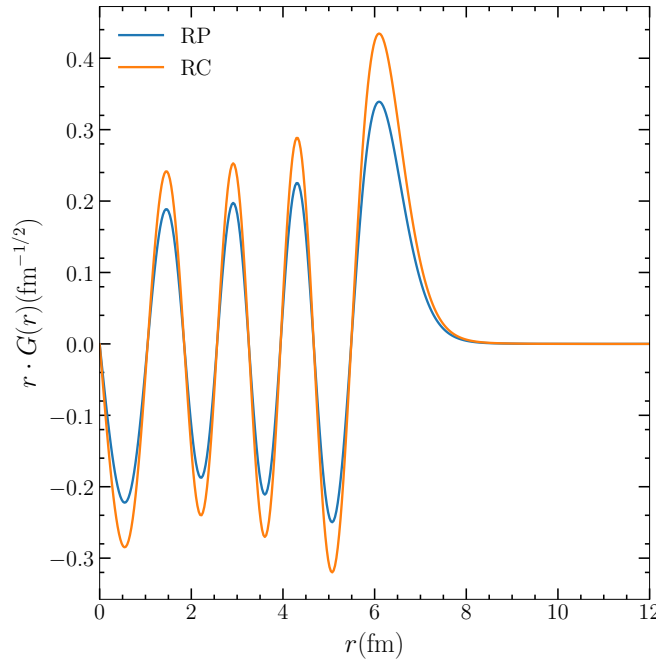


Figura 5.14: Amplitud de formación renormalizada del estado fundamental del  $^{104}\text{Te}$  calculada con ambas representaciones de partícula simple.

fundamental del  $^{104}\text{Te}$ , cuyo valor con la representación de polo es:

$$\mathcal{S}_{\text{RP}} = 0.21 \quad (5.33)$$

mientras que con la representación completa tenemos

$$S_{RC} = 0.35 \quad (5.34)$$

Notemos que la inclusión del contorno no resonante nos lleva a una clusterización de un 14 % más del sistema. Así podemos observar que este núcleo es de la misma familia del  $^{44}\text{Ti}$  o  $^{20}\text{Ne}$  [5], pues la clusterización de su estado fundamental es de un 35 %. Este valor de  $S_{RC} = 0.35$  se encuentra de acuerdo con la idea de decaimiento alfa superpermitido [6–8], triplicando además el valor dado por la Ref. [7]. Además, es un orden de magnitud mayor que el obtenido en el estado fundamental del Polonio-212. Estos dos estados comparten la característica de decaer en alfa espontáneamente. Es por ello que con un valor de clusterización de estas características, es posible esperar un decaimiento alfa más rápido que el observado en el  $^{212}\text{Po}$ , pues la formación de la partícula alfa dentro del sistema es muy significativa.

## 5.4. Cálculo de tiempos de vida media

En esta sección aplicaremos la ecuación de Arima (2.94) para obtener los anchos absolutos y partir de allí los tiempos de vida media  $T_{1/2}$  (2.95) para: los estados fundamentales de los núcleos Polonio-212 y Telurio-104, y el estado excitado  $0_3^+$  del Titanio-44. Para ello, tomaremos como punto de partida el trabajo realizado en las tres secciones previas con las representaciones de partícula simple completas de cada núcleo.

### 5.4.1. Polonio-212

Recordemos que para este núcleo, el valor más exacto del tiempo de vida media experimental es  $T_{1/2}^{\text{exp}}(^{212}\text{Po}_{\text{gs}}) = 0.2943(8) \mu\text{s}$ . En esta sección combinaremos entonces los valores del ancho  $\Gamma^{\text{sp}}$  de la ecuación (5.9) con los factores espectroscópicos de la Tabla 5.6 a través de la ecuación de Arima (2.94). De esta manera, obtenemos que para el estado fundamental del  $^{212}\text{Po}$  el tiempo de vida media en decaimiento alfa calculado con la representación completa con configuración principal (RC-MC) es:

$$T_{1/2} = \left(0.180_{-0.111}^{+0.112}\right) \mu\text{s} \quad (5.35)$$

mientras que el tiempo de vida media calculado con la representación completa habiendo truncado el espacio de Hilbert (RC-CO) es:

$$T_{1/2} = \left(0.145_{-0.089}^{+0.090}\right) \mu\text{s} \quad (5.36)$$

Vemos que con la representación RC-MC el tiempo de vida media máximo estimado es  $T_{1/2} = 0.292 \mu\text{s}$ , el cual se encuentra a 2 ns del valor experimental. Recordemos que este fue calculado tomando el parámetro de difusividad  $a = 0.6 \text{ fm}$  en el potencial de Woods-Saxon del modelo de partícula simple de la sección 5.1.1. Este valor de difusividad ha sido utilizado por otras referencias bibliográficas [3, 158].

### 5.4.2. Titanio-44

En esta sección calcularemos el tiempo de vida media del estado excitado  $0_3^+$  del Titanio-44. Para ello, combinaremos los resultados de la Tabla 5.7a con el ancho  $\Gamma^{\text{SP}}$  dado en la ecuación (5.18) utilizando la expresión de Arima (2.94). Así, podemos obtener que el tiempo de vida media en decaimiento alfa del estado  $0_3^+$  del Titanio-44 será

$$T_{1/2} = (12.46 \pm 4.59) \text{ ns} \quad (5.37)$$

Notemos que el tiempo de vida media obtenido para este estado es del orden de la decena de nanosegundos, aproximadamente veinticinco veces menor que el experimental del estado fundamental del Polonio-212. Además, recordemos que el estado  $0_3^+$  tiene una energía de excitación de 6.559 MeV sobre el carozo, por lo cual uno puede asociarlo al estado experimental  $(0, 2)^+$  con energía 6.8 MeV. Podemos entonces estimar que este estado, de decaer en alfa, tendría un tiempo de vida medio máximo de aproximadamente 17 ns, lo cual lo hace observable experimentalmente.

### 5.4.3. Estado fundamental del Telurio-104

Las últimas mediciones del tiempo de vida media [19] del estado fundamental del Telurio-104 establecen un máximo en  $T_{1/2}^{\text{exp}}(^{104}\text{Te}) < 4 \text{ ns}$ . Previos resultados experimentales [18] establecían un tiempo de vida media de 18 ns. Cálculos teóricos han obtenido los siguientes tiempos de vida media:  $T_{1/2}^{\text{teo}}([156]) = 50 \text{ ns}$ ,  $T_{1/2}^{\text{teo}}([65]) = 550 \text{ ns}$ ,  $T_{1/2}^{\text{teo}}([159]) = 1500 \text{ ns}$  y  $T_{1/2}^{\text{teo}}([8]) = 8.87 \text{ ns}$ .

En esta sección calcularemos finalmente el tiempo de vida media del estado fundamental del  $^{104}\text{Te}$ . Partiendo del factor espectroscópico renormalizado  $\mathcal{S} = 0.35$  para el estado fundamental en la representación completa, calcularemos el tiempo de vida media en decaimiento alfa a partir de la ecuación de Arima (2.94) tomando el valor del ancho  $\Gamma^{\text{SP}}$  dado en la ecuación (5.25). El tiempo de vida media en decaimiento alfa del estado fundamental del  $^{104}\text{Te}$  con  $Q_\alpha = 5.1 \text{ MeV}$  es:

$$T_{1/2} = \left(16.409_{-9.538}^{+8.922}\right) \text{ ns} \quad (5.38)$$

Notemos que el valor  $T_{1/2} = 16.409 \text{ ns}$  se encuentra a 1.6 ns del experimental  $T_{1/2}([18]) = 18 \text{ ns}$ , mientras que la última cota experimental de 4 ns dada en la Ref. [19] se encuentra incluso fuera de las cotas de error. Respecto a otros resultados teóricos, nuestro tiempo de vida media estimado es menor que el de las referencias [65, 156, 159], y engloba al valor de la Ref. [8] dentro de su rango de error.

Teniendo en cuenta esta la comparación con la Ref. [19], y partiendo de lo observado en la sección 5.1.3 donde los anchos  $\Gamma^{\text{SP}}$  dependen exponencialmente del valor de  $Q_\alpha$ , seguimos la idea de la Figura 5.4 para construir la Figura 5.15 con los valores de  $\Gamma$  y  $T_{1/2}$  obtenidos a través de la ecuación de Arima (2.94). A partir de esta información, nuestro modelo permite estimar que cuando  $Q_\alpha \rightarrow 5.3 \text{ MeV}$ , se obtiene un tiempo de vida media de

$$T_{1/2}(\text{gs}, Q_\alpha = 5.3 \text{ MeV}) = \left(3.473_{-2.014}^{+1.887}\right) \text{ ns} \quad (5.39)$$

el cual respeta la condición  $T_{1/2}^{\text{exp}}(^{104}\text{Te}) < 4 \text{ ns}$  dada por la Ref. [19]. En este mismo sentido, nuestro modelo indica que el decaimiento alfa del  $^{104}\text{Te}$  puede ser observado experimentalmente con un máximo

tiempo de vida media de 130 ns si  $Q_\alpha \rightarrow 4.9$  MeV. Esta cota máxima es menor que los tiempos de vida media de las Ref. [65, 159].

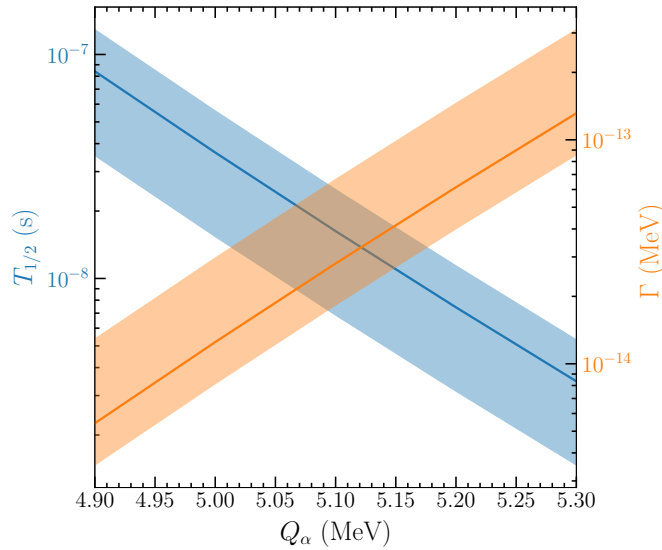


Figura 5.15: Tiempos de vida  $T_{1/2}$  y anchos absolutos  $\Gamma$  en función del  $Q_\alpha$  calculados con la representación completa. Las líneas indican los valores  $T_{1/2}$  y  $\Gamma$  obtenidos con una difusividad  $a = 0.65$  fm en el modelo de dos cuerpos. Las áreas pintadas encierran los máximos y mínimos.

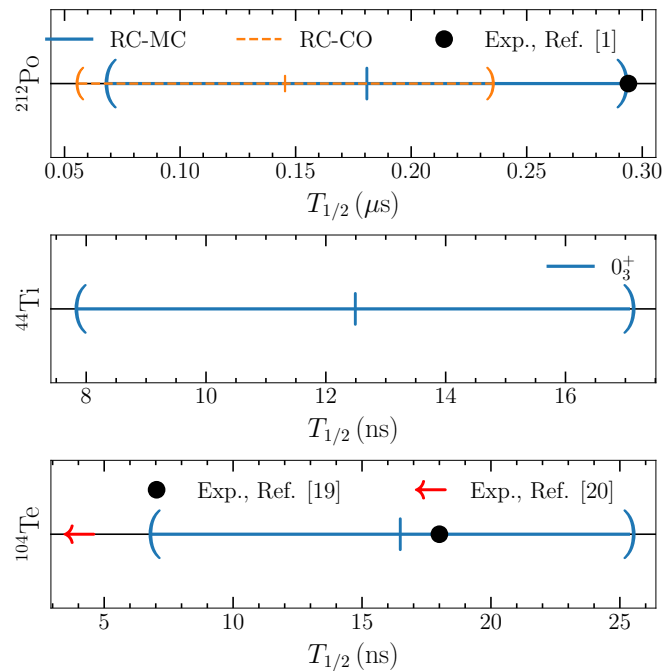


Figura 5.16: Tiempos de vida en decaimiento alfa  $T_{1/2}$  calculados para de los estados fundamentales de los núcleos Polonio-212 y Telurio-104, y un estado excitado del Titanio-44. Además, se destacan los valores experimentales en los casos donde se dispone de esta información.

En resumen, para finalizar este capítulo destacamos que con la correcta renormalización del factor

espectroscópico  $S$  y teniendo en cuenta diferentes parametrizaciones en el modelo de decaimiento de dos cuerpos, pudimos establecer los tiempos de vida media en decaimiento alfa de los estados fundamentales de los núcleos Polonio-212 y Telurio-104, y estimar el tiempo de vida media de un estado excitado del Titanio-44. Estos resultados se encuentran resumidos en la Figura 5.16, en la cual podemos observar que: en el caso del Polonio-212, la representación RC-MC genera el resultado que más se acerca al experimento. Para el Titanio-44, predecimos que el estado de energía de excitación 6.559 MeV decaerá en alfa con un tiempo de vida media en el rango de 8 ns a 17 ns. Finalmente, para el fundamental del Telurio-104 obtenemos ordenes de magnitud comparables con los del Titanio-44, y logramos reproducir el valor experimental de la Ref. [18], pero no logramos incluir el límite establecido por la Ref. [19]. Los tiempos de vida media obtenidos para el  $^{104}\text{Te}$  son consistentes con el carácter de decaimiento alfa superpermitido esperado para este núcleo de la línea de goteo con  $N = Z$ .

## CAPÍTULO 6

### DISCUSIONES Y CONCLUSIONES

El decaimiento alfa como fenómeno físico ha sido ampliamente estudiado dentro del marco de la física nuclear, tanto teórica como experimentalmente. Uno de esos acercamientos teóricos que intentan describir la física del decaimiento se da en el marco del modelo de capas nuclear, combinando expresiones para la estructura del núcleo  $\alpha + A$  con la penetrabilidad introducida por Gamow [33].

En este trabajo hemos realizado una breve presentación de los diferentes hechos históricos que han llevado a la construcción del modelo actual para el decaimiento alfa. Luego se desarrolló un formalismo para la descripción del decaimiento alfa, partiendo del modelo de capas que incluye estados del continuo, discriminado en su parte resonante y no resonante, para construir los estados de cuatro partículas ubicadas sobre el núcleo hijo  $A$  de manera a formar así el núcleo madre  $A + 4$  del decaimiento. La clave de esta construcción se encuentra en la utilización del modelo de Berggren para la representación de partícula simple, la cual permitió incluir no solo estados ligados y resonancias, sino también los estados del continuo no resonante o de dispersión, los cuales fueron esenciales para describir los núcleos inestables. La segunda parte del proceso teórico se basó en la descripción de los fenómenos relacionados al decaimiento alfa propiamente dicho: tanto la clusterización de estas cuatro partículas iniciales para formar un núcleo  ${}^4\text{He}$  a través del factor espectroscópico convencional  $S$  y renormalizado  $\mathcal{S}$ , como también la simplificación del modelo a un fenómeno de dos cuerpos, pensando a la partícula  $\alpha$  interactuando como un ente indivisible con el núcleo hijo  $A$ , para obtener los anchos  $\Gamma^{\text{SP}}$  y tiempos de vida media en decaimiento alfa  $T_{1/2}^{\text{SP}}$ . De esta manera, pudimos construir los dos términos que componen la expresión principal de nuestra teoría:  $\Gamma = \mathcal{S}\Gamma^{\text{SP}}$  [61, 66, 93].

Armado el marco teórico, estudiamos tres núcleos particulares: el Polonio-212, núcleo con 128 neutrones y 84 protones, el cual ha sido ampliamente estudiado tanto teórica como experimentalmente, con la particularidad de que su estado fundamental decae espontáneamente en alfa, donde hemos fundamentado y probado nuestro modelo; el Titanio-44 con 22 neutrones y 22 protones, con la particularidad de depender del isoespín en su representación física, cuyo estado fundamental es ligado en alfa, no obstante predecimos un estado excitado que sí decae; y finalmente, el Telurio-104, con 52 neutrones y 52 protones, el cual también depende del isoespín como el Titanio-44, posee un estado fundamental que decae espontáneamente en alfa y se ubica en la región de la línea de goteo de protones, por lo cual la inclusión del continuo de energía en la representación de partícula simple es esencial.

La construcción de los niveles de partícula simple sobre el carozo Plomo-208 se realiza tomando los estados ligados experimentales disponibles de los núcleos Plomo-209 y Bismuto-209. Utilizando una interacción de Woods-Saxon junto con Espín-Órbita, se reproducen estas energías, y se construyen los estados del continuo. Este mismo proceso fue realizado para la construcción de los estados de un neutrón y un protón sobre el carozo Calcio-40, y un neutrón sobre el Estaño-100. En cambio, para los estados de un protón sobre el Estaño-100 no se contaba con datos experimentales del Antimonio-101. Por ello, se realizó una extrapolación de los niveles disponibles en los núcleos vecinos. Es aquí donde se notó una de las primeras diferencias entre las tres familias de núcleos construidas: sobre el carozo Plomo-208,

contamos con una gran cantidad de estados ligados tanto de un protón como de un neutrón, por lo que la influencia del continuo no resonante no fue significativa, mientras que para los estados de un protón construidos sobre el carozo Calcio-40, y más aun sobre el Estaño-100, la inclusión de los estados de dispersión fue decisiva.

Definidos los estados de partícula simple, se comenzó con la construcción de los estados de pares de nucleones sobre los tres carozos. Para aquellos construidos sobre el Plomo-208 se obtuvieron espectros de energía comparables con los de la Ref. [23]. Se mostró también que la inclusión del canal de interacción gaussiana triplete-impar mejoraba el ajuste a los estados excitados de los núcleos Plomo-210 y Polonio-210. Además, hemos aplicado la configuración principal, donde pudimos apreciar mínimas diferencias a nivel energético, pero una gran disminución en tiempo de cálculo. Una posible mejora futura de esta parte del trabajo es la inclusión de la fuerza tensorial, particularmente para la descripción de los estados del Bismuto-210, lo que nos permitiría realizar la inversión de los estados  $0^-$  y  $1^-$  de éste núcleo.

La construcción de los niveles de los pares de nucleones sobre el carozo Calcio-40 presentaba una diferencia principal respecto a los calculados sobre el Plomo-208: como  $N = Z$ , aplicamos el isoespín a la interacción, por lo cual mismas intensidades se utilizaron reproducir los tres pares  $nn$ ,  $pp$  y  $pn$ . En particular, se ajustó el canal  $T = 1$  de la interacción a los estados  $0^+$  y  $2^+$  de los núcleos Calcio-42 y Titanio-42, mientras que el canal  $T = 0$  se ajustó a los estados impares  $1^+$  y  $7^+$  del Escandio-42.

Para aquellos estados de dos cuerpos construidos sobre el carozo Estaño-100, el cual también tenía la particularidad  $N = Z$ , se siguió la misma idea utilizada para los estados construidos sobre el Calcio-40, pero con una dificultad mayor: el par de protones constituía un núcleo no observado experimentalmente ubicado en la línea de goteo de protones (Telurio-102). Esto implicó que modifiquemos la forma de los contornos de las resonancias de partícula simple que veníamos utilizando para que pasen a ser un rectángulo, y así poder trabajar correctamente con los estados del Telurio-102 en nuestra representación. La determinación de los niveles se realizó ajustando la intensidad del canal  $T = 1$  de la interacción de pares al estado fundamental experimental del Estaño-102, y con esas mismas intensidades se calculó el estado fundamental del Telurio-102. La energía de éste resultó comparable a otros modelos teóricos [132]. En cuanto a la intensidad del canal  $T = 0$ , esta se fijó más adelante de manera tal que se describa la energía del estado fundamental del Telurio-104.

La construcción del modelo de capas finalizó con los cálculos de las energías de los estados  $J^\pi = 0^+$  de los núcleos Polonio-212, Titanio-44 y Telurio-104. En el Polonio-212 se observó que el estado fundamental bien puede ser descrito por cualquiera de las representaciones de partícula simple, mientras que los excitados son corregidos cuando trabajamos con al representación de Berggren completa, es decir, incorporamos el continuo no resonante. A nivel cuantitativo, observamos un estado  $0_3^+$  con energía  $-18.073$  MeV en la representación RC-MC que se ubica cercano a un estado experimental de energía  $-18.092$  MeV que no tiene un número cuántico asociado. Además, el estado  $0^+$  experimental de energía  $-17.540$  MeV es reproducido nuevamente por nuestra representación RC-MC con una energía  $-17.522$  MeV. A nivel energético podemos entonces concluir, que la representación completa aplicando la configuración principal hace un buen trabajo a la hora de describir resultados experimentales.

En cuanto a los estados obtenidos para los niveles de energía del Titanio-44, a nivel interacción vimos que ajustando las intensidades del canal  $T = 0$  de la interacción  $V_{pn}$  se obtiene un estado fundamental con valor esperado del isoespín  $\langle T \rangle = 0$ , en acuerdo con la Ref. [4]. A nivel cuantitativo, no se logró

reproducir ningún estado excitado por debajo de la energía  $Q_\alpha$ , siendo el estado  $0^+$  experimental de energía  $-28.583$  MeV el más cercano a nuestro primer estado excitado de energía  $-28.244$  MeV en la representación completa. Nuestro candidato al decaimiento alfa tanto por su función de onda como por su ubicación energética respecto al  $Q_\alpha$  fue el  $0_3^+$  de energía  $-26.864$  MeV en RC que se ubicó en las cercanías del experimental  $(0, 2)^+$  de energía  $-26.613$  MeV. Además, se observó que los estados excitados modificaban su energía en aproximadamente  $200$  keV cuando pasábamos de la representación de polo a la completa, lo cual indicó la importancia del continuo no resonante en la descripción de estos estados del núcleo Titanio-44. En trabajos futuros, la inclusión de los estados resonantes de dos protones podría permitirnos ampliar las bases de dos cuerpos gracias a lo cual esperamos ser capaces de describir estados de cuatro cuerpos con energía menor al  $Q_\alpha$ .

Finalmente, el estudio de los niveles de energía de cuatro cuerpos finalizó con el caso del Telurio-104. Como mencionamos previamente, se ajustó la intensidad del canal  $T = 0$  de la interacción  $V_{pn}$  para reproducir la energía experimental del estado fundamental, gracias a lo cual se obtuvo un isoespín  $\langle T \rangle = 0$ . Para este núcleo se observó que la función de onda correspondiente es más colectiva que la observada en los dos núcleos previos. Además, en la representación completa de partícula simple apreciamos que un  $10\%$  de su función de onda se localizó en estados de dos cuerpos con número cuántico  $J$  impar, algo no observado en los dos núcleos previos. Contar con datos experimentales del Antimonio-102 para una correcta optimización de las intensidades  $V_{pn}$  podría corregir las funciones de onda de cuatro cuerpos obtenidas en este trabajo, y además, nos daría una base más firme para poder calcular estados excitados con sentido físico.

La construcción del tiempo de vida media en decaimiento alfa comenzó a partir del modelo de dos cuerpos, entendiendo a la partícula alfa de manera puntual e indivisible ubicada en el núcleo madre. Una de las particulares del análisis de este modelo en los tres núcleos bajo estudio fue la dependencia del resultado con los parámetros de la interacción de Woods-Saxon. Para el Polonio-212, partimos con que experimentalmente  $Q_\alpha = 8.954$  MeV [1], por lo cual su estado fundamental decae en alfa. Para él se obtuvo un ancho absoluto de partícula simple  $\Gamma^{\text{sp}} = \left(0.123_{-0.047}^{+0.199}\right) \times 10^{-12}$  MeV, donde las cotas de error se definieron en función del parámetro de difusividad  $a$  del potencial de Woods-Saxon [154].

En el modelo del decaimiento alfa de dos cuerpos, el Titanio-44 se diferencia respecto al Polonio-212 en que su valor experimental es  $Q_\alpha = -5.127$  MeV [1], es decir, su estado fundamental no decae en alfa. Es por ello que construimos el decaimiento en este modelo pero para el estado excitado  $0_3^+$  en la representación completa, el cual sí se encontró en el continuo del alfa con una parte real de la energía con valor  $\varepsilon_3^\alpha = 1.437$  MeV. En cuanto a su tiempo de vida media, se probaron dos parametrizaciones diferentes de la interacción de Woods-Saxon, siendo el ancho absoluto de partícula simple presentado como un promedio del resultado con ambas parametrizaciones y una cota de error definida. Así, obtuvimos  $\Gamma^{\text{sp}} = (0.076 \pm 0.028) \times 10^{-12}$  MeV, el cual era del orden del obtenido en el estado fundamental del Polonio-212.

Para concluir el estudio del decaimiento alfa como un modelo de dos cuerpos, al trabajar con el Telurio-104 se utilizaron también los parámetros de la Ref. [154]. En este núcleo, al igual que en el Polonio-212, de datos experimentales sabíamos que  $Q_\alpha = 5.1(2)$  MeV, por lo cual él decae en alfa. Calculamos en primer lugar para el estado fundamental su ancho absoluto de partícula simple para el cual

obtuvimos  $\Gamma^{\text{SP}} = \left(0.079_{-0.027}^{+0.111}\right) \times 10^{-12}$  MeV. Por otro lado, para este núcleo en particular realizamos un análisis del comportamiento del ancho con respecto al valor  $Q_\alpha$  y el parámetro de difusividad  $a$  de Woods-Saxon. Se observó que  $\Gamma^{\text{SP}}(Q_\alpha)$  tiene un comportamiento exponencial.

La inclusión de la estructura nuclear en la construcción del decaimiento alfa se realizó a través de la amplitud de formación y el factor espectroscópico. Se introdujo la correcta renormalización de ellos a través de una expansión del *norm-kernel* en la base gaussiana SGB. La parametrización de esta base se realizó en primer lugar para el estado fundamental del Polonio-212, determinándose los parámetros  $R_{\text{max}} = 9.43$  fm y  $\Delta R = 0.41$  fm de la misma, los cuales son igualmente válidos para los otros dos núcleos. Por último, se determinó de manera individual para cada núcleo los autovalores del *norm-kernel* permitidos siguiendo un protocolo establecido. Así, para el estado fundamental del Polonio-212 se seleccionaron 13 autovalores  $n_\nu$  permitidos en la expansión del *norm-kernel*, gracias a lo cual se obtuvo una clusterización del 2 % o  $\mathcal{S} = 0.02$  en la representación completa con configuración principal, que se encuentra en correspondencia con la Ref. [3]. Pese a que este valor es un orden de magnitud mayor al obtenido previa renormalización ( $\mathcal{S} = 0.005$ ), aun se encuentra debajo de la clusterización esperada por el modelo de clúster [62], que la sitúa en un 30 % del sistema. En cuanto a la inclusión del continuo resonante en la representación de partícula simple, prácticamente triplicó la clusterización obtenida con estados ligados (1 %), mientras que la inclusión del continuo no resonante vimos que actuó mas bien de manera correctiva, llevando a un clusterización final del 2 % o 2.5 % dependiendo de la aproximación empleada. Por último, queremos notar que la disponibilidad de mayores recursos computacionales podrían permitirnos trabajar con la representación completa de partícula simple sin aplicar ningún tipo de aproximación.

Para el caso del Titanio-44, se calculó la clusterización de los seis primeros estados  $0^+$ . En particular, centramos nuestro análisis tanto en el estado fundamental como en el excitado  $0_3^+$  obtenidos con la representación completa de partícula simple, para los cuales se obtuvo que  $\mathcal{S} = 0.56$  y  $\mathcal{S} = 0.29$ , respectivamente, con una cantidad de autovalores permitidos  $n_{\nu\text{max}} = 17$  superior a la observada en el Polonio-212. Notemos que la clusterización del estado fundamental no solo es un orden mayor que la obtenida en el Polonio-212, también supera en la misma cantidad a la obtenida por la Ref. [155], y se encuentra en el orden de observaciones previas en un núcleo similar como es el Neón-20 ( $\mathcal{S}_{\text{Ne}} = 0.91$ ) [5]. Además, la relación entre la clusterización del excitado y el fundamental se corresponde con la observada en la Ref. [155]. Con respecto a la inclusión del continuo no resonante en la representación de partícula simple, en este núcleo causó un efecto más significativo que en el Polonio-212, pues vimos que no solo corrigió la clusterización del estado fundamental, llevando de un 87 % a un 56 %, sino que influyó de manera que todos los estados calculados tengan un valor físico del  $\mathcal{S}$ . Esto se hizo notar en el estado  $0_6^+$ , el cual con RP tenía un  $\mathcal{S} = 1.63$  y fue corregido a un  $\mathcal{S} = 0.99$  con RC. Un posible trabajo futuro que surgiría de ampliar la base de dos protones para incluir estados resonantes sería trabajar con los estados excitados cuya energía sea superior a los 10 MeV de excitación, tal cual se realiza en la Ref. [155], los cuales tienen mayor incidencia a nivel astrofísico [118–121].

Se concluyó con esta sección de la tesis cuando aplicamos estos conceptos al estado fundamental del Telurio-104. Para éste en particular, tuvimos 16 autovalores  $n_\nu$  permitidos en la expansión del *norm-kernel*, con los cuales se obtuvo un factor espectroscópico renormalizado de  $\mathcal{S} = 0.35$  en la representación

completa de partícula simple. Este valor da la idea de un decaimiento alfa superpermitido [6–8], pues es un orden de magnitud mayor que el calculado para el estado fundamental del Polonio-212. Además, este valor de clusterización obtenido triplica el dado por la Ref. [7]. Notemos que la inclusión del continuo no resonante de partícula simple en la descripción de este núcleo afectó a la clusterización del sistema en forma contraria a lo observado en el Titanio-44: en el Telurio-104, esta inclusión lleva el sistema de un 21 % de clusterización alfa a un 35 %, esto es, un 14 % más de la función de onda. Estos niveles de clusterización también se corresponden con lo observado en el  $^{44}\text{Ti}$  o  $^{20}\text{Ne}$  [5]. Notemos que un ajuste distinto de las intensidades de la interacción protón-neutrón si se tuviesen datos experimentales del Antimonio-102 podría modificar levemente estos resultados, y esperamos también que nos permita estimar la clusterización de ciertos estados excitados del Telurio-104.

Nuestro trabajo finalizó con el cálculo de los tiempos de vida media en decaimiento alfa. A través de la ecuación de Arima  $\Gamma = S\Gamma^{\text{SP}}$  que nos enmarcó en un estudio microscópico que combina un modelo de dos cuerpos  $\Gamma^{\text{SP}}$  con una idea estructural/microscópica  $\mathcal{S}$ , pudimos calcular los tiempos de vida media en decaimiento alfa  $T_{1/2} = \frac{\hbar \ln(2)}{\Gamma}$ . Esto fue aplicado a los estados fundamentales de los núcleos Polonio-212 y Telurio-104, por estos decaer en alfa, y al estado excitado  $0_3^+$  del Titanio-44. Para el estado fundamental del Polonio-212, nuestra mejor aproximación al valor experimental del decaimiento la obtenemos con la representación RC-MC, con un valor de  $T_{1/2} = \left(0.180^{+0.112}_{-0.111}\right) \mu\text{s}$ , cuya cota superior se encuentra a 2 ns del valor experimental. Notemos que una clusterización mayor al 2 % nos llevaría a tiempos de vida media más alejados del experimento. En el caso del Telurio-104, encontramos que su estado fundamental tendría una vida media de  $T_{1/2} = \left(16.409^{+8.922}_{-9.538}\right) \text{ns}$ , cuyo mejor valor que se encuentra a menos de 2 ns de la observación experimental de la Ref. [18], pero queda fuera de la más reciente cota dada por la Ref. [19]. Para respetar esta cota experimental que establece un tiempo de vida media menor a los 4 ns, nuestro modelo indica que  $Q_\alpha \rightarrow 5.3 \text{ MeV}$ , para el cual tendríamos un tiempo de vida media de  $T_{1/2}(\text{gs}, Q_\alpha = 5.3 \text{ MeV}) = \left(3.473^{+1.887}_{-2.014}\right) \text{ns}$ . Independientemente de estas particularidades, notemos que los tiempos de vida media calculados para el estado fundamental del Telurio-104 son dos ordenes de magnitud más rápidos que los del estado fundamental del Polonio-212, lo cual da una idea del decaimiento alfa superpermitido [6–8]. Finalmente, destacamos que trabajamos con estados excitados, siendo el  $0_3^+$  del Titanio-44 nuestra aplicación para estimar su tiempo de vida media. Allí se obtuvo que su tiempo de vida media en decaimiento alfa es de  $T_{1/2} = (12.46 \pm 4.59) \text{ns}$ . Este implica un decaimiento en alfa del orden del calculado para el estado fundamental del Telurio-104, y por ende, un orden de magnitud más rápido que el observado para el estado fundamental del Polonio-212.

