



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesina de Licenciatura en Matemática

SUPERFICIES EN EL ESPACIO LORENTZIANO \mathbb{L}^3

Brian Luporini

Directora: Gabriela Ovando

Co-Director: Francisco Vittone

29 de Abril de 2020

Agradecimientos

- A mi mamá y mis hermanos por todo el apoyo que me dieron durante estos años. Sin ellos, hubiera sido imposible que hoy llegue a este punto.
- A Gabriela y Francisco, por darme la oportunidad de hacer esta tesina con ellos, ayudarme cuándo no podía avanzar con algo, por todos sus comentarios tanto matemáticos como de redacción o de LaTeX, por su apoyo general en este trabajo y por confiar en mí para mis estudios de posgrado.
- A Carlos y Francisco, por ser los directores de mi beca doctoral.
- A mis profesores de la facultad por haberme dado una formación de excelencia y al jurado por haberse tomado el trabajo de leer la tesina.
- A todos mis amigos de la infancia, de la secundaria, de la academia baile y de la vida por todos los momentos vividos.
- A mis compañeros de la facultad por hacer que las horas de estudio y cursada fueran tan llevaderos.
- A mis docentes del secundario y a mis profesores de olimpiadas por enseñarme a pensar y disfrutar la matemática.

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	3
1.1. Formas bilineales simétricas	3
1.2. Métricas en espacios vectoriales	5
1.3. Espacios vectoriales lorentzianos	9
1.4. Producto vectorial en el espacio \mathbb{L}^3	12
1.5. Isometrías lorentzianas	15
2. Teoría local de curvas en \mathbb{L}^3	19
2.1. Reparametrización por longitud de arco	19
2.2. Triedro de Frenet-Serret	21
2.3. Curvas luz y curvas con curvatura lorentziana cero	24
3. Primera forma fundamental lorentziana	27
3.1. Primera forma fundamental	27
3.2. Normal unitario	36
3.3. Superficies degeneradas	38
3.4. Aplicación de Gauss y orientación	41
4. Segunda forma fundamental lorentziana	49
4.1. Operador de forma	49
4.2. Curvaturas gaussiana y media	55
4.3. Direcciones y curvaturas principales	58
5. Geometría intrínseca	65
5.1. Isometrías	65
5.2. Geodésicas y derivada covariante	67
6. Geometría diferencial global	75
6.1. Superficies compactas	75
6.2. Superficies umbilicales	76
6.3. Teorema egregium de Gauss	81
A. Funciones diferenciables y superficies	83
B. Biografías	91
Bibliografía	97

Introducción

A principios del siglo XX, Albert Einstein propuso su teoría de la relatividad especial, construida sobre la geometría lorentziana. Durante la década de 1970, la Geometría pseudo-riemanniana se había convertido en un área de investigación activa en geometría diferencial y sus aplicaciones a una variedad de temas en la matemática y también en la física. Por lo tanto, los investigadores se centraron en la geometría lorentziana, la teoría matemática utilizada en la relatividad general. Desde entonces, ha habido un progreso considerable en el número de trabajos que conectan geometría diferencial, física matemática y relatividad general.

En un primer curso de geometría diferencial se estudian propiedades geométricas locales y globales de curvas y superficies utilizando herramientas del análisis matemático, del álgebra lineal y la topología. Una vez introducidos los conceptos de superficie, plano tangente y campos en superficies, se considera a \mathbb{R}^3 como un espacio vectorial con producto interno, con el producto interno usual, y se induce esta métrica para poder definir y estudiar, por ejemplo, los conceptos de primera y segunda forma fundamental, orientabilidad de superficies, aplicación de Gauss y operador de forma, geodésicas en superficies y derivada covariante.

El objetivo principal de esta tesina es sentar las bases para el estudio de curvas y superficies en el espacio de Lorentz-Minkowski 3-dimensional, que denotaremos \mathbb{L}^3 . Un antecedente de esto es el trabajo en arXiv de R. López, *Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski Space* [L608], en el cual el autor afirma que no hay un libro de texto con un estudio sistemático de curvas y superficies en el espacio de Lorentz-Minkowski como ocurre en el espacio euclidiano. Para abordar su trabajo es necesario tener conceptos básicos de geometría pseudo-riemanniana. Suponemos que los conocimientos del lector no superan un primer curso de geometría diferencial, más específicamente, está motivado en su mayoría por el libro de M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces* [dC17].

La dificultad de estudiar las superficies en el espacio lorentziano \mathbb{L}^3 es que la métrica de \mathbb{L}^3 no es un producto interno. Por lo tanto, la restricción de la métrica de \mathbb{L}^3 a los espacios tangentes de una superficie puede definir una métrica o no. Las superficies donde la restricción de la métrica de \mathbb{L}^3 define una métrica, las llamaremos *superficies no degeneradas*. A su vez, dada una superficie no degenerada S , puede ocurrir que la restricción de la métrica en cada espacio tangente define un producto interno o es una métrica con signo. En el primer caso, diremos que S es una *superficie espacial* y en el segundo diremos que S es una *superficie temporal*. Nos enfocarnos en estudiar la familia de superficies no degeneradas. En particular, en las superficies espaciales vamos a tener resultados geométricos similares a los ya conocidos para las superficies en el espacio euclídeo. En el caso de las superficies temporales veremos que hay algunas diferencias con lo ya conocido. Esto se vera más específicamente en el capítulo 4.

En el primer capítulo introduciremos los espacios vectoriales lorentzianos lo que nos permitirá definir el espacio de *Lorentz-Minkowski 3-dimensional* y definiremos un producto vectorial.

En el segundo capítulo definiremos un triedro de Frenet-Serret en el espacio lorentziano \mathbb{L}^3 .

En el tercer capítulo definiremos la primera forma fundamental y veremos cuándo esto es posible. También definiremos el normal unitario a una superficie y caracterizaremos la noción de orientación en el sentido de la métrica de \mathbb{L}^3 .

En el cuarto capítulo definiremos los conceptos de operador de forma, segunda forma funda-

mental, curvaturas gaussiana y media, direcciones y curvaturas principales.

En el quinto capítulo vamos a definir los conceptos de isometrías, geodésicas, derivada covariante y curvatura geodésica.

En el capítulo final daremos una versión del teorema egregium de Gauss, probaremos que no existen superficies compactas y orientables en \mathbb{L}^3 , y definiremos y clasificaremos las superficies umbilicales.

En el primer apéndice recordamos algunas nociones básicas de la geometría diferencial de superficies.

En el segundo apéndice hay referencias históricas de algunos matemáticos que tuvieron aportes importantes a la geometría diferencial y la geometría pseudo-riemanniana.

Preliminares

En este capítulo recordaremos las definiciones referentes a formas bilineales en un espacio vectorial real (para más detalles se puede consultar [HK71]). Particularmente nos interesan aquellas formas bilineales que resultan no degeneradas y, por lo tanto, definen un producto escalar, lo que nos permite considerar una noción de ortogonalidad. Haremos foco en un producto escalar particular en el espacio \mathbb{R}^3 que nos permitirá definir el espacio de *Lorentz-Minkowsky 3-dimensional*, objeto principal de estudio de este trabajo.

1.1. Formas bilineales simétricas

Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita $n \in \mathbb{N}$. Recordemos que una función $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ es una **forma bilineal en V** si verifica

- $b(u + v, w) = b(u, w) + b(v, w)$,
- $b(u, v + w) = b(u, v) + b(u, w)$,
- $b(\eta u, v) = b(u, \eta v) = \eta b(u, v)$,

para todo $u, v, w \in V$ y $\eta \in \mathbb{R}$. Decimos que una forma bilineal b es **simétrica** si $b(u, v) = b(v, u)$ para todo $u, v \in V$.

Daremos las definiciones de rango y núcleo de una forma bilineal. Luego vamos a construir ejemplos de formas bilineales a partir de las matrices de $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Sean $u_0, v_0 \in V$ dos vectores fijos. Observemos que la aplicación $v \mapsto b(u_0, v)$ define un funcional lineal en V . Como esta aplicación depende de la elección de u_0 , define una transformación lineal de V en su espacio dual V^* que vamos a denotar por

$$L(u_0) = b(u_0, \cdot).$$

Si fijamos la segunda componente, de manera análoga, podemos definir una transformación lineal $R : V \rightarrow V^*$ dada por

$$R(v_0) = b(\cdot, v_0).$$

El siguiente resultado puede verse en [HK71, Teorema 2, Sección 10.1]. Nos permite definir el rango de una forma bilineal como el rango de una de las transformaciones lineales R y L . Recordemos que si $T : V \rightarrow W$ es una transformación lineal, el *rango* de una transformación lineal es la dimensión del conjunto imagen como subespacio de W y lo denotamos por $\text{rank}(T)$.

Lema 1.1. *Sea b una forma bilineal en V . Sean L y R las transformaciones lineales de V en V^* definidas por $(L(u))(v) = b(u, v) = (R(v))(u)$. Entonces $\text{rank}(L) = \text{rank}(R)$.*

El **rango de b** es el rango del funcional lineal R , y lo denotamos con $\text{rank}(b)$.

La siguiente proposición nos permite caracterizar las formas bilineales de rango completo, las cuales vamos a llamar *formas bilineales no degeneradas*. La demostración la omitimos pero puede verse en [HK71, Corolario 2, Sección 10.1].

Proposición 1.2. Sea b es una forma bilineal en V . Son equivalentes:

1. $\text{rank}(b) = n$,
2. para cada vector no nulo $u \in V$, existe un vector $v \in V$ tal que $b(u, v) \neq 0$,
3. para cada vector no nulo $v \in V$, existe un vector $u \in V$ tal que $b(u, v) \neq 0$.

Una forma bilineal b en V es **no degenerada** si satisface alguno de los ítems de la proposición 1.2. En caso contrario se dice **degenerada**.

El subespacio

$$\ker(b) = \{v \in V : b(u, v) = 0 \text{ para todo } u \in V\}$$

se llama **núcleo de b** . La dimensión de $\ker(b)$ se llama **nulidad de b** y la denotamos por $\text{nullity}(b)$.

A continuación, construiremos formas bilineales a partir de matrices reales $n \times n$. Sea $\mathfrak{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base ordenada de V . Podemos escribir a todo vector $u \in V$ de la forma

$$u = \sum_{i=1}^n u_i e_i,$$

donde los coeficientes u_i son números reales. Vamos a denotar con $[u]_{\mathfrak{B}}$ al vector de coeficientes $(u_1, \dots, u_n)^t$.

Sea A una matriz en $\mathbb{R}^{n \times n}$. La función $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$b(u, v) = ([u]_{\mathfrak{B}})^t A [v]_{\mathfrak{B}} \quad (1.1)$$

es una forma bilineal. Más aún, la matriz A es simétrica si y sólo si la forma bilineal b es simétrica.

Por lo tanto, fijada una base ordenada de V , tenemos que toda matriz A en $\mathbb{R}^{n \times n}$ define una forma bilineal. En particular, tenemos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.3. Supongamos que $V = \mathbb{R}^n$ y $\mathfrak{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^n . Si consideramos en (1.1) que A es la matriz identidad en $\mathbb{R}^{n \times n}$, tenemos que

$$b(u, v) = \sum_{i=1}^n u_i v_i$$

es el producto interno usual de \mathbb{R}^n , que vamos a denotar por $b = \langle \cdot, \cdot \rangle_E$.

Ejemplo 1.4. Supongamos que $V = \mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$, y $\mathfrak{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^n . Si consideramos ahora en (1.1) que A es la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

entonces

$$b(u, v) = -u_1 v_1 + \sum_{i=2}^n u_i v_i.$$

En este caso b define una forma bilineal simétrica no degenerada en \mathbb{R}^n que vamos a denotar con $b = \langle \cdot, \cdot \rangle_L$.

Supongamos que b es una forma bilineal arbitraria en V y sea $\mathfrak{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base ordenada de V . Sean $u, v \in V$ dos vectores tales que $[u]_{\mathfrak{B}} = (u_1, \dots, u_n)^t$ y $[v]_{\mathfrak{B}} = (v_1, \dots, v_n)^t$. Entonces

$$b(u, v) = b\left(\sum_{i=1}^n u_i e_i, \sum_{j=1}^n v_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i v_j b(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i v_j b_{ij},$$

donde $b_{ij} := b(e_i, e_j)$ para $i, j = 1, \dots, n$. Luego

$$b(u, v) = (u_1, u_2, \dots, u_n) \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, el valor $b(u, v)$ queda determinado si conocemos los coeficientes b_{ij} para $i, j = 1, \dots, n$. La matriz $[b]_{\mathfrak{B}} = (b_{ij})$ es la **matriz de b en la base ordenada \mathfrak{B}** . Más aún, la forma bilineal b es simétrica si y sólo si $[b]_{\mathfrak{B}}$ es simétrica, y el rango de b coincide con el rango de $[b]_{\mathfrak{B}}$.

Observemos que, fijada una base ordenada en V , tenemos una relación biunívoca entre las formas bilineales en V y las matrices en $\mathbb{R}^{n \times n}$.

1.2. Métricas en espacios vectoriales

Sea (V, b) un espacio vectorial real de dimensión finita n junto con una forma bilineal simétrica b en V . Podemos definir una noción de ortogonalidad en el espacio vectorial V .

Definición 1.5. Sean $u, v \in V$. Decimos que u es **ortogonal** a v si $b(u, v) = 0$, y lo denotamos con $u \perp v$. Decimos que dos conjuntos no vacíos $A, B \subset V$ son **ortogonales** si para todos $u \in A$ y $v \in B$ se verifica $b(u, v) = 0$. Sea $A \subset V$ no vacío, llamamos **subespacio ortogonal a A** al conjunto

$$A^\perp = \{v \in V : b(u, v) = 0 \text{ para todo } u \in A\}.$$

El conjunto A^\perp es un subespacio de V . En efecto, sean $u, v \in A^\perp$ y $\eta \in \mathbb{R}$. Sea $w \in A$, entonces

$$b(\eta u + v, w) = \eta b(u, w) + b(v, w) = 0.$$

Como el $w \in A$ es arbitrario tenemos que $\eta u + v \in A^\perp$. Por lo tanto, A^\perp es un subespacio de V .

El siguiente resultado es conocido como *Ley de inercia de Sylvester* en honor al matemático James Joseph Sylvester, que en 1852 publicó el trabajo [Syl52] en el cual se define la ley de inercia. Esta dice que todas las matrices que representan a una forma cuadrática tienen el mismo número de autovalores positivos, el mismo de autovalores negativos y el mismo de autovalores nulos. La siguiente proposición es un resultado más general cuya demostración la omitimos y puede verse en [HK71, Teoremas 4 y 5, Sección 10.2].

Proposición 1.6 (Teorema de Sylvester). *Sea b una forma bilineal simétrica en V . Entonces existe una base $\mathfrak{B} = \{u_1, \dots, u_\mu, \dots, u_{\mu+\nu}, \dots, u_n\}$ tal que*

$$b(u_i, u_j) = \varepsilon_i \delta_{ij}, \quad \text{donde } \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j \\ 1, & \text{si } i = j \end{cases} \quad \text{y } \varepsilon_i = \begin{cases} 0, & \text{si } i = 1, \dots, \mu \\ -1, & \text{si } i = \mu + 1, \dots, \mu + \nu \\ 1, & \text{si } i = \mu + \nu + 1, \dots, n \end{cases}$$

Matricialmente,

$$[b]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0_{\mu} & & \\ & -I_{\nu} & \\ & & I_{n-(\mu+\nu)} \end{pmatrix}.$$

Más aún, los valores μ y ν no dependen de la base elegida.

Esta proposición nos dice que en un espacio vectorial V munido de una forma bilineal simétrica b , existen bases distinguidas en las cuales la matriz asociada a b es una matriz diagonal.

El subespacio

$$V^0 := \text{span}\{u_1, \dots, u_{\mu}\}$$

verifica la relación $V^0 = V^{\perp}$. Sean

$$V^+ = \text{span}\{u_{\mu+\eta+1}, \dots, u_n\} \quad \text{y} \quad V^- = \text{span}\{u_{\mu+1}, \dots, u_{\mu+\eta}\}.$$

La dimensión de V^+ es la mayor dimensión que puede tener un subespacio de manera que la restricción de b es definida positiva. De igual manera, la dimensión de V^- es la mayor dimensión de un subespacio de manera que la restricción de b sea definida negativa. Más aún,

$$\text{rank}(b) = \dim(V^+) + \dim(V^-).$$

Definición 1.7. Sean V un espacio vectorial y b una forma bilineal simétrica y no degenerada en V .

- Un subconjunto finito $A = \{u_1, \dots, u_k\}$ de V es **ortogonal** si

$$b(u_i, u_j) = 0$$

para todos $i, j = 1, \dots, k$ con $i \neq j$.

- Una **base ortonormal** de V es una base ortogonal $\mathfrak{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de V tal que

$$b(e_i, e_i) = \pm 1$$

para todo $i = 1, \dots, n$.

Observemos que en la proposición 1.6, cuando $\mu = 0$, la base \mathfrak{B} es una base ortonormal de V .

Definición 1.8. Supongamos que b es una forma bilineal no degenerada en V . Sea \mathfrak{B} una base dada como en el Teorema de Sylvester. El valor ν se llama **índice de b** , y el vector $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ se llama **signatura de b** .

Recordemos que, dados dos subespacios W_1 y W_2 de V , decimos que V es *suma directa de W_1 y W_2* , y denotamos $V = W_1 \oplus W_2$, si todo vector $v \in V$ se puede escribir de manera única como

$$v = w_1 + w_2$$

con $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$. Más aún, V es suma directa de W_1 y W_2 si y sólo si se verifica

- $V = W_1 + W_2$,
- $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

En la siguiente proposición tenemos algunas caracterizaciones de los subespacios no degenerados de V .

Proposición 1.9. Sean b una forma bilineal simétrica en V y W un subespacio de V . Se tiene:

1. $V = \{0\}^\perp$,
2. $V^\perp = \{0\}$ si y sólo si b es no degenerada,
3. $\text{rank}(b) = \dim(V) - \dim(V^\perp)$,
4. Si $\dim(W) = m$, entonces $\dim(W^\perp) \geq n - m$. Más aún, si b es no degenerada, entonces $\dim(W^\perp) = n - m$,
5. La restricción de b a W , $b|_W$, es no degenerada si y sólo si $W \cap W^\perp = \{0\}$,
6. La restricción $b|_W$ es no degenerada si y sólo si $V = W \oplus W^\perp$,
7. Si la restricción $b|_W$ es no degenerada, entonces $(W^\perp)^\perp = W$.

Demostración. Dado que $b(u, 0) = 0$ para todo $u \in V$, tenemos el ítem 1. Los ítems 2 y 3 surgen del lema 1.1 y la proposición 1.2.

Veamos el ítem 4. Sea $\mathfrak{B} = \{e_1, \dots, e_m\}$ una base ordenada y ortogonal de W . Consideremos la aplicación $F : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por

$$F(u) = (b(u, e_1), \dots, b(u, e_m))^t.$$

Observemos que F es lineal, pues b es lineal en su primer componente, y

$$\ker(F) = W^\perp.$$

Luego

$$\dim(\ker(F)) = n - \text{rank}(F) \geq n - m.$$

Supongamos que b es no degenerada. Entonces $\{e_1, \dots, e_m\}$ es una base ordenada y ortogonal de W que verifica

$$b(e_i, e_i) \neq 0$$

para todo $i = 1, \dots, m$.

Vamos a probar que F es un epimorfismo. En efecto, sea $(\eta_1, \dots, \eta_m)^t \in \mathbb{R}^m$ y definimos

$$u = \sum_{i=1}^m \frac{\eta_i}{b(e_i, e_i)} e_i.$$

El vector u verifica

$$\begin{aligned} F(u) &= (b(u, e_1), \dots, b(u, e_m))^t = \left(\sum_{i=1}^m \frac{\eta_i}{b(e_i, e_i)} b(e_i, e_1), \dots, \sum_{i=1}^m \frac{\eta_i}{b(e_i, e_i)} b(e_i, e_m) \right)^t \\ &= (\eta_1, \dots, \eta_m)^t. \end{aligned}$$

Luego, F es un epimorfismo. Por lo tanto, $\text{rank}(F) = m$ y

$$\dim(\ker(F)) = n - \text{rank}(F) = n - m.$$

Para probar el ítem 5, vamos a probar que $b|_W$ es degenerada si y sólo si $W \cap W^\perp \neq \{0\}$.

Supongamos que $b|_W$ es degenerada. Por la proposición 1.2, existe $u \in W$ no nulo tal que $b(u, v) = 0$ para todo $v \in W$, esto es $u \in W^\perp$. Luego $u \in W \cap W^\perp$ y u es no nulo.

Supongamos ahora que $W \cap W^\perp \neq \{0\}$. Sea $u \in W \cap W^\perp$ no nulo. Luego, $u \in W$ y $b(u, v) = 0$ para todo $v \in W$, lo que implica que $b|_W$ es degenerada.

Veamos el ítem 6. Supongamos que $b|_W$ es no degenerada, entonces $W \cap W^\perp = \{0\}$. Por el ítem 4, si $\dim(W) = m$, entonces $\dim(W^\perp) = n - m$. Luego, $V = W \oplus W^\perp$.

Recíprocamente, si $V = W \oplus W^\perp$ es claro que $W \cap W^\perp = \{0\}$.

Para probar el ítem 7, primero veamos que $W \subset (W^\perp)^\perp$. Sea $u \in W$. Luego por definición

$$b(u, v) = 0,$$

para todo $v \in W^\perp$. Esto es, $u \in (W^\perp)^\perp$.

Por otro lado, por el mismo razonamiento hecho en el ítem anterior,

$$\dim(W) = n - \dim(W^\perp) = \dim((W^\perp)^\perp).$$

Por lo tanto, $W = (W^\perp)^\perp$. □

En lo que sigue vamos a trabajar con formas bilineales no degeneradas en V , que vamos a llamar *métricas en V* .

Definición 1.10. Una **métrica en V** es una forma bilineal simétrica no degenerada g definida en V . Una métrica g se dice

- **lorentziana** si tiene índice $\nu = 1$ y $n \geq 2$,
- **euclídea** si tiene índice $\nu = 0$.

Si la métrica g es lorentziana, el par (V, g) se llama **espacio vectorial lorentziano**, y si g es una métrica euclídea, el par (V, g) se llama **espacio vectorial euclídeo**.

Recordemos los ejemplos 1.3 y 1.4 dados al principio del capítulo. La forma bilineal simétrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ tiene a la identidad como matriz asociada en la base canónica. Esta matriz está en la forma dada por el teorema 1.6, y se verifica que $\nu = 0$ y es no degenerada. Luego $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ es una métrica euclídea en $V = \mathbb{R}^n$.

Definición 1.11. El espacio $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ se denomina **espacio euclídeo n -dimensional** y lo denotamos por \mathbb{E}^n .

Por otro lado, la forma bilineal simétrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ tiene matriz asociada

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

en la base canónica. Entonces $\nu = 1$ y es no degenerada. Luego, $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ es una métrica lorentziana en $V = \mathbb{R}^n$, para $n \geq 2$.

Definición 1.12. Supongamos que $n \geq 2$. El espacio $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_L)$ se llama **espacio de Lorentz-Minkowski n -dimensional** y lo denotamos por \mathbb{L}^n .

Sea g una métrica en V y consideremos la forma cuadrática asociada

$$I_g(u) = g(u, u).$$

Cuando el índice $\nu = 0$, $I_g(V) \subset \mathbb{R}_0^+$ y cuando $\nu = 1$, $I_g(V) = \mathbb{R}$, con lo cual tenemos varios tipos de vectores en V .

Definición 1.13. Sean (V, g) espacio vectorial lorentziano y $u \in V$. Decimos que u es

- **espacial** si $I_g(u) > 0$,
- **luz** si $I_g(u) = 0$ y $u \neq 0$,
- **temporal** si $I_g(u) < 0$,

El “tipo” de vector determinado arriba se denomina **carácter causal de u** .

Observación 1.14. Esta definición puede variar dependiendo del autor (ver, por ejemplo, [O’N83, CC13, L608]). Algunos autores consideran que el vector $u = 0$ es un vector espacial o llaman vectores nulos a los vectores luz y al vector $u = 0$.

1.3. Espacios vectoriales lorentzianos

En esta sección vamos a suponer que (V, g) es un espacio vectorial lorentziano. Daremos algunas propiedades y definiciones referentes a dichos espacios.

Gracias a la definición 1.13, tenemos tres familias de vectores en V : la familia de vectores espaciales, la familia de vectores temporales y la familia de vectores luz. Vamos a distinguir algunos conjuntos particulares.

Definición 1.15. El conjunto de vectores luz en V se llama **cono nulo** o **cono de luz**, y lo denotamos con Λ . Esto es,

$$\Lambda = \{u \in V : g(u, u) = 0\} - \{0\}.$$

En el espacio \mathbb{L}^3 , un vector u pertenece a Λ si y sólo si $u \neq 0$ y verifica la ecuación

$$-u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0,$$

donde (u_1, u_2, u_3) es la representación de u en la base canónica de \mathbb{R}^3 . Entonces los vectores luz en \mathbb{L}^3 forman un cono centrado en el origen sin incluir al vector nulo.

Sea u un vector temporal en \mathbb{L}^3 con representación (u_1, u_2, u_3) en la base canónica de \mathbb{R}^3 . Entonces

$$-u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 < 0.$$

Luego, $u_1 \neq 0$.

El conjunto de vectores temporales en \mathbb{L}^3 está formado por dos componentes conexas. Una componente está formada por el conjunto de vectores temporales u que verifican $u_1 > 0$, y la otra componente conexa está formada por el conjunto de vectores temporales v que verifican $u_1 < 0$. Esto se puede ver en la figura 1.1.

Esto se puede generalizar al siguiente resultado. La demostración puede verse en [O’N83, Sección 7, Capítulo 5].

Proposición 1.16. *El conjunto de los vectores temporales en V está formado por dos componentes conexas. Las componentes conexas del conjunto de vectores temporales de V se llaman **conos temporales**.*

Sea W un subespacio de V . Entonces W es un espacio vectorial real de dimensión finita y podemos considerar la métrica del espacio ambiente restringida a W . Tenemos dos posibilidades: la forma $g|_W$ es degenerada sobre W o es una métrica sobre W . Más aún, si $g|_W$ es una métrica, entonces puede ser una métrica euclídea o lorentziana.

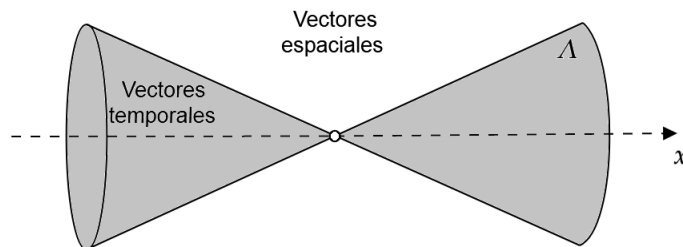


Figura 1.1: Tipos de vectores.

Definición 1.17. Sea W un subespacio de V . Decimos que W es un subespacio **luz** o **degenerado** si $g|_W$ es degenerada. En caso contrario, decimos que W es **no degenerado**.

Dado W un subespacio no degenerado, decimos que W es

- **espacial** si $g|_W$ es una métrica riemanianna,
- **temporal** si $g|_W$ es una métrica lorentziana.

El “tipo” de subespacio determinado arriba se llama **carácter causal de W** .

Supongamos que W es no degenerado, entonces tenemos la descomposición

$$V = W \oplus W^\perp.$$

Esto implica que W^\perp es no degenerado. En efecto, por la proposición 1.9, $(W^\perp)^\perp = W$. Luego,

$$V = W^\perp \oplus (W^\perp)^\perp.$$

Lo que implica que W^\perp es no degenerado. Una consecuencia de esto es la siguiente: W es un subespacio no degenerado si y sólo si W^\perp es un subespacio no degenerado.

Observemos que en este caso W y W^\perp no pueden tener el mismo carácter causal pues V es un espacio vectorial lorentziano. Esto puede resumirse en el siguiente resultado.

Proposición 1.18. *Sea W un subespacio de V . Se tiene:*

- W es degenerado si y sólo si W^\perp es degenerado,
- W es espacial si y sólo si W^\perp es temporal,
- W es temporal si y sólo si W^\perp es espacial.

Ahora vamos a dar algunas caracterizaciones de los subespacios temporales y los subespacios degenerados. La siguiente proposición puede encontrarse en [O’N83, Lema 27, Capítulo 5].

Proposición 1.19. *Sea W un subespacio de V con $k = \dim(W) \geq 2$. Son equivalentes:*

1. W es temporal,
2. W contiene dos vectores luz linealmente independientes,
3. W contiene un vector temporal.

Antes de dar la prueba, vamos a enunciar el siguiente lema que nos ayudará en la prueba.

Lema 1.20. *Sean $u, v \in V$ dos vectores luz, entonces u y v son linealmente dependientes si y sólo si $g(u, v) = 0$.*

Demostración. Supongamos primero que u y v son linealmente dependientes, entonces podemos suponer que existe $\eta \in \mathbb{R}$ no nulo tal que $u = \eta v$. Luego

$$g(u, v) = \eta g(v, v) = 0.$$

Recíprocamente, supongamos que $g(u, v) = 0$. Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormal de V donde e_1 es un vector temporal y e_2, \dots, e_n son vectores espaciales. Sea $W = \text{span}\{e_1\}$. Entonces W es un subespacio temporal y, por la proposición 1.9, tenemos la descomposición

$$V = W \oplus W^\perp.$$

Luego,

$$u = \bar{u} + \eta e_1 \quad \text{y} \quad v = \bar{v} + \xi e_1,$$

con $\bar{u}, \bar{v} \in W^\perp$ y $\eta, \xi \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$0 = g(u, u) = g(\bar{u}, \bar{u}) - \eta^2,$$

$$0 = g(v, v) = g(\bar{v}, \bar{v}) - \xi^2,$$

$$0 = g(u, v) = g(\bar{u}, \bar{v}) - \eta\xi.$$

Combinando estas igualdades, tenemos que

$$g(\bar{u}, \bar{v})^2 = g(\bar{u}, \bar{u})g(\bar{v}, \bar{v}). \quad (1.2)$$

El subespacio W^\perp es espacial. Luego, la métrica g restringida a W^\perp define un producto interno. Entonces, vale la desigualdad de Cauchy-Schwarz, y por la relación (1.2), tenemos que \bar{u} y \bar{v} son vectores linealmente dependientes. Luego, existe $\nu \in \mathbb{R}$ tal que

$$\bar{v} = \nu \bar{u}.$$

Observemos que $\nu \neq 0$, pues \bar{u} y \bar{v} son vectores no nulos. Luego,

$$\eta\xi = g(\bar{u}, \bar{v}) = \nu g(\bar{u}, \bar{u}) = \nu\eta^2.$$

Dado que $\eta \neq 0$, tenemos que

$$\xi = \nu\eta.$$

Por lo tanto,

$$v = \bar{v} + \xi e_1 = \nu \bar{u} + \nu\eta e_1 = \nu u,$$

esto es, u y v son linealmente dependientes. □

A continuación, daremos la prueba de la proposición 1.19.

Demostración de la proposición 1.19. Primero veamos que 1 implica 2. Supongamos que W es temporal. Sea $\mathfrak{B} = \{e_1, \dots, e_k\}$ una base ortonormal de W tal que e_1 es un vector temporal y e_2, \dots, e_k son vectores espaciales. Entonces los vectores $e_1 + e_2$ y $e_1 - e_2$ son vectores luz linealmente independientes.

Probaremos que 2 implica 3. Supongamos que W contiene dos vectores luz linealmente independientes que vamos a denotar con u y v . Como u y v son linealmente independientes, por el lema 1.20, tenemos que $g(u, v) \neq 0$. Observemos que

$$g(u \pm v, u \pm v) = g(u, u) + g(v, v) \pm 2g(u, v) = \pm 2g(u, v).$$

Entonces, uno de los vectores $u - v$ y $u + v$ es un vector temporal.

Finalmente, veamos que 3 implica 1. Sea $u \in W$ un vector temporal, entonces $W^\perp \subset \{u\}^\perp$. El subespacio $\{u\}^\perp$ es espacial, lo que implica que W^\perp es espacial. Por lo tanto, W es temporal. □

No presentaremos la demostración de la siguiente proposición que puede encontrarse en [O’N83, Lema 28, Capítulo 5].

Proposición 1.21. *Sea W un subespacio de V . Son equivalentes:*

1. W es luz,
2. W contiene un vector luz, pero no contiene vectores temporales,
3. $W \cap \Lambda = L - \{0\}$, donde L es un subespacio de W de dimensión 1 y Λ es el cono nulo.

Supongamos que π es un subespacio de \mathbb{R}^3 de dimensión 2. Las proposiciones 1.19 y 1.21 nos dan una idea geométrica de la posición en el espacio de π dependiendo de su carácter causal. Consideremos el cono nulo

$$\Lambda = \{u \in \mathbb{L}^3 : \langle u, u \rangle_L = 0\} - \{0\}.$$

Si $\pi \cap \Lambda \neq \emptyset$ tenemos dos posibilidades: si π interseca a Λ en una recta que no contiene al origen, entonces π es un subespacio luz, y si π interseca a Λ en dos rectas que no contienen al origen, entonces π es un subespacio temporal. Si $\pi \cap \Lambda = \emptyset$ tenemos que π es un subespacio espacial. Como podemos ver en la figura 1.2.

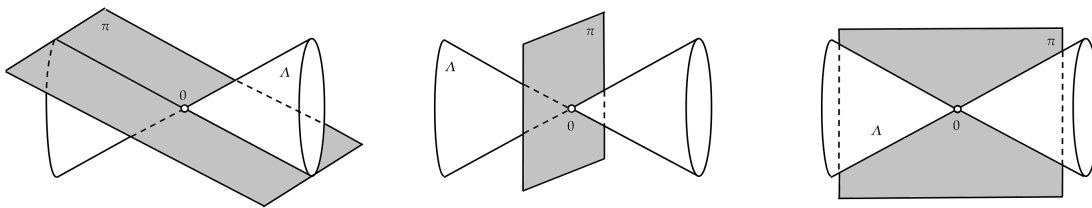


Figura 1.2: A la izquierda tenemos al cono nulo junto con un plano degenerado, en el centro junto con un plano espacial y a la derecha junto con un plano temporal.

1.4. Producto vectorial en el espacio \mathbb{L}^3

El objetivo de esta sección es definir un producto vectorial en el espacio lorentziano \mathbb{L}^3 .

En la sección 1.1 definimos en \mathbb{R}^3 dos métricas distintas: la métrica euclídea $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ y la métrica lorentziana $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$. Entonces tenemos definidas dos nociones de ortogonalidad en \mathbb{R}^3 . Para evitar confusión, dados dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^3$ denotaremos con $u \perp_L v$ cuando $\langle u, v \rangle_L = 0$, y dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^3$ no vacío, vamos a denotar al subespacio ortogonal con A^{\perp_L} . Para el caso euclídeo, vamos a utilizar un subíndice E , esto es, por ejemplo $u \perp_E v$ y A^{\perp_E} . Vamos a denotar a la norma euclídea inducida por $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ como $\|\cdot\|_E$.

Recordemos que, dados $u, v \in \mathbb{R}^3$, tenemos definido el producto vectorial usual en \mathbb{E}^3 que vamos a llamar *producto vectorial euclídeo* y lo denotaremos con $u \times_E v$. Este producto vectorial nos permite construir un vector perpendicular a u y v .

Se define usualmente a $u \times_E v$ como sigue:

- el vector nulo, si u y v son paralelos,
- el único vector ortogonal a u y v que verifica que $\{u, v, u \times_E v\}$ es una base orientada positiva y tiene módulo $\|u\|_E \|v\|_E \sin(\theta)$, donde θ es el ángulo que forman u y v , si u y v no son paralelos.

