Universidad Nacional de Rosario

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Teoremas de convergencia para modelos exponenciales con dispersión bivariados

Autora: Gabriela Boggio

Directora: Lila Ricci

Codirector: José Raúl Martínez

Tesis presentada para optar al título de:

Doctora en Matemática

Año 2019

Deseo agradecer

En primer lugar, a mi Directora Lila Ricci por la guía, el apoyo y la enorme dedicación brindada.

A José Raúl Martínez por acercarme de algún modo a Bent Jørgensen.

A Eduardo Santillán Marcus por el estímulo y ayuda recibidos durante tanto tiempo.

A Fernanda Méndez por todo lo compartido en este recorrido.

A Leticia Hachuel y Nora Arnesi porque siempre pude contar con ellas.

A mis compañeros de trabajo, por haberme acompañado y alentado en esta etapa.

A mi querida familia, por apoyarme siempre.

Finalmente, el recuerdo más especial para mis padres.

Indice

1 Introducción

La principal *raison détre*, en palabras de Bent Jørgensen, de los modelos con dispersión es ampliar el horizonte de los modelos lineales generalizados introducidos por Nelder y Wedderburn [26] permitiendo que se pueda elegir entre infinitas distribuciones para el error y así optar por la que mejor represente los datos.

La idea de un modelo exponencial con dispersión puede remontarse a M. C. K. Tweedie, quien en 1947 en un trabajo titulado "Functions of a statistical variate with given means, with special reference to Laplacian distributions" [34], señaló muchas de sus importantes propiedades pero, en contraste con el éxito de las ideas de Nelder y Wedderburn, sus trabajos pasaron inadvertidos por décadas. En 1972 Nelder y Wedderburn [26], no sólo permitieron que la distribución del error de los modelos de regresión pertenezca a la familia exponencial sino que introdujeron una clase de modelos estadísticos y lo hicieron en el momento en que el avance computacional era tal que fue posible llevar a cabo los cómputos requeridos para el análisis. Una línea independiente de desarrollo de los modelos exponenciales con dispersión tuvo lugar en el estudio de los procesos estocásticos de familias exponenciales [20]. Sin embargo, el estudio más sistemático de las propiedades matemáticas de los modelos exponenciales con dispersión fue realizado en los trabajos de Jørgensen de 1986 y 1987 [10, 11].

Los modelos Tweedie constituyen una clase muy importante de modelos exponenciales con dispersión cuya función varianza es una potencia del valor medio. Los mismos se caracterizan por ser cerrados bajo transformaciones de escala y aparecen como distribución límite de los modelos exponenciales con dispersión cuya función varianza tenga el comportamiento asintótico de una potencia del valor medio. Más aún bajo ciertas condiciones pudo demostrarse la convergencia a un modelo Tweedie particular, la distribución gamma. La teoría de funciones de variación regular ha sido una herramienta analítica esencial para el estudio de estos dominios de atracción cuando el parámetro medio se acerca a cero o infinito pero el parámetro de dispersión es constante o asintóticamente constante. De ahí que a este tipo de convergencia se la denomine convergencia de tipo variación regular. Valiéndose de estos recursos Jørgensen, Martínez y Tsao [17] desarrollaron un importante teorema que permite demostrar la convergencia gamma de ciertos modelos exponenciales con dispersión bajo condiciones más débiles que las requeridas en relación al comportamiento asintótico de las funciones varianza.

Con la mirada puesta en la búsqueda de un marco de modelización multivariado vía una versión multivariada de los modelos lineales generalizados de Nelder y Wedderburn, Jørgensen y Martínez [16, 13] desarrollaron una metodología unificada de construcción de modelos exponenciales con dispersión multivariados con marginales de forma conocida y estructura de correlación completamente flexible. Los trabajos sobre convergencia de modelos exponenciales con dispersión univariados "Asymptotic behaviour of the variance function" desarrollado por Jørgensen, Martínez y Tsao [17] y "Domains of attractions to Tweedie distributions" debido a Jørgensen, Martínez y Vinogradov [18], permitieron a Jørgensen y Martínez conjeturar que los resultados hallados se sostendrían también para los modelos multivariados por ellos construidos. La validez de estos resultados es muy importante porque permitiría recurrir a los modelos Tweedie multivariados en la práctica de análisis de datos ampliando la familia de distribuciones paramétricas abarcadas por los modelos lineales generalizados multivariados derivados de la familia exponencial natural. Precisamente el problema específico de extender al espacio bidimensional el resultado de convergencia de tipo variación regular de modelos exponenciales con dispersión univariados a modelos gamma demostrado por Jørgensen, Martínez y Tsao [17] fue sugerido por el propio J. R. Martínez y formalizado por mi Directora Lila Ricci.