## APÉNDICES

## APÉNDICE A

### ELEMENTOS DE MATRIZ DE DOS NUCLEONES

En este apéndice continuaremos con la demostración de los elementos de matriz para la interacción de dos nucleones, partiendo de la ecuación (2.61) de la sección 2.1.2.2.

De manera general, para un potencial central  $V_\xi$  cualquiera tendremos que

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{ab}^{J_i M_i} | V_\xi | \Psi_{cd}^{J_i M_i} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2(1 + \delta_{ab})}} \\ &\cdot \left[ \langle j_a j_b; J_i M_i | V_\xi | \Psi_{cd}^{J_i M_i} \rangle - (-)^{j_a + j_b - J_i} \langle j_b j_a; J_i M_i | V_\xi | \Psi_{cd}^{J_i M_i} \rangle \right] \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Calculemos el primer término  $\langle j_a j_b; J_i M_i | V_\xi | \Psi_{cd}^{J_i M_i} \rangle$ , el cual da

$$\begin{aligned} \langle j_a j_b; J_i M_i | V_\xi | \Psi_{cd}^{J_i M_i} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2(1 + \delta_{cd})}} \\ &\cdot \left[ \langle j_a j_b; J_i M_i | V_\xi | j_c j_d; J_i M_i \rangle - (-)^{j_c + j_d - J_i} \langle j_a j_b; J_i M_i | V_\xi | j_d j_c; J_i M_i \rangle \right] \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

mientras que para el segundo  $\langle j_b j_a; J_i M_i | V_\xi | \Psi_{cd}^{J_i M_i} \rangle$  el resultado es

$$\begin{aligned} \langle j_b j_a; J_i M_i | V_\xi | \Psi_{cd}^{J_i M_i} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2(1 + \delta_{cd})}} \\ &\cdot \left[ \langle j_b j_a; J_i M_i | V_\xi | j_c j_d; J_i M_i \rangle - (-)^{j_c + j_d - J_i} \langle j_b j_a; J_i M_i | V_\xi | j_d j_c; J_i M_i \rangle \right] \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Por el hecho de que el potencial es invariante frente a inversión  $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = V(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$ , tendremos

$$\langle j_b j_a; J_i M_i | V_\xi | j_c j_d; J_i M_i \rangle = (-)^{j_a + j_b - J_i} (-)^{j_c + j_d - J_i} \langle j_a j_b; J_i M_i | V_\xi | j_d j_c; J_i M_i \rangle \quad (\text{A.4})$$

y

$$\langle j_b j_a; J_i M_i | V_\xi | j_d j_c; J_i M_i \rangle = (-)^{j_a + j_b - J_i} (-)^{j_c + j_d - J_i} \langle j_a j_b; J_i M_i | V_\xi | j_c j_d; J_i M_i \rangle \quad (\text{A.5})$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{ab}^{J_i M_i} | V_\xi | \Psi_{cd}^{J_i M_i} \rangle &= 2N_{ab}N_{cd} \\ &\cdot \left[ \langle j_a j_b; J_i M_i | V_\xi | j_c j_d; J_i M_i \rangle + (-)^{j_c + j_d - J_i + 1} \langle j_a j_b; J_i M_i | V_\xi | j_d j_c; J_i M_i \rangle \right] \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

donde hemos usado la definición  $N_{ab} = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \delta_{ab})}}$  para el coeficiente de normalización.

Pasaremos a calcular ahora si los elementos de matriz para cada término del potencial  $V_c$  dado en la ecuación (2.61).

## A.1. Elementos de matriz para las interacciones singlete par y singlete impar

Para **partículas idénticas**, de la sección anterior tendremos que

$$\langle \Psi_{ab}^{J_i M_i} | V_{\xi} | \Psi_{cd}^{J_i M_i} \rangle = 2 N_{ab} N_{cd} \left\{ \left[ 1 - (-)^{j_c + j_d - J_i} P_{cd} \right] \langle j_a j_b, J_i M_i | V | j_c j_d, J_i M_i \rangle \right\} \quad (\text{A.7})$$

De la Tabla 2.3 podemos reescribir los casos  $\xi = \{se, so\}$  en función del operador  $P_S$ , de forma que

$$\begin{aligned} \langle j_a j_b, J_i M_i | V_{se/o}(r) P_{se/o} | j_c j_d, J_i M_i \rangle &= \langle j_a j_b, J_i M_i | \frac{V_{se/o}(r)}{2} P_S | j_c j_d, J_i M_i \rangle \\ &\mp (-)^{j_c + j_d + J_i} \langle j_a j_b, J_i M_i | \frac{V_{se/o}(r)}{2} P_S | j_d j_c, J_i M_i \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

donde  $-$  es para singlete-par y  $+$  para singlete-impar.

Reemplazando en (A.7) tendremos

$$\langle V_{se/o}(r) P_{se/o} \rangle_{abcd}^{J_i M_i} = \begin{cases} 2 N_{ab} N_{cd} \langle j_a j_b, J_i M_i | V_{se}(r) \left[ 1 - (-)^{j_c + j_d - J_i} P_{cd} \right] P_S | j_c j_d, J_i M_i \rangle & \text{se} \\ 0 & \text{so} \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

donde hemos usado la notación

$$\langle \Psi_{ab}^{J_i M_i} | V_{\xi} | \Psi_{cd}^{J_i M_i} \rangle = \langle V_{\xi} \rangle_{abcd}^{J_i M_i} \quad (\text{A.10})$$

Notemos que los elementos de matriz singlete-impar serán nulos para el caso de partículas idénticas.

Para el caso de una interacción **protón-neutrón**, tendremos que:

$$\langle V_{\xi} \rangle_{abcd}^{J_i M_i} = 2 N_{ab} N_{cd} \left\{ \left[ 1 - (-)^{j_c + j_d - J_i} P_{cd} \right] \langle j_a j_b, J_i M_i | V_{\xi} | j_c j_d, J_i M_i \rangle \right\} \quad (\text{A.11})$$

$$= \langle j_a j_b, J_i M_i | V_{\xi} | j_c j_d, J_i M_i \rangle \quad (\text{A.12})$$

donde hemos usado la relación  $2 N_{ab} N_{cd} \left[ 1 - (-)^{j_c + j_d - J_i} P_{cd} \right] = 1$ .

Entonces, los elementos de matriz para este par serán:

$$\langle V_{se/o}(r) P_{se/o} \rangle_{abcd}^{J_i M_i} = \begin{cases} \langle j_a j_b, J_i M_i | \frac{V_{se}(r)}{2} \left[ 1 - (-)^{j_c + j_d - J_i} P_{cd} \right] P_S | j_c j_d, J_i M_i \rangle & \text{se} - pn \\ \langle j_a j_b, J_i M_i | \frac{V_{so}(r)}{2} \left[ 1 - (-)^{j_c + j_d - J_i} P_{cd} \right] P_S | j_c j_d, J_i M_i \rangle & \text{so} - pn \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

Por lo cual, a nivel interacción entre dos cuerpos, una de las principales diferencias entre la interacción entre partículas idénticas e interacción entre no-idénticas es que el canal singlete-impar de la interacción gaussiana solo actúa para el caso de partículas distintas.

## A.2. Elementos de matriz para las interacciones triplete par y triplete impar

Siguiendo el análisis realizado en la sección anterior, para **partículas idénticas**, partimos de la ecuación (A.7), donde ahora la interacción será:

$$V_{\xi} = V_{te/o}(r) P_{te/o} = \frac{V_{te/o}(r)}{2} \left\{ \left[ 1 \pm (-)^{j_c + j_d + J} P_{cd} \right] - \left[ 1 \pm (-)^{j_c + j_d + J} P_{cd} \right] P_S \right\} \quad (\text{A.14})$$

Entonces,

$$\langle V_{te/o}(r) P_{te/o} \rangle_{abcd}^{J_i M_i} = 2 N_{ab} N_{cd} \left[ 1 - (-)^{j_c + j_d - J_i} P_{cd} \right] \left\{ \langle j_a j_b, J_i M_i | \frac{V_{te/o}(r)}{2} \left[ \pm + (-)^{j_c + j_d + J_i} P_{cd} \right] | j_c j_d, J_i M_i \rangle \right. \quad (A.15)$$

$$\left. - \langle j_a j_b, J_i M_i | \frac{V_{te/o}(r)}{2} \left[ \pm + (-)^{j_c + j_d + J_i} P_{cd} \right] P_S | j_c j_d, J_i M_i \rangle \right\} =$$

$$= 2 N_{ab} N_{cd} \left\{ (1 \mp 1) \langle j_a j_b, J_i M_i | \frac{V_{te/o}(r)}{2} | j_c j_d, J_i M_i \rangle \right.$$

$$+ (-)^{j_c + j_d - J_i} (\pm 1 - 1) \langle j_a j_b, J_i M_i | \frac{V_{te/o}(r)}{2} | j_d j_c, J_i M_i \rangle \quad (A.16)$$

$$+ (-1 \pm 1) \langle j_a j_b, J_i M_i | \frac{V_{te/o}(r)}{2} P_S | j_c j_d, J_i M_i \rangle$$

$$\left. + (-)^{j_c + j_d - J_i} (\mp 1 + 1) \langle j_a j_b, J_i M_i | \frac{V_{te/o}(r)}{2} P_S | j_d j_c, J_i M_i \rangle \right\}$$

Es así que el canal triplete-par se anula

$$\langle V_{te}(r) P_{te} \rangle_{abcd}^{J_i M_i} = 0 \quad te \quad (A.17)$$

y el canal triplete-impar queda

$$\langle V_{to}(r) P_{to} \rangle_{abcd}^{J_i M_i} = 2 N_{ab} N_{cd} \left\{ \langle j_a j_b, J_i M_i | V_{to}(r) \left[ 1 - (-)^{j_c + j_d + J_i} P_{cd} \right] | j_c j_d, J_i M_i \rangle \right.$$

$$\left. - \langle j_a j_b, J_i M_i | V_{to}(r) \left[ 1 - (-)^{j_c + j_d + J_i} P_{cd} \right] P_S | j_c j_d, J_i M_i \rangle \right\} \quad to \quad (A.18)$$

Mientras que para la interacción **protón-neutrón**, partimos de la ecuación (A.12) utilizando la interacción (A.14), de forma que para el canal triplete-par tendremos

$$\langle V_{te}(r) P_{te} \rangle_{abcd}^{J_i M_i} = \langle j_a j_b, J_i M_i | \frac{V_{te}(r)}{2} \left[ 1 + (-)^{j_c + j_d + J_i} P_{cd} \right] | j_c j_d, J_i M_i \rangle \quad (A.19)$$

$$- \langle j_a j_b, J_i M_i | \frac{V_{te}(r)}{2} \left[ 1 + (-)^{j_c + j_d + J_i} P_{cd} \right] P_S | j_c j_d, J_i M_i \rangle \quad te - pn$$

y la interacción del canal triplete-impar quedará

$$\langle V_{to}(r) P_{to} \rangle_{abcd}^{J_i M_i} = \langle j_a j_b, J_i M_i | \frac{V_{to}(r)}{2} \left[ 1 - (-)^{j_c + j_d + J_i} P_{cd} \right] | j_c j_d, J_i M_i \rangle \quad (A.20)$$

$$- \langle j_a j_b, J_i M_i | \frac{V_{to}(r)}{2} \left[ 1 - (-)^{j_c + j_d + J_i} P_{cd} \right] P_S | j_c j_d, J_i M_i \rangle \quad to - pn$$

### A.3. Elementos de matriz de la interacción central escritos en función de los proyectores $P_S$ y $P_W$ .

$$\begin{aligned} \langle V_c(r) \rangle_{abcd}^{J_i M_i} &= \left\langle \frac{V_{se}(r)}{2} [\dots]_- P_S \right\rangle_{abcd}^{J_i M_i} + \left\langle \frac{V_{to}(r)}{2} [\dots]_- (1 - P_S) \right\rangle_{abcd}^{J_i M_i} + \\ &+ \left\langle \frac{V_{te}(r)}{2} [\dots]_+ (1 - P_S) \right\rangle_{abcd}^{J_i M_i} + \left\langle \frac{V_{so}(r)}{2} [\dots]_+ P_S \right\rangle_{abcd}^{J_i M_i} \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

$$\begin{aligned} &= \left\langle \left\{ \frac{V_{se}(r)}{2} [\dots]_- - \frac{V_{to}(r)}{2} [\dots]_- - \frac{V_{te}(r)}{2} [\dots]_+ + \frac{V_{so}(r)}{2} [\dots]_+ \right\} P_S \right\rangle_{abcd}^{J_i M_i} + \\ &+ \left\langle \frac{V_{to}(r)}{2} [\dots]_- + \frac{V_{te}(r)}{2} [\dots]_+ \right\rangle_{abcd}^{J_i M_i} \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

donde por simplicidad definimos  $[\dots]_{\mp} = [1 \mp (-)^{j_c+j_d-J_i} P_{cd}]$ .

Así, para el caso de **nucleones idénticos**, los elementos de matriz de la interacción central quedarán

$$\begin{aligned} \langle V_c(r) \rangle_{abcd}^{J_i M_i} &= 2 N_{ab} N_{cd} \left\{ \langle j_a j_b; J_i M_i | (V_{se} - V_{to}) P_S | j_c j_d; J_i M_i \rangle - \right. \\ &- (-)^{j_c+j_d-J_i} \langle j_a j_b; J_i M_i | (V_{se} - V_{to}) P_S | j_d j_c; J_i M_i \rangle + \\ &+ \langle j_a j_b; J_i M_i | V_{to} | j_c j_d; J_i M_i \rangle - \\ &\left. - (-)^{j_c+j_d-J_i} \langle j_a j_b; J_i M_i | V_{to} | j_d j_c; J_i M_i \rangle \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

mientras que para **protón-neutrón** tendremos que

$$\begin{aligned} \langle V_c(r) \rangle_{abcd}^{J_i M_i} &= \frac{1}{2} \left\{ \langle j_a j_b; J_i M_i | (V_{se} - V_{to} - V_{te} + V_{so}) P_S | j_c j_d; J_i M_i \rangle - \right. \\ &- (-)^{j_c+j_d-J_i} \langle j_a j_b; J_i M_i | (V_{se} - V_{to} + V_{te} - V_{so}) P_S | j_d j_c; J_i M_i \rangle + \\ &+ \langle j_a j_b; J_i M_i | V_{to} + V_{te} | j_c j_d; J_i M_i \rangle - \\ &\left. - (-)^{j_c+j_d-J_i} \langle j_a j_b; J_i M_i | V_{to} - V_{te} | j_d j_c; J_i M_i \rangle \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Estas expresiones coinciden con las de la página 1714 de la Ref. [116].

#### A.4. Elementos de matriz de la interacción de Coulomb

Realizando el mismo análisis de las secciones anteriores, pero ahora para la interacción de Coulomb  $V_{\text{coul}}(r) = \frac{e^2}{r} = \frac{e^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$ , llegamos a

$$\langle V_{\text{coul}}(r) \rangle_{abcd}^{J_i M_i} = \left\langle \frac{e^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right\rangle_{abcd}^{J_i M_i} = \quad (\text{A.25})$$

$$= 2 N_{ab} N_{cd} \left[ 1 - (-)^{j_c + j_d - J_i} P_{cd} \right] \langle j_a j_b, J_i M_i | \frac{e^2}{r} | j_c j_d, J_i M_i \rangle = \quad (\text{A.26})$$

$$= 2 N_{ab} N_{cd} \left\{ \langle j_a j_b, J_i M_i | \frac{e^2}{r} | j_c j_d, J_i M_i \rangle - (-)^{j_c + j_d - J_i} \langle j_a j_b, J_i M_i | \frac{e^2}{r} | j_d j_c, J_i M_i \rangle \right\} \quad (\text{A.27})$$

#### A.5. Expansión multipolar del potencial de Coulomb y del potencial gaussiano

De las Referencias [160](pag. 259), [161](pag. 242), [162] y [163](pag. 497), tenemos que la expansión multipolar de la expresión

$$V_{\text{coul}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{e^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \quad (\text{A.28})$$

será

$$V_{\text{coul}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = e^2 \sum_{k\kappa} \frac{4\pi}{2k+1} \frac{r_{<}^k}{r_{>}^{k+1}} Y_{k\kappa}(\theta_1, \phi_1) Y_{k\kappa}^*(\theta_2, \phi_2) \quad (\text{A.29})$$

$$= e^2 \sum_k \frac{r_{<}^k}{r_{>}^{k+1}} P_k(\cos \theta) \quad (\text{A.30})$$

$$= \sum_k V_k^{\text{coul}}(r_1, r_2) P_k(\cos \theta) \quad (\text{A.31})$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre los vectores  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$ ,  $r_{<}(>)$  es la menor (mayor) de las distancias  $r_1$  y  $r_2$ ,  $e^2 = 1.43996508 \text{ MeV fm}$  y

$$\frac{e^2}{\hbar c} = \alpha \quad (\text{A.32})$$

$$e^2 = (\hbar c) \alpha \quad (\text{A.33})$$

$$\alpha = \frac{1}{137.036} \quad (\text{A.34})$$

$$\hbar c = 197.327053 \text{ MeV fm} \quad (\text{A.35})$$

Si consideramos la interacción Gaussiana, la expansión en los polinomios de Legendre será

$$V_c(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_k V_k^c(r_1, r_2) P_k(\cos \theta) \quad (\text{A.36})$$

donde, gracias a la ortogonalidad de los polinomios de Legendre, tenemos que

$$V_k^c(r_1, r_2) = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 P_k(x) V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) dx = \quad (\text{A.37})$$

$$= \frac{2k+1}{2} V_0 e^{-\frac{(r_1^2+r_2^2)}{\beta^2}} \int_{-1}^1 P_k(x) e^{\frac{2r_1 r_2}{\beta^2} x} dx \quad (\text{A.38})$$

con  $x = \cos \theta$ .

De la página 792 de la Ref. [164], obtenemos la siguiente identidad

$$\int_{-1}^1 P_k(x) e^{i\alpha x} dx = 2i^k j_k(\alpha) \quad (\text{A.39})$$

donde  $j_k(x)$  son las funciones de Bessel irregulares definidas como  $j_k(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{k+\frac{1}{2}}(x)$ , siendo  $J_k(x)$  las funciones de Bessel cilíndricas, o funciones de Bessel de primer tipo.

Si aplicamos esta identidad (A.39) en la ecuación (A.37), tendremos que

$$V_k^c(r_1, r_2) = (2k+1) V_0 e^{-\frac{(r_1^2+r_2^2)}{\beta^2}} i^k j_k\left(-i \frac{2r_1 r_2}{\beta^2}\right) \quad (\text{A.40})$$

la cual coincide con la ecuación (32) de la Ref. [165].

Ahora bien, cuando el argumento es complejo, en lugar de  $j_k(x)$  tendremos que utilizar la función de Bessel modificada de primer tipo, o función hiperbólica de Bessel,  $I_k$ , tal que (ec. (10.2.2), pag. 443 en Ref. [166])

$$\sqrt{\frac{\pi}{2z}} I_{n+\frac{1}{2}}(z) = e^{-in\frac{\pi}{2}} j\left(ze^{i\frac{\pi}{2}}\right) = i^{-n} j(iz) \quad (\text{A.41})$$

para  $-\pi < \arg(z) \leq \frac{\pi}{2}$ ; y en particular, en la ecuación (A.40) tomamos  $z = \frac{2r_1 r_2}{\beta^2} \in \mathbb{R}^+$ .

Entonces, tendremos que la función radial  $V_k^c(r_1, r_2)$  es el producto entre la función gaussiana de decaimiento y una exponencial creciente obtenida a travs de la función de Bessel modificada. Cuando  $x \in \mathbb{R}^+$ ,  $i^k j_k(-ix)$  es real. Así, la ecuación (A.36) será (ver ec. (31) de la Ref. [165])

$$V_c(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = V_0 e^{-\frac{(r_1^2+r_2^2)}{\beta^2}} \sum_k (2k+1) i^k j_k\left(-i \frac{2r_1 r_2}{\beta^2}\right) P_k(\cos \theta) \quad (\text{A.42})$$

Para calcular los elementos de matriz dados en las secciones previas, será conveniente escribir a  $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  en función de tensores. Utilizando el siguiente teorema de los armónicos esféricos

$$P_k(\cos \theta) = \frac{4\pi}{2k+1} \sum_{\kappa} Y_{k\kappa}(\hat{r}_1) Y_{k\kappa}^*(\hat{r}_2) \quad (\text{A.43})$$

tendremos que

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 4\pi V_0 e^{-\frac{(r_1^2+r_2^2)}{\beta^2}} \sum_{k\kappa} i^k j_k\left(-i \frac{2r_1 r_2}{\beta^2}\right) Y_{k\kappa}(\hat{r}_1) Y_{k\kappa}^*(\hat{r}_2) = \quad (\text{A.44})$$

$$= \sum_{k\kappa} \frac{4\pi}{2k+1} V_k^c(r_1, r_2) Y_{k\kappa}(\hat{r}_1) Y_{k\kappa}^*(\hat{r}_2) \quad (\text{A.45})$$

donde  $\hat{r}_1$  y  $\hat{r}_2$  son las direcciones de los vectores  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$ , respectivamente, tomadas respecto a un eje  $z$  arbitrario.

## A.6. Expansión multipolar de los elementos de matriz $P_S$ y $P_W$

### A.6.1. Expansión multipolar de los elementos de matriz de Wigner $P_W = 1$

Para cada canal  $\xi = \{se, so, te, to\}$  de la interacción Gaussiana, veremos a continuación la expansión multipolar de los elementos de matriz (A.22) con parte  $P_W = 1$

$$\langle V_\xi(r) P_W \rangle_{abcd}^{J_i M_i} \equiv \langle V_\xi(r) \rangle_{abcd}^{J_i M_i} = \quad (A.46)$$

$$= \sum_k \langle j_a j_b; J_i M_i | V_k^\xi(r_1, r_2) P_k(\cos \theta) | j_c j_d; J_i M_i \rangle \quad (A.47)$$

$$= \sum_k \langle \varphi_a(r_1) \varphi_b(r_2) | V_k^\xi(r_1, r_2) | \varphi_c(r_1) \varphi_d(r_2) \rangle \quad (A.48)$$

$$\begin{aligned} & \langle [s_a l_a]_{j_a} [s_b l_b]_{j_b}, J_i M_i | \frac{4\pi}{2k+1} \sum_\kappa Y_{k\kappa}(\hat{r}_1) Y_{k\kappa}^*(\hat{r}_2) | [s_c l_c]_{j_c} [s_d l_d]_{j_d}, J_i M_i \rangle \\ & = \sum_k F_k(abcd) f_k(abcd) \end{aligned} \quad (A.49)$$

tomando  $P_W = 1$  y  $|j_c j_d; J_i M_i\rangle$  es la función de onda de dos cuerpos acoplada sin antisimetrizar ni normalizar, dada en la ecuación (2.47).

Los coeficientes radiales  $F_k$  y angulares  $f_k$  son

$$F_k^\xi(abcd) = \frac{1}{2k+1} \langle \varphi_a(r_1) \varphi_b(r_2) | V_k^\xi(r_1, r_2) | \varphi_c(r_1) \varphi_d(r_2) \rangle \quad (A.50)$$

$$f_k(abcd) = 4\pi \langle [s_a l_a]_{j_a} [s_b l_b]_{j_b}, J_i M_i | \sum_\kappa Y_{k\kappa}(\hat{r}_1) Y_{k\kappa}^*(\hat{r}_2) | [s_c l_c]_{j_c} [s_d l_d]_{j_d}, J_i M_i \rangle \quad (A.51)$$

Los elementos de matriz dados coinciden con aquellos de la Ref. [167]. Además, la definición de  $F_k^\xi$  coincide con la dada por en la Ref. [131] si la reescribimos en su forma integral

$$F_k^\xi = \int r_1^2 dr_1 \int r_2^2 dr_2 \varphi_a(r_1) \varphi_b(r_2) \varphi_c(r_1) \varphi_d(r_2) \int_{-1}^1 \frac{d(\cos(\theta))}{2} V_k^\xi(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) P_k(\cos(\theta)) \quad (A.52)$$

Si también reescribimos esta última expresión en término de función de onda radial  $u(r)$  ( $\varphi(r) = u(r)/r$ )

$$F_k^\xi = \frac{1}{2k+1} \int dr_1 \int dr_2 u_a(r_1) u_b(r_2) V_k^\xi(r_1, r_2) u_c(r_1) u_d(r_2) \quad (A.53)$$

tendremos que, para cada canal de la **interacción Gaussiana**, los coeficientes radiales serán

$$F_k^\xi = V_\xi \int \int u_a(r_1) u_b(r_2) e^{-\frac{(r_1^2 + r_2^2)}{\beta_\xi^2}} i^k j_k\left(-i \frac{2r_1 r_2}{\beta^2}\right) u_c(r_1) u_d(r_2) dr_1 dr_2 \quad (A.54)$$

Realizando el mismo análisis, podemos llegar a que para la **interacción de Coulomb**, estos coeficientes radiales serán

$$F_k^{\text{Coul}} = \frac{e^2}{2k+1} \int \int u_a(r_1) u_b(r_2) \frac{r_{\leq}^k}{r_{>}^{k+1}} u_c(r_1) u_d(r_2) dr_1 dr_2 \quad (\text{A.55})$$

Para la parte angular  $f_k$  (A.51), realizando la deducción, se llega a la misma expresión que la dada en la Ref. [167]

$$f_k = (-)^{j_d + J_i + j_b} W(j_a j_c j_b j_d, k J_i) \left[ \frac{1 + (-)^{l_a + k + l_c}}{2} \right] \hat{j}_a \hat{j}_c \langle j_c 1/2 j_a - 1/2 | k 0 \rangle \left[ \frac{1 + (-)^{l_b + k + l_d}}{2} \right] \hat{j}_b \hat{j}_d \langle j_d 1/2 j_b - 1/2 | k 0 \rangle$$

donde los factores entre corchetes nos aseguran que  $k + l_a + l_c$  y  $k + l_b + l_d$  sean pares. Además, por la presencia de los coeficientes  $W(j_a j_c j_b j_d, k J_i)$ , se deben seguir las siguientes restricciones triangulares

$$|j_a - j_b| \leq k \leq j_a + j_b \quad (\text{A.56})$$

$$|j_a - j_c| \leq J_i \leq j_a + j_c \quad (\text{A.57})$$

$$|j_b - j_d| \leq J_i \leq j_b + j_d \quad (\text{A.58})$$

$$|j_d - j_c| \leq k \leq j_d + j_c \quad (\text{A.59})$$

Más aun, los coeficientes  $\langle j_c 1/2 j_a - 1/2 | k 0 \rangle$  y  $\langle j_d 1/2 j_b - 1/2 | k 0 \rangle$  nos fuerzan a respetar las siguientes relaciones triangulares

$$|j_a - j_c| \leq k \leq j_a + j_c \quad (\text{A.60})$$

$$|j_d - j_b| \leq k \leq j_d + j_b \quad (\text{A.61})$$

Las últimas relaciones triangulares que deben respetarse se obtienen al recurrir a la ecuación (A.2.81) de la Ref. [?] ]

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} = -\hat{l}_1 \hat{l}_2 \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & J \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J \\ l_2 & l_1 & 1/2 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.62})$$

y son

$$|l_a - l_c| \leq k \leq l_a + l_c$$

$$|l_d - l_b| \leq k \leq l_d + l_b$$

Por lo tanto,  $k = k_{\min} \dots k_{\max}$ , con

$$k_{\min} = \text{máx}\{0, |j_a - j_b|, |j_d - j_c|, |j_a - j_c|, |j_d - j_b|, |l_a - l_c|, |l_d - l_b|\} \quad (\text{A.63})$$

$$k_{\max} = \text{mín}\{(j_a + j_b), (j_d + j_c), (j_a + j_c), (j_d + j_b), (l_a + l_c), (l_d + l_b)\} \quad (\text{A.64})$$

### A.6.2. Expansión multipolar de los elementos de matriz del singlete $P_S$

Siguiendo la deducción de la sección previa, uno puede tomar

$$\langle j_a j_b; J_i M_i | V_\xi(r) P_S | j_c j_d; J_i M_i \rangle = \sum_k F_k(abcd) f_k^S(abcd) \quad (\text{A.65})$$

donde los coeficientes radiales  $F_k^\xi$  son los mismos de la sección anterior dados en las ecuaciones (A.50), (A.54) y (A.55), mientras que los coeficientes angulares si se diferencian:

$$\begin{aligned} f_k^S &= \frac{1}{2} (-)^{j_d + J_i + j_b - 1} \hat{j}_a \hat{j}_b \hat{j}_c \hat{j}_d \hat{l}_a \hat{l}_b \hat{l}_c \hat{l}_d \\ & W(l_a j_a l_b j_b, 1/2 J_i) W(l_c j_c l_d j_d, 1/2 J_i) \\ & \left[ \frac{1 + (-)^{l_a + k + l_c}}{2} \right] \left[ \frac{1 + (-)^{l_b + k + l_d}}{2} \right] \\ & \langle l_a 0 l_c 0 | k 0 \rangle \langle l_b 0 l_d 0 | k 0 \rangle W(l_a l_c l_b l_d, k J_i) \end{aligned} \quad (\text{A.66})$$

expresión que es igual a las dadas en las Ref. [131, 167].

Las relaciones triangulares que deben respetarse salen de los coeficientes seis- $j$  y de los Clebsch-Gordan, y son

$$|l_a - l_c| \leq k_i \leq l_a + l_c \quad (\text{A.67})$$

$$|l_a - l_b| \leq J_i \leq l_a + l_b \quad (\text{A.68})$$

$$|l_d - l_b| \leq k_i \leq l_d + l_b \quad (\text{A.69})$$

$$|l_d - l_c| \leq J_i \leq l_d + l_c \quad (\text{A.70})$$

Por lo cual, la sumatoria en  $k$  se realiza entre los extremos

$$k_{\min} = \text{máx}\{0, |l_a - l_c|, |l_d - l_b|\} \quad (\text{A.71})$$

$$k_{\max} = \text{mín}\{(l_a + l_c), (l_d + l_b)\} \quad (\text{A.72})$$

### A.7. Expansión multipolar de la interacción gaussiana completa

Insertando en la ecuación (A.22) los resultados de la sección previa, llegamos a que la expansión multipolar de los elementos de matriz para **nucleones idénticos** es

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{ab}^{J_i M_i} | V_G(r) | \Psi_{cd}^{J_i M_i} \rangle &= 2N_{ab} N_{cd} \\ & \left\{ \sum_k [F_k^{\text{se}}(abcd) - F_k^{\text{to}}(abcd)] f_k^S(abcd) \right. \\ & - (-)^{j_c + j_d - J_i} \sum_k [F_k^{\text{se}}(abdc) - F_k^{\text{to}}(abdc)] f_k^S(abdc) \\ & + \sum_k F_k^{\text{to}}(abcd) f_k(abcd) \\ & \left. - (-)^{j_c + j_d - J_i} \sum_k F_k^{\text{to}}(abdc) f_k(abdc) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.73})$$

mientras que para **protón-neutrón** queda

$$\begin{aligned}
& \langle \Psi_{ab}^{J_i M_i} | V_G(r) | \Psi_{cd}^{J_i M_i} \rangle = \\
& = \frac{1}{2} \left\{ \sum_k [F_k^{\text{se}}(abcd) - F_k^{\text{to}}(abcd) + F_k^{\text{so}}(abcd) - F_k^{\text{te}}(abcd)] f_k^S(abcd) \right. \\
& \quad - (-)^{j_c+j_d-J_i} \sum_k [F_k^{\text{se}}(abdc) - F_k^{\text{to}}(abdc) - F_k^{\text{so}}(abdc) + F_k^{\text{te}}(abdc)] f_k^S(abdc) \\
& \quad + \sum_k [F_k^{\text{to}}(abcd) + F_k^{\text{te}}(abcd)] f_k(abcd) \\
& \quad \left. - (-)^{j_c+j_d-J_i} \sum_k [F_k^{\text{to}}(abdc) - F_k^{\text{te}}(abdc)] f_k(abdc) \right\} \tag{A.74}
\end{aligned}$$

## A.8. Expansión multipolar de la interacción de Coulomb

Insertando en la ecuación (A.27) los resultados de la sección A.6, llegamos a que la expansión multipolar de los elementos de matriz de la interacción de Coulomb es

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_{ab}^{J_i M_i} | V_{\text{Coul}}(r) | \Psi_{cd}^{J_i M_i} \rangle = 2 N_{ab} N_{cd} \left\{ \sum_k F_k^{\text{Coul}}(abcd) f_k(abcd) \right. \\
\left. - (-)^{j_c+j_d-J_i} \sum_k F_k^{\text{Coul}}(abdc) f_k(abdc) \right\} \tag{A.75}
\end{aligned}$$

## APÉNDICE B

### LOS ELEMENTOS DE MATRIZ DE LA INTERACCIÓN PROTÓN-NEUTRÓN

Este apéndice se encuentra ordenado en dos etapas: en primer lugar, presentaremos la obtención de los elementos de matriz  $\bar{V}_{13}^{JM}$  introducidos en la sección 2.1.3.2; y luego, a partir de estos elementos calcularemos los 16 términos posibles de la interacción protón-neutrón partiendo de la ecuación (2.92) de la sección 2.1.3.2.