La definición anterior no es buena para definir un producto vectorial lorentziano pues no tenemos bien definido el módulo del producto vectorial. Por este motivo recurrimos a la siguiente caracterización del producto vectorial euclídeo:

Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ tales que u y v son dos vectores linealmente independientes. Entonces $w = u \times_E v$ si y sólo si w es el único vector que verifica

$$\langle w, x \rangle_E = \det[u, v, x],$$

para todo $x \in \mathbb{R}^3$, donde $[u, v, x]$ representa a la matriz que tiene como columnas a la representación de u, v y x en la base canónica.

Observemos que esta caracterización depende explícitamente de la métrica del espacio \mathbb{E}^3 . Esto motiva el siguiente resultado.

Proposición 1.22. *Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$ dos vectores linealmente independientes. Entonces existe un único $w \in \mathbb{R}^3$ tal que*

$$\langle w, x \rangle_L = \det[u, v, x]$$

para todo $x \in \mathbb{R}^3$, donde $[u, v, x]$ representa a la matriz que tiene como columnas a la representación de u, v y x en la base canónica.

Demostración. Supongamos que w es un vector que verifica la tesis. Si desarrollamos el determinante por las filas de las matrices en las coordenadas de la base canónica tenemos que

$$\blacksquare \quad -w_1 = \langle w, e_1 \rangle_L = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 0 \\ u_3 & v_3 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix}.$$

$$\blacksquare \quad w_2 = \langle w, e_2 \rangle_L = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & 0 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix}.$$

$$\blacksquare \quad w_3 = \langle w, e_3 \rangle_L = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & 0 \\ u_2 & v_2 & 0 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$w = \left(-\det \begin{pmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \right)^t.$$

Veamos que w así definido verifica la tesis. En efecto, dado $x = (x_1, x_2, x_3)^t$,

$$\langle w, x \rangle_L = -\det \begin{pmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} x_1 - \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} x_2 + \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} x_3 = \det[u, v, x].$$

□

Observación 1.23. Se desprende de la demostración de la proposición anterior que el vector w tiene la siguiente representación en la base canónica de \mathbb{R}^3 :

$$[w] = \left(-\det \begin{pmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \right)^t.$$

Supongamos que \mathfrak{B} es la base canónica y \mathfrak{B}' es otra base, y sea P la matriz cambio de base tal que $P[x]_{\mathfrak{B}'} = [x]_{\mathfrak{B}}$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$. Luego,

$$\langle w, x \rangle_L = \det[u, v, x] = \det(P[u]_{\mathfrak{B}'}, P[v]_{\mathfrak{B}'}, P[x]_{\mathfrak{B}'}) = \det(P) ([u]_{\mathfrak{B}'}, [v]_{\mathfrak{B}'}, [x]_{\mathfrak{B}'}).$$

La proposición anterior nos permite definir un producto vectorial lorentziano en el caso en que u y v sean dos vectores linealmente independientes. Para el caso en que u y v sean linealmente dependientes podemos tomar el vector nulo como en la definición del producto vectorial euclídeo.

Definición 1.24. Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$. Definimos el vector $u \times_L v \in \mathbb{R}^3$ de la siguiente manera

$$u \times_L v = \begin{cases} 0, & \text{si } u, v \text{ son linealmente dependientes} \\ w, & \text{si } u, v \text{ son linealmente independientes} \end{cases} \quad (1.3)$$

donde w es el vector dado en la proposición 1.22. El vector $u \times_L v$ se llama **producto vectorial lorentziano de u y v** .

Observemos que, de la definición anterior, tenemos que

$$\langle u, u \times_L v \rangle_L = \det[u, v, u] = 0.$$

De igual manera,

$$\langle v, u \times_L v \rangle_L = \det[u, v, v] = 0.$$

El producto vectorial lorentziano, al igual que el producto vectorial euclídeo, tiene la propiedad de ser lineal en sus componentes y antisimétrico. Estas propiedades surgen de la linealidad y la antisimetría de $\det(\cdot)$ como función lineal de la filas o columnas. Más aún, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.25. Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. Se tiene:

1. $u \times_L v \in \{u, v\}^{\perp_L}$,
2. $u \times_L v = -v \times_L u$,
3. $(u + v) \times_L w = u \times_L w + v \times_L w$,
4. Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$ dos vectores ortogonales tales que $\varepsilon = \langle u, u \rangle_L$, $\eta = \langle v, v \rangle_L$ y $\varepsilon, \eta \in \{-1, 1\}$.
Entonces

$$\langle u \times_L v, u \times_L v \rangle_L = -\varepsilon\eta.$$

Demostración. Basta con probar 4. Supongamos que $[u] = (u_1, u_2, u_3)^t$ y $[v] = (v_1, v_2, v_3)^t$ en la base canónica, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \langle u \times_L v, u \times_L v \rangle_L &= \det[u, v, u \times_L v] \\ &= u_1^2 v_2^2 - 2u_1 v_2 u_2 v_1 + u_1^2 v_3^2 - 2u_1 v_3 u_3 v_1 - u_2^2 v_3^2 + 2u_2 v_3 u_3 v_2 + u_2^2 v_1^2 + u_3^2 v_1^2 - u_3^2 v_2^2. \end{aligned}$$

en la base canónica. Por otro lado,

$$\begin{aligned} \langle u, u \rangle_L \langle v, v \rangle_L &= (-u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(-v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \\ &= u_1^2 v_1^2 - u_1^2 v_2^2 - u_1^2 v_3^2 - u_2^2 v_1^2 + u_2^2 v_2^2 + u_2^2 v_3^2 - u_3^2 v_1^2 + u_3^2 v_2^2 + u_3^2 v_3^2. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Como los vectores u y v son ortogonales, tenemos que

$$-u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = 0.$$

Reemplazando en (1.4), tenemos que

$$\begin{aligned} \langle u, u \rangle_L \langle v, v \rangle_L &= \\ &= (u_2 v_2 + u_3 v_3)^2 - u_1^2 v_2^2 - u_1^2 v_3^2 - u_2^2 v_1^2 + (u_1 v_1 - u_3 v_3)^2 + u_2^2 v_3^2 - u_3^2 v_1^2 + u_3^2 v_2^2 + (u_1 v_1 - u_2 v_2)^2 \\ &= 2u_2^2 v_2^2 + 2u_2 v_3 u_3 v_2 + 2u_3^2 v_3^2 - u_1^2 v_2^2 - u_1^2 v_3^2 - u_2^2 v_1^2 + 2u_1^2 v_1^2 - 2u_1 v_3 u_3 v_1 \\ &\quad + u_2^2 v_3^2 - u_3^2 v_1^2 + u_3^2 v_2^2 - 2u_1 v_2 u_2 v_1. \end{aligned}$$

Luego, tenemos que

$$\begin{aligned}
 & \langle u \times_L v, u \times_L v \rangle_L + \langle u, u \rangle_L \langle v, v \rangle_L = \\
 & = 2 \left(-2u_1v_2u_2v_1 - 2u_1v_3u_3v_1 + 2u_2v_3u_3v_2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2 + u_1^2v_1^2 \right) \\
 & = 2(-u_1v_2 + u_2v_2 + u_3v_3)^2 \\
 & = 0.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\langle u \times_L v, u \times_L v \rangle_L = -\langle u, u \rangle_L \langle v, v \rangle_L = -\varepsilon\eta.$$

□

Sea π un subespacio de \mathbb{R}^3 de dimensión 2 y $\{u, v\}$ una base de π . Entonces π^{\perp_L} es un subespacio de \mathbb{R}^3 de dimensión uno y tenemos que $u \times_L v$ es un vector no nulo, que pertenece a π^{\perp_L} . Luego $u \times_L v$ forma una base de π^{\perp_L} y tenemos que $u \times_L v$ y π^{\perp_L} tienen el mismo carácter causal. Esto junto a la proposición 1.18 nos da el siguiente resultado.

Proposición 1.26. *Sean π un subespacio de dimensión 2 de \mathbb{R}^3 y $\{u, v\}$ una base de π . Entonces*

- *π es un subespacio espacial si y sólo si $u \times_L v$ es un vector temporal,*
- *π es un subespacio temporal si y sólo si $u \times_L v$ es un vector espacial,*
- *π es un subespacio luz si y sólo si $u \times_L v$ es un vector luz.*

Ahora, definiremos una norma en el espacio \mathbb{L}^3 .

La aplicación $p \mapsto \langle p, p \rangle_L$, definida en \mathbb{R}^3 , asume todos los valores reales. Entonces no podemos usar la expresión $\sqrt{\langle p, p \rangle_L}$ para definir una norma, pues puede asumir valores complejos. Para resolver este problema vamos a dar la siguiente definición que puede encontrarse en [O’N83, Página 50].

Definición 1.27. Sea $p \in \mathbb{R}^3$. La norma asociada al espacio \mathbb{L}^3 es

$$\|p\|_L = \sqrt{|\langle p, p \rangle_L|}.$$

Decimos que un vector $p \in \mathbb{R}^3$ es **unitario** si $\|p\|_L = 1$.

Vale observar que la definición anterior en realidad no define una norma sino que es una seminorma en \mathbb{R}^3 . Pues podemos considerar que p es un vector luz, y en este caso p es no nulo y verifica $\|p\|_L = 0$.

1.5. Isometrías lorentzianas

En esta sección vamos a definir las isometrías en el espacio lorentziano \mathbb{L}^n . En particular, vamos a caracterizar a las isometrías en el espacio \mathbb{L}^2 .

Definición 1.28. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función biyectiva. Decimos que f es una **isometría lorentziana** si

$$\langle f(u) - f(v), f(u) - f(v) \rangle_L = \langle u - v, u - v \rangle_L$$

para todos $u, v \in \mathbb{R}^n$.

El conjunto de isometrías lorentzianas junto con la composición de funciones forman un grupo.

Supongamos que f es una isometría lorentziana tal que $f(0) = 0$. Tomando $v = 0$ en la definición anterior tenemos que

$$\langle f(u), f(u) \rangle_L = \langle u, u \rangle_L$$

para todo $u \in \mathbb{R}^n$.

Definición 1.29. Sea $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función biyectiva. Decimos que g es una **transformación ortogonal lorentziana** si

$$\langle g(u), g(u) \rangle_L = \langle u, u \rangle_L$$

para todo $u \in \mathbb{R}^n$.

El conjunto de transformaciones ortogonales lorentzianas forman un subgrupo del grupo de isometrías.

Veamos que una transformación ortogonal lorentziana es una transformación lineal biyectiva, esto es, una transformación ortogonal lorentziana es un isomorfismo lineal.

Proposición 1.30. *Sea g una transformación ortogonal lorentziana. Entonces g es un isomorfismo lineal.*

Demostración. Basta probar que g es una transformación lineal. Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ y $\eta \in \mathbb{R}$. Como g es biyectiva, existe $w_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $g(w_0) = w$. Luego

$$\langle g(\eta u + v), w \rangle_L = \langle g(\eta u + v), g(w_0) \rangle_L = \langle \eta u + v, w_0 \rangle_L = \eta \langle u, w_0 \rangle_L + \langle v, w_0 \rangle_L = \eta \langle g(u), w \rangle_L + \langle g(v), w \rangle_L.$$

Por lo tanto,

$$\langle g(\eta u + v) - \eta g(u) - g(v), w \rangle_L = 0$$

para todo $w \in \mathbb{R}^n$. Como $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ es no degenerada, tenemos que

$$g(\eta u + v) - \eta g(u) - g(v) = 0.$$

Luego g es lineal. □

Por lo tanto, toda isometría lorentziana f que fija al origen, esto es $f(0) = 0$, es un isomorfismo lineal.

Sea f una isometría lorentziana arbitraria y $z = f(0)$. Definimos la aplicación $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$g(u) = f(u) - z.$$

Entonces g es una función biyectiva que verifica

$$\langle g(u), g(u) \rangle_L = \langle f(u) - z, f(u) - z \rangle_L = \langle f(u) - f(0), f(u) - f(0) \rangle_L = \langle u - 0, u - 0 \rangle_L = \langle u, u \rangle_L.$$

Luego g es una transformación ortogonal lorentziana.

Proposición 1.31. *Sea f una isometría lorentziana. Entonces existen únicos $p \in \mathbb{R}^n$ y g una transformación ortogonal lorentziana tales que*

$$f(u) = p + g(u)$$

para todo $u \in \mathbb{R}^n$.

Sea g una transformación ortogonal lorentziana. Sea $[g]$ la matriz asociada a g en la base canónica de \mathbb{R}^n . Luego,

$$\langle g(u), g(u) \rangle_L = [g(u)]^t \Sigma [g(u)] = u^t [g]^t \Sigma [g] u$$

para todo $u \in \mathbb{R}^3$, donde

$$\Sigma = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado,

$$\langle u, u \rangle_L = u^t \Sigma u.$$

Como esto vale para todo $u \in \mathbb{R}^3$, tenemos que

$$[g]^t \Sigma [g] = \Sigma.$$

Proposición 1.32. *El grupo de transformaciones ortogonales lorentzianas es isomorfo (como grupo) al grupo de matrices*

$$O_1(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A^t \Sigma A = \Sigma\},$$

donde

$$\Sigma = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Corolario 1.33. *El grupo de isometrías lorentzianas es isomorfo (como grupo) al producto semidirecto*

$$G = \mathbb{R}^n \rtimes O_1(n).$$

Observemos que si postmultiplicando por la matriz inversa de $[g]$,

$$[g]^t \Sigma = \Sigma [g]^{-1}.$$

Por lo tanto,

$$[g]^{-1} = \Sigma [g]^t \Sigma.$$

Lo que implica que $|\det([g])| = 1$.

Supongamos que $n = 2$. Para caracterizar a las isometrías en \mathbb{L}^2 , basta con caracterizar al grupo $O_1(2)$.

Sea $A \in O_1(2)$ tal que

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

en la base canónica $\mathfrak{B} = \{e_1, e_2\}$ de \mathbb{L}^2 . Luego,

$$A^{-1} = \Sigma A^t \Sigma = \begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, observemos que

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Luego, tenemos que

$$\pm \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, se verifica que $a = \varepsilon d$, $b = \varepsilon c$ donde $\varepsilon = \det(A)$. Por lo tanto,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \varepsilon b & \varepsilon a \end{pmatrix}.$$

Más aún, A verifica que $|\det(A)| = 1$. Luego,

$$a^2 - b^2 = 1,$$

lo que implica que $a = \pm \cosh(\theta)$ y $b = \sinh(\theta)$ para algún $\theta \in \mathbb{R}$. Por lo tanto,

$$A = \begin{pmatrix} \pm \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ \varepsilon \sinh(\theta) & \pm \varepsilon \cosh(\theta) \end{pmatrix}.$$

Dado que la matriz A definida arriba pertenece al grupo $O_1(2)$, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.34. *Se verifica la igualdad:*

$$O_1(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ \varepsilon \sinh(\theta) & \varepsilon \cosh(\theta) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ \varepsilon \sinh(\theta) & -\varepsilon \cosh(\theta) \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R}, \varepsilon = -1, 1 \right\}.$$

Teoría local de curvas en \mathbb{L}^3

En este capítulo definiremos un Triedro de Frenet-Serret en el sentido de la métrica lorentziana de \mathbb{L}^3 .

2.1. Reparametrización por longitud de arco

Comenzaremos recordando los elementos básicos de la teoría local de curvas en el espacio euclídeo \mathbb{E}^3 (para más detalles se puede ver [dC17]).

Dado un intervalo abierto I de \mathbb{R} que contiene a $t = 0$ y una curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ regular, esto es, $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, podemos parametrizar α por longitud de arco, es decir, consideramos una reparametrización $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ de α tal que $\|\beta'(t)\|_E = 1$ para todo $t \in J$.

Dada una curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada por longitud de arco, el vector $T(t) = \alpha'(t)$ es un vector tangente a la curva. Además, existen dos vectores $N(t)$ y $B(t)$, llamados vector normal y binormal de α en t , respectivamente, tales que en cada $t \in I$ el conjunto $\{T, N, B\}$ forma una base ortonormal de \mathbb{R}^3 orientada positiva, en el sentido de la métrica euclídea. Junto a la curvatura k y la torsión τ , el sistema $\{T, N, B, k, \tau\}$ se llama *triedro de Frenet-Serret*. Más aún, el sistema anterior verifica las ecuaciones:

$$\begin{cases} T' = & kN \\ N' = -kT & -\tau B \\ B' = & \tau N \end{cases}$$

El Triedro de Frenet-Serret determina unívocamente a la curva, salvo por su posición en el espacio. Esto se puede ver en [dC17, Sección 1.5]

Para definir los vectores tangente y normal de manera análoga a la teoría clásica de curvas en \mathbb{R}^3 es necesario considerar curvas que estén parametrizadas por longitud de arco. A continuación, vamos a definir una reparametrización por longitud de arco en el sentido de la métrica lorentziana de \mathbb{R}^3 .

Supongamos que $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva regular. Sea $t_0 \in I$ fijo. Podemos definir la aplicación $S : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$S(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(s)\|_L ds,$$

que viene a jugar el papel de la aplicación longitud de arco lorentziana. Si $\|\alpha'\|_L \neq 0$ en I , entonces la función $\|\alpha'\|_L$ es positiva en I , lo que implica que la función S es estrictamente monótona en I . Luego, la restricción $S : I \rightarrow S(I)$ es biyectiva en I , y resulta invertible. En este caso, definimos la aplicación $\beta : S(I) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\beta(t) = \alpha(S^{-1}(t)).$$

Esta aplicación verifica que $\|\beta'\|_L = 1$, y la llamamos **reparametrización por longitud de arco lorentziana de α** .

Dado que α es una curva regular, tenemos que $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Luego, $\|\alpha'(t)\|_L = 0$ si y sólo si $\alpha'(t)$ es un vector luz. Por lo tanto, no podemos reparametrizar por longitud de arco lorentziana a curvas que verifican que $\alpha'(t)$ es luz para algún $t \in I$.

Definición 2.1. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable. Decimos que α **está parametrizada por longitud de arco lorentziana** si

$$\|\alpha'(t)\|_L = 1$$

para todo $t \in I$.

El subespacio generado por el vector $\alpha'(t)$ es el espacio tangente a α en t . Siguiendo la notación en [O'N83] tenemos la siguiente definición.

Definición 2.2. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable. Decimos que α es

- **espacial en t** , si $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_L > 0$,
- **temporal en t** , si $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_L < 0$,
- **luz en t** , si $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_L = 0$.

Decimos que α es **espacial**, **temporal** o **luz**, si es espacial, temporal o luz para todo $t \in I$, respectivamente.

El “tipo” de subespacio determinado arriba se llama **carácter causal de α** .

Por lo tanto, del análisis anterior tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.3. *Toda curva espacial o temporal admite una reparametrización por longitud de arco lorentziana.*

Para el caso en que α sea una curva luz tenemos que $\|\alpha'(t)\|_L = 0$ para todo $t \in I$. Por lo tanto, cualquier reparametrización β de α verifica que $\|\beta'(s)\|_L = 0$ para todo s . Entonces no tiene sentido pensar en una reparametrización por longitud de arco para estas curvas. En la última sección de este capítulo veremos que estas curvas admiten una *reparametrización por pseudolongitud de arco* y es posible definir un triedro de Frenet-Serret para estas curvas.

Ejemplo 2.4. Daremos algunos ejemplos de curvas espaciales, temporales y luz.

1. Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$ tales que $v \neq 0$. Sea $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ la curva definida por $\alpha(t) = u + tv$. Entonces $\alpha'(t) = v$, y tenemos que α y v tienen el mismo carácter causal. Luego, α está parametrizada por longitud de arco lorentziana si $\|v\|_L = 1$.
2. La circunferencia definida por $\alpha(t) = (0, \cos(t), \sin(t))$ es una curva diferenciable que verifica $\alpha'(t) = (0, -\sin(t), \cos(t))$ que es un vector espacial para todo t . Entonces α es una curva espacial contenida en el plano $x = 0$.
3. Sea $\alpha(t) = (\sinh(t), \cosh(t), 0)$ una hipérbola. Entonces $\alpha'(t) = (\cosh(t), \sinh(t), 0)$ que es un vector temporal para todo t . Luego α es una curva temporal contenida en el plano $z = 0$.
4. Sea $\alpha(t) = (\sinh(t), \cosh(t), t)$. Entonces $\alpha'(t) = (\cosh(t), \sinh(t), 1)$ que es un vector luz para todo t . Luego α es una curva luz.

2.2. Triedro de Frenet-Serret

Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable parametrizada por longitud de arco lorentziana. Por analogía con la teoría local de curvas en el espacio euclídeo, resulta natural definir la curvatura lorentziana de α como el número real no negativo $\|\alpha''(t)\|_L$. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 2.5. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable parametrizada por longitud de arco lorentziana.

- El vector

$$T^L(t) = \alpha'(t)$$

se llama **vector tangente lorentziano a α en t** .

- El valor $\|\alpha''(t)\|_L$ se llama **curvatura lorentziana de α en t** y la denotamos con $k^L(t)$.

En la teoría clásica de curvas en el espacio euclídeo \mathbb{E}^3 , para poder definir el Triedro de Frenet-Serret consideramos las curvas parametrizadas por longitud de arco con curvatura no nula, pues en caso contrario, no podemos normalizar al vector $\alpha''(t)$. En el espacio euclídeo tenemos que las únicas curvas parametrizadas por longitud de arco que verifican la relación $\|\alpha''\|_E \equiv 0$ en I son segmentos de recta. Luego, descartamos del análisis a estas curvas. Para el caso lorentziano, tenemos que los segmentos de recta no son las únicas curvas que verifican la relación anterior como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.6. Sea $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ la curva definida por

$$\alpha(t) = \left(\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}, t, \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \right).$$

La traza de la curva α no es un segmento de recta. Más aún, α es una curva espacial parametrizada por longitud de arco y

$$\alpha'' \equiv (1, 0, 1)$$

en \mathbb{R} . Luego, $\alpha''(t)$ es un vector luz para todo $t \in \mathbb{R}$.

Por lo tanto, podemos tener curvas con curvatura lorentziana nula que no son segmentos de recta. En la última sección de este capítulo, veremos que es posible definir un triedro de Frenet-Serret para estas curvas.

En lo que sigue de esta sección, vamos a suponer que $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva diferenciable parametrizada por longitud de arco con curvatura lorentziana k^L nunca nula en I .

Observemos que $\langle T^L(t), T^L(t) \rangle_L$ es una función constante en I , igual a 1 o -1 . Entonces

$$\langle \alpha''(t), T^L(t) \rangle_L = 0.$$

Luego, $\alpha''(t) \in \{T^L(t)\}^{\perp L}$. Más aún, dependiendo del carácter causal de $T^L(t)$ tenemos que $\alpha''(t)$ puede tener distintos caracteres causales: si $\alpha'(t)$ es un vector temporal, entonces $\alpha''(t)$ es un vector espacial, y si $\alpha'(t)$ es un vector espacial, entonces $\alpha''(t)$ puede ser un vector espacial o temporal.

Nuevamente, haciendo una analogía con la teoría clásica de curvas en el espacio, tenemos la siguiente definición.

Definición 2.7. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco lorentziana y curvatura lorentziana k^L nunca nula en I .

- El vector normal unitario lorentziano de α en \mathbf{t} es el vector

$$N^L(t) = \frac{1}{k^L(t)}(T^L)'(t).$$

- El vector binormal a α en t se define por

$$B^L(t) = T^L(t) \times_L N^L(t).$$

Observemos que el sistema $\{T^L, N^L, B^L\}$ es una base ortonormal de \mathbb{L}^3 . Luego, tenemos que

$$\begin{cases} (T^L)' &= k^L N^L \\ (N^L)' &= \varepsilon_1 \langle (N^L)', T^L \rangle_L T^L + \varepsilon_2 \langle (N^L)', N^L \rangle_L N^L + \varepsilon_3 \langle (N^L)', B^L \rangle_L B^L \\ (B^L)' &= \varepsilon_1 \langle (B^L)', T^L \rangle_L T^L + \varepsilon_2 \langle (B^L)', N^L \rangle_L N^L + \varepsilon_3 \langle (B^L)', B^L \rangle_L B^L \end{cases}$$

donde

$$\varepsilon_1 = \langle T^L, T^L \rangle_L, \quad \varepsilon_2 = \langle N^L, N^L \rangle_L \quad \text{y} \quad \varepsilon_3 = \langle B^L, B^L \rangle_L.$$

Observemos que los vectores $B^L(t)$ y $N^L(t)$ son unitarios. Luego

$$\langle (N^L)'(t), N^L(t) \rangle_L = \langle (B^L)'(t), B^L(t) \rangle_L = 0.$$

Como los vectores $N^L(t)$ y $T^L(t)$ son ortogonales, tenemos la relación

$$\langle (N^L)'(t), T^L(t) \rangle_L = -\langle N^L(t), (T^L)'(t) \rangle_L = -k^L(t)\varepsilon_2.$$

Por otro lado tenemos la relación

$$\langle B^L(t), T^L(t) \rangle_L = 0.$$

Derivando respecto de t , tenemos que

$$\langle (B^L)'(t), T^L(t) \rangle_L = -\langle B^L(t), (T^L)'(t) \rangle_L = -\langle B^L(t), k^L(t)N^L(t) \rangle_L = 0.$$

Por lo tanto,

$$\begin{cases} (T^L)'(t) &= k^L(t)N^L(t) \\ (N^L)'(t) &= -\varepsilon_1\varepsilon_2 k^L(t)T^L(t) + \varepsilon_3 \langle (N^L)'(t), B^L(t) \rangle_L B^L(t) \\ (B^L)'(t) &= \varepsilon_2 \langle (B^L)'(t), N^L(t) \rangle_L N^L(t) \end{cases}$$

Definición 2.8. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco lorentziana y curvatura lorentziana k^L nunca nula en I . La **torsión de α en t** es el número real

$$\tau^L = \langle (N^L)'(t), B^L(t) \rangle_L.$$

De la relación

$$\langle B^L(t), N^L(t) \rangle_L = 0$$

tenemos que

$$\langle (B^L)'(t), N^L(t) \rangle_L = -\langle B^L(t), (N^L)'(t) \rangle_L = -\tau^L.$$

Por la proposición 1.25, tenemos que $\varepsilon_3 = -\varepsilon_1\varepsilon_2$. Entonces

$$\begin{cases} (T^L)'(t) &= k^L(t)N^L(t) \\ (N^L)'(t) &= -\varepsilon_1\varepsilon_2 k^L(t)T^L(t) - \varepsilon_1\varepsilon_2\tau^L B^L(t) \\ (B^L)'(t) &= -\varepsilon_2\tau^L N^L(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

Las ecuaciones anteriores son similares a las ecuaciones de Frenet-Serret en el caso euclídeo.

Definición 2.9. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco con curvatura lorentziana no nula en I . Sean N^L y B^L los vectores normal y binormal lorentzianos de α , respectivamente. Sean k^L y τ^L la curvatura y torsión de α , respectivamente. El sistema $\{T^L, N^L, B^L, k^L, \tau^L\}$ se llama **Triedro de Frenet-Serret lorentziano de α** .

Teorema 2.10. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco con curvatura lorentziana no nula. Sea $\{T^L, N^L, B^L, k^L, \tau^L\}$ el Triedro de Frenet-Serret lorentziano de α . Se verifican las ecuaciones

$$\begin{cases} (T^L)' &= & k^L N^L \\ (N^L)' &= & -\varepsilon_1 \varepsilon_2 k^L T^L & -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \tau^L B^L \\ (B^L)' &= & -\varepsilon_2 \tau^L N^L \end{cases}$$

donde $\varepsilon_1 = \langle T^L, T^L \rangle_L$ y $\varepsilon_2 = \langle N^L, N^L \rangle_L$. Más aún, $\{T^L, N^L, B^L\}$ es una base orientada positiva si $\varepsilon_1 \varepsilon_2 < 0$ y es orientada negativa si $\varepsilon_1 \varepsilon_2 > 0$.

Demostración. Ya probamos que el triedro de Frenet-Serret verifica las ecuaciones en (2.1). Basta analizar en qué casos el triedro es una base orientada positiva y negativa.

$$\det[T^L(t), N^L(t), B^L(t)] = \langle B^L(t), B^L(t) \rangle_L = -\varepsilon_1 \varepsilon_2,$$

donde $[T^L(t), N^L(t), B^L(t)]$ es la matriz formada por las columnas definidas por los vectores $T^L(t)$, $N^L(t)$ y $B^L(t)$. Por lo tanto, la base es orientada positiva (resp. negativa) si y sólo si $-\varepsilon_1 \varepsilon_2 > 0$ (resp. $-\varepsilon_1 \varepsilon_2 < 0$). \square

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.11. Sea $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ la curva definida por

$$\alpha(t) = (\cosh(t), 0, \sinh(t)).$$

Observemos que su vector tangente es

$$T^L(t) = (\sinh(t), 0, \cosh(t))$$

y se verifica

$$\langle T^L(t), T^L(t) \rangle_L = 1.$$

Luego $\alpha(t)$ es una curva espacial parametrizada por longitud de arco. Más aún, su curvatura lorentziana es

$$k^L(t) = \|\alpha''(t)\|_L = 1.$$

Sus vectores normal unitario y binormal son

$$N^L(t) = (\cosh(t), 0, \sinh(t)) \quad \text{y} \quad B^L(t) = (0, 1, 0).$$

Luego, su torsión verifica $\tau^L \equiv 0$.

Ejemplo 2.12. Sea ahora $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ la curva definida por

$$\alpha(t) = (2t, \cos(t), \sin(t)).$$

Luego

$$T^L(t) = (2, -\sin(t), \cos(t))$$

y tenemos que

$$\langle T^L(t), T^L(t) \rangle_L = -1.$$

Luego, β es una curva temporal parametrizada por longitud de arco. Más aún, su vector normal y binormal son

$$N^L(t) = (0, -\cos(t), -\sin(t)) \quad \text{y} \quad B^L(t) = (-1, 2\sin(t), -2\cos(t)),$$

y su curvatura y torsión son

$$k^L(t) = 1 \quad \text{y} \quad \tau^L(t) = 2.$$

2.3. Curvas luz y curvas con curvatura lorentziana cero

Para definir el triedro de Frenet no consideramos a dos familias de curvas: las curvas luz y la familia de curvas parametrizadas por longitud de arco con curvatura lorentziana nula. El problema de estas curvas es que α puede no ser reparametrizada por longitud de arco o su curvatura puede ser nula. Entonces no podemos hacer una analogía con la teoría clásica de curvas en el espacio euclídeo. En el trabajo de R. López [Ló08], se define un triedro de Frenet-Serret para estas curvas por separado. El objetivo de esta sección es mostrar que es posible definir un triedro para estas curvas, siguiendo el trabajo de López.

Para el caso en que α es una curva luz, observemos que

$$\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_L = 0$$

para todo $t \in I$. Derivando respecto de t , tenemos que

$$\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle_L = 0,$$

entonces $\alpha''(t) \in \{\alpha'(t)\}^{\perp_L}$. El subespacio $\{\alpha'(t)\}^{\perp_L}$ es luz, entonces, por la proposición 1.21, tenemos dos posibilidades: $\alpha''(t)$ es un vector espacial o luz.

Si $\alpha''(t)$ es un vector luz, entonces $\alpha''(t)$ es proporcional a $\alpha'(t)$ por el lema 1.20, esto es, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha''(t) = \lambda \alpha'(t).$$

Entonces existen $u, v \in \mathbb{R}^3$, con u vector luz, tal que

$$\alpha(t) = ue^{\lambda t} + v.$$

Es decir, la traza de α es un segmento de recta.

Si $\alpha''(t)$ es un vector espacial, entonces podemos reparametrizar α de modo que $\|\alpha''(t)\|_L = 1$ para todo $t \in I$, como vemos en el siguiente resultado, que puede verse en [Ló08, Lema 2.1].

Proposición 2.13. *Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable y luz tal que $\alpha''(t)$ es un vector espacial para todo $t \in I$. Entonces existe una reparametrización de α dada por $\beta(s) = \alpha \circ \phi(s)$ tal que $\|\beta''(s)\|_L = 1$ para todo $s \in I$. En este caso, decimos que β está **pseudoparametrizada por longitud de arco**.*

Definiremos el vector tangente lorentziano como sigue.

Definición 2.14. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva luz pseudoparametrizada por longitud de arco. El vector

$$T^L(t) := \alpha'(t)$$

se llama **vector tangente de α en t** .

Sea α una curva diferenciable y luz, pseudoparametrizada por longitud de arco. Definimos el **normal a α en t** como el vector

$$N^L(t) = (T^L)'(t),$$

que es un vector espacial unitario. Definimos el **binormal a α en t** como el único vector luz ortogonal a $N^L(t)$ tal que $\langle T^L(s), B^L(s) \rangle_L = -1$. Observemos $\{T^L(t), N^L(s), B^L(t)\}$ no es una base ortogonal de \mathbb{L}^3 pues contiene vectores luz. Las ecuaciones de Frenet-Serret tienen la forma

$$\begin{cases} (T^L)' &= & N^L \\ (N^L)' &= & \tau^L T^L & + B^L \\ (B^L)' &= & \tau^L N^L \end{cases}$$

donde el parámetro τ^L está definido por $\tau^L(t) = -\langle (N^L)'(t), B^L(t) \rangle_L$, y lo llamamos **pseudotorsión de α en t** .

Supongamos ahora que α es una curva diferenciable y espacial tal que α está parametrizada por longitud de arco y $\|\alpha''(t)\|_L = 0$ para todo $t \in I$. También vamos a suponer que $T(t)$ y $(T^L)'(t)$ no son proporcionales para todo $t \in I$ para evitar que α sea un segmento de recta.

Definimos el **normal a α en t** como el vector $N(t) = (T^L)'(t)$, y el **binormal a α en t** como el único vector luz ortogonal a $T^L(t)$ que verifica $\langle B^L(t), N^L(t) \rangle_L = -1$. En este caso las ecuaciones de Frenet-Serret son

$$\begin{cases} (T^L)' &= & N^L \\ (N^L)' &= & \tau^L N^L \\ (B^L)' &= & T^L \quad \quad -\tau^L B^L \end{cases}$$

donde el parámetro τ^L está definido por $\tau^L(t) = -\langle (N^L)'(t), B^L(t) \rangle_L$, y lo llamamos **pseudotorsión de α en t** .

Si bien seguimos el trabajo [L608] de J. López para definir el triedro de Frenet-Serret, para este tipo de curvas, como bien dice en su trabajo, hay varias formas de definir el Triedro para curvas luz y no todos los autores coinciden. Por ejemplo, en el artículo [FGL01] de A. Ferrández, A. Giménez y P. Lucas, los autores construyeron un Triedro de Frenet-Serret para una subfamilia de las curvas luz pseudoparametrizadas por longitud de arco, llamadas *curvas de Cartan*. El objetivo de los autores es que el triedro contenga la menor cantidad de curvaturas y que sea invariante por transformaciones lorentzianas. A diferencia del triedro anterior, en este caso tenemos definida una noción de curvatura de la curva.

Primera forma fundamental lorentziana

Sea S un subconjunto de \mathbb{R}^3 con la topología inducida. Decimos que S es una *superficie* si verifica que para cada punto p en S existe una función $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciable definida en un abierto de \mathbb{R}^2 tal que $\mathbf{x}(U) \subset S$ y es un homeomorfismo sobre su imagen (Para más detalles ver el apéndice A).

En una superficie S tenemos objetos que no dependen de la métrica definida en \mathbb{R}^3 sino que dependen de \mathbb{R}^3 como espacio vectorial real y/o como espacio topológico con la topología usual. Algunos de estos objetos se encuentran definidos en el apéndice A. También tenemos conceptos que dependen de la métrica del espacio como, por ejemplo, la primera y segunda forma fundamental euclídea. En lo que sigue de este trabajo vamos a definir algunos de estos conceptos en el espacio lorentziano \mathbb{L}^3 . En particular, el objetivo de este capítulo es definir la primera forma fundamental y caracterizar la orientación de superficies en relación a la métrica lorentziana $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ de \mathbb{R}^3 .