La propuesta de este trabajo es, de este modo, comprobar la convergencia de tipo variación regular de modelos exponenciales con dispersión bivariados bajo ciertas condiciones, a un modelo Tweedie bivariado y más aún a un modelo gamma, como extensión del teorema desarrollado por Jørgensen, Martínez y Tsao para el caso univariado.

Se comienza definiendo, en el Capítulo 2, los modelos exponenciales con dispersión univariados; en el Capítulo 3 se presentan los principales resultados sobre convergencia de tales modelos y para ello se introduce la noción de funciones de variación regular; en el Capítulo 4 se describe la construcción de los modelos multivariados; en el Capítulo 5 se extienden las definiciones sobre variación regular de funciones y los principales teoremas relacionados con la teoría tauberiana para finalmente poder en el Capítulo 6 demostrar las propiedades asintóticas de ciertos modelos exponenciales con dispersión, principal resultado de esta tesis.

2 Modelos exponenciales con dispersión univariados

Si bien por décadas ha sido extensivo el uso de la distribución de probabilidad normal en el análisis estadístico de datos, la experiencia con datos reales muestra que en muchos casos no es apropiada su aplicación. En 1972 Nelder y Wedderburn [26] unificaron bajo un mismo enfoque una variedad de distribuciones de probabilidad incluyendo la normal como caso particular. Dicho enfoque abarca tanto variables discretas como continuas englobadas en la que denominaron familia exponencial natural e introduce la clase de los modelos lineales generalizados. Estos modelos pueden ser analizados por un método general y simple, denominado análisis de la *deviance*, el cual generaliza el tradicional método de análisis de la varianza para datos normales e incorpora los métodos disponibles para modelos loglineales y regresión logística. En 1987 Jørgensen [12] amplía esta clase de modelos a una más abarcativa denominada modelos con dispersión cubriendo un rango mucho mayor de distribuciones de probabilidad. Estos modelos quedan caracterizados por el parámetro canónico correspondiente a la familia exponencial natural asociada y por un parámetro adicional denominado parámetro de dispersión. Se identifican dos subclases principales llamadas modelos exponenciales con dispersión y modelos propios con dispersión. Los primeros formalizan las distribuciones de la componente aleatoria de los modelos propuestos por Nelder y Wedderburn mientras que los segundos incluyen otras distribuciones útiles como la distribución von Mises para datos direccionales y la *simplex* para datos composicionales. En vista de la aplicación de estas distribuciones de probabilidad como distribuciones del error aleatorio de los modelos lineales generalizados, se orienta el interés hacia la subclase de los modelos exponenciales con dispersión. Jørgensen, con el objeto de captar particularidades de distribuciones discretas y de distribuciones continuas, presenta dos formas de representación de los mismos: la aditiva y la reproductiva. Antes de definirlas se revisa brevemente la definición de la familia exponencial natural. Luego se presentan los modelos exponenciales con dispersión y una clase particular de ellos denominada modelos Tweedie.

2.1 Familia exponencial natural

Definición 2.1. Dada una medida σ-finita ν sobre $\mathbb{R}$, se denomina *función acumulante* κ a la función $\kappa : \Theta \to \mathbb{R}$ definida como

$$\kappa(\theta) = \log \int_{\mathbb{R}} e^{z\theta} \nu(dz). \tag{2.1}$$

Su *dominio* es

$$\Theta = \left\{ \theta \in \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}} e^{z\theta} \nu(dz) < \infty \right\}.$$

Se hace necesario poner una restricción al dominio Θ, la cual consiste en que tenga más de un elemento. Si esto no sucediera, se dirá que el dominio es *degenerado*. Puede probarse, además, que Θ es un intervalo [12].

Sea P_θ la distribución de una variable aleatoria Z definida para conjuntos medibles A como:

$$P_\theta \left(Z \in A \right) = \int_A \exp \left\{ z\theta - \kappa(\theta) \right\} \nu(dz) \tag{2.2}$$

y sea la familia de distribuciones

$$\mathcal{P} = \left\{ P_\theta : \theta \in \Theta \right\}.$$

Se está ahora en condiciones de dar la definición de familia exponencial natural.