#### B.1. Elementos de matriz $\bar{V}_{13}^{JM}$

Retomando el desarrollo realizado en la sección 2.1.3.2, habíamos llegado a que calcular los elementos de matriz  $\bar{V}_{pn}^{JM}$  se reducía a obtener los elementos de una matriz protón-neutrón con la siguiente forma:

$$\bar{V}_{13}^{JM} = \langle (j_a j_b, J_p)(j_c j_d, J_n); JM | V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) | (j_{a'} j_{b'}, J'_p)(j_{c'} j_{d'}, J'_n); JM \rangle \quad (\text{B.1})$$

los cuales vamos a reescribir realizando un re-acople de las funciones de onda de partículas idénticas  $nn$  y  $pp$  para pasar a una notación de funciones de onda  $pn$ , pues la interacción  $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3)$  es justamente entre protones y neutrones. Entonces, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \bar{V}_{13}^{JM} &= \sum_{J_{13} J_{24}} \begin{bmatrix} j_a & j_b & J_p \\ j_c & j_d & J_n \\ J_{13} & J_{24} & J \end{bmatrix} \sum_{J'_{13} J'_{24}} \begin{bmatrix} j_{a'} & j_{b'} & J'_p \\ j_{c'} & j_{d'} & J'_n \\ J'_{13} & J'_{24} & J \end{bmatrix} \\ &\langle (j_a j_c, J_{13})(j_b j_d, J_{24}); JM | V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) | (j_{a'} j_{c'}, J'_{13})(j_{b'} j_{d'}, J'_{24}); JM \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{J_{13} J_{24}} \begin{bmatrix} j_a & j_b & J_p \\ j_c & j_d & J_n \\ J_{13} & J_{24} & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{a'} & j_{b'} & J'_p \\ j_{c'} & j_{d'} & J'_n \\ J_{13} & J_{24} & J \end{bmatrix} \\ &\delta_{bb'} \delta_{dd'} \langle j_a j_c, J_{13} M_{13} | V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) | j_{a'} j_{c'}, J_{13} M_{13} \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

donde hemos utilizados las siguientes condiciones:

$$\begin{bmatrix} j_a & j_b & J_p \\ j_c & j_d & J_n \\ J_{13} & J_{24} & J \end{bmatrix} = \hat{J}_p \hat{J}_n \hat{J}_{13} \hat{J}_{24} \begin{Bmatrix} j_a & j_b & J_p \\ j_c & j_d & J_n \\ J_{13} & J_{24} & J \end{Bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

$$\hat{J} = \sqrt{2J+1} \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{aligned} & \langle (j_a j_c, J_{13}) (j_b j_d, J_{24}); JM | V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) | (j_{a'} j_{c'}, J'_{13}) (j_{b'} j_{d'}, J'_{24}); JM \rangle = \\ & = \delta_{J_{13} J'_{13}} \delta_{J_{24} J'_{24}} \delta_{bb'} \delta_{dd'} \langle j_a j_c, J_{13} M_{13} | V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) | j_{a'} j_{c'}, J_{13} M_{13} \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

$$|j_a - j_c| \leq J_{13} \leq j_a + j_c \quad (\text{B.7})$$

$$|j_{a'} - j_{c'}| \leq J'_{13} \leq j_{a'} + j_{c'} \quad (\text{B.8})$$

$$|j_b - j_d| \leq J_{24} \leq j_b + j_d \quad (\text{B.9})$$

$$|j_{b'} - j_{d'}| \leq J'_{24} \leq j_{b'} + j_{d'} \quad (\text{B.10})$$

Es así, que los elemento de matriz  $\bar{V}_{pn}^{JM}$  quedan

$$\begin{aligned} \bar{V}_{pn}^{JM} &= \sum_{b \leq a} \sum_{b' \leq a'} \sum_{d \leq c} \sum_{d' \leq c'} X_{ab}^{J_p} X_{a'b'}^{J'_p} X_{cd}^{J_n} X_{c'd'}^{J'_n} \\ & 4 N_{ab} N_{cd} N_{a'b'} N_{c'd'} \sum_P (-)^P P \\ & \sum_{J_{13} J_{24}} \begin{bmatrix} j_a & j_b & J_p \\ j_c & j_d & J_n \\ J_{13} & J_{24} & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{a'} & j_{b'} & J'_p \\ j_{c'} & j_{d'} & J'_n \\ J_{13} & J_{24} & J \end{bmatrix} \\ & \delta_{bb'} \delta_{dd'} \langle j_a j_c, J_{13} M_{13} | V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) | j_{a'} j_{c'}, J_{13} M_{13} \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

## B.2. Términos de la interacción protón-neutrón

A continuación, vamos a calcular los 16 términos posibles de la interacción protón-neutrón obtenida en la ecuación (B.11). Por simplicidad de notación, haremos el cambio  $\{a, b, c, d, a', b', c', d'\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 1', 2', 3', 4'\}$ .

Entonces, a partir del operador  $P$ , y como tenemos 4 pares de partículas idénticas, tendremos 16 permutaciones posibles:

I. No se realiza ninguna permutación

II. Se realiza una permutación a la vez en cada par

- $(j_1, j_2)$ ,
- $(j_3, j_4)$ ,
- $(j'_1, j'_2)$ ,
- $(j'_3, j'_4)$ .

por lo cual quedan cuatro términos.

III. Se realizan dos permutaciones a la vez en cada dupla de pares

- $(j'_1, j'_2) - (j'_3, j'_4)$ ,
- $(j_3, j_4) - (j'_3, j'_4)$ ,
- $(j_1, j_2) - (j'_3, j'_4)$ ,
- $(j_3, j_4) - (j'_1, j'_2)$ ,
- $(j_1, j_2) - (j'_1, j'_2)$ , and
- $(j_1, j_2) - (j_3, j_4)$

por lo cual quedan seis términos.

IV. Se realizan tres permutaciones a la vez en cada tripla de pares

- $(j_1, j_2) - (j_3, j_4) - (j'_1, j'_2)$ ,
- $(j_1, j_2) - (j_3, j_4) - (j'_3, j'_4)$ ,
- $(j_3, j_4) - (j'_1, j'_2) - (j'_3, j'_4)$ , and
- $(j_1, j_2) - (j'_1, j'_2) - (j'_3, j'_4)$

quedando así cuatro términos

V. Se realizan cuatro permutaciones en simultaneo en la cuádrupla:  $(j_1, j_2) - (j_3, j_4) - (j'_1, j'_2) - (j'_3, j'_4)$

A continuación, se muestra el detalle de cada una en particular, llegando a diferentes expresiones de los elementos  $\bar{V}_{13}^{JM}$ .

I. **Sin permutaciones:**  $(j_1 j_2)(j_3 j_4) - (j'_1 j'_2)(j'_3 j'_4) \rightarrow (j_1 j_2)(j_3 j_4) - (j'_1 j'_2)(j'_3 j'_4)$ , por lo cual la ecuación (2.91) queda idéntica

$$\bar{V}_{13}^{JM} = \sum_{J_{13} J_{24}} \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ J_{13} & J_{24} & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j'_1 & j'_2 & J'_{12} \\ j'_3 & j'_4 & J'_{34} \\ J_{13} & J_{24} & J \end{bmatrix} \delta_{j_2 j'_2} \delta_{j_4 j'_4} \langle j_1 j_3, J_{13} M_{13} | V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) | j'_1 j'_3, J_{13} M_{13} \rangle \quad (\text{B.12})$$

II. **Una permutación:**

▪  $(j_1 j_2)(j_3 j_4) - (j'_1 j'_2)(j'_3 j'_4) \rightarrow (j_2 j_1)(j_3 j_4) - (j'_1 j'_2)(j'_3 j'_4)$ , por lo cual la ecuación (2.91) queda

$$\bar{V}_{13}^{JM} = (-)^{j_1 + j_2 - J_{12} + 1} \sum_{J_{23} J_{14}} \begin{bmatrix} j_2 & j_1 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ J_{23} & J_{14} & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j'_1 & j'_2 & J'_{12} \\ j'_3 & j'_4 & J'_{34} \\ J_{23} & J_{14} & J \end{bmatrix} \delta_{j_1 j'_2} \delta_{j_4 j'_4} \langle j_2 j_3, J_{23} M_{23} | V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) | j'_1 j'_3, J_{23} M_{23} \rangle \quad (\text{B.13})$$

- $(j_1 j_2)(j_3 j_4) - (j'_1 j'_2)(j'_3 j'_4) \rightarrow (j_1 j_2)(j_4 j_3) - (j'_1 j'_2)(j'_3 j'_4)$ , por lo cual la ecuación (2.91) queda

$$\bar{V}_{13}^{JM} = (-)^{j_3+j_4-J_{34}+1} \sum_{J_{14} J_{23}} \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_4 & j_3 & J_{34} \\ J_{14} & J_{23} & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j'_1 & j'_2 & J'_{12} \\ j'_3 & j'_4 & J'_{34} \\ J_{14} & J_{23} & J \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

$$\delta_{j_2 j'_2} \delta_{j_3 j'_4} \langle j_1 j_4, J_{14} M_{14} | V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) | j'_1 j'_3, J_{14} M_{14} \rangle$$

- $(j_1 j_2)(j_3 j_4) - (j'_1 j'_2)(j'_3 j'_4) \rightarrow (j_1 j_2)(j_3 j_4) - (j'_2 j'_1)(j'_3 j'_4)$ , por lo cual la ecuación (2.91) queda

$$\bar{V}_{13}^{JM} = (-)^{j'_1+j'_2-J'_{12}+1} \sum_{J_{13} J_{24}} \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ J_{13} & J_{24} & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j'_2 & j'_1 & J'_{12} \\ j'_3 & j'_4 & J'_{34} \\ J_{13} & J_{24} & J \end{bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

$$\delta_{j_2 j'_1} \delta_{j_4 j'_4} \langle j_1 j_3, J_{13} M_{13} | V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) | j'_2 j'_3, J_{13} M_{13} \rangle$$

- $(j_1 j_2)(j_3 j_4) - (j'_1 j'_2)(j'_3 j'_4) \rightarrow (j_1 j_2)(j_3 j_4) - (j'_1 j'_2)(j'_4 j'_3)$ , por lo cual la ecuación (2.91) queda

$$\bar{V}_{13}^{JM} = (-)^{j'_3+j'_4-J'_{34}+1} \sum_{J_{13} J_{24}} \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ J_{13} & J_{24} & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j'_1 & j'_2 & J'_{12} \\ j'_4 & j'_3 & J'_{34} \\ J_{13} & J_{24} & J \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

$$\delta_{j_2 j'_2} \delta_{j_4 j'_3} \langle j_1 j_3, J_{13} M_{13} | V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) | j'_1 j'_4, J_{13} M_{13} \rangle$$

### III. Dos permutaciones:

- $(j_1 j_2)(j_3 j_4) - (j'_1 j'_2)(j'_3 j'_4) \rightarrow (j_1 j_2)(j_3 j_4) - (j'_2 j'_1)(j'_4 j'_3)$ , por lo cual la ecuación (2.91) queda

$$\bar{V}_{13}^{JM} = (-)^{j'_1+j'_2-J'_{12}+j'_3+j'_4-J'_{34}} \sum_{J_{13} J_{24}} \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ J_{13} & J_{24} & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j'_2 & j'_1 & J'_{12} \\ j'_4 & j'_3 & J'_{34} \\ J_{13} & J_{24} & J \end{bmatrix} \quad (\text{B.17})$$

$$\delta_{j_2 j'_1} \delta_{j_4 j'_3} \langle j_1 j_3, J_{13} M_{13} | V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) | j'_2 j'_4, J_{13} M_{13} \rangle$$

- $(j_1 j_2)(j_3 j_4) - (j'_1 j'_2)(j'_3 j'_4) \rightarrow (j_1 j_2)(j_4 j_3) - (j'_1 j'_2)(j'_4 j'_3)$ , por lo cual la ecuación (2.91) queda

$$\bar{V}_{13}^{JM} = (-)^{j_3+j_4-J_{34}+j'_3+j'_4-J'_{34}} \sum_{J_{13} J_{24}} \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_4 & j_3 & J_{34} \\ J_{14} & J_{23} & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j'_1 & j'_2 & J'_{12} \\ j'_4 & j'_3 & J'_{34} \\ J_{14} & J_{23} & J \end{bmatrix} \quad (\text{B.18})$$

$$\delta_{j_2 j'_2} \delta_{j_3 j'_3} \langle j_1 j_4, J_{13} M_{13} | V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) | j'_1 j'_4, J_{13} M_{13} \rangle$$

- $(j_1 j_2)(j_3 j_4) - (j'_1 j'_2)(j'_3 j'_4) \rightarrow (j_2 j_1)(j_3 j_4) - (j'_1 j'_2)(j'_4 j'_3)$ , por lo cual la ecuación (2.91) queda

$$\bar{V}_{13}^{JM} = (-)^{j_1+j_2-J_{12}+j'_3+j'_4-J'_{34}} \sum_{J_{13} J_{24}} \begin{bmatrix} j_2 & j_1 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ J_{23} & J_{14} & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j'_1 & j_1 & J'_{12} \\ j'_4 & j'_3 & J'_{34} \\ J_{23} & J_{14} & J \end{bmatrix} \quad (\text{B.19})$$

$$\delta_{j_1 j'_2} \delta_{j_4 j'_3} \langle j_2 j_3, J_{13} M_{13} | V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) | j'_1 j'_4, J_{13} M_{13} \rangle$$

- $(j_1 j_2)(j_3 j_4) - (j'_1 j'_2)(j'_3 j'_4) \rightarrow (j_1 j_2)(j_4 j_3) - (j'_2 j'_1)(j'_3 j'_4)$ , por lo cual la ecuación (2.91) queda

$$\bar{V}_{13}^{JM} = (-)^{j_3+j_4-J_{34}+j'_1+j'_2-J'_{12}} \sum_{J_{13} J_{24}} \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_4 & j_3 & J_{34} \\ J_{14} & J_{23} & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j'_2 & j'_1 & J'_{12} \\ j'_3 & j'_4 & J'_{34} \\ J_{14} & J_{23} & J \end{bmatrix} \quad (\text{B.20})$$

$$\delta_{j_2 j'_1} \delta_{j_3 j'_4} \langle j_1 j_4, J_{13} M_{13} | V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) | j'_2 j'_3, J_{13} M_{13} \rangle$$

- $(j_1 j_2)(j_3 j_4) - (j'_1 j'_2)(j'_3 j'_4) \rightarrow (j_2 j_1)(j_3 j_4) - (j'_2 j'_1)(j'_3 j'_4)$ , por lo cual la ecuación (2.91) queda

$$\bar{V}_{13}^{JM} = (-)^{j_1+j_2-J_{12}+j'_1+j'_2-J'_{12}} \sum_{J_{13} J_{24}} \begin{bmatrix} j_2 & j_1 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ J_{23} & J_{14} & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j'_2 & j'_1 & J'_{12} \\ j'_3 & j'_4 & J'_{34} \\ J_{23} & J_{14} & J \end{bmatrix} \quad (\text{B.21})$$

$$\delta_{j_1 j'_1} \delta_{j_4 j'_4} \langle j_2 j_3, J_{13} M_{13} | V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) | j'_2 j'_3, J_{13} M_{13} \rangle$$

- $(j_1 j_2)(j_3 j_4) - (j'_1 j'_2)(j'_3 j'_4) \rightarrow (j_2 j_1)(j_4 j_3) - (j'_1 j'_2)(j'_3 j'_4)$ , por lo cual la ecuación (2.91) queda

$$\bar{V}_{13}^{JM} = (-)^{j_1+j_2-J_{12}+j_3+j_4-J_{34}} \sum_{J_{13} J_{24}} \begin{bmatrix} j_2 & j_1 & J_{12} \\ j_4 & j_3 & J_{34} \\ J_{24} & J_{13} & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j'_1 & j'_2 & J'_{12} \\ j'_3 & j'_4 & J'_{34} \\ J_{24} & J_{13} & J \end{bmatrix} \quad (\text{B.22})$$

$$\delta_{j_1 j'_2} \delta_{j_3 j'_4} \langle j_2 j_4, J_{13} M_{13} | V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) | j'_1 j'_3, J_{13} M_{13} \rangle$$

#### IV. Tres permutaciones:

- $(j_1 j_2)(j_3 j_4) - (j'_1 j'_2)(j'_3 j'_4) \rightarrow (j_2 j_1)(j_4 j_3) - (j'_2 j'_1)(j'_3 j'_4)$ , por lo cual la ecuación (2.91) queda

$$\bar{V}_{13}^{JM} = (-)^{j_1+j_2-J_{12}+j_3+j_4-J_{34}+j'_1+j'_2-J'_{12}+1}$$

$$\sum_{J_{13} J_{24}} \begin{bmatrix} j_2 & j_1 & J_{12} \\ j_4 & j_3 & J_{34} \\ J_{24} & J_{13} & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j'_2 & j'_1 & J'_{12} \\ j'_3 & j'_4 & J'_{34} \\ J_{23} & J_{14} & J \end{bmatrix} \quad (\text{B.23})$$

$$\delta_{j_1 j'_1} \delta_{j_3 j'_4} \langle j_2 j_4, J_{13} M_{13} | V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) | j'_2 j'_3, J_{13} M_{13} \rangle$$

- $(j_1 j_2)(j_3 j_4) - (j'_1 j'_2)(j'_3 j'_4) \rightarrow (j_2 j_1)(j_4 j_3) - (j'_1 j'_2)(j'_4 j'_3)$ , por lo cual la ecuación (2.91) queda

$$\begin{aligned} \bar{V}_{13}^{JM} = & (-)^{j_1+j_2-J_{12}+j_3+j_4-J_{34}+j'_3+j'_4-J'_{34}+1} \\ & \sum_{J_{13} J_{24}} \begin{bmatrix} j_2 & j_1 & J_{12} \\ j_4 & j_3 & J_{34} \\ J_{24} & J_{13} & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j'_1 & j'_2 & J'_{12} \\ j'_4 & j'_3 & J'_{34} \\ J_{14} & J_{23} & J \end{bmatrix} \\ & \delta_{j_1 j'_2} \delta_{j_3 j'_3} \langle j_2 j_4, J_{13} M_{13} | V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) | j'_1 j'_4, J_{13} M_{13} \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

- $(j_1 j_2)(j_3 j_4) - (j'_1 j'_2)(j'_3 j'_4) \rightarrow (j_1 j_2)(j_4 j_3) - (j'_2 j'_1)(j'_4 j'_3)$ , por lo cual la ecuación (2.91) queda

$$\begin{aligned} \bar{V}_{13}^{JM} = & (-)^{j_3+j_4-J_{34}+j'_1+j'_2-J'_{12}+j'_3+j'_4-J'_{34}+1} \\ & \sum_{J_{13} J_{24}} \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_4 & j_3 & J_{34} \\ J_{14} & J_{23} & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j'_2 & j'_1 & J'_{12} \\ j'_4 & j'_3 & J'_{34} \\ J_{24} & J_{13} & J \end{bmatrix} \\ & \delta_{j_2 j'_1} \delta_{j_3 j'_3} \langle j_1 j_4, J_{13} M_{13} | V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) | j'_2 j'_4, J_{13} M_{13} \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

- $(j_1 j_2)(j_3 j_4) - (j'_1 j'_2)(j'_3 j'_4) \rightarrow (j_2 j_1)(j_3 j_4) - (j'_2 j'_1)(j'_4 j'_3)$ , por lo cual la ecuación (2.91) queda

$$\begin{aligned} \bar{V}_{13}^{JM} = & (-)^{j_1+j_2-J_{12}+j'_1+j'_2-J'_{12}+j'_3+j'_4-J'_{34}+1} \\ & \sum_{J_{13} J_{24}} \begin{bmatrix} j_2 & j_1 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ J_{23} & J_{14} & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j'_2 & j'_1 & J'_{12} \\ j'_4 & j'_3 & J'_{34} \\ J_{24} & J_{13} & J \end{bmatrix} \\ & \delta_{j_1 j'_1} \delta_{j_4 j'_3} \langle j_2 j_3, J_{13} M_{13} | V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) | j'_2 j'_4, J_{13} M_{13} \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

- V. **Cuatro permutaciones:**  $(j_1 j_2)(j_3 j_4) - (j'_1 j'_2)(j'_3 j'_4) \rightarrow (j_2 j_1)(j_4 j_3) - (j'_2 j'_1)(j'_4 j'_3)$ , por lo cual la ecuación (2.91) queda

$$\begin{aligned} \bar{V}_{13}^{JM} = & (-)^{j_1+j_2-J_{12}+j_3+j_4-J_{34}+j'_1+j'_2-J'_{12}+j'_3+j'_4-J'_{34}} \\ & \sum_{J_{13} J_{24}} \begin{bmatrix} j_2 & j_1 & J_{12} \\ j_4 & j_3 & J_{34} \\ J_{24} & J_{13} & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j'_2 & j'_1 & J'_{12} \\ j'_4 & j'_3 & J'_{34} \\ J_{24} & J_{13} & J \end{bmatrix} \\ & \delta_{j_1 j'_1} \delta_{j_3 j'_3} \langle j_2 j_4, J_{13} M_{13} | V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) | j'_2 j'_4, J_{13} M_{13} \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

De esta manera, la suma  $\sum P$  que se hace efectiva en la definición de los elementos de matriz  $\bar{V}_{pn}^{JM}$  en la ecuación 2.92 indica que deben realizarse las dieciséis permutaciones indicadas en este apéndice, donde cada una de ellas depende de elementos de la matriz  $\bar{V}_{13}^{JM}$ .

## APÉNDICE C

### VALOR ESPERADO DEL ISOESPÍN

En este apéndice vamos a demostrar como obtener el valor esperado del isoespín  $\langle T \rangle$  para un dado estado  $|\Psi^{JM}\rangle$  de cuatro cuerpos. En primer lugar, notemos que para llegar a  $\langle T \rangle$  primero es necesario calcular  $\langle T^2 \rangle$ , pues el valor esperado del isoespín  $T$  será la solución de la ecuación

$$\langle T \rangle (\langle T \rangle + 1) - \langle T^2 \rangle = 0 \quad (\text{C.1})$$

donde conocemos la relación

$$T^2 = T_x^2 + T_y^2 + T_z^2 = \quad (\text{C.2})$$

$$= T_z + T_- T_+ + T_z^2 = \quad (\text{C.3})$$

$$= T_- T_+ + T_z(T_z + 1) \quad (\text{C.4})$$

y hemos usado

$$T_x^2 = \frac{1}{4} (T_+^2 + T_-^2 + T_+ T_- + T_- T_+) \quad (\text{C.5})$$

$$T_y^2 = -\frac{1}{4} (T_+^2 + T_-^2 - T_+ T_- - T_- T_+) \quad (\text{C.6})$$

$$[T_+, T_-] = 2T_z \quad (\text{C.7})$$

Además, de [168], tenemos que

$$T_+ = \sum_{\substack{\nu\pi \\ m_\nu m_\pi}} \delta_{\nu\pi} \delta_{m_\nu m_\pi} c_{\nu m_\nu}^\dagger c_{\nu m_\nu} \quad (\text{C.8})$$

$$T_- = \sum_{\substack{\nu\pi \\ m_\nu m_\pi}} \delta_{\nu\pi} \delta_{m_\nu m_\pi} c_{\pi m_\pi}^\dagger c_{\pi m_\pi} \quad (\text{C.9})$$

donde  $\nu$  refiere a neutrones y  $\pi$  a protones, y definimos los operadores de creación  $c_\tau^\dagger$  y destrucción  $c_\tau$  que deben respetar las siguientes condiciones de permutación [69]:

$$\{c_{im_i}, c_{km_k}\} = 0; \{c_{im_i}^\dagger, c_{km_k}^\dagger\} = 0; \{c_{im_i}, c_{km_k}^\dagger\} = \delta_{ik} \delta_{m_i m_k} \quad (\text{C.10})$$

→ (i,k) estados de protones o de neutrones

$$\{c_{\pi m_\pi}, c_{\nu m_\nu}\} = 0; \{c_{\pi m_\pi}^\dagger, c_{\nu m_\nu}^\dagger\} = 0; \{c_{\pi m_\pi}, c_{\nu m_\nu}^\dagger\} = 0 \quad (\text{C.11})$$

podemos escribir  $\langle T^2 \rangle$  en función de operadores de creación y destrucción. Por simplicidad de notación, quitaremos las proyecciones  $m_\tau$  de los operadores de creación y destrucción, pero remarcamos que actúan sobre todos los números cuánticos asociados al estado  $\tau$ .

La delta  $\delta_{\alpha\beta}$  está explícita para asegurar que, en  $T_+$ , el neutrón creado tenga los mismos números cuánticos que el protón destruido, y lo inverso para  $T_-$ . De esta manera, el operador  $T^2$  de isoespín queda:

$$T^2 = \sum_{\substack{\nu\pi \\ \nu'\pi'}} \delta_{\nu'\pi'} \delta_{\nu\pi} c_{\pi'}^\dagger c_{\nu'} c_{\nu}^\dagger c_{\pi} + T_z^2 + T_z \quad (\text{C.12})$$

Para el caso de trabajo nuestro, donde el estado de cuatro cuerpos posee la misma cantidad de protones que de neutrones, tendremos que:

$$\langle \Psi^{JM} | T^2 | \Psi^{JM} \rangle = \langle \Psi^{JM} | T_{-T_+} | \Psi^{JM} \rangle + \langle \Psi^{JM} | T_z^2 | \Psi^{JM} \rangle + \langle \Psi^{JM} | T_z | \Psi^{JM} \rangle = \quad (\text{C.13})$$

$$= \langle \Psi^{JM} | T_{-T_+} | \Psi^{JM} \rangle \quad (\text{C.14})$$

Partiendo de la expresión de la función de onda de cuatro cuerpos (2.79), vamos a reescribir las funciones de onda que conforman la base de cuatro cuerpos de forma que:

$$|J_n^\pi J_p^\pi, JM\rangle = \sum_{\substack{b \leq a \\ d \leq c}} X_{cd}^{J_n^\pi} X_{ab}^{J_p^\pi} \sum_{M_n^\pi M_p^\pi} \langle J_n^\pi M_n^\pi J_p^\pi M_p^\pi | JM \rangle \left| \left[ \Psi_{cd}^{J_n^\pi M_n^\pi} \Psi_{ab}^{J_p^\pi M_p^\pi} \right], JM \right\rangle \quad (\text{C.15})$$

donde, en función de los operadores de creación  $c_\tau^\dagger$  y destrucción  $c_\tau$ , podemos reescribir

$$\left| \left[ \Psi_{cd}^{J_n^\pi M_n^\pi} \Psi_{ab}^{J_p^\pi M_p^\pi} \right], JM \right\rangle = \sum_{\substack{m_a m_b \\ m_c m_d}} \frac{\langle j_c m_c j_d m_d | J_n^\pi M_n^\pi \rangle \langle j_a m_a j_b m_b | J_p^\pi M_p^\pi \rangle}{\sqrt{1 + \delta_{ab}} \sqrt{1 + \delta_{cd}}} c_c^\dagger c_d^\dagger c_a^\dagger c_b^\dagger |0\rangle \quad (\text{C.16})$$

Para evitar confusiones entre los operadores de creación y destrucción y la nomenclatura de los elementos de partícula simple, pasamos a la notación  $\{a, b, c, d\} \rightarrow \{\pi_1, \pi_2, \nu_1, \nu_2\}$ , donde recordemos que estos índices notan el conjunto de números cuánticos  $\{n_i, l_i, j_i\}$ , quedando la proyección  $m_i$  de  $j_i$  de manera independiente. Es así, que la función de onda de cuatro cuerpos nos queda escrita como:

$$| \Psi^{JM} \rangle = \sum_{\substack{J_n^\pi J_p^\pi \\ M_n^\pi M_p^\pi}} \sum_{\substack{\nu_2 \leq \nu_1 \\ m_{\nu_2} m_{\nu_1}}} \sum_{\substack{\pi_2 \leq \pi_1 \\ m_{\pi_2} m_{\pi_1}}} Z_{J_n^\pi J_p^\pi}^J \frac{X_{\nu_1 \nu_2}^{J_n^\pi}}{\sqrt{1 + \delta_{\nu_1 \nu_2}}} \frac{X_{\pi_1 \pi_2}^{J_p^\pi}}{\sqrt{1 + \delta_{\pi_1 \pi_2}}} \langle J_n^\pi M_n^\pi J_p^\pi M_p^\pi | JM \rangle \quad (\text{C.17})$$

$$\langle j_{\nu_1} m_{\nu_1} j_{\nu_2} m_{\nu_2} | J_n^\pi M_n^\pi \rangle \langle j_{\pi_1} m_{\pi_1} j_{\pi_2} m_{\pi_2} | J_p^\pi M_p^\pi \rangle c_{\nu_1}^\dagger c_{\nu_2}^\dagger c_{\pi_1}^\dagger c_{\pi_2}^\dagger |0\rangle$$

Dejando de lado la paridad  $\pi$  de los estados de dos cuerpos para simplificar notación, tenemos que el

valor esperado del observable  $T^2$  en el estado de cuatro cuerpos  $\Psi^{JM}$  será:

$$\begin{aligned}
\langle \Psi^{JM} | T^2 | \Psi^{JM} \rangle &= \sum_{\substack{J_n J_p \\ J'_n J'_p}} Z_{J'_n J'_p}^J Z_{J_n J_p}^J \sum_{\substack{v_1 \leq v_2 \\ v_3 \leq v_4}} \sum_{\substack{\pi_1 \leq \pi_2 \\ \pi_3 \leq \pi_4}} \frac{X_{v_3 v_4}^{J'_n}}{\sqrt{1 + \delta_{v_3 v_4}}} \frac{X_{v_1 v_2}^{J_n}}{\sqrt{1 + \delta_{v_1 v_2}}} \frac{X_{\pi_3 \pi_4}^{J'_p}}{\sqrt{1 + \delta_{\pi_3 \pi_4}}} \frac{X_{\pi_1 \pi_2}^{J_p}}{\sqrt{1 + \delta_{\pi_1 \pi_2}}} \times \\
&\times \sum_{\substack{v' \pi' \\ \pi v}} \delta_{\pi' v'} \delta_{\pi v} \sum_{\substack{M_n M_p \\ M'_n M'_p}} \langle J'_n M'_n J'_p M'_p | JM \rangle \langle J_n M_n J_p M_p | JM \rangle \times \\
&\times \sum_{\substack{m_{v_1} m_{v_2} \\ m_{v_3} m_{v_4}}} \sum_{\substack{m_{\pi_1} m_{\pi_2} \\ m_{\pi_3} m_{\pi_4}}} \langle v_3 m_{v_3} v_4 m_{v_4} | J'_n M'_n \rangle \langle v_1 m_{v_1} v_2 m_{v_2} | J_n M_n \rangle \times \\
&\times \langle \pi_3 m_{\pi_3} \pi_4 m_{\pi_4} | J'_p M'_p \rangle \langle \pi_1 m_{\pi_1} \pi_2 m_{\pi_2} | J_p M_p \rangle \times \\
&\times \langle 0 | c_{\pi_4} c_{\pi_3} c_{v_4} c_{v_3} c_{\pi'}^\dagger c_{v'}^\dagger c_v^\dagger c_\pi^\dagger c_{v_1}^\dagger c_{v_2}^\dagger c_{\pi_1}^\dagger c_{\pi_2}^\dagger | 0 \rangle
\end{aligned} \tag{C.18}$$