3.1. Primera forma fundamental

Sea S una superficie y $p \in S$. La primera forma fundamental euclídea de S en p , que vamos a denotar por I_p^E , se define como la forma cuadrática inducida por la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ de \mathbb{R}^3 en el espacio tangente $T_p S$. Esto es, la primera forma es la aplicación $I_p^E : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$I_p^E(v) = \langle v, v \rangle_E,$$

para todo $v \in T_p S$. En este caso, I_p^E define una métrica en $T_p S$.

Sea g la restricción de la métrica lorentziana $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ al espacio tangente $T_p S$. Observemos que la restricción de una métrica lorentziana a un subespacio propio no necesariamente es una métrica. Puede pasar que esta forma bilineal sea degenerada o, equivalentemente, que su forma cuadrática asociada sea degenerada. Esto genera un problema a la hora de definir la primera forma fundamental, pues necesitamos que g sea no degenerada para poder inducir una métrica en el espacio tangente. Para resolver este problema veremos que podemos restringirnos al subconjunto de puntos de S que verifican que los planos tangentes asociados son subespacios no degenerados, siempre que este sea no vacío. Primero vamos a estudiar al conjunto de puntos de S que tienen planos tangentes degenerados.

Sea (U, \mathbf{x}) un parche coordenado de S tal que $p = \mathbf{x}(u_0, v_0)$. Sea $\{\mathbf{x}_u(u_0, v_0), \mathbf{x}_v(u_0, v_0)\}$ la base del plano tangente $T_p S$ inducida por este parche. En esta base g tiene una matriz asociada que vamos a denotar con $[g]$.

Observemos que la matriz de $[g]$ tiene la forma

$$[g] = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{x}_u(u_0, v_0), \mathbf{x}_u(u_0, v_0) \rangle_L & \langle \mathbf{x}_u(u_0, v_0), \mathbf{x}_v(u_0, v_0) \rangle_L \\ \langle \mathbf{x}_u(u_0, v_0), \mathbf{x}_v(u_0, v_0) \rangle_L & \langle \mathbf{x}_v(u_0, v_0), \mathbf{x}_v(u_0, v_0) \rangle_L \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Entonces g es degenerada si y sólo si $\det[g] = 0$. Por lo tanto, estudiar el determinante de la matriz $[g]$ nos permite determinar el carácter causal del espacio $T_p S$.

Continuaremos con algunos ejemplos de superficies que vamos a considerarlas como superficies del espacio lorentziano \mathbb{L}^3 y clasificaremos el conjunto de puntos donde el espacio tangente es un subespacio luz.

Ejemplo 3.1. Sea π un plano en \mathbb{R}^3 . Entonces podemos escribir a π de manera única como

$$\pi = p + \pi_0,$$

donde p es un punto de \mathbb{R}^3 y π_0 es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^3 de dimensión dos. Sea $\{w_1, w_2\}$ una base ortogonal lorentziana de π_0 .

Podemos cubrir a π con un único parche $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \pi$ definido por

$$\mathbf{x}(u, v) = p + uw_1 + vw_2.$$

Luego

$$\mathbf{x}_u(u, v) = w_1 \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_v(u, v) = w_2.$$

Por lo tanto,

$$[g] = \begin{pmatrix} \langle w_1, w_1 \rangle_L & 0 \\ 0 & \langle w_2, w_2 \rangle_L \end{pmatrix}.$$

Tenemos que $\det([g]) = 0$ si y sólo si π_0 es un subespacio luz.

Recordemos que en el espacio euclídeo \mathbb{E}^3 decimos que un vector $p \in \mathbb{R}^3$ es unitario si verifica que $\|p\|_E = 1$. Entonces p es unitario si y sólo si p verifica la ecuación

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1$$

donde (p_1, p_2, p_3) son las componentes de p en la base canónica de \mathbb{R}^3 . El conjunto de vectores unitarios en \mathbb{E}^3 se llama *esfera* y la vamos a denotar con \mathbb{S}^2 .

Ejemplo 3.2. Consideremos la esfera \mathbb{S}^2 definida por

$$\mathbb{S}^2 = \{p \in \mathbb{R}^3 : p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1\}.$$

Recordemos que \mathbb{S}^2 es una superficie que puede ser cubierta por los parches

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(u, v) &= (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}), & \mathbf{x}_2(u, v) &= (u, v, -\sqrt{1 - u^2 - v^2}), \\ \mathbf{x}_3(u, v) &= (u, \sqrt{1 - u^2 - v^2}, v), & \mathbf{x}_4(u, v) &= (u, -\sqrt{1 - u^2 - v^2}, v), \\ \mathbf{x}_5(u, v) &= (\sqrt{1 - u^2 - v^2}, u, v), & \mathbf{x}_6(u, v) &= (-\sqrt{1 - u^2 - v^2}, u, v), \end{aligned}$$

donde $(u, v) \in D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

En particular consideremos a

$$\mathbf{x}_1(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}).$$

Este parche verifica

$$(\mathbf{x}_1)_u = \left(1, 0, -\frac{u}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}\right) \quad \text{y} \quad (\mathbf{x}_1)_v = \left(0, 1, -\frac{v}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}\right).$$

Entonces la matriz de g asociada a la base $\{(\mathbf{x}_1)_u, (\mathbf{x}_1)_v\}$ de $T_{\mathbf{x}_1(u,v)}S$ es

$$[g] = \begin{pmatrix} -1 + \frac{u^2}{1 - u^2 - v^2} & \frac{uv}{1 - u^2 - v^2} \\ \frac{uv}{1 - u^2 - v^2} & 1 + \frac{v^2}{1 - u^2 - v^2} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\det([g]) = -1 + \frac{u^2 - v^2}{1 - u^2 - v^2} = 0 \Leftrightarrow |u| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

La imagen $\mathbf{x}_1(D)$ es el “casquete superior” de la esfera. Por lo tanto, los puntos donde los planos tangentes son degenerados en el casquete superior son los puntos $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ que verifican $|x| = 1/\sqrt{2}$.

Consideremos la parametrización $\mathbf{x}_2(u, v) = (u, v, -\sqrt{1 - u^2 - v^2})$. Entonces

$$(\mathbf{x}_2)_u = \left(1, 0, \frac{u}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}\right), \quad (\mathbf{x}_2)_v = \left(0, 1, \frac{v}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}\right)$$

y

$$[g] = \begin{pmatrix} -1 + \frac{u^2}{1 - u^2 - v^2} & \frac{uv}{1 - u^2 - v^2} \\ \frac{uv}{1 - u^2 - v^2} & 1 + \frac{v^2}{1 - u^2 - v^2} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, los puntos con planos tangentes degenerados en $\mathbf{x}_2(D)$, el “casquete inferior” de \mathbb{S}^2 , son los puntos $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ que verifican $|x| = 1/\sqrt{2}$.

De manera análoga podemos considerar las parametrizaciones $\mathbf{x}_{3,4}(u, v) = (u, \pm\sqrt{1 - u^2 - v^2}, v)$. Entonces estas parametrizaciones verifican

$$(\mathbf{x}_{3,4})_u = \left(1, \mp \frac{u}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}, 0\right), \quad (\mathbf{x}_{3,4})_v = \left(0, \mp \frac{v}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}, 1\right)$$

y la matriz asociada a g es nuevamente

$$[g] = \begin{pmatrix} -1 + \frac{u^2}{1 - u^2 - v^2} & \frac{uv}{1 - u^2 - v^2} \\ \frac{uv}{1 - u^2 - v^2} & 1 + \frac{v^2}{1 - u^2 - v^2} \end{pmatrix}.$$

Los puntos con tangentes degenerados en $\mathbf{x}_3(D) \cup \mathbf{x}_4(D)$ son los puntos $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ que verifican $|x| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Finalmente, consideremos las parametrizaciones $\mathbf{x}_{5,6}(u, v) = (\pm\sqrt{1 - u^2 - v^2}, u, v)$. Entonces

$$(\mathbf{x}_{5,6})_u = \left(\mp \frac{u}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}, 1, 0\right), \quad (\mathbf{x}_{5,6})_v = \left(\mp \frac{v}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}, 0, 1\right)$$

y la matriz asociada a g es

$$[g] = \begin{pmatrix} 1 - \frac{u^2}{1 - u^2 - v^2} & -\frac{uv}{1 - u^2 - v^2} \\ -\frac{uv}{1 - u^2 - v^2} & 1 - \frac{v^2}{1 - u^2 - v^2} \end{pmatrix}.$$

En este caso

$$\det([g]) = 1 - \frac{u^2 + v^2}{1 - u^2 - v^2} = 0 \Leftrightarrow u^2 + v^2 = \frac{1}{2}.$$

Entonces, en las parametrizaciones $\mathbf{x}_{5,6}$, tenemos que los puntos $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ con tangentes degenerados verifican

$$|x| = \sqrt{1 - u^2 - v^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Por lo tanto, como estos parches cubren a \mathbb{S}^2 , tenemos que el conjunto de puntos degenerados de \mathbb{S}^2 es

$$S_0 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : |x| = \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}.$$

Observemos que $\|p\|_L = 1$ si y sólo si

$$|\langle p, p \rangle_L| = |-p_1^2 + p_2^2 + p_3^2| = 1.$$

Esto trae problemas a la hora de definir una esfera en el espacio \mathbb{L}^3 pues depende de la elección del signo. La siguientes definiciones pueden verse en [O'N83, Definición 23, Página 110].

Definición 3.3. Llamamos **pseudoesfera** al conjunto

$$\{p \in \mathbb{R}^3 : \langle p, p \rangle_L = 1\}$$

y lo denotamos por \mathbb{S}_1^2 .

La pseudoesfera se define por la ecuación cartesiana de un hiperboloide de una hoja definido por la ecuación

$$-x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

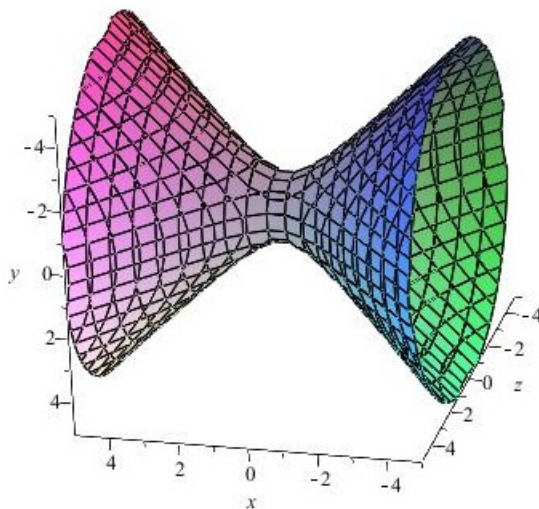


Figura 3.1: Pseudoesfera.

Ejemplo 3.4. Consideremos la pseudoesfera

$$\mathbb{S}_1^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Sea $p = (x, y, z)$ un punto en \mathbb{S}_1^2 , entonces valen las siguientes igualdades

$$|y| = \sqrt{1 + x^2 - z^2} \quad \text{y} \quad |z| = \sqrt{1 + x^2 - y^2}.$$

Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 + x^2 - y^2 > 0\}$ y $\mathbf{x}_i : A \rightarrow \mathbb{S}_1^2$, con $i = 1, 2, 3, 4$, dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(u, v) &= (u, v, \sqrt{1 + u^2 - v^2}), & \mathbf{x}_3(u, v) &= (u, \sqrt{1 + u^2 - v^2}, v), \\ \mathbf{x}_2(u, v) &= (u, v, -\sqrt{1 + u^2 - v^2}), & \mathbf{x}_4(u, v) &= (u, -\sqrt{1 + u^2 - v^2}, v). \end{aligned}$$

Estas parametrizaciones hacen de \mathbb{S}_1^2 una superficie.

Para simplificar las cuentas vamos a denotar a estas parametrizaciones como

$$\mathbf{x}_{1,2}(u, v) = (u, v, \pm\sqrt{1 + u^2 - v^2}) \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_{3,4}(u, v) = (u, \pm\sqrt{1 + u^2 - v^2}, v).$$

Las primeras parametrizaciones verifican

$$(\mathbf{x}_{1,2})_u = \left(1, 0, \pm \frac{u}{\sqrt{1 + u^2 - v^2}}\right) \quad \text{y} \quad (\mathbf{x}_{1,2})_v = \left(0, 1, \mp \frac{v}{\sqrt{1 + u^2 - v^2}}\right).$$

Entonces la matriz de g es

$$[g] = \begin{pmatrix} -1 + \frac{u^2}{1 + u^2 - v^2} & -\frac{uv}{1 + u^2 - v^2} \\ -\frac{uv}{1 + u^2 - v^2} & 1 + \frac{v^2}{1 + u^2 - v^2} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

y por lo tanto

$$\det([g]) = -1 + \frac{u^2 - v^2}{1 + u^2 - v^2} = \frac{-1}{1 + u^2 - v^2} < 0$$

para todo $(u, v) \in A$.

De igual manera

$$(\mathbf{x}_{3,4})_u = \left(1, \pm \frac{u}{\sqrt{1 + u^2 - v^2}}, 0\right) \quad \text{y} \quad (\mathbf{x}_{3,4})_v = \left(0, \mp \frac{v}{\sqrt{1 + u^2 - v^2}}, 1\right).$$

Nuevamente la matriz asociada a g es (3.2). Por lo tanto, como todos estos parches cubren a \mathbb{S}_1^2 , tenemos que g es una métrica en todos los planos tangentes de \mathbb{S}_1^2 .

Definición 3.5. Llamamos **espacio pseudohiperbólico** al conjunto

$$\{p \in \mathbb{R}^3 : \langle p, p \rangle_L = -1\}$$

y lo denotamos por \mathcal{H}^2 .

El espacio pseudohiperbólico se define por la ecuación de un hiperboloide de dos hojas dado por la ecuación

$$-x^2 + y^2 + z^2 = -1.$$

A diferencia de la pseudoesfera, el espacio pseudohiperbólico es no conexo. Esto se puede ver en la figura 3.2.

La componente conexa de \mathcal{H}^2 que contiene al versor canónico $e_1 = (1, 0, 0)$ es el **espacio hiperbólico**, y lo denotamos con \mathbb{H}^2 .

$$\mathbb{H}^2 = \{(x, y, z) \in \mathcal{H}^2 : x > 0\}.$$

Ejemplo 3.6. Consideremos el espacio pseudohiperbólico

$$\mathcal{H}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x^2 + y^2 + z^2 = -1\}.$$

Sea $p = (x, y, z) \in \mathcal{H}^2$, entonces

$$|x| = \sqrt{1 + y^2 + z^2}.$$

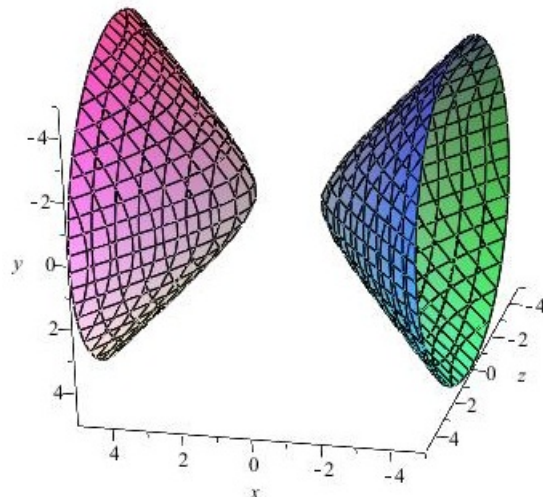


Figura 3.2: Espacio pseudohiperbólico.

Podemos cubrir a \mathcal{H}^2 con los parche inducidos por las parametrizaciones

$$\mathbf{x}_1(u, v) = (\sqrt{1 + u^2 + v^2}, u, v) \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2(u, v) = (-\sqrt{1 + u^2 + v^2}, u, v).$$

definidas para $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Los parches definidos por las parametrizaciones anteriores hacen de \mathcal{H}^2 una superficie. Más aún, el espacio hiperbólico \mathbb{H}^2 es una superficie que puede ser cubierta por el parche $(\mathbb{R}^2, \mathbf{x}_1)$, y el parche $(\mathbb{R}^2, \mathbf{x}_2)$ cubre la otra componente conexas de \mathcal{H}^2 .

Para simplificar las cuentas, consideremos la expresión

$$\mathbf{x}_{1,2}(u, v) = (\pm\sqrt{1 + u^2 + v^2}, u, v).$$

Entonces

$$(\mathbf{x}_{1,2})_u = \left(\pm \frac{u}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}}, 1, 0 \right) \quad \text{y} \quad (\mathbf{x}_{1,2})_v = \left(\pm \frac{v}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}}, 0, 1 \right),$$

y la matriz asociada a g es

$$[g] = \begin{pmatrix} 1 - \frac{u^2}{1 + u^2 + v^2} & -\frac{uv}{1 + u^2 + v^2} \\ -\frac{uv}{1 + u^2 + v^2} & 1 - \frac{v^2}{1 + u^2 + v^2} \end{pmatrix}$$

y su determinante es

$$\det([g]) = 1 - \frac{u^2 + v^2}{1 + u^2 + v^2} = \frac{1}{1 + u^2 + v^2} > 0.$$

Los parches definidos por las parametrizaciones anteriores cubren a \mathcal{H}^2 . Luego \mathcal{H}^2 es una superficie que no tiene planos tangentes degenerados. Más aún, como el determinante es positivo y el coeficiente

$$1 - \frac{u^2}{1 + u^2 + v^2} = \frac{1 + v^2}{1 + u^2 + v^2} > 0,$$

la forma cuadrática en cada punto es definida positiva. Esto es, en cada plano tangente la métrica de \mathbb{L}^3 restringida define un producto interno.

Ejemplo 3.7. Finalmente, consideremos el cono nulo

$$\Lambda = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x^2 + y^2 + z^2 = 0\} - \{0\}.$$

Como Λ no contiene al vector nulo, dado $(x, y, z) \in \Lambda$ se verifica $x \neq 0$, pues si existe $(0, y, z) \in \Lambda$, entonces

$$y^2 + z^2 = 0.$$

Luego $y = z = 0$, lo cual es absurdo. Entonces dado $(x, y, z) \in \Lambda$,

$$|x| = \sqrt{y^2 + z^2}.$$

Esta ecuación define dos parametrizaciones $\mathbf{x}_i : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \Lambda$ definidas por

$$\mathbf{x}_1(u, v) = (\sqrt{u^2 + v^2}, u, v) \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2(u, v) = (-\sqrt{u^2 + v^2}, u, v).$$

Como los parches anteriores cubren a Λ tenemos que Λ es una superficie.

Nuevamente denotamos

$$\mathbf{x}_{1,2}(u, v) = (\pm\sqrt{u^2 + v^2}, u, v).$$

Entonces

$$(\mathbf{x}_{1,2})_u = \left(\pm \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, 1, 0 \right) \quad \text{y} \quad (\mathbf{x}_{1,2})_v = \left(\pm \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, 0, 1 \right),$$

y la matriz asociada a g es

$$[g] = \begin{pmatrix} 1 - \frac{u^2}{u^2 + v^2} & -\frac{uv}{u^2 + v^2} \\ -\frac{uv}{u^2 + v^2} & 1 - \frac{v^2}{u^2 + v^2} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, su determinante es $\det([g]) = 0$ para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, y resulta que todos los puntos de Λ tiene planos tangentes degenerados como subespacios vectoriales de \mathbb{R}^3 .

Dada una superficie tenemos tres posibilidades: la superficie no tiene tangentes degenerados, tiene tangentes degenerados pero no son todos, o todos sus planos tangentes son degenerados como es el caso del cono nulo.

Definición 3.8. Sean S una superficie y $p \in S$. Decimos que S es **degenerada en p** si el plano tangente $T_p S$ es un subespacio degenerado en \mathbb{L}^3 . Decimos que S es

- **degenerada o luz** si S es degenerada en p , para todo $p \in S$,
- **no degenerada** si S no es degenerada en p , para todo $p \in S$.

Observemos que esta definición no depende de los parches elegidos para cubrir a S , pues miramos a $T_p S$ como subespacio de \mathbb{R}^3 sin fijar ninguna base en $T_p S$.

En lo que sigue daremos algunos criterios para determinar los puntos degenerados de dos familias de superficies: la familia de las superficies dadas por el gráfico de funciones diferenciables y la familia de superficies dadas por la preimagen de un valor regular.

Primero, sea S una superficie dada por el gráfico de una función diferenciable, esto es, supongamos que $S = \mathbf{x}(U)$ donde U es un abierto de \mathbb{R}^2 ,

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable. Entonces

$$\mathbf{x}_u(u, v) = (1, 0, f_u(u, v)) \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_v(u, v) = (0, 1, f_v(u, v)),$$

donde $f_u = \frac{\partial f}{\partial u}$ y $f_v = \frac{\partial f}{\partial v}$. En este caso

$$[g] = \begin{pmatrix} -1 + f_u^2 & f_u f_v \\ f_u f_v & 1 + f_v^2 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$\det([g]) = -1 + f_u^2 - f_v^2.$$

Por lo tanto, $T_{\mathbf{x}(u_0, v_0)}S$ es degenerado si y sólo se verifica

$$1 + f_v^2(u_0, v_0) = f_u^2(u_0, v_0).$$

Observación 3.9. Si consideramos las otras familias de gráficos de funciones diferenciables, esto es, superficies dadas por las parametrizaciones

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, f(u, v), v) \quad \text{o} \quad \mathbf{y}(u, v) = (g(u, v), u, v),$$

tenemos que la condición anterior se traduce a

$$f_u^2(u_0, v_0) = 1 + f_v^2(u_0, v_0) \quad \text{o} \quad g_u^2(u_0, v_0) = 1 - g_v^2(u_0, v_0),$$

respectivamente.

Supongamos ahora que S es una superficie dada por la preimagen de un valor regular, esto es, $S = f^{-1}(a)$ donde $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable definida en un abierto U de \mathbb{R}^3 y a es un valor regular de f .

De la proposición 1.9 podemos caracterizar a los subespacios degenerados de la siguiente manera:

Sea W un subespacio de \mathbb{R}^3 . Son equivalentes:

1. W es degenerado,
2. $W^{\perp L}$ es degenerado,
3. $W \cap W^{\perp L} \neq \{0\}$.

Esta caracterización nos permite determinar el carácter causal del espacio tangente $T_p S$ si tenemos un vector normal no nulo a la superficie en p . Vamos a construir un vector normal a S para poder utilizar esta idea. Recordemos que, si S es la preimagen de un valor regular de una función diferenciable $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ definida en un abierto U de \mathbb{R}^3 , tenemos la siguiente propiedad:

$$\text{grad}_E f(p) \in T_p S^{\perp E},$$

para todo $p \in S$. Por lo tanto, podemos usar al vector gradiente $\text{grad}_E f(p)$ para construir un vector normal lorentziano.

Observemos que para todo $v \in T_p S$, con $v = (v_1, v_2, v_3)$ en la base canónica,

$$0 = \langle \text{grad}_E f(p), v \rangle_E = f_x(p)v_1 + f_y(p)v_2 + f_z(p)v_3 = -(-f_x(p))v_1 + f_y(p)v_2 + f_z(p)v_3 = \langle w_p, v \rangle_L,$$

donde $w_p = (-f_x(p), f_y(p), f_z(p))$. Por lo tanto, $w_p \in T_p S^{\perp L}$.

Lema 3.10. Sean U un abierto de \mathbb{R}^3 y $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en $p \in U$. Entonces existe un único vector $w \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$dF_p(v) = \langle w, v \rangle_L$$

para todo $v \in \mathbb{R}^3$. El vector w se llama **gradiente lorentziano de F en p** y lo denotamos por $\text{grad}_L f(p)$.

Demostración. Supongamos que w existe y tiene la representación $w = (w_1, w_2, w_3)$ en la base canónica. Entonces, si tomamos $v = (1, 0, 0)$, tenemos que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = dF_p(v) = \langle w, v \rangle_L = -w_1.$$

De manera análoga, si consideramos los vectores canónicos $v = (0, 1, 0)$ y $v = (0, 0, 1)$, tenemos

$$\frac{\partial F}{\partial y} = w_2, \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial z} = w_3.$$

Por lo tanto,

$$w = \left(-\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right). \quad (3.3)$$

Probamos que si existe, entonces tiene la forma (3.3), y por lo tanto es único. Sólo basta probar que w dado en (3.3) verifica la tesis. En efecto, sea $v \in T_p S$, con $v = (v_1, v_2, v_3)$ en la base canónica, entonces

$$dF_p(v) = v_1 dF_p(1, 0, 0) + v_2 dF_p(0, 1, 0) + v_3 dF_p(0, 0, 1) = -v_1 \left(-\frac{\partial F}{\partial x} \right) + v_2 \frac{\partial F}{\partial y} + v_3 \frac{\partial F}{\partial z} = \langle w, v \rangle_L.$$

□

Observación 3.11. En la demostración anterior obtenemos una expresión para $\text{grad}_L F$ en la base canónica de \mathbb{R}^3 , a saber

$$\text{grad}_L F = \left(-\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right).$$

Volviendo, tenemos que el vector w_p es el gradiente lorentziano de f en p . Por lo tanto, $\text{grad}_L f(p) \in T_p S^{\perp L}$.

Observemos que

$$\langle \text{grad}_E f(p), \text{grad}_E f(p) \rangle_L = \langle \text{grad}_L f(p), \text{grad}_L(p) \rangle_L.$$

Luego, los vectores $\text{grad}_L f(p)$ y $\text{grad}_E f(p)$ tienen el mismo carácter causal. Esto implica que los espacios $T_p S^{\perp L}$ y $T_p S^{\perp E}$ tienen el mismo carácter causal. Por otro lado, el subespacio $T_p S$ es luz si y sólo si $T_p S^{\perp L}$ es un subespacio luz.

Por lo tanto, son equivalentes:

- $T_p S$ es un subespacio luz,
- $T_p S^{\perp L}$ es un subespacio luz,
- $T_p S^{\perp E}$ es un subespacio luz.

3.2. Normal unitario

Sean S una superficie no degenerada y (U, \mathbf{x}) un parche coordenado de S . Los vectores $\mathbf{x}_u(u, v)$ y $\mathbf{x}_v(u, v)$ forman una base del espacio tangente $T_{\mathbf{x}(u, v)}S$. El producto vectorial lorentziano de los vectores $\mathbf{x}_u(u, v)$ y $\mathbf{x}_v(u, v)$ define un vector no nulo y normal a S . Observemos que

$$\|\mathbf{x}_u(u, v) \times_L \mathbf{x}_v(u, v)\|_L \neq 0,$$

pues T_pS es no degenerado lo que implica que $T_pS^{\perp L}$ es no degenerado. Definimos la función

$$n^L(u, v) = \frac{\mathbf{x}_u(u, v) \times_L \mathbf{x}_v(u, v)}{\|\mathbf{x}_u(u, v) \times_L \mathbf{x}_v(u, v)\|_L},$$

que es una función diferenciable en U y verifica que

$$\|n^L(u, v)\|_L = 1 \quad \text{y} \quad n^L(u, v) \in T_{\mathbf{x}(u, v)}S^{\perp L}.$$

Definición 3.12. Sean S una superficie no degenerada y (U, \mathbf{x}) un parche coordenado de S . La aplicación $n^L : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$n^L(u, v) = \frac{\mathbf{x}_u(u, v) \times_L \mathbf{x}_v(u, v)}{\|\mathbf{x}_u(u, v) \times_L \mathbf{x}_v(u, v)\|_L}$$

se llama **normal unitario lorentziano a S en (u, v)** .

Observemos que esta definición depende del parche elegido, pues si cambiamos el parche podemos obtener otro normal unitario lorentziano que es el opuesto al anterior.

De igual manera tenemos definido un vector normal unitario euclídeo por

$$n^E(u, v) = \frac{\mathbf{x}_u(u, v) \times_E \mathbf{x}_v(u, v)}{\|\mathbf{x}_u(u, v) \times_E \mathbf{x}_v(u, v)\|_E}.$$

Por la representación de $\cdot \times_L \cdot$ en la base canónica de \mathbb{R}^3 , dada en la proposición 1.22, que difiere en la representación del producto vectorial euclídeo por un signo en la primera componente. Entonces, tenemos la relación

$$\langle x_u \times_L x_v, x_u \times_L x_v \rangle_L = \langle x_u \times_E x_v, x_u \times_E x_v \rangle_L. \quad (3.4)$$

Luego,

$$\langle n^E, n^E \rangle_L = \frac{\|\mathbf{x}_u(u, v) \times_L \mathbf{x}_v(u, v)\|_L^2}{\|\mathbf{x}_u(u, v) \times_E \mathbf{x}_v(u, v)\|_E^2} \langle n^L, n^L \rangle_L$$

y los vectores n^L y n^E tienen el mismo carácter causal. Esto implica que los espacios $T_pS^{\perp L}$ y $T_pS^{\perp E}$ tienen el mismo carácter causal.

Por otro lado, por la proposición 1.18, los espacios T_pS y $T_pS^{\perp L}$ son ambos subespacio luz o ambos son no degenerados y tienen distinto carácter causal.

Esto se puede resumir en la siguiente proposición.

Proposición 3.13. Sean S una superficie y $p \in S$. Son equivalentes:

1. T_pS es un subespacio espacial (resp. temporal),
2. $T_pS^{\perp L}$ es un subespacio temporal (resp. espacial),
3. $T_pS^{\perp E}$ es un subespacio temporal (resp. espacial).

Por otro lado, son equivalentes:

4. $T_p S$ es un subespacio luz,
5. $T_p S^{\perp L}$ es un subespacio luz,
6. $T_p S^{\perp E}$ es un subespacio luz.

Daremos la definición de primera forma fundamental lorentziana para la familia de superficies no degeneradas. Observemos que ya dimos algunos criterios que nos permiten determinar qué puntos de una superficie tienen planos tangentes degenerados.

Definición 3.14. Sean S una superficie no degenerada y p un punto en S . La forma cuadrática $I_p^L : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$I_p^L(v) = \langle v, v \rangle_L$$

se llama **primera forma fundamental lorentziana de S en p** .

En los ejemplos 3.1, 3.4 y 3.6 tenemos que la aplicación g definida es la primera forma fundamental de la superficie en cada ejemplo. En el ejemplo 3.2, caracterizamos al conjunto de puntos degenerados de la esfera \mathbb{S}^2 , que llamamos S_0 . Si queremos definir la primera forma fundamental lorentziana en \mathbb{S}^2 tenemos que quedarnos con el conjunto de puntos no degenerados de \mathbb{S}^2 . Esto nos lleva a pensar si el conjunto $\mathbb{S}^2 - S_0$ es una superficie no degenerada.

Más específicamente, sean S una superficie y S_0 el conjunto de puntos degenerados de S tal que $S - S_0$ es no vacío. Nos preguntamos si el conjunto $S - S_0$ es una superficie. Vamos a probar que, efectivamente, $S - S_0$ es una superficie. Sean $p \in S - S_0$ y (U, \mathbf{x}) un parche de S en p tal que $p = (u_0, v_0)$. La función

$$\phi(u, v) = \langle n^L(u, v), n^L(u, v) \rangle_L$$

definida sobre U , es composición de funciones diferenciables y resulta una función diferenciable. Como p no es un punto degenerado, $\phi(u_0, v_0) \neq 0$ y por conservación local de signo existe un entorno abierto W de (u_0, v_0) en \mathbb{R}^2 tal que $W \subset U$ y ϕ no cambia de signo en (u_0, v_0) . Entonces ϕ no se anula en W y (W, \mathbf{x}) es un parche coordenado de $S - S_0$. Por lo tanto, $S - S_0$ es una superficie.

Por lo tanto, en toda superficie S que no sea no degenerada, podemos considerar el subconjunto de S de puntos no degenerados que resulta una superficie no degenerada.

Proposición 3.15. Sean S una superficie y S_0 el conjunto de puntos degenerados de S . Si $S - S_0$ es no vacío, entonces $S - S_0$ es una superficie.

Ahora vamos a dar una representación de la primera forma fundamental lorentziana en coordenadas locales.

Sean S una superficie no degenerada y (U, \mathbf{x}) un parche coordenado en S . La matriz asociada a la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ en la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ de $T_p S$ es la matriz $[g]$ que calculamos en 3.1. A saber, es

$$\begin{pmatrix} \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_L & \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_L \\ \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_L & \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_L \end{pmatrix}.$$

Los coeficientes

$$\begin{aligned} E^L(u, v) &= \langle \mathbf{x}_u(u, v), \mathbf{x}_u(u, v) \rangle_L, \\ F^L(u, v) &= \langle \mathbf{x}_u(u, v), \mathbf{x}_v(u, v) \rangle_L \quad \text{y} \\ G^L(u, v) &= \langle \mathbf{x}_v(u, v), \mathbf{x}_v(u, v) \rangle_L \end{aligned} \tag{3.5}$$

se llaman **coeficientes de la primera forma fundamental lorentziana de S en $\mathbf{x}(u, v)$** . La matriz

$$\begin{pmatrix} E^L(u, v) & F^L(u, v) \\ F^L(u, v) & G^L(u, v) \end{pmatrix}$$

es la **matriz de la primera forma fundamental lorentziana de S en $\mathbf{x}(u, v)$** .

3.3. Superficies degeneradas

Los únicos ejemplos de superficies luz que vimos hasta ahora son el cono nulo Λ y los planos luz. Se han obtenido algunos resultados de clasificación para familias de superficies luz, como por ejemplo, en el trabajo [BFL98] tenemos la siguiente caracterización.

Teorema 3.16. *Las únicas superficies dadas por gráficos de funciones diferenciables que son degeneradas y tienen curvatura media igual a cero son planos.*

En el trabajo [iIL09], el autor prueba que las únicas superficies luz de revolución, utilizando las rotaciones del grupo de isometrías de \mathbb{L}^3 , son planos y conos de luz, como enunciamos en el siguiente resultado.

Diremos que dos superficies S_1 y S_2 son *congruentes (en \mathbb{L}^3)* si existe una isometría lorentziana f tal que $f(S_1) = S_2$.

Teorema 3.17. *Todas las superficies degeneradas de revolución en \mathbb{L}^3 son congruentes a planos o al cono nulo.*

En el trabajo [iIL09] también se afirma que todas las superficies degeneradas son superficies regladas por curvas luz. Esto nos da una idea geométrica de estas superficies. Recordemos que una superficie reglada S es la superficie generada por una recta de dirección variable w_0 que se mueve sobre una curva α en \mathbb{R}^3 . Más precisamente, sean $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular y $w_0 : I \rightarrow \mathbb{S}^2$ una función diferenciable. Sea S el conjunto imagen dado por la parametrización $\mathbf{x} : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathbf{x}(t, v) = \alpha(t) + vw_0(t).$$

Si los vectores $\mathbf{x}_t(t, v)$ y $\mathbf{x}_v(t, v)$ son linealmente independientes para cada $(t, v) \in I \times \mathbb{R}$, S es una superficie que llamaremos *superficie reglada* generada por la familia $\{\alpha(t), w_0(t)\}$. La curva α se llama *directriz de S* y, para cada $t_0 \in I$, la recta $\mathbf{x}(t_0, \cdot)$ es una *regla de S* . Para más detalles ver [dC17, Sección 3.5]

Teorema 3.18. *Sea S una superficie degenerada. Entonces S es reglada por curvas luz.*

En el año 2013, en el artículo [CC13], B. Carlsen y J. N. Clelland utilizaron el llamado *método de equivalencia de Cartan* para calcular invariantes locales para una subfamilia de las superficies luz que generaliza a las anteriores, llamadas *superficies de tipo constante en \mathbb{L}^3* . Además, obtuvieron una clasificación local de estas superficies y se construyeron nuevos ejemplos no canónicos. El siguiente resultado puede verse en [CC13].

Teorema 3.19. *Sea S una superficie degenerada, conexa y de tipo constante en \mathbb{L}^3 . Entonces, existe una isometría de \mathbb{L}^3 tal que S es isométrica a*

1. Un plano,
2. El cono nulo Λ ,
3. Una superficie parametrizada localmente por

$$\mathbf{x}(u, v) = e^u G_0(v) - \int_0^v G_0(\tau) d\tau - G_0(0),$$

donde $G_0(v)$ es la única solución de

$$G_0'''(v) - 2f(v)G_0'(v) - f'(v)G_0(v) = 0$$

que satisface las condiciones iniciales

$$G_0(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad G'_0(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad G''_0(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(f(0) + \frac{3}{2}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(f(0) - \frac{1}{2}) \\ 1 \end{pmatrix}$$

y $f(v)$ es una función diferenciable arbitraria de una variable.