Definición 2.2. La familia de distribuciones $\mathcal{P}$ definida por (2.2) se denomina *familia exponencial natural* si satisface las siguientes condiciones:

1. las distribuciones de $\mathcal{P}$ no son degeneradas,
2. el intervalo Θ no es degenerado.

El parámetro θ permite individualizar a cada miembro de la familia, por lo que se lo denomina *parámetro canónico* y el conjunto Θ se denomina *dominio del parámetro canónico*.

Llamando $c(z)$ a la derivada de Radon-Nikodym de ν con respecto a la medida dominante (de Lebesgue o de conteo), puede escribirse

$$\nu(dz) = c(z)\, dz,$$

entonces la densidad de una variable aleatoria con distribución P_θ es

$$p(z, \theta) = c(z) \exp \left\{ z\theta - \kappa(\theta) \right\}. \tag{2.3}$$

Si la distribución de Z pertenece a una familia exponencial natural, la relación entre su función generadora de momentos, en adelante FGM, y su función acumulante (2.1) es la siguiente:

$$\begin{aligned} M(s;\theta) &= E\left(e^{Zs}\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{zs} e^{z\theta - \kappa(\theta)} \nu(dz) \\ &= e^{-\kappa(\theta)} \int_{\mathbb{R}} e^{z(\theta+s)} \nu(dz) \\ &= e^{-\kappa(\theta)} \exp\left(\log \int_{\mathbb{R}} e^{z(\theta+s)} \nu(dz) \right) \\ &= e^{-\kappa(\theta)} e^{\kappa(\theta+s)} \\ &= e^{\kappa(\theta+s) - \kappa(\theta)}, \end{aligned}$$

para $\theta + s \in \Theta$.

De este modo la esperanza de una variable aleatoria Z perteneciente a $\mathcal{P}$ resulta

$$\begin{aligned} E(Z) &= \int_{\mathbb{R}} z dP_\theta \\ &= \int_{\mathbb{R}} z e^{z\theta - \kappa(\theta)} \nu(dz) \\ &= \frac{d}{ds}\left(e^{\kappa(\theta+s)-\kappa(\theta)}\right)|_{s=0} \\ &= \kappa'(\theta) = \mu. \end{aligned}$$

Esta importante relación permite establecer la relación entre el parámetro canónico θ y el parámetro de posición usual μ y se la denomina *transformación del valor medio.* Se utiliza la siguiente notación para explicitar esta relación:

$$\tau(\theta) = \kappa'(\theta) = \mu, \ \theta \in int(\Theta). \tag{2.4}$$

Así el parámetro μ toma valores en el conjunto $\Omega = \tau(int(\Theta))$ llamado *dominio de la media.*

Siguiendo un procedimiento análogo, se puede deducir que la varianza de una variable aleatoria Z perteneciente a $\mathcal{P}$ está vinculada con θ por la siguiente expresión:

$$Var(Z) = \kappa''(\theta) = \tau'(\theta). \tag{2.5}$$

Por tratarse de distribuciones no degeneradas la varianza es siempre positiva. De esta propiedad se desprende que $\tau(\theta)$ es una función estrictamente creciente, es decir, no hay ambigüedades al pasar de una parametrización a la otra mediante la expresión (2.4).

La relación inversa está dada por la función

$$\tau^{-1} : \Omega \to int(\Theta).$$

A partir de las expresiones (2.4) y (2.5) puede establecerse la siguiente relación entre la media y la varianza de una familia exponencial natural:

$$Var(Z) = \kappa''(\theta) = \tau'(\tau^{-1}(\mu)),$$

lo cual motiva la siguiente definición.

Definición 2.3. Se denomina *función varianza* de una familia exponencial natural a la función $V : \Omega \to \mathbb{R}_+$ dada por

$$V(\mu) = \tau'(\tau^{-1}(\mu)), \quad \mu \in \Omega.$$

Nótese que la función varianza es común a todos los miembros de la familia. El siguiente teorema (demostrado por Jørgensen [12]) enuncia esta propiedad fundamental de la función varianza.

Teorema 2.4 (Unicidad de la función varianza). *La función varianza V con dominio Ω caracteriza a $\mathcal{P}$ entre todas las familias exponenciales naturales.*

La caracterización de una familia de distribuciones mediante su función varianza permite visualizar, a partir de una expresión muy simple, las principales propiedades de ese conjunto de distribuciones y será utilizada a lo largo de este trabajo.