A continuación, trabajaremos el término

$$\langle W \rangle = \langle 0 | c_{\pi_4} c_{\pi_3} c_{v_4} c_{v_3} c_{\pi'}^\dagger c_{v'}^\dagger c_v^\dagger c_\pi^\dagger c_{v_1}^\dagger c_{v_2}^\dagger c_{\pi_1}^\dagger c_{\pi_2}^\dagger | 0 \rangle \tag{C.19}$$

aplicando sobre él el teorema de Wick [69, 169]. Teniendo en cuenta las condiciones de anticonmutación (C.10) y (C.10), en primer lugar tendremos las siguientes combinaciones de pares de protones posibles posibles:

$$\left\{ \begin{array}{cc} \pi_4 & \pi' \\ \pi_3 & \pi_1 \\ & \pi_2 \end{array} \right\} \tag{C.20}$$

Así, tendremos los primeros seis términos:

$$(-) \delta_{\pi_4 \pi'} \langle c_{\pi_3} c_{v_4} c_{v_3} c_{v'}^\dagger c_v^\dagger c_\pi^\dagger c_{v_1}^\dagger c_{v_2}^\dagger c_{\pi_1}^\dagger c_{\pi_2}^\dagger \rangle = (A) \tag{C.21}$$

$$(-) \delta_{\pi_4 \pi_1} (+) \delta_{\pi_3 \pi'} (+) \delta_{\pi \pi_2} \langle c_{v_4} c_{v_3} c_{v'}^\dagger c_v^\dagger c_{v_1}^\dagger c_{v_2}^\dagger \rangle = (B) \tag{C.22}$$

$$(+) \delta_{\pi_4 \pi_2} (+) \delta_{\pi_3 \pi'} (+) \delta_{\pi \pi_1} \langle c_{v_4} c_{v_3} c_{v'}^\dagger c_v^\dagger c_{v_1}^\dagger c_{v_2}^\dagger \rangle = (C) \tag{C.23}$$

$$(+) \delta_{\pi_3 \pi'} \langle c_{\pi_4} c_{v_4} c_{v_3} c_{v'}^\dagger c_v^\dagger c_\pi^\dagger c_{v_1}^\dagger c_{v_2}^\dagger c_{\pi_1}^\dagger c_{\pi_2}^\dagger \rangle = (D) \tag{C.24}$$

$$(+) \delta_{\pi_3 \pi_1} (+) \delta_{\pi_4 \pi'} (+) \delta_{\pi \pi_2} \langle c_{v_4} c_{v_3} c_{v'}^\dagger c_v^\dagger c_{v_1}^\dagger c_{v_2}^\dagger \rangle = (E) \tag{C.25}$$

$$(-) \delta_{\pi_3 \pi_2} (+) \delta_{\pi_4 \pi'} (+) \delta_{\pi \pi_1} \langle c_{v_4} c_{v_3} c_{v'}^\dagger c_v^\dagger c_{v_1}^\dagger c_{v_2}^\dagger \rangle = (F) \tag{C.26}$$

Volvemos ahora a aplicar Wick sobre los términos (A) y (D), de forma que, para (A) tendremos las siguientes combinaciones posibles:

$$\left\{ \begin{array}{cc} \pi_3 & \pi_1 \\ \pi & \pi_2 \end{array} \right\} \tag{C.27}$$

quedando entonces los siguientes dos términos:

$$(-)\delta_{\pi_4\pi'}(-)\delta_{\pi_3\pi_1}(+)\delta_{\pi\pi_2} \left\langle c_{\nu_4}c_{\nu_3}c_{\nu'}c_{\nu}^{\dagger}c_{\nu_1}^{\dagger}c_{\nu_2}^{\dagger} \right\rangle = (A_1) \equiv (E) \quad (C.28)$$

$$(-)\delta_{\pi_4\pi'}(+)\delta_{\pi_3\pi_2}(+)\delta_{\pi\pi_1} \left\langle c_{\nu_4}c_{\nu_3}c_{\nu'}c_{\nu}^{\dagger}c_{\nu_1}^{\dagger}c_{\nu_2}^{\dagger} \right\rangle = (A_2) \equiv (F) \quad (C.29)$$

Mientras que para (D), las combinaciones posibles son:

$$\left\{ \begin{array}{cc} \pi_4 & \pi_1 \\ \pi & \pi_2 \end{array} \right\} \quad (C.30)$$

quedando entonces los siguientes dos términos:

$$(+)\delta_{\pi_3\pi'}(-)\delta_{\pi_4\pi_1}(+)\delta_{\pi\pi_2} \left\langle c_{\nu_4}c_{\nu_3}c_{\nu'}c_{\nu}^{\dagger}c_{\nu_1}^{\dagger}c_{\nu_2}^{\dagger} \right\rangle = (D_1) \equiv (B) \quad (C.31)$$

$$(+)\delta_{\pi_3\pi'}(+)\delta_{\pi_4\pi_2}(+)\delta_{\pi\pi_1} \left\langle c_{\nu_4}c_{\nu_3}c_{\nu'}c_{\nu}^{\dagger}c_{\nu_1}^{\dagger}c_{\nu_2}^{\dagger} \right\rangle = (D_2) \equiv (C) \quad (C.32)$$

Así, los seis términos se reducen a cuatro:

$$(-)\delta_{\pi_4\pi_1}\delta_{\pi_3\pi'}\delta_{\pi\pi_2} \langle \nu \rangle = (I) \quad (C.33)$$

$$(+)\delta_{\pi_4\pi_2}\delta_{\pi_3\pi'}\delta_{\pi\pi_1} \langle \nu \rangle = (II) \quad (C.34)$$

$$(+)\delta_{\pi_3\pi_1}\delta_{\pi_4\pi'}\delta_{\pi\pi_2} \langle \nu \rangle = (III) \quad (C.35)$$

$$(-)\delta_{\pi_3\pi_2}\delta_{\pi_4\pi'}\delta_{\pi\pi_1} \langle \nu \rangle = (IV) \quad (C.36)$$

donde

$$\langle \nu \rangle = \left\langle c_{\nu_4}c_{\nu_3}c_{\nu'}c_{\nu}^{\dagger}c_{\nu_1}^{\dagger}c_{\nu_2}^{\dagger} \right\rangle \quad (C.37)$$

Para aplicar ahora Wick sobre  $\langle \nu \rangle$ , tenemos las siguientes combinaciones posibles:

$$\left\{ \begin{array}{cc} \nu_4 & \nu \\ \nu_3 & \nu_1 \\ \nu' & \nu_2 \end{array} \right\} \quad (C.38)$$

por lo que nos quedan los siguientes nueve términos:

$$(+)\delta_{\nu_4\nu} \left\langle c_{\nu_3}c_{\nu'}c_{\nu_1}^{\dagger}c_{\nu_2}^{\dagger} \right\rangle = (a) \quad (C.39)$$

$$(-)\delta_{\nu_4\nu_1} \left\langle c_{\nu_3}c_{\nu'}c_{\nu}^{\dagger}c_{\nu_2}^{\dagger} \right\rangle = (b) \quad (C.40)$$

$$(+)\delta_{\nu_4\nu_2} \left\langle c_{\nu_3}c_{\nu'}c_{\nu}^{\dagger}c_{\nu_1}^{\dagger} \right\rangle = (c) \quad (C.41)$$

$$(-)\delta_{\nu_3\nu} \left\langle c_{\nu_4}c_{\nu'}c_{\nu_1}^{\dagger}c_{\nu_2}^{\dagger} \right\rangle = (d) \quad (C.42)$$

$$(+)\delta_{\nu_3\nu_1} \left\langle c_{\nu_4}c_{\nu'}c_{\nu}^{\dagger}c_{\nu_2}^{\dagger} \right\rangle = (e) \quad (C.43)$$

$$(-)\delta_{\nu_3\nu_2} \left\langle c_{\nu_4}c_{\nu'}c_{\nu}^{\dagger}c_{\nu_1}^{\dagger} \right\rangle = (f) \quad (C.44)$$

$$(+)\delta_{\nu'\nu} \left\langle c_{\nu_4}c_{\nu_3}c_{\nu_1}^{\dagger}c_{\nu_2}^{\dagger} \right\rangle = (g) \quad (C.45)$$

$$(-)\delta_{\nu'\nu_1} \left\langle c_{\nu_4}c_{\nu_3}c_{\nu}^{\dagger}c_{\nu_2}^{\dagger} \right\rangle = (h) \quad (C.46)$$

$$(+)\delta_{\nu'\nu_2} \left\langle c_{\nu_4}c_{\nu_3}c_{\nu}^{\dagger}c_{\nu_1}^{\dagger} \right\rangle = (i) \quad (C.47)$$

Si aplicamos Wick por última vez, cada uno de estos términos genera dos términos, por lo que obtenemos doce términos:

$$(+)\delta_{v_4v}(-)\delta_{v_3v_1}(+)\delta_{v'v_2} = (a_1) \quad (C.48)$$

$$(+)\delta_{v_4v}(+)\delta_{v_3v_2}(+)\delta_{v'v_1} = (a_2) \quad (C.49)$$

$$(-)\delta_{v_4v_1}(-)\delta_{v_3v}(+)\delta_{v'v_2} = (b_1) \quad (C.50)$$

$$(-)\delta_{v_4v_1}(+)\delta_{v_3v_2}(+)\delta_{v'v} = (b_2) \quad (C.51)$$

$$(+)\delta_{v_4v_2}(-)\delta_{v_3v}(+)\delta_{v'v_1} = (c_1) \quad (C.52)$$

$$(+)\delta_{v_4v_2}(+)\delta_{v_3v_1}(+)\delta_{v'v} = (c_2) \quad (C.53)$$

$$(-)\delta_{v_3v}(-)\delta_{v_4v_1}(+)\delta_{v'v_2} = (d_1) \equiv (b_1) \quad (C.54)$$

$$(-)\delta_{v_3v}(+)\delta_{v_4v_2}(+)\delta_{v'v_1} = (d_2) \equiv (c_1) \quad (C.55)$$

$$(+)\delta_{v_3v_1}(-)\delta_{v_4v}(+)\delta_{v'v_2} = (e_1) \equiv (a_1) \quad (C.56)$$

$$(+)\delta_{v_3v_1}(+)\delta_{v_4v_2}(+)\delta_{v'v} = (e_2) \equiv (c_2) \quad (C.57)$$

$$(-)\delta_{v_3v_2}(-)\delta_{v_4v}(+)\delta_{v'v_1} = (f_1) \equiv (a_2) \quad (C.58)$$

$$(-)\delta_{v_3v_2}(+)\delta_{v_4v_1}(+)\delta_{v'v} = (f_2) \equiv (b_2) \quad (C.59)$$

$$(+)\delta_{v'v}(-)\delta_{v_4v_1}(+)\delta_{v_3v_2} = (g_1) \equiv (b_2) \quad (C.60)$$

$$(+)\delta_{v'v}(+)\delta_{v_4v_2}(+)\delta_{v_3v_1} = (g_2) \equiv (c_2) \quad (C.61)$$

$$(-)\delta_{v'v_1}(-)\delta_{v_4v}(+)\delta_{v_3v_2} = (h_1) \equiv (a_2) \quad (C.62)$$

$$(-)\delta_{v'v_1}(+)\delta_{v_4v_2}(+)\delta_{v_3v} = (h_2) \equiv (c_1) \quad (C.63)$$

$$(+)\delta_{v'v_2}(-)\delta_{v_4v}(+)\delta_{v_3v_1} = (i_1) \equiv (a_1) \quad (C.64)$$

$$(+)\delta_{v'v_2}(+)\delta_{v_4v_1}(+)\delta_{v_3v} = (i_2) \equiv (b_1) \quad (C.65)$$

Por lo tanto, los doce términos se reducen a seis términos correspondientes al elemento  $\langle v \rangle$ :

$$(-)\delta_{v_4v}\delta_{v_3v_1}\delta_{v'v_2} = (\alpha) \quad (C.66)$$

$$(+)\delta_{v_4v}\delta_{v_3v_2}\delta_{v'v_1} = (\beta) \quad (C.67)$$

$$(+)\delta_{v_4v_1}\delta_{v_3v}\delta_{v'v_2} = (\gamma) \quad (C.68)$$

$$(-)\delta_{v_4v_1}\delta_{v_3v_2}\delta_{v'v} = (\delta) \quad (C.69)$$

$$(-)\delta_{v_4v_2}\delta_{v_3v}\delta_{v'v_1} = (\omega) \quad (C.70)$$

$$(+)\delta_{v_4v_2}\delta_{v_3v_1}\delta_{v'v} = (\theta) \quad (C.71)$$

Si combinamos los cuatro términos (I), (II), (III), (IV) con los seis términos  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$ ,  $(\gamma)$ ,  $(\delta)$ ,  $(\omega)$ ,  $(\theta)$ , tendremos los 24 términos:

$$\delta_{\pi_4\pi_1}\delta_{\pi_3\pi'}\delta_{\pi\pi_2}\delta_{v_4v}\delta_{v_3v_1}\delta_{v'v_2} = (1) \quad (C.72)$$

$$-\delta_{\pi_4\pi_1}\delta_{\pi_3\pi'}\delta_{\pi\pi_2}\delta_{v_4v}\delta_{v_3v_2}\delta_{v'v_1} = (2) \quad (C.73)$$

$$-\delta\pi_4\pi_1\delta\pi_3\pi'\delta\pi\pi_2\delta v_4v_1\delta v_3v\delta v'v_2 = (3) \quad (C.74)$$

$$\delta\pi_4\pi_1\delta\pi_3\pi'\delta\pi\pi_2\delta v_4v_1\delta v_3v_2\delta v'v = (4) \quad (C.75)$$

$$\delta\pi_4\pi_1\delta\pi_3\pi'\delta\pi\pi_2\delta v_4v_2\delta v_3v\delta v'v_1 = (5) \quad (C.76)$$

$$-\delta\pi_4\pi_1\delta\pi_3\pi'\delta\pi\pi_2\delta v_4v_2\delta v_3v_1\delta v'v = (6) \quad (C.77)$$

$$-\delta\pi_4\pi_2\delta\pi_3\pi'\delta\pi\pi_1\delta v_4v\delta v_3v_1\delta v'v_2 = (7) \quad (C.78)$$

$$\delta\pi_4\pi_2\delta\pi_3\pi'\delta\pi\pi_1\delta v_4v\delta v_3v_2\delta v'v_1 = (8) \quad (C.79)$$

$$\delta\pi_4\pi_2\delta\pi_3\pi'\delta\pi\pi_1\delta v_4v_1\delta v_3v\delta v'v_2 = (9) \quad (C.80)$$

$$-\delta\pi_4\pi_2\delta\pi_3\pi'\delta\pi\pi_1\delta v_4v_1\delta v_3v_2\delta v'v = (10) \quad (C.81)$$

$$-\delta\pi_4\pi_2\delta\pi_3\pi'\delta\pi\pi_1\delta v_4v_2\delta v_3v\delta v'v_1 = (11) \quad (C.82)$$

$$\delta\pi_4\pi_2\delta\pi_3\pi'\delta\pi\pi_1\delta v_4v_2\delta v_3v_1\delta v'v = (12) \quad (C.83)$$

$$-\delta\pi_3\pi_1\delta\pi_4\pi'\delta\pi\pi_2\delta v_4v\delta v_3v_1\delta v'v_2 = (13) \quad (C.84)$$

$$\delta\pi_3\pi_1\delta\pi_4\pi'\delta\pi\pi_2\delta v_4v\delta v_3v_2\delta v'v_1 = (14) \quad (C.85)$$

$$\delta\pi_3\pi_1\delta\pi_4\pi'\delta\pi\pi_2\delta v_4v_1\delta v_3v\delta v'v_2 = (15) \quad (C.86)$$

$$-\delta\pi_3\pi_1\delta\pi_4\pi'\delta\pi\pi_2\delta v_4v_1\delta v_3v_2\delta v'v = (16) \quad (C.87)$$

$$-\delta\pi_3\pi_1\delta\pi_4\pi'\delta\pi\pi_2\delta v_4v_2\delta v_3v\delta v'v_1 = (17) \quad (C.88)$$

$$\delta\pi_3\pi_1\delta\pi_4\pi'\delta\pi\pi_2\delta v_4v_2\delta v_3v_1\delta v'v = (18) \quad (C.89)$$

$$\delta\pi_3\pi_2\delta\pi_4\pi'\delta\pi\pi_1\delta v_4v\delta v_3v_1\delta v'v_2 = (19) \quad (C.90)$$

$$-\delta\pi_3\pi_2\delta\pi_4\pi'\delta\pi\pi_1\delta v_4v\delta v_3v_2\delta v'v_1 = (20) \quad (C.91)$$

$$-\delta\pi_3\pi_2\delta\pi_4\pi'\delta\pi\pi_1\delta v_4v_1\delta v_3v\delta v'v_2 = (21) \quad (C.92)$$

$$\delta\pi_3\pi_2\delta\pi_4\pi'\delta\pi\pi_1\delta v_4v_1\delta v_3v_2\delta v'v = (22) \quad (C.93)$$

$$\delta\pi_3\pi_2\delta\pi_4\pi'\delta\pi\pi_1\delta v_4v_2\delta v_3v\delta v'v_1 = (23) \quad (C.94)$$

$$-\delta\pi_3\pi_2\delta\pi_4\pi'\delta\pi\pi_1\delta v_4v_2\delta v_3v_1\delta v'v = (24) \quad (C.95)$$

Si tenemos en cuenta las deltas cruzadas  $\delta\pi'v'$  y  $\delta\pi v$  de la expresión (C.18), los 24 términos se ven reducidos a 20 términos finales:

$$\delta v_1v_3\delta v_2\pi_3\delta\pi_1\pi_4\delta\pi_2v_4 = (P1P4.1) \quad (C.96)$$

$$-\delta v_1\pi_3\delta v_2v_3\delta\pi_1\pi_4\delta\pi_2v_4 = (P1P4.2) \quad (C.97)$$

$$-\delta v_1v_4\delta v_2\pi_3\delta\pi_1\pi_4\delta\pi_2v_3 = (P1P4.3) \quad (C.98)$$

$$2\delta v_1v_4\delta v_2v_3\delta\pi_1\pi_4\delta\pi_2\pi_3 = (P1P4.4) \quad (C.99)$$

$$\delta v_1\pi_3\delta v_2v_4\delta\pi_1\pi_4\delta\pi_2v_3 = (P1P4.5) \quad (C.100)$$

$$-2\delta v_1v_3\delta v_2v_4\delta\pi_1\pi_4\delta\pi_2\pi_3 = (P1P4.6) \quad (C.101)$$

$$-\delta v_1v_3\delta v_2\pi_3\delta\pi_1v_4\delta\pi_2\pi_4 = (P2P4.1) \quad (C.102)$$

$$\delta_{v_1\pi_3}\delta_{v_2\nu_3}\delta_{\pi_1\nu_4}\delta_{\pi_2\pi_4} = (P2P4.2) \quad (C.103)$$

$$\delta_{v_1\nu_4}\delta_{v_2\pi_3}\delta_{\pi_1\nu_3}\delta_{\pi_2\pi_4} = (P2P4.3) \quad (C.104)$$

$$-2\delta_{v_1\nu_4}\delta_{v_2\nu_3}\delta_{\pi_1\pi_3}\delta_{\pi_2\pi_4} = (P2P4.4) \quad (C.105)$$

$$-\delta_{v_1\pi_3}\delta_{v_2\nu_4}\delta_{\pi_1\nu_3}\delta_{\pi_2\pi_4} = (P2P4.5) \quad (C.106)$$

$$2\delta_{v_1\nu_3}\delta_{v_2\nu_4}\delta_{\pi_1\pi_3}\delta_{\pi_2\pi_4} = (P2P4.6) \quad (C.107)$$

$$-\delta_{v_1\nu_3}\delta_{v_2\pi_4}\delta_{\pi_1\pi_3}\delta_{\pi_2\nu_4} = (P1P3.1) \quad (C.108)$$

$$\delta_{v_1\pi_4}\delta_{v_2\nu_3}\delta_{\pi_1\pi_3}\delta_{\pi_2\nu_4} = (P1P3.2) \quad (C.109)$$

$$\delta_{v_1\nu_4}\delta_{v_2\pi_4}\delta_{\pi_1\pi_3}\delta_{\pi_2\nu_3} = (P1P3.3) \quad (C.110)$$

$$-\delta_{v_1\pi_4}\delta_{v_2\nu_4}\delta_{\pi_1\pi_3}\delta_{\pi_2\nu_3} = (P1P3.4) \quad (C.111)$$

$$\delta_{v_1\nu_3}\delta_{v_2\pi_4}\delta_{\pi_1\nu_4}\delta_{\pi_2\pi_3} = (P2P3.1) \quad (C.112)$$

$$-\delta_{v_1\pi_4}\delta_{v_2\nu_3}\delta_{\pi_1\nu_4}\delta_{\pi_2\pi_3} = (P2P3.2) \quad (C.113)$$

$$-\delta_{v_1\nu_4}\delta_{v_2\pi_4}\delta_{\pi_1\nu_3}\delta_{\pi_2\pi_3} = (P2P3.3) \quad (C.114)$$

$$\delta_{v_1\pi_4}\delta_{v_2\nu_4}\delta_{\pi_1\nu_3}\delta_{\pi_2\pi_3} = (P2P3.4) \quad (C.115)$$

Finalmente, de la expresión (C.18), vemos que para cada combinación posible

$$\left\{ J_n, J_p, J'_n, J'_p, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, M_n, M_p, M'_n, M'_p, m_{\nu_1}, m_{\nu_2}, m_{\nu_3}, m_{\nu_4}, m_{\pi_1}, m_{\pi_2}, m_{\pi_3}, m_{\pi_4} \right\}$$

debemos aplicar las 20 combinaciones de deltas, para finalmente llegar al valor esperado  $\langle T^2 \rangle$  en el estado  $J$  de cuatro cuerpos, por lo tanto al valor del isoespín  $\langle T \rangle$ .

## APÉNDICE D

### LA MATEMÁTICA EN LA CONSTRUCCIÓN DE LA AMPLITUD DE FORMACIÓN

En este apéndice describiremos la deducción matemática que nos llevó a obtener la expresión (2.128) para la amplitud de formación. Además, se presentarán las relaciones entre las coordenadas intrínsecas y las del centro de masa, así como también la deducción de la expresión de la función de onda de la partícula alfa.

#### D.1. Relación entre las coordenadas relativas y las internas

La expresión (2.128) de la amplitud de formación implica integrales en coordenadas intrínsecas de la función de onda de la partícula alfa  $\rho_i$ . Estas se encuentran relacionadas con las coordenadas nucleónicas  $\mathbf{r}_i$  mediante:

$$\rho_1 = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\sqrt{2}} \quad (\text{D.1})$$

$$\rho_2 = \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4}{\sqrt{2}} \quad (\text{D.2})$$

$$\rho_3 = \frac{(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) - (\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4)}{2} \quad (\text{D.3})$$

Si definimos también la coordenada del centro de masa  $\mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4}{4}$  podemos invertir las relaciones para llegar a expresiones de las coordenadas nucleónicas en función de las intrínsecas,

$$\mathbf{r}_1 = \frac{2\mathbf{R} + \rho_3 + \sqrt{2}\rho_1}{2} \quad (\text{D.4})$$

$$\mathbf{r}_2 = \frac{2\mathbf{R} + \rho_3 - \sqrt{2}\rho_1}{2} \quad (\text{D.5})$$

$$\mathbf{r}_3 = \frac{2\mathbf{R} - \rho_3 + \sqrt{2}\rho_2}{2} \quad (\text{D.6})$$

$$\mathbf{r}_4 = \frac{2\mathbf{R} - \rho_3 - \sqrt{2}\rho_2}{2} \quad (\text{D.7})$$

Notemos con tilde a las componentes de las coordenadas intrínsecas  $\rho_i = (\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{z}_i)$  o  $\rho_i = (\rho_i, \tilde{\theta}_i, \tilde{\varphi}_i)$  y sin tilde a las componentes de las coordenadas nucleónicas  $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$  o  $\mathbf{r}_i = (\rho_i, \theta_i, \varphi_i)$ , y  $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$  o  $\mathbf{R} = (R, \Theta, \Phi)$ , donde

$$\tilde{x}_i = \rho_i \sin\tilde{\theta}_i \cos\tilde{\varphi}_i \quad (\text{D.8})$$

$$\tilde{y}_i = \rho_i \sin\tilde{\theta}_i \sin\tilde{\varphi}_i \quad (\text{D.9})$$

$$\tilde{z}_i = \rho_i \cos\tilde{\theta}_i, \quad (\text{D.10})$$

y

$$x_i = r_i \sin\theta_i \cos\varphi_i \quad (\text{D.11})$$

$$y_i = r_i \sin\theta_i \sin\varphi_i \quad (\text{D.12})$$

$$z_i = r_i \cos\theta_i \quad (\text{D.13})$$

donde el índice  $i$  va de 1 a 3 para las coordenadas intrínsecas y de 1 a 4 para las nucleónicas.

Para llegar a las coordenadas nucleónicas polares escritas en término de las intrínsecas polares, debemos seguir tres pasos. Primero, escribimos las coordenadas  $\mathbf{r}_i = (\rho_i, \theta_i, \varphi_i)$  en término de sus coordenadas cartesianas  $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ ,

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \quad (\text{D.14})$$

$$\cos\theta_i = \frac{z_i}{r_i} \quad (\text{D.15})$$

$$\tan\varphi_i = \frac{y_i}{x_i} \quad (\text{D.16})$$

Luego, escribimos las componentes  $x_i, y_i, z_i$  en término de las intrínsecas  $\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{z}_i$  utilizando las relaciones (D.4-D.7). Finalmente, escribimos las coordenadas cartesianas intrínsecas  $\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{z}_i$  en término de las coordenadas polares intrínsecas  $(\rho_i, \tilde{\theta}_i, \tilde{\varphi}_i)$ . En resumen, el proceso es:

$$\mathbf{r}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{R}) : \left\{ \begin{array}{c} r \\ \theta \\ \varphi \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} X \\ Y \\ Z \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \rho \\ \tilde{\theta} \\ \tilde{\varphi} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} R \\ \Theta \\ \Phi \end{array} \right\} \quad (\text{D.17})$$

Como ejemplo, tomemos la coordenada  $r_1$

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \quad (\text{D.18})$$

$$= \frac{(2R_x + \tilde{x}_3 + \sqrt{2}\tilde{x}_1)^2}{4} + \frac{(2R_y + \tilde{y}_3 + \sqrt{2}\tilde{y}_1)^2}{4} + \frac{(2R_z + \tilde{z}_3 + \sqrt{2}\tilde{z}_1)^2}{4} \quad (\text{D.19})$$

$$= \frac{4R^2 + \rho_3^2 + 2\rho_1^2 + 4\sqrt{2} \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\rho}_1 + 4 \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\rho}_3 + 2\sqrt{2} \boldsymbol{\rho}_3 \cdot \boldsymbol{\rho}_1}{4} \quad (\text{D.20})$$

Para obtener el cuadrado de las coordenadas radiales debemos utilizar la relación general  $(\mathbf{a} + \mathbf{b} \pm \mathbf{c})^2 = a^2 + b^2 + c^2 \pm 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \pm 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$  en las coordenadas nucleónicas  $\mathbf{r}_i$  en las ec. (D.4-D.7).

El producto escalar será  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a b \cos(\widehat{\mathbf{ab}})$  con

$$\cos(\widehat{\mathbf{ab}}) = \sin(\theta_a)\sin(\theta_b)\cos(\varphi_a - \varphi_b) + \cos(\theta_a)\cos(\theta_b) \quad (\text{D.21})$$

Entonces,

$$r_{1,2} = \frac{\sqrt{4R^2 + \rho_3^2 + 2\rho_1^2 \pm 2\sqrt{2} \rho_3 \rho_1 \cos(\widehat{\boldsymbol{\rho}_3\boldsymbol{\rho}_1}) + 4R \left[ \rho_3 \cos(\widehat{\mathbf{R}\boldsymbol{\rho}_3}) \pm \sqrt{2} \rho_1 \cos(\widehat{\mathbf{R}\boldsymbol{\rho}_1}) \right]}}{2}$$

$$r_{3,4} = \frac{\sqrt{4R^2 + \rho_3^2 + 2\rho_2^2 \mp 2\sqrt{2} \rho_3 \rho_2 \cos(\widehat{\rho_3\rho_2}) - 4R \left[ \rho_3 \cos(\widehat{\mathbf{R}\rho_3}) \pm \sqrt{2} \rho_2 \cos(\widehat{\mathbf{R}\rho_2}) \right]}}{2}$$

siendo  $r_i \geq 0$ , y

$$\theta_{1,2} = \cos^{-1} \left[ \frac{2R \cos(\Theta) + \rho_3 \cos(\tilde{\theta}_3) \pm \sqrt{2}\rho_1 \cos(\tilde{\theta}_1)}{2 r_{1,2}} \right] \quad (\text{D.22})$$

$$\theta_{3,4} = \cos^{-1} \left[ \frac{2R \cos(\Theta) - \rho_3 \cos(\tilde{\theta}_3) \pm \sqrt{2}\rho_1 \cos(\tilde{\theta}_1)}{2 r_{3,4}} \right] \quad (\text{D.23})$$

con  $0 \leq \theta_i \leq \pi$ . A nivel computacional, la función intrínseca ACOS de Fortran para  $\theta = \cos^{-1}(u)$  genera resultados entre  $[0, \pi]$ .

Por último,

$$\varphi_{1,2} = \text{tg}^{-1} \left[ \frac{2R \sin(\Theta)\sin(\Phi) + \rho_3 \sin(\tilde{\theta}_3)\sin(\tilde{\varphi}_3) \pm \sqrt{2}\rho_1 \sin(\tilde{\theta}_1)\sin(\tilde{\varphi}_1)}{2R \sin(\Theta)\cos(\Phi) + \rho_3 \sin(\tilde{\theta}_3)\cos(\tilde{\varphi}_3) \pm \sqrt{2}\rho_1 \sin(\tilde{\theta}_1)\cos(\tilde{\varphi}_1)} \right] \quad (\text{D.24})$$

$$\varphi_{3,4} = \text{tg}^{-1} \left[ \frac{2R \sin(\Theta)\sin(\Phi) - \rho_3 \sin(\tilde{\theta}_3)\sin(\tilde{\varphi}_3) \pm \sqrt{2}\rho_2 \sin(\tilde{\theta}_2)\sin(\tilde{\varphi}_2)}{2R \sin(\Theta)\cos(\Phi) - \rho_3 \sin(\tilde{\theta}_3)\cos(\tilde{\varphi}_3) \pm \sqrt{2}\rho_2 \sin(\tilde{\theta}_2)\cos(\tilde{\varphi}_2)} \right] \quad (\text{D.25})$$

donde  $0 \leq \varphi_i \leq 2\pi$ . A nivel computacional, la función intrínseca ATAN de Fortran para  $\theta = \text{tg}^{-1}(u)$  genera resultados entre  $[-\pi/2, \pi/2]$ , por lo cual, si  $u = \frac{y}{x}$  tendremos las siguientes transformaciones

x	y	u	$\text{tg}^{-1}(u)$	$\varphi$	transformación
+	+	+	$[0, \frac{\pi}{2}]$	$[0, \frac{\pi}{2}]$	$\text{tg}^{-1}(u)$
-	+	-	$[-\frac{\pi}{2}, 0]$	$[\frac{\pi}{2}, \pi]$	$\pi + \text{tg}^{-1}(u)$
-	-	+	$[0, \frac{\pi}{2}]$	$[\pi, \frac{3\pi}{2}]$	$\pi + \text{tg}^{-1}(u)$
+	-	-	$[-\frac{\pi}{2}, 0]$	$[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$	$2\pi + \text{tg}^{-1}(u)$

## D.2. Función de onda de la partícula alfa en coordenadas intrínsecas

A continuación, definiremos la función de onda de la partícula alfa pero en sus coordenadas intrínsecas. De [46] tenemos que

$$\phi_\alpha(\rho_1\rho_2\rho_3, \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4) = \phi(\rho_1\rho_2\rho_3)\chi_{00}(\sigma_1\sigma_2)\chi_{00}(\sigma_3\sigma_4) \quad (\text{D.26})$$

$$\chi_{00}(\sigma_1\sigma_2) = [\chi_{1/2}(\sigma_1)\chi_{1/2}(\sigma_2)]_{00} \quad (\text{D.27})$$

$$\phi(\rho_1\rho_2\rho_3) = \left(\frac{8\beta}{\pi}\right)^{9/4} e^{-4\beta(\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2)} \quad (\text{D.28})$$

donde las relaciones entre las coordenadas  $\rho$  y  $\mathbf{r}$  son las presentadas en las ecuaciones (D.1-D.3).