A continuación mostraremos algunos ejemplos no canónicos de este trabajo. La prueba de que efectivamente son superficies degeneradas puede verse probando que el vector

$$n = \mathbf{x}_u \times_E \mathbf{x}_v$$

es un vector luz.

Ejemplo 3.20. La siguiente superficie se obtiene del teorema anterior suponiendo que $f(v) = 0$ y resolviendo la ecuación diferencial para obtener $G_0(v)$.

$$\mathbf{x}_1(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4\sqrt{2}}(e^u(3v^2 + 4v + 4) - (v^3 + 2v^2 + 4v + 4)) \\ \frac{1}{12\sqrt{2}}(e^u(-3v^2 + 12v + 12) + (v^3 - 6v^2 - 12v - 12)) \\ \frac{1}{6}(e^u(3v^2 + 6v) - (v^3 + 3v^2)) \end{pmatrix}^t$$

Tenemos que

$$n = \left(\frac{1}{8}\sqrt{2}e^{2u}(3v^2 + 4v + 4), \frac{1}{8}\sqrt{2}e^{2u}(v^2 - 4v - 4), -\frac{1}{2}e^{2u}v(v + 2) \right),$$

y este vector efectivamente verifica $\langle n, n \rangle_L = 0$. Es decir, n es un vector luz.

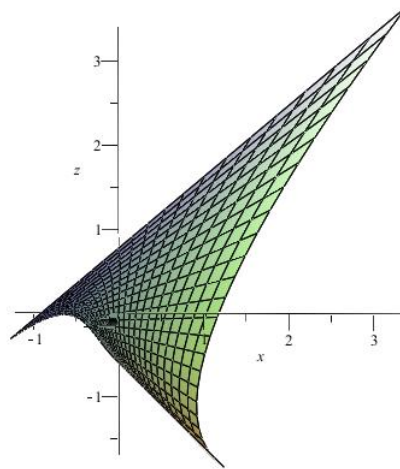


Figura 3.3: Gráfica de \mathbf{x}_1 en el cuadrado $[-1, 1] \times [-2, 2]$.

Ejemplo 3.21. Para $f(v) = 1$ tenemos la parametrización.

$$\mathbf{x}_2(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{16}(e^{\sqrt{2}v}((5\sqrt{2} + 4)e^u - 5 - 2\sqrt{2}) + e^{-\sqrt{2}v}((5\sqrt{2} - 4)e^u + 5 - 2\sqrt{2}) + 2\sqrt{2}(v - e^u - 2)) \\ \frac{1}{16}(e^{\sqrt{2}v}((\sqrt{2} + 4)e^u - 1 - 2\sqrt{2}) + e^{-\sqrt{2}v}((\sqrt{2} - 4)e^u + 1 - 2\sqrt{2}) + 2\sqrt{2}(-3v + 3e^u - 2)) \\ \frac{1}{8}(e^{\sqrt{2}v}((2\sqrt{2} + 2)e^u - 2 - \sqrt{2}) + e^{-\sqrt{2}v}((-2\sqrt{2} + 2)e^u - 2 + \sqrt{2}) + 4(v - e^u + 1)) \end{pmatrix}^t$$

En este caso

$$n = \begin{pmatrix} (\frac{5}{16}\sqrt{2} + \frac{1}{4})e^{\sqrt{2}v+2u} + (\frac{5}{16}\sqrt{2} - \frac{1}{4})e^{-\sqrt{2}v+2u} - \frac{1}{8}\sqrt{2}e^{2u} \\ (-\frac{1}{16}\sqrt{2} - \frac{1}{4})e^{\sqrt{2}v+2u} + (-\frac{1}{16}\sqrt{2} + \frac{1}{4})e^{-\sqrt{2}v+2u} - \frac{3}{8}\sqrt{2}e^{2u} \\ \frac{1}{4}(-\sqrt{2} - 1)e^{\sqrt{2}v+2u} + \frac{1}{4}(\sqrt{2} - 1)e^{-\sqrt{2}v+2u} + \frac{1}{2}e^{2u} \end{pmatrix}^t.$$

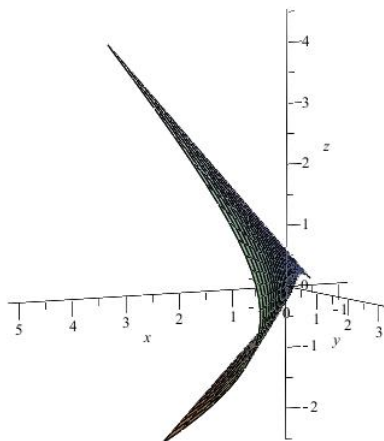


Figura 3.4: Gráfica de \mathbf{x}_2 en el cuadrado $[-1, 1] \times [-1, -1]$.

Ejemplo 3.22. Para $f(v) = -1$ tenemos la parametrización.

$$\mathbf{x}_3(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}(\sqrt{2}(2 - e^u) \cos(\sqrt{2}v) + (1 + 4e^u) \sin(\sqrt{2}v) - \sqrt{2}(5v - 5e^u + 6)) \\ \frac{1}{8}(\sqrt{2}(2 + 3e^u) \cos(\sqrt{2}v) + (-3 + 4e^u) \sin(\sqrt{2}v) - \sqrt{2}(v - e^u + 6)) \\ \frac{1}{4}((2 - 2e^u) \cos(\sqrt{2}v) + \sqrt{2}(1 + 2e^u) \sin(\sqrt{2}v) - (2v - 2e^u + 2)) \end{pmatrix}^t.$$

Finalmente, en este caso

$$n = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8}e^{2u}(\sqrt{2} \cos(\sqrt{2}v) - 4 \sin(\sqrt{2}v) - 5\sqrt{2}) \\ -\frac{1}{8}e^{2u}(3\sqrt{2} \cos(\sqrt{2}v) + 4 \sin(\sqrt{2}v) + \sqrt{2}) \\ -\frac{1}{2}e^{2u}(-\cos(\sqrt{2}v) + \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}v) + 1) \end{pmatrix}^t.$$

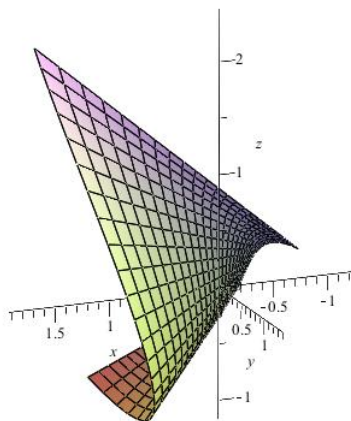


Figura 3.5: Gráfica de \mathbf{x}_3 en el cuadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

La dificultad de estudiar estas superficies es que en cada punto de la superficie la intersección del plano tangente y su subespacio ortogonal es no vacía y no tenemos una descomposición de la forma

$$\mathbb{L}^3 = T_p S \oplus T_p S^{\perp L}.$$

Por lo tanto, no tiene sentido definir un campo de vectores normales a la superficie. Por este motivo en el resto de este trabajo vamos a trabajar con la familia de superficies no degeneradas.

3.4. Aplicación de Gauss y orientación

Sean S una superficie no degenerada. Tenemos la descomposición

$$\mathbb{L}^3 = T_p S \oplus T_p S^{\perp L}.$$

para todo $p \in S$ Entonces el espacio normal a S está bien definido para todo $p \in S$.

Recordemos que S es orientable en el sentido de la métrica euclídea de \mathbb{R}^3 si existe una aplicación $N^E : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ continua tal que

$$N^E(p) \perp_E T_p S \quad \text{y} \quad N^E(p) \in \mathbb{S}^2$$

para todo $p \in S$, llamada *aplicación de Gauss euclídea*. En analogía con la teoría clásica de superficies en el espacio euclídeo resulta natural definir la aplicación de Gauss lorentziana como sigue.

Definición 3.23. Sea S una superficie no degenerada. Una aplicación $N^L : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ continua que verifica

$$\|N^L(p)\|_L = 1 \quad \text{y} \quad N^L(p) \in T_p S^{\perp L},$$

para todo $p \in S$, se llama **aplicación de Gauss lorentziana** de S .

Decimos que S es **orientable** si existe una aplicación de Gauss lorentziana definida en S .

En una superficie orientable en el sentido euclídeo podemos definir exactamente dos aplicaciones de Gauss, las cuales verifican que una es la aplicación opuesta de la otra.

Observemos que el espacio $T_p S^{\perp L}$ es un subespacio no degenerado de dimensión uno. Luego podemos generar al espacio $T_p S^{\perp L}$ con un vector no nulo. Por lo tanto, normalizando este vector tenemos que el espacio $T_p S^{\perp L}$ tiene exactamente dos vectores unitarios que verifican que uno es el opuesto del otro. Luego, por continuidad es posible definir exactamente dos aplicaciones de Gauss lorentzianas en una superficie no degenerada orientable.

Supongamos que S es una superficie orientable y fijemos una aplicación de Gauss lorentziana N^L de S .

Sea (U, \mathbf{x}) un parche coordenado en S . Tenemos definido el vector normal unitario

$$n^L(u, v) = \frac{\mathbf{x}_u \times_L \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times_L \mathbf{x}_v\|_L}.$$

Como los vectores $n^L(u, v)$ y $N^L \circ \mathbf{x}(u, v)$ son vectores unitarios en $T_p S^{\perp L}$, tenemos la relación

$$N^L \circ \mathbf{x}(u, v) = \pm n^L(u, v). \quad (3.6)$$

Observemos que la aplicación $n^L(u, v)$ es diferenciable pues la aplicación $\cdot \times_L \cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es diferenciable. En efecto, en la base canónica de \mathbb{R}^3 tenemos que por definición

$$u \times_L v = (-(u_2 v_3 - v_2 u_3), -(u_1 v_3 - v_1 u_3), u_1 v_2 - v_1 u_2),$$

que es una función diferenciable.

Esto nos lleva al siguiente resultado.

Proposición 3.24. Sean S una superficie no degenerada orientable y N^L una aplicación de Gauss lorentziana de S . Entonces N^L es diferenciable.

Fijado un parche coordenado tenemos que la aplicación de Gauss lorentziana es igual al normal unitario definido por el parche o su opuesto. Si cambiamos el parche puede cambiar el vector normal unitario. Esto genera un problema, pues si tomamos un atlas en la superficie entonces el normal unitario puede no ser continuo cuando pasamos de un parche a otro. Ahora vamos a probar que en toda superficie no degenerada orientable existe un atlas que verifica que el normal unitario cambia de manera continua. Pero primero veamos qué relación hay entre los normales unitarios definidos por dos parches distintos.

Supongamos que (U, \mathbf{x}) y (V, \mathbf{y}) son dos parches de S en un punto $p \in S$. Luego

$$W = \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V) \neq \emptyset,$$

pues $p \in W$. Sean $U_0 = \mathbf{x}^{-1}(W)$ y $V_0 = \mathbf{y}^{-1}(W)$.

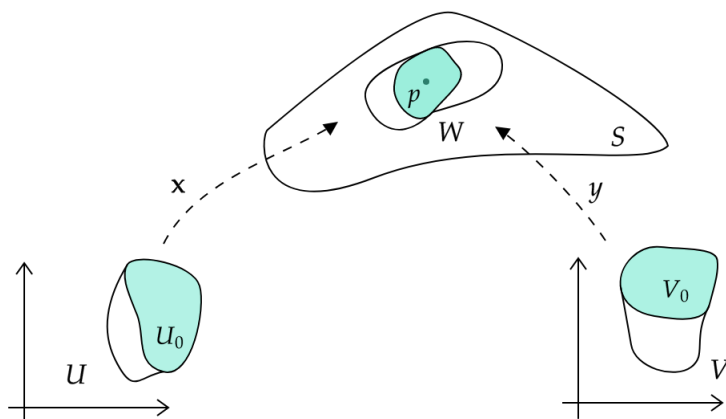


Figura 3.6: Ilustración de U_0 y V_0 .

Luego (U_0, \mathbf{x}) y (V_0, \mathbf{y}) son dos nuevos parches en p que verifican que para todo $(u, v) \in U_0$ existe un único $(\bar{u}, \bar{v}) \in V_0$ tal que

$$\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{y}(\bar{u}, \bar{v}). \quad (3.7)$$

Dado que \mathbf{x} es invertible, podemos pensar que u y v son funciones de (\bar{u}, \bar{v}) . Esto es

$$(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})) = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y}(\bar{u}, \bar{v}).$$

Derivando (3.7) respecto de \bar{u} y de \bar{v} , tenemos que

$$\begin{cases} \mathbf{y}_{\bar{u}} = \mathbf{x}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \mathbf{x}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \\ \mathbf{y}_{\bar{v}} = \mathbf{x}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \mathbf{x}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \end{cases}$$

Entonces

$$\mathbf{y}_{\bar{u}} \times_L \mathbf{y}_{\bar{v}} = \left(\mathbf{x}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \mathbf{x}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right) \times_L \left(\mathbf{x}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \mathbf{x}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right) = \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} - \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \right) \mathbf{x}_u \times_L \mathbf{x}_v$$

donde

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} := \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} - \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}}$$

es el **jacobiano del cambio de coordenadas**. Si el jacobiano del cambio de coordenadas es positivo los normales unitarios definidos por los parches (U_0, \mathbf{x}) y (V_0, \mathbf{y}) apuntan en la misma dirección.

Observemos que para el producto vectorial euclídeo tenemos una propiedad similar:

$$\mathbf{y}_{\bar{u}} \times_E \mathbf{y}_{\bar{v}} = \left(\mathbf{x}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \mathbf{x}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right) \times_E \left(\mathbf{x}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \mathbf{x}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right) = \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} - \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \right) \mathbf{x}_u \times_E \mathbf{x}_v.$$

Lema 3.25. *Sea S una superficie no degenerada. Entonces S es orientable si y sólo si existe una familia $\{(U_i, \mathbf{x}_i)\}_{i \in I}$ de parches coordenados de S que cubren S de modo que para cada $p \in S$, si tomamos dos parches que contengan a p entonces el cambio de coordenadas de estos parches tiene jacobiano positivo.*

Demostración. Supongamos primero que existe una aplicación de Gauss lorentziana N^L definida en S . Para cada $p \in S$, sea (U_p, \mathbf{x}_p) un parche coordenado de S en p tal que $\mathbf{x}_p(U_p)$ es conexo. El conjunto

$$A_1 = \{(U_p, \mathbf{x}_p)\}_{p \in S}$$

es una familia de parches que cubren S . Sea $(U, \mathbf{x}) \in A_1$, entonces para cada $(u, v) \in U$ tenemos definido un vector normal unitario en $\mathbf{x}(u, v)$, dado por

$$\frac{\mathbf{x}_u(u, v) \times_L \mathbf{x}_v(u, v)}{\|\mathbf{x}_u(u, v) \times_L \mathbf{x}_v(u, v)\|_L} \in T_{\mathbf{x}(u, v)} S^{\perp L}.$$

Luego

$$N^L \circ \mathbf{x} = \pm \frac{\mathbf{x}_u \times_L \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times_L \mathbf{x}_v\|_L}.$$

Observando que

$$\frac{\mathbf{x}_u(u, v) \times_L \mathbf{x}_v(u, v)}{\|\mathbf{x}_u(u, v) \times_L \mathbf{x}_v(u, v)\|_L} = - \frac{\mathbf{x}_v(u, v) \times_L \mathbf{x}_u(u, v)}{\|\mathbf{x}_v(u, v) \times_L \mathbf{x}_u(u, v)\|_L}$$

podemos intercambiar u con v de ser necesario para construir una nueva familia A de parches que cubren S de modo que para todo $(U, \mathbf{x}) \in A$,

$$N^L \circ \mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}_u \times_L \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times_L \mathbf{x}_v\|_L}.$$

Veamos que el jacobiano de cambio de coordenadas es siempre positivo. Sean (U, \mathbf{x}) y (V, \mathbf{y}) dos parches coordenados de A tales que $\mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V) \neq \emptyset$, y supongamos que existe $p \in \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V)$ tal que $p = \mathbf{x}(u, v) = \mathbf{y}(\bar{u}, \bar{v})$ y el jacobiano del cambio de coordenadas verifica

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} < 0.$$

Observemos que

$$\begin{aligned} N^L(p) &= \frac{\mathbf{x}_u(u, v) \times_L \mathbf{x}_v(u, v)}{\|\mathbf{x}_u(u, v) \times_L \mathbf{x}_v(u, v)\|_L} = \frac{\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} (\mathbf{y}_u(\bar{u}, \bar{v}) \times_L \mathbf{y}_v(\bar{u}, \bar{v}))}{\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \right| \|\mathbf{y}_u(\bar{u}, \bar{v}) \times_L \mathbf{y}_v(\bar{u}, \bar{v})\|_L} \\ &= - \frac{\mathbf{y}_u(\bar{u}, \bar{v}) \times_L \mathbf{y}_v(\bar{u}, \bar{v})}{\|\mathbf{y}_u(\bar{u}, \bar{v}) \times_L \mathbf{y}_v(\bar{u}, \bar{v})\|_L} = -N^L(p), \end{aligned}$$

lo cual es absurdo pues $N^L(p) \neq 0$.

Recíprocamente, supongamos que existe una familia $A = \{(U_i, \mathbf{x}_i)\}_{i \in I}$ de parches que cubren a S de modo que en cada punto de S , el cambio de coordenadas de estos parches tiene jacobiano positivo. Entonces en cada parche $(U, \mathbf{x}) \in A$ tenemos definido un normal unitario dado por

$$\frac{\mathbf{x}_u \times_L \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times_L \mathbf{x}_v\|_L}. \tag{3.8}$$

Definimos la aplicación $N^L : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$N^L(p) = \frac{\mathbf{x}_u(u, v) \times_L \mathbf{x}_v(u, v)}{\|\mathbf{x}_u(u, v) \times_L \mathbf{x}_v(u, v)\|_L},$$

donde $(U, \mathbf{x}) \in A$ es un parche que verifica $p \in \mathbf{x}(U)$. La aplicación N^L es continua pues (3.8) es continuo como aplicación de U , y es un campo de vectores normales unitarios. Basta con probar que N^L está bien definida, pues depende de la elección del parche (U, \mathbf{x}) . Supongamos que tomamos otro parche $(V, \mathbf{y}) \in A$ que verifica $p \in \mathbf{y}(V)$. Como el jacobiano de la transformación es positivo tenemos que

$$\frac{\mathbf{x}_u(u, v) \times_L \mathbf{x}_v(u, v)}{\|\mathbf{x}_u(u, v) \times_L \mathbf{x}_v(u, v)\|_L} = \frac{\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} (\mathbf{y}_u(\bar{u}, \bar{v}) \times_L \mathbf{y}_v(\bar{u}, \bar{v}))}{\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \right| \|\mathbf{y}_u(\bar{u}, \bar{v}) \times_L \mathbf{y}_v(\bar{u}, \bar{v})\|_L} = \frac{\mathbf{y}_u(\bar{u}, \bar{v}) \times_L \mathbf{y}_v(\bar{u}, \bar{v})}{\|\mathbf{y}_u(\bar{u}, \bar{v}) \times_L \mathbf{y}_v(\bar{u}, \bar{v})\|_L}.$$

Luego N^L está bien definida. □

Un atlas que verifica la condición del lema anterior se llama **atlas compatible**. Por lo tanto, podemos reescribir el lema anterior de la siguiente manera: una superficie S es orientable en el sentido de la métrica lorentziana si y sólo si existe un atlas compatible en S .

El lema anterior nos dice que una superficie no degenerada es orientable en el sentido de la métrica lorentziana si y sólo si es orientable en el sentido de la métrica euclídea, pues recordemos que tenemos un lema similar al anterior para el caso euclídeo:

Una superficie S es orientable (en el sentido de la métrica euclídea) si y sólo si existe un atlas compatible en S .

Por ese motivo, dada una superficie no degenerada S , decimos simplemente que S es orientable y no hacemos referencia a la métrica del espacio.

Más aún, esta caracterización nos permite generalizar la noción de orientabilidad dada en la definición 3.23 a una superficie arbitraria.

Definición 3.26. Sea S una superficie. Decimos que S es orientable si existe un atlas compatible en S .

Recordemos que en la demostración de la proposición 3.13 construimos un vector normal euclídeo a partir de un vector normal lorentziano. Esa construcción nos da una idea para construir una aplicación de Gauss respecto de la métrica lorentziana, a partir de una aplicación de Gauss euclídea, y viceversa.

Sea N^L una aplicación de Gauss lorentziana tal que $N^L = (N_1, N_2, N_3)$ en la base canónica de \mathbb{R}^3 . Entonces, por el mismo razonamiento que hicimos en la proposición 3.13, el vector $\bar{N} = (-N_1, N_2, N_3)$ verifica

$$\langle N^L(p), u \rangle_L = \langle \bar{N}(p), u \rangle_E,$$

para todo $u \in \mathbb{R}^3$. Dado que N^L no es el vector nulo, tenemos que $\bar{N} \neq 0$. Luego

$$N^E = \frac{\bar{N}}{\|\bar{N}\|_E}$$

es una aplicación de Gauss euclídea. Observando que $\|\bar{N}\|_E = \|N^L\|_E$, tenemos que

$$N^E = \frac{\bar{N}}{\|N^L\|_E}.$$

Por otro lado, sea N^E aplicación de Gauss euclídea tal que $N^E = (N_1, N_2, N_3)$ en la base canónica. El vector $\bar{N} = (-N_1, N_2, N_3)$ verifica

$$\langle N^E(p), u \rangle_E = \langle \bar{N}(p), u \rangle_L,$$

para todo $u \in \mathbb{R}^3$. Luego, $\bar{N}(p) \in T_p S^{\perp L}$ y como S es no degenerada, $\|\bar{N}\|_L \neq 0$. Más aún, $\|\bar{N}\|_L = \|N^E\|_L$. Por lo tanto,

$$N^L = \frac{\bar{N}}{\|\bar{N}\|_L} = \frac{\bar{N}}{\|N^E\|_L}$$

es una aplicación de Gauss lorentziana para S .

Teorema 3.27. *Sea S una superficie no degenerada orientable.*

- Sea $N^L : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación de Gauss lorentziana en S tal que $N^L = (N_1, N_2, N_3)$ en la base canónica y definimos $\bar{N} = (-N_1, N_2, N_3)$. Entonces la aplicación $N^E : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$N^E = \frac{\bar{N}}{\|N^L\|_E} \tag{3.9}$$

es una aplicación de Gauss euclídea de S .

- Sea $N^E : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación de Gauss euclídea en S tal que $N^E = (N_1, N_2, N_3)$ en la base canónica y definimos $\bar{N} = (-N_1, N_2, N_3)$. Entonces la aplicación $N^L : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$N^L = \frac{\bar{N}}{\|N^E\|_L} \tag{3.10}$$

es una aplicación de Gauss lorentziana de S .

En cada uno de los ejemplos vamos a calcular una aplicación de Gauss lorentziana para la superficie.

Ejemplo 3.28. La esfera \mathbb{S}^2 no es una superficie no degenerada. En el ejemplo 3.2 caracterizamos al conjunto de puntos degenerados de S . A saber,

$$S_0 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}.$$

Por la proposición 3.15, el conjunto $\mathbb{S}_*^2 := \mathbb{S}^2 - S_0$ es una superficie no degenerada, que resulta no conexa. Más aún, sus componentes conexas son:

- $C_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : x < -\frac{1}{\sqrt{2}}\}$,
- $C_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}\}$,
- $C_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : \frac{1}{\sqrt{2}} < x\}$.

Recordemos que una aplicación de Gauss euclídea para la esfera es $N^E(p) = p$. Luego una aplicación de Gauss lorentziana para \mathbb{S}_*^2 es

$$N^L(p) = \frac{1}{\|p\|_L} (-p_1, p_2, p_3).$$

Observemos que

$$\langle N^L(p), N^L(p) \rangle_L = \frac{-p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{|-p_1^2 + p_2^2 + p_3^2|} = \frac{1 - 2p_1^2}{|1 - 2p_1^2|}.$$

Luego $N^L(p)$ es un vector temporal (resp. espacial) si y sólo si $|p_1| < 1/\sqrt{2}$ (resp. $|p_1| > 1/\sqrt{2}$).

Por lo tanto, de las tres componentes conexas que definen a \mathbb{S}_*^2 , la componente “del medio” tiene una aplicación de Gauss temporal y en las otras dos la aplicación de Gauss es espacial.

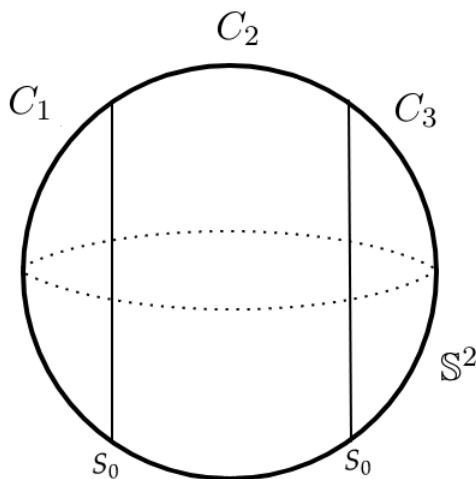


Figura 3.7: Componentes C_1 , C_2 y C_3 .

Ejemplo 3.29. Consideremos la superficie $S = \mathbb{S}_1^2$. Sean $p \in \mathbb{S}_1^2$ y $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable tal que $\alpha(I) \subset S$ y $\alpha(0) = p$. Entonces

$$\langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle_L = 1$$

para todo $s \in I$. Derivando respecto de s y tomando $s = 0$, tenemos que

$$\langle p, \alpha'(0) \rangle_L = 0.$$

Como esto vale para toda curva α , tenemos que $p \in T_p S^{\perp L}$. Definimos

$$N^L(p) = p$$

para $p \in \mathbb{S}_1^2$. Luego N^L es una aplicación de Gauss lorentziana de \mathbb{S}_1^2 . Luego, \mathbb{S}_1^2 es una superficie orientable.

De manera completamente análoga a la anterior, en el espacio pseudohiperbólico \mathcal{H}^2 podemos probar que la aplicación

$$N^L(p) = p$$

definida en \mathcal{H}^2 es una aplicación de Gauss lorentziana de la superficie \mathcal{H}^2 . Resulta que \mathcal{H}^2 es una superficie orientable.

Ejemplo 3.30. Sea S una superficie no degenerada dada por el gráfico de una función diferenciable, esto es, $S = \text{graf}(f)$ donde $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable definida en un abierto U de \mathbb{R}^2 . Observemos que S es una superficie que puede ser cubierta por un único parche (U, \mathbf{x}) definido por

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v)).$$

Luego, el vector normal unitario

$$n^L = \frac{1}{\sqrt{|-f_u^2 + f_v^2 + 1|}}(f_u, -f_v, 1)$$

inducido por el parche define una aplicación de Gauss lorentziana en S .

Ejemplo 3.31. Sea S una superficie no degenerada dada por la preimagen de un valor regular, esto es, $S = f^{-1}(a)$ donde $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una función diferenciable definida en un abierto U de \mathbb{R}^3 y a es un valor regular de f . El vector gradiente lorentziano verifica

$$\text{grad}_L f(p) \in T_p S^{\perp L}$$

para todo $p \in S$ y no es un vector luz. Entonces la aplicación

$$N^L = \frac{\text{grad}_L f}{\|\text{grad}_L f\|_L}$$

definida sobre S , donde $\text{grad}_L f$ está definido en el lema 3.10, es una aplicación de Gauss lorentziana para S .

Ejemplo 3.32. Sea π un plano, entonces existen $p \in \pi$ y π_0 subespacio de dimensión 2 tal que

$$\pi = p + \pi_0.$$

Sea $n \in \pi_0^{\perp L}$. Si suponemos que S es no degenerado, entonces $\pi_0^{\perp L}$ es no degenerado y podemos tomar $n \in \pi_0^{\perp L}$ de forma tal que $\|n\|_L \equiv 1$. Luego, el campo $N^L(p) \equiv n$ definido en π , es un campo de vectores unitarios normal continuo.

Observemos que la aplicación de Gauss no puede pasar de forma continua de un carácter causal a otro, en una superficie conexa. Esto surge de la continuidad de la aplicación de Gauss y la continuidad de la norma lorentziana. Por lo tanto, una superficie conexa, no degenerada y orientable tiene que tener una aplicación de Gauss que es un vector espacial o temporal en todos los puntos de la superficie. Luego, todos los planos tangentes de la superficie tienen el mismo carácter causal.

Recordemos que un subespacio W de \mathbb{L}^3 es espacial o temporal si la métrica de \mathbb{L}^3 restringida a W es espacial o temporal, respectivamente.

Definición 3.33. Sea S una superficie no degenerada. Decimos que S es una superficie

- **espacial**, si $T_p S$ es espacial para todo $p \in S$,
- **temporal**, si $T_p S$ es temporal para todo $p \in S$.

Observemos que toda superficie no degenerada orientable y conexa es espacial o temporal. Más aún, una superficie S no degenerada orientable es espacial (resp. temporal) si y sólo si su aplicación de Gauss es un vector temporal (resp. espacial) en todos los puntos de S .

Un ejemplo de una superficie espacial es el espacio pseudohiperbólico \mathcal{H}^2 pues es fácil ver que la aplicación de Gauss definida en el ejemplo 3.29 es temporal en todos los puntos de \mathcal{H}^2 . En el mismo ejemplo se puede ver que la pseudoesfera es un ejemplo de una superficie temporal.

Ahora vamos a dar algunos criterios sobre las familias de superficies ya vistas para determinar su carácter causal. Primero sea S es una superficie no degenerada dada por el gráfico de una función diferenciable, esto es, $S = \mathbf{x}(U)$ donde

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable definida en un abierto U de \mathbb{R}^2 . Entonces S es orientable y el vector

$$\mathbf{x}_u(u, v) \times_L \mathbf{x}_v(u, v) = (f_u, -f_v, 1).$$

está contenido en $T_p S^{\perp L}$. Entonces $T_{\mathbf{x}(u,v)} S$ es espacial (resp. temporal) si y sólo si $N^L \circ \mathbf{x}(u, v)$ es temporal (resp. espacial). Observemos que

$$\langle \mathbf{x}_u(u, v) \times_L \mathbf{x}_v(u, v), \mathbf{x}_u(u, v) \times_L \mathbf{x}_v(u, v) \rangle_L = -f_u^2 + f_v^2 + 1.$$

Supongamos ahora que S es una superficie dada por la preimagen de un valor regular, esto es, $S = f^{-1}(a)$ donde $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable definida en un abierto U de \mathbb{R}^3 y $a \in \mathbb{R}$ es un valor regular de f . Entonces tenemos que $\text{grad}_L f(p) \in T_p S^{\perp_L}$ para todo $p \in S$. Por lo tanto, el carácter causal del vector gradiente lorentziano de f en p determina el carácter causal de $T_p S$.

Tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.34. *Sea S una superficie.*

- *Supongamos que S es una superficie dada por el gráfico de una superficie diferenciable, esto es, $S = \mathbf{x}(U)$ donde*

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable definida en un abierto U de \mathbb{R}^2 . Entonces S es espacial (resp. temporal) si y sólo si f verifica

$$-f_u^2 + f_v^2 + 1 < 0 \quad (\text{resp.} \quad -f_u^2 + f_v^2 + 1 > 0).$$

- *Supongamos que S es una superficie dada por la preimagen de un valor regular, esto es, $S = F^{-1}(a)$ donde $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable definida en un abierto U de \mathbb{R}^3 y $a \in \mathbb{R}$ es un valor regular de F . Entonces S es espacial (resp. temporal) si y sólo si $\text{grad}_L F(p)$ es temporal (resp. espacial) para todo $p \in S$, o equivalentemente que $\text{grad}_E F(p)$ es temporal (resp. espacial) para todo $p \in S$.*

Segunda forma fundamental lorentziana

En este capítulo definiremos los conceptos de operador de forma, segunda forma fundamental y las curvaturas gaussiana y media, en el sentido de la métrica lorentziana. Luego observaremos algunas diferencias y relaciones que hay con la teoría clásica de superficies.

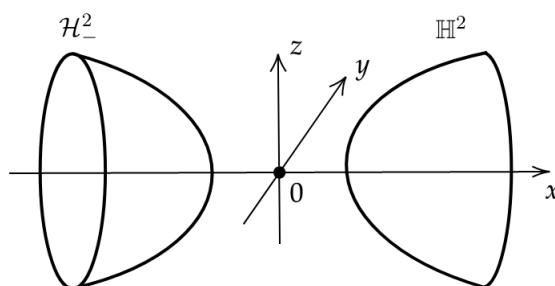
4.1. Operador de forma

Sea S una superficie no degenerada orientable. Para poder definir los conceptos asociados a la segunda forma fundamental es necesario fijar una aplicación de Gauss, al igual que en la teoría clásica de superficies.

Cuando la superficie es espacial, se puede considerar una aplicación de Gauss particular, como se puede ver en el trabajo [AC17]. Se considera una *aplicación de Gauss futuro orientada*. Supongamos que S es conexa, entonces $N^L(S)$ es un conjunto conexo contenido en el conjunto de vectores unitarios respecto de la métrica lorentziana. Si N^L es una aplicación temporal entonces $N^L(S)$ es un subconjunto del espacio pseudohiperbólico.

El espacio pseudohiperbólico es no conexo. Más aún, las componentes conexas son:

$$\begin{aligned}\mathbb{H}^2 &= \{(x, y, z) \in \mathcal{H}^2 : x > 0\}, \\ \mathcal{H}_-^2 &= \{(x, y, z) \in \mathcal{H}^2 : x < 0\}.\end{aligned}$$



Definición 4.1. Sean S una superficie espacial orientable y $N^L : S \rightarrow \mathcal{H}^2$ una aplicación de Gauss lorentziana de S . Decimos que N^L es una **aplicación de Gauss lorentziana futuro orientada** (resp. **pasado orientada**) si $N(p) \in \mathbb{H}^2$ (resp. $N(p) \in \mathcal{H}_-^2$) para todo $p \in S$.

Observación 4.2. La noción de orientación anterior puede desarrollarse en un marco teórico más general. En el espacio lorentziano \mathbb{L}^3 uno puede definir una relación de equivalencia en las bases ordenadas de \mathbb{L}^3 , que induce una orientación temporal del espacio.

En lo que sigue del trabajo, dada S una superficie no degenerada orientable, vamos a fijar una aplicación de Gauss lorentziana N^L .

Ahora vamos a definir el operador de forma, lo que nos permitirá definir la segunda forma fundamental. Primero, vamos a probar que $dN_p^L(T_pS) \subset T_pS$.

Sean $p \in S$ y $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable contenida en S tal que $\alpha(0) = p$. Consideremos la expresión

$$\langle N^L \circ \alpha(s), N^L \circ \alpha(s) \rangle_L = \begin{cases} 1, & \text{si } S \text{ es temporal en } \alpha(s) \\ -1, & \text{si } S \text{ es espacial en } \alpha(s) \end{cases} \quad (4.1)$$

Como $\alpha(I)$ es conexo, entonces la expresión (4.1) es constante en I . Derivando la expresión anterior respecto de s y tomando $s = 0$,

$$\langle dN_p^L \alpha'(0), N^L(p) \rangle_L = 0.$$

Luego,

$$dN_p^L \alpha'(0) \in T_pS.$$

Como esto vale para toda curva diferenciable α tal que $\alpha(0) = p$, tenemos que

$$dN_p^L(T_pS) \subset T_pS.$$

Definición 4.3. Sean S una superficie no degenerada orientable y $p \in S$. El operador

$$-dN_p^L : T_pS \rightarrow T_pS$$

se llama **operador de forma lorentziano** o **aplicación de Weingarten lorentziana**, y lo denotamos por A_p^L .

