

Basile, Pedro Abel (2017). *Propagación de Ondas de Crecidas*. Capítulo VIII, pp. 153-178; en libro "Hidrología: Procesos y Métodos", Cuarta Edición, 263 p., ISBN 978-987-702-214-8, UNR Editora, 2017; Orsolini, Hugo; Zimmermann, Erik y Basile, Pedro Abel (Org.).

CAPÍTULO VIII

PROPAGACIÓN DE ONDAS DE CRECIDAS

Pedro A. Basile

VIII.1 INTRODUCCIÓN

La propagación de una crecida se define, en forma básica, como el procedimiento de cálculo requerido para determinar el hidrograma en una determinada sección del curso de agua, partiendo de un hidrograma conocido en una sección aguas arriba. El cálculo se efectúa mediante la implementación de modelos matemáticos los cuales resuelven numéricamente las ecuaciones que gobiernan la dinámica del proceso físico.

Desde el punto de vista hidráulico el tránsito de una crecida establece un régimen de *flujo impermanente gradualmente variado*. La descripción unidimensional completa del proceso puede efectuarse en función de dos variables dependientes del tiempo t y del espacio x : $Q(x,t)$ y $h(x,t)$, donde Q y h son el caudal y la profundidad de la corriente hídrica respectivamente. Evidentemente es necesario contar con dos ecuaciones para poder resolver el problema. En el caso de los *modelos hidrodinámicos*, las mismas están representadas por las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento, conocidas como ecuaciones de Barré de Saint Venant debido al desarrollo efectuado por el mismo autor en 1871.

Existen además *modelos simplificados de propagación del tipo "hidrológico"* los cuales se basan en la ecuación de continuidad integrada en un segmento elemental de traslado y en una función de almacenamiento, como por ejemplo, el modelo desarrollado por Mc Carthy (1938) y aplicado por primera vez en el río Muskingum, el cual es conocido como Método de Muskingum.

En este Capítulo se describen los distintos tipos de modelos hidrodinámicos, analizando las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento con sus posibles simplificaciones. Se realiza, además, una breve introducción a la técnica de diferencias finitas utilizada para resolver las ecuaciones. Finalmente se presenta el método de propagación del tipo hidrológico.

VIII.2 CONCEPTUALIZACIÓN DE LA PROPAGACIÓN DE UNA ONDA DE CRECIDA

Una onda superficial es un cambio en la superficie del agua que se propaga temporal y espacialmente. Una onda de crecida que se propaga en un río o en un embalse originará cambios espacio-temporales de las variables relevantes del flujo como la velocidad, el caudal y la profundidad.

Para ilustrar cualitativamente el proceso consideremos una cuenca genérica como se muestra en la Figura VIII.1, compuesta por una subcuenca superior S1 y una subcuenca inferior S2. Supongamos que debido a una precipitación la subcuenca S1 genera un determinado hidrograma en x_1 (ver Figura VIII.1).

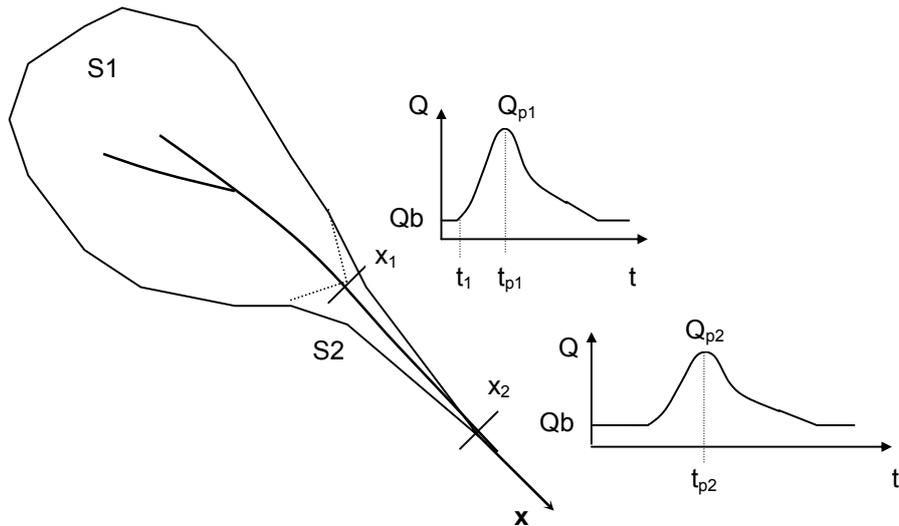


Figura VIII.1: cuenca genérica e hidrogramas en diferentes secciones x_1 y x_2 .

Para $t \leq t_1$ el caudal en el tramo x_1x_2 será constante e igual a Q_b , donde Q_b es el caudal de base generado sustancialmente por el aporte subterráneo. En estas condiciones el flujo en dicho tramo será *permanente*. A los efectos de clarificar mejor el proceso de propagación supondremos que es además *uniforme*.

Para $t > t_1$ el caudal en x_1 comenzará a aumentar hasta alcanzar el máximo valor Q_{p1} para $t = t_{p1}$. Dichos caudales se propagarán aguas abajo como se muestra esquemáticamente en la Figura VIII.2(a). De consecuencia la profundidad aumentará gradualmente en el tiempo y el espacio como se observa en la Figura VIII.2(b). En estas condiciones el flujo será *impermanente gradualmente variado*, con el caudal y la profundidad funciones continuas del espacio y el tiempo.

Para $t > t_{p1}$ el caudal máximo Q_{p1} ya ha transitado a través de x_1 y ha comenzado la fase propagatoria de la rama descendente del hidrograma. Los caudales en x_1 van disminuyendo progresivamente en el tiempo y el proceso de propagación continúa como se observa en las Figuras VIII.3(a) y VIII.3(b). El caudal en x_2 alcanza el valor máximo $Q_{p2} < Q_{p1}$ en el tiempo $t = t_{p2} > t_{p1}$. Es decir la onda de crecida experimenta una atenuación ΔQ , un retardo Δt y generalmente una cierta difusión, dependiendo sustancialmente de las características

topobatemétricas del cauce, que determinan la magnitud y la permanencia de los volúmenes almacenados longitudinal y lateralmente, y de las rugosidades del mismo.

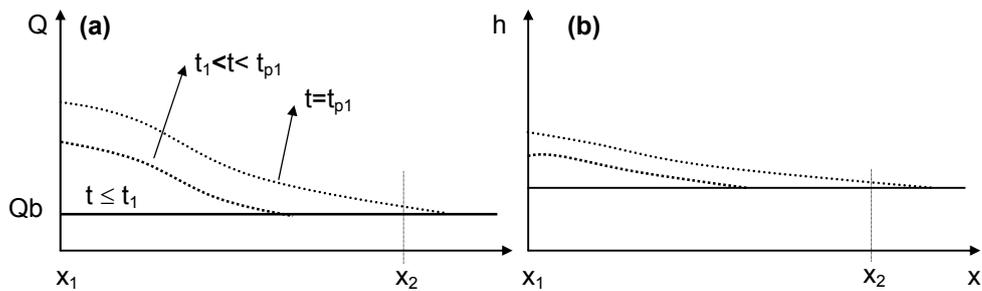


Figura VIII.2: evolución espacio-temporal esquemática de: (a) caudales y (b) profundidad, durante la fase propagatoria de la rama ascendente del hidrograma en x_1 .

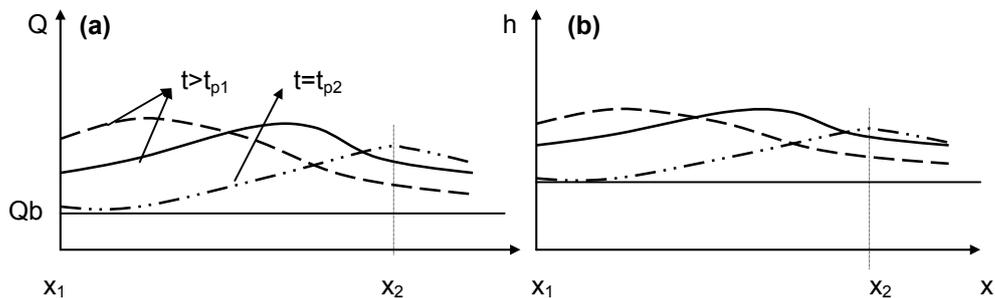


Figura VIII.3: evolución espacio-temporal esquemática de: (a) caudales y (b) profundidad, durante fase propagatoria rama ascendente y descendente del hidrograma en x_1 .

En el caso de flujo permanente uniforme los caudales y las profundidades en una sección están relacionados mediante una función única. Sin embargo, en condiciones de flujo impermanente, como las descritas precedentemente, los caudales y las profundidades están relacionados mediante dos funciones, una para la fase de creciente y otra para la fase de bajante. La curva h - Q asume una forma de lazo como se muestra esquemáticamente en la Figura VIII.4. Se observa que el caudal máximo precede en el tiempo a la profundidad máxima. Es posible demostrar además que la velocidad máxima precede en el tiempo a los dos valores anteriores. Es decir, considerando una sección fija en el espacio, durante la propagación de una onda de crecida se presentarán en sucesión temporal los valores máximos de velocidad, caudal y profundidad respectivamente.