Esta función de onda se encuentra normalizada de la siguiente manera

$$\int d^3\rho_1 \int d^3\rho_2 \int d^3\rho_3 |\phi(\rho_1\rho_2\rho_3)|^2 = 1 \quad (\text{D.29})$$

y el parámetro  $\beta = 0.055 \text{ fm}^{-2}$  se elige de forma que se reproduzca el radio-cuadrático-medio de la partícula alfa

$$\int d^3\rho_1 \int d^3\rho_2 \int d^3\rho_3 |\phi(\rho_1\rho_2\rho_3)|^2 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{R}|^2 = \frac{9}{64\beta} = (1.6 \text{ fm})^2 \quad (\text{D.30})$$

### D.3. Deducción de la ecuación (2.128)

En función de las construcciones realizadas en las dos secciones previas, vamos a desarrollar la amplitud de formación (2.128). La función de onda de cuatro cuerpos correspondiente al núcleo madre  $A + 4$  puede ser expandida a través de los coeficientes de parentesco fraccionario tal que [103, 170]

$$\Psi^{JM}(1, \dots, 4, \xi_\alpha) = \sqrt{8} \sum_{J_\alpha J_n J_p J_{pn}} \sum_{j_1 j_2 j_3 j_4} b_{j_1 j_2 j_3 j_4}^{J_\alpha J_n J_p J_{pn}} \left[ \phi_{J_\alpha}(\xi_\alpha) \left[ \Psi^{J_n} \Psi^{J_p} \right]_{J_{pn}} \right]_{JM} \quad (\text{D.31})$$

donde  $b_{j_1 j_2 j_3 j_4}^{J_d J_n J_p J_{pn}}$  representan al producto de los coeficientes de parentesco fraccionario y las amplitudes de la función de onda de cuatro cuerpo, permitiendo esta separación entre diferentes configuraciones, y hemos prescindido de las paridades  $\pi$  para simplificar la notación. El factor  $\sqrt{8}$  aparece porque el núcleo madre debe estar normalizado a las coordenadas intrínsecas  $\xi_\alpha = \{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}$  y al centro de masa  $\mathbf{R}$ , pero se encuentra normalizado a las coordenadas nucleónicas  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4$  [171].

Si reemplazamos en la ecuación (2.126), y luego de integrar en las coordenadas intrínsecas  $\xi_\alpha$ , solo sobreviven los acoples con  $J_\alpha = j$  and  $J_{pn} = L$

$$g_L(R) = \sqrt{8} \sqrt{\frac{N_v!}{2! (N_v - 2)!}} \sqrt{\frac{Z_v!}{2! (Z_v - 2)!}} \sum_{J_n J_p} \sum_{j_1 j_2 j_3 j_4} (b_{j_1 j_2 j_3 j_4}^{j J_n J_p L})^* \int d\Omega_R \int d\xi_\alpha \phi_\alpha(\xi_\alpha) Y_L^{ML}(\hat{R}) \left[ \Psi^{J_n} * \Psi^{J_p} * \right]_{LM_L} \quad (\text{D.32})$$

pero como trabajaremos con el decaimiento en estados  $J = 0^+$ , tendremos que  $J_\alpha = 0$ , por lo cual es un índice que podemos quitar.

Transformando las funciones de onda de dos cuerpos del acople  $jj$  al  $LS$ , y realizando el producto

interno entre las funciones de onda  $S = 0$  neutrón-neutrón y protón-protón [53], llegamos a

$$\begin{aligned}
g_L(R) = & \sqrt{8} \sqrt{\frac{N_v!}{2! (N_v - 2)!}} \sqrt{\frac{Z_v!}{2! (Z_v - 2)!}} \sum_{J_n J_p} \sum_{j_1 j_2 j_3 j_4} \left( b_{j_1 j_2 j_3 j_4}^{J_n J_p J} \right)^* \\
& (-1)^{J_n + J_p - j_1 - j_3 - l_2 - l_4 + 1} \frac{\hat{j}_1 \hat{j}_2 \hat{j}_3 \hat{j}_4}{2} \\
& W(l_1 j_1 l_2 j_2; 1/2 J_n) W(l_3 j_3 l_4 j_4; 1/2 J_p) \\
& \int d\Omega_R \int d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3 \phi(\rho_1 \rho_2 \rho_3) Y_L^{ML}(\Omega_R) \\
& \left[ \mathbb{S}[\Phi_1^* \Phi_2^*]_{J_n} \mathbb{S}[\Phi_3^* \Phi_4^*]_{J_p} \right]_{LM_L}
\end{aligned} \tag{D.33}$$

## APÉNDICE E

### AUTOVALORES Y AUTOVECTORES DEL *NORM KERNEL*

A continuación, desarrollaremos el proceso que nos permite calcular formalmente el operador  $\mathcal{N}_L$ , y por ende, la amplitud de formación renormalizada (2.136).

Para poder calcular los autovectores y autovalores de  $\mathcal{N}_L$ , realizamos un cambio de base a la base ortonormal de Gaussianas corridas (SGB por sus siglas en inglés)

$$\bar{F}_L(r, r') = \int r_1^2 dr_1 N_F^{-1/2}(r', r_1) F_L(r, r_1) \quad (\text{E.1})$$

donde

$$F_L(r, r_1) = 4\pi \left( \frac{8\beta'}{\pi} \right)^{3/4} e^{-4\beta'(r^2+r_1^2)} i^L j_L(-i 8\beta' r r_1) \quad (\text{E.2})$$

con  $\beta' = 4\beta$  de la ecuación (2.127), y el factor de normalización

$$N_F(r', r_1) = \int r^2 dr F_L^*(r, r') F_L(r, r_1) \quad (\text{E.3})$$

$$= 4\pi e^{-2\beta'(r'^2+r_1^2)} i^L j_L(-i 4\beta' r' r_1) \quad (\text{E.4})$$

En la nueva base, el *norm-kernel* se escribe como

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_L^{\bar{F}}(r, r') &= \int r_1^2 dr_1 \int r_2^2 dr_2 \int d\tilde{r} \int d\tilde{r}' \\ &N_F^{-1/2}(r, r_1) F_L^*(r_1, \tilde{r}) \mathcal{N}_L(\tilde{r}, \tilde{r}') F_L(\tilde{r}', r_2) N_F^{-1/2}(r_2, r') \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

quedando entonces la ecuación de autovalores y autovectores (2.141) reescrita como

$$\int r'^2 dr' \mathcal{N}_L^{\bar{F}}(r, r') c_V^L(r') = n_V c_V^L(r) \quad (\text{E.6})$$

donde los autovectores  $c_V^L(r)$  se relacionan a los  $u_V^L(r)$  (2.141) mediante

$$u_V^L(r) = \int r'^2 dr' c_V^L(r') \bar{F}_L(r, r') \quad (\text{E.7})$$

A este punto, logramos realizar el cambio de base, pero aun no somos capaces de calcular los autovectores y autovalores del operador  $\mathcal{N}_L^{\bar{F}}(r, r')$  pues seguimos dependiendo de  $\mathcal{N}_L(r, r')$ . Para enfrentar esta situación, pasamos a una base discreta de la SGB, definida por

$$\bar{F}_L(r, r_k) = \sum_{k'} \left( N_F^{-1/2} \right)_{kk'} F_L(r, r_{k'}) \quad (\text{E.8})$$

donde

$$F_L(r, r_k) = 4\pi \left( \frac{8\beta'}{\pi} \right)^{3/4} e^{-4\beta'(r^2+r_k^2)} i^L j_L(-i 8\beta' r r_k) \quad (\text{E.9})$$

con  $M$  puntos  $r_k$  equidistantes separados una cantidad  $\Delta R$  en el intervalo  $(0, R_{\max})$ . Es decir, el espacio  $r$  queda discretizado en  $M$  puntos  $r_k$ . Aproximando las integrales  $\int r^2 dr$  por la suma  $\sum_k r_k^2 \omega_k$ , el factor de normalización es

$$(N_F)_{kk'} = r_k \sqrt{\omega_k} N_F(r_k, r_{k'}) r_{k'} \sqrt{\omega_{k'}} \quad (\text{E.10})$$

En esta base discreta, el operador  $\mathcal{N}_L^{\bar{F}}(r_k, r_{k'})$  puede reescribirse como

$$\mathcal{N}_L^{\bar{F}}(r_k, r_{k'}) = \sum_{nn'}^M \left( N_F^{-1/2} \right)_{kn} \mathcal{N}_{Lnn'}^F \left( N_F^{-1/2} \right)_{n'k'} \quad (\text{E.11})$$

donde gracias a haber tomado  $\beta' = 4\beta$  en la ecuación (E.1), el operador  $\mathcal{N}_{Lnn'}^F$  se reduce a una simple expresión ( $ne$ : neutrones,  $pr$ : protones)

$$\mathcal{N}_{Lnn'}^F = \left( \left\langle \phi_n^{(ne),L} \middle| \phi_{n'}^{(ne),L} \right\rangle \right)^2 \left( \left\langle \phi_n^{(pr),L} \middle| \phi_{n'}^{(pr),L} \right\rangle \right)^2 \quad (\text{E.12})$$

donde

$$\left( \left\langle \phi_n^{(\tau),L} \middle| \phi_{n'}^{(\tau),L} \right\rangle \right) = \left\langle \hat{\phi}_n^L \middle| \hat{\phi}_{n'}^L \right\rangle - \sum_{a \in A} \delta_{lL} \left\langle \hat{\phi}_n^l \middle| R_a \right\rangle \left\langle R_a \middle| \hat{\phi}_{n'}^l \right\rangle \quad (\text{E.13})$$

con  $\hat{\phi}_n^L(r) \equiv F_L(r, r_n)(\beta' \rightarrow \beta)$ ,  $R_a(r) = u_a(r)/r$  la función de onda radial de partícula simple con números cuánticos  $a = \{n_a, j_a, l_a\}$ . Aquí aparece el gran beneficio de pasar a una base SGB discreta: logramos definir un operador *norm-kernel* en función de cantidades que podemos calcular.

En esta notación discreta, la ecuación de autovalores y autovectores (E.6) queda

$$\sum_k^M \mathcal{N}_L^{\bar{F}}(r_k, r_{k'}) c_v^L(r_{k'}) = n_v c_v^L(r_k) \quad (\text{E.14})$$

donde los autovectores  $c_v^L(r_k)$  se relacionan a los  $u_v^L(r)$  mediante

$$u_v^L(r) = \sum_k^M c_v^L(r_k) \bar{F}_L(r, r_k) \quad (\text{E.15})$$

Así, la amplitud de formación renormalizada será

$$G_L(R) = \int R'^2 dR' \mathcal{N}_L^{-1/2}(R, R') g_L(R') \equiv \quad (\text{E.16})$$

$$\equiv \sum_v n_v^{-1/2} \int R'^2 dR' u_v^{*L}(R) u_v^L(R') g_L(R') \quad (\text{E.17})$$

y como conocemos  $u_v^L(r)$ , podemos reescribir la amplitud de formación renormalizada como

$$G_L(r) = \sum_v n_v^{-1/2} \int r'^2 dr' \sum_{kk'}^M c_v^{*L}(r_k) \bar{F}_L^*(r, r_k) c_v^L(r_{k'}) \bar{F}_L(r', r_{k'}) g_L(r') = \quad (\text{E.18})$$

$$= \sum_v n_v^{-1/2} g_v^L(r) \quad (\text{E.19})$$

donde

$$g_L^v(r) = \sum_{kk'}^M c_v^{*L}(r_k) \bar{F}_L^*(r, r_k) c_v^L(r_{k'}) g_L(r_{k'}) \quad (\text{E.20})$$

con

$$g_L(r_{k'}) = \int r'^2 dr' \bar{F}_L(r', r_{k'}) g_L(r') \quad (\text{E.21})$$

En la próxima sección, presentaremos un ejemplo de diferentes autovalores obtenidos de manera analítica, y que sucede con aquellos prohibidos en el sentido del principio de exclusión de Pauli [104].

## E.1. Ejemplo

Con este ejemplo tomado de la Ref. [104], buscamos mostrar el significado del operador  $\mathcal{N}$ .

Sea  $\Psi_{\alpha+\alpha}$  la función de onda total del sistema  $\alpha + \alpha$ , asumiendo que una de ellas es el proyectil y otra el blanco. Si denotamos como  $\hat{P}$  al operador que proyecta  $\Psi_{\alpha+\alpha}$  en una función de onda donde las partículas alfa se encuentran separadas y en su estado fundamental, la función de onda  $u(\mathbf{r}_0)$  que describe el movimiento relativo entre las partículas alfa se obtendrá de:

$$\hat{P}\Psi_{\alpha+\alpha} = \mathcal{A}\{u(\mathbf{r})\phi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_8)\} \quad (\text{E.22})$$

donde  $\mathcal{A}$  implica antisimetrización,  $\phi_0$  es el producto de las funciones de onda de las partículas alfa en su estado fundamental:

$$\phi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_8) = \chi_{\alpha_1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \chi_{\alpha_2}(\mathbf{r}_5, \mathbf{r}_6, \mathbf{r}_7, \mathbf{r}_8) \quad (\text{E.23})$$

y  $\mathbf{r}$  es el vector relativo entre los centros de masa  $\vec{\mathbf{r}}_{\alpha_1}$  y  $\vec{\mathbf{r}}_{\alpha_2}$ .

Como la función de onda  $\hat{P}\Psi_{\alpha+\alpha}$  satisface  $\hat{P}\Psi_{\alpha+\alpha}[E - \mathcal{H}] = 0$ , la ecuación para  $u$  será:

$$\langle \phi_0 | E - \mathcal{H} | \mathcal{A}\{u\phi_0\} \rangle = 0 \quad (\text{E.24})$$

siendo  $E$  la energía del sistema y  $\mathcal{H}$  el hamiltoniano efectivo. La integración de los elementos (E.24) se realiza en las coordenadas internas de  $\phi_0$ . A partir de esta ecuación, uno puede definir el operador  $\mathcal{N}$  de manera más simple:

$$\mathcal{N}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 1 - \sum_{j=1}^4 (-1)^{j+1} \langle \phi_0, \mathbf{r} | \phi_j, \mathbf{r}' \rangle \quad (\text{E.25})$$

donde  $j$  indica el número de nucleones permutados por la antisimetrización y  $\phi_j$  la función de onda permutada, por ejemplo con  $j = 2$ :

$$\phi_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_8) = \chi_{\alpha_1}(\mathbf{r}_5, \mathbf{r}_6, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \chi_{\alpha_2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_7, \mathbf{r}_8) \quad (\text{E.26})$$

Por simplicidad, vamos a asumir que las partículas alfa se encuentran en su estado fundamental, por lo que la parte espacial de su función de onda vendrá simplemente dada por la función gaussiana:

$$\phi_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_8) = e^{-\frac{\beta}{2} \sum_{j=1}^4 \mathbf{r}_j^2} \quad (\text{E.27})$$

A partir de esto, podemos calcular el operador  $\mathcal{N}$  tomando la ec. (E.25):

$$\mathcal{N}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 1 - 32 \left( \frac{2\beta}{3\pi} \right)^{3/2} e^{-\frac{5}{2}\beta\mathbf{r}^2 + \frac{8}{3}\beta\mathbf{r}\mathbf{r}' - \frac{5}{3}\beta\mathbf{r}'^2} + 24 \left( \frac{\beta}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\beta\mathbf{r}^2 - \beta\mathbf{r}'^2} \quad (\text{E.28})$$

siendo  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{r}'$  las coordenadas relativas entre las partículas alfa.

Definido el kernel, la integral homogénea asociada a él es

$$u_\nu(\mathbf{r}) = n_\nu \int \mathcal{N}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') u_\nu(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (\text{E.29})$$

Las autofunciones  $u_\nu(\mathbf{r})$  pueden expandirse en autofunciones  $\mu_{nl}(r)$  del oscilador armónico y armónicos esféricos  $Y_{lm}$  como:

$$u_\nu(\mathbf{r}) = \sum_{l \text{ par}} \left( \frac{\mu_{nl}(r)}{r} Y_{lm} \right) \quad (\text{E.30})$$

conociendo la expresión de  $u_\nu(\mathbf{r})$ , uno puede resolver explícitamente la ecuación de autovalores, para así obtener:

$$n_{nl} = 1 - 4^{n-1} 2^l - \frac{3}{4} \delta_{n,0} \delta_{l,0} \quad (\text{E.31})$$

Recordemos que las partículas alfa constituyentes se encontraban ambas en su estado fundamental  $s$ . Entonces, si  $l = 0$  y  $n = 0, 1$ , o  $l = 2$  y  $n = 0$ , vemos que  $n = 0$ , es decir, esos tres estados del oscilador armónico se encuentran prohibidos para la descripción del sistema. Físicamente, esto implica que no más de cuatro nucleones pueden ocupar el estado fundamental  $0s$  del oscilador armónico para el caso del  ${}^8\text{Be} = \alpha + \alpha$ . En otras palabras, estos estados violarían el principio de exclusión de Pauli para el caso del núcleo  ${}^8\text{Be}$ .

## APÉNDICE F

### OPTIMIZACIÓN DEL CÓDIGO DE CUATRO CUERPOS

En este apéndice veremos el estudio de la performance y mejoras que se realizaron sobre el código de cuatro partículas desarrollado en Fortran buscando un mejor rendimiento y utilización de los recursos computacionales disponibles. El programa basa su funcionamiento en las descripciones del modelo de capas desarrolladas en la sección 2.1 del Capítulo **MARCO TEÓRICO**. Una breve descripción del mismo se realiza en la sección 2.3 del mismo capítulo.

Las pruebas de este apéndice fueron realizadas considerando tres representaciones de partícula simple, la cuales presentamos en la Tabla F.1. Estas buscan asemejarse a las representaciones realistas incorporando los diferentes tipos de estados. Los contornos de las resonancias fueron discretizados como se presenta en la Tabla F.2. La particularidad de estas representaciones es que nos permiten realizar las pruebas y cálculos correspondientes, donde el tiempo de ejecución no sea excesivo.

Tabla F.1: Representaciones utilizadas durante el análisis de performance y optimizaciones. En azul se encuentran las resonancias.

ModelSpace	Estados Neutrones	Estados Protones
<i>ToyModel1</i>	$0g_{9/2}$ , $0h_{11/2}$	$0h_{9/2}$ , $2p_{1/2}$
<i>ToyModel2</i>	$0g_{9/2}$ , $0i_{11/2}$ , $0j_{15/2}$ $0h_{11/2}$ , $2f_{7/2}$	$0h_{9/2}$ , $1f_{7/2}$ , $0i_{13/2}$ $2p_{1/2}$ , $0i_{11/2}$
<i>ToyModel3</i>	$0g_{9/2}$ , $0i_{11/2}$ $0h_{11/2}$ , $2f_{7/2}$ , $0j_{13/2}$	$0h_{9/2}$ , $1f_{7/2}$ $2p_{1/2}$ , $0i_{11/2}$ , $1g_{9/2}$

#### F.1. Descripción del hardware utilizado

Los cálculos y resultados, como las herramientas utilizadas, fueron llevados a cabo en el clúster ZX81 correspondiente a la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación de la Universidad Nacional de Córdoba [27].

Dicho clúster, cuenta con las siguientes características:

- CPU: Intel Xeon E5-2680 v4 @ 2.40GHz
- Cores: 28
- Memoria: 126 GB
- Sistema Operativo: GNU/Linux 5.10.0

Tabla F.2: Discretización de los contornos de las resonancias presentes en las representaciones de la Tabla F.1.

MS	Estados Neutrones				Estados Protones												
TM1	$0h_{11/2}$				$2p_{1/2}$												
		-i0.001	2			-i0.0001	2										
		0.7 - i0.001	2			0.75 - i0.0001	2										
			2	2			2.25	2									
			6	-			8	-									
TM2	$0h_{11/2}$		$2f_{7/2}$		$2p_{1/2}$		$0i_{11/2}$										
		-i0.001	4		0	2		-i0.0001	4		0	2					
		0.7 - i0.001	4		1.1 - i0.5	2		0.75 - i0.0001	4		1.8	2					
			2	4		2.5	2			2.25	4	3.3 - 0.0001	2				
			6	-		6	-			8	-	4.8	2				
TM3	$0h_{11/2}$		$2f_{7/2}$		$0j_{13/2}$		$2p_{1/2}$		$0i_{11/2}$		$1g_{9/2}$						
		-i0.001	8		0	8		0	2		-i0.0001	8		0	2		
		0.7 - i0.001	8		1.1 - i0.5	8		1.4	8		0.75 - i0.0001	8		1.8	8		
			2	2		2.5	2	2.9 - i0.005	8			2.25	2	3.3 - 0.0001	8	3.5 - i0.0001	8
			6	-		6	-	4.4	2			8	-	4.8	2	4.8	2
							6	-					8	-	8	-	

## F.2. Análisis preliminar de la performance

El código analizado es de una construcción paulatina desde el año 2012, incorporando subrutinas y funciones que datan desde 1980. Esta comunión de subrutinas y funciones nos permite obtener resultados reales y completos de la estructura nuclear. El hilo principal y más reciente, se encuentra desarrollado en Fortran90, mientras que ciertas subrutinas y funciones se encuentran escritas en Fortran77.

Para estudiar su funcionamiento, tomaremos las tres representaciones de partícula simple para protones y para neutrones descritas en la sección previa, las cuales no son más que modelos de juguete que nos permitirán estudiar el código sin que el tiempo de ejecución sea extremadamente largo. Las dimensiones de dichas representaciones son: *ToyModel1*, cuenta en la base con un estado ligado, una resonancia y 6 estados de contorno, tanto para protones como para neutrones; *ToyModel2*, cuenta con 3 estados ligados, dos resonancias, y 18 y 20 estados de contorno para neutrones y protones, respectivamente; y el más grande *ToyModel3*, con 2 estados ligados, 3 resonancias, y 56 y 58 estados de contorno para neutrones y protones, respectivamente. Como veremos más adelante, no existe una relación directa entre la cantidad de estados y el tiempo demandado. Esto se debe a que los niveles de energía pueden ser de diferente tipo [30] (ligados, resonancias y de dispersión), tener distintas características físicas (diferente espín o distintos momentos angulares) y pertenecer a distintos nucleones (neutrones o protones), por lo que pensar en una relación directa entre el tiempo de ejecución y la cantidad de niveles en la base no se presenta *a priori* como algo factible.

En un primer lugar, veremos las optimizaciones logradas con distintas banderas y versiones del compilador GCC. Luego, a la mejor versión obtenida, la analizamos con el *Empirical Roofline Toolkit* de IntelAdvisorRoofline [172], que nos permite mejorar significativamente el código gracias a poder

visualizar el tiempo demandado por cada etapa. Finalmente, realizamos una comparación entre el antes y el después de haber analizado el código con el Roofline.

### F.2.1. Optimización mediante banderas

Para el código realizado en Fortran, utilizamos dos versiones de GCC/GFortran: GCC10.2.1 y GCC6.5.0. La decisión de utilizar la versión 6 radica en que el clúster que tuvimos a disposición para utilizar durante el doctorado (PILUSO - CCT-Rosario [28]) contaba con esa versión. En esta primera aproximación a la optimización, utilizamos la base más pequeña (*ToyModel1*), de forma que podamos establecer rápidamente la combinación adecuada compilador-banderas.

De las pruebas con distintas banderas, las combinaciones que mostraron cierta ventaja o no sufrían errores de compilación fueron las siguientes:

- `-m=n-01 := -march=native -O1`
- `-m=n-01-u-1 := -march=native -O1 -funroll-loops`

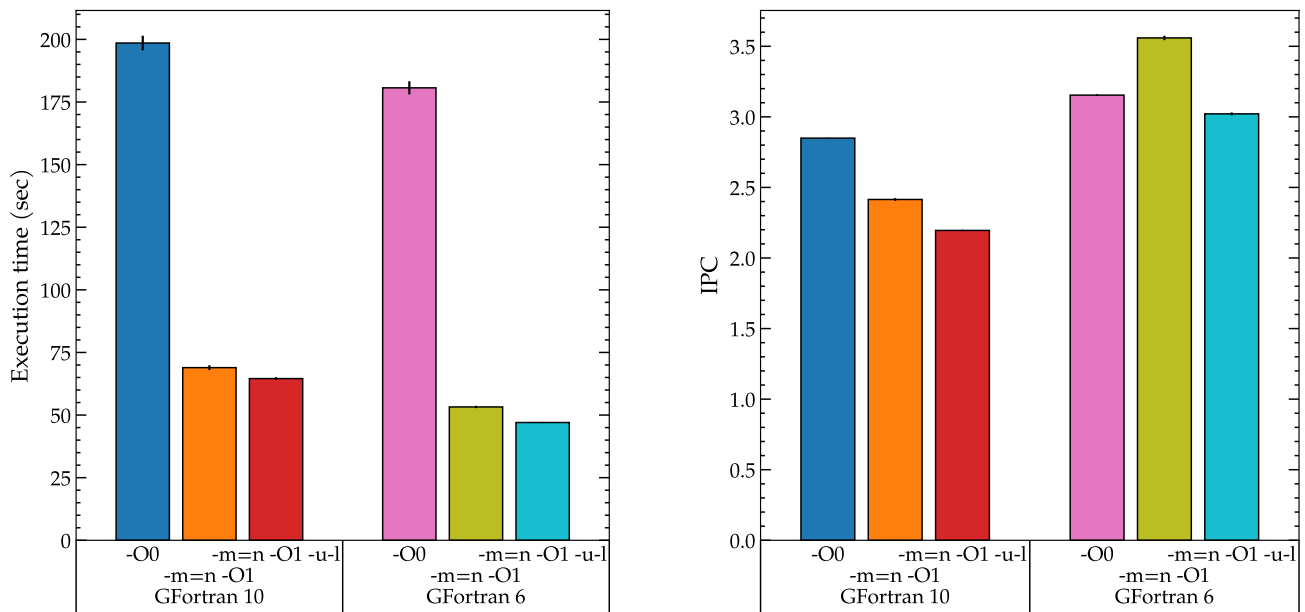
Aquellas banderas que incorporaban mayor grado de optimización, como por ejemplo `-02` u `-03`, funcionaban significativamente peor que `-01`, o directamente generaban errores de compilación. También se probó la bandera `-flt`, ya que el programa cuenta con distintos archivos, cada uno con múltiples subrutinas. Esta, para GFortran10 no generaba una mejora de la performance respecto a `-m=n-01-u-1`, mientras que para GFortran6 obteníamos un `SegmentationFault` al ejecutar el programa.

En la Figura F.1a presentamos los primeros resultados tomando las banderas que comentábamos para los distintos compiladores. Además, como información complementaria, en la Figura F.1b mostramos las instrucciones por ciclo para cada caso. Se realizaron quince mediciones para cada caso, y lo que presentamos es un promedio de estas, además del error que es la desviación estándar de cada caso.

En cuanto al tiempo de ejecución, para ambas versiones del compilador, observamos una mejora significativa cuando incorporamos las primeras banderas, pasando de 199(3) sec con `-00` a 69(1) sec con `-m=n-01` para GFortran10, y de 181(3) sec con `-01` a 53.2(5) sec con `-m=n-01` para GFortran6. Esto implica una mejora del  $\sim 65\%$  y  $\sim 70\%$  para GFortran10 y GFortran6, respectivamente. Si además, incorporamos la bandera `-funroll-loops`, las mejoras aumentan a un  $\sim 67\%$  para GFortran10 y a un  $\sim 74\%$  para GFortran6. Como vemos, la mejor performance se obtiene con GFortran6, lográndose un tiempo de ejecución mínimo de 47.0(2) sec.

Si ahora pasamos a analizar las instrucciones por ciclo, podemos encontrar una de las principales explicaciones de porqué GFortran6 mejora la performance con respecto a GFortran10. Independientemente de las banderas, GFortran6 nos permite realizar mayores instrucciones por ciclo. Si comparamos los resultados con la mejor combinación de banderas (`-m=n-01-u-1`), vemos que para GFortran10 tenemos 2.195(5) IPC, mientras que para GFortran6 pasamos a realizar 3.02(1) IPC. Porcentualmente, esto es una mejora del  $\sim 40\%$ .

Se recomienda entonces utilizar la versión 6 del compilador GCC con la siguiente combinación de banderas: `-march=native-01-funroll-loops`.



(a) Tiempo de ejecución en segundos.

(b) Instrucciones por ciclo.

Figura F.1: Mediciones para el programa compilado con banderas que incorporaban optimizaciones, y dos versiones diferentes del compilador.

## F.2.2. Análisis de Intel Advisor Roofline

Utilizando la mejor combinación de banderas y versión del compilador obtenido en la sección anterior (`gfortran-6-march=native-O1-funroll-loops`), pasamos a analizar la performance y el comportamiento del código con el *Empirical Roofline Toolkit* de IntelAdvisorRoofline. Esto nos permite estudiar el código internamente, para poder identificar si existe una mala performance por problemas propios del código o por limitaciones del hardware.

En la Figura F.2 presentamos el gráfico obtenido con el *Empirical Roofline Toolkit*. Como podemos observar, el programa se encuentra mayormente limitado por memoria. Pero además, lo sorprendente se encuentra en el único punto rojo que vemos: ese punto, que pertenece a un bucle interno de una subrutina, consume el  $\sim 70\%$  del tiempo de ejecución del programa. Para entender porque esto es así, tuvimos que analizar el código fuente. A *grosso modo*, el programa se encuentra realizando continuamente integrales en dos dimensiones. Estas integrales, son realizadas por el método de Gauss-Legendre, cuyos puntos de integración ya se encuentran predefinidos. El problema radica en que las funciones de onda a integrar, no se encuentran definidas en los mismos puntos donde el método de Gauss integra. Para sanear esto, cada vez que el programa iba a integrar, buscaba los puntos más cercanos entre donde se define la función y donde integra el método. Este trabajo era el del lazo que nos consume un  $\sim 70\%$  del tiempo de ejecución.

Como independientemente de las variables de entrada al programa o del conjunto de estados, los puntos a integrar por el método de Gauss y los puntos donde se definirán las funciones se encuentran fijos se decidió lo siguiente: al comienzo del programa, se construyó un arreglo que mapea los puntos de Gauss con los puntos donde se definen las funciones. Gracias a esto, el lazo que generaba un alto consumo solo se realiza una única vez, en lugar de realizarse cada vez que se integraba. Como veremos en

la próxima sección, esto genera una mejora en la performance altísima, sin perder precisión y estabilidad en los resultados físicos.