Una vez definido el operador de forma lorentziano, podemos definir a la segunda forma fundamental lorentziana como la forma cuadrática asociada a A_p^L y las nociones de curvatura principal y dirección principal, a partir de los autovalores y autovectores de A_p^L .

Recordemos una importante propiedad del operador de forma euclídeo: el operador es autoadjunto y como T_pS es un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno podemos asegurar que es diagonalizable sobre \mathbb{R} . Pero ahora tenemos el problema de que T_pS puede no ser un espacio vectorial con producto interno. Cuando S es espacial tenemos que T_pS con la métrica restringida de \mathbb{L}^3 es un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno. Pero cuando T_pS es temporal no podemos asegurar que el operador de forma sea diagonalizable sobre \mathbb{R} pues la métrica restringida al espacio tangente es lorentziana.

Para empezar, demostraremos que el operador de forma lorentziano es un operador autoadjunto.

Teorema 4.4. Sean S una superficie no degenerada orientable y $p \in S$. Entonces A_p^L es un operador autoadjunto.

Demostración. Tenemos que probar que para todo $u, v \in T_pS$,

$$\langle A_p^L(u), v \rangle_L = \langle u, A_p^L(v) \rangle_L.$$

Sea (U, \mathbf{x}) un parche coordinado en p tal que $\mathbf{x}(u_0, v_0) = p$. Consideremos la base de T_pS dada por los vectores $\mathbf{x}_u(u_0, v_0)$ y $\mathbf{x}_v(u_0, v_0)$. Basta probar que

$$\langle A_p^L(\mathbf{x}_u(u_0, v_0)), \mathbf{x}_v(u_0, v_0) \rangle_L = \langle \mathbf{x}_u(u_0, v_0), A_p^L(\mathbf{x}_v(u_0, v_0)) \rangle_L.$$

Observemos que

$$\langle N^L \circ \mathbf{x}(u, v), \mathbf{x}_u(u, v) \rangle_L = 0.$$

Derivando respecto de v , tenemos que

$$\langle -A_p^L(\mathbf{x}_v(u, v)), \mathbf{x}_u(u, v) \rangle_L + \langle N^L \circ \mathbf{x}(u, v), \mathbf{x}_{uv}(u, v) \rangle_L = 0.$$

De manera análoga, se puede ver que

$$\langle -A_p^L(\mathbf{x}_u(u, v)), \mathbf{x}_v(u, v) \rangle_L + \langle N^L \circ \mathbf{x}(u, v), \mathbf{x}_{vu}(u, v) \rangle_L = 0.$$

Restando las dos ecuaciones anteriores y evaluando en $(u, v) = (u_0, v_0)$, tenemos que

$$\langle A_p^L(\mathbf{x}_u)(u_0, v_0), \mathbf{x}_v(u_0, v_0) \rangle_L = \langle \mathbf{x}_u(u_0, v_0), A_p^L(\mathbf{x}_v(u_0, v_0)) \rangle_L.$$

□

Dado que el operador de forma es un operador autoadjunto, tiene una forma cuadrática asociada, la cual para el caso euclídeo llamamos segunda forma fundamental. En analogía con la teoría clásica, resulta natural definir a la segunda forma fundamental lorentziana como la forma cuadrática asociada a A_p^L .

Definición 4.5. Sean S una superficie no degenerada orientable y $p \in S$. Entonces la forma cuadrática definida en $T_p S$ por

$$\mathbb{I}_p^L(v) = \langle A_p^L(v), v \rangle_L$$

se llama **segunda forma fundamental lorentziana de S en el punto p** .

Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable contenida en S tal que $\alpha(0) = p$. Observemos que tenemos la descomposición

$$\mathbb{L}^3 = T_p S \oplus T_p S^{\perp L}.$$

Entonces existen únicos $v \in T_p S$ y $\eta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\alpha''(0) = v + \eta N^L \circ \alpha(0).$$

Definición 4.6. El valor η se llama **curvatura normal lorentziana de α en p** , y la denotamos por $k_n^L(v, p)$.

Entonces

$$\langle \alpha'', N^L \circ \alpha \rangle_L = \eta \langle N^L \circ \alpha, N^L \circ \alpha \rangle_L = \varepsilon \eta,$$

donde ε es una función de p que se define como

$$\varepsilon := \langle N^L(p), N^L(p) \rangle_L = \begin{cases} 1, & \text{si } S \text{ es temporal en } p \\ -1, & \text{si } S \text{ es espacial en } p \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$k_n^L(v, p) = \varepsilon \langle \alpha'', N^L \circ \alpha \rangle_L.$$

Por otro lado, dado que $\alpha'(s) \in T_{\alpha(s)} S$ para todo $s \in I$,

$$\langle N^L \circ \alpha, \alpha' \rangle_L = 0.$$

Derivando respecto de s y tomando $s = 0$,

$$\langle A_p^L(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle_L = \langle N^L(p), \alpha''(0) \rangle_L.$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{I}_p(\alpha'(0)) = \langle A_p^L(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle_L = \varepsilon k_n^L(v, p).$$

Concluimos que la curvatura normal no depende de la curva α sino de la dirección $v = \alpha'(0)$ y el punto $p = \alpha(0)$.

Por otro lado, recordemos que fijada una aplicación de Gauss lorentziana N^L , en (3.9) tenemos definida una aplicación de Gauss euclídea N^E que verifica la relación

$$\langle N^L(p), u \rangle_L = \|N^L(p)\|_E \langle N^E(p), u \rangle_E$$

para todo $u \in T_p S$. Con k_n^E vamos a denotar a la curvatura normal euclídea, definida por

$$k_n^E(v, p) := \langle \alpha''(0), N^E(p) \rangle_E.$$

Luego

$$k_n^E(v, p) = \langle \alpha''(0), N^E(p) \rangle_E = \frac{1}{\|N^L(p)\|_E} \langle \alpha''(0), N^L(p) \rangle_L = \frac{\varepsilon}{\|N^L(p)\|_E} k_n^L(v, p). \quad (4.2)$$

Por lo tanto, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.7. *Sean S una superficie no degenerada orientable y N^L una aplicación de Gauss lorentziana definida en S . Sean $p \in S$ y $v \in T_p S$. Entonces vale la relación*

$$k_n^L(v, p) = \varepsilon \|N^L(p)\|_E k_n^E(v, p), \quad (4.3)$$

donde

$$\varepsilon = \langle N^L(p), N^L(p) \rangle_L.$$

Más aún

$$\Pi_p^L(v) = \|N^L(p)\|_E \Pi_p^E(v), \quad (4.4)$$

donde Π_p^E es la segunda forma fundamental euclídea de S en p asociada a la aplicación de Gauss euclídea definida en (3.9).

Demostración. Ya probamos la relación (4.3). Por otro lado,

$$\Pi_p^L(v) = \varepsilon k_n^L(v, p) = \|N^L(p)\|_E k_n^E(v, p) = \|N^L(p)\|_E \Pi_p^E(v).$$

□

Ahora vamos a dar la expresión del operador de forma lorentziano y la segunda forma fundamental lorentziana en coordenadas locales. Esto es, vamos a fijar un parche coordenado y vamos a ver qué representación tienen en la base del plano tangente inducida por él.

Sea (U, \mathbf{x}) un parche coordenado en un punto p de S tal que $n^L = N^L \circ \mathbf{x}$. Sea $v \in T_p S$ tal que $v = v_1 \mathbf{x}_u + v_2 \mathbf{x}_v$. Entonces

$$\begin{aligned} \Pi_p^L(v) &= \langle A_p^L(v_1 \mathbf{x}_u + v_2 \mathbf{x}_v), v_1 \mathbf{x}_u + v_2 \mathbf{x}_v \rangle_L \\ &= v_1^2 \langle A_p^L(\mathbf{x}_u), \mathbf{x}_u \rangle_L + 2v_1 v_2 \langle A_p^L(\mathbf{x}_u), \mathbf{x}_v \rangle_L + v_2^2 \langle A_p^L(\mathbf{x}_v), \mathbf{x}_v \rangle_L. \end{aligned}$$

Los coeficientes

$$e^L = \langle A_p^L(\mathbf{x}_u), \mathbf{x}_u \rangle_L, \quad f^L = \langle A_p^L(\mathbf{x}_u), \mathbf{x}_v \rangle_L \quad \text{y} \quad g^L = \langle A_p^L(\mathbf{x}_v), \mathbf{x}_v \rangle_L$$

se llaman **coeficientes de la segunda forma fundamental lorentziana**. Observemos que estos coeficientes dependen del parche elegido y son funciones diferenciables definidas en U . Más aún, tenemos que

$$\langle \mathbf{x}_u, N^L \circ \mathbf{x} \rangle = 0 \quad \text{y} \quad \langle \mathbf{x}_v, N^L \circ \mathbf{x} \rangle = 0. \quad (4.5)$$

Derivando la primera ecuación respecto de u tenemos que

$$0 = \langle \mathbf{x}_{uu}, N^L \circ \mathbf{x} \rangle_L - \langle \mathbf{x}_u, A_{\mathbf{x}}^L(\mathbf{x}_u) \rangle_L = \langle \mathbf{x}_{uu}, N^L \circ \mathbf{x} \rangle_L - e^L,$$

lo que implica que

$$e^L = \langle \mathbf{x}_{uu}, N^L \circ \mathbf{x} \rangle_L.$$

De manera análoga derivando la primera y la segunda ecuación de (4.5) respecto de v , o la segunda respecto de u y v , tenemos las igualdades

$$f^L = \langle \mathbf{x}_{uv}, N^L \circ \mathbf{x} \rangle_L \quad \text{y} \quad g^L = \langle \mathbf{x}_{vv}, N^L \circ \mathbf{x} \rangle_L.$$

Por lo tanto, los coeficientes de la segunda forma fundamental son la componente normal de las derivadas segundas de \mathbf{x} , esto es, e^L , f^L y g^L son la componente normal de \mathbf{x}_{uu} , \mathbf{x}_{uv} y \mathbf{x}_{vv} , respectivamente.

Por otro lado, supongamos que, en la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$, el operador dN_p^L tiene una matriz asociada

$$[dN_p^L] = \begin{pmatrix} a_{11}^L & a_{12}^L \\ a_{21}^L & a_{22}^L \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$dN_p^L(\mathbf{x}_u) = a_{11}^L \mathbf{x}_u + a_{21}^L \mathbf{x}_v \quad \text{y} \quad dN_p^L(\mathbf{x}_v) = a_{12}^L \mathbf{x}_u + a_{22}^L \mathbf{x}_v.$$

Los coeficientes $\{a_{ij}^L\}_{i,j=1,2}$ se llaman **coeficientes de Weingarten lorentzianos**.

Haciendo producto lorentziano con los vectores coordenados tenemos que

$$\begin{aligned} -e^L &= \langle dN_p^L \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = a_{11}^L \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_L + a_{21}^L \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle_L = a_{11}^L E^L + a_{21}^L F^L, \\ -f^L &= \langle dN_p^L \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = a_{11}^L \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_L + a_{21}^L \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_L = a_{11}^L F^L + a_{21}^L G^L, \\ -f^L &= \langle dN_p^L \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle = a_{12}^L \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_L + a_{22}^L \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle_L = a_{12}^L E^L + a_{22}^L F^L, \\ -g^L &= \langle dN_p^L \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = a_{12}^L \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_L + a_{22}^L \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_L = a_{12}^L F^L + a_{22}^L G^L. \end{aligned}$$

donde E^L , F^L y G^L son los coeficientes de la primera forma fundamental lorentziana definidos en (3.5).

Por lo tanto, tenemos el sistema

$$-\begin{pmatrix} e^L & f^L \\ f^L & g^L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E^L & F^L \\ F^L & G^L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}^L & a_{12}^L \\ a_{21}^L & a_{22}^L \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Como S es no degenerada, la primera forma fundamental es no degenerada lo que implica que la matriz

$$\begin{pmatrix} E^L & F^L \\ F^L & G^L \end{pmatrix}$$

es invertible. Luego

$$\begin{pmatrix} a_{11}^L & a_{12}^L \\ a_{21}^L & a_{22}^L \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} E^L & F^L \\ F^L & G^L \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e^L & f^L \\ f^L & g^L \end{pmatrix} = - \frac{1}{E^L G^L - (F^L)^2} \begin{pmatrix} G^L & -F^L \\ -F^L & E^L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^L & f^L \\ f^L & g^L \end{pmatrix}$$

de donde concluimos que

$$\begin{aligned} a_{11}^L &= \frac{f^L F^L - e^L G^L}{E^L G^L - (F^L)^2}, & a_{12}^L &= \frac{g^L F^L - f^L G^L}{E^L G^L - (F^L)^2}, \\ a_{21}^L &= \frac{e^L F^L - f^L E^L}{E^L G^L - (F^L)^2}, & a_{22}^L &= \frac{f^L F^L - g^L E^L}{E^L G^L - (F^L)^2}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Las ecuaciones en (4.7) se llaman **ecuaciones de Weingarten lorentzianas**.

El teorema 4.7 nos permite relacionar los coeficientes de la segunda forma lorentzianas con los euclídeos. En efecto,

$$e^L = \langle A_p^L \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_L = \Pi_p^L(\mathbf{x}_u) = \|N^L(p)\|_E \Pi_p^E(\mathbf{x}_u) = \|N^L(p)\|_E e^E,$$

y

$$g^L = \langle A_p^L(\mathbf{x}_v), \mathbf{x}_v \rangle_L = \Pi_p^L(\mathbf{x}_v) = \|N^L(p)\|_E \Pi_p^E(\mathbf{x}_v) = \|N^L(p)\|_E g^E.$$

Observemos que

$$\Pi_p^L(\mathbf{x}_u + \mathbf{x}_v) = \Pi_p^L(\mathbf{x}_u) + 2 \langle A_p^L \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_L + \Pi_p^L(\mathbf{x}_v),$$

tenemos que

$$f^L = \langle A_p^L(\mathbf{x}_u), \mathbf{x}_v \rangle_L = \frac{1}{2} (\Pi_p^L(\mathbf{x}_u + \mathbf{x}_v) - \Pi_p^L(\mathbf{x}_u) - \Pi_p^L(\mathbf{x}_v)).$$

De igual manera tenemos la relación

$$f^E = \langle A_p^E \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_L = \frac{1}{2} (\Pi_p^E(\mathbf{x}_u + \mathbf{x}_v) - \Pi_p^E(\mathbf{x}_u) - \Pi_p^E(\mathbf{x}_v)).$$

Por lo tanto, haciendo un razonamiento análogo al anterior tenemos que $f^L = \|N^L(p)\|_E f^E$.

Proposición 4.8. Sean S una superficie no degenerada orientable y (U, \mathbf{x}) un parche en S . Sea $n^L(p)$ el normal unitario lorentziano inducido por el parche. Entonces

- $e^L = \|n^L\|_E e^E$,
- $f^L = \|n^L\|_E f^E$,
- $g^L = \|n^L\|_E g^E$.

Recordemos que en la teoría clásica de superficies, una dirección asintótica es un vector tangente unitario en el cual la segunda forma fundamental es nula, o equivalentemente, que la curvatura normal es cero.

Definición 4.9. Sean S una superficie no degenerada y $p \in S$. Un vector unitario (en el sentido de la métrica lorentziana) v de $T_p S$ se llama **dirección asintótica lorentziana** si la curvatura normal en v es cero, o equivalentemente si $\Pi_p^L(v) = 0$.

De la ecuación (4.4) tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.10. Sean S una superficie no degenerada, $p \in S$ y $v \in T_p S$.

- Si v es una dirección asintótica lorentziana, entonces $v/\|v\|_E$ es una dirección asintótica euclídea.
- Si v es una dirección asintótica euclídea y v no es un vector luz, entonces $v/\|v\|_L$ es una dirección asintótica lorentziana.

4.2. Curvaturas gaussiana y media

En esta sección definiremos las curvaturas gaussiana y media. Luego vamos a ver su representación en coordenadas locales. Recordemos que para el caso euclídeo tenemos la relación

$$K^E(p) = \det(A_p^E) \quad \text{y} \quad H^E(p) = \frac{1}{2} \text{tr}(A_p^E),$$

donde $K^E(p)$ y $H^E(p)$ son las curvatura gaussiana y media euclídea de S en p , respectivamente, y A_p^E es el operador de forma euclídeo en p . Parece natural definir de forma completamente análoga las curvaturas gaussiana y media lorentzianas. Sin embargo, en este caso no vamos a hacer una analogía con la teoría clásica de superficies y vamos a dar la siguiente definición.

Definición 4.11. Sean S una superficie no degenerada orientable y $p \in S$. El valor

- $K^L(p) = \varepsilon \det(A_p^L)$ se llama **curvatura gaussiana lorentziana de S en p** ,
- $H^L(p) = \frac{\varepsilon}{2} \text{tr}(A_p^L)$ se llama **curvatura media lorentziana de S en p** ,

donde $\varepsilon = \langle N^L(p), N^L(p) \rangle_L$.

Observación 4.12. La definición anterior surge de una teoría más general y cuando nos restringimos a una superficie no degenerada en el espacio \mathbb{L}^3 obtenemos la anterior. Para más detalles ver, por ejemplo, [Ló08, Corolario 3.3].

La curvatura media depende de la elección de la aplicación de Gauss, pues si reemplazamos N^L por la aplicación $-N^L$, entonces H^L cambia por $-H^L$. La curvatura gaussiana no depende de la elección de la aplicación de Gauss. En efecto, tenemos que las únicas aplicaciones de Gauss que podemos definir sobre una superficie S espacial orientable son N^L y $-N^L$. Luego las diferenciales de la aplicación de Gauss que podemos tomar sobre S son dN_p^L y $-dN_p^L$, y tenemos que

$$\det(A_p^L) = \det(-A_p^L).$$

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 4.13. El espacio pseudohiperbólico \mathcal{H}^2 es una superficie espacial orientable con aplicación de Gauss lorentziana

$$N^L(p) = p.$$

Entonces dN_p^L es la identidad en $T_p S$ para todo $p \in S$. Luego A_p^L es el opuesto de la identidad y

$$\det(A_p^L) = 1 \quad \text{y} \quad \frac{1}{2} \text{tr}(A_p^L) = -1.$$

Por lo tanto, el espacio pseudohiperbólico es una superficie con curvatura gaussiana lorentziana constante igual a -1 .

Ejemplo 4.14. La pseudoesfera \mathbb{S}_1^2 es una superficie temporal orientable con aplicación de Gauss lorentziana

$$N^L(p) = p.$$

Entonces dN_p^L es la identidad en $T_p S$ para todo $p \in S$. Luego

$$\det(A_p^L) = 1 \quad \text{y} \quad \frac{1}{2} \text{tr}(A_p^L) = -1.$$

Por lo tanto, la pseudoesfera es una superficie con curvatura gaussiana constante igual a 1 .

Observemos que si definimos de manera análoga a la euclídea la curvatura gaussiana, la definición no es buena, pues en la literatura el espacio hiperbólico \mathbb{H}^2 , que es una componente conexa de \mathcal{H}^2 , es un espacio con curvatura -1 , y en este caso el determinante del operador de forma asociado a \mathbb{H}^2 es igual a 1.

De las ecuaciones de Weingarten definidas en (4.7), tenemos el siguiente resultado que permite expresar a las curvaturas gaussiana y media en coordenadas locales.

Proposición 4.15. *Sean S una superficie no degenerada orientable y (U, \mathbf{x}) un parche coordinado en S . Entonces*

$$\begin{aligned} K^L \circ \mathbf{x} &= \varepsilon \frac{e^L g^L - (f^L)^2}{E^L G^L - (F^L)^2}, \\ H^L \circ \mathbf{x} &= \frac{\varepsilon}{2} \frac{2f^L F^L - e^L G^L - g^L E^L}{E^L G^L - (F^L)^2}. \end{aligned}$$

Demostración. Surgen de la definición de curvatura media y gaussiana, y de las ecuaciones (4.7). \square

Recordemos que, en la teoría clásica de superficies, tenemos la relación

$$K^E \circ \mathbf{x} = \frac{e^E g^E - (f^E)^2}{E^E G^E - (F^E)^2},$$

que puede verse en [dC17, Sección 3.3]. Entonces

$$\begin{aligned} K^L \circ \mathbf{x} &= \varepsilon \frac{e^L g^L - (f^L)^2}{E^L G^L - (F^L)^2} = \varepsilon \|N^L(p)\|_E^2 \frac{e^E g^E - (f^E)^2}{E^L G^L - (F^L)^2} \frac{E^E G^E - (F^E)^2}{E^E G^E - (F^E)^2} \\ &= \varepsilon \|N^L(p)\|_E^2 \frac{E^E G^E - (F^E)^2}{E^L G^L - (F^L)^2} K^E \circ \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.16. *Sean S una superficie no degenerada orientable y (U, \mathbf{x}) un parche en S . Sea N^L una aplicación de Gauss lorentziana de S . Entonces*

$$K^L \circ \mathbf{x} = \varepsilon \|N^L \circ \mathbf{x}\|_E^2 \frac{E^E G^E - (F^E)^2}{E^L G^L - (F^L)^2} K^E \circ \mathbf{x},$$

donde $\varepsilon = \langle N^L \circ \mathbf{x}, N^L \circ \mathbf{x} \rangle_L$.

Corolario 4.17. *Sean S una superficie no degenerada orientable y $p \in S$. Entonces*

$$\text{sig}(K^L(p)) = -\text{sig}(K^E(p))$$

donde $\text{sig}(\cdot)$ es la función signo definida por

$$\text{sig}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0 \\ -1, & \text{si } x < 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

Demostración. Sean S una superficie no degenerada orientable y $p \in S$. Sea (U, \mathbf{x}) un parche coordinado de S en p tal que $n^L = N^L \circ \mathbf{x}$.

Por el teorema 4.16, tenemos que

$$K^L \circ \mathbf{x} = \varepsilon \|N^L \circ \mathbf{x}\|_E^2 \frac{E^E G^E - (F^E)^2}{E^L G^L - (F^L)^2} K^E \circ \mathbf{x},$$

donde $\varepsilon = \langle N^L \circ \mathbf{x}, N^L \circ \mathbf{x} \rangle_L$.

Por otro lado, por la proposición 3.13, los espacios $T_p S$ y $T_p S^{\perp L}$ tienen distinto carácter causal. Entonces

$$\text{sig}(E^L G^L - (F^L)^2) = -\varepsilon.$$

Luego

$$\begin{aligned} \text{sig}(K^L(p)) &= \varepsilon \text{sig}\left(\|N^L \circ \mathbf{x}\|_E^2\right) \frac{\text{sig}(E^E G^E - (F^E)^2)}{\text{sig}(E^L G^L - (F^L)^2)} \text{sig}(K^E \circ \mathbf{x}) \\ &= -\text{sig}(K^E(p)). \end{aligned}$$

□

Ahora vamos a definir la noción de punto elíptico, hiperbólico, parabólico y planar. Primero veamos un lema similar a un resultado clásico de la teoría local de superficies.

Lema 4.18. Sean S una superficie no degenerada orientable y N^L una aplicación de Gauss lorentziana en S . Si N^L es constante, entonces S está contenida en un plano.

Demostración. Supongamos que $N^L(u, v) \equiv N^L$ en S . Sea $p \in S$ tal que $\mathbf{x}(u_0, v_0) = p$ y consideremos la función

$$f(u, v) = \langle \mathbf{x}(u, v) - p, N^L \rangle_L.$$

Entonces

$$f_u(u, v) = \langle \mathbf{x}_u(u, v), N^L \rangle_L = 0,$$

y de igual manera $f_v = 0$. Por lo tanto, f es constante y $f(u_0, v_0) = 0$ lo que implica que f es la función nula. Luego, S está contenida en el plano $p + \{N^L\}^{\perp L}$. □

La recíproca también es verdadera, en el sentido de que si S está contenida en un plano, entonces N^L es constante.

Recordemos que en la teoría clásica de superficies, decimos que un punto p en una superficie S es elíptico si $K^E(p) > 0$, es hiperbólico si $K^E(p) < 0$, es parabólico si $A^E(p) \neq 0$ y $K^E(p) = 0$, y es planar si $A^E(p) \equiv 0$. Luego uno puede dar una caracterización geométrica de esto: un punto es elíptico si existe un entorno de p en S tal que todos los puntos se encuentran en uno de los semiespacios de \mathbb{R}^3 que define el plano $p + T_p S$, un punto es hiperbólico si para todo entorno de p en S existen puntos en ambos semiespacios que define $T_p S$. La prueba de esto puede verse en la proposición A.7.

Tomaremos la caracterización como definición. Luego daremos una nueva caracterización a partir de la curvatura gaussiana lorentziana.

Definición 4.19. Sean S una superficie no degenerada orientable y $p \in S$. Sea N^E una aplicación de Gauss euclídea de S . Sea $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$\phi(q) = \langle q - p, N^E(p) \rangle_E.$$

Decimos que p es un punto

- **elíptico** si existe un entorno V de p en S tal que todos los puntos de V están del mismo lado del plano tangente $T_p S$, esto es, $\phi > 0$ en $V - \{p\}$ o $\phi < 0$ en $V - \{p\}$,
- **hiperbólico** si para todo entorno de V en p existen puntos de un lado y del otro del plano tangente $T_p S$, esto es, para todo entorno V de p en S existen $q_1, q_2 \in V$ tal que $\phi(q_1) < 0$ y $\phi(q_2) > 0$,

- **planar** si $A_p^L \equiv 0$,
- **parabólico** si no es un punto elíptico, hiperbólico o planar.

Del corolario 4.17, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.20. *Sean S una superficie no degenerada y $p \in S$. Entonces*

- *p es un punto elíptico si y sólo si $K^L(p) < 0$,*
- *p es un punto hiperbólico si y sólo si $K^L(p) > 0$,*
- *p es un punto parabólico si y sólo si $K^L(p) = 0$ y $A_p^L(p) \neq 0$,*
- *p es un punto planar si y sólo si $A_p^L \equiv 0$.*

El motivo por el cual es conveniente tomar la definición 4.19 y luego probar el teorema 4.20, es que en la prueba de la equivalencia A.7 en la teoría clásica de superficies, necesitamos utilizar que el operador de forma euclídeo es diagonalizable pues necesitamos las curvaturas principales euclídeas. En el caso en que p es un punto temporal de S podemos tener que el operador de forma lorentziano no es diagonalizable sobre \mathbb{R} , como veremos en la siguiente sección.

4.3. Direcciones y curvaturas principales

En esta sección vamos a definir las curvaturas y direcciones principales, veremos cuándo esto es posible.

Recordemos que en el teorema 4.4 probamos que el operador de forma A_p^L es autoadjunto en T_pS . Si S es espacial en el punto p , entonces T_pS munido de la restricción de la métrica lorentziana es un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno. Por lo tanto, el operador A_p^L es diagonalizable sobre \mathbb{R} . Vamos a enunciar el siguiente corolario que surge del teorema 4.4.

Corolario 4.21. *Sean S una superficie espacial orientable y $p \in S$. Sea A_p^L el operador de forma de S en p . Entonces A_p^L es diagonalizable sobre \mathbb{R} , esto es, existe una base ortonormal $\{e_1^L, e_2^L\}$ de T_pS y escalares λ_1^L y λ_2^L tal que*

$$A_p^L(e_1^L) = \lambda_1^L e_1^L, \quad A_p^L(e_2^L) = \lambda_2^L e_2^L.$$

Cuando S es temporal en p , entonces no podemos asegurar que el operador de forma es diagonalizable sobre \mathbb{R} . Vamos a ver algunos ejemplos de superficies temporales cuyos operadores de forma no son diagonalizables. Más aún, en el ejemplo 4.22 el operador de forma es una matriz nilpotente. Este ejemplo se puede encontrar en el trabajo de L. K. Graves, [Gra79, Sección 3], en el cual el autor da una familia de superficies llamadas B-scroll que tienen operador de forma nilpotente. En los ejemplos presentamos un operador de forma nilpotente, un operador de forma con autovalores reales y otro con autovalores complejos conjugados. Las cuentas fueron hechas con un software, pero la prueba se basa en calcular los coeficientes de Weingarten para dar la representación matricial del operador de forma.

Ejemplo 4.22. Sea S la superficie dada por la parametrización

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(\frac{4}{3}v^3 + v, \frac{4}{3}v^3 - v, 2v^2 \right) + u \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right)$$

con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Esta superficie es temporal y el operador de forma asociado al normal unitario tiene la representación matricial

$$\left[A_{\mathbf{x}(u,v)}^L \right] = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

la cual es una matriz nilpotente.

Ejemplo 4.23 (Superficie de Enneper). Sea S^ε la superficie dada por la parametrización

$$\mathbf{x}^\varepsilon(u, v) = \frac{1}{2} \left(u + \frac{u^3}{3}, -u + \frac{u^3}{3}, -\varepsilon u^2 \right) + \frac{1}{2} \left(-v - \frac{v^3}{3}, -v + \frac{v^3}{3}, -v^2 \right),$$

donde $\varepsilon = -1, 1$ y $(u, v) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| < 1\}$. La superficie, conocida como **superficie de Enneper**, verifica que el operador de forma asociado al normal unitario local tiene la representación matricial en la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$,

$$\left[A_{\mathbf{x}^\varepsilon(u,v)}^L \right] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{(1 + \varepsilon uv)^2} \\ \frac{2\varepsilon}{(1 + \varepsilon uv)^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico asociado a la matriz del operador de forma es

$$P_\varepsilon(\lambda) = \lambda^2 - \frac{4\varepsilon}{(1 + \varepsilon uv)^4},$$

entonces las curvaturas principales son

$$\lambda_{1,2}^L = \pm \sqrt{\frac{4\varepsilon}{(1 + \varepsilon uv)^4}}$$

que son complejos conjugados si $\varepsilon = -1$, y son reales si $\varepsilon = 1$.

El hecho de tener superficies temporales que tienen operador de forma no diagonalizable sobre \mathbb{R} genera un problema a la hora de definir curvatura y dirección principal pues puede ocurrir que los autovalores y los autovectores sean complejos, o puede ocurrir que no sea diagonalizable sobre \mathbb{C} y tengamos un único autovalor.

En el trabajo [Cle10], J. N. Clelland clasificó a las superficies que verifican que el operador de forma es no diagonalizable sobre \mathbb{C} en todos sus puntos. Más aún, tenemos la siguiente definición que puede encontrarse en [Cle10, Definiciones 1.1 y 1.2].

Definición 4.24. Sean S una superficie temporal y $p \in S$. Decimos que p es **quasi-umbilical** si el operador de forma A_p^L no es diagonalizable sobre \mathbb{C} . Decimos que S es **totalmente quasi-umbilical** si todo punto $p \in S$ es quasi-umbilical.

El siguiente resultado puede verse en [Cle10, Teorema 4.3].

Teorema 4.25. *Sea S una superficie totalmente quasi-umbilical. Entonces S es reglada por rectas nulas con la propiedad adicional de que cada recta luz α en S verifica que α' y α'' son linealmente independientes en cada punto.*

Por otro lado, si α es una curva luz que verifica que α' y α'' son linealmente independientes, y F es un campo de vectores luz a lo largo de α que es linealmente independiente con α' , la superficie dada por la parametrización

$$\mathbf{x}(u, v) = \alpha(u) + vF(u)$$

es totalmente quasi-umbilical.

Los puntos quasi-umbilicales tienen la propiedad de que el autovector del operador de forma es un vector luz.

Proposición 4.26. *Sean S una superficie no degenerada y $p \in S$ un punto quasi-umbilical. Entonces los autovectores del operador de forma A_p^L son vectores luz.*

Demostración. Sean $e \in T_p S$ un autovector de A_p^L y λ el autovalor asociado. Vamos a probar que e es un vector luz. Supongamos que e no es un vector luz.

Sea $w \in T_p S$ un vector no nulo ortogonal a e .

$$0 = \lambda \langle e, w \rangle_L = \langle A_p^L(e), w \rangle_L = \langle e, A_p^L(w) \rangle_L.$$

Entonces $A_p^L(w)$ es un vector ortogonal a e . Luego, $A_p^L(w), w \in T_p S \cap \{e\}^{\perp L}$.

Observemos que $e \notin \{e\}^{\perp L}$, pues e no es un vector luz. Luego, $T_p S \cap \{e\}^{\perp L}$ es un subespacio de dimensión uno. Entonces, existe $\eta \in \mathbb{R}$ tal que

$$A_p^L(w) = \eta w$$

y resulta que w es un autovector de A_p^L ortogonal a e .

El punto p es quasi-umbilical, entonces A_p^L es no diagonalizable. Luego, A_p^L tiene un único autovalor λ y el autoespacio asociado tiene dimensión uno. Entonces, e y w son linealmente dependientes, esto es, existe $\xi \in \mathbb{R}$ no nulo tal que

$$w = \xi e.$$

Entonces,

$$0 = \langle w, e \rangle_L = \xi \langle e, e \rangle_L$$

Luego, $\langle e, e \rangle_L = 0$ lo cual es absurdo. Por lo tanto, e es un vector luz. \square

Observemos que, si p es un punto quasi-umbilical, entonces A_p^L tiene un único autovalor λ y el autoespacio asociado a λ lo podemos generar por un autovector luz e , por la proposición 4.26. En este caso,

$$\Pi_p^L(e) = \langle A_p^L(e), e \rangle_L = \lambda \langle e, e \rangle_L = 0.$$

Por lo tanto, los autovectores del operador de forma anulan la segunda forma fundamental.

Recordemos que en una superficie temporal el operador de forma A_p^L no siempre es diagonalizable sobre \mathbb{R} . Daremos un criterio que nos permita decir si un punto p en una superficie no degenerada tiene operador de forma A_p^L diagonalizable sobre \mathbb{R} , sobre \mathbb{C} o sea no diagonalizable sobre \mathbb{C} .

Proposición 4.27. *Sea S una superficie no degenerada orientable. Sean H^L y K^L las curvaturas media y gaussiana de S , respectivamente. Si λ es un autovalor del operador de forma A_p^L , entonces sobre \mathbb{C} ,*

$$\lambda = \varepsilon H^L \pm \sqrt{(H^L)^2 - \varepsilon K^L},$$

donde $\varepsilon = \langle N^L, N^L \rangle_L$.

Demostración. Fijada una carta local (\mathbf{x}, U) , tenemos que

$$K^L = \varepsilon(a_{11}^L a_{22}^L - a_{12}^L a_{21}^L) \quad \text{y} \quad H^L = -\frac{\varepsilon}{2}(a_{11}^L + a_{22}^L),$$

donde

$$\begin{pmatrix} a_{11}^L & a_{12}^L \\ a_{21}^L & a_{22}^L \end{pmatrix}$$

en la matriz de $dN_{\mathbf{x}(u,v)}^L$ es la base $\{\mathbf{x}_u(u,v), \mathbf{x}_v(u,v)\}$.

Si λ es un autovalor de A_p^L , entonces es raíz del polinomio

$$P(x) = \det \begin{pmatrix} a_{11}^L + x & a_{12}^L \\ a_{21}^L & a_{22}^L + x \end{pmatrix} = (a_{11}^L + x)(a_{22}^L + x) - a_{12}^L a_{21}^L = x^2 - 2\varepsilon H^L x + \varepsilon K^L.$$

Entonces

$$\lambda = \varepsilon H^L \pm \sqrt{(H^L)^2 - \varepsilon K^L}.$$

□

La proposición 4.27 nos da un criterio para determinar si una superficie temporal tiene operador de forma diagonalizable sobre \mathbb{R} , sobre \mathbb{C} o no diagonalizable sobre \mathbb{C} .

Proposición 4.28. Sean S una superficie temporal orientable y $p \in S$. Si

- $(H^L)^2(p) - K^L(p) > 0$, entonces el operador de forma S en p es diagonalizable sobre \mathbb{R} ,
- $(H^L)^2(p) - K^L(p) < 0$, entonces el operador de forma S en p no es diagonalizable sobre \mathbb{R} , pero es diagonalizable sobre \mathbb{C} ,
- $(H^L)^2(p) - K^L(p) = 0$, entonces el operador de forma de S en p puede ser diagonalizable sobre \mathbb{R} o puede ser no diagonalizable sobre \mathbb{C} .