Se muestra a continuación un ejemplo acerca de cómo obtener una familia exponencial natural a partir de una medida σ-finita , su transformación del valor medio y función varianza.

Ejemplo. Sea la función acumulante generada por la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}_+$,

$$\kappa(\theta) = \log \int_0^\infty e^{z\theta} dz = -\log(-\theta)$$

para $\theta < 0$, por lo que su dominio $\Theta = (-\infty, 0)$ y de acuerdo a (2.3), la distribución generada tiene densidad

$$p(z, \theta) = e^{z\theta - \kappa(\theta)} = e^{z\theta + \log(-\theta)} = -\theta e^{z\theta},$$

que puede reconocerse como la densidad de la distribución exponencial con $c(z) = 1$. La familia de distribuciones exponenciales, donde $\theta \in \Theta$, es luego una familia exponencial natural generada por la medida de Lebesgue.

La transformación del valor medio es

$$\tau(\theta) = \kappa'(\theta) = (-\log(-\theta))' = -\frac{1}{\theta}$$

y su derivada $\tau'(\theta) = \frac{1}{\theta^2}$ conduce a que la función varianza de la familia exponencial natural sea

$$V(\mu) = \tau'(\tau^{-1}(\mu)) = \tau'(-\frac{1}{\mu}) = \mu^2$$

para $\mu \in \Omega = \tau(int(\Theta)) = \tau\{(-\infty, 0)\} = \mathbb{R}_+$.

2.2 Modelo exponencial con dispersión

Como se ha visto, las familias exponenciales naturales tienen un único parámetro θ que representa una medida de posición. Esto constituye una limitación ya que los modelos basados en un sólo parámetro son muy rigurosos y difíciles de ajustar a un conjunto de datos. Se hace necesario contar con otro parámetro que tome en cuenta la dispersión de los mismos, por lo que se introduce ahora un segundo parámetro a las familias exponenciales naturales. Se estudian a continuación los modelos exponenciales con dispersión resultantes de considerar ambos parámetros de acuerdo a las dos formas de su representación que Jørgensen desarrolla.

2.2.1 Formas aditiva y reproductiva

Definición 2.5. Dada la familia exponencial natural (2.3), para la que $\tau(\theta) = \kappa'(\theta)$ es la transformación del valor medio y $\Omega = \tau(int\,(\Theta))$ el dominio medio, se define el *conjunto índice* Λ como el conjunto de números reales positivos λ tales que

$$\lambda\kappa(\theta) = \log \int_{\mathbb{R}} e^{z\theta}\nu_\lambda(dz)$$

para alguna medida ν_λ. Obviamente Λ contiene el valor $\lambda = 1$. La familia exponencial natural generada por ν_λ es entonces

$$exp\,\{z\theta - \lambda\kappa(\theta)\}\,\nu_\lambda(dz) \tag{2.6}$$

para $\theta \in \Theta$. La distribución (2.6) se simboliza $ED^*(\theta, \lambda)$.

Definición 2.6. La familia de distribuciones de la variable aleatoria Z para $(\theta, \lambda) \in \Theta \times \Lambda$ se denomina *modelo exponencial con dispersión aditivo* generado por ν. La correspondiente familia de distribuciones de la variable aleatoria $Y = Z/\lambda$ se denomina *modelo exponencial con dispersión reproductivo* generado por ν. La notación que se utiliza es $Y \sim ED(\mu, \sigma^2)$, donde $\mu = \tau(\theta)$ y $\sigma^2 = 1/\lambda$.

El parámetro θ es el *parámetro canónico* y λ el *parámetro índice*. El parámetro μ se denomina *media* o *valor medio* y $\sigma^2 = 1/\lambda$ se denomina *parámetro de dispersión*. Nótese que $ED^*(\Theta, \lambda)$ denota la familia exponencial natural (2.6) para λ fijo.

La transformación $Y \to Z = Y/\sigma^2$ se llama *transformación de escala* o bien *transformación dual*, porque proporciona una dualidad entre los casos reproductivo y aditivo pudiendo en gran medida desarrollarse ambas representaciones del modelo en paralelo. Si se aplica la inversa de esta transformación a (2.6), se obtiene la siguiente representación de la distribución $ED(\mu, \sigma^2)$:

$$exp\,[\lambda\,\{y\theta - \kappa(\theta)\}]\,\bar{\nu}_\lambda(dy), \tag{2.7}$$

donde $\bar{\nu}_\lambda$ denota ν_λ transformada por la misma transformación. Nótese que (2.6) y (2.7) son ambas familias exponenciales naturales para λ conocido.