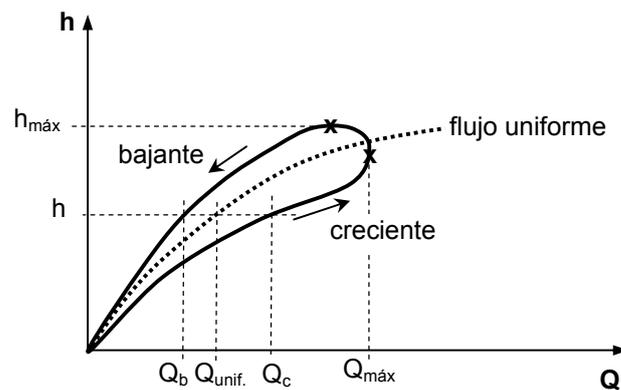


Figura VIII.4: curva h-Q para flujo impermanente gradualmente variado y flujo permanente uniforme.

VIII.3 MODELOS HIDRODINÁMICOS

VIII.3.1 Ecuaciones gobernantes

Los modelos hidrodinámicos se basan en las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento de Barre de Saint Venant (1871), las cuales brindan la representación unidimensional completa del flujo impermanente gradualmente variado en función del caudal $Q(x,t)$ y de la profundidad $h(x,t)$. Ambas variables dependen del tiempo t y del espacio x .

A los efectos de comprender mejor el significado físico de las ecuaciones y sus diferentes términos, las mismas serán derivadas a partir del lenguaje normal de las palabras, para luego expresarlas matemáticamente en términos discretos y arribar finalmente a la representación en el medio continuo.

Las hipótesis básicas utilizadas en la derivación de las mismas son:

- El flujo es unidimensional, es decir en cada sección del río se considera un único valor de velocidad (con distribución uniforme) y la superficie del agua es horizontal.
- El flujo es gradualmente variado, por lo tanto, las aceleraciones verticales pueden despreciarse y de consecuencia la presión es la hidrostática.
- El flujo no presenta curvatura acentuada en planta (eje longitudinal aprox. recto).
- El ángulo α que forma el fondo del cauce con la horizontal es pequeño, por lo tanto, $\cos \alpha = 1$, $\sin \alpha = \text{tg } \alpha = \text{pendiente del fondo}$.
- El flujo es incompresible y sin estratificación (no existen variaciones de densidad).
- Para describir los efectos de resistencia al escurrimiento se asumen como válidas las ecuaciones utilizadas en el caso de flujo permanente, por ejemplo, ec. de Manning.

VIII.3.1.1 Ecuación de continuidad

Consideremos un volumen de control (v.c.) en un tramo de longitud Δx y área A , como se observa en la Figura VIII.5. La ecuación de continuidad establece la conservación del volumen en el mismo y puede expresarse en palabras como:

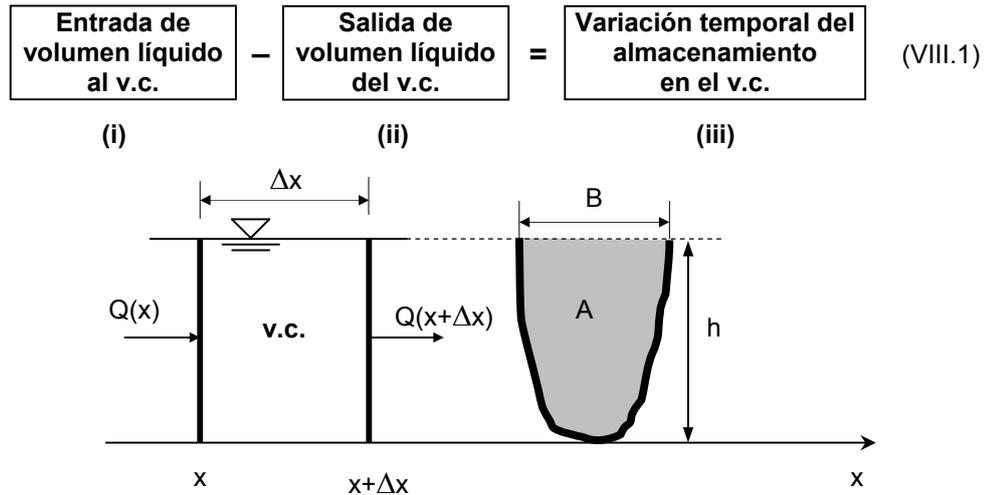


Figura VIII.5: esquematización del volumen de control para establecer continuidad.

La expresión (VIII.1) puede ser escrita matemáticamente en forma discreta como:

$$\underbrace{[Q(x)\Delta t]}_{(i)} - \underbrace{[Q(x + \Delta x)\Delta t]}_{(ii)} = \underbrace{[A(t + \Delta t)\Delta x - A(t)\Delta x]}_{(iii)} \quad (VIII.2)$$

Reordenando y dividiendo la ec. (VIII.2) por $\Delta x \Delta t$ se obtiene:

$$\frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t} + \frac{Q(x + \Delta x) - Q(x)}{\Delta x} = 0 \quad (VIII.3)$$

donde el primer término del miembro izquierdo de la ec. (VIII.3) representa el cociente incremental del área respecto al tiempo y el segundo representa el cociente incremental del caudal respecto al espacio. Pasando al límite para $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$ se obtiene la *ecuación de continuidad* en forma diferencial:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (VIII.4)$$

De la ec. (VIII.4) se observa que $\partial A/\partial t = -\partial Q/\partial x$. Por lo tanto si el gradiente espacial del caudal es negativo: $\partial Q/\partial x < 0$ (entra más de lo que sale), el gradiente temporal del área es positivo: $\partial A/\partial t > 0$. Por el contrario, si el gradiente espacial del caudal es positivo: $\partial Q/\partial x > 0$ (sale más de lo que entra), el gradiente temporal del área es negativo $\partial A/\partial t < 0$.

El ingreso o egreso de un caudal lateral q_l por unidad de longitud Δx puede ser fácilmente representado incorporado respectivamente la correspondiente contribución en los términos (i) o (ii) en la ecuación (VIII.2). El área es función de la profundidad: $A=f(h)$, por lo tanto, la ecuación de continuidad (VIII.4) puede escribirse también como:

$$\frac{\partial A}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \rightarrow B \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (\text{VIII.5})$$

donde B es el ancho de almacenamiento. Para flujo permanente la derivada temporal de la profundidad es nula $\partial h/\partial t = 0$, por lo tanto, de ec. (VIII.5): $\partial Q/\partial x = 0$, es decir, el caudal es constante para todo valor de x.

VIII.3.1.2 Ecuación de cantidad de movimiento

Consideremos un volumen de control en un tramo de longitud Δx y área A, como se observa en la Figura VIII.6. La ecuación de cantidad de movimiento plantea la conservación de dicha propiedad y puede expresarse en palabras de la siguiente manera:

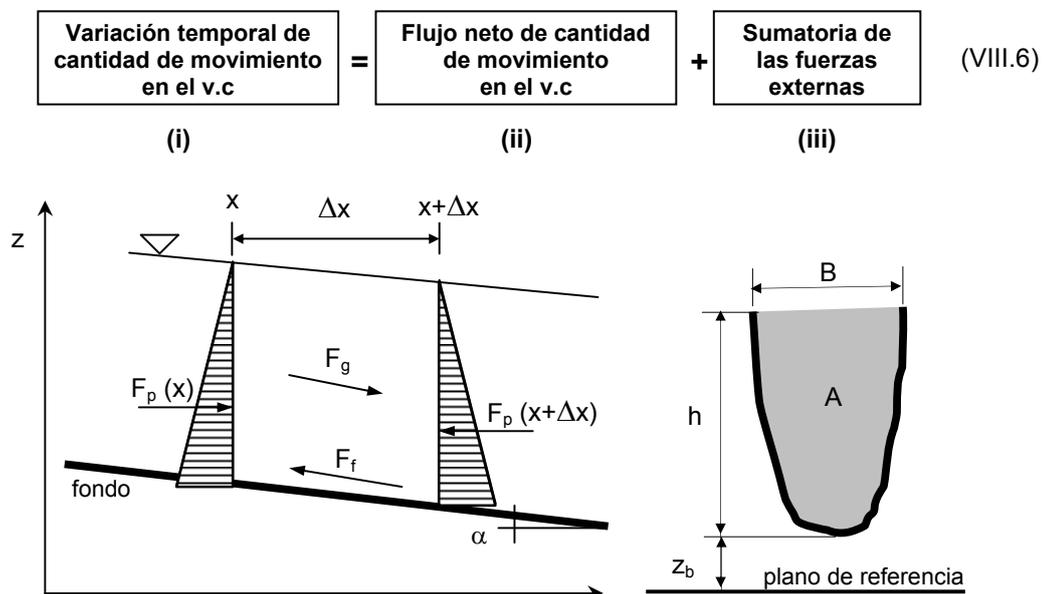


Figura VIII.6: Volumen de control para derivar ecuación de cantidad de movimiento.