Demostración. Por la proposición 4.27, un autovalor λ del operador de forma verifica la relación

$$\lambda = -H^L \pm \sqrt{(H^L)^2 - K^L}.$$

Si $(H^L)^2(p) - K^L(p) > 0$, entonces los autovalores del operador de forma son reales y distintos de donde concluimos que es diagonalizable sobre \mathbb{R} .

Si $(H^L)^2(p) - K^L(p) < 0$, entonces los autovalores son complejos conjugados y el operador de forma no es diagonalizable sobre \mathbb{R} , pero sí sobre \mathbb{C} pues los autovalores son complejos conjugados.

Por último, para el caso $(H^L)^2(p) - K^L(p) = 0$ podemos considerar los ejemplos 4.22 y 4.14. Ambas superficies verifican la condición, pero uno tiene operador de forma que es diagonalizable sobre \mathbb{R} y el otro no. □

El operador de forma puede ser no diagonalizable sobre \mathbb{R} , y en este caso los autovalores son complejos conjugados o puede haber un único autovalor con multiplicidad uno. Definiremos curvaturas y direcciones principales en el caso en que el operador de forma sea diagonalizable sobre \mathbb{R} .

Definición 4.29. Sean S una superficie no degenerada orientable y $p \in S$. Supongamos que A_p^L es diagonalizable sobre \mathbb{R} . Los autovectores e_1^L y e_2^L del operador de forma A_p^L se llaman **direcciones principales lorentzianas de S en p** , y los autovalores asociados λ_1^L y λ_2^L se llaman **curvaturas principales lorentzianas de S en p** .

Recordemos que en la teoría clásica de superficies, las curvaturas principales son el mínimo y el máximo de la segunda forma fundamental euclídea sobre el conjunto de vectores unitarios del plano tangente. El máximo y el mínimo se asumen en las direcciones principales. A continuación, daremos algún resultado similar para las curvaturas y direcciones principales lorentzianas.

Supongamos que A_p^L es diagonalizable sobre \mathbb{R} . Sea $\{e_1^L, e_2^L\}$ la base de $T_p S$ formada por las direcciones principales. Entonces se verifica

$$A_p^L(e_1^L) = \lambda_1^L e_1^L \quad \text{y} \quad A_p^L(e_2^L) = \lambda_2^L e_2^L.$$

Los vectores e_1^L y e_2^L son ortogonales y resultan vectores no luz, pues el espacio $T_p S$ es no degenerado y $\{e_1^L, e_2^L\}$ es una base ortogonal de $T_p S$. Por lo tanto, podemos suponer que e_1^L y e_2^L son vectores unitarios. Luego, $\{e_1^L, e_2^L\}$ es una base ortonormal de $T_p S$.

Sea $v \in T_p S$ con $\|v\|_L = 1$, entonces

$$v = \eta e_1^L + \zeta e_2^L$$

con $\eta, \zeta \in \mathbb{R}$.

Supongamos que p es un punto espacial en S . Entonces

$$1 = \|v\|_L^2 = \eta^2 + \zeta^2.$$

Luego existe un único $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que

$$\begin{cases} \sin(\theta) = \zeta \\ \cos(\theta) = \eta \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$v = \cos(\theta)e_1^L + \sin(\theta)e_2^L.$$

Por otro lado,

$$\Pi_p^L(v) = \langle A_p^L(\eta e_1^L + \zeta e_2^L), \eta e_1^L + \zeta e_2^L \rangle_L = \eta^2 \lambda_1^L + \zeta^2 \lambda_2^L = \cos^2(\theta) \lambda_1^L + \sin^2(\theta) \lambda_2^L.$$

Por lo tanto, λ_1^L y λ_2^L son los valores mínimo y máximo que asume Π_p^L en el conjunto de vectores unitarios de $v \in T_p S$. Más aún, se asumen en el autovector asociado al autovalor correspondiente.

Supongamos ahora que p es un punto temporal en S . Entonces

$$\langle v, v \rangle_L = \pm 1.$$

Observemos que como $\{e_1^L, e_2^L\}$ es una base ortonormal de $T_p S$ subespacio temporal, entonces e_1^L y e_2^L son vectores no luz con distinto carácter causal. Supongamos sin pérdida de generalidad que e_1^L es espacial y e_2^L es temporal. Si $v = \eta e_1^L + \xi e_2^L$, entonces

$$\langle v, v \rangle_L = \eta^2 - \xi^2.$$

y vale 1 si v es espacial o -1 si v es temporal.

Supongamos que v es espacial, entonces existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $\eta = \cosh(\theta)$ y $\xi = \sinh(\theta)$. Luego

$$\Pi_p^L(v) = \lambda_1^L(p) \cosh^2(\theta) - \lambda_2^L(p) \sinh^2(\theta).$$

Si $\lambda_1^L(p) \leq \lambda_2^L(p)$, entonces

$$\Pi_p^L(v) \leq \lambda_1^L(p) \cosh^2(\theta) - \lambda_1^L(p) \sinh^2(\theta) = \lambda_1^L(p).$$

Luego, el máximo sobre el conjunto de vectores unitarios espaciales se asume en $v = e_1^L$.

Por el contrario, si $\lambda_2^L(p) \leq \lambda_1^L(p)$, entonces

$$\Pi_p^L(v) \geq \lambda_1^L(p) \cosh^2(\theta) - \lambda_1^L(p) \sinh^2(\theta) = \lambda_1^L(p).$$

Luego, el mínimo se asume en $v = e_1^L$.

Supongamos ahora que v es temporal, entonces existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $\xi = \cosh(\theta)$ y $\eta = \sinh(\theta)$. Luego

$$\Pi_p^L(v) = \lambda_1^L(p) \sinh^2(\theta) - \lambda_2^L(p) \cosh^2(\theta).$$

Si $\lambda_1^L(p) \leq \lambda_2^L(p)$, entonces

$$\Pi_p^L(v) \leq \lambda_2^L(p) \sinh^2(\theta) - \lambda_2^L(p) \cosh^2(\theta) = -\lambda_2^L(p)$$

y el máximo sobre el conjunto de vectores unitarios temporales se asume en $v = e_2^L$.

Por el contrario, si $\lambda_2^L(p) \leq \lambda_1^L(p)$, entonces

$$\Pi_p^L(v) \geq \lambda_2^L(p) \sinh^2(\theta) - \lambda_2^L(p) \cosh^2(\theta) = -\lambda_2^L(p)$$

y el mínimo se asume en $v = e_2^L$.

Por lo tanto, tenemos que las direcciones principales son extremos de la función Π_p^L en el conjunto de vectores unitarios de $T_p S$, dependiendo del carácter causal de la dirección principal.

Proposición 4.30. *Sea S una superficie no degenerada orientable con operador de forma A_p^L diagonalizable sobre \mathbb{R} . Sean $p \in S$ y*

$$U = \{v \in T_p S : \|v\|_L = 1\}.$$

- *Si S es espacial en p , entonces las curvaturas principales de S en p son el máximo y el mínimo absoluto de la segunda forma fundamental lorentziana de S en p restringida al conjunto U , y se asumen en las direcciones principales correspondientes.*
- *Si S es temporal en p , entonces las curvaturas principales de S en p o sus opuestos, son un máximo o un mínimo local de la segunda forma fundamental lorentziana de S en p restringida al conjunto U , y se asumen en las direcciones principales correspondientes.*

Recordemos que el teoría clásica de superficies, una línea de curvatura en una superficie S es una curva regular en S tal que el vector tangente de la curva es una dirección principal de S . En analogía con la teoría clásica, tenemos la siguiente definición.

Definición 4.31. Sean S una superficie no degenerada orientable y $\alpha : I \rightarrow S$ una curva regular tal que $\|\alpha'\|_L \neq 0$ en I . Si para todo $s \in I$ el vector $\alpha'(s)$ es una dirección principal lorentziana entonces α se llama **línea de curvatura de S** .

Proposición 4.32. *Sean S una superficie no degenerada orientable y $\alpha : I \rightarrow S$ una curva tal que $\|\alpha'\|_L \neq 0$. Entonces α es una línea de curvatura si y sólo si*

$$\frac{\partial}{\partial s} N^L \circ \alpha(s) = -\lambda(s) \alpha'(s)$$

donde $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable. En este caso $\lambda(s)$ es la curvatura principal lorentziana asociada a $\alpha'(s)$.

Demostración. Supongamos que α es una línea de curvatura, entonces

$$\frac{\partial}{\partial s} N^L \circ \alpha(s) = -A_{\alpha(s)}^L(\alpha'(s)) = -\lambda(s) \alpha'(s).$$

Tomando producto lorentziano con $\alpha'(s)$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial s} N^L \circ \alpha(s), \alpha'(s) \right\rangle_L = -\lambda(s) \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L.$$

Por lo tanto,

$$\lambda(s) = -\frac{\left\langle \frac{\partial}{\partial s} N^L \circ \alpha(s), \alpha'(s) \right\rangle_L}{\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L}$$

de donde tenemos que λ es diferenciable.

La recíproca surge de la igualdad

$$\frac{\partial}{\partial s} N^L \circ \alpha(s) = -A_{\alpha(s)}^L(\alpha'(s)).$$

□

Geometría intrínseca

Recordemos que la primera forma fundamental euclídea de una superficie S se puede usar para calcular conceptos métricos en S . Tales cálculos se pueden hacer sin “abandonar” la superficie, una vez que se conoce la primera forma fundamental euclídea. Debido a esto, se dice que estos conceptos son *intrínsecos* de la superficie S . Muchas propiedades locales importantes de una superficie pueden expresarse sólo en términos de la primera forma fundamental. El estudio de tales propiedades se llama *geometría intrínseca de la superficie*.

En este capítulo definiremos algunos conceptos de la geometría intrínseca en superficies no degeneradas en el sentido de la métrica lorentziana de \mathbb{R}^3 . En particular, definiremos las isometrías, la derivada covariante y las geodésicas.

5.1. Isometrías

Recordemos que un difeomorfismo entre superficies $F : S_1 \rightarrow S_2$ es una aplicación biyectiva y diferenciable con inversa diferenciable. Una isometría euclídea es un difeomorfismo entre superficies que preserva la métrica, esto es, un difeomorfismo $F : S_1 \rightarrow S_2$ entre superficies es una isometría euclídea si para todos $p \in S_1$ y $u, v \in T_p S_1$, vale que

$$\langle dF_p u, dF_p v \rangle_E = \langle u, v \rangle_E.$$

Para definir una isometría lorentziana, podemos cambiar el producto interno usual por el producto lorentziano. Esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 5.1. Sean S_1 y S_2 dos superficies no degeneradas y $F : S_1 \rightarrow S_2$ un difeomorfismo. Decimos que F es una **isometría lorentziana** si para todos $p \in S_1$ y $u, v \in T_p S_1$, vale que

$$\langle dF_p u, dF_p v \rangle_L = \langle u, v \rangle_L.$$

En este caso se dice que S_1 y S_2 son isométricas.

Decimos que F es una **isometría local lorentziana** si para todo $p \in S_1$ existe un entorno U de p en S_1 tal que $F : U \rightarrow F(U)$ es una isometría lorentziana. En este caso, se dice que S_1 y S_2 son **localmente isométricas**.

Una isometría preserva la métrica entre superficies, entonces parece natural que no exista una isometría entre superficies de distinto carácter causal. En efecto, sean S_1 y S_2 dos superficies isométricas. Probaremos que S_1 es espacial (resp. temporal) si y sólo si S_2 es espacial (resp. temporal).

Sean $F : S_1 \rightarrow S_2$ una isometría lorentziana y $p \in S_1$. Entonces F es un difeomorfismo y resulta dF_q no singular para todo $q \in S_1$. Sea $u \in T_{F(p)} S_2$, entonces existe $u_0 \in T_p S$ tal que

$$dF_p u_0 = u.$$

Sean I_p^L la primera forma fundamental en p de S_1 y $\tilde{I}_{F(p)}^L$ la primera forma fundamental en $F(p)$ de S_2 . Luego

$$I_p^L(u_0) = \langle u_0, u_0 \rangle_L = \langle u, u \rangle_L = \tilde{I}_{F(p)}^L(u).$$

Por lo tanto, el carácter causal de las métricas en los espacios $T_p S_1$ y $T_{F(p)} S_2$ coinciden. Dado que F es biyectiva, tenemos que todos los espacios tangentes de S_1 son espaciales (resp. temporales) si y sólo si todos los espacios tangentes de S_2 son espaciales (resp. temporales).

En la prueba anterior probamos que para todo $u \in T_p S$ se verifica

$$I_p^L(u) = \tilde{I}_{F(p)}^L(dF_p u).$$

Esto es, las isometrías preservan la primera forma fundamental. Recíprocamente, si $F : S_1 \rightarrow S_2$ es un difeomorfismo que preserva la primera forma fundamental, entonces

$$\langle u, v \rangle_L = \frac{1}{4} I_p^L(u+v) - \frac{1}{4} I_p^L(u-v) = \frac{1}{4} \tilde{I}_{F(p)}^L(dF_p(u+v)) - \frac{1}{4} \tilde{I}_{F(p)}^L(dF_p(u-v)) = \langle dF_p u, dF_p v \rangle_L,$$

y por lo tanto F es una isometría.

Proposición 5.2. Sean S_1 y S_2 dos superficies no degeneradas. Supongamos que existen (U, \mathbf{x}) y $(U, \tilde{\mathbf{x}})$ parches de S_1 y S_2 , respectivamente, tales que los coeficientes de la primera forma fundamental E^L, F^L y G^L de S_1 , y \tilde{E}^L, \tilde{F}^L y \tilde{G}^L de S_2 , verifican

$$E^L = \tilde{E}^L, \quad F^L = \tilde{F}^L \quad \text{y} \quad G^L = \tilde{G}^L.$$

Entonces la función $F : \mathbf{x}(U) \rightarrow \tilde{\mathbf{x}}(U)$ definida por $F = \tilde{\mathbf{x}} \circ \mathbf{x}^{-1}$ es una isometría local.

Demostración. Sean $p \in \mathbf{x}(U)$ tal que $p = \mathbf{x}(u_0, v_0)$ y $w \in T_p S_1$ tal que

$$w = w_1 \mathbf{x}_u(u_0, v_0) + w_2 \mathbf{x}_v(u_0, v_0).$$

Observemos que

$$F \circ \mathbf{x}(u_0 + s, v_0) = \tilde{\mathbf{x}}(u_0 + s, v_0)$$

para todo $s \in \mathbb{R}$ tal que $(u_0 + s, v_0) \in U$. Derivando respecto de s y tomando $s = 0$,

$$dF_p \mathbf{x}_u(u_0, v_0) = \tilde{\mathbf{x}}_u(u_0, v_0).$$

De manera análoga se puede ver que

$$dF_p \mathbf{x}_v(u_0, v_0) = \tilde{\mathbf{x}}_v(u_0, v_0).$$

Luego

$$dF_p w = w_1 \tilde{\mathbf{x}}_u(u_0, v_0) + w_2 \tilde{\mathbf{x}}_v(u_0, v_0).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} I_p(w) &= w_1^2 E^L(u_0, v_0) + 2w_1 w_2 F^L(u_0, v_0) + w_2^2 G^L(u_0, v_0) \\ &= w_1^2 \tilde{E}^L(u_0, v_0) + 2w_1 w_2 \tilde{F}^L(u_0, v_0) + w_2^2 \tilde{G}^L(u_0, v_0) = \tilde{I}_{F(p)}^L(dF_p w). \end{aligned}$$

Luego F es una isometría local. □

Observación 5.3. Observemos que la vuelta de la proposición anterior es verdadera. Esto es, sean F una isometría entre dos superficies no degeneradas S_1 y S_2 , y $p \in S_1$.

Sea (U, \mathbf{x}) un parche coordenado de S_1 en p , y definimos la aplicación $\mathbf{y} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$\mathbf{y}(u, v) = F(\mathbf{x}(u, v)).$$

Entonces (U, \mathbf{y}) es un parche coordenado de S_2 en $F(p)$.

Sean E^L, F^L, G^L y $\tilde{E}^L, \tilde{F}^L, \tilde{G}^L$ los coeficientes de la primera forma fundamental lorentziana asociados a (U, \mathbf{x}) y a (U, \mathbf{y}) , respectivamente. Entonces,

$$E^L = \tilde{E}^L, \quad F^L = \tilde{F}^L \quad \text{y} \quad G^L = \tilde{G}^L.$$

A continuación, vamos a definir los símbolos de Christoffel lorentzianos.

Sean S una superficie no degenerada y (U, \mathbf{x}) un parche coordenado en S . Tenemos la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, n^L\}$ de \mathbb{R}^3 inducida por el parche, donde n^L es el normal unitario local. Luego existen coeficientes $\Gamma_{ij,k}^L$, $i, j, k = 1, 2$ tales que

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uu} &= \Gamma_{11,1}^L \mathbf{x}_u + \Gamma_{11,2}^L \mathbf{x}_v + \varepsilon e^L n^L, \\ \mathbf{x}_{uv} &= \Gamma_{12,1}^L \mathbf{x}_u + \Gamma_{12,2}^L \mathbf{x}_v + \varepsilon f^L n^L, \\ \mathbf{x}_{vu} &= \Gamma_{21,1}^L \mathbf{x}_u + \Gamma_{21,2}^L \mathbf{x}_v + \varepsilon f^L n^L, \\ \mathbf{x}_{vv} &= \Gamma_{22,1}^L \mathbf{x}_u + \Gamma_{22,2}^L \mathbf{x}_v + \varepsilon g^L n^L,\end{aligned}\tag{5.1}$$

donde $\varepsilon = \langle n^L, n^L \rangle_L$. Observemos que los $\Gamma_{ij,k}^L$ son funciones definidas en U que verifican $\Gamma_{ij,k}^L = \Gamma_{ji,k}^L$ para $i, j, k = 1, 2$.

Los coeficientes $\{\Gamma_{ij,k}^L\}$ definidos en (5.1) se llaman **símbolos de Christoffel lorentzianos**.

Tomando producto lorentziano de \mathbf{x}_{uu} con \mathbf{x}_u tenemos que

$$\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \rangle_L = \Gamma_{11,1}^L E^L + \Gamma_{11,2}^L F^L.$$

Por otro lado, $E_u^L = 2 \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \rangle_L$, entonces

$$\frac{1}{2} E_u^L = \Gamma_{11,1}^L E^L + \Gamma_{11,2}^L F^L.$$

Tomando producto lorentziano de \mathbf{x}_{uu} con \mathbf{x}_v y de las otras derivadas parciales segundas de \mathbf{x} con \mathbf{x}_u y \mathbf{x}_v , obtenemos seis ecuaciones que podemos escribir matricialmente como

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} E^L & F^L \\ F^L & G^L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{11,1}^L \\ \Gamma_{11,2}^L \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_u \\ F_u - \frac{1}{2} E_v \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} E^L & F^L \\ F^L & G^L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{12,1}^L \\ \Gamma_{12,2}^L \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_v \\ \frac{1}{2} G_u \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} E^L & F^L \\ F^L & G^L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{22,1}^L \\ \Gamma_{22,2}^L \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \frac{1}{2} G_v \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{5.2}$$

Por lo tanto, los símbolos de Christoffel dependen de los coeficientes de la primera forma fundamental y sus derivadas. Más aún, dado que los coeficientes de la primera forma fundamental son diferenciables tenemos que los símbolos de Christoffel son diferenciables como funciones definidas en U .

5.2. Geodésicas y derivada covariante

En la teoría euclídea de superficies, decimos que una curva diferenciable $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ contenida en una superficie S es una geodésica si $\alpha''(s) \in T_{\alpha(s)} S^{\perp E}$ para todo $s \in I$. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 5.4. Sean S una superficie no degenerada y $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable contenida en S . Decimos que α es una **geodésica (lorentziana)** si $\alpha''(s) \in T_{\alpha(s)} S^{\perp L}$ para todo $s \in I$.

Proposición 5.5. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una geodésica en una superficie no degenerada S . Entonces $\|\alpha'\|_L$ es constante en I .

Demostración. Como α'' es normal a S tenemos que

$$\langle \alpha', \alpha'' \rangle_L = 0.$$

Por otro lado,

$$\langle \alpha', \alpha'' \rangle_L = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \langle \alpha', \alpha' \rangle_L.$$

Luego, $\langle \alpha', \alpha' \rangle_L$ es constante en I . Por lo tanto, $\|\alpha'\|_L$ es constante en I . \square

La derivada covariante en el sentido de la métrica lorentziana puede definirse como la proyección al plano tangente de la derivada de un campo de vectores tangentes a lo largo de una curva. Observemos que, si el espacio tangente $T_p S$ es no degenerado, entonces tenemos la descomposición

$$\mathbb{L}^3 = T_p S \oplus T_p S^{\perp L}.$$

Luego, la proyección al espacio tangente $T_p S$ está bien definida y es la componente tangencial de la descomposición.

Definición 5.6. Sean S una superficie no degenerada y W un campo de vectores tangentes diferenciable a lo largo de una curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciable contenida en S . La **derivada covariante (lorentziana) de W a lo largo de α** se define como la proyección en \mathbb{L}^3 de $W'(s)$ al plano tangente $T_{\alpha(s)} S$, y se denota

$$\frac{D^L W}{ds}(s) := \text{proy}_{T_p S} W'(s).$$

Ahora vamos a dar una representación en coordenadas locales de la derivada covariante.

Sean S una superficie no degenerada y W un campo de vectores tangentes diferenciable a lo largo de una curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciable contenida en S . Sea (U, \mathbf{x}) un parche coordinado y supongamos que $\alpha(I) \subset \mathbf{x}(U)$. Sea $\beta(s) = \mathbf{x}^{-1} \circ \alpha(s)$ con $s \in I$. Entonces existen funciones diferenciables a y b en I tales que

$$W(s) = a(s)\mathbf{x}_u(\beta(s)) + b(s)\mathbf{x}_v(\beta(s)). \quad (5.3)$$

Supongamos que $\beta(s) = (\beta_1(s), \beta_2(s))$. Derivando respecto de s tenemos que

$$\begin{aligned} W'(s) &= a'(s)\mathbf{x}_u(\beta(s)) + b'(s)\mathbf{x}_v(\beta(s)) + a(s)(\mathbf{x}_{uu}(\beta(s))\beta_1'(s) + \mathbf{x}_{uv}(\beta(s))\beta_2'(s)) \\ &\quad + b(s)(\mathbf{x}_{vu}(\beta(s))\beta_1'(s) + \mathbf{x}_{vv}(\beta(s))\beta_2'(s)). \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{D^L W}{ds}(s) &= a'(s)\mathbf{x}_u(\beta(s)) + b'(s)\mathbf{x}_v(\beta(s)) \\ &\quad + a(s)(\Gamma_{11,1}^L(\beta(s))\mathbf{x}_u(\beta(s)) + \Gamma_{11,2}^L(\beta(s))\mathbf{x}_v(\beta(s)))\beta_1'(s) \\ &\quad + a(s)(\Gamma_{12,1}^L(\beta(s))\mathbf{x}_u(\beta(s)) + \Gamma_{12,2}^L(\beta(s))\mathbf{x}_v(\beta(s)))\beta_2'(s) \\ &\quad + b(s)(\Gamma_{12,1}^L(\beta(s))\mathbf{x}_u(\beta(s)) + \Gamma_{12,2}^L(\beta(s))\mathbf{x}_v(\beta(s)))\beta_1'(s) \\ &\quad + b(s)(\Gamma_{22,1}^L(\beta(s))\mathbf{x}_u(\beta(s)) + \Gamma_{22,2}^L(\beta(s))\mathbf{x}_v(\beta(s)))\beta_2'(s). \end{aligned}$$

Definición 5.7. Sean S una superficie no degenerada y W campo de vectores tangentes a lo largo de una curva diferenciable $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ contenida en S . Decimos que W es **paralelo** si

$$\frac{D^L W}{ds}(s) = 0,$$

para todo $s \in I$.

Sea W como en la ecuación (5.3). Luego, W es paralelo si y sólo si verifica el sistema

$$\begin{cases} -a' = (a & b) \begin{pmatrix} \Gamma_{11,1}^L & \Gamma_{12,1}^L \\ \Gamma_{12,1}^L & \Gamma_{22,1}^L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1' \\ \beta_2' \end{pmatrix} \\ -b' = (a & b) \begin{pmatrix} \Gamma_{11,2}^L & \Gamma_{12,2}^L \\ \Gamma_{12,2}^L & \Gamma_{22,2}^L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1' \\ \beta_2' \end{pmatrix} \end{cases} \quad (5.4)$$

Por el Teorema de existencia y unicidad de Picard tenemos el siguiente resultado.

Proposición 5.8. *Sea S una superficie no degenerada. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable contenida en S con $p = \alpha(0) \in S$ y $w_0 \in T_p S$. Entonces existe un único campo de vectores paralelo W definido en un entorno de $s = 0$ tal que $W(0) = w_0$.*

Sean S una superficie no degenerada y $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable contenida en S . Observemos que

$$W(s) := \alpha'(s)$$

es un campo de vectores tangentes en S a lo largo de α .

Lema 5.9. *Sean S una superficie no degenerada y $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable contenida en S . Entonces α es una geodésica si y sólo si α' es paralelo.*

Demostración. Observemos que por definición α es geodésica si $\alpha''(s) \in T_{\alpha(s)} S^{\perp L}$ para todo $s \in I$ o, de manera equivalente, que su proyección al espacio $T_{\alpha(s)} S$ sea el vector nulo, lo cual es equivalente a que

$$\frac{D^L \alpha'}{ds}(s) = 0.$$

□

Sea (U, \mathbf{x}) un parche coordenado en S . Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva diferenciable contenida en S tal que

$$\alpha(s) = \mathbf{x}(\beta_1(s), \beta_2(s)).$$

Entonces

$$\alpha'(s) = \beta_1'(s) \mathbf{x}_u \circ \beta(s) + \beta_2'(s) \mathbf{x}_v \circ \beta(s),$$

y las ecuaciones (5.4) en este caso tienen la forma

$$\begin{cases} -\beta_1'' = (\beta_1' & \beta_2') \begin{pmatrix} \Gamma_{11,1}^L & \Gamma_{12,1}^L \\ \Gamma_{12,1}^L & \Gamma_{22,1}^L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1' \\ \beta_2' \end{pmatrix} \\ -\beta_2'' = (\beta_1' & \beta_2') \begin{pmatrix} \Gamma_{11,2}^L & \Gamma_{12,2}^L \\ \Gamma_{12,2}^L & \Gamma_{22,2}^L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1' \\ \beta_2' \end{pmatrix} \end{cases}$$

Nuevamente por el Teorema de Picard tenemos el siguiente resultado.

Proposición 5.10. *Sean S una superficie no degenerada, $p \in S$ y $w_0 \in T_p S$. Entonces existe una única geodésica α en S definida en un entorno de $s = 0$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = w_0$.*

Definiremos la curvatura geodésica de una curva en una superficie. Para esto primero definiremos el vector normal intrínseco a la curva en el sentido de la métrica lorentziana.

Sean S una superficie no degenerada orientable, N^L una aplicación de Gauss lorentziana de S y $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular contenida en S . Luego, tenemos dos posibilidades: podemos parametrizar a α por longitud de arco o α es una curva luz. Vamos a estudiar estos casos por separado.

Supongamos que α está parametrizada por longitud de arco. Podemos tomar el producto vectorial

$$D(s) = N^L \circ \alpha(s) \times_L \alpha'(s),$$

y de esta forma construimos una base ortogonal $\{\alpha'(s), N^L \circ \alpha(s), D(s)\}$ de \mathbb{L}^3 .

Observemos que $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L$ es constante igual 1 o -1 . Derivando respecto de s tenemos que

$$\langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle_L = 0.$$

Por lo tanto, $\alpha''(s) \perp_L \alpha'(s)$.

Luego la curva α'' se puede expresar como

$$\alpha''(s) = \eta D(s) + k_n^L(s) N^L \circ \alpha(s),$$

donde $\eta \in \mathbb{R}$ y $k_n^L(s)$ denota a la curvatura normal lorentziana de S en el punto $\alpha(s)$ y dirección $\alpha'(s)$.

Tomando producto lorentziano de α'' y D , tenemos que

$$\eta = \delta \langle \alpha''(s), D(s) \rangle_L$$

donde $\delta = \langle D, D \rangle_L$ es una constante igual a -1 o 1 . Por lo tanto,

$$\alpha''(s) = \delta \langle \alpha''(s), D(s) \rangle_L D(s) + k_n^L(s) N^L \circ \alpha(s),$$

Definición 5.11. Sean S una superficie no degenerada orientable y $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ un curva parametrizada por longitud de arco contenida en S . El vector

$$D(s) = N^L \circ \alpha(s) \times_L \alpha'(s)$$

se llama **vector normal intrínseco a α en s** y el valor

$$\delta \langle \alpha''(s), D(s) \rangle_L,$$

donde $\delta = \langle D, D \rangle_L$, se llama **curvatura geodésica de α en s** y se denota por $k_g^L(s)$.

Supongamos que α es una curva luz. Podemos tomar nuevamente el producto vectorial

$$D(s) = N^L \circ \alpha(s) \times_L \alpha'(s).$$

En este caso, $\{\alpha'(s), N^L \circ \alpha(s), D(s)\}$ no es una base ortogonal de \mathbb{L}^3 , pues $\alpha'(s)$ es un vector luz. Esto nos genera un problema para definir la curvatura geodésica.

Para resolver este problema consideremos la descomposición

$$\mathbb{L}^3 = T_{\alpha(s)}S \oplus T_{\alpha(s)}S^{\perp L}.$$

Luego, existe $u(s) \in T_{\alpha(s)}S$ tal que

$$\alpha''(s) = u(s) + k_n^L(s) N^L \circ \alpha(s),$$

donde $k_n^L(s)$ denota a la curvatura normal lorentziana de S en el punto $\alpha(s)$ y dirección $\alpha'(s)$.

Dado que α es una curva luz, tenemos que

$$\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L = 0.$$

Derivando respecto de s ,

$$0 = \langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle_L = \langle u(s), \alpha'(s) \rangle_L.$$

Observemos que si $u(s)$ y $\alpha'(s)$ son vectores linealmente independientes, entonces $\{u(s), \alpha'(s)\}$ es una base ortogonal de $T_{\alpha(s)}S$ formada por al menos un vector luz, lo cual es absurdo pues $T_{\alpha(s)}S$ es un subespacio no degenerado. Luego, $u(s)$ y $\alpha'(s)$ son vectores linealmente dependientes. Por otro lado, $\{\alpha'(s), D(s)\}$ no es un conjunto linealmente independiente, pues está contenido en $T_{\alpha(s)}S$ y es un conjunto de vectores ortogonales. Luego $\alpha'(s)$ y $D(s)$ son linealmente dependientes.

Por lo tanto, $D(s)$ y $u(s)$ son linealmente dependientes, y $D(s) = 0$ si y sólo si $u(s) = 0$. Luego, existe $\eta(s) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha''(s) = \eta(s)D(s) + k_n^L(s)N^L \circ \alpha(s). \quad (5.5)$$

Definición 5.12. Sean S una superficie no degenerada orientable y $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular y luz. El vector

$$D(s) = N^L \circ \alpha(s) \times_L \alpha'(s)$$

se llama **vector normal intrínseco a α en s** y el valor $\eta(s)$ definido en (5.5) se llama **curvatura geodésica de α en s** y lo denotamos por $k_g^L(s)$.

Observemos que la definición es análoga al caso en que α está parametrizada por longitud de arco. La diferencia es que aquí no podemos obtener la curvatura geodésica a partir del producto interno entre α'' y D .

Dada una curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ contenida en una superficie no degenerada orientable S , tenemos la descomposición

$$\alpha'' = k_g^L D + k_n^L N^L \circ \alpha.$$

Los siguientes resultados surgen directamente de esta descomposición.

Proposición 5.13. Sean S una superficie no degenerada orientable y $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular parametrizada por longitud de arco lorentziana o una curva regular y luz. Entonces α es una geodésica si y sólo si $k_g^L \equiv 0$.

Proposición 5.14. Sean S una superficie no degenerada orientable y $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular parametrizada por longitud de arco lorentziana. Entonces

$$(k^L)^2 = |\delta(k_g^L)^2 + \varepsilon(k_n^L)^2|,$$

donde k^L es la curvatura lorentziana de la curva α definida en la definición 2.5, $\delta = \langle D, D \rangle_L$ y $\varepsilon = \langle N^L \circ \alpha, N^L \circ \alpha \rangle_L$.

Finalmente, vamos a caracterizar a todas las geodésicas de las superficies \mathcal{H}^2 y \mathbb{S}_1^2 .

Ejemplo 5.15 (Geodésicas en \mathcal{H}^2). El espacio pseudohiperbólico \mathcal{H}^2 es una superficie espacial orientable y $N^L(p) = p$ es una aplicación de Gauss en \mathcal{H}^2 . Entonces

$$(T_p \mathcal{H}^2)^{\perp L} = \text{span}\{p\}.$$

Sea $p \in \mathcal{H}^2$ y supongamos que $\alpha : I \rightarrow \mathcal{H}^2$ es una geodésica tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v \in T_p \mathcal{H}^2$. Entonces $\alpha''(s)$ es linealmente dependiente con $N^L \circ \alpha(s) = \alpha(s)$. Luego existe $\eta(s) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha''(s) = \eta(s)\alpha(s). \quad (5.6)$$

Observemos que $\eta(s)$ es diferenciable, pues tomando producto lorentziano con $\alpha(s)$ en (5.6), tenemos que

$$\eta(s) = -\langle \alpha''(s), \alpha(s) \rangle_L.$$

Por otro lado, por la proposición 5.5 tenemos que $\langle \alpha', \alpha' \rangle_L$ es constante en I . Luego, derivando respecto de s dos veces, obtenemos que

$$\langle \alpha'', \alpha'' \rangle_L + \langle \alpha''', \alpha' \rangle_L = 0.$$

Luego, por (5.6),

$$-\eta^2 + \eta \langle \alpha', \alpha' \rangle_L = 0.$$

Por lo tanto, para cada $s \in I$ tenemos que

$$\eta(s) = 0 \quad \text{o} \quad \eta(s) = \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L.$$

Como $\langle \alpha', \alpha' \rangle_L$ es constante en I y η es una función continua en I , tenemos que η es constante en I y es idénticamente nula o igual a $\langle \alpha', \alpha' \rangle_L$. Supongamos que $\eta(s) \equiv \eta$ en I .

Entonces α es solución del problema

$$\begin{cases} x'' - \eta x = 0 \\ x(0) = p, \quad x'(0) = v \end{cases}$$

Luego

$$\alpha(s) = \begin{cases} p \cos(\sqrt{-\eta}s) + \frac{v}{\sqrt{-\eta}} \sin(\sqrt{-\eta}s), & \text{si } \eta < 0 \\ p \cosh(\sqrt{\eta}s) + \frac{v}{\sqrt{\eta}} \sinh(\sqrt{\eta}s), & \text{si } \eta > 0 \\ p + sv, & \text{si } \eta = 0 \end{cases}$$

Supongamos primero que $\eta < 0$, entonces

$$\langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle_L = -\cos^2(\sqrt{-\eta}s) - \sin^2(\sqrt{-\eta}s) \frac{1}{\eta} \langle v, v \rangle_L.$$

Por lo tanto, α está contenida en \mathcal{H}^2 si y sólo si $\langle v, v \rangle_L = \eta$. Esto es, v es un vector temporal en $T_p S$ lo cual es absurdo ya que \mathcal{H}^2 es una superficie espacial.

Supongamos que $\eta > 0$, entonces

$$\langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle_L = -\cosh^2(\sqrt{\eta}s) + \sinh^2(\sqrt{\eta}s) \frac{1}{\eta} \langle v, v \rangle_L.$$

Por lo tanto, α está contenida en S si y sólo si $\langle v, v \rangle_L = \eta$. Por unicidad de las geodésicas, fijado p y v , tenemos que todas las geodésicas en \mathcal{H}^2 son de la forma

$$\alpha(s) = p \cosh(\|v\|_L s) + \frac{v}{\|v\|_L} \sinh(\|v\|_L s),$$

para $s \in \mathbb{R}$.