Es útil resumir las formas reproductiva y aditiva del modelo exponencial con dispersión de la siguiente forma. Si $Y = Z/\lambda$, $\mu = \tau(\theta)$ y $\sigma^2 = 1/\lambda$, luego

$$Y \sim ED(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow Z \sim ED^*(\theta, \lambda).$$

Función generadora de acumulantes

Teniendo en cuenta que los miembros de una familia exponencial natural tienen función generadora de acumulantes, en adelante FGA, de la forma

$$\kappa_\theta(s) = \kappa(\theta + s) - \kappa(\theta)$$

para $\theta + s \in \Theta$ y dado que un modelo aditivo corresponde a una función acumulante $\lambda\kappa$, la distribución $ED^*(\theta, \lambda)$ tiene la siguiente FGA:

$$K^*(s; \theta, \lambda) = \lambda \{\kappa(\theta + s) - \kappa(\theta)\} \tag{2.8}$$

para todo $\theta + s \in \Theta$. Luego, la FGA de $Y = Z/\lambda \sim ED(\mu, \sigma^2)$ es

$$K(s; \theta, \lambda) = \lambda \{\kappa(\theta + s/\lambda) - \kappa(\theta)\}$$

para todo $\theta + s \in \lambda(\Theta)$.

Densidades

En el caso donde las medidas ν_λ en (2.6) tengan densidades $c^*(z; \lambda)$ con respecto a alguna medida fija (en general la medida de Lebesgue o una medida de conteo), se obtiene la siguiente densidad para el modelo aditivo $ED^*(\theta, \lambda)$:

$$p^*(z; \theta, \lambda) = c^*(z; \lambda) exp \{z\theta - \lambda\kappa(\theta)\}, \ z \in \mathbb{R}.$$

De manera similar, si las medidas $\bar{\nu}_\lambda$ tienen densidades $c(y; \lambda)$ con respecto a una medida fija, el modelo reproductivo $ED(\mu, \sigma^2)$ tiene densidad

$$p(y; \theta, \lambda) = c(y; \lambda) exp [\lambda \{y\theta - \kappa(\theta)\}], \ y \in \mathbb{R}.$$

Los modelos exponenciales con dispersión tienen generalmente funciones de densidad que no pueden ser escritas en forma cerrada. Sin embargo, sus funciones generadoras de momentos son simples. De ahí que las funciones generadoras de momentos y las funciones generadoras de acumulantes cobran particular relevancia para esta clase de modelos. Más aún, el estudio del comportamiento asintótico de estos modelos suele basarse en la convergencia de las respectivas funciones generadoras de acumulantes aprovechando los resultados del teorema tauberiano que relaciona la variación regular de una medida con el comportamiento asintótico de su función generadora de momentos. Este tema se verá con mayor detalle en el Capítulo 3.

Parametrizaciones

Extendiendo la terminología empleada para las familias exponenciales naturales, se presentan las siguientes definiciones.

Definición 2.7. Se define la *función del valor medio* $\tau : int\,(\Theta) \to \mathbb{R}$ y el *dominio de la media* Ω por

$$\tau(\theta) = \kappa'(\theta) \text{ y } \Omega = \tau(int\,(\Theta)),$$

respectivamente.

Definición 2.8. La *función varianza unitaria* $V : \Omega \to \mathbb{R}_+$ se define como:

$$V(\mu) = \tau' \left\{\tau^{-1}(\mu)\right\}.$$

Mediante el cálculo de las derivadas primera y segunda de $K^*(s;\theta,\lambda)$ con respecto a s y fijando s en cero, se encuentra que la media y la varianza en el caso aditivo resultan:

$$E(Z) = \lambda\mu \text{ y } Var(Z) = \lambda V(\mu).$$

donde $\mu = \tau(\theta) \in \Omega$. De manera similar, se deduce que en el caso reproductivo

$$E(Y) = \mu \text{ y } Var(Y) = \sigma^2 V(\mu).$$

Es conveniente utilizar la notación $\mu = \tau(\theta)$ en ambos casos, aditivo y reproductivo, de manera tal que la media de la distribución sea μ en el caso reproductivo y $\lambda\mu$ en el caso aditivo.