Se define *cantidad de movimiento* como el producto de la masa por la velocidad:

$$[\text{Cantidad de movimiento}] = \rho Au$$

donde ρ es la densidad y u la velocidad. El *flujo de cantidad de movimiento* se obtiene mediante el producto entre cantidad de movimiento y velocidad:

$$[\text{Flujo de cantidad de movimiento}] = \rho Au^2 = \rho Qu$$

Por lo tanto la variación temporal de cantidad de movimiento en el volumen de control, expresada matemáticamente en forma discreta, es igual a:

$$(i) : \{[\rho Au]_{t+\Delta t} - [\rho Au]_t\} \Delta x \quad (\text{VIII.7})$$

El flujo neto de cantidad de movimiento, es decir la diferencia entre el flujo de cantidad de movimiento en entrada al v.c. y salida del v.c, en el tiempo Δt , se expresa como:

$$(ii) : \{[\rho Qu]_x - [\rho Qu]_{x+\Delta x}\} \Delta t \quad (\text{VIII.8})$$

Asumimos que las fuerzas externas más importantes, actuantes en el mismo instante Δt , son las de presión, fricción y gravedad. De consecuencia el término (iii) estará compuesto por la sumatoria de las tres fuerzas mencionadas precedentemente:

$$(iii) : F_p + F_f + F_g \quad (\text{VIII.9})$$

La resultante de las fuerzas de presión es:

$$F_p = \{[F_p]_x - [F_p]_{x+\Delta x}\} \Delta t \quad (\text{VIII.10})$$

La fuerza de fricción, dirigida en sentido contrario al del escurrimiento, se expresa como:

$$F_f = -\tau_b P \Delta x \Delta t = -\rho g A S_f \Delta x \Delta t \quad (\text{VIII.11})$$

donde $\tau_b = \rho g R S_f$ es la tensión de corte sobre el contorno, P el perímetro mojado, R el radio hidráulico y S_f es la pendiente de fricción, la cual se asume igual al gradiente de energía necesario para superar las resistencias friccionales en flujo permanente.

La fuerza de gravedad actuante en el sentido del escurrimiento es igual a:

$$F_g = \rho g A \Delta x S_b \Delta t \quad (\text{VIII.12})$$

donde $S_b = -dz_b/dx$ es la pendiente del fondo. La misma es igual a menos el gradiente espacial de la cota del fondo z_b , dado que esta última disminuye en el sentido positivo de x .

Incorporando las ecuaciones (VIII.7), (VIII.8), (VIII.10), (VIII.11) y (VIII.12) en la expresión (VIII.6) reordenando, dividiendo por $\Delta x \Delta t$ y pasando al límite para $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$ se obtiene la ecuación dinámica en forma diferencial:

$$\rho \frac{\partial(Au)}{\partial t} + \rho \frac{\partial(Qu)}{\partial x} + \frac{\partial F_p}{\partial x} - \rho g A S_b + \rho g A S_f = 0 \quad (\text{VIII.13})$$

El gradiente de la fuerza de presión se deduce a partir de la integración vertical de la distribución hidrostática de la presión. En el caso más general cuando el ancho $B=f(x,z)$, el mismo resulta ser igual a (Cunge et al., 1980; Chow et al., 1994):

$$\frac{\partial F_p}{\partial x} = \rho g A \frac{\partial h}{\partial x} \quad (\text{VIII.14})$$

Una de las hipótesis fundamentales consiste en describir los efectos de resistencia al escurrimiento de un flujo impermanente utilizando las ecuaciones válidas en el caso de flujo permanente. Es decir, la pendiente de fricción S_f puede ser obtenida a través de la ecuación de Manning como:

$$S_f = \frac{n^2 Q|Q|}{A^2 R^{4/3}} \quad (\text{VIII.15})$$

donde n es el coeficiente de rugosidad de Manning.

Introduciendo (VIII.14) y una de las (VIII.15) en (VIII.13) y recordando que $Q=U A$ se obtiene:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(Q^2/A)}{\partial x} + g A \frac{\partial h}{\partial x} - g A S_b + g \frac{n^2 Q|Q|}{A R^{4/3}} = 0 \quad (\text{VIII.16a})$$

La ecuación de continuidad (VIII.4) conjuntamente con la ecuación dinámica (VIII.16a) constituyen las ecuaciones de Saint Venant para el flujo impermanente gradualmente variado. La suposición de distribución uniforme de velocidad puede ser flexibilizada considerando la velocidad media de una distribución no-uniforme y corrigiendo el segundo término de la ecuación (VIII.16a) mediante la introducción del coeficiente β de Boussinesq.

La adición de cantidad de movimiento debido al ingreso de un caudal lateral q_l puede ser representada incorporando la correspondiente contribución en el término (ii) en la ec. (VIII.8). Sin embargo, dicha contribución es generalmente despreciable, excepto cuando se trata de caudales sumamente elevados. Asimismo, el efecto de la fuerza del viento actuante sobre el área superficial $B \Delta x$ puede ser representado considerando la tensión de corte efectiva producida por el viento e incorporando dicha contribución en el término (iii) en la ec. (VIII.9).

En el caso de flujo impermanente rápidamente variado, como por ejemplo un resalto hidráulico móvil o una onda de frente abrupto provocada por la rotura de una presa, etc., las ecuaciones diferenciales de Saint Venant no son válidas en las inmediaciones de la discontinuidad. En efecto, la curvatura pronunciada de la superficie libre genera aceleraciones verticales que no pueden ser despreciadas y la distribución de la presión no es la hidrostática, violándose de esta manera una de las hipótesis fundamentales. Además, dichas discontinuidades se desarrollan en longitudes reducidas, menores generalmente que el paso de integración espacial Δx que se utiliza para resolver numéricamente las ecuaciones. Por lo tanto, las mismas se tratan generalmente con leyes hidráulicas y métodos específicos, como el de shock-capturing (Godunov, 1959); que se incorporan como condiciones de borde internas. Aguas arriba y aguas abajo de las discontinuidades las ecuaciones de Saint Venant continúan siendo válidas. Otras condiciones de borde internas son asimismo necesarias cuando se presentan singularidades, tales como confluencias, expansiones o contracciones abruptas, estructuras (puentes, alcantarillas, etc.).

En el punto VIII.2 se mencionó que la curva h-Q en flujo impermanente gradualmente variado asume una forma de lazo, tal como se esquematiza en la Figura VIII.4, donde se observa que, para un dado h, el caudal en fase creciente es mayor que el caudal de flujo uniforme y el caudal en fase bajante es menor. Efectivamente, despreciando los términos de inercia (aceleración local y convectiva) en la ecuación dinámica (VIII.16a) y despejando el caudal Q se obtiene:

$$Q = Q_{\text{unif.}} \left(1 - \frac{1}{S_b} \frac{\partial h}{\partial x} \right)^{1/2} \quad (\text{VIII.16b})$$

donde $Q_{\text{unif.}} = \frac{1}{n} A R^{2/3} S_b^{1/2}$ es el caudal en condiciones de flujo uniforme (permanente). Por lo tanto:

$$Q = Q_{\text{unif.}} \left(1 - \frac{1}{S_b} \frac{\partial h}{\partial x} \right)^{1/2} \rightarrow \begin{cases} \text{Creciente: } \frac{\partial h}{\partial x} < 0 \Rightarrow Q > Q_{\text{unif.}} \\ \text{Bajante: } \frac{\partial h}{\partial x} > 0 \Rightarrow Q < Q_{\text{unif.}} \end{cases} \quad (\text{VIII.16c})$$

Obsérvese que en flujo impermanente, para valores elevados de la pendiente de fondo, respecto al gradiente espacial de la profundidad, el efecto de lazo tiende a desaparecer. Es decir, si el lazo tiende a estrecharse, el flujo impermanente puede ser tratado como un flujo impermanente "localmente uniforme". A continuación veremos que esta situación puede representarse a partir de una cierta simplificación de la ecuación (VIII.16a).

VIII.3.2 Clasificación de modelos hidrodinámicos

En algunas situaciones físicas no todos los términos que constituyen la ecuación dinámica tienen peso relevante. La eliminación de algunos de ellos da lugar a diferentes modelos de propagación de ondas de crecidas. Obviamente a cada ecuación dinámica simplificada se le debe asociar la ecuación de continuidad (VIII.4).