Para el caso $\eta = 0$, tenemos que

$$\langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle_L = -1 + s^2 \langle v, v \rangle_L,$$

y tenemos que α está contenida en \mathcal{H}^2 si y sólo si $\langle v, v \rangle_L = 0$. Luego descartamos el caso $\eta = 0$.

Por lo tanto, tenemos que todas las geodésicas en \mathcal{H}^2 que pasan por p son de la forma

$$\alpha(s) = p \cosh(\|v\|_L s) + \frac{v}{\|v\|_L} \sinh(\|v\|_L s),$$

con $v \in T_p S$.

Ejemplo 5.16 (Geodésicas en \mathbb{S}_1^2). La pseudoesfera \mathbb{S}_1^2 es una superficie temporal orientable. Una aplicación de Gauss de \mathbb{S}_1^2 es la aplicación $N^L(p) = p$. Supongamos que $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una geodésica en \mathbb{S}_1^2 tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v \in T_p\mathbb{S}_1^2$. Entonces

$$\alpha''(s) \in (T_{\alpha(s)}\mathbb{S}_1^2)^{\perp L}.$$

Observemos que

$$(T_{\alpha(s)}\mathbb{S}_1^2)^{\perp L} = \text{span}\{\alpha(s)\},$$

entonces para cada $s \in I$ existe $\eta(s) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha''(s) = \eta(s)\alpha(s).$$

Haciendo un razonamiento análogo a lo hecho en el ejemplo 5.15, tenemos que η es constante en I y

$$\alpha(s) = \begin{cases} p \cos(\sqrt{-\eta}s) + \frac{v}{\sqrt{-\eta}} \sin(\sqrt{-\eta}s), & \text{si } \eta < 0 \\ p \cosh(\sqrt{\eta}s) + \frac{v}{\sqrt{\eta}} \sinh(\sqrt{\eta}s), & \text{si } \eta > 0 \\ p + sv, & \text{si } \eta = 0 \end{cases}$$

Supongamos que $\eta < 0$, entonces α está contenida en \mathbb{S}_1^2 si y sólo si

$$\langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle_L = 1,$$

entonces

$$\cos^2(\sqrt{-\eta}s) - \frac{\langle v, v \rangle_L}{\eta} \sin^2(\sqrt{-\eta}s) = 1$$

lo que implica $\langle v, v \rangle_L = -\eta$. Esto es, v es un vector espacial.

Supongamos que $\eta > 0$, entonces α está contenida en \mathbb{S}_1^2 si y sólo si

$$\langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle_L = 1,$$

entonces

$$\cosh^2(\sqrt{\eta}s) + \frac{\langle v, v \rangle_L}{\eta} \sinh^2(\sqrt{\eta}s) = 1$$

lo que implica $\langle v, v \rangle_L = -\eta$. Esto es, v es un vector temporal.

Finalmente, supongamos que $\eta = 0$, entonces α está contenida en \mathbb{S}_1^2 si y sólo si

$$1 + s^2 \langle v, v \rangle_L = 1$$

lo que implica que $\langle v, v \rangle_L = 0$. Esto es, v es un vector luz.

Juntando todo tenemos que las geodésicas en \mathbb{S}_1^2 son de la forma

$$\alpha(s) = \begin{cases} p \cos(\|v\|_L s) + \frac{v}{\|v\|_L} \sin(\|v\|_L s), & \text{si } v \text{ es espacial} \\ p \cosh(\|v\|_L s) + \frac{v}{\|v\|_L} \sinh(\|v\|_L s), & \text{si } v \text{ es temporal} \\ p + sv, & \text{si } v \text{ es luz} \end{cases}$$

para $s \in \mathbb{R}$.

Más aún, dado que existen sólo dos direcciones luz en $T_p\mathbb{S}_1^2$ tenemos que existen exactamente dos geodésicas luz que pasan por p y son rectas, para todo $p \in \mathbb{S}_1^2$.

Geometría diferencial global

La geometría diferencial global se ocupa de las relaciones entre las propiedades locales y globales de curvas y superficies. En este capítulo, vamos a dar algunos resultados sobre las superficies compactas, definiremos a las superficies umbilicales en el sentido de la métrica lorentziana de \mathbb{R}^3 , y daremos una versión análoga al teorema egregium de Gauss en el sentido de la métrica lorentziana.

6.1. Superficies compactas

Una superficie compacta es una superficie que es un subconjunto compacto de \mathbb{R}^3 con la topología usual. Un ejemplo de una superficie compacta es la esfera \mathbb{S}^2 . La esfera es una superficie que contiene puntos degenerados, como probamos en el ejemplo 3.2. Luego, no podemos definir los conceptos de primera y segunda forma fundamental lorentziana y aplicación de Gauss sobre toda la esfera.

La esfera no es un caso particular, como veremos a continuación. Vamos a probar que una superficie S orientable y compacta contiene puntos degenerados. Observemos que vamos a considerar que S es orientable según la definición 3.26.

Teorema 6.1. *Sea S una superficie orientable y compacta, entonces existen puntos degenerados en S .*

Demostración. Sea S una superficie orientable y compacta. Vamos a probar que existe un punto $p \in S$ tal que $T_p S$ es degenerado.

Como S es orientable, para la métrica euclídea podemos considerar una aplicación de Gauss euclídea N^E definida en S . Sea $v \in \mathbb{S}^2$ un vector luz, por ejemplo

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0).$$

Basta con probar que existe un punto $p \in S$ tal que $N^E(p) = \pm v$, pues en este caso $T_p S^{\perp E}$ es un subespacio luz, lo que implica que $T_p S$ es un subespacio luz por la proposición 3.13.

Sea $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$F(q) = \langle q, v \rangle_E.$$

La función F es continua y S es un subconjunto compacto de \mathbb{R}^3 , entonces F restringida a S asume su máximo en un punto $p \in S$.

Sea $w \in T_p S$ y $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable contenida en S tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = w$. Definimos la función $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(t) = \langle \alpha(t), v \rangle_E.$$

La función g es diferenciable y asume su máximo en $t = 0$. Luego

$$0 = g'(0) = \langle w, v \rangle_E.$$

Entonces $v \perp_E w$ para todo $w \in T_p S$. Por lo tanto, $N^E(p) = \pm v$, y $N^E(p)$ es un vector luz. \square

Dado que en una superficie no degenerada, las nociones de orientabilidad euclídea y lorentziana coinciden, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 6.2. *En \mathbb{L}^3 no existen superficies no degeneradas, orientables y compactas.*

6.2. Superficies umbilicales

Recordemos que en la teoría clásica de superficies, decimos que una superficie S es umbilical en $p \in S$ si la segunda forma fundamental es proporcional a la primera forma fundamental. Esto es, si existe un escalar $\lambda(p)$ tal que

$$\mathbb{II}_p^E = \lambda(p)\mathbb{I}_p^E.$$

Esto es equivalente a que las curvaturas principales euclídeas coincidan, o sea, $\lambda_1^E(p) = \lambda_2^E(p)$.

Definición 6.3. Sean S una superficie no degenerada orientable y $p \in S$. Decimos que p es un **punto umbilical (en el sentido de la métrica lorentziana)** de S si existe $\lambda(p) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathbb{II}_p^L = \lambda(p)\mathbb{I}_p^L.$$

Decimos que S es **totalmente umbilical (en el sentido de la métrica lorentziana)** si todos sus puntos son umbilicales. Esto es, si p es umbilical en S para todo $p \in S$.

Observemos que la definición anterior no depende de la elección de la aplicación de Gauss. En efecto, si cambiamos la aplicación de Gauss, cambia el signo de A_p^L y podemos tomar la constante opuesta a $\lambda(p)$.

Una interrogante que nos surge es si la definición de punto umbilical es equivalente a pedir que los autovalores del operador de forma lorentziano en p verifiquen la relación $\lambda_1^L(p) = \lambda_2^L(p)$. A continuación, probaremos que si el operador de forma es diagonalizable sobre \mathbb{R} , la relación se verifica.

Lema 6.4. *Sean S una superficie no degenerada orientable y $p \in S$. Entonces p es umbilical si y sólo si A_p^L es diagonalizable sobre \mathbb{R} y $\lambda_1^L(p) = \lambda_2^L(p)$.*

Demostración. Sea (U, \mathbf{x}) un parche en p tal que $p = \mathbf{x}(u_0, v_0)$ y $n^L(u_0, v_0) = N^L(p)$.

Supongamos primero que p es un punto umbilical, entonces existe $\lambda(p) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathbb{II}_p^L(u) = \lambda(p)\mathbb{I}_p^L(u)$$

para todo $u \in T_p S$. Luego

$$e^L(u_0, v_0) = \mathbb{II}_p^L(\mathbf{x}_u(u_0, v_0)) = \lambda(p)\mathbb{I}_p^L(\mathbf{x}_u(u_0, v_0)) = \lambda(p)E^L(u_0, v_0).$$

Si suponemos ahora que $u = \mathbf{x}_v(u_0, v_0)$ podemos ver de manera análoga que

$$g^L(u_0, v_0) = \lambda(p)G^L(u_0, v_0).$$

De las relaciones

$$\begin{aligned} F^L(u_0, v_0) &= \frac{1}{2} (\mathbb{I}_p^L(\mathbf{x}_u(u_0, v_0) + \mathbf{x}_v(u_0, v_0)) - \mathbb{I}_p^L(\mathbf{x}_u(u_0, v_0)) - \mathbb{I}_p^L(\mathbf{x}_v(u_0, v_0))) \quad y \\ f^L(u_0, v_0) &= \frac{1}{2} (\mathbb{II}_p^L(\mathbf{x}_u(u_0, v_0) + \mathbf{x}_v(u_0, v_0)) - \mathbb{II}_p^L(\mathbf{x}_u(u_0, v_0)) - \mathbb{II}_p^L(\mathbf{x}_v(u_0, v_0))) \end{aligned}$$

tenemos que $f^L(u_0, v_0) = \lambda(p)F^L(u_0, v_0)$.

Por lo tanto,

$$\begin{pmatrix} e^L(u_0, v_0) & f^L(u_0, v_0) \\ f^L(u_0, v_0) & g^L(u_0, v_0) \end{pmatrix} = \lambda(p) \begin{pmatrix} E^L(u_0, v_0) & F^L(u_0, v_0) \\ F^L(u_0, v_0) & G^L(u_0, v_0) \end{pmatrix}. \quad (6.1)$$

Por la proposición 1.6, existe una base \mathfrak{B} de $T_p S$ donde la matriz asociada a I_p^L es

$$H = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dependiendo del carácter causal de $T_p S$.

Por la relación (6.1), si U es la matriz de cambio de base de $\{\mathbf{x}_u(u_0, v_0), \mathbf{x}_v(u_0, v_0)\}$ a \mathfrak{B} , entonces

$$U \begin{pmatrix} e^L(u_0, v_0) & f^L(u_0, v_0) \\ f^L(u_0, v_0) & g^L(u_0, v_0) \end{pmatrix} U^{-1} = \lambda(p)H. \quad (6.2)$$

Por otro lado, por (4.6) tenemos la relación

$$- \begin{pmatrix} e^L & f^L \\ f^L & g^L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E^L & F^L \\ F^L & G^L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}^L & a_{12}^L \\ a_{21}^L & a_{22}^L \end{pmatrix},$$

donde la matriz de los a_{ij}^L es la matriz de $dN_{\mathbf{x}(u,v)}^L$ en la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$. Luego, de la relación anterior y (6.2) tenemos que la matriz asociada a A_p^L en la base \mathfrak{B} verifica

$$\lambda(p)H = H[A_p^L]_{\mathfrak{B}}.$$

Luego,

$$[A_p^L]_{\mathfrak{B}} = \lambda(p)H^{-1}H = \lambda(p) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Por lo tanto, A_p^L es diagonalizable y $\lambda_1^L(p) = \lambda(p) = \lambda_2^L(p)$.

Supongamos ahora que A_p^L es diagonalizable y que $\lambda_1^L(p) = \lambda_2^L(p)$. Sea

$$\lambda(p) := \lambda_1^L(p) = \lambda_2^L(p).$$

Sean e_1^L y e_2^L las direcciones principales lorentzianas de S en p . Entonces en la base $\mathfrak{B} = \{e_1^L, e_2^L\}$ de $T_p S$ la matriz asociada al operador de forma lorentziano de S en p es

$$[A_p^L]_{\mathfrak{B}} = \lambda(p) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$[A_p^L(u)]_{\mathfrak{B}} = \lambda(p)[u]_{\mathfrak{B}}.$$

Luego

$$A_p^L(u) = \lambda(p)u$$

para todo $u \in T_p S$. Por lo tanto,

$$\Pi_p^L(u) = \langle A_p^L(u), u \rangle_L = \lambda(p) \langle u, u \rangle_L = \lambda(p)I_p^L(u).$$

□

Recordemos que para el caso euclídeo, un punto p es umbilical si y sólo si $(H^E(p))^2 = K^E(p)$, la prueba es una consecuencia directa de la relación

$$\left(\frac{\lambda_1^E - \lambda_2^E}{2}\right)^2 = (H^E)^2 - K^E.$$

Para el caso lorentziano,

$$\left(\frac{\lambda_1^L - \lambda_2^L}{2}\right)^2 = \left(\frac{\lambda_1^L + \lambda_2^L}{2}\right)^2 - \lambda_1^L \lambda_2^L = (H^L)^2 - \varepsilon K^L,$$

donde $\varepsilon = \langle N^L, N^L \rangle_L$. Por lo tanto, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 6.5. *Sea S una superficie no degenerada orientable. Sea $p \in S$ tal que A_p^L es diagonalizable sobre \mathbb{R} . Entonces p es un punto umbilical si y sólo si $(H^L(p))^2 = \varepsilon K^L(p)$, donde $\varepsilon = \langle N^L(p), N^L(p) \rangle_L$.*

Recordemos el ejemplo 4.22. La superficie de este ejemplo verifica la condición $\lambda_1^L = \lambda_2^L$ en todos sus puntos pero no tiene puntos umbilicales. Se puede ver que el operador de forma no es diagonalizable, lo cual nos dice que esa condición es importante en las proposiciones anteriores.

Ejemplo 6.6. Sea S la superficie dada en el ejemplo 4.22. Esta superficie se define por la parametrización

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(\frac{4}{3}v^3 + v, \frac{4}{3}v^3 - v, 2v^2\right) + u \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Entonces los coeficientes de la primera forma fundamental lorentziana en $\mathbf{x}(u, v)$ son

$$E^L(u, v) = F^L(u, v) = 0 \quad \text{y} \quad G^L(u, v) = -4,$$

y los coeficientes de la segunda forma fundamental lorentziana en $\mathbf{x}(u, v)$ son

$$e^L(u, v) = g^L(u, v) = 0 \quad \text{y} \quad f^L(u, v) = -1.$$

Luego

$$I_{\mathbf{x}(u,v)}^L(w) = -4w_1 \quad \text{y} \quad II_{\mathbf{x}(u,v)}^L(w) = -w_1 w_2,$$

para todo $w \in T_{\mathbf{x}(u,v)}S$ con $w = w_1 \mathbf{x}_u(u, v) + w_2 \mathbf{x}_v(u, v)$.

Por lo tanto, no existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$II_{\mathbf{x}(u,v)}^L = \lambda I_{\mathbf{x}(u,v)}^L.$$

Tenemos que S es una superficie que no tiene puntos umbilicales.

Por otro lado, en el ejemplo 4.22, calculamos el operador de forma en coordenadas locales, a saber

$$[A_{\mathbf{x}(u,v)}^L] = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, las curvaturas principales lorentzianas verifican

$$\lambda_1^L(\mathbf{x}(u, v)) = 0 = \lambda_2^L(\mathbf{x}(u, v)).$$

Este ejemplo nos dice que la condición $\lambda_1^L(p) = \lambda_2^L(p)$ no necesariamente implica que p sea un punto umbilical.

Tenemos un resultado que caracteriza a las superficies totalmente umbilicales en la teoría clásica de superficies:

Si S es una superficie totalmente umbilical y conexa, entonces S está contenida en un esfera o un plano.

Este resultado se puede ver en [dC17, Proposición 4, Sección 3.2]. Daremos un resultado similar para las superficies totalmente umbilicales en el sentido de la métrica lorentziana.

Sean S una superficie totalmente umbilical y conexa, y $p \in S$. Sea (U, \mathbf{x}) un parche coordinado de S . Tenemos definido el vector normal unitario n^L y podemos tomar la base ortonormal $\{e_1^L, e_2^L\}$ de $T_{\mathbf{x}(u,v)}S$ formada por las direcciones principales lorentzianas. Luego, la matriz asociada a la diferencial de la aplicación de Gauss dada por el vector normal unitario tiene la forma

$$[dn_{(u,v)}^L] = \begin{pmatrix} \lambda(u, v) & 0 \\ 0 & \lambda(u, v) \end{pmatrix}$$

donde

$$\lambda(u, v) := -\lambda_1^L(\mathbf{x}(u, v)) = -\lambda_2^L(\mathbf{x}(u, v)).$$

Entonces para todo $w \in T_{\mathbf{x}(u,v)}S$ tenemos la relación

$$dn_{(u,v)}^L w = \lambda(u, v)w.$$

Vamos a probar que λ es una función constante en U .

Sea $w \in T_{\mathbf{x}(u,v)}S$ con $w = \eta \mathbf{x}_u(u, v) + \zeta \mathbf{x}_v(u, v)$, entonces

$$\eta dn_{(u,v)}^L \mathbf{x}_u(u, v) + \zeta dn_{(u,v)}^L \mathbf{x}_v(u, v) = (\eta \mathbf{x}_u(u, v) + \zeta \mathbf{x}_v(u, v))\lambda(u, v).$$

Como esto vale para todo $w \in T_{\mathbf{x}(u,v)}S$, y por lo tanto para todo $\eta, \zeta \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$\begin{cases} dn_{(u,v)}^L \mathbf{x}_u = \mathbf{x}_u \lambda \\ dn_{(u,v)}^L \mathbf{x}_v = \mathbf{x}_v \lambda \end{cases}$$

Derivando la primera ecuación respecto de v y la segunda respecto de u ,

$$\begin{cases} (dn_{(u,v)}^L \mathbf{x}_u)_v = \mathbf{x}_{uv} \lambda + \mathbf{x}_u \lambda_v \\ (dn_{(u,v)}^L \mathbf{x}_v)_u = \mathbf{x}_{vu} \lambda + \mathbf{x}_v \lambda_u \end{cases}$$

Observando que $(dn_{(u,v)}^L \mathbf{x}_u)_v = (dn_{(u,v)}^L \mathbf{x}_v)_u$ y $\mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vu}$, y restando las ecuaciones anteriores tenemos que

$$\mathbf{x}_u \lambda_v - \mathbf{x}_v \lambda_u = 0.$$

Como \mathbf{x}_u y \mathbf{x}_v son linealmente independientes tenemos que $\lambda_u = \lambda_v = 0$. Por lo tanto, λ es una función constante en U . Supongamos que $\lambda(u, v) = \lambda$ para todo $(u, v) \in U$.

- Si $\lambda = 0$, entonces n^L es constante en U . Luego $\mathbf{x}(U)$ es parte de un plano por el lema 4.18.
- Si $\lambda \neq 0$, entonces la función definida en U por

$$\phi(u, v) := \mathbf{x}(u, v) - \frac{1}{\lambda} n^L(u, v)$$

verifica $\phi_u = \phi_v = 0$ en U . Luego ϕ es constante en U . Supongamos que $\phi(u, v) \equiv \phi$ en U . Entonces

$$\|\mathbf{x}(u, v) - \phi\|_L = \left\| \frac{1}{\lambda} n^L(u, v) \right\|_L = \frac{1}{|\lambda|}$$

en U . Tenemos que $\mathbf{x}(U)$ está contenido en el conjunto

$$\phi + \{v \in \mathbb{R}^3 : \|v\|_L = |\lambda|^{-1}\} = \phi + |\lambda|^{-1} \{v \in \mathbb{R}^3 : \|v\|_L = 1\}. \quad (6.4)$$

Probamos que S localmente está contenida en un plano o el conjunto de la ecuación (6.4). Extenderemos este resultado a toda la superficie S . Sea $q \in S$ un punto arbitrario de S . Como S es conexa existe una curva $\alpha : [0, 1] \rightarrow S$ continua tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = q$. Para cada $s \in [0, 1]$, sea (U_s, \mathbf{x}_s) un parche coordenado en $\alpha(s)$. Entonces el conjunto

$$\{\mathbf{x}_s(U_s)\}_{s \in [0,1]}$$

es un cubrimiento abierto de $\alpha([0, 1])$, que es un conjunto compacto pues es la imagen continua de un compacto. Entonces existen $s_0 < s_1 < \dots < s_n$ puntos en $[0, 1]$ tal que

$$\{\mathbf{x}_{s_k}(U_{s_k})\}_{k=0,\dots,n}$$

es un cubrimiento de $\alpha([0, 1])$, y podemos suponer sin pérdida de generalidad que $s_0 = 0$ y $s_n = 1$.

Ahora, cada $\mathbf{x}_{s_k}(U_{s_k})$ está contenido en un plano o el conjunto de la ecuación (6.4). Vamos a probar que podemos reordenar a $\{\mathbf{x}_{s_k}(U_{s_k})\}_{k=0,\dots,n}$ para formar un cubrimiento finito $\{\mathbf{y}_k(V_k)\}_{k=0,\dots,n}$ de $\alpha([0, 1])$ de modo que

$$\mathbf{y}_k(V_k) \cap \mathbf{y}_{k+1}(V_{k+1}) \neq \emptyset$$

para $k = 1, \dots, n-1$. En efecto, como $\{\mathbf{x}_{s_k}(U_{s_k})\}_{k=0,\dots,n}$ es un cubrimiento de $\alpha([0, 1])$, existe $k_1 \in \{1, \dots, n\}$ tal que

$$p \in \mathbf{x}_{k_1}(U_{k_1}).$$

Sea

$$(\mathbf{y}_1, V_1) = (\mathbf{x}_{k_1}, U_{k_1}).$$

Vamos a probar que existe $k_2 \in \{1, \dots, n\} - \{k_1\}$ tal que $\mathbf{x}_{k_1}(U_{k_1}) \cap \mathbf{x}_{k_2}(U_{k_2}) \neq \emptyset$. Supongamos que $\mathbf{x}_{k_1}(U_{k_1}) \cap \mathbf{x}_j(U_j) = \emptyset$ para todo $j \in \{1, \dots, n\} - \{k_1\}$. Entonces podemos cubrir a $\alpha([0, 1])$ con dos abiertos disjuntos

$$A = \mathbf{x}_{k_1}(U_{k_1}) \quad \text{y} \quad B = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq k_1}}^n \mathbf{x}_j(U_j).$$

Lo cual es absurdo, pues $\alpha([0, 1])$ es conexo. Luego, existe k_2 y sea

$$(\mathbf{y}_2, V_2) = (\mathbf{x}_{k_2}, U_{k_2}).$$

Repetimos este proceso hasta construir la familia $\{\mathbf{y}_k(V_k)\}$. Como estos parches se solapan tenemos que todos están contenidos en el mismo plano o el conjunto de la ecuación (6.4). Observemos que

$$\{v \in \mathbb{R}^3 : \|v\|_L = 1\}$$

es el conjunto de vectores unitarios de \mathbb{L}^3 . Luego, si S es espacial, entonces S está contenida en el conjunto

$$\phi + |\lambda|^{-1} \mathcal{H}^2,$$

y si S es temporal, entonces S está contenida en

$$\phi + |\lambda|^{-1} \mathbb{S}_1^2.$$

Enunciamos el siguiente resultado.

Teorema 6.7. *Sea S una superficie totalmente umbilical y conexa. Entonces S está contenida en un plano o el conjunto de la ecuación (6.4). Más aún, si S es espacial entonces está contenida en un plano o en el conjunto $u + \rho \mathcal{H}^2$ para algún $u \in \mathbb{R}^3$ y $\rho > 0$, y si S es temporal entonces está contenida en un plano o en el conjunto $u + \rho \mathbb{S}_1^2$ para algún $u \in \mathbb{R}^3$ y $\rho > 0$.*

6.3. Teorema egregium de Gauss

Un resultado fundamental de la geometría diferencial global es el *teorema egregium de Gauss*. El teorema egregium se introduce en el año 1828 en el trabajo *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, de Gauss. El teorema egregium de Gauss se puede enunciar de la siguiente manera:

La curvatura gaussiana (euclídea) de una superficie es invariante por isometrías locales (euclídeas).

Una prueba de este resultado se basa en poder escribir a la curvatura gaussiana euclídea sólo en términos de los coeficientes de la primera forma fundamental euclídea (la prueba puede verse en [dC17, Sección 4.3]). A continuación, daremos un teorema egregium en el sentido de la métrica lorentziana.

Sean S una superficie no degenerada y (U, \mathbf{x}) un parche coordenado en S . En la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, n^L\}$ de \mathbb{R}^3 , donde n^L es el normal unitario local, tenemos la representación

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uu} &= \Gamma_{11,1}^L \mathbf{x}_u + \Gamma_{11,2}^L \mathbf{x}_v + \varepsilon e^L n^L, & n_u^L &= a_{11}^L \mathbf{x}_u + a_{21}^L \mathbf{x}_v, \\ \mathbf{x}_{uv} &= \Gamma_{12,1}^L \mathbf{x}_u + \Gamma_{12,2}^L \mathbf{x}_v + \varepsilon f^L n^L, & n_v^L &= a_{12}^L \mathbf{x}_u + a_{22}^L \mathbf{x}_v, \\ \mathbf{x}_{vv} &= \Gamma_{22,1}^L \mathbf{x}_u + \Gamma_{22,2}^L \mathbf{x}_v + \varepsilon g^L n^L,\end{aligned}$$

donde $\varepsilon = \langle n^L, n^L \rangle_L$. Derivando \mathbf{x}_{uv} respecto de u

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uvu} &= (\Gamma_{12,1}^L)_u \mathbf{x}_u + \Gamma_{12,1}^L \mathbf{x}_{uu} + (\Gamma_{12,2}^L)_u \mathbf{x}_v + \Gamma_{12,2}^L \mathbf{x}_{vu} + \varepsilon f_u^L n^L + \varepsilon f^L n_u^L \\ &= (\Gamma_{12,1}^L)_u \mathbf{x}_u + \Gamma_{12,1}^L (\Gamma_{11,1}^L \mathbf{x}_u + \Gamma_{11,2}^L \mathbf{x}_v + \varepsilon e^L n^L) + (\Gamma_{12,2}^L)_u \mathbf{x}_v + \Gamma_{12,2}^L (\Gamma_{12,1}^L \mathbf{x}_u \\ &\quad + \Gamma_{12,2}^L \mathbf{x}_v + \varepsilon f^L n^L) + \varepsilon f_u^L n^L + \varepsilon f^L (a_{11}^L \mathbf{x}_u + a_{21}^L \mathbf{x}_v) \\ &= ((\Gamma_{12,1}^L)_u + \Gamma_{12,1}^L \Gamma_{11,1}^L + \Gamma_{12,2}^L \Gamma_{12,1}^L + \varepsilon f^L a_{11}^L) \mathbf{x}_u + (\Gamma_{12,1}^L \Gamma_{11,2}^L + (\Gamma_{12,2}^L)_u + \Gamma_{12,2}^L \Gamma_{12,2}^L \\ &\quad + \varepsilon^L f^L a_{21}^L) \mathbf{x}_v + \varepsilon (e^L \Gamma_{12,1}^L + f^L \Gamma_{12,2}^L + f_u^L) n^L.\end{aligned}$$

De igual manera, derivando \mathbf{x}_{uv} respecto de v

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uvv} &= (\Gamma_{11,1}^L)_v \mathbf{x}_u + \Gamma_{11,1}^L \mathbf{x}_{uv} + (\Gamma_{11,2}^L)_v \mathbf{x}_v + \Gamma_{11,2}^L \mathbf{x}_{vv} + \varepsilon e_v^L n^L + \varepsilon e^L n_v^L \\ &= (\Gamma_{11,1}^L)_v \mathbf{x}_u + \Gamma_{11,1}^L (\Gamma_{12,1}^L \mathbf{x}_u + \Gamma_{12,2}^L \mathbf{x}_v + \varepsilon f^L n^L) + (\Gamma_{11,2}^L)_v \mathbf{x}_v + \Gamma_{11,2}^L (\Gamma_{22,1}^L \mathbf{x}_u \\ &\quad + \Gamma_{22,2}^L \mathbf{x}_v + \varepsilon g^L n^L) + \varepsilon e_v^L n^L + \varepsilon e^L (a_{12}^L \mathbf{x}_u + a_{22}^L \mathbf{x}_v) \\ &= ((\Gamma_{11,1}^L)_v + \Gamma_{11,1}^L \Gamma_{12,1}^L + \Gamma_{11,2}^L \Gamma_{22,1}^L + \varepsilon e^L a_{12}^L) \mathbf{x}_u + (\Gamma_{11,1}^L \Gamma_{12,2}^L + (\Gamma_{11,2}^L)_v + \Gamma_{11,2}^L \Gamma_{22,2}^L \\ &\quad + \varepsilon^L e^L a_{22}^L) \mathbf{x}_v + \varepsilon (f^L \Gamma_{11,1}^L + g^L \Gamma_{11,2}^L + e_v^L) n^L.\end{aligned}$$

Dada la igualdad de las derivadas cruzadas tenemos que $\mathbf{x}_{uvu} = \mathbf{x}_{uvv}$. Igualando las componentes de \mathbf{x}_u ,

$$(\Gamma_{12,1}^L)_u + \Gamma_{12,1}^L \Gamma_{11,1}^L + \Gamma_{12,2}^L \Gamma_{12,1}^L + \varepsilon f^L a_{11}^L = (\Gamma_{11,1}^L)_v + \Gamma_{11,1}^L \Gamma_{12,1}^L + \Gamma_{11,2}^L \Gamma_{22,1}^L + \varepsilon e^L a_{12}^L.$$

Luego

$$\varepsilon (f^L a_{11}^L - e^L a_{12}^L) = (\Gamma_{11,1}^L)_v - (\Gamma_{12,1}^L)_u + \Gamma_{11,2}^L \Gamma_{22,1}^L - \Gamma_{12,2}^L \Gamma_{12,1}^L.$$

Observemos que, por las ecuaciones de Weingarten,

$$\begin{aligned}\varepsilon (f^L a_{11}^L - e^L a_{12}^L) &= \varepsilon \left(f^L \frac{f^L F^L - e^L G^L}{E^L G^L - (F^L)^2} - e^L \frac{g^L F^L - f^L G^L}{E^L G^L - (F^L)^2} \right) = \varepsilon F^L \frac{(f^L)^2 - e^L g^L}{E^L G^L - (F^L)^2} \\ &= -F^L K^L \circ \mathbf{x}.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$F^L K^L \circ \mathbf{x} = (\Gamma_{12,1}^L)_u - (\Gamma_{11,1}^L)_v + \Gamma_{12,2}^L \Gamma_{12,1}^L - \Gamma_{11,2}^L \Gamma_{22,1}^L.$$

De manera análoga, si igualamos la componente \mathbf{x}_v de \mathbf{x}_{uvu} y \mathbf{x}_{uvv} , y las componentes \mathbf{x}_u y \mathbf{x}_v de \mathbf{x}_{vvu} y \mathbf{x}_{vvv} obtenemos las **ecuaciones de Gauss lorentzianas**:

$$\begin{cases} E^L K^L \circ \mathbf{x} = (\Gamma_{11,2}^L)_v - (\Gamma_{12,2}^L)_u + \Gamma_{11,1}^L \Gamma_{12,2}^L + \Gamma_{11,2}^L \Gamma_{22,2}^L - \Gamma_{12,1}^L \Gamma_{11,2}^L - (\Gamma_{12,2}^L)^2 \\ F^L K^L \circ \mathbf{x} = (\Gamma_{12,1}^L)_u - (\Gamma_{11,1}^L)_v + \Gamma_{12,2}^L \Gamma_{12,1}^L - \Gamma_{11,2}^L \Gamma_{22,1}^L \\ F^L K^L \circ \mathbf{x} = (\Gamma_{12,2}^L)_v - (\Gamma_{22,2}^L)_u + \Gamma_{12,1}^L \Gamma_{12,2}^L - \Gamma_{22,1}^L \Gamma_{11,2}^L \\ G^L K^L \circ \mathbf{x} = (\Gamma_{22,2}^L)_u - (\Gamma_{12,1}^L)_v + \Gamma_{22,1}^L \Gamma_{11,1}^L + \Gamma_{22,2}^L \Gamma_{12,1}^L - (\Gamma_{12,1}^L)^2 - \Gamma_{12,2}^L \Gamma_{22,1}^L \end{cases}$$

Si igualamos las componentes normales de \mathbf{x}_{uvv} y \mathbf{x}_{uvu} , y de \mathbf{x}_{vvv} y \mathbf{x}_{vvu} , obtenemos las **ecuaciones de Mainardi-Codazzi lorentzianas**:

$$\begin{cases} e_v^L - f_u^L = \Gamma_{12,1}^L e^L + (\Gamma_{12,2}^L - \Gamma_{11,1}^L) f^L - \Gamma_{11,2}^L g^L \\ g_u^L - f_v^L = (\Gamma_{12,1}^L - \Gamma_{22,2}^L) f^L + \Gamma_{12,2}^L g^L - \Gamma_{22,1}^L e^L \end{cases}$$

Las ecuaciones de Gauss relacionan la curvatura gaussiana con los símbolos de Christoffel y sus derivadas. Luego, la curvatura gaussiana depende sólo de la primera forma fundamental pues los símbolos de Christoffel dependen de los coeficientes de la primera forma fundamental. Más aún, por la observación 5.3, tenemos un resultado análogo al Teorema Egregium de Gauss.

Teorema 6.8. *La curvatura gaussiana lorentziana de una superficie no degenerada es invariante por isometrías locales lorentzianas.*

Funciones diferenciables y superficies

En este apéndice vamos a recordar algunas definiciones básicas de diferenciability de funciones, superficie, plano tangente y de diferenciability de funciones definidas en superficies (para más detalles se puede consultar [dC17, dL16]).

Funciones diferenciables

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, decimos que una función $F : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ es **diferenciable** en un punto $p \in A$ si F tiene derivadas parciales continuas de cualquier orden en p , esto es, F es de clase C^∞ en p . Decimos que F es diferenciable si es diferenciable en todo punto $p \in A$.

Supongamos que $F(p) = (F_1(p), \dots, F_m(p))$, entonces F es diferenciable en p si y sólo si F_i es diferenciable en p para todo $i = 1, \dots, m$.

La **derivada** o **diferencial** de F en $p \in A$ es una transformación lineal de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m que denotaremos por dF_p . La diferencial verifica la igualdad

$$F(p + v) = F(p) + dF_p(v) + \|v\|_E r(v),$$

donde la función $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, llamada **resto**, verifica

$$\lim_{v \rightarrow 0} r(v) = 0.$$

Consideremos la base canónica de \mathbb{R}^n , en esta base la diferencial dF_p tiene una matriz asociada $[dF_p] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ cuyos coeficientes son las derivadas parciales de F en p , esto es,

$$[dF_p] = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}.$$

Esta matriz se llama **matriz jacobiana de F en p** .

Cuando $m = 1$, entonces podemos identificar a la matriz jacobiana de F en p con un único vector de \mathbb{R}^n , llamado **vector gradiente de F en p** y lo denotamos con $\text{grad}_E F(p)$. A saber,

$$\text{grad}_E F(p) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(p) \right).$$

Entonces en la base canónica tenemos la siguiente relación

$$dF_p(v) = \langle \text{grad}_E F(p), v \rangle_E,$$

para todo $v \in \mathbb{R}^n$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ es el producto interno usual de \mathbb{R}^n .

Sea F una función definida en un abierto U de \mathbb{R}^n . Decimos que F es un **homeomorfismo** si F es biyectiva, continua en U y su inversa F^{-1} es continua en $F(U)$; Decimos que F es un **difeomorfismo** si F es biyectiva, diferenciable en U y su inversa F^{-1} es diferenciable en $F(U)$.