En los modelos exponenciales con dispersión la función varianza describe cómo la varianza se comporta como función del valor medio y su forma proporciona un útil resumen del grado y tipo de no normalidad. Dado que el modelo $ED(\mu,\sigma^2)$ con σ^2 fijo constituye una familia exponencial natural con función varianza $\sigma^2 V(\mu)$, distintos valores de σ^2 conducen a funciones varianza diferentes, $\sigma^2 V(\mu)$ y, por el teorema de unicidad de las funciones varianza (Teorema 2.4), los parámetros (μ,σ^2) proporcionan una parametrización de la familia en el caso reproductivo.

Es importante destacar que la función varianza V caracteriza a la familia en el sentido que dada una función varianza queda determinada la correspondiente familia exponencial natural y viceversa. Es más, el teorema de convergencia de Mora [25] muestra que, dada una sucesión de funciones varianza, la misma converge a la función varianza de la distribución a la que converge la correspondiente secuencia de familias exponenciales naturales.

Cabe aclarar, además, que la palabra *unitaria* en el término *función varianza unitaria* se utiliza especialmente para señalar que corresponde a la forma estandarizada de la función varianza $\sigma^2 V(\mu)$ con $\sigma^2 = 1$.

Retomando el ejemplo presentado en la sección anterior, se desea mostrar que la distribución gamma es el modelo exponencial con dispersión generado por la distribución exponencial.

Ejemplo. Como ya se mostró en el ejemplo anterior,

$$\kappa(\theta) = -\log(-\theta)$$

es la función acumulante de la familia exponencial natural formada por las distribuciones exponenciales. Para generar el modelo exponencial con dispersión correspondiente, se considera la familia generada por $\lambda\kappa$ para $\lambda \in \Lambda$.

El cálculo de la derivada primera de la FGA(2.8) y, fijando s en cero, conduce a la esperanza de la variable:

$$
\begin{aligned}
E(Z) &= \frac{d}{ds}K^{*}(s;\theta,\lambda)|_{s=0} \\
&= \lambda\left\{\kappa(\theta+s)-\kappa(\theta)\right\}|_{s=0} \\
&= \frac{\lambda}{-\theta-s}|_{s=0} \\
&= -\frac{\lambda}{\theta}
\end{aligned}
$$

para $\theta < 0$ y $\lambda \in \Lambda$. Y como ya se mostró que $\mu = (-\theta)^{-1}$, se puede expresar también como

$$E(Z) = \lambda\mu.$$

La derivada segunda de $K^{*}(s;\theta,\lambda)$ permite hallar la varianza de la variable:

$$
\begin{aligned}
Var(Z) &= \frac{d^2}{ds}K^{*}(s;\theta,\lambda)|_{s=0} \\
&= \frac{\lambda}{(-\theta-s)^2}|_{s=0} \\
&= \frac{\lambda}{\theta^2},
\end{aligned}
$$

o bien

$$Var(Z) = \lambda\mu^2.$$

Se ve que la clase de las distribuciones gamma es un modelo exponencial con dispersión aditivo con función varianza unitaria

$$V(\mu) = \mu^2.$$

Definiendo $\sigma^2 = \lambda^{-1}$, se puede expresar también bajo la forma reproductiva para $Y = \sigma^2 Z$, con dominio medio $\Omega = \tau\left(int\left(\Theta\right)\right) = \mathbb{R}_{+}$ y conjunto índice $\Lambda^{-1} = \mathbb{R}_{+}$.

2.2.2 Modelos Tweedie

Una clase relevante de modelos exponenciales con dispersión es la de los denominados modelos Tweedie. Su importancia radica en que son los únicos modelos exponenciales con dispersión cerrados con respecto a transformaciones de escala y a ellos convergen un amplio rango de tales modelos, lo que se puede considerar como una generalización del Teorema Central del Límite.

Definición 2.9. Los modelos Tweedie son aquellos modelos exponenciales con dispersión cuya función varianza unitaria tiene la siguiente forma:

$$V_p(\mu) = \mu^p,\ \mu \in \Omega_p. \tag{2.9}$$

donde $p \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$.