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \text{Aceleración} & \text{Aceleración} & \text{Gradiente de} & \text{Acción de la} & \text{Resistencias} & & & & \\
 \text{local} & \text{convectiva} & \text{presión} & \text{gravedad} & \text{friccionales} & & & & \\
 \hline
 \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial t}} & + \underbrace{\frac{\partial(Q^2/A)}{\partial x}} & + \underbrace{gA \frac{\partial h}{\partial x}} & - \underbrace{gAS_b} & + \underbrace{g \frac{n^2 Q|Q|}{AR^{4/3}}} & = & 0 & & \\
 & & & \underbrace{\hspace{10em}} & & & & & \\
 & & & \text{Modelo de onda cinemática} & & & & & \\
 & & \underbrace{\hspace{15em}} & & & & & & \\
 & & \text{Modelo de onda difusiva} & & & & & & \\
 & \underbrace{\hspace{20em}} & & & & & & & \\
 & \text{Modelo de onda cuasi-dinámica} & & & & & & & \\
 \underbrace{\hspace{25em}} & & & & & & & & \\
 \text{Modelo de onda dinámica} & & & & & & & &
 \end{array}$$

VIII.3.2.1 Modelo de onda dinámica

Cuando todos los términos tienen igual orden de magnitud estamos en presencia del modelo de *onda dinámica*, el cual representa el caso más general.

Se demuestra que las celeridades de propagación de las perturbaciones en el modelo de onda dinámica son: $c = u \pm (gh)^{1/2}$. Es decir, existen dos celeridades reales que determinan como se transmite la información en el plano (x,t):

- En flujo subcrítico (número de Froude $F < 1$) $u < (gh)^{1/2}$, por lo tanto una celeridad positiva c^+ transmite información aguas abajo y la otra celeridad negativa c^- transmite información aguas arriba.
- En flujo supercrítico (número de Froude $F > 1$) $u > (gh)^{1/2}$, por lo tanto las dos celeridades son positivas y la información se transmite solamente hacia aguas abajo.

Para la resolución de las ecuaciones del modelo de onda dinámica se requieren condiciones iniciales y al contorno. Las condiciones iniciales (para $t=0$) se representan como $Q(x,0)=\text{constante}$ y $h(x,0)=\text{perfil flujo permanente}$.

Con respecto a las condiciones al contorno, en caso de flujo subcrítico se especifica generalmente el hidrograma de entrada $Q(x_1,t)$ en el contorno aguas arriba ($x=x_1$) y la curva $h(x_2,t)=f(Q)$ en el contorno aguas abajo ($x=x_2$). En caso de flujo supercrítico se especifica generalmente: $Q(x_1,t)$ y $h(x_1,t)=f(Q)$, es decir ambas condiciones en el contorno aguas arriba.

Si se desprecia el término de aceleración local se obtiene un modelo ligeramente diferente denominado de *onda cuasi-dinámica*, adecuado para simular ondas que crecen lentamente

en el tiempo y se propagan en cauces donde la variación espacial de energía cinética es comparable a la pendiente de la superficie libre y a la pendiente de fricción.

VIII.3.2.2 Modelo de onda difusiva

El modelo de *onda difusiva* se obtiene cuando se desprecian los términos de aceleración local y convectiva en la ecuación dinámica. La inclusión del término de gradiente de presión en este modelo es importante ya que permite simular todavía los efectos de remansos creados por estructuras, afluentes u otras singularidades, su ulterior eliminación, como se verá más adelante, no permitirá simular tales efectos.

Combinando la ecuación de continuidad (VIII.4) con la ecuación dinámica simplificada, es decir sin los términos de inercia, se obtiene:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c \frac{\partial Q}{\partial x} = D_h \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \quad (\text{VIII.17})$$

La (VIII.17) es una ecuación diferencial a derivadas parciales de segundo orden con una variable dependiente $Q(x,t)$. Representa un proceso típico de convección-difusión unidimensional, donde el caudal Q es propagado con celeridad c y difundido con un coeficiente de difusión hidráulica D_h . Donde c y D_h son iguales a:

$$c = \left. \frac{dQ}{dA} \right|_{x_0}, \quad D_h = \frac{Q}{2BS_f} \quad (\text{VIII.18a y b})$$

Si los términos de inercia son en efecto despreciables la ec. (VIII.17) representa un buen modelo para propagar crecidas. Para resolver dicha ecuación se necesitan dos condiciones al contorno, una aguas arriba y otra aguas abajo. Por lo tanto es capaz de simular efectos de remansos. Las condiciones al contorno son generalmente $Q(x_1,t)$ y $Q(x_2,t)=f(h)$ y la condición inicial $Q(x,0)$. Con la ecuación (VIII.5) es posible determinar $h(x,t)$.

Según Ponce, Li y Simons (1978) el modelo de onda difusiva puede ser utilizado cuando se satisface la siguiente desigualdad:

$$T S_b (g/h_0)^{1/2} \geq 30 \quad (\text{VIII.19})$$

donde T es el período de la onda de crecida y h_0 es la profundidad media del flujo, la cual puede calcularse mediante una ecuación de flujo uniforme utilizando un caudal de referencia $Q_0 \cong (2/3)Q_p$, donde Q_p es el caudal pico (Miller, 1984). Si la expresión (VIII.19) es menor que 30 debe utilizarse el modelo de onda dinámica o cuasi-dinámica para obtener resultados satisfactorios en cuanto a celeridad y atenuación de la onda.

VIII.3.2.3 Modelo de onda cinemática

La simplificación más drástica se realiza cuando se desprecian los términos de aceleración local y convectiva y el término de gradiente de presión. De esta manera se obtiene el modelo de *onda cinemática*. En este caso la acción de la gravedad se balancea con las resistencias friccionales, es decir, la ecuación dinámica se reduce a una ecuación de flujo uniforme ($S_b=S_f$), quedando descartada la posibilidad de simular efectos de remansos.

En definitiva el modelo de onda cinemática se basa en la ecuación de continuidad y en una ecuación de flujo uniforme, como por ejemplo la de Manning:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (\text{VIII.20a})$$

$$Q = \frac{1}{n} AR^{2/3} S^{1/2} \quad (\text{VIII.20b})$$

Al postularse flujo localmente uniforme, localmente existe una relación biunívoca entre A y Q, por lo tanto, la derivada temporal del área A puede escribirse como:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \left. \frac{dA}{dQ} \right|_{x_0} \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (\text{VIII.21})$$

Introduciendo la expresión (VIII.21) en la ecuación (VIII.20a) y reordenando se obtiene:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (\text{VIII.22})$$

La (VIII.22) es una ecuación diferencial a derivadas parciales de primer orden con una variable dependiente $Q(x,t)$. La misma representa un proceso de convección donde el caudal Q es propagado aguas abajo con una celeridad c. Donde c está representada por la ecuación (VIII.18a) y es función de la velocidad $u(x,t)$. Efectuando la derivada del caudal Q, dado por la ec. (VIII.20b), respecto al área A, asumiendo canal rectangular ancho, se obtiene: $c = (5/3) u$.

Las condiciones iniciales son del tipo $Q(x,0)$ y se necesita una sola condición de borde $Q(x_1,t)$ especificada en el contorno aguas arriba. Por lo tanto no se pueden simular efectos de remansos. Las profundidades $h(x,t)$ se obtienen a partir de la relación h-Q una vez calculados los caudales $Q(x,t)$.

Al no incorporar los términos de inercia y el gradiente de presión, el modelo de onda cinemática simula ondas que se propagan sin experimentar prácticamente atenuaciones ni difusiones (convección pura). Debido a que las celeridades en proximidad del pico (el cual no se atenúa) son mayores que las celeridades en el frente de la onda (el cual no se difunde) la onda se empina cada vez más a medida que se propaga aguas abajo. Este fenómeno evoluciona en el tiempo y el espacio pudiendo alcanzar lo que se denomina *shock cinemático*, es decir la onda se ha empinado de manera tal que el pico supera al frente, lo cual invalida obviamente la solución.

Sin embargo, los esquemas en diferencias finitas utilizados para resolver las ecuaciones (los cuales se describirán sucesivamente) siempre incorporan, en mayor o menor medida, una cierta difusión numérica y por lo tanto el shock cinemático no se presenta.

Según Ponce, Li y Simons (1978) el modelo de onda cinemática puede ser utilizado cuando se satisface la siguiente desigualdad:

$$T S_b (u_0/h_0) \geq 171 \quad (\text{VIII.23})$$

donde u_0 es la velocidad media del flujo asociada a Q_0 y h_0 , definidos precedentemente.

Henderson (1963) observó que las crecidas en ríos con pendientes de fondo $S_b > 0.002$, los términos inerciales (aceleración local y convectiva) y el gradiente de presión son mucho menores que los términos de acción de la gravedad y resistencia por fricción. Es decir, la mayoría de las ondas de crecidas son gobernadas sustancialmente por fricción y gravedad.

VIII.4 MÉTODO NUMÉRICO DE DIFERENCIAS FINITAS

Las ecuaciones diferenciales descriptas precedentemente constituyen modelos matemáticos teóricos de propagación de ondas de crecidas reales. Dichas ecuaciones expresan ciertas leyes básicas que gobiernan la evolución del proceso propagatorio en el continuo.