Finalmente, vamos a enunciar tres teoremas importantes relacionados con el concepto de derivada.

Teorema A.1 (Regla de la cadena). Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ dos conjuntos abiertos. Sean $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $G : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ dos funciones diferenciables en $p \in U$ y $F(p) \in V$, respectivamente, tales que la composición $G \circ F : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ está bien definida, entonces $G \circ F$ es diferenciable en p y vale la igualdad

$$d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p.$$

Teorema A.2 (Teorema de la función inversa). Sean $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función diferenciable definida en un abierto U de \mathbb{R}^n y $p \in U$. Supongamos que dF_p es un **isomorfismo lineal**, esto es, dF_p es biyectiva y lineal, entonces existen $V \subset U$ y $W \subset F(U)$ abiertos tales que $p \in U$, $F(p) \in W$ y $F|_V : V \rightarrow W$ es un difeomorfismo.

Teorema A.3 (Teorema de la función implícita). Sea U un conjunto abierto en $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Sea $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función diferenciable en $(p, q) \in U$, con $p \in \mathbb{R}^n$ y $q \in \mathbb{R}^m$, tal que $F(p, q) = c \in \mathbb{R}^m$. Supongamos que la restricción de $dF_{(p,q)}$ a $\{0\} \times \mathbb{R}^m$ es un isomorfismo sobre \mathbb{R}^m , entonces existen $V \subset U$ y $W \subset \mathbb{R}^n$ tales que $(p, q) \in V$, $p \in A$ y valen las siguientes condiciones:

1. Para cada $x \in A$, existe un único $u = \xi(x) \in \mathbb{R}^m$, tal que $(x, \xi(x)) \in V$ y $F(x, \xi(x)) = c$;
2. La aplicación $\xi : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable.

Superficies

Sea S un subconjunto de \mathbb{R}^3 . Decimos que S es una **superficie** si para todo $p \in S$, existe un abierto U de \mathbb{R}^2 , un entorno abierto V de p en \mathbb{R}^3 , y una función $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

- $\mathbf{x}(U) \subseteq S \cap V$,
- \mathbf{x} es diferenciable,
- \mathbf{x} es un homeomorfismo sobre su imagen,
- La diferencial $d\mathbf{x}_{(u,v)}$ es no singular para todo $(u, v) \in U$. Esta condición se llama **condición de regularidad**.

La función \mathbf{x} se llama **parametrización en p de S** , y el par (U, \mathbf{x}) se llama **parche coordinado en p de S** . Sea $(u_0, v_0) \in U$ fijo, entonces las curvas $\alpha(v) = \mathbf{x}(u_0, v)$ y $\beta(u) = \mathbf{x}(u, v_0)$ se llaman **curvas coordinadas en (u_0, v_0)** . Decimos que una superficie S es **conexa** si es conexa como subconjunto de \mathbb{R}^3 con la topología usual.

Una familia de parches coordinados de una superficie S que cubre a S se llama **atlas**. Observemos que toda superficie admite un atlas por definición.

Sea $q \in U$ tal que $\mathbf{x}(q) = p$. Supongamos que $\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, entonces

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right), \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right).$$

Luego, la matriz de $d\mathbf{x}_q$ en la base canónica es

$$[d\mathbf{x}_q] = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) & \frac{\partial z}{\partial v}(q) \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la condición de regularidad de la definición anterior es equivalente a que el conjunto $\left\{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}\right\}$ sea linealmente independiente.

Vamos a dar dos ejemplos muy importantes de familias de superficies.

Ejemplo A.4 (Gráficos de funciones diferenciables). Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable definida en un abierto U de \mathbb{R}^2 . El **gráfico de f** es el conjunto

$$\text{graf}(f) = \{(u, v, f(u, v)) : (u, v) \in U\}.$$

Este conjunto es una superficie que puede ser cubierta por un único parche $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v)).$$

Ejemplo A.5 (Superficies dadas por la preimagen de un valor regular). Sea $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en un abierto A de \mathbb{R}^3 . Sea $a \in \mathbb{R}$ un valor regular de F , esto es, un punto para el cual la diferencial dF_p es no singular para cada $p \in F^{-1}(a)$. Entonces el conjunto $S = F^{-1}(a)$ es una superficie. Este es un resultado llamado **Teorema de la función implícita** (ver [dC17, Proposición 2, Sección 2.2]).

Cambio de coordenadas

Sean S una superficie y (U, \mathbf{x}) un parche coordenado de S . Sea $h : V \rightarrow U$ un difeomorfismo. Vamos a probar que (V, \mathbf{y}) , con $\mathbf{y} = \mathbf{x} \circ h$ es un parche coordenado de S . En efecto, es claro que \mathbf{y} es diferenciable y es un homeomorfismo sobre su imagen. Sea $p \in V$, entonces

$$d\mathbf{y}_p = d\mathbf{x}_{h(p)}dh_p.$$

Como dh_p es invertible, ya que h es un difeomorfismo, y $d\mathbf{x}_{h(p)}$ es no singular, entonces $d\mathbf{y}_p$ es no singular.

Las funciones h y h^{-1} se llaman **cambios de coordenada**. Supongamos que (U, \mathbf{x}) y (V, \mathbf{y}) son dos parches coordenados en p . Sea

$$W = \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V),$$

entonces la función $h : \mathbf{y}^{-1}(W) \rightarrow \mathbf{x}^{-1}(W)$ definida por $h = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y}$ es un difeomorfismo, en otras palabras, h es un cambio de coordenadas.

Plano tangente

Sean S superficie y $p \in S$. Sean (U, \mathbf{x}) parche coordenado de S en p y $q \in U$ tal que $\mathbf{x}(q) = p$. El **espacio tangente de S en p** , y lo denotamos con T_pS , se define como el subespacio $d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2)$ de \mathbb{R}^3 . Como (U, \mathbf{x}) es un parche coordenado, la diferencial $d\mathbf{x}_q$ es no singular. Luego, T_pS es un subespacio de dimensión dos.

Observemos que la definición de $T_p S$ parece depender de la elección de un parche coordinado de S en p , esto no así. En efecto, sean (U, \mathbf{x}) y (V, \mathbf{y}) dos parches coordinados en p tales que $\mathbf{x}(q) = p$ y $\mathbf{y}(w) = p$, entonces existe $h : V_0 \rightarrow U_0$ difeomorfismo de $V_0 \subset V$ entorno abierto de w a $U_0 \subset U$ entorno abierto de q , tales que $\mathbf{y} = \mathbf{x} \circ h$ y $h(w) = q$. Entonces

$$d\mathbf{y}_w = d\mathbf{x}_q dh_w,$$

como h es un difeomorfismo, la diferencial dh_w es un isomorfismo lineal de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 , lo que implica que $dh_w(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$. Luego,

$$d\mathbf{y}_w(\mathbb{R}^2) = d\mathbf{x}_{h(w)} dh_w(\mathbb{R}^2) = d\mathbf{x}_{h(w)}(\mathbb{R}^2).$$

Funciones diferenciables en superficies

Sean S una superficie y $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función. Decimos que f es **diferenciable en** $p \in S$, si existe un parche coordinado (U, φ) en p tal que $f \circ \varphi$ es diferenciable. Si f es diferenciable para todo $p \in S$, decimos que f es diferenciable en S .

Vale observar que esta definición de diferenciability en superficies parece depender del parche elegido. Nuevamente, esto no es así. En efecto, sean (U, φ) y (V, ψ) parches coordinados en p tales que $\varphi(q) = p$, entonces existe $h : V_0 \rightarrow U_0$ difeomorfismo de $V_0 \subset V$ entorno abierto de w a $U_0 \subset U$ entorno abierto de q , y vale $\psi = \varphi \circ h$. Entonces, $\varphi^{-1} \circ \psi = h$ es diferenciable en p . Luego

$$f \circ \psi = F \circ (\varphi \circ \varphi^{-1}) \circ \psi = (f \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \psi)$$

es diferenciable en p . Por lo tanto, la definición anterior no depende del parche elegido.

Ahora vamos a mostrar un teorema que nos permite relacionar la noción de diferenciability clásica en \mathbb{R}^3 con la noción de diferenciability en superficies. La prueba puede verse en [dL16, Proposición 8, Sección 2.2].

Teorema A.6. *Sean S una superficie, $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función y $p \in S$. Entonces, f es diferenciable en p si y sólo si existe una extensión local diferenciable de f a un abierto $U \subset \mathbb{R}^3$, esto es, existe $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable tal que $F|_{S \cap U} = f|_{S \cap U}$.*

Sean S una superficie y (U, \mathbf{x}) un parche coordinado de S . Entonces la función $\mathbf{x}^{-1} : \mathbf{x}(U) \rightarrow U$ es diferenciable, pues existe (U, \mathbf{x}) parche coordinado en S tal que la función

$$\mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{x}$$

es la función identidad que es diferenciable.

Sea $\alpha : I \rightarrow S$ una curva diferenciable en S con $\alpha(0) = p$. Sea (U, \mathbf{x}) un parche coordinado en p y supongamos que $\alpha(I) \subset \mathbf{x}(U)$. Entonces

$$\beta(s) = \mathbf{x}^{-1}(\alpha(s))$$

es una curva en U . Por el teorema anterior y el hecho de que \mathbf{x}^{-1} es diferenciable, β es una curva diferenciable. Supongamos que $q = \mathbf{x}^{-1}(p)$, entonces $\beta(0) = q$ y

$$\alpha'(s) = d\mathbf{x}_{\beta(s)} \beta'(s).$$

Tomando $s = 0$,

$$\alpha'(0) = d\mathbf{x}_q \beta'(0).$$

Por lo tanto, $\alpha'(0) \in T_p S$.

Recíprocamente, sea $v \in T_p S$, entonces $v \in \mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2)$, si $q = \mathbf{x}^{-1}(p)$. Sea $w \in \mathbb{R}^2$ tal que $d\mathbf{x}_q w = v$. Definimos la curva

$$\alpha(s) = \mathbf{x}(q + sw),$$

con $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ y $\varepsilon > 0$ lo suficientemente chico para que $q + sw \in U$ para todo $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Entonces α es una curva diferenciable con derivada

$$\alpha'(s) = d\mathbf{x}_{(q+sw)}w$$

Tomando $s = 0$

$$\alpha'(0) = d\mathbf{x}_qw = v.$$

Por lo tanto, tenemos la siguiente caracterización del plano tangente.

$$T_pS = \{\alpha'(0) : \alpha : I \rightarrow S \text{ es una curva diferenciable con } \alpha(0) = p\}.$$

Ahora vamos a introducir el concepto de derivada o diferencial de una función diferenciable $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida sobre una superficie. Para esto, sean $p \in S$, V un entorno abierto de p en S y $F, G : O \rightarrow \mathbb{R}^n$ dos extensiones diferenciables de $f|_V$, de un abierto O de \mathbb{R}^3 que contiene a V , tales extensiones existen gracias al teorema A.6. Vamos a probar que

$$dF_p(w) = dG_p(w)$$

para todo $w \in T_pS$.

Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable tal que $\alpha(I) \subset O \cap S$, $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = w \in T_pS$. Luego $F(\alpha(t)) = G(\alpha(t))$ para todo $t \in I$. Entonces derivando respecto de t y tomando $t = 0$,

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} F(\alpha(t)) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} G(\alpha(t)).$$

Por lo tanto, $dF_p(w) = dG_p(w)$. Como esto vale para toda curva α tal que $\alpha(0) = p$, entonces $dF_p(w) = dG_p(w)$ para todo $w \in T_pS$.

Entonces definimos la **derivada** o **diferencial de f en p** a la aplicación $df_p : T_pS \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$df_p(w) = dF_p(w),$$

donde F es una de las extensiones de f dada por el teorema A.6. Esto es, df_p es la restricción de la diferencial en p de una extensión de f al plano tangente T_pS . Observemos que, si $w \in T_pS$, entonces

$$df_p(w) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} f(\alpha(s)),$$

si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva diferenciable contenida en S tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = w$.

Cuando $n = 1$, entonces por el teorema de representación de Riesz, existe un vector en T_pS que vamos a llamar **vector gradiente de f en p** , y lo notamos $\text{grad}_E f(p)$, tal que

$$df_p(w) = \langle \text{grad}_E f(p), w \rangle_E,$$

para todo $w \in T_pS$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ es el producto interno usual de \mathbb{R}^3 . Observemos que

$$\langle \text{grad}_E f(p), w \rangle_E = df_p(w) = dF_p(w) = \langle \text{grad}_E F(p), w \rangle_E,$$

de donde obtenemos que $\text{grad}_E f(p)$ es la proyección euclídea de $\text{grad}_E F(p)$ sobre T_pS .

Sean S una superficie y V un conjunto abierto en S . Decimos que un campo vectorial $f : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un

- **campo de vectores tangentes** si para todo $p \in V$ se verifica $f(p) \in T_pS$;
- **campo de vectores normales en \mathbb{E}^3** si para todo $p \in V$ se verifica $f(p) \in T_pS^{\perp E}$.

Dadas dos S_1 y S_2 superficies, y un punto $p \in S_1$. Decimos que una función $f : S_1 \rightarrow S_2$ es **diferenciable** en p si existen (U, \mathbf{x}) parche de S_1 en p , y (V, \mathbf{y}) parche de S_2 en $f(p)$, tal que la composición

$$\mathbf{x}^{-1} \circ f \circ \mathbf{y}$$

es diferenciable en $\mathbf{x}^{-1}(p)$.

Esta definición, nuevamente, parece depender de los parches elegidos pero podemos probar que si tomamos otros parche, la composición es diferenciable. En efecto, supongamos que tomamos otros parche $(\tilde{U}, \tilde{\mathbf{x}})$ y $(\tilde{V}, \tilde{\mathbf{y}})$ de p y $f(p)$, respectivamente. Supongamos que

$$\mathbf{x}^{-1}(p) = q, \tilde{\mathbf{x}}^{-1}(p) = \tilde{q}, \mathbf{y}^{-1}(p) = w \text{ y } \tilde{\mathbf{y}}^{-1}(p) = \tilde{w}.$$

Por un lado, existen entornos abiertos U_0 de q y \tilde{U}_0 de \tilde{q} , y un difeomorfismo $h_1 : U_0 \rightarrow \tilde{U}_0$ dado por $h_1 = \tilde{\mathbf{x}} \circ \mathbf{x}^{-1}$. Por otro, existen entornos abiertos V_0 de w y \tilde{V}_0 de \tilde{w} , y un difeomorfismo $h_2 : V_0 \rightarrow \tilde{V}_0$, $h_2 = \tilde{\mathbf{y}} \circ \mathbf{y}^{-1}$. Entonces, la composición

$$\tilde{\mathbf{x}}^{-1} \circ f \circ \tilde{\mathbf{y}} = (\tilde{\mathbf{x}}^{-1} \circ \mathbf{x}) \circ (\mathbf{x}^{-1} \circ f \circ \mathbf{y}) \circ (\mathbf{y}^{-1} \circ \tilde{\mathbf{y}})$$

es diferenciable, pues es composición de funciones diferenciables.

Puntos elípticos, parabólicos, hiperbólicos y planares

Sean S una superficie orientable y $p \in S$. Sea $N^E : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación de Gauss euclídea de S en p . Recordemos que en la teoría clásica de superficies en el espacio euclídeo, decimos que p es un punto

- **elíptico** si $\det(dN_p^E) > 0$,
- **hiperbólico** si $\det(dN_p^E) < 0$,
- **parabólico** si $\det(dN_p^E) = 0$, con $dN_p^E \neq 0$,
- **planar** si $dN_p^E \equiv 0$.

La siguiente proposición da una interpretación geométrica de la definición anterior.

Proposición A.7. *Sea S una superficie orientable. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interno usual de \mathbb{R}^3 . Sea $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por*

$$\phi(q) = \langle q - p, N^E(p) \rangle_E.$$

Entonces

- p es un punto **elíptico** si y sólo si existe un entorno V de p en S tal que todos los puntos de V están del mismo lado del plano tangente $T_p S$, esto es, $\phi > 0$ en $V - \{p\}$ o $\phi < 0$ en $V - \{p\}$.
- p es un punto **hiperbólico** si y sólo si para todo entorno de V en p existen puntos de un lado y del otro del plano tangente $T_p S$, esto es, para todo entorno V de p en S existen $q_1, q_2 \in V$ tal que $\phi(q_1) < 0$ y $\phi(q_2) > 0$,

Demostración. Sea (u, \mathbf{x}) un parche coordenado de S en p tal que el normal unitario euclídeo n^E asociado al parche (U, \mathbf{x}) verifica $N^E \circ \mathbf{x}(u, v) = n^E(u, v)$ y $p = \mathbf{x}(0, 0)$. Sea $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$F(u, v) := \phi \circ \mathbf{x}(u, v) = \langle \mathbf{x}(u, v) - p, n^E(0, 0) \rangle_E.$$

Como ϕ y φ son funciones diferenciables, entonces F es una función diferenciable. Consideremos el desarrollo de Taylor de φ en $(0, 0)$, esto es,

$$\mathbf{x}(u, v) = p + \mathbf{x}_u(0, 0)u + \mathbf{x}_v(0, 0)v + \frac{1}{2}(\mathbf{x}_{uu}(0, 0)u^2 + 2\mathbf{x}_{uv}(0, 0)uv + \mathbf{x}_{vv}(0, 0)v^2) + R(u, v),$$

donde R verifica

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{R(u, v)}{\|(u, v)\|} = 0.$$

Luego

$$\begin{aligned} F^E(u, v) &= \frac{1}{2} (\langle \mathbf{x}_{uu}(0, 0), n^E(0, 0) \rangle_E u^2 + 2 \langle \mathbf{x}_{uv}(0, 0), n^E(0, 0) \rangle_E uv + \langle \mathbf{x}_{vv}(0, 0), n(0, 0) \rangle_E v^2) \\ &\quad + \langle R(u, v), n(0, 0) \rangle_E \\ &= \frac{1}{2} \Pi_p^E(w) + \langle R(u, v), n(0, 0) \rangle_E, \end{aligned}$$

donde Π_p^E es la segunda forma fundamental de S en p y $w = u\mathbf{x}_u(0, 0) + v\mathbf{x}_v(0, 0)$.

Si p es un punto elíptico entonces $\Pi_p^E(w)$ no cambia de signo para todo $w \in T_p S$ con $w \neq 0$. Luego para (u, v) muy próximo a $(0, 0)$, los signos de $\Pi_p^E(w)$ y F coinciden. Esto es, existe un entorno de p donde ϕ no cambia de signo. Recíprocamente, si ϕ no cambia de signo en un entorno, por la ecuación anterior, tenemos que $\Pi_p^E(w)$ no cambia de signo para todo $w \in T_p S$ con $w \neq 0$. Luego p es un punto elíptico.

Si p es un punto hiperbólico entonces existen puntos $w_1, w_2 \in T_p S$ no nulos donde $\Pi_p^E(w_1/\|w_1\|)$ y $\Pi_p^E(w_2/\|w_2\|)$ tienen signos distintos. Luego ϕ asume signos distintos en todo entorno de p . Recíprocamente, si ϕ asume signos distintos, por la ecuación anterior tenemos que $\Pi_p^E(w)$ asume signos distintos. Luego p es un punto hiperbólico. \square

Karl Friedrich Gauss

Karl Friedrich Gauss (Karl o Carl Friedrich Gauss; Brunswick, actual Alemania, 1777 - Gotinga, id., 1855) fue un matemático, físico y astrónomo alemán. Nacido en una familia humilde, desde muy temprana edad Karl Friedrich Gauss dio muestras de una prodigiosa capacidad para las matemáticas (según la leyenda, a los tres años interrumpió a su padre cuando estaba ocupado en la contabilidad de su negocio para indicarle un error de cálculo), hasta el punto de ser recomendado al duque de Brunswick por sus profesores de la escuela primaria.



Figura B.1: Karl Friedrich Gauss

El duque le proporcionó asistencia financiera en sus

estudios secundarios y universitarios, que efectuó en la Universidad de Gotinga entre 1795 y 1798. Su tesis doctoral (1799) habló sobre el *teorema fundamental del álgebra*, que Gauss demostró.

En 1801 Gauss publicó una obra destinada a influir de forma decisiva en la conformación de la matemática del resto del siglo, y particularmente en el ámbito de la teoría de números, *las Disquisiciones aritméticas*, entre cuyos numerosos hallazgos cabe destacar: la primera prueba de la ley de la reciprocidad cuadrática; una solución algebraica al problema de cómo determinar si un polígono regular de n lados puede ser construido de manera geométrica (sin resolver desde los tiempos de Euclides); un tratamiento exhaustivo de la teoría de los números congruentes; y numerosos resultados con números y funciones de variable compleja que marcaron el punto de partida de la moderna teoría de los números algebraicos.

Otros resultados asociados a su interés por la geodesia son la invención del heliotropo, y, en el campo de la matemática pura, sus ideas sobre el estudio de las características de las superficies curvas que, explicitadas en su obra *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1828), sentaron las bases de la moderna geometría diferencial. El resultado más importante de esta obra maestra en la literatura matemática es el *Theorema egregium*. También mereció su atención el fenómeno del magnetismo, que culminó con la instalación del primer telégrafo eléctrico (1833). Íntimamente relacionados con sus investigaciones sobre dicha materia fueron los principios de la teoría matemática del potencial, que publicó en 1840.

Otras áreas de la física que Gauss estudió fueron la mecánica, la acústica, la capilaridad y, muy especialmente, la óptica, disciplina sobre la que publicó el tratado *Investigaciones dióptricas* (1841), en las cuales demostró que un sistema de lentes cualquiera es siempre reducible a una sola lente con las características adecuadas.

Hendrik Antoon Lorentz

Hendrik Antoon Lorentz (Arnhem, 1853 - Haarlem, 1928) fue un físico holandés. Estudió en la Universidad de Leyden. En 1875 publicó en holandés un primer trabajo sobre la reflexión y la refracción de la luz en los metales y otras investigaciones suyas de física teórica, aparecidas en *Archives Néerlandaises*. Tales estudios le valieron en 1878 la cátedra de física matemática de la mencionada universidad.

Tras largos años de experimentos e investigaciones publicó en 1892 la famosa memoria *La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants*. En tal obra, y como complemento a los estudios de Fresnel y Maxwell, afirma que los fenómenos de la electricidad son debidos a movimientos de partículas elementales eléctricas, por él denominadas “electrones”, término creado anteriormente por George Johnstone Stoney.

Hendrik Lorentz descubrió que si en lugar de las transformaciones de Galileo se utilizan otras especiales (llamadas luego por Einstein, en su honor, *transformaciones de Lorentz*), las ecuaciones de Maxwell referentes a la propagación de la luz resultan invariables, con lo que no debe acudir al éter como sistema de referencia. Sin embargo, las transformaciones de Lorentz hacen variables las ecuaciones de la mecánica, lo cual parecía entonces absurdo. Einstein demostró que tales transformaciones pueden aplicarse también a estas ecuaciones; ello contribuyó a la formulación de la teoría de la relatividad.

En su teoría, la materia aparece como un complejo de átomos formados por electrones negativos (poco después, en efecto, se afirmó que el átomo está integrado por electrones de tal signo que recorren órbitas elípticas en torno al núcleo). Con ello Lorentz, invertía la teoría de Thomson: para este, la electricidad se explica mediante la materia; Lorentz, en cambio, fundamenta en aquélla la explicación de esta. En 1895 publicó Ensayo de una teoría sobre los fenómenos eléctricos y ópticos en los cuerpos en movimiento, texto que señala una etapa importante en las investigaciones del gran científico sobre la electricidad y la óptica. Los resultados de tales estudios le valieron en 1902 el Premio Nobel, que se le concedió al mismo tiempo que a Zeeman, por haber previsto el fenómeno que este comprobó experimentalmente y que, a causa de ello, fue denominado “efecto Zeeman”.



Figura B.2: Hendrik Antoon Lorentz

Hermann Minkowski

Hermann Minkowski (Aleksotas, Lituania, 1864 - Gotinga, Alemania, 1909) fue un matemático y físico alemán de origen lituano y judío, su familia emigró de Rusia a Alemania con el objeto de escapar de las restricciones a la educación impuestas por el régimen zarista.

Tras estudiar en Königsberg y Berlín, Hermann Minkowski fue profesor en Bonn, Zurich (donde tuvo como alumno a Albert Einstein) y Gotinga. A los dieciocho años obtuvo el gran premio de la Academia de las Ciencias de París gracias a un trabajo sobre la descomposición de un número entero en la suma de cinco cuadrados.

Interesado en la física matemática, Minkowski ofreció una interpretación geométrica de la primera teoría de la relatividad (la relatividad restringida, enunciada por Einstein en 1905), basada en un espacio de dimensión 4 (espacio de Minkowski); su nombre permanece indeleblemente



Figura B.3: Hermann Minkowski

asociado al concepto de espacio-tiempo.

Albert Einstein

Albert Einstein (Ulm, Imperio alemán; 14 de marzo de 1879 - Princeton, Estados Unidos; 18 de abril de 1955) fue un físico alemán de origen judío, nacionalizado después suizo, austriaco y estadounidense. Se lo considera el científico más importante y popular del siglo XX.

Durante 1905, publicó cinco trabajos en los *Annalen der Physik*: el primero de ellos le valió el grado de doctor por la Universidad de Zúrich, y los cuatro restantes acabarían por imponer un cambio radical en la imagen que la ciencia ofrece del universo. De estos cuatro, el primero proporcionaba una explicación teórica en términos estadísticos del movimiento browniano (así llamado en honor a su descubridor, Robert Brown), y el segundo daba una interpretación del efecto fotoeléctrico basada en la hipótesis de que la luz está integrada por cuantos individuales, más tarde denominados fotones. Los dos trabajos restantes sentaban las bases de la teoría restringida de la relatividad, estableciendo la equivalencia entre la energía E de una cierta cantidad de materia y su masa m en términos de la famosa ecuación $E = mc^2$, donde c es la velocidad de la luz, que se supone constante.

El esfuerzo de Einstein lo situó inmediatamente entre los más eminentes de los físicos europeos, pero el reconocimiento público del verdadero alcance de sus teorías tardó en llegar; el Premio Nobel de Física, que recibió en 1921, le fue concedido exclusivamente «por sus trabajos sobre el movimiento browniano y su interpretación del efecto fotoeléctrico». En 1909 inició su carrera de docente universitario en Zúrich, pasando luego a Praga y regresando de nuevo a Zúrich en 1912 para ser profesor del Politécnico, en donde había realizado sus estudios.

En el plano científico, su actividad se centró, entre 1914 y 1916, en el perfeccionamiento de la teoría general de la relatividad, basada en el postulado de que la gravedad no es una fuerza sino un campo creado por la presencia de una masa en el continuum espacio-tiempo. La confirmación de sus previsiones llegó en 1919, al fotografiarse el eclipse solar del 29 de mayo; *The Times* lo presentó como el nuevo Newton y su fama internacional creció, forzándole a multiplicar sus conferencias de divulgación por todo el mundo.

Durante la siguiente década, Einstein concentró sus esfuerzos en hallar una relación matemática entre el electromagnetismo y la atracción gravitatoria, empeñado en avanzar hacia el que, para él, debía ser el objetivo último de la física: descubrir las leyes comunes que, supuestamente, habrían de regir el comportamiento de todos los objetos del universo, desde las partículas subatómicas hasta los cuerpos estelares, y agruparlas en una única teoría “de campo unificado”. Tal investigación, que ocupó el resto de su vida, resultó infructuosa y acabó por acarrearle el extrañamiento respecto del resto de la comunidad científica. A partir de 1933, con el acceso de Hitler al poder, su soledad se vio agravada por la necesidad de renunciar a la ciudadanía alemana y trasladarse a Estados Unidos; Einstein pasó los últimos veinticinco años de su vida en el Instituto de Estudios Superiores de Princeton (Nueva Jersey), ciudad en la que murió el 18 de abril de 1955.

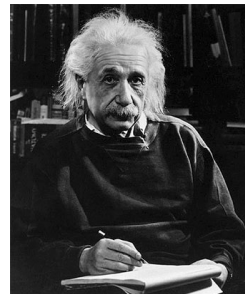


Figura B.4: Albert Einstein

Georg Friedrich Bernhard Riemann

Georg Friedrich Bernhard Riemann (Breselenz, actual Alemania, 1826 - Selasca, Italia, 1866) fue un matemático alemán. Su padre era pastor luterano, y su primera ambición fue la de seguir sus pasos. Ingresó en el liceo de Hannover, donde estudió hebreo y trató de probar la certeza del libro del Génesis por medio de razonamientos matemáticos. En 1846 ingresó en la Universidad de Gotinga, que abandonó un año después para trasladarse a la de Berlín y estudiar bajo la tutela de, entre otros, Jakob Steiner, Carl Gustav Jacob Jacobi y Peter Gustav Lejeune Dirichlet, que ejerció una gran influencia sobre él.

Su carrera se interrumpió por la revolución de 1848, durante la cual sirvió al rey de Prusia. En 1851 se doctoró en Gotinga con una tesis que fue muy elogiada por Gauss. En ella Riemann estudió la teoría de las variables complejas y, en particular, lo que hoy se denominan superficies de Riemann.

Las obras de Bernhard Riemann, pese a su número reducido, tienen todas un valor fundamental. En su corta vida contribuyó a muchísimas ramas de las matemáticas: integrales de Riemann, aproximación de Riemann, método de Riemann para series trigonométricas, matrices de Riemann de la teoría de funciones abelianas, funciones zeta de Riemann, hipótesis de Riemann, teorema de Riemann-Roch, lema de Riemann-Lebesgue, integrales de Riemann-Liouville de orden fraccional, etc.

Pese a la importancia de todas estas contribuciones, la más conocida aportación de Bernhard Riemann fue su geometría no euclidiana, basada en una axiomática distinta de la propuesta por Euclides, y expuesta detalladamente en su célebre memoria *Sobre las hipótesis que sirven de fundamento a la geometría* (1867). Esta geometría se sigue si se considera la superficie de una esfera y se restringen las figuras a esa superficie. Medio siglo más tarde, Albert Einstein demostró, en virtud de su modelo de espacio-tiempo relativista, que la geometría de Riemann ofrece una representación más exacta del universo que la de Euclides.



Figura B.5: Georg Friedrich Bernhard Riemann

James Joseph Sylvester

James Joseph Sylvester (Londres, 1814 - Oxford, 1897) Matemático británico. Formado en la Universidad de Cambridge, no pudo graduarse ni ampliar sus estudios por ser de religión judía; pese a ello ejerció la docencia en las universidades de Londres, en la de Virginia (Estados Unidos) durante un breve periodo y luego, entre 1855 y 1869, en la Real Academia Militar de Woolwich.

Entre 1877 y 1883 enseñó matemáticas en la Universidad de Johns Hopkins de Baltimore (Estados Unidos), donde fundó la primera revista matemática del país; a su regreso a Inglaterra ocupó la cátedra Saviliana de geometría en Oxford. En colaboración con su amigo A. Cayley, James Joseph Sylvester estableció la teoría de las invariantes algebraicas y la de los determinantes. Descubrió un método para eliminar una incógnita entre dos ecuaciones y creó un importante vocabulario matemático.



Figura B.6: James Joseph Sylvester

Jean Frédéric Frenet

Jean Frédéric Frenet (7 de febrero de 1816 - 12 de junio de 1900) fue un famoso matemático que introdujo la Teoría de Curvas junto a Joseph Serret. En reconocimiento a su trabajo, se denomina a la base espacial definida por los vectores tangente, normal y binormal, triedro de Frenet-Serret.

En Toulouse, Frenet realizó una investigación en geometría y allí escribió su tesis doctoral que presentó en 1847. Su tesis se titulaba *Sur les fonctions qui servent à déterminer l'attraction des sphéroides quelconques. Programme d'une thèse sur quelque propriétés des courbes à double courbure* y fue publicada en Toulouse en 1847. En su tesis, Frenet presentó la idea de unir a cada punto de una curva arbitraria en el espacio una base. A medida que esta base se mueve a lo largo de la curva, podemos observar su velocidad de cambio para determinar cómo gira y se tuerce la curva, dos ideas que realmente describen la geometría completa de la curva. La parte de la tesis que contiene la teoría de curvas en el espacio da las ecuaciones ahora conocidas como *ecuaciones de Serret-Frenet*. Frenet dio sólo seis ecuaciones, mientras que Serret dio las nueve. En otro artículo, *Théorèmes sur les courbes gauches*, publicado en las *Nouvelles annales de mathématique* en 1853, Frenet explicó cómo se podrían aplicar las fórmulas.



Figura B.7: Jean Frédéric Frenet

Joseph Alfred Serret

Joseph Alfred Serret (París, Francia, 30 de agosto de 1819 - Versailles, Francia, 2 de marzo de 1885), más conocido como Joseph Serret, fue un matemático famoso por desarrollar junto a Jean Frenet la teoría de curvas.

Serret realizó grandes aportes a la geometría diferencial. Junto con Pierre Bonnet y Joseph Bertrand, realizó sus avances más importantes en este tópico. Serret también publicó artículos sobre teoría de números, cálculo, teoría de funciones, teoría de grupos, mecánica, ecuaciones diferenciales y astronomía.



Figura B.8: Joseph Alfred Serret

Bibliografía

- [AC17] Alma L. Albuje and Magdalena Caballero. Geometric properties of surfaces with the same mean curvature in \mathbb{R}^3 and \mathbb{L}^3 . Journal of Mathematical Analysis and Applications, 445(1):1013 – 1024, 2017.
- [BFL98] Aurel Bejancu, Angel Ferrández, and Pascual Lucas. A new viewpoint on geometry of a lightlike hypersurface in a semi-euclidean space. Saitama Mathematical Journal, 16, 01 1998.
- [CC13] Brian Carlsen and Jeanne N. Clelland. The geometry of lightlike surfaces in minkowski space. Journal of Geometry and Physics, 74:43 – 55, 2013.
- [Cle10] Jeanne Clelland. Totally quasi-umbilic timelike surfaces in $\mathbb{R}^{1,2}$. Asian Journal of Mathematics, 16, 06 2010.
- [dC17] Manfredo P. do Carmo. Differential Geometry of Curves and Surfaces. Dover Publications, 2nd edition, 2017.
- [dL16] Ronaldo Freire de Lima. Introdução à Geometria Diferencial. Copyright, 2016.
- [FGL01] Angel Ferrández, Angel Giménez, and Pascual Lucas. Null helices in lorentzian space forms. International Journal of Modern Physics A - IJMPA, 16:4845–4863, 12 2001.
- [FGL03] Angel Ferrández, Angel Giménez, and Pascual Lucas. Geometry of lightlike submanifolds in lorentzian space forms. Proc. of the Meeting on Lorentzian Geometry, Benalmádena 2001, 5:125–139, 2003.
- [Gra79] L. K. Graves. Codimension one isometric immersions between lorentz spaces. Transactions of the American Mathematical Society, 252:367–392, 1979.
- [HK71] Kenneth M. Hoffman and Ray Kunze. Linear Algebra. Prentice Hall, 2 edition, 1971.
- [iIL09] Jun ichi Inoguchi and Sungwook Lee. Lightlike surfaces in Minkosky 3-space. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 6(2):267–283, 2009.
- [L608] Rafael López. Differential geometry of curves and surfaces in lorentz-minkowski space, 2008. <http://arxiv.org/abs/0810.3351>.
- [O’N83] Barrett O’Neill. Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity. Pure and Applied Mathematics, 1983.
- [Syl52] James Joseph Sylvester. A demonstration of the theorem that every homogeneous quadratic polynomial is reducible by real orthogonal substitutions to the form of a sum of positive and negative squares. Philosophical Magazine, IV:378–381, 1852.
- [TK00] Ikawa Toshihiko and Honda Kyoko. Some graph type hypersurfaces in a semi-Euclidean space. Turk. J. Math., 24(2):107–208, 2000.

- [War10] Frank W. Warner. Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1st ed. 1971. 2nd printing edition, 2010.