La forma reproductiva del modelo correspondiente a (2.9), que se denota como $Y \sim Tw_p(\mu, \sigma^2)$, tiene media μ y varianza

$$Var(Y) = \sigma^2 \mu^p, \ \mu \in \Omega_p.$$

La clase de los modelos Tweedie incluye importantes distribuciones de probabilidad comúnmente asociadas con los modelos lineales generalizados, a saber: la distribución normal ($p = 0$), Poisson ($p = 1$) y gamma ($p = 2$). La relación entre la nueva notación $Tw_p(\mu, \sigma^2)$ y la notación usual para estas distribuciones es la siguiente:

$$Tw_0(\mu, \sigma^2) = N(\mu, \sigma^2),$$

$$Tw_1(\mu, \sigma^2) = \sigma^2 P_0(\mu/\sigma^2),$$
$$Tw_2(\mu, \sigma^2) = Ga(\mu, \sigma^2).$$

La fórmula para la distribución Poisson se deduce considerando una variable $Z \sim P_0(\xi)$ con media $\xi = e^\theta$ donde $\lambda > 0$ y $\theta \in \mathbb{R}$, si bien estos parámetros no son identificables, y utilizando la transformación de escala, por la cual la forma reproductiva de la distribución de Poisson es $\sigma^2 P_0(\mu/\sigma^2)$.

Las familias normal y gamma son cerradas con respecto a transformaciones de escala,

$$cN(\mu, \sigma^2) = N(c\mu, c^2\sigma^2),$$

$$cGa(\mu, \sigma^2) = Ga(c\mu, \sigma^2).$$

También lo es la familia Poisson en su forma reproductiva,

$$cTw_1(\mu, \sigma^2) = Tw_1(c\mu, c\sigma^2).$$

El próximo teorema muestra que esta propiedad de invariancia ante cambios de escala caracteriza a los modelos Tweedie.

Teorema 2.10. *Sea $ED(\mu, \sigma^2)$ un modelo exponencial con dispersión reproductivo tal que $1 \in \Omega$ y $V(1) = 1$. Si el modelo es cerrado con respecto a transformaciones de escala, existe una función $f : \mathbb{R}_+ \times \Lambda^{-1} \to \Lambda^{-1}$ para la cual*

$$cED(\mu, \sigma^2) = ED\left\{c\mu, f(c, \sigma^2)\right\} \ \forall c > 0,$$

luego:
1. *$ED(\mu, \sigma^2)$ es un modelo Tweedie para algún $p \in \mathbb{R}$,*
2. *$f(c, \sigma^2) = c^{2-p}\sigma^2$,*
3. *el dominio de la media es $\Omega = \mathbb{R}$ para $p = 0$ y $\Omega = \mathbb{R}_+$ para $p \neq 0$,*
4. *el modelo es infinitamente divisible.*

Al ser los modelos Tweedie los únicos modelos exponenciales con dispersión cerrados ante cambios de escala, son los candidatos naturales para modelar cantidades positivas continuas con una escala de medición arbitraria. Las distribuciones con $1 < p < 2$ son especialmente atractivas para modelar datos con distribución continua para valores positivos pero donde el valor cero ocurre con probabilidad positiva. Este tipo de datos es frecuente en diversos campos habiéndose utilizado en estudios relacionados con predicciones pesqueras [2], lluvias [4], contaminación de aguas [30] y para la toma de decisiones económicas [29]. Otra aplicación interesante es la de Dunn y Smyth [5], quienes presentan un análisis de datos detallado para un caso donde $p > 2$ demostrando la utilidad del uso de estos modelos para el análisis de tiempos de supervivencia.

Un inconveniente que presentan y que limitó su utilización durante años es que en general sus densidades no pueden escribirse en forma cerrada sino que deben ser representadas usando series. Sin embargo, Dunn y Smyth [5] en el 2005 proponen un método numérico para manejar tales series que abarca los casos con $1 < p < 2$ y $p > 2$, como así también su implementación en lenguaje R.

3 Teoremas de convergencia univariados

El tipo de convergencia más conocido en Estadística es la convergencia de tipo *Teorema Central del Límite* que se satisface cuando el parámetro de dispersión se acerca a cero. La convergencia cuando el parámetro medio se acerca a cero o infinito, pero el parámetro de dispersión es constante o asintóticamente constante se dice que es de tipo *variación regular* y es llamada también tipo *Tauber* debido a su interpretación en términos de la teoría tauberiana.

A continuación se enuncian algunos teoremas de convergencia Tweedie, luego se presentan definiciones de funciones y medidas de variación regular y finalmente se enuncian teoremas que describen la convergencia de tipo *variación regular* de algunos modelos exponenciales particulares, en los cuales se basará esta tesis.