La solución analítica exacta de las ecuaciones puede obtenerse solo en algunas situaciones ideales, es decir, considerando en forma extremadamente simplificada las condiciones iniciales y al contorno, los coeficientes, la geometría de las secciones, etc.. Por el contrario, en situaciones reales las condiciones iniciales y al contorno son bastante complejas, los coeficientes no son constantes, etc.. En esta última situación es posible encontrar soluciones aproximadas, es decir, caudales y profundidades en un número finito de puntos del dominio (x,t) , mediante la utilización de métodos numéricos, como por ejemplo, el *método de diferencias finitas* (MDF).

Los fundamentos teóricos del MDF son ciertamente amplios y relativamente complejos. El desarrollo exhaustivo de los mismos supera los alcances del presente Capítulo. Aquí se desarrollarán algunos conceptos básicos para poder comprender ciertos aspectos del método numérico. Para ulteriores profundizaciones se puede consultar Abbot et al. (1989), Cunge et al. (1980).

El MDF permite básicamente reemplazar las ecuaciones diferenciales (modelo teórico del continuo) por sus correspondientes representaciones discretas, en forma tal de obtener una ecuación algebraica análoga, la cual puede ser resuelta con una computadora (modelo numérico de simulación del continuo). Por lo tanto las derivadas de funciones de argumentos continuos deben ser aproximadas en términos discretos en un *número finito de puntos computacionales* en el dominio espacio-tiempo.

VIII.4.1 Discretización del dominio espacio-tiempo

Se define *grilla computacional* al conjunto del número finito de puntos computacionales (x_j, t_n) que resultan de efectuar la discretización de los argumentos continuos (x,t) . La discretización a lo largo de x se expresa simbólicamente como: $x_j = j \Delta x$ con $j = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1, N$; de manera que la longitud total es: $L = x_N = N \Delta x$. La discretización a lo largo de t se expresa simbólicamente como: $t_n = n \Delta t$ con $n = 0, 1, 2, 3, \dots, M-1, M$; de manera que el tiempo total es: $T = t_M = M \Delta t$. En la Figura VIII.7 se presenta un ejemplo de grilla computacional utilizada en el MDF para problemas unidimensionales.

En la propagación de una crecida los valores x_j representarán las posiciones de las distintas secciones del tramo de río de longitud total L . Asimismo, los valores t_n representarán los distintos tiempos de cálculo, con T igual al tiempo total de simulación numérica de la propagación. Los índices $j=0$ y $j=N$ representarán el contorno aguas arriba y aguas abajo respectivamente, mientras $n=0$ representará la condición inicial.

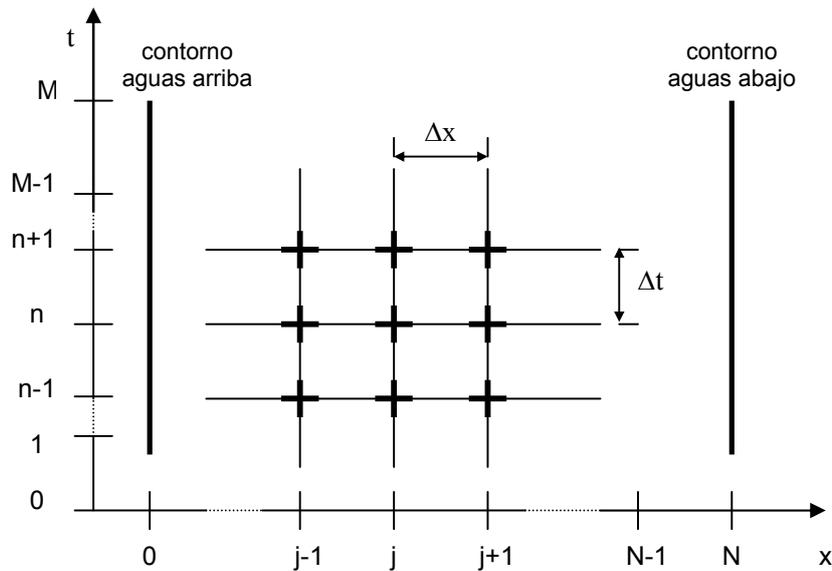


Figura VIII.7: grilla computacional en MDF para Δx y Δt constantes.

VIII.4.2 Esquemas en diferencias finitas

Utilizando expansiones en series de Taylor es posible aproximar las derivadas de funciones de argumentos continuos en un número finito de puntos y definir además el orden de dicha aproximación. Por ejemplo, la función caudal Q puede ser expandida en series de Taylor considerando los puntos j y $j+1$ al tiempo n como:

$$Q_{j+1}^n = Q_j^n + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_j^n \Delta x + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_j^n \frac{\Delta x^2}{2!} + \left(\frac{\partial^3 Q}{\partial x^3}\right)_j^n \frac{\Delta x^3}{3!} + O(\Delta x^4) \quad (\text{VIII.24})$$

donde Q_j^n significa el valor del caudal Q en el punto j al tiempo n . Reagrupando y dividiendo la (VIII.24) por Δx se obtiene:

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_j^n = \frac{Q_{j+1}^n - Q_j^n}{\Delta x} - \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_j \frac{\Delta x}{2!} - \left(\frac{\partial^3 Q}{\partial x^3}\right)_j \frac{\Delta x^2}{3!} - O(\Delta x^3) \quad (\text{VIII.25})$$

si truncamos la expansión para obtener la aproximación o “regla de traducción” del continuo al discreto:

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_j^n \approx \frac{Q_{j+1}^n - Q_j^n}{\Delta x}, \quad O(\Delta x) \quad (\text{VIII.26})$$

todos los términos restantes en (VIII.25) asumen la forma de un error y se los denomina colectivamente “error de truncamiento”. La (VIII.26) constituye un esquema del MDF *progresivo en el espacio* con una exactitud de aproximación de primer orden $O(\Delta x)$, es decir la más baja posible. El orden significa en este caso la potencia de Δx que multiplica la primer derivada eliminada de la expansión. Si se consideran más términos de la expansión el error de truncamiento obviamente disminuye y de consecuencia aumenta la exactitud de aproximación del esquema.

Operando en manera análoga pero considerando los puntos j y $j-1$ al tiempo n :

$$Q_{j-1}^n = Q_j^n - \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_j^n \Delta x + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_j^n \frac{\Delta x^2}{2!} - \left(\frac{\partial^3 Q}{\partial x^3}\right)_j^n \frac{\Delta x^3}{3!} + O(\Delta x^4) \quad (\text{VIII.27})$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_j^n = \frac{Q_j^n - Q_{j-1}^n}{\Delta x} + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_j^n \frac{\Delta x}{2!} - \left(\frac{\partial^3 Q}{\partial x^3}\right)_j^n \frac{\Delta x^2}{3!} + O(\Delta x^3) \quad (\text{VIII.28})$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_j^n \approx \frac{Q_j^n - Q_{j-1}^n}{\Delta x}, \quad O(\Delta x) \quad (\text{VIII.29})$$

La (VIII.29) constituye un esquema del MDF *regresivo en el espacio* con una exactitud de aproximación de primer orden $O(\Delta x)$.

Sumando miembro a miembro (VIII.25) y (VIII.28), dividiendo por 2 y eliminando términos se obtiene un esquema *centrado en el espacio* con exactitud de segundo orden $O(\Delta x^2)$:

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_j^n \approx \frac{Q_{j+1}^n - Q_{j-1}^n}{2\Delta x}, \quad O(\Delta x^2) \quad (\text{VIII.30})$$

En comparación con los esquemas anteriores, el esquema centrado presenta un mayor orden de exactitud sin incorporar términos adicionales. En este caso, a medida que Δx tiende a cero el error de truncamiento tenderá más rápidamente a cero que en los casos precedentes. Sin embargo, al considerar los puntos $j-1$ y $j+1$ el esquema centrado presenta un mayor error de discretización.

El mismo procedimiento realizado anteriormente con las derivadas espaciales puede efectuarse con las derivadas temporales. Para las mismas se utiliza generalmente un *esquema progresivo en el tiempo*:

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)_j^n \approx \frac{Q_j^{n+1} - Q_j^n}{\Delta t}, \quad O(\Delta t) \quad (\text{VIII.31})$$

VIII.4.2.1 Esquemas explícitos

Un esquema en diferencias finitas es *explícito* cuando el valor de la función en el tiempo $n+1$ se calcula con información proveniente exclusivamente del tiempo n . Por ejemplo la ecuación de onda cinemática (VIII.22) puede ser resuelta utilizando un *esquema regresivo en el espacio progresivo en el tiempo* (REPT) de tipo *explícito*:

$$\frac{Q_j^{n+1} - Q_j^n}{\Delta t} + \tilde{c} \frac{(Q_j^n - Q_{j-1}^n)}{\Delta x} = 0 \quad (\text{VIII.32})$$

con $\tilde{c} = (c_j^n + c_{j-1}^n)/2$, explicitando el caudal en Q_j^{n+1} de la (VIII.32):

$$Q_j^{n+1} = Q_j^n - \frac{\tilde{c}\Delta t}{\Delta x} (Q_j^n - Q_{j-1}^n) \quad (\text{VIII.33})$$

De esta forma, con las condiciones iniciales ($n=0, j=1,2,\dots,N$) y las condiciones al contorno ($j=0; n=0,1,2,\dots,M$), el cálculo avanza en el tiempo y se desarrolla desde el contorno aguas arriba hacia aguas abajo, utilizando siempre información del nivel de tiempo inferior.