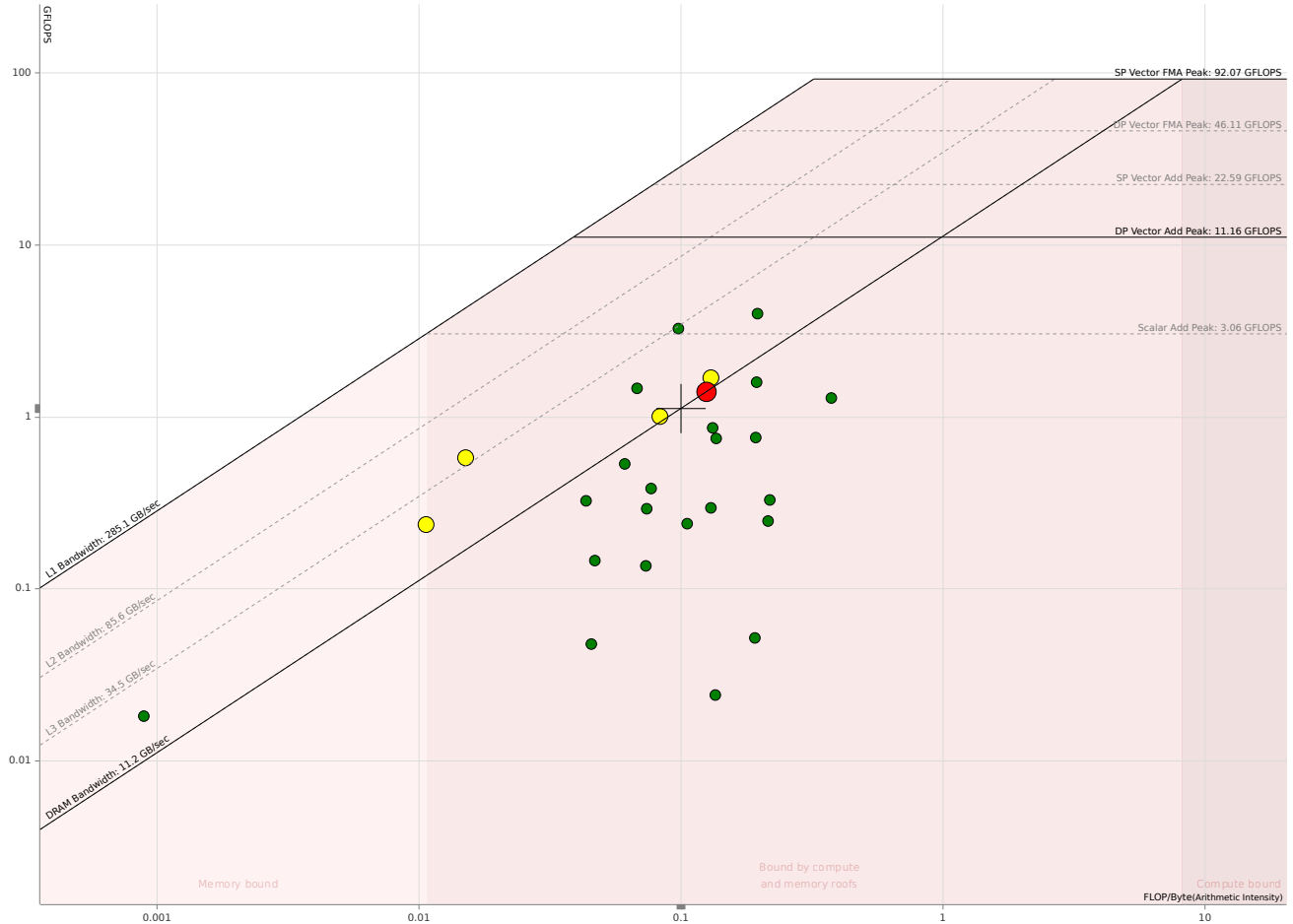
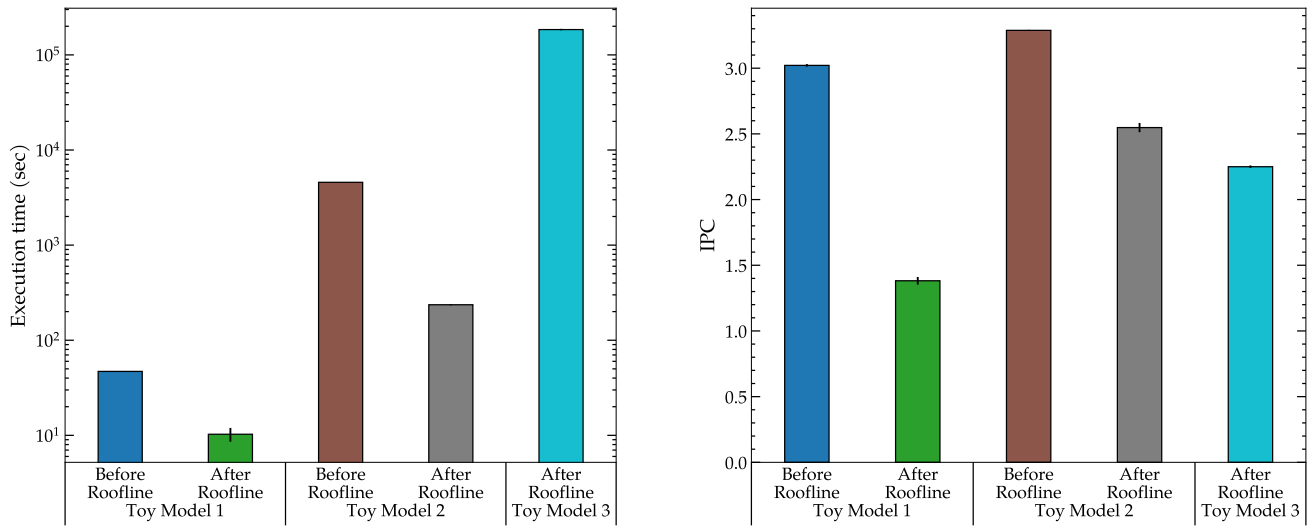


Figura F.2: Resultados del *Empirical Roofline Toolkit* para la mejor combinación de banderas.

### F.2.3. Versión final optimizada

Ya corregido el principal consumo de tiempo del programa, realizamos una medición para comparar el antes y después de la corrección realizada gracias al *Empirical Roofline Toolkit*, utilizando la combinación de banderas y compilador `gfortran-6-march=native-01-funroll-loops`. Además, para puntualizar en lo notorio de la diferencia, incorporamos al cálculo los dos conjuntos más grandes: *ToyModel2* y *ToyModel3*. En la Figura F.3a se presentan los resultados de tiempo de ejecución para los conjuntos, comparando los dos códigos para los dos más chicos. Para tener una visión más completa, tomamos al escala logarítmica en el eje vertical.

Si nos quedamos primero con el *ToyModel1*, vemos que si el tiempo de ejecución para la versión de la Sec. F.2.1 era de 47.0(2) sec, la nueva versión tiene un tiempo promedio de 10(2) sec (obsérvese que al disminuir el tiempo, aumenta la dispersión entre mediciones). Esto es una mejora del  $\sim 80\%$ , o un código  $\sim 5$  veces más rápido. Esto es aún más sorprendente cuando ampliamos el conjunto y nos



(a) Tiempo de ejecución en segundos.

(b) Instrucciones por ciclo.

Figura F.3: Mediciones para el programa compilado con banderas que incorporaban optimizaciones, y dos versiones diferentes del compilador.

vamos al *ToyModel2*: pasamos de  $4580(20) \text{ sec} \equiv 76.3(3) \text{ min}$  a  $236(3) \text{ sec} \equiv 4.93(1) \text{ min}$ , es decir, la ejecución es  $\sim 20$  veces más rápida. Esto es un muy buen resultado, teniendo en cuenta que cálculos con modelos reales están más cerca del *ToyModel2* que del *ToyModel1*. Por una cuestión de tiempo de ejecución excesivos, no se tienen datos para el *ToyModel3* en la versión del programa previa al *Roofline*.

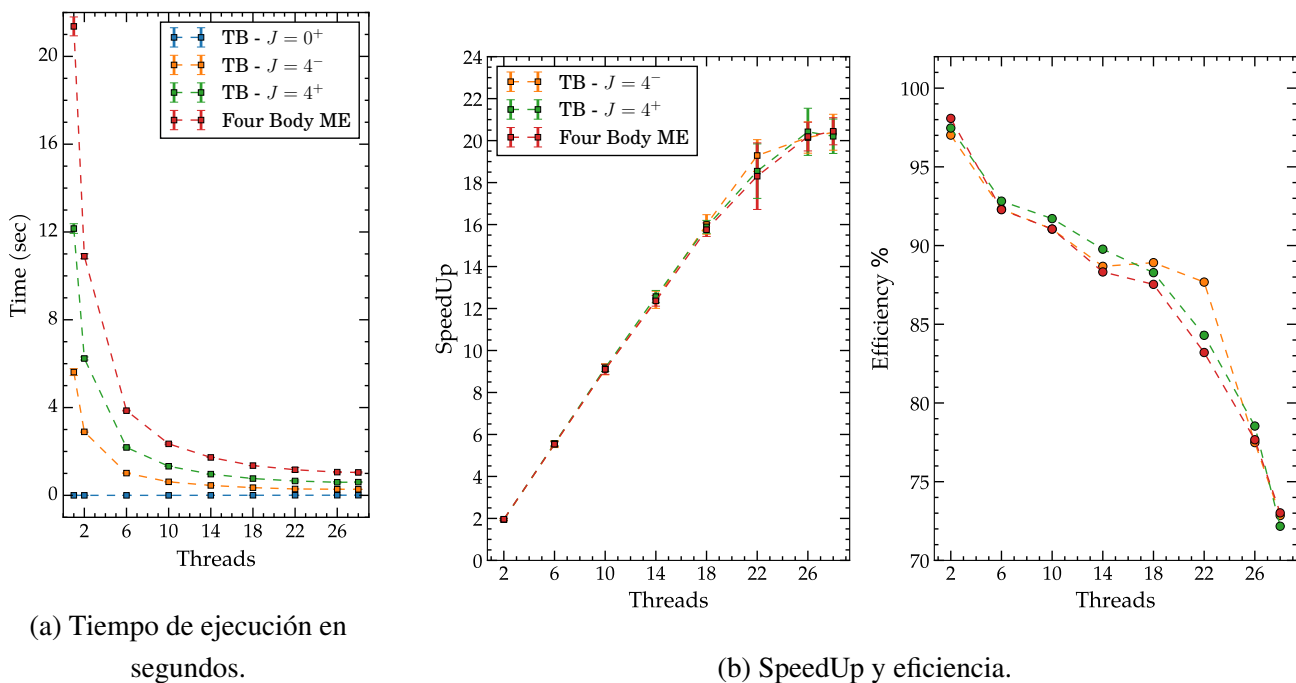
Al analizar las diferencias en tiempo de ejecución para cada conjunto utilizado con la nueva versión del código, vemos que para el *ToyModel1* demora  $10(2) \text{ sec}$ , para el conjunto *ToyModel2* demora  $236(3) \text{ sec}$ . Esto implica que para un conjunto que incorpora 30 estados más a la base, o dicho de otra forma, es 3 veces mayor, el tiempo de ejecución se ve incrementado  $\sim 24$ . Si ampliamos más la base e incorporamos 78 estados sobre el conjunto *ToyModel2* para formar el *ToyModel3*, el tiempo de ejecución pasa a ser de  $185000(3000) \text{ sec} \equiv 51.4(8) \text{ hs}$ . Este tiempo es veces 700 más grande que el que nos costaba el *ToyModel2*. Como vemos, no hay una relación directa entre el tiempo de ejecución y el tamaño de la base. En todo caso el tiempo de ejecución tiende a crecer de manera exponencial a medida que agrandamos el tamaño de la base. Esto se debe a que el tamaño de las matrices y la cantidad de estas que el programa debe formar, no solo dependen de la cantidad de estados en la base, sino del tipo de estado y de la característica física de cada uno de los que componen la base.

Si ahora nos centramos en la Figura F.3b, vemos que para el *ToyModel1* la caída de instrucciones por ciclo es significativa: de  $3.02(1) \text{ IPC}$  a  $1.38(2) \text{ IPC}$ . Vale decir, que el tiempo de ejecución es tan pequeño para la nueva versión, lo cual se ve reflejado en tan pocas IPC. Si en cambio nos paramos en el *ToyModel2*, vemos que la diferencia ya no es tan significativa, y obtenemos una cantidad de IPC para la nueva versión ( $2.55(4) \text{ IPC}$ ) similar a la vieja versión en el *ToyModel1* ( $3.02(1) \text{ IPC}$ ), y ya un poco más lejos para el *ToyModel2* ( $3.288(4) \text{ IPC}$ ). Finalmente, para el *ToyModel3* las IPC se mantienen al nivel del *ToyModel2*.

### F.3. Paralelización mediante OpenMP

Como pudimos ver en la sección anterior, pese a que hemos tenido una amplia ganancia al corregir el código secuencial, el tiempo de ejecución sigue siendo alto para conjuntos grandes. Es por ello que decidimos pasar a realizar una paralelización utilizando OPENMP4.5 [107]. Como el código contiene una gran cantidad de subrutinas y funciones, se decidió paralelizar dos subrutinas puntuales: en primer lugar, aquella que se encarga de construir la matriz para un sistema de dos partículas (ver sección 2.1.2). Esta subrutina es llamada varias veces durante la ejecución del código y depende íntimamente del tipo de función de dos partículas (neutrón-neutrón, protón-protón o protón-neutrón) y de las características físicas que forman la base del sistema. Como a la hora de paralelizarla se realiza independientemente del tipo, veremos más adelante que para diferentes estados de la base, tendremos distintos resultados. La segunda subrutina a paralelizar es aquella que se encarga de formar la matriz correspondiente a cuatro partículas incorporando la interacción protón-neutrón (ver sección 2.1.3.2). Esta subrutina es ejecutada una única vez durante el código.

En una primera instancia, nos centramos en el comportamiento interno de cada una de las subrutinas paralelizadas. Para ello, mostramos la variación del tiempo de ejecución y del speedup y la eficiencia en las Figuras F.4a y F.4b, respectivamente. Todos estos cálculos fueron realizados para el *ToyModel2*.



(a) Tiempo de ejecución en segundos.

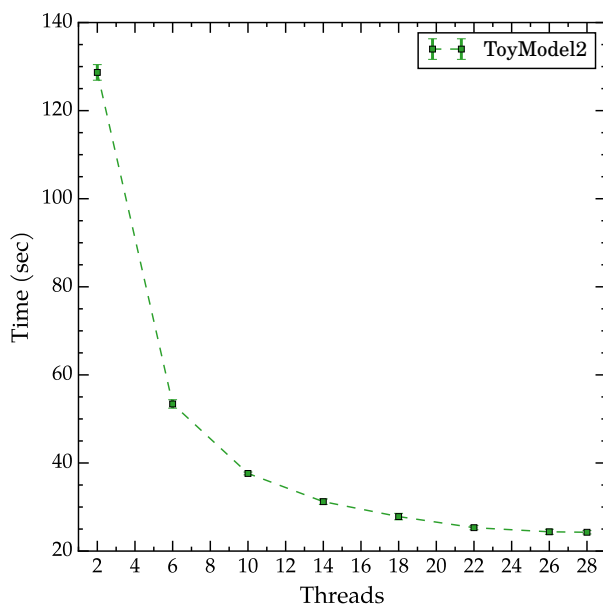
(b) SpeedUp y eficiencia.

Figura F.4: Mediciones para distinta cantidad de hilos para casos particulares de las subrutinas paralelizadas.

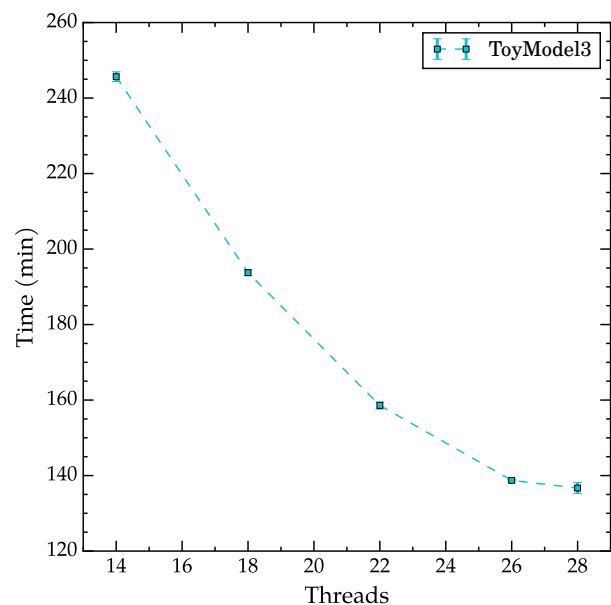
Para la subrutina de dos partículas (TB), se tomaron tres casos testigos, para los cuales con un hilo el tiempo de ejecución era distinto. Observamos que para el caso más rápido ( $J = 0^+$ ), el tiempo de ejecución con un hilo era de  $8.9(5) \cdot 10^{-5}$  sec. Al ser tan ínfimo, paralelizarlo solo genera un empeoramiento del tiempo: para 14 hilos tarda  $2(1) \cdot 10^{-3}$  sec y para 28 hilos tarda  $7(3) \cdot 10^{-3}$  sec. Pese a que el tiempo

de ejecución sigue siendo del orden de los milisegundos, creemos que una de las mejoras que entonces podemos realizar en un futuro es que la paralelización de la subrutina TB solo se realice cuando vale la pena. Si nos paramos en los casos  $J = 4^-$  y  $J = 4^+$ , cuyo tiempo con un hilo es más significativo, vemos que el Speedup y la eficiencia es mucho más aceptable. Para estos dos casos, logramos tener una eficiencia superior al 80 % con 22 hilos y al 70 % con 28 hilos, el cual es un resultado muy bueno.

En cuanto a la segunda subrutina paralelizada, la que corresponde a cuatro partículas (Four Body ME), el comportamiento es similar a los mejores casos de la primer subrutina: como con un hilo demora 21.4(4) sec, y como el lazo interno es lo suficientemente grande para este conjunto que estudiamos, vemos una eficiencia por encima del 70 % para cualquier cantidad de hilos utilizada. En cuanto al SpeedUp, vemos que es muy bueno hasta los 14 hilos, siendo este casi 13, y luego comienza a amecetarse. Este comportamiento es muy similar para los mejores casos de la primera subrutina paralelizada.



(a) Tiempo de ejecución en segundos para el *ToyModel2*.



(b) Tiempo de ejecución en minutos para el *ToyModel3*.

Figura F.5: Mediciones para distinta cantidad de hilos y distintos conjuntos del tiempo de ejecución total del programa.

Si pasamos a analizar el tiempo de ejecución completo del programa, debemos nuevamente distinguir entre los dos conjuntos más importantes: *ToyModel2* y *ToyModel3*. En un primer lugar, observamos en las Figuras F.5a y F.5b el tiempo de ejecución para distintas cantidades de hilos para ambos conjuntos.

Para el *ToyModel2* variamos la cantidad de hilos entre 2 y 28. Vemos que el comportamiento es similar al visto en la Figura F.4a para las subrutinas, pero la ganancia de incorporar hilos no es tan significativa. Si recordamos, para un solo hilo el tiempo de ejecución era de 236(3) sec, y por ejemplo ahora demora 129(2) sec para dos hilos y 31.2(6) sec para catorce hilos. Esto habla de una eficiencia en caída importante, en contraste con lo que observábamos en la Figura F.4b para las subrutinas paralelizadas. Esto es confirmado cuando graficamos en la Figura F.6 la eficiencia y el speedup totales. Allí vemos

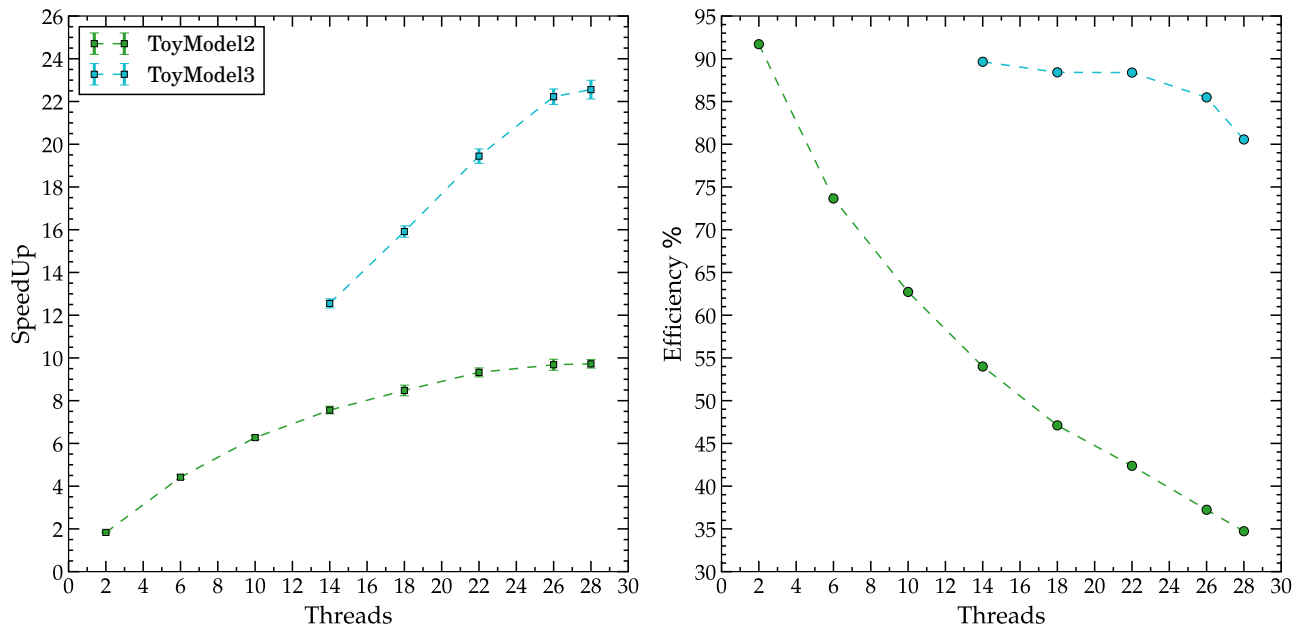


Figura F.6: Resultados de speedup y eficiencia para las mediciones realizadas en las Figuras F.5a y F.5b.

que para este conjunto mediano, la caída de la eficiencia por debajo del 75 % ya se da con seis hilos. Estimamos que esto sucede pues el tiempo de ejecución de las subrutinas paralelizadas para este caso no es significativo, y existe un tiempo de ejecución de subrutinas no paralelizadas que es fijo independientemente de la cantidad de hilos. Por ello también el speedup no presenta un crecimiento muy importante.

Si ahora pasamos a la Figura F.5b, y en la Figura F.6 nos centramos en el conjunto más grande, las cosas son contrapuestas y más alentadoras. Como el tiempo de ejecución con un hilo era extremadamente alto (51.4(8) hs), se decidió hacer un análisis de la paralelización a partir de los 14 hilos. En cuanto al tiempo de ejecución, vemos por ejemplo que con 14 hilos nos demora 246(1) min  $\cong$  4 hs, mientras que con 28 hilos la ejecución se toma 137(1) min  $\cong$  2.3 hs. Esto se traduce en un speedup con gran comportamiento lineal, y una eficiencia que se mantiene por encima del 80 % para cualquier número de hilos que probamos. Más aun, vemos que tomando entre 14 y 22 hilos, la eficiencia se encuentra muy cercana al 90 %. Esto confirma nuestra hipótesis de la sección anterior, ya que aquí las subrutinas que no se encuentran paralelizadas demandan un tiempo de ejecución mucho menor en comparación con el tiempo demandado por las subrutinas paralelizadas.

Estas mejoras realizadas en el código de cuatro cuerpos fueron trasladadas también al código de dos cuerpos. La utilización de estos códigos mejorados en el proyecto de tesis aceleró enormemente la obtención de resultados y nos permitió probar múltiples alternativas que anteriormente eran impracticables.

## APÉNDICE G

### EL CANAL TRIPLETE-IMPARG DE LA INTERACCIÓN GAUSSIANA EN EL NÚCLEO PLOMO-210

En este apéndice, probaremos dos tipos de ajuste de la interacción neutrón-neutrón en el  $^{210}\text{Pb}$ . Este apéndice surge como complemento de la sección 3.2.

Partimos en primer lugar del hecho de que la Ref. [23] desactiva el canal triplete-imparg para este núcleo, dejando solo activa la parte singlete-par. Nosotros decidimos probar dos casos para establecer el más óptimo. En el Caso I, solo se activó la parte singlete-par, mientras que en el Caso II se activó el canal  $T = 1$  de la interacción  $V_{nn}$  de manera completa. En cada caso, se realizó la optimización de las intensidades con el algoritmo de *Levenberg-Marquardt* [114, 115] para describir la energía experimental de los cuatro primeros estados del núcleo.

Tabla G.1: Intensidades (en MeV) de los potenciales para el caso de dos neutrones utilizados en las tres bases. Además, se presenta la intensidad que utiliza la Ref. [23]. Las intensidades fueron optimizadas con el algoritmo de *Levenberg-Marquardt* [114, 115] a los cuatro primeros estados pares del  $^{210}\text{Pb}$ , con los residuos presentados. Los rangos de la interacción gaussiana fueron  $\beta_{se} = 1.9$  fm y  $\beta_{to} = 2.92$  fm.

	Ref. [23]	RL		RP		RC	
		Caso I	Caso II	Caso I	Caso II	Caso I	Caso II
$V_{se}$	-36.07	-37.265	-40.677	-35.306	-37.717	-34.245	-36.558
$V_{to}$	-	0	5.564	0	4.580	0	4.490

Tabla G.2: Energías (en MeV) experimentales[1] y calculadas utilizando los parámetros de la Tabla G.1 relativas al carozo inerte  $^{208}\text{Pb}$ , como resultado de la optimización de las intensidades de los potenciales. Se presentan los resultados para cada una de las representaciones utilizadas.

$J^\pi$	Exp.	Ref. [23]	RL		RP		RC	
			Caso I	Caso II	Caso I	Caso II	Caso I	Caso II
$0^+$	-9.122	-9.12	-9.095	-9.129	$-9.110 + i0.005$	$-9.129 + i0.006$	-9.108	-9.128
$2^+$	-8.323	-8.31	-8.350	-8.268	$-8.338 + i0.001$	$-8.261 + i0.001$	-8.336	-8.262
$4^+$	-8.025	-8.08	-8.127	-8.040	-8.119	-8.043	-8.118	-8.042
$6^+$	-7.928	-7.99	-8.051	-7.970	-8.045	-7.975	-8.025	-7.975
$8^+$	-7.845	-	-8.024	-7.936	-8.019	-7.941	-8.017	-7.941

Es en la Tabla G.1 en la cual comparamos las intensidades de los dos casos. Vemos que solo activando la parte singlete-par (Caso I), la optimización converge a intensidades cercanas a las utilizadas en la Ref. [23]. Ya la presencia de la parte triplete-imparg (Caso II) (el valor de  $\beta_{to} = 2.92$  fm fue seleccionado de forma que la relación  $\beta_{se}/\beta_{to} = 0.65$  sea la misma en los núcleos  $^{210}\text{Pb}$  y  $^{210}\text{Po}$ ), modifica las intensidades de ambas partes. Para confirmar cual es el mejor ajuste, mostramos en la Tabla G.2 las

energías calculadas en cada caso. Allí se observa que utilizando el Caso II, logramos un mejor ajuste al estado fundamental y los excitados, excepto el  $2^+$ . Esta mejora no solo es respecto a nuestro Caso I, sino también en comparación con la Ref. [23]. Es por ello, que en nuestro trabajo optamos por el Caso II de la interacción  $V_{nn}$ .

## APÉNDICE H

### EL ISOESPÍN EN LA FAMILIA DE NÚCLEOS DEL CALCIO-40

En este apéndice analizaremos diferentes particularidades respecto a las intensidades de dos cuerpos y como se relacionan estas con el isoespín del sistema. Este análisis se realizará sobre los núcleos que pertenecen a la familia del Calcio-40:  $^{42}\text{Ca}$ ,  $^{42}\text{Sc}$ ,  $^{42}\text{Ti}$  y  $^{44}\text{Ti}$ . Este apéndice es un complemento de la sección 4.2.1.

#### H.1. El isoespín y su dependencia de la representación

A continuación, analizaremos la capacidad del modelo en describir los niveles de energía de dos cuerpos utilizando diferentes representaciones de partícula simple. En primer lugar, notemos el ordenamiento de los niveles de energía disponibles que se encuentran en la Figura H.1, donde para la representación completa RC tenemos además los estados de dispersión asociados a cada resonancia. Podemos estimar que la incapacidad del modelo de reproducir los estados fundamentales de dos cuerpos con mejor precisión asumiendo la simetría de isoespín, surge de la diferencia entre la energía de los estados fundamentales de partícula simple. En otras palabras, cuando  $S_n$  y  $S_p$  son muy diferentes, la intensidad necesaria para ajustar las energías de los estados fundamentales depende del par de nucleones que se esté tomando.

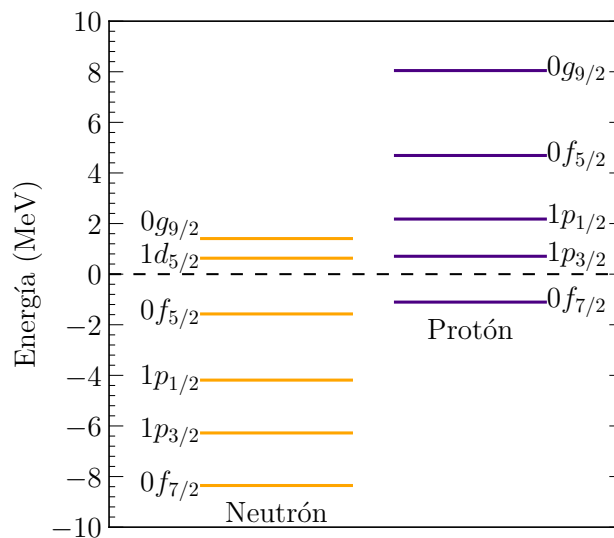


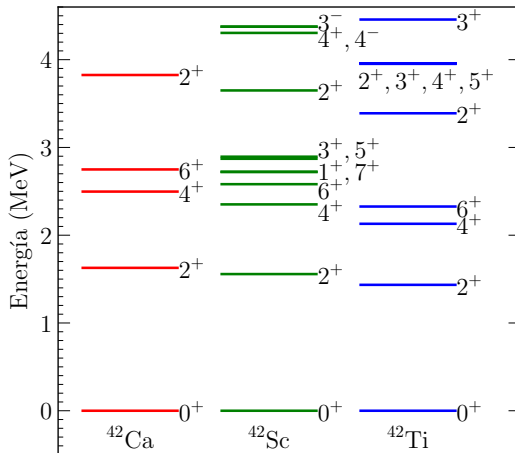
Figura H.1: Estados de partícula simple en relación al carozo  $^{40}\text{Ca}$ .

Supongamos ahora que reducimos la base de neutrones de tal modo que nos quede la misma cantidad de estados (excluyendo los de dispersión) en ambas bases de partícula simple. Profundizando esta idea, tomaremos también solo la capa  $pf$  en ambas bases, lo cual implicará que para neutrones tendremos cuatro estados ligados y para protones solo uno y tres resonancias.

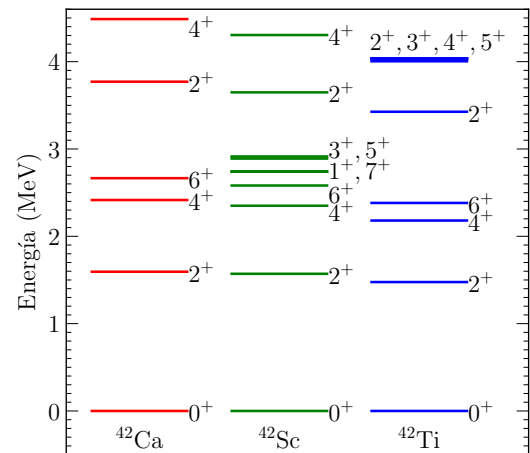
Si realizamos nuevamente la optimización de las intensidades de dos cuerpos y recalculamos con estas nuevas representaciones las energías, obtenemos los niveles de la Tabla H.1. Vemos que al comparar con la representación completa, se mejora el ajuste a los niveles fundamentales experimentales (excepto para el  $^{42}\text{Sc}$ ). Además, en la Figura H.2 presentamos el espaciado entre niveles para dos de las representaciones. Observamos que con la representación más simétrica (capa  $pf$ ), logramos un mejor ajuste a los estados experimentales y una descripción mejor del isoespín del sistema, lo cual se aprecia por la correspondencia que existe entre los niveles pares de los tres núcleos.

Tabla H.1: Energías (en MeV) experimentales [1] y calculadas relativas al carozo inerte  $^{40}\text{Ca}$ , para diferentes simetrías en la base de partícula simple.