Los modelos numéricos basados en esquemas explícitos deben satisfacer ciertas condiciones a los efectos de asegurar su *estabilidad*. La estabilidad se refiere a la capacidad que tiene el modelo (en definitiva el esquema) para evitar que los errores crezcan ilimitadamente en forma incontrolada. La condición a satisfacer es que en cada punto computacional el *número de Courant* σ sea menor o igual que 1:

$$\sigma_j = \frac{c_j \Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (\text{VIII.34})$$

experimentos numéricos con $c = \text{constante}$ muestran que para $\sigma < 1$ el modelo numérico dado por la (VIII.33) es estable pero difusivo, para $\sigma = 1$ es estable y no difusivo y para $\sigma > 1$ inestable. Es decir, los modelos numéricos basados en esquemas explícitos deben trabajar

en el límite de estabilidad. La condición (VIII.34) establece un criterio para la selección de las dimensiones de la malla Δx , Δt . Generalmente Δx es fijo, por lo tanto implica una limitación en la selección de Δt .

Los esquemas en diferencias finitas deben ser además consistentes y convergentes. La consistencia se refiere a una comparación entre ecuaciones. Un esquema será consistente si, partiendo de la ecuación discretizada y realizando expansiones en series de Taylor, se obtiene la ecuación diferencial original para Δx , Δt que tienden a cero.

La convergencia se refiere a una comparación de soluciones. En este caso puede ser útil una solución analítica conocida para realizar la comparación. Efectuando simulaciones numéricas con $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$ manteniendo la relación $\Delta x/\Delta t = \text{constante}$, las mismas deberían converger a la solución exacta. Esto es solo una guía ya que no existe solución conocida en caso de crecidas reales.

VIII.4.2.2 Esquemas implícitos

Un esquema en diferencias finitas es *implícito* cuando en el tiempo $n+1$ existen más funciones incógnitas que ecuaciones algebraicas disponibles. Una manera usual de generar esquemas implícitos es partiendo las derivadas mediante coeficientes de peso.

La ecuación de onda cinemática (VIII.23), discretizada utilizando un esquema implícito sería:

$$\left[(1-\psi) \frac{Q_j^{n+1} - Q_j^n}{\Delta t} + \psi \frac{Q_{j+1}^{n+1} - Q_{j+1}^n}{\Delta t} \right] + \tilde{c} \left[(1-\theta) \frac{Q_{j+1}^n - Q_j^n}{\Delta x} + \theta \frac{Q_{j+1}^{n+1} - Q_j^{n+1}}{\Delta x} \right] = 0 \quad (\text{VIII.35})$$

donde: $\tilde{c} = \theta \frac{c_{j+1}^{n+1} + c_j^{n+1}}{2} + (1-\theta) \frac{c_{j+1}^n + c_j^n}{2}$ y los coeficientes de peso asumen valores en el rango $0 \leq \psi \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 1$.

Para $\psi=\theta=0$ se obtiene un esquema explícito similar al (VIII.32). Para $\psi=\theta=1/2$ se obtiene un esquema implícito y perfectamente centrado en $(j+1/2, n+1/2)$. Generalmente se adopta $\psi=1/2$ y se demuestra que para $\theta > 1/2$ el esquema es estable para cualquier valor del número de Courant. Esto representa una ventaja respecto a los esquemas explícitos ya que no existe limitación en la selección de Δt .

Las ecuaciones discretizadas utilizando esquemas implícitos deben ser resueltas empleando algoritmos matriciales, ya que la solución está "implícita" dentro de un sistema simultáneo de ecuaciones algebraicas.

En algunos casos se utilizan métodos iterativos para resolver esquemas implícitos. En el caso particular de la ecuación (VIII.35) tenemos como incógnitas Q_{j+1}^{n+1} y c_{j+1}^{n+1} , para resolverla se puede utilizar un método iterativo de *predicción-corrección*, efectuando la

primer predicción con un esquema explícito y corrigiendo sucesivamente con un esquema implícito, hasta que la solución converge en cada punto computacional (Basile, 1996).

VIII.5 DATOS NECESARIOS PARA LA IMPLEMENTACIÓN DE MODELOS

Los datos necesarios para implementar los modelos numéricos de propagación son de dos tipos: topográficos (pendientes del cauce, geometría de las secciones, tipos de lechos, etc.) e hidráulicos (relaciones profundidad-caudal, hidrogramas, coeficientes de rugosidad, etc.). Los mismos deben ser oportunamente elaborados cuando se realiza la discretización del tramo objeto del estudio.

Antes de aplicar un modelo numérico es conveniente efectuar la calibración y la validación del mismo. En la calibración se buscará de reproducir datos observados (hidrogramas o limnigramas) en algunos puntos del tramo. En el proceso de calibración el único parámetro de ajuste es el coeficiente de rugosidad de Manning, el cual, una vez ajustado, debe mantenerse invariado cuando se realiza la validación.

La validación se realiza para verificar la capacidad que tiene el modelo de simular otro evento distinto del utilizado en la calibración. Por lo tanto la misma debe efectuarse con datos de otro u otros eventos. Ulteriores detalles sobre datos necesarios, discretización, calibración, etc., pueden consultarse en Cunge et al., 1980.

VIII.6 MODELOS DE PROPAGACIÓN DE CRECIDAS “HIDROLÓGICOS”

Los modelos de propagación de crecidas “hidrológicos” o cero-dimensionales se basan en:

- Ecuación de continuidad integrada a lo largo del tramo de propagación.
- Función de almacenamiento.

Estos modelos tienen la ventaja de requerir menor cantidad de datos que los modelos hidrodinámicos unidimensionales vistos precedentemente. Sin embargo, los mismos no pueden ser utilizados para simular efectos de remansos creados por puentes u otras estructuras, etc. Generalmente resultan útiles para simular en forma simplificada la propagación en embalses y se aplican con ciertas limitaciones a tramos de ríos o canales.

La ecuación de continuidad unidimensional para un flujo impermanente (VIII.4), integrada entre los puntos extremos del tramo x_1 y x_2 (Figura VIII.1) puede ser expresada como:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial A}{\partial t} dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = 0 \quad (\text{VIII.36})$$

$$I_1 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} A dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} dV(x, t) = \frac{dV(t)}{dt} \tag{VIII.37}$$

$$I_2 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = Q_2(t) - Q_1(t) \tag{VIII.38}$$

Reemplazando (VIII.37) y (VIII.38) en (VIII.36) y reordenando se obtiene:

$$\frac{dV(t)}{dt} = Q_1(t) - Q_2(t) \tag{VIII.39}$$

donde $V(t)$ es el almacenamiento (volumen) en el tramo, $Q_1(t)$ es el caudal de entrada en la sección aguas arriba x_1 y $Q_2(t)$ es el caudal de salida en la sección aguas abajo x_2 . La ecuación (VIII.39) es una ecuación de continuidad cero-dimensional (la variable independiente x ha sido eliminada en el proceso de integración).

Para realizar la propagación la ecuación (VIII.39) no es suficiente. En efecto, conocido el caudal de entrada $Q_1(t)$ tenemos dos incógnitas: el caudal $Q_2(t)$ y el almacenamiento $V(t)$. Por lo tanto es necesario contar con una ecuación adicional. La misma se denomina *función de almacenamiento* y puede ser expresada en forma general como:

$$V(t) = f [Q_1(t) , Q_2(t)] \tag{VIII.40}$$

VIII.6.1 Modelo de Muskingum

En el caso del modelo de Muskingum (Mc Carthy, 1938), la relación (VIII.40) es determinada considerando que el área es directamente proporcional al caudal y, por lo tanto, se plantea un almacenamiento de prisma y un almacenamiento de cuña como se esquematiza en la Figura VIII.8.

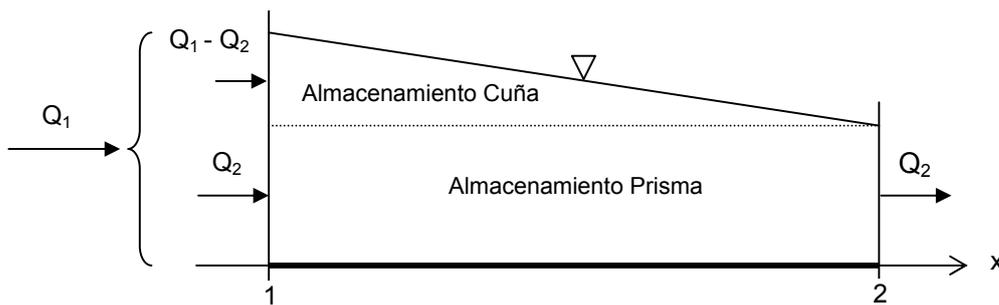


Figura VIII.8: Esquematización del almacenamiento de cuña y de prisma.