$J^\pi$	Exp.	RC	Capa $pf + 0g_{9/2}$	Capa $pf$
$^{42}\text{Ca}$				
$0^+$	-19.843	-19.950	-19.934	-19.885
$2^+$	-18.319	-18.322	-18.303	-18.290
$^{42}\text{Ti}$				
$0^+$	-4.836	-4.713	-4.733	-4.790
$2^+$	-3.282	-2.279	-3.298	-3.314
$^{42}\text{Sc}$				
$0^+$	-10.411	-12.519	-12.540	-12.538
$2^+$	-8.825	-10.961	-10.968	-10.968



(a) Utilizando la representación completa.



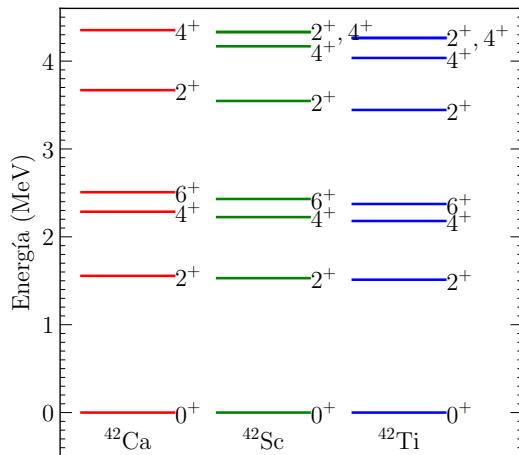
(b) Utilizando la capa  $pf$  como base de partícula simple.

Figura H.2: Energías de dos cuerpos experimentales ( $J$  par) y calculadas utilizando la representación completa o la capa  $pf$ .

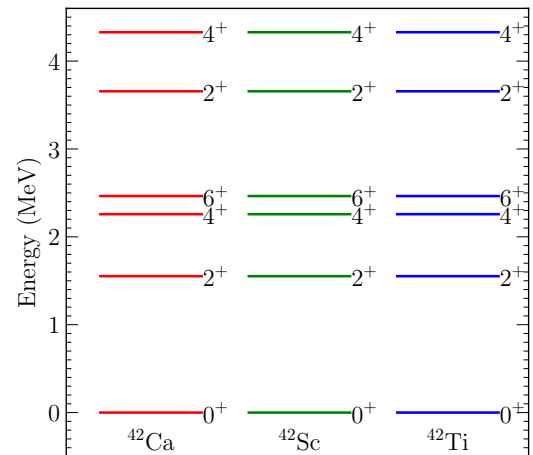
La ubicación de los estados impares no se corresponde con los experimentales en este caso pues no

se respeta su distancia al fundamental, pero como vimos en la Figura 4.2b, sí ajusta a la energía de los estados experimentales respecto al carozo  $^{40}\text{Ca}$ .

Por último, vemos en la Figura H.3a, como afecta la energía de Coulomb a nivel dos cuerpos: allí se aprecia como quitando Coulomb entre los protones de valencia, se acomodan las energías del  $^{42}\text{Ti}$  lo suficiente para hacer más visible la característica de isoespín del sistema, y la capacidad de reproducción del mismo por parte del código, y también en la Figura H.3b, cómo quitando totalmente Coulomb, los niveles de energía son exactamente iguales.



(a) Sin fuerza de Coulomb entre protones de valencia.



(b) Sin fuerza de Coulomb entre ningún protón.

Figura H.3: Energías de dos cuerpos experimentales y calculadas utilizando la representación completa o la capa  $pf$  apagando la interacción coulombiana.

## H.2. Cálculos de las energías de dos cuerpos desactivando el isoespín

En esta sección, realizamos nuevamente el ajuste de las intensidades de dos cuerpos para describir los estados experimentales pero sin imponer la simetría del isoespín. Es decir, cada par de nucleones tendrá sus propias intensidades de los potenciales involucrados, tal cual fue realizado para la familias de núcleos del  $^{208}\text{Pb}$  en la sección 3.2.

En cuanto a los rangos de la interacción gaussiana, se utilizaron los mismos parámetros  $\beta_\xi$  de la sección 3.2. En primer lugar trabajamos en el  $^{42}\text{Ca} = nn + ^{40}\text{Ca}$  ajustando a sus tres primeros estados  $0^+$ ,  $2^+$  y  $4^+$ , por lo que en la Tabla H.2 presentamos los potenciales obtenidos en cada una de las representaciones trabajadas. Para el caso del  $^{42}\text{Ti} = pp + ^{40}\text{Ca}$  se ajustaron a los estados  $0^+$ ,  $2^+$ ,  $4^+$  y  $6^+$ , presentados estos en la misma Tabla H.2, mientras que en las Figuras H.4a y H.4c se comparan estos dos resultados con sus respectivos valores experimentales y los obtenidos al principio de la sección. Por otro lado, en la Tabla H.2 también se presentan los potenciales obtenidos para el escandio-42, y la comparación de sus niveles con los experimentales en la Figura H.4b. Para este núcleo en particular, la interacción  $V_{se}$  se fijó con el estado fundamental, mientras que las interacciones de isoespín  $T = 0$  fueron

fijadas para mantener el espacio y orden entre los estados  $1^+$  y  $7^+$ , tal cual se realizó al principio de la sección.

Tabla H.2: Intensidades (en MeV) de los potenciales para el caso de dos cuerpos sobre el  $^{40}\text{Ca}$  utilizados en las tres representaciones. Estas fueron optimizadas con el algoritmo  $\chi^2$  [115] tal cual fue presentado en el texto. Los residuos obtenidos en la representación completa son: 0.127 para  $nn$ , 0.423 para  $pp$  y del orden de  $10^{-6}$  para ambos canales de  $pn$ .

	NN	$\beta_\tau$ (fm)	RL	RP	RC
$V_{se}$	$nn$	1.9	-42.650	-40.298	-39.236
	$pp$	1.4	-83.334	-67.332	-66.075
	$pn$	1.58	-20.755	-19.004	-18.876
$V_{so}$	$pn$	1.476	-4.773	-4.062	-4.049
$V_{te}$	$pn$	1.3	-14.078	-14.366	-14.055

Notemos nuevamente que la intensidad de  $V_{se}$  se ve disminuida cuando aumenta la dimensión de la representación utilizada. Respecto a los cálculos realizados con isoespín, vemos que en  $nn$  y  $pp$  obtenemos actualmente valores que promediados se encuentran en las cercanías de aquellos de la Tabla 4.9 para  $J = 0$ . También podemos ver que entre los tres pares, la diferencia de intensidades es significativa, lo que explica el ajuste que se observa utilizando una única intensidad para los tres pares. Para el caso de las intensidades de isoespín  $T = 0$ , vemos nuevamente que no existe variación entre representaciones.

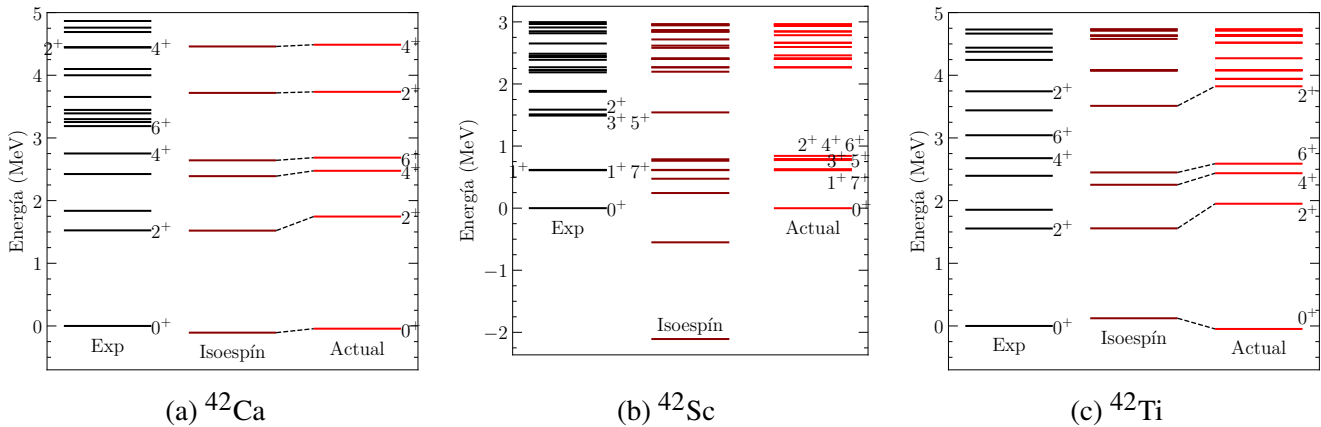


Figura H.4: Energías de dos cuerpos experimentales y calculadas en la base completa sin forzar el formalismo de isoespín (“Actual”), y su comparación con los resultados de haber incorporado esta condición (“Isoespín”).

Para los casos de partículas idénticas ( $nn$  y  $pp$ ), los ajustes a los niveles experimentales y la diferencia entre las dos parametrizaciones, como observamos en la Figura H.4, implican una mínima ganancia que se encuentra en el ajuste al nivel fundamental, pues el resto de los niveles excitados dentro de los primeros 3 MeV se modifican levemente. Vale decir que el ajuste al estado  $2^+$  empeora pues para la parametrización que incluía el isoespín, este  $J$  poseía intensidades independientes a las de  $J = 0$ .

Notemos la particularidad del  $^{42}\text{Ti}$ , donde por encima de los 3 MeV de excitación, aparece una cantidad de estados mayor a la observada cuando se implementaba el isoespín.

Para el caso de  $pn$ , los resultados presentan diferencias: al poder ajustar ahora los estados pares, la descripción del estado fundamental se ve completamente mejorada. Respecto a los  $J$  impares, vemos que el comportamiento es similar entre ambos métodos. Notemos también la particularidad de que al no incorporar isoespín, no se encuentran estados entre 1 MeV y 2 MeV, cuando previamente se observaba un  $2^+$  que se ubicaba en las cercanías de uno experimental.

### H.3. Diferentes ajustes de la interacción protón-neutrón en el modelo de cuatro cuerpos

Impulsados por los resultados de las secciones previas, aquí realizamos diferentes ajustes de la interacción protón-neutrón para describir el estado fundamental del Titanio-44. En la Tabla H.3 presentamos dos parametrizaciones de la intensidad  $V_{pn}$ , una desarrollada en la sección 4.3.1 y otra que resulta de multiplicar a la interacción completa de la Tabla 4.15 por las nuevas constantes:  $\hat{\chi}_{\text{RL}} = 2.3500$ ,  $\hat{\chi}_{\text{RP}} = 2.5377$  y  $\hat{\chi}_{\text{RC}} = 6.0893$ . Vemos que así la proporcionalidad es menor y la interacción predominante es la parte singlete-par ( $T = 1$ ). Las diferencias que esto generará a nivel de cuatro cuerpos la veremos más adelante. A priori, utilizar esta parametrización puede ser cuestionable pues la parte  $T = 1$  de la interacción  $V_{pn}$  tiene un ajuste sumamente pobre a los datos experimentales del  $^{42}\text{Sc}$ .

Tabla H.3: Intensidades (en MeV) de la interacción protón-neutrón que reproducen la energía del estado fundamental del núcleo  $^{44}\text{Ti}$  para cada una de las representaciones. Las intensidades son proporcionales a las de la Tabla 4.9 siguiendo las constantes mencionadas en el texto.

		Ajuste $V_{pn}(T = 0)$		
		RL	RP	RC
so		-42.714	-40.390	-39.897
te		-74.935	-76.533	-77.795
		Ajuste $V_{pn}(T = 0, 1)$		
		RL	RP	RC
se	$J = 0$	-137.626	-132.389	-132.820
	$J > 0$	-166.045	-164.324	-162.965
	so	-11.626	-11.620	-11.649
	te	-20.396	-22.017	-22.714

Si utilizamos las intensidades de la Tabla H.3 que surgen de optimizar completamente  $V_{pn}$  para calcular el espectro de energía del Titanio-44 con la representación completa, obtenemos lo presente en la Figura H.5. En cuanto a la energía, podemos notar que la mayor diferencia entre ambos ajustes es que el primer estado excitado se mueve para ubicarse debajo del  $Q_\alpha$ . Además, ahora nos encontramos con dos estados encima del  $Q_\alpha$  que están prácticamente degenerados. Pero el principal contrapunto de la nueva optimización se encuentra en el isoespín: en primer lugar, notemos que para el estado fundamental se

obtiene  $T = 1$ , el cual no respeta el valor físico que debería tener [4]; y en segundo lugar, notar que todos los estados tendrán un característico  $T = 1$ , lo cual es más que llamativo.

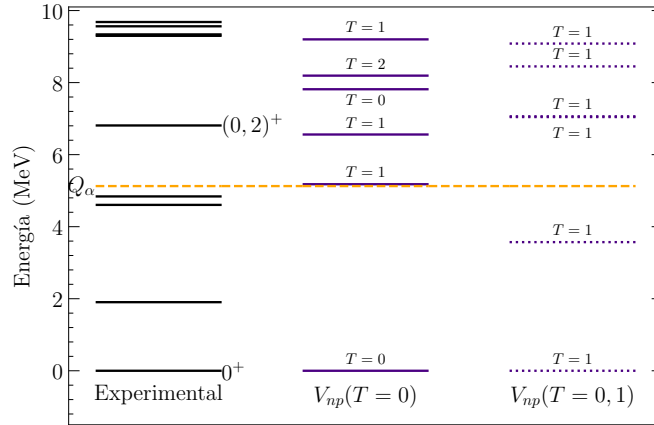


Figura H.5: Comparación de los diferentes niveles de energía del Titanio-44 mostrando los resultados de las dos parametrizaciones mencionadas:  $V_{pn}(T = 0)$  solo parte  $T = 0$  de la interacción,  $V_{pn}(T = 0, A)$  interacción completa.

### H.3.1. Utilizando los estados de la sección H.2 como base.

En esta sección, realizaremos los mismos cálculos de cuatro cuerpos, pero tomando como base de dos cuerpos los resultados de la sección H.2, donde no se forzaba el formalismo del isoespín a nivel interacción NN, sino que se tenían intensidades independientes.

En primer lugar, presentamos en la Tabla H.4 las nuevas intensidades para el caso  $T = 0$  de forma que se ajuste al estado fundamental experimental del  $^{44}\text{Ti}$ . Las constantes de proporcionalidad de cada representación ahora son:  $\chi_{\text{RL}} = 10.067$ ,  $\chi_{\text{RP}} = 10.156$  y  $\chi_{\text{RC}} = 10.535$ . Si comparamos con la Tabla 4.15, vemos que el comportamiento de la parte singlete y triplete entre si se repite: a medida que ampliamos la representación, el singlete-impar tiende a disminuir y el triplete-par a aumentar; en cambio, si comparamos intensidades, mientras el singlete-impar mantiene valores similares a los de la sección 4.15, el triplete-par casi los duplica.

En la misma Tabla H.4, también presentamos los potenciales que salen de optimizar la interacción  $V_{pn}$  completa, donde las constantes de proporcionalidad son:  $\hat{\chi}_{\text{RL}} = 5.823$ ,  $\hat{\chi}_{\text{RP}} = 6.003$  y  $\hat{\chi}_{\text{RC}} = 6.0893$ . Pese a las conclusiones que obtuvimos luego de la Figura H.5, en este caso puede cobrar sentido esta parametrización pues  $V_{pn}$  entera se ajustó para respetar los niveles del  $^{42}\text{Sc}$ . Más adelante, veremos como esto afecta a los resultados de cuatro partículas.

Utilizando entonces las intensidades de la Tabla H.4, presentamos las energías y sus correspondientes funciones de onda de los primeros seis estados  $0^+$  del núcleo  $^{44}\text{Ti}$  en la Tabla H.5. También se nota el isoespín asociado a cada nivel de energía. Tal cual lo observado en la Figura H.5 de los cálculos previos, la optimización con la interacción protón-neutrón completa implica que no se respete  $T = 0$  para el estado fundamental. Centrándonos en la optimización bajo el canal  $T = 0$  de  $V_{pn}$ , vemos que la diferencia

Tabla H.4: Intensidades (en MeV) de la interacción protón-neutrón que reproducen la energía del estado fundamental del núcleo  $^{44}\text{Ti}$  para cada una de las representaciones. Las intensidades son proporcionales a las de la Tabla H.2 siguiendo las constantes mencionadas en el texto.

Ajuste $V_{pn}(T = 0)$			
	RL	RP	RC
so	-48.044	-41.257	-42.673
te	-141.727	-145.900	-148.134
Ajuste $V_{pn}$ completo			
	RL	RP	RC
se	-120.859	-114.091	-114.944
so	-27.791	-24.389	-24.654
te	-81.981	-86.246	-85.587

respecto a los resultados de la Tabla 4.16 es que no se observa un estado con  $T = 2$ , que si se obtiene en la Ref. [4]. Además, vemos que en los estados excitados, las amplitudes parciales  $\mathcal{Z}_{J+}$  con  $J \in [0, 2, 4, 6]$  empieza a bajar su proporcionalidad de la función de onda, llegando a representar menos del 90 % en el estado  $0_6^+$ , lo que implica que se empezaron a localizar otros estados de dos cuerpos.

Establecido entonces que ajustar al estado fundamental del  $^{44}\text{Ti}$  la interacción  $V_{pn}$  completa no es correcto pues se destruye el isoespín correspondiente al estado fundamental, comparamos en la Figura H.6 los resultados de la sección actual y la sección 4.3.1 obtenidos utilizando la representación completa. Allí vemos que el calculo actual logra reproducir un estado debajo del  $Q_\alpha$ , pero como fue mencionado, pierde el estado con  $T = 2$ . Además, localiza un estado de mayor energía, a la vez que se aproxima más al estado experimental  $(0, 2)^+$ .

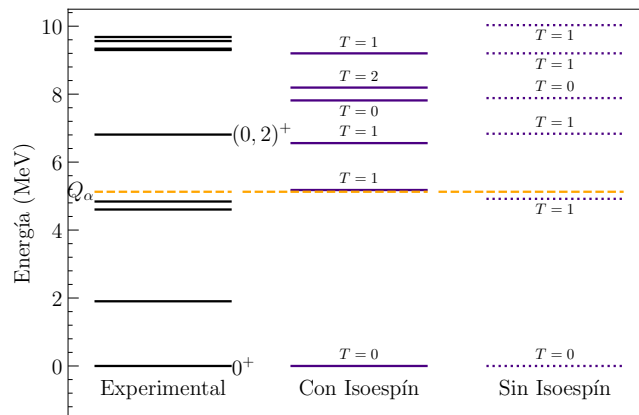


Figura H.6: Comparación entre las energías experimentales [1] y calculadas utilizando la representación RC, donde las energías de dos cuerpos fueron ajustadas con y sin isoespín.

Tabla H.5: Amplitudes de ondas parciales (2.93) para el estado fundamental y excitados del núcleo  $^{44}\text{Ti}$  obtenidos en las diferentes representaciones.

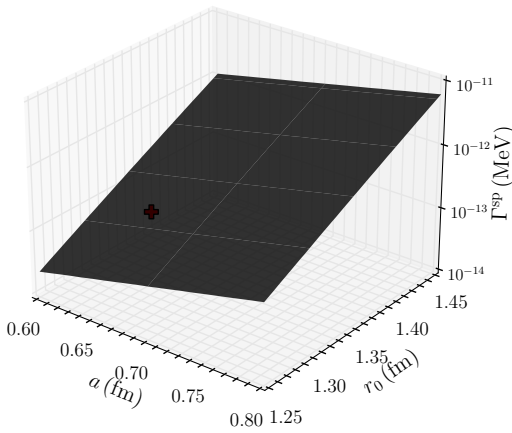
$Z_{J\pi}$	Ajuste $V_{pn}(T=0)$			Ajuste $V_{pn}$ completo		
	RL	RP	RC	RL	RP	RC
$E_{0^+}_1$	-33.423	(-33.423, 0.142)	-33.423	-33.423	(-33.423, 0.109)	-33.423
$Z_{0^+}$	0.648	(0.644, 0.000)	0.616	0.342	(0.376, 0.000)	0.348
$Z_{2^+}$	0.295	(0.301, 0.007)	0.321	0.281	(0.283, 0.011)	0.284
$Z_{4^+}$	0.048	(0.046, 0.002)	0.048	0.194	(0.175, 0.012)	0.178
$Z_{6^+}$	0.008	(0.005, 0.001)	0.005	0.182	(0.148, 0.012)	0.151
$\langle T \rangle$	0	0	0	1	1	1
$E_{0^+}_2$	-27.611	(-28.293, 0.079)	-28.504	-29.105	(-29.016, 0.079)	-29.054
$Z_{0^+}$	0.208	(0.127, 0.001)	0.136	0.493	(0.411, 0.000)	0.392
$Z_{2^+}$	0.458	(0.551, 0.003)	0.602	0.014	(0.030, -0.001)	0.043
$Z_{4^+}$	0.039	(0.075, 0.002)	0.077	0.150	(0.168, -0.008)	0.164
$Z_{6^+}$	0.296	(0.237, 0.009)	0.132	0.343	(0.349, -0.009)	0.340
$\langle T \rangle$	0	1	1	2	2	2
$E_{0^+}_3$	-25.613	(-26.366, 0.076)	-26.588	-25.891	(-26.285, 0.101)	-26.532
$Z_{0^+}$	0.029	(0.232, -0.017)	0.240	0.142	(0.147, -0.011)	0.199
$Z_{2^+}$	0.175	(0.399, -0.012)	0.350	0.664	(0.669, 0.016)	0.613
$Z_{4^+}$	0.590	(0.128, 0.009)	0.101	0.021	(0.128, -0.002)	0.136
$Z_{6^+}$	0.206	(0.189, 0.000)	0.254	0.174	(0.030, 0.003)	0.014
$\langle T \rangle$	0	1	1	0	1	2
$E_{0^+}_4$	-24.755	(-25.467, 0.043)	-25.539	-24.563	(-25.689, 0.068)	-25.696
$Z_{0^+}$	0.489	(0.095, 0.006)	0.080	0.449	(0.217, 0.016)	0.184
$Z_{2^+}$	0.369	(0.295, 0.015)	0.281	0.345	(0.554, 0.010)	0.581
$Z_{4^+}$	0.124	(0.543, 0.001)	0.604	0.204	(0.076, 0.009)	0.049
$Z_{6^+}$	0.018	(0.060, -0.005)	0.054	0.002	(0.125, 0.001)	0.146
$\langle T \rangle$	1	0	0	1	1	1
$E_{0^+}_5$	-23.058	(-23.954, 0.101)	-24.222	-24.111	(-24.455, 0.025)	-25.580
$Z_{0^+}$	0.125	(0.417, 0.003)	0.440	0.001	(0.060, -0.002)	0.066
$Z_{2^+}$	0.287	(0.407, 0.010)	0.428	0.069	(0.171, -0.003)	0.174
$Z_{4^+}$	0.283	(0.088, 0.008)	0.065	0.647	(0.197, -0.002)	0.175
$Z_{6^+}$	0.305	(0.063, 0.006)	0.076	0.283	(0.022, 0.000)	0.030
$\langle T \rangle$	1	1	1	0	1	1
$E_{0^+}_6$	-22.534	(-23.288, 0.040)	-23.392	-22.264	(-24.224, 0.121)	-24.219
$Z_{0^+}$	0.289	(0.118, 0.004)	0.108	0.227	(0.005, -0.001)	0.007
$Z_{2^+}$	0.266	(0.311, -0.009)	0.300	0.095	(0.075, -0.002)	0.082
$Z_{4^+}$	0.153	(0.283, -0.011)	0.310	0.678	(0.626, 0.001)	0.632
$Z_{6^+}$	0.292	(0.165, -0.004)	0.178	0.000	(0.279, -0.003)	0.261
$\langle T \rangle$	1	1	1	1	0	0

## APÉNDICE I

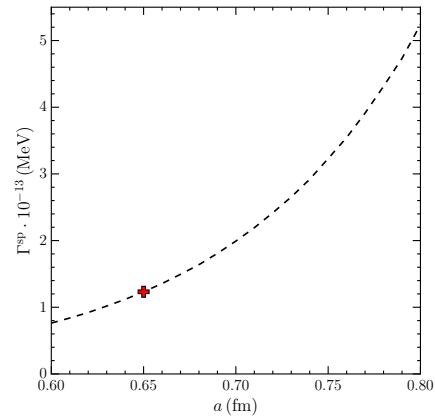
### PARAMETRIZACIÓN DE WOODS-SAXON EN EL MODELO DE PARTÍCULA SIMPLE DEL DECAIMIENTO ALFA

En este apéndice se analiza la dependencia del modelo de decaimiento alfa de dos cuerpos con los parámetros  $a$  y  $r_0$  del potencial de Woods-Saxon. Este análisis en el Polonio-212 se hace siguiendo los resultados de la Ref. [154].

En la referencia [154], se realiza un estudio meticuloso de la dependencia del ancho  $\Gamma^{\text{SP}}$  con la difusividad  $a$  del potencial de campo medio. Allí, se fija el valor del radio reducido en  $r_0 = 1.315$  fm, y se analiza el comportamiento para valores de  $a$  entre 0.6 fm y 0.8 fm. Se establece, que la minimización del  $\chi^2$  para el ajuste de la sección eficaz experimental se da con  $a = 0.65$  fm. Independientemente de esto, en dicha referencia se afirma que lo que se puede establecer es un límite inferior del  $\Gamma^{\text{SP}}$ , y que la forma funcional de este es exponencial. Además, tengamos en cuenta que para realizar los ajustes, se asume un error del 10 % en los datos experimentales.



(a) Valores obtenidos para el ancho  $\Gamma^{\text{SP}}$  para diferentes  $(r_0, a)$ , donde la cruz roja marca el valor obtenido con los parámetros de la Ref. [154].



(b) Valores obtenidos para el ancho  $\Gamma^{\text{SP}}$  para diferentes  $a$  habiendo fijado  $r_0 = 1.315$  fm, donde la cruz roja marca el valor obtenido con el parámetro  $a = 0.65$  fm de la Ref. [154]

Figura I.1: Análisis de la dependencia del ancho  $\Gamma^{\text{SP}}$  con los parámetros  $(r_0, a)$  del potencial de Woods-Saxon utilizado para la interacción  $\alpha + A$ .

Por todo esto, a continuación presentaremos nuestro análisis de la dependencia de  $\Gamma^{\text{SP}}$  con el radio reducido y la difusividad del potencial de Woods-Saxon utilizado para describir la energía de una partícula alfa en el estado fundamental sobre el carozo  $^{208}\text{Pb}$ . Para esto, para cada par  $(r_0, a)$ , se ajustó la intensidad  $V_0$  para describir la energía  $\varepsilon^\alpha(\text{gs}) = 8.986$  MeV [1]. En la Figura I.1.a presentamos los

resultados obtenidos, donde vemos claramente que el comportamiento es exponencial, por lo que leves movimientos de los parámetros  $r_0$  y  $a$  implican grandes cambios en  $\Gamma^{\text{SP}}$ . En la Figura I.1b, mostramos también el comportamiento respecto a la difusividad, habiendo fijado  $r_0$  al valor de la Ref. [154], donde está marcado el valor correspondiente a los parámetros de dicha referencia. Allí vemos que en un rango  $a \in (0.6, 0.8)$  fm, pasamos de un  $\Gamma^{\text{SP}} = 0.076 \times 10^{-12}$  MeV a un valor de  $\Gamma^{\text{SP}} = 0.524 \times 10^{-12}$  MeV. Mientras que para los valores  $(r_0, a)$  de Ref. [154], obtenemos  $\Gamma_{[154]}^{\text{SP}} = 0.123 \times 10^{-12}$  MeV.

Esto motiva a que presentemos nuestros resultados entre máximos y mínimos, teniendo en cuenta que la condición que pondremos sobre el  $a$ : buscaremos que el  $\chi^2$  que se observa en la Fig. 1 de la Ref. [154] sea menor a 2. Esto implica, que  $a_{\text{max}} = 0.75$  fm y  $a_{\text{min}} = 0.6$  fm (Otras referencias bibliográficas también utilizan  $a = 0.6$  fm [3, 158]). Notemos que los extremos tienen un  $\chi^2 = 2$ , mientras que el ideal tiene un  $\chi^2 \simeq 1.5$ , es decir, el ajuste en los extremos es un  $\sim 30\%$  peor. La notación que aplicaremos entonces será:

$$\Gamma^{\text{SP}} = \left( \Gamma_{a=0.65 \text{ fm}}^{\text{SP}} \begin{matrix} +\text{max} \\ -\text{min} \end{matrix} \right) \rightarrow T_{1/2}^{\text{SP}} = \left( T_{1/2, a=0.65 \text{ fm}}^{\text{SP}} \begin{matrix} +\text{max} \\ -\text{min} \end{matrix} \right) \quad (\text{I.1})$$

## **BIBLIOGRAFÍA**

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] “National Nuclear Data Center, information extracted from the NuDat database, <https://www.nndc.bnl.gov/nudat3/>,” .
- [2] B. Bengtson, H. L. Nielsen, N. Rud, and K. Wilsky, *Nuclear Physics A* **378**, 1 (1982).
- [3] T. Fliessbach, H. J. Mang, and J. O. Rasmussen, *Physical Review C* **13**, 1318 (1976).
- [4] W. R. Dixon, R. S. Storey, and J. J. Simpson, *Physical Review C* **18**, 2731 (1978).
- [5] P. Manakos, T. Fliessbach, and H. Walliser, *Phys. Rev. C* **27**, 2930 (1983).
- [6] R. D. Macfarlane and A. Siivola, *Phys. Rev. Lett.* **14**, 114 (1965).
- [7] P. Mohr, *Eur. Phys. J. A* **31**, 23 (2007).
- [8] M. A. Souza, H. Miyake, T. Borello-Lewin, C. A. da Rocha, and C. Frajuca, *Physics Letters, Section B: Nuclear, Elementary Particle and High-Energy Physics* **793**, 8 (2019).
- [9] H. J. Rose and G. A. Jones, *Nature* **307**, 245 (1984).
- [10] D. Aleksandrov, A. Belyatskij, Yu.A. Glukhov, E.Yu. Nkol'skij, B. Novatskij, A. Ogloblin, and D. Stepanov, *Pis'ma v Zhurnal Eksperimental'noj i Teoreticheskoy Fiziki Nablyudenie Spontanogo Vyleta Yader  $^{14}\text{C}$  Iz  $^{223}\text{Ra}$* , **40**, 152 (1984).
- [11] D. Rudolph, U. Forsberg, P. Golubev, L. G. Sarmiento, A. Yakushev, L.-L. Andersson, A. Di Nitto, Ch. E. Düllmann, J. M. Gates, K. E. Gregorich, C. J. Gross, F. P. Heßberger, R.-D. Herzberg, J. Khuyagbaatar, J. V. Kratz, K. Rykaczewski, M. Schädel, S. Åberg, D. Ackermann, M. Block, H. Brand, B. G. Carlsson, D. Cox, X. Derkx, K. Eberhardt, J. Even, C. Fahlander, J. Gerl, E. Jäger, B. Kindler, J. Krier, I. Kojouharov, N. Kurz, B. Lommel, A. Mistry, C. Mokry, H. Nitsche, J. P. Omtvedt, P. Papadakis, I. Ragnarsson, J. Runke, H. Schaffner, B. Schausten, P. Thörle-Pospiech, T. Torres, T. Traut, N. Trautmann, A. Türler, A. Ward, D. E. Ward, and N. Wiehl, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 112502 (2013).
- [12] “Système de Production d'Ions Radioactifs en Ligne de 2e generation (SPIRAL2), GANIL, Francia,” .
- [13] “Radioactive Isotope Beam Factory (RIBF), RIKEN, Japon,” .
- [14] “High Intensity and Energy Upgrade (HIE-ISOLDE), CERN, Suiza,” .
- [15] “Facility for Antiproton and Ion Research (FAIR), GSI, Alemania,” .