El almacenamiento de prisma se expresa como: KQ_2 , mientras que, el almacenamiento de cuña es $KX(Q_1 - Q_2)$. Por lo tanto, la función de almacenamiento se plantea como:

$$V(t) = KQ_2(t) + KX[Q_1(t) - Q_2(t)] = K[XQ_1(t) + (1 - X)Q_2(t)] \quad (\text{VIII.41})$$

Donde K y X son parámetros constantes del modelo. K es un coeficiente de almacenamiento, que desde el punto de vista físico representa el tiempo medio de traslado de la onda en el tramo. Por otra parte, el parámetro X pondera los efectos relativos de los caudales Q_1 y Q_2 en el volumen almacenado por prisma. En particular, para $X=0$ la (VIII.41) representa la función de almacenamiento para un embalse con superficie del agua horizontal.

En definitiva el modelo de Muskingum se basa en las ecuaciones (VIII.39) y (VIII.41). Derivando la (VIII.41) respecto al tiempo e introduciendo el resultado en la (VIII.39) se obtiene:

$$K(1 - X) \frac{dQ_2(t)}{dt} + Q_2(t) = Q_1(t) - KX \frac{dQ_1(t)}{dt} \quad (\text{VIII.42})$$

La discretización de la ecuación (VIII.42) puede realizarse utilizando las siguientes expresiones:

$$\frac{dQ_2(t)}{dt} = \frac{Q_2^{n+1} - Q_2^n}{\Delta t}, \quad \frac{dQ_1(t)}{dt} = \frac{Q_1^{n+1} - Q_1^n}{\Delta t} \quad (\text{VIII.43})$$

$$Q_2(t) = (Q_2^{n+1} + Q_2^n) / 2, \quad Q_1(t) = (Q_1^{n+1} + Q_1^n) / 2$$

reemplazando las expresiones (VIII.43) en (VIII.42) y operando algebraicamente se obtiene:

$$Q_2^{n+1} = C_1 Q_1^{n+1} + C_2 Q_1^n + C_3 Q_2^n \quad (\text{VIII.44})$$

con:

$$\begin{aligned} C_1 &= (-KX + 0.5\Delta t) / C_4 \\ C_2 &= (KX + 0.5\Delta t) / C_4 \\ C_3 &= (K - KX - 0.5\Delta t) / C_4 \\ C_4 &= (K - KX + 0.5\Delta t) \end{aligned} \quad (\text{VIII.45})$$

En (VIII.45) se verifica que $C_1 + C_2 + C_3 = 1$. Determinadas las constantes C_1 , C_2 , C_3 , y C_4 (para lo cual es necesario conocer el valor de K y X y el valor de Δt), la ecuación (VIII.44) permite calcular explícitamente los caudales incógnitas $Q_2[n\Delta t]$ con $n=1,2,3,\dots,M$; en función del hidrograma dato en la sección x_1 y la condición inicial Q_2 ($n=0$). El esquema de cálculo avanza en el tiempo como se observa en la Figura VIII.9.

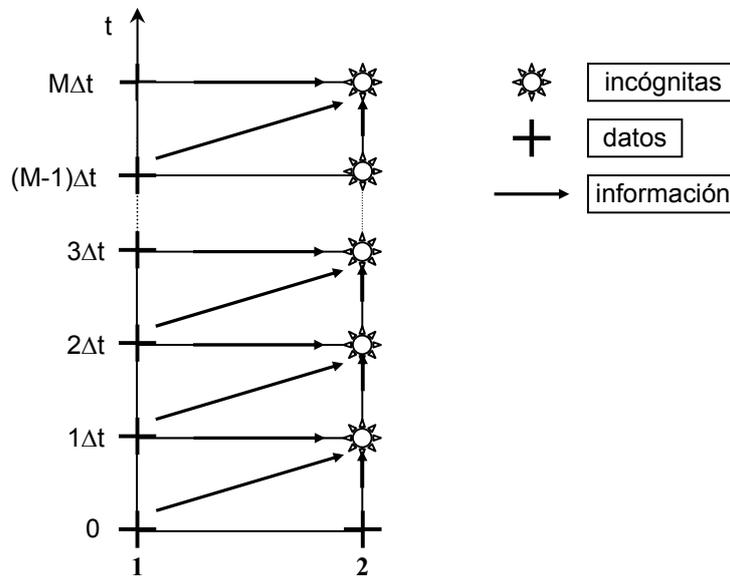


Figura VIII.9: esquema de cálculo en el modelo de Muskingum.

Para garantizar la estabilidad numérica del esquema de diferencias finitas, el parámetro X debe satisfacer la siguiente condición:

$$0 \leq X \leq 0.5 \tag{VIII.46}$$

Además, los coeficientes C_1 y C_3 deben ser positivos. Por lo tanto, de las correspondientes expresiones de C_1 y C_3 en (VIII.45), se obtiene la siguiente condición:

$$2X < \frac{\Delta t}{K} < 2(1-X) \tag{VIII.47}$$

Dependiendo de los valores que adopta X , en el rango dado por la (VIII.46), el modelo numérico dado por la ec. (VIII.44) introduce, en mayor o menor medida, una cierta difusión y consiguiente atenuación de onda.

VIII. 6.1.1 Determinación de parámetros: Método gráfico

Si existen datos de hidrogramas de entrada y salida para el tramo de río en estudio, los valores de K y X pueden determinarse gráficamente.

El parámetro K se estima como el tiempo entre los centros de gravedad de los hidrogramas (ver Figura VIII.9). Además, graficando la relación: $V = f [X Q_1 + (1-X) Q_2]$ se observa una curva en forma de lazo para los distintos valores de X que se adopten. Cuando la curva en

lazo se aproxime lo mejor posible a una recta, el valor de X será el seleccionado y de la pendiente de la misma se obtiene K (ver Figura VIII.11).

Para graficar cada curva para un valor particular de X se deben calcular los valores acumulados en el tiempo:

$$Q_a^{n+1} = Q_a^n + X(Q_1^{n+1} - Q_1^n) + (1-X)(Q_2^{n+1} - Q_2^n) \quad (\text{VIII.48})$$

$$V^{n+1} = V^n + 0.5[(Q_1^{n+1} + Q_1^n) - (Q_2^{n+1} + Q_2^n)] \Delta t \quad (\text{VIII.49})$$

donde Q_a para $n=0$ es igual al caudal base Q_b .

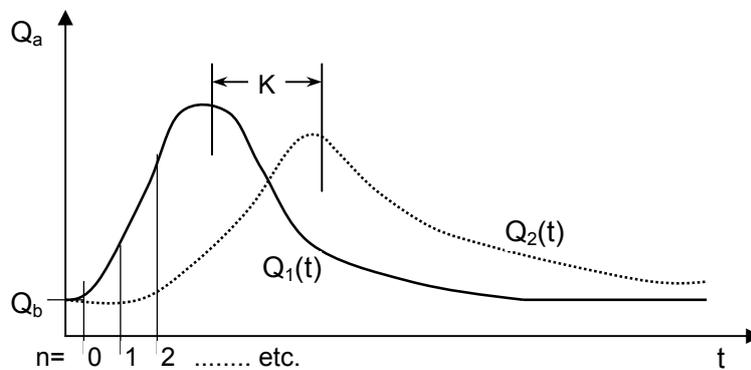


Figura VIII.10: hidrogramas existentes observados en x_1 y x_2 .

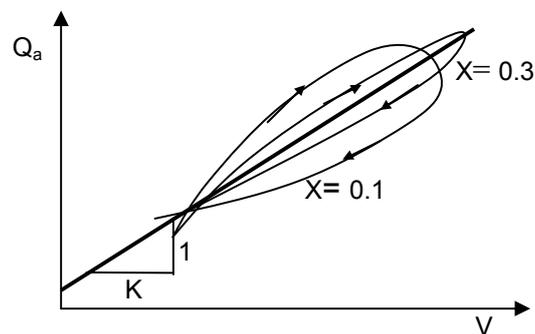


Figura VIII.11: relación $Q_a - V$

VIII.6.1.2 Método de Muskingum-Cunge (MC)

Una alternativa es utilizar los valores de K y X proporcionados por Cunge (1969). El autor discretizó la ecuación diferencial (VIII.22) del modelo de onda cinemática, asumiendo c =constante, de la siguiente manera:

$$\left[X \frac{Q_j^{n+1} - Q_j^n}{\Delta t} + (1-X) \frac{Q_{j+1}^{n+1} - Q_{j+1}^n}{\Delta t} \right] + c \left[\frac{Q_{j+1}^n - Q_j^n + Q_{j+1}^{n+1} - Q_j^{n+1}}{2\Delta x} \right] = 0 \quad (\text{VIII.50})$$

explicitando de la (VIII.50) el caudal incógnita Q_{j+1}^{n+1} obtuvo una ecuación igual a la ec. (VIII.44) del modelo Muskingum, generalizada para un tramo de longitud L dividido en secciones equidistantes j, j+1 (j=0,1,2,...,etc):

$$Q_{j+1}^{n+1} = C_1 Q_j^{n+1} + C_2 Q_j^n + C_3 Q_{j+1}^n \quad (\text{VIII.51})$$

donde el parámetro K, que interviene en los distintos coeficientes definidos por las expresiones (VIII.45), es igual a:

$$K = \Delta x / c \quad (\text{VIII.52})$$

Como la ec. (VIII.44) es idéntica a la (VIII.51), la difusión que produce el modelo Muskingum puede ser asociada al esquema en diferencias finitas que utilizó Cunge para resolver la ecuación diferencial del modelo de onda cinemática. Esto le permitió obtener una expresión para X basada en características físicas definidas del tramo y de la onda de crecida.

La difusión numérica que genera un esquema de $O(\Delta x)$ en el MDF está asociada al error de truncamiento y en particular a las derivadas de segundo orden que han sido truncadas. A los efectos de determinar la difusión numérica que introduce el esquema dado por la (VIII.50), Cunge expandió en series de Taylor los diferentes términos de la misma, truncando las expansiones a partir de las derivadas de tercer orden. Es decir, reteniendo solamente las derivadas de primer y segundo orden. De esta manera obtuvo:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c \frac{\partial Q}{\partial x} = c \Delta x \left(\frac{c \Delta t}{2 \Delta x} - X \right) \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \quad (\text{VIII.53})$$

donde el término que multiplica a la derivada segunda en la ec. (VIII.53) representa el coeficiente de difusión numérica D_n del esquema dado por la (VIII.50).

Para obtener el valor de X Cunge igualó el coeficiente de *difusión numérica* D_n con el coeficiente de *difusión hidráulica* D_h del modelo de onda difusiva (ec. (VIII.17)):

$$D_n = c \Delta x \left(\frac{c \Delta t}{2 \Delta x} - X \right) = D_h \quad (\text{VIII.54})$$

donde c y D_h están representadas por las ecuaciones (VIII.18a) y (VIII.18b) respectivamente.

Considerando $\Delta x = c \Delta t$, de la (VIII.54) se puede despejar el coeficiente X :

$$X = \frac{1}{2} - \frac{D_h}{c \Delta x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{P_e} \quad (\text{VIII.55})$$

donde se ha introducido el número de Peclet: $P_e = c \Delta x / D_h$, que representa la relación entre los efectos convectivos y difusivos. El parámetro X debe ser siempre positivo y varía en el rango establecido por la condición (VIII.46), por lo tanto $P_e \geq 2$. Se observa que si $D_h \ll c \Delta x$, $P_e \gg 2$, $X \rightarrow 0.5$, preponderan netamente los efectos convectivos sobre los difusivos y el modelo Muskingum-Cunge representará ondas cinemáticas. Por el contrario, para $P_e \rightarrow 2$, $X \rightarrow 0$, es decir, el modelo MC representará ondas que se difunden y atenúan.

El modelo Muskingum-Cunge queda definido por la ecuación (VIII.51) con los coeficientes (VIII.45) y las condiciones (VIII.46) y (VIII.47). Los valores de K y X están dados por las ecuaciones (VIII.52) y (VIII.55) respectivamente. Para calcular los parámetros K y X es necesario estimar la celeridad c de la onda y el coeficiente de difusión hidráulica D_h . Este último puede estimarse como:

$$D_h = \frac{Q_0}{2 B_0 S_b} \quad (\text{VIII.56})$$

donde Q_0 es un caudal de referencia, próximo al caudal pico Q_p del hidrograma de entrada, ya definido en la sección VIII.4.2.2 como: $Q_0 = (2/3) Q_p$. B_0 es el ancho de la sección asociado a Q_0 y S_b es la pendiente del fondo.

El caudal Q genérico puede expresarse mediante la ecuación de Manning como:

$$Q = \frac{1}{n} A R^{2/3} S_b^{1/2} \quad (\text{VIII.57})$$

La celeridad c se define como (ver ec. VIII.18a):

$$c = \frac{dQ}{dA} = \frac{5}{3} \frac{Q}{A} = \frac{5}{3} u \quad (\text{VIII.58})$$

Por lo tanto la celeridad de la onda asociada al caudal Q_0 , ($c=c_0$) puede ser estimada como:

$$c = \frac{5}{3} u_0 = \frac{5}{3} \frac{Q_0}{A_0} \quad (\text{VIII.59})$$

donde el subíndice 0 se aplica a variables asociadas con Q_0 , como por ejemplo velocidad u_0 , área A_0 , profundidad h_0 , etc..

Para aplicar el método de MC se debe seguir el siguiente procedimiento:

1. Con el caudal pico del hidrograma de entrada calcular $Q_0 = (2/3) Q_p$.
2. De la curva h-Q aguas arriba (o con ec. de Manning) estimar h_0 .
3. Con las características geométricas de la sección estimar B_0 , A_0 .
4. Estimar la pendiente con S_b (pendiente de fondo).
5. Calcular celeridad con la ec. (VIII.59).
6. Calcular coeficiente de difusión hidráulica con la ec. (VIII.56).
7. Adoptar Δx (tramo de longitud L discretizado como: $L=N \Delta x$).
8. Calcular el parámetro K con la ec. (VIII.52).
9. Calcular el parámetro X con la ec. (VIII.55). Verificar la condición dada por la ec. (VIII.46). Si no se cumple recomenzar de 7).
10. Seleccionar Δt utilizando la desigualdad dada por la ec. (VIII.47).
11. Calcular los coeficientes C_1 , C_2 y C_3 dados por la ec. (VIII.45). Verificar que la sumatoria de dichos coeficientes sea igual a la unidad.
12. Utilizando la ec. (VIII.51) calcular los hidrogramas en: $x_j = j \Delta x$, $t_n = n \Delta t$, conociendo la condición de borde aguas arriba (hidrograma de entrada en $j=0$ para $n=0,1,2,\dots,M$) y la condición inicial (caudal base para $n=0$, $j=1,2,\dots,N$).

VIII.7 BIBLIOGRAFÍA

- Abbot, M.B. y Basco, D.R. (1989). *Computational Fluid Dynamics*. Longman Scientific and Technical. Longman Group UK Limited.
- Basile, P.A y Riccardi, G. (2016). *Desarrollo y Aplicación del Modelo Hidromorfodinámico TEDRI-1D7C*. X Jornadas de Ciencia y Tecnología 2016. Universidad Nacional de Rosario.
- Basile, P.A. (1996). *Morphodynamic model for non-uniform sediments: an application to the Mallerio river (Italy)*. En *Flooding Risk in Mountain Areas*, Chapter 8, ISMES, Italia.
- Basile, P.A. (1990). *Hydro II model development and application to the Enza river (Italy)*. Technical Report DTA-90, ISMES, Italia.
- Basile, P. A. y Riccardi, G.A. (1998). *Desarrollo y aplicación de un modelo morfológico cuasi-2D para simular numéricamente los procesos dinámicos de erosión y sedimentación en ríos aluviales*. XVII Congreso Nacional del Agua. Tomo III, pp. 472-482.
- Bellos, C.; Basile, P.A. y Peviani, M. (1995). *Numerical models for flood wave propagation in mountain rivers*. Proc. III Workshop on Climate Change and Flooding Risk, EC Environment Research Program. December 15-19, Delft, Holanda.

- Chow, V.T.; Maidment, D.R. y Mays, L.W. (1994). *Hidrología Aplicada*. McGraw-Hill Interamericana S.A..
- Cunge, J.A.; Holly, F.M. y Verwey, A. (1980). *Practical Aspects of Computational River Hydraulics*. Pitman Advanced Publishing Program.
- Cunge, J.A. (1969). *On the subject of a flood propagation computation method (Muskingum Method)*. Journal of Hydraulic Research, Vol. 7, N.2, pp. 205-230.
- De Vries, M. (1993). *River Engineering*. Lectures Notes f10. Department of Hydraulic Engineering. Faculty of Civil Engineering. Delft University of Technology, Holanda.
- Godunov, S.K. (1959). *A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics*. Mat. Sb., 47: 271-306.
- Henderson, F.M. (1963). *Flood waves in prismatic channels*. Journal of the Hydraulic Division, ASCE, Vol. 89, N° HY4, July 1963.
- Labadie, G. (1992). *Flood waves and flooding models*. Proc. of the NATO-ASI on "Coping with Floods", November 3-5, Erice, Italy.
- Mahmood, K. y Yevjevich, V. (1975). *Unsteady Flow in Open Channels*. Vol. 1, Water Resources Publications. Fort Collins, Colorado, USA.
- Miller, J.E. (1984). *Basic Concepts of Kinematic-Wave Models*. United States Geological Survey (USGS). Professional Paper 1302.
- Perkins, S.P. y Koussis, A.D. (1996). *Stream-aquifer interaction model with diffusive wave routing*. Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 112, N.4, pp. 210-218.
- Ponce, V.M. y Li, R.M. (1978). *Overview of flood routing methods*. Colorado State University, Fort Collins, Colorado, USA.