- [16] Z. Janas, C. Mazzocchi, L. Batist, A. Blazhev, M. Górska, M. Kavatsyuk, O. Kavatsyuk, R. Kirchner, A. Korgul, M. La Commara, K. Miernik, I. Mukha, A. Płochocki, E. Roeckl, and K. Schmidt, *Eur. Phys. J. A* **23**, 197 (2005).
- [17] S. N. Liddick, R. Grzywacz, C. Mazzocchi, R. D. Page, K. P. Rykaczewski, J. C. Batchelder, C. R. Bingham, I. G. Darby, G. Drafta, C. Goodin, C. J. Gross, J. H. Hamilton, A. A. Hecht, J. K. Hwang, S. Ilyushkin, D. T. Joss, A. Korgul, W. Królas, K. Lagergren, K. Li, M. N. Tantawy, J. Thomson, and J. A. Winger, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 082501 (2006).
- [18] K. Auranen, D. Seweryniak, M. Albers, A. D. Ayangeakaa, S. Bottoni, M. P. Carpenter, C. J. Chiara, P. Copp, H. M. David, D. T. Doherty, J. Harker, C. R. Hoffman, R. V. Janssens, T. L. Khoo, S. A. Kuvin, T. Lauritsen, G. Lotay, A. M. Rogers, J. Sethi, C. Scholey, R. Talwar, W. B. Walters, P. J. Woods, and S. Zhu, *Physical Review Letters* **121**, 182501 (2018).
- [19] Y. Xiao, S. Go, R. Grzywacz, R. Orlandi, A. N. Andreyev, M. Asai, M. A. Bentley, G. De Angelis, C. J. Gross, P. Hausladen, K. Hirose, S. Hofmann, H. Ikezoe, D. G. Jenkins, B. Kindler, R. Léguillon, B. Lommel, H. Makii, C. Mazzocchi, K. Nishio, P. Parkhurst, S. V. Paulauskas, C. M. Petrache, K. P. Rykaczewski, T. K. Sato, J. Smallcombe, A. Toyoshima, K. Tsukada, K. Vaigneur, and R. Wadsworth, *Physical Review C* **100**, 034315 (2019).
- [20] I. Tonzuka and A. Arima, *Nuclear Physics A* **323**, 45 (1979).
- [21] G. Dodig-Crnković, F. A. Janouch, R. J. Liotta, and L. J. Sibanda, *Nuclear Physics A* **444**, 419 (1985).
- [22] G. Dodig-Crnkovic, F. A. Janouch, and R. J. Liotta, *Nuclear Physics A* **501**, 533 (1989).
- [23] N. K. Glendenning and K. Harada, *Nuclear Physics* **72**, 481 (1965).
- [24] T. Steinmayer, W. Sünkel, and K. Wildermuth, *Physics Letters B* **125**, 437 (1983).
- [25] N. Michel and M. Płoszajczak, *Gamow Shell Model: The Unified Theory of Nuclear Structure and Reactions*, Lecture Notes in Physics, Vol. 983 (Springer International Publishing, Cham, 2021).
- [26] Charles Severance, *High Performance Computing* (Rice University, Houston, Texas, 2010).
- [27] “Centro de Computación de Alto Desempeño de la Universidad Nacional de Córdoba, Argentina,” .
- [28] “Centro de Cómputos de Alto Rendimiento del CCT-Rosario, CONICET,” .
- [29] E. C. Simpson, *J. Phys.: Conf. Ser.* **1643**, 012168 (2020).
- [30] T. Berggren, *Nuclear Physics A* **109**, 265 (1968).
- [31] G. Sagnac, *J. Phys. Theor. Appl.* **5**, 193 (1896).
- [32] G. Gamow, *My World Line: An Informal Autobiography* (Viking Press, 1970).

- [33] G. Gamow, *Zeitschrift für Physik A: Atoms and Nuclei* **51**, 204 (1928).
- [34] R. W. Gurney and E. U. Condon, *Nature* **122**, 439 (1928).
- [35] K. Siegbahn, *Alpha-, Beta- and Gamma-ray Spectroscopy* (North-Holland Publishing Company, 1965).
- [36] H. A. Bethe, *Reviews of Modern Physics* **9**, 69 (1937).
- [37] G. Breit and E. Wigner, *Phys. Rev.* **49**, 519 (1936).
- [38] R. G. Newton, *Scattering Theory of Waves and Particles* (Springer, Berlin, Heidelberg, 1982).
- [39] R. G. Thomas, *Progress of Theoretical Physics* **12**, 253 (1954).
- [40] A. M. Lane and R. G. Thomas, *Reviews of Modern Physics* **30**, 257 (1958).
- [41] M. G. Mayer, *Phys. Rev.* **78**, 16 (1950).
- [42] M. G. Mayer, *Phys. Rev.* **78**, 22 (1950).
- [43] O. Haxel, J. H. D. Jensen, and H. E. Suess, *Phys. Rev.* **75**, 1766 (1949).
- [44] H. J. Mang, *Z. Physik* **148**, 582 (1957).
- [45] H. D. Zeh, *Zeitschrift für Physik A: Atoms and Nuclei* **175**, 490 (1963).
- [46] H. J. Mang, *Annual Review of Nuclear Science* **14**, 1 (1964).
- [47] A. Bohr, B. R. Mottelson, and D. Pines, *Phys. Rev.* **110**, 936 (1958).
- [48] K. Harada, *Progress of Theoretical Physics* **26**, 667 (1961).
- [49] H. J. Mang and J. O. Rasmussen, *Kgl. Danske Videnskab. Selskab, Mat.-fys. Skrifter* **Vol: 2: No. 3** (1962).
- [50] V. G. Soloviev, *Physics Letters* **1**, 202 (1962).
- [51] J. O. Rasmussen, *Nuclear Physics* **44**, 93 (1963).
- [52] F. A. Janouch and R. J. Liotta, *Physics Letters B* **82**, 329 (1979).
- [53] F. A. Janouch and R. J. Liotta, *Physical Review C* **27**, 896 (1983).
- [54] K. Varga, R. G. Lovas, and R. J. Liotta, *Physical Review Letters* **69**, 37 (1992).
- [55] G. Dodig-Crnkovic, F. A. Janouch, R. J. Liotta, and Z. Xiaolin, *Physica Scripta* **37**, 523 (1988).
- [56] S. M. Lenzi, O. Dragun, E. E. Maqueda, R. J. Liotta, and T. Vertse, *Physical Review C* **48**, 1463 (1993).

- [57] P. Curutchet, T. Vertse, and R. J. Liotta, *Physical Review C* **39**, 1020 (1989).
- [58] T. Fliessbach, *Zeitschrift für Physik A: Atoms and Nuclei* **272**, 39 (1975).
- [59] T. Fliessbach, *Zeitschrift für Physik A: Atoms and Nuclei* **158**, 151 (1976).
- [60] T. Fliessbach and H. J. Mang, *Nuclear Physics A* **263**, 75 (1976).
- [61] T. Fliessbach, *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* **2**, 531 (1976).
- [62] K. Varga, R. G. Lovas, and R. J. Liotta, *Nuclear Physics A* **550**, 421 (1992).
- [63] R. G. Lovas, R. J. Liotta, A. Insolia, K. Varga, and D. S. Delion, *Physics Reports* **294**, 265 (1998).
- [64] D. S. Delion and J. Suhonen, *Physical Review C* **61**, 12 (2000).
- [65] R. M. Id Betan and W. Nazarewicz, *Physical Review C* **86** (2012), 10.1103/PhysRevC.86.034338, arxiv:1208.1422v1 .
- [66] A. Arima and S. Yoshida, *Physics Letters B* **40** (1972), 10.1016/0370-2693(72)90269-9.
- [67] R. D. Lawson, *Theory of the Nuclear Shell Model* (Clarendon Press, Oxford, 1980).
- [68] J.-L. Basdevant, M. Spiro, and J. Rich, *Fundamentals In Nuclear Physics* (Springer-Verlag, New York, 2005).
- [69] J. Suhonen, *From Nucleons to Nucleus*, edited by W. Beiglböck, J. P. Eckmann, H. Grosse, M. Loss, S. Smirnov, L. Takhtajan, and J. Yngvason, *Theoretical and Mathematical Physics* (Springer, Berlin, Heidelberg, 2007).
- [70] R. D. Woods and D. S. Saxon, *Phys. Rev.* **95**, 577 (1954).
- [71] A. Bohr and B. R. Mottelson, *Nuclear Structure* (World Scientific, 1998).
- [72] A. J. F. Siegert, *Phys. Rev.* **56**, 750 (1939).
- [73] A. C. Dassie, F. Gerdau, F. J. Gonzalez, M. Moyano, and R. M. Id Betan, *American Journal of Physics* **118**, 1 (2021), arxiv:2110.14681v1 .
- [74] T. Berggren and P. Lind, *Phys. Rev. C* **47**, 768 (1993).
- [75] R. M. Id Betan, R. J. Liotta, N. Sandulescu, and T. Vertse, *Phys. Rev. C* **67**, 014322 (2003).
- [76] Ya. B. Zel'Dovich, *Journal of Experimental and Theoretical Physics* **12**, 542 (1961).
- [77] R. J. Liotta, E. Maglione, N. Sandulescu, and T. Vertse, *Physics Letters B* **367**, 1 (1996).
- [78] P. Ring and P. Schuck, *The Nuclear Many-Body Problem*, *Theoretical and Mathematical Physics* (Springer Berlin, Heidelberg, 2004).

- [79] D. M. Brink, *Nuclear Forces*, 154, Vol. 2 (Pergamon Press, New York, 1965).
- [80] H. Noya, A. Arima, and H. Rorie, *Progress of Theoretical Physics Supplement* **8**, 33 (1958).
- [81] R. Id Betan, R. J. Liotta, N. Sandulescu, and T. Vertse, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 042501 (2002).
- [82] N. Michel, W. Nazarewicz, M. Płoszajczak, and K. Bennaceur, *Physical Review Letters* **89**, 3 (2002), arxiv:nucl-th/0201073 .
- [83] S. Affranchino and R. M. Id Betan, *Phys. Rev. C* **102**, 044330 (2020).
- [84] R. D. Lawson and J. L. Uretsky, *Phys. Rev.* **108**, 1300 (1957).
- [85] A. de-Shalit, *Phys. Rev.* **122**, 1530 (1961).
- [86] N. K. Glendenning, *Physical Review* **127**, 923 (1962).
- [87] J. A. Shah and M. Danos, *Physical Review* **183**, 899 (1969).
- [88] A. Arima and I. Hamamoto, *Annual Review of Nuclear Science* **21**, 55 (1971).
- [89] G. H. Herling and T. T. Kuo, *Nuclear Physics A* **181**, 113 (1972).
- [90] C. M. Ko, T. T. Kuo, and J. B. McGrory, *Physical Review C* **8**, 2379 (1973).
- [91] W. W. True and C. W. Ma, *Physical Review C* **9**, 2275 (1974).
- [92] D. Strottman, *Physical Review C* **20**, 1150 (1979).
- [93] A. Arima and S. Yoshida, *Nuclear Physics A* **219**, 475 (1974).
- [94] D. S. Delion, *Theory of Particle and Cluster Emission*, Lecture Notes in Physics, Vol. 819 (Springer, Berlin, Heidelberg, 2010).
- [95] J. Humblet and L. Rosenfeld, *Nuclear Physics* **26**, 529 (1961).
- [96] B. Barmore, A. T. Kruppa, W. Nazarewicz, and T. Vertse, *Phys. Rev. C* **62**, 054315 (2000).
- [97] A. T. Kruppa and W. Nazarewicz, *Phys. Rev. C* **69**, 054311 (2004).
- [98] K. Wildermuth and Y. C. Tang, *Unified Theory of the Nucleus* (Academic Press, New York, 1977).
- [99] A. Arima, in *AIP Conference Proceedings*, Vol. 47 (AIP Publishing, 1978) pp. 1–34.
- [100] I. J. Thompson and F. M. Nunes, *Nuclear Reactions for Astrophysics: Principles, Calculation and Applications of Low-Energy Reactions* (Cambridge University Press, Cambridge, 2009).
- [101] A. M. Lane, *Rev. Mod. Phys.* **32**, 519 (1960).
- [102] H. J. Mang, *Physical Review* **119**, 1069 (1960).

- [103] G. Racah, *Phys. Rev.* **62**, 438 (1942).
- [104] S. Saito, *Progress of Theoretical Physics* **41**, 705 (1969).
- [105] T. Vertse, K. F. Pál, and Z. Balogh, *Computer Physics Communications* **27**, 309 (1982).
- [106] L. G. Ixaru, M. Rizea, and T. Vertse, *Computer Physics Communications* **85**, 217 (1995).
- [107] R. Chandra, L. Dagum, D. Kohr, R. Menon, D. Maydan, and J. McDonald, *Parallel programming in OpenMP* (Morgan kaufmann, 2001).
- [108] I. J. Thompson and A. R. Barnett, *Computer Physics Communications* **36**, 363 (1985).
- [109] Message Passing Interface Forum, *MPI: A Message-Passing Interface Standard Version 4.0* (2021).
- [110] J. M. Hill, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **44**, 440 (1948).
- [111] M. Matsuzaki, S. Tagami, and M. Yahiro, *Physical Review C* **104**, 1 (2021).
- [112] A. B. Jones and B. A. Brown, *Physical Review C* **90**, 1 (2014).
- [113] N. Schwierz, I. Wiedenhover, and A. Volya, *arXiv* **32306** (2007), arxiv:0709.3525 .
- [114] D. W. Marquardt, *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics* **11**, 431 (1963), 2098941 .
- [115] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing*, 3rd ed. (Cambridge University Press, USA, 2007).
- [116] Y. E. Kim and J. O. Rasmussen, *Nuclear Physics* **47**, 184 (1963).
- [117] P. Lemmert, L. J. Alquist, R. Fass, H. Wollnik, D. Hirdes, H. Jungclas, R. Brandt, D. Schardt, and J. Zylicz, *Zeitschrift für Physik A: Atoms and Nuclei* **298**, 311 (1980).
- [118] L.-S. The, D. D. Clayton, L. Jin, and B. S. Meyer, *ApJ* **504**, 500 (1998).
- [119] H. Nassar, M. Paul, I. Ahmad, Y. Ben-Dov, J. Caggiano, S. Ghelberg, S. Goriely, J. P. Greene, M. Hass, A. Heger, A. Heinz, D. J. Henderson, R. V. F. Janssens, C. L. Jiang, Y. Kashiv, B. S. Nara Singh, A. Ofan, R. C. Pardo, T. Pennington, K. E. Rehm, G. Savard, R. Scott, and R. Vondrasek, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 041102 (2006).
- [120] C. Vockenhuber, C. O. Ouellet, L.-S. The, L. Buchmann, J. Caggiano, A. A. Chen, H. Crawford, J. M. D’Auria, B. Davids, L. Fogarty, D. Frekers, A. Hussein, D. A. Hutcheon, W. Kutschera, A. M. Laird, R. Lewis, E. O’Connor, D. Ottewell, M. Paul, M. M. Pavan, J. Pearson, C. Ruiz, G. Ruprecht, M. Trinczek, B. Wales, and A. Wallner, *Phys. Rev. C* **76**, 035801 (2007).

- [121] A. C. Larsen, S. Goriely, A. Bürger, M. Guttormsen, A. Gørgen, S. Harissopulos, M. Kmiecik, T. Konstantinopoulos, A. Lagoyannis, T. Lönnroth, K. Mazurek, M. Norrby, H. T. Nyhus, G. Perdikakis, A. Schiller, S. Siem, A. Spyrou, N. U. H. Syed, H. K. Toft, G. M. Tveten, and A. Voinov, *Phys. Rev. C* **85**, 014320 (2012).
- [122] J. Zenihiro, H. Sakaguchi, S. Terashima, T. Uesaka, G. Hagen, M. Itoh, T. Murakami, Y. Nakatsugawa, T. Ohnishi, H. Sagawa, H. Takeda, M. Uchida, H. P. Yoshida, S. Yoshida, and M. Yosoi, *arXiv* , 1 (2018), arxiv:1810.11796 .
- [123] Y. Uozumi, N. Kikuzawa, T. Sakae, M. Matoba, K. Kinoshita, S. Sajima, H. Ijiri, N. Koori, M. Nakano, and T. Maki, *Phys. Rev. C* **50**, 263 (1994).
- [124] A. C. Dassie and R. M. Id Betan, *Physical Review C* **102**, 1 (2020).
- [125] M. Wang, W. J. Huang, F. G. Kondev, G. Audi, and S. Naimi, *Chinese Physics C* **45** (2021), 10.1088/1674-1137/abddaf.
- [126] S. Sukhoruchkin and Z. Soroko, in *Nuclei with  $Z = 1 - 54$* , Vol. 22A, edited by W. Martienssen and H. Schopper (Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2009) pp. 6999–7000.
- [127] E. Comay, I. Kelson, and A. Zidon, *Atomic Data and Nuclear Data Tables* **39**, 235 (1988).
- [128] V. I. Isakov and K. I. Erokhina, *Physics of Atomic Nuclei* **65**, 1431 (2002).
- [129] P. Möller, M. R. Mumpower, T. Kawano, and W. D. Myers, *Atomic Data and Nuclear Data Tables* **125**, 1 (2019).
- [130] J. Dudek, Z. Szymański, T. Werner, A. Faessler, and C. Lima, *Phys. Rev. C* **26**, 1712 (1982).
- [131] N. Newby and E. J. Konopinski, *Physical Review* **115** (1959), 10.1103/PhysRev.115.434.
- [132] S. Sukhoruchkin and Z. Soroko, in *Nuclei with  $Z = 1 - 54$* , Vol. 22A, edited by W. Martienssen and H. Schopper (Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2009) pp. 7205–7206.
- [133] P. Moller, J. R. Nix, W. D. Myers, and W. J. Swiatecki, *Atomic Data and Nuclear Data Tables* **59**, 185 (1995).
- [134] I. N. Borzov and S. Goriely, *Phys. Rev. C* **62**, 035501 (2000).
- [135] L. Geng, H. Toki, S. Sugimoto, and J. Meng, *Progress of Theoretical Physics* **110**, 921 (2003).
- [136] L. Geng, H. Toki, and J. Meng, *Progress of Theoretical Physics* **113**, 785 (2005).
- [137] S. Goriely, M. Samyn, and J. M. Pearson, *Phys. Rev. C* **75**, 064312 (2007).
- [138] M. Samyn, S. Goriely, M. Bender, and J. M. Pearson, *Phys. Rev. C* **70**, 044309 (2004).
- [139] J. Duflo and A. Zuker, *Phys. Rev. C* **52**, R23 (1995).

- [140] J. Barea, A. Frank, J. G. Hirsch, P. V. Isacker, S. Pittel, and V. Velázquez, *Phys. Rev. C* **77**, 041304 (2008).
- [141] H. Koura, M. Uno, T. Tachibana, and M. Yamada, *Nuclear Physics A* **674**, 47 (2000).
- [142] A. C. Dassie and R. M. Id Betan, *Phys. Rev. C* **108**, 044314 (2023).
- [143] W. R. Dixon, R. S. Storey, and J. J. Simpson, *Physical Review C* **15** (1977), 10.1103/PhysRevC.15.1896.
- [144] E. Aprile, J. Aalbers, F. Agostini, M. Alfonsi, F. D. Amaro, M. Anthony, F. Arneodo, P. Barrow, L. Baudis, B. Bauermeister, M. L. Benabderrahmane, T. Berger, P. A. Breur, A. Brown, E. Brown, S. Bruenner, G. Bruno, R. Budnik, L. Bütikofer, J. Calvén, J. M. R. Cardoso, M. Cervantes, D. Cichon, D. Coderre, A. P. Colijn, J. Conrad, J. P. Cussonneau, M. P. Decowski, P. de Perio, P. Di Gangi, A. Di Giovanni, S. Diglio, E. Duchovni, G. Eurin, J. Fei, A. D. Ferella, A. Fieguth, D. Franco, W. Fulgione, A. Gallo Rosso, M. Galloway, F. Gao, M. Garbini, C. Geis, L. W. Goetzke, L. Grandi, Z. Greene, C. Grignon, C. Hasterok, E. Hogenbirk, R. Itay, B. Kaminsky, G. Kessler, A. Kish, H. Landsman, R. F. Lang, D. Lellouch, L. Levinson, M. Le Calloch, Q. Lin, S. Lindemann, M. Lindner, J. A. M. Lopes, A. Manfredini, I. Maris, T. Marrodán Undagoitia, J. Masbou, F. V. Massoli, D. Masson, D. Mayani, Y. Meng, M. Messina, K. Micheneau, B. Miguez, A. Molinario, M. Murra, J. Naganoma, K. Ni, U. Oberlack, S. E. A. Orrigo, P. Pakarha, B. Pelssers, R. Persiani, F. Piastra, J. Pienaar, M.-C. Piro, G. Plante, N. Priel, L. Rauch, S. Reichard, C. Reuter, A. Rizzo, S. Rosendahl, N. Rupp, R. Saldanha, J. M. F. dos Santos, G. Sartorelli, M. Scheibelhut, S. Schindler, J. Schreiner, M. Schumann, L. Scotto Lavina, M. Selvi, P. Shagin, E. Shockley, M. Silva, H. Simgen, M. v. Sivers, A. Stein, D. Thers, A. Tiseni, G. Trincherro, C. Tunnell, N. Upole, H. Wang, Y. Wei, C. Weinheimer, J. Wulf, J. Ye, and Y. Zhang, *Phys. Rev. D* **95**, 072008 (2017).
- [145] G. Bellini, J. Benziger, D. Bick, G. Bonfini, D. Bravo, M. Buizza Avanzini, B. Caccianiga, L. Cadonati, F. Calaprice, C. Carraro, P. Cavalcante, A. Chavarria, A. Chepurinov, V. Chubakov, D. D'Angelo, S. Davini, A. Derbin, A. Etenko, K. Fomenko, D. Franco, C. Galbiati, S. Gazzana, C. Ghiano, M. Giammarchi, M. Göger-Neff, A. Goretti, L. Grandi, E. Guardincerri, S. Hardy, A. Ianni, A. Ianni, V. Kobaychev, D. Korablev, G. Korga, Y. Koshio, D. Kryn, M. Laubenstein, T. Lewke, M. Lissia, E. Litvinovich, B. Loer, F. Lombardi, P. Lombardi, L. Ludhova, I. Machulin, S. Manecki, W. Maneschg, G. Manuzio, Q. Meindl, E. Meroni, L. Miramonti, M. Misiaszek, D. Montanari, P. Mosteiro, F. Mantovani, V. Muratova, S. Nisi, L. Oberauer, M. Obolensky, F. Ortica, K. Otis, M. Pallavicini, L. Papp, L. Perasso, S. Perasso, A. Pocar, G. Ranucci, A. Razeto, A. Re, A. Romani, N. Rossi, A. Sabelnikov, R. Saldanha, C. Salvo, S. Schönert, H. Simgen, M. Skorokhvatov, O. Smirnov, A. Sotnikov, S. Sukhotin, Y. Suvorov, R. Tartaglia, G. Testera, R. B. Vogelaar, F. von Feilitzsch, J. Winter, M. Wojcik, A. Wright, M. Wurm, G. Xhixha, J. Xu, O. Zaimidoroga, S. Zavatarelli, and G. Zuzel, *European Physical Journal A* **49**, 1 (2013), arxiv:1212.1332 .
- [146] P. Belli, R. Bernabei, F. Cappella, V. Caracciolo, R. Cerulli, F. A. Danevich, A. Di Marco, A. Incicchitti, D. V. Poda, O. G. Polischuk, and V. I. Tretyak, *European Physical Journal A* **50** (2014), 10.1140/epja/i2014-14134-6.

- [147] D. Frekers, H. Eickhoff, H. Löhner, K. Poppensieker, R. Santo, and C. Wiezorek, *Z Physik A* **276**, 317 (1976).
- [148] D. Frekers, R. Santo, and K. Langanke, *Nuclear Physics A* **394**, 189 (1983).
- [149] T. Yamaya, S. Oh-Ami, M. Fujiwara, T. Itahashi, K. Katori, M. Tosaki, S. Kato, S. Hatori, and S. Ohkubo, *Physical Review C* **42**, 1935 (1990).
- [150] K. H. Bhatt and J. B. McGrory, *Phys. Rev. C* **3**, 2293 (1971).
- [151] T. Motoba and K. Itonaga, *Progress of Theoretical Physics Supplement* **65**, 136 (1979).
- [152] A. Poves and A. Zuker, *Physics Reports* **70**, 235 (1981).
- [153] K. Itonaga, *Progress of Theoretical Physics* **66**, 2103 (1981).
- [154] R. M. DeVries, J. S. Lilley, and M. A. Franey, *Physical Review Letters* **37** (1976), 10.1103/PhysRevLett.37.481.
- [155] T. Yamaya, S. Ohkubo, S. Okabe, and M. Fujiwara, *Phys. Rev. C* **47**, 2389 (1993).
- [156] C. Xu and Z. Ren, *Physical Review C* **74**, 037302 (2006).
- [157] S. Okabe and T. Fliessbach, *Physics Letters B* **144**, 5 (1984).
- [158] G. Igo, *Phys. Rev.* **115**, 1665 (1959).
- [159] M. Patial, R. J. Liotta, and R. Wyss, *Physical Review C* **93**, 054326 (2016).
- [160] A. DeShalit and H. Feshbach, *Theoretical Nuclear Physics Volume I Nuclear Structure* (John Wiley and Sons, Inc, United States, 1974).
- [161] P. Fröbrich and R. Lipperheide, *Theory of Nuclear Reactions*, Oxford Studies in Nuclear Physics (Oxford University Press, Oxford, New York, 1996).
- [162] N. Stolterfoht, R. D. DuBois, and R. D. Rivarola, *Electron Emission in Heavy Ion-Atom Collisions*, edited by J. P. Toennies, G. Ecker, P. Lambropoulos, I. I. Sobel'man, H. Walther, and H. K. V. Lotsch, Springer Series on Atomic, Optical, and Plasma Physics, Vol. 20 (Springer, Berlin, Heidelberg, 1997).
- [163] A. Messiah, *Quantum Mechanics* (Dover Publications, Inc., 1962).
- [164] A. Jeffrey and D. Zwillinger, *Table of Integrals, Series, and Products*, 7th ed. (Academic Press, 2007).
- [165] N. K. Glendenning, *Physical Review* **114**, 1297 (1959).
- [166] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.*, Vol. 20 (JSTOR, 1966).

- [167] Y. E. Kim, *Physical Review* **131** (1963), 10.1103/PhysRev.131.1712.
- [168] G. A. Miller and A. Schwenk, *Physical Review C* **78**, 1 (2008), arxiv:0805.0603 .
- [169] G. C. Wick, *Phys. Rev.* **80**, 268 (1950).
- [170] A. de-Shalit and I. Talmi, *Nuclear Shell Theory* (Academic Press, 1963).
- [171] J. Eichler and H. J. Mang, *Zeitschrift für Physik A: Atoms and Nuclei* **183**, 321 (1965).
- [172] D. Marques, H. Duarte, A. Ilic, L. Sousa, R. Belenov, P. Thierry, and Z. A. Matveev, in *2017 International Conference on High Performance Computing* (IEEE, 2017).
- [173] A. C. Dassie and R. M. Id Betan, *ANALES AFA* **34**, 33 (2023).

## PUBLICACIONES EN REVISTAS CIENTÍFICAS Y CONFERENCIAS

A continuación, se detallan las diferentes publicaciones en revistas científicas y sus resúmenes relacionadas al tema de tesis realizadas durante los años 2020 y 2023, organizadas cronológicamente de la más reciente a la más antigua.

“ $\alpha$ -decay form  $^{44}\text{Ti}$ : A study of microscopic cluterization”

A.C. Dassie and R. M. Id Betan

Physical Review C **108**, 044314 (2023) [142]

**Background** Microscopic determination of alpha-decay half-lives requires structure and reaction calculations. The structure part is given by the microscopic distribution of the constituent nucleons, while the relative motion of the product's decay provides the reaction part.

**Purpose** This paper studies the clusterization of the  $0^+$  excited states of  $^{44}\text{Ti}$  arising from the nucleonic degrees of freedom.

**Method** The continuum spectra of proton and neutron are incorporated through the Gamow Shell Model formalism. The alpha-like wave function is calculated in the weak-coupling approximation. Gaussian effective interaction in each pair of nucleons is included.

**Results** The  $0^+$  ground and excited states are compared with experiment and shell model calculations. The wave function amplitudes are obtained and discriminated by their resonant and non-resonant contributions. The influence of a four-body truncated basis is analyzed.

**Conclusions** Inclusion of the continuum spectra produces a gain in the excited states of a few hundred keV of energy. One candidate for alpha decay was identified near the experimental unresolved state  $(0, 2)^+$  of 6.8 MeV excitation energy, with a lower limit for the half-life of  $\approx 0.8$  ns.

“Efecto de la renormalización del factor espectroscópico en el decaimiento del  $^{212}\text{Po}$ ”

A. C. Dassie y R. M. Id Betan

Anales AFA Vol. 34 Nro. 2 (Junio 2023 - Septiembre 2023) 33-37 [173]

En el siguiente trabajo describimos el decaimiento alfa del núcleo  $^{212}\text{Po}$  mediante el formalismo del modelo de capas con estados de energía compleja. Las representaciones de un protón y un neutrón se determinan por un potencial de Woods-Saxon. Para la interacción entre nucleones se utiliza un potencial efectivo con factor de forma Gaussiano dependiente del espín e isoespín. El factor espectroscópico de cuatro nucleones y el ancho de partícula simple son calculados microscópicamente para el decaimiento alfa. Se estudia la estabilidad del protocolo de renormalización del factor espectroscópico, garantizando así su significado físico de probabilidad, y la influencia del mismo sobre el decaimiento alfa calculado. Se observa que la renormalización corrige el tiempo de vida media calculado en un  $\sim 40\%$ , obteniéndose así un valor tres veces mayor al experimental únicamente utilizando los grados de libertad de los nucleones y su interacciones.

“Illustrations of loosely bound and resonant states in atomic nuclei”

A. C. Dassie, F. Gerdau, F. J. Gonzalez, M. Moyano and R. M. Id Betan  
American Journal of Physics **90** (2), February 2022 [73]

Using the one-dimensional potential well with realistic parameters for atomic nuclei, we illustrate the movement of the poles of the  $S$ -matrix, and the transmission coefficient when the well supports an anti-bound state. We calculate the phase shift of the atomic nuclei  ${}^5\text{He}$  using the three-dimensional potential well, and compare it with the experimental one. The paper gives a glance of some of the properties found in realistic loosely and resonant nuclear systems, using equations at the level of undergraduate students.

“Estimate of the location of the neutron drip line for calcium isotopes from an exact Hamiltonian with continuum pair correlations”

A. C. Dassie and R. M. Id Betan  
Physical Review C **102**, 064301 (2023) [124]

**Background** The eastern region of the calcium isotope chain of the nuclei chart is, nowadays, of great activity. The experimental assessment of the limit of stability is of interest to confirm or improve microscopic theoretical models.

**Purpose** The goal of this work is to provide the drip line of the calcium isotopes from the exact solution of the pairing Hamiltonian which incorporate explicitly the correlations with the continuum spectrum of energy.

**Method** The modified Richardson equations, which include correlations with the continuum spectrum of energy modeled by the continuum single particle level density, is used to solve the many-body system. Three models are used, two isospin independent models with core  ${}^{40}\text{Ca}$  and  ${}^{48}\text{Ca}$ , and one isospin dependent model.

**Results** One and two-neutron separation energies and occupation probabilities for bound and continuum states are calculated from the solution of the Richardson equations.

**Conclusions** The one particle drip line is found at the nucleus  ${}^{57}\text{Ca}$ , while the two neutron drip line is found at the nucleus  ${}^{60}\text{Ca}$  from the isospin independent model and at  ${}^{66}\text{Ca}$  from the isospin dependent one.

En el mismo sentido, a continuación nombramos las diferentes charlas o pósteres presentados en reuniones científicas que han sucedido durante los años 2020 y 2023:

1. “Decaimiento alfa en los núcleos  ${}^{212}\text{Po}$  y  ${}^{44}\text{Ti}$ ”  
Charla de División y Póster, RAFA 107, Bariloche, 2022
2. “Decaimiento alfa en los isótopos  ${}^{212}\text{Po}$  y  ${}^{44}\text{Ti}$ ”  
Póster, XVI Jornadas de Ciencias, Tecnología e Innovación, UNR, 2022
3. “Análisis microscópico de la clusterización alfa en los núcleos  ${}^{44}\text{Ti}$  y  ${}^{212}\text{Po}$ ”  
Charla de División, RAFA 106, Virtual, 2021

4. “Estudio de resonancias con aplicaciones en núcleos atómicos”  
Póster, XIV Jornadas de Ciencias, Tecnología e Innovación, UNR, 2020
5. “Determinación microscópica de la línea de goteo de los isótopos del Calcio”  
Charla de División, RAFA 105, Virtual, 2020