3.1 Convergencia Tweedie

Para poder enunciar un resultado de convergencia general para los modelos exponenciales con dispersión, donde los modelos Tweedie aparecen como distribuciones límite, se necesita presentar la definición de regularidad de funciones varianza.

Definición 3.1. Sea $ED(\mu, \sigma^2)$ un modelo exponencial con dispersión con función varianza unitaria V, dominio medio Ω y conjunto índice Λ. La función varianza unitaria V se dice *regular de orden* p en cero o en infinito si

$$V(\mu) \sim k\mu^p,$$

donde el símbolo $\sim$ significa que ${}^{V(\mu)}/_{\mu^p}$ tiende a una constante k cuando μ tiende a cero o infinito, respectivamente, para $p \in \mathbb{R}$ y $k > 0$.

Teorema 3.2 (Jørgensen, Martínez y Tsao). *Supóngase que la función varianza unitaria V es regular de orden p, $p \notin (0, 1)$, en cero o infinito. Luego para cualquier $\mu > 0, \sigma^2 > 0$*

$$c^{-1}ED(c\mu, \sigma^2 c^{2-p}) \xrightarrow{d} Tw_p(\mu, k\sigma^2)$$

cuando $c \to 0^+$ ó $c \to \infty$, respectivamente, donde la convergencia es a través de los valores de c tal que $c\mu \in \Omega$ y $c^{p-2}/\sigma^2 \in \Lambda$. El modelo debe ser infinitamente divisible si $c^{2-p} \to \infty$.

Es de notar que dado que la convergencia Tweedie de este teorema cuando $c \to 0^+$ o cuando $c \to \infty$, implica la convergencia de modelos exponenciales con dispersión para valores medios pequeños o tendiendo a infinito pero con parámetro de dispersión constante, es un ejemplo de convergencia de tipo variación regular.

El siguiente teorema sobre convergencia a la distribución de probabilidad gamma puede considerarse un caso particular del teorema anterior.

Teorema 3.3. *Sea $ED(\mu, \sigma^2)$ un modelo reproductivo con función varianza unitaria V y dominio medio $\Omega = \mathbb{R}_+$, satisfaciendo la relación asintótica*

$$V(\mu) \sim k\mu^2$$

para $k > 0$, cuando μ tiende a cero o a infinito. Luego

$$c^{-1}ED(c\mu, \sigma^2) \xrightarrow{d} Ga(\mu, k\sigma^2),$$

para c tendiendo a cero o a infinito, respectivamente.

La convergencia gamma de este último teorema se puede interpretar de la siguiente manera. Una forma de considerar modelos exponenciales con dispersión cuyos valores medios sean pequeños es multiplicar el valor medio de la distribución por un factor que tienda a cero y dejar constante el parámetro de dispersión. Este cambio en el parámetro valor medio se compensa dividiendo el modelo por ese factor que tiende a cero. Nielsen [27] en su trabajo de tesis aclara que intuitivamente uno puede pensar que la distribución de ese modelo con valor medio pequeño es asintóticamente igual al factor que tiende a cero multiplicado por un modelo gamma con el valor medio de partida. Es decir la convergencia gamma de tipo variación regular de este teorema puede interpretarse como que la distribución $ED(c\mu, \sigma^2)$ es asintóticamente igual a la distribución $cGa(\mu, k\sigma^2)$ para valores pequeños de c.

Antes de presentar algunos resultados sobre el comportamiento asintótico de estos modelos relacionados con la teoría tauberiana, cabe destacar que un importante contribuyente a esta teoría fue el matemático suizo Jovan Karamata, quien en 1930 desarrolló la teoría de variación regular de funciones como una manera de extender la clase de funciones cuyo comportamiento asintótico cerca de un punto es el de una función potencia, a funciones con comportamiento asintótico de una función potencia multiplicada por un factor que *varía más lentamente* que dicha función. Su aporte ha sido importante en el campo de la Teoría Estadística al establecer que las funciones de variación regular tienen un comportamiento asintótico similar al de sus transformadas de Laplace y ello es sumamente útil cuando las funciones de densidad no pueden obtenerse explícitamente pero sí sus transformadas de Laplace. Esto justamente ocurre con los modelos exponenciales con dispersión.

A continuación se presentan definiciones sobre variación regular de funciones siguiendo a Feller [6], para dar lugar luego a los teoremas de convergencia.

3.2 Funciones y medidas de variación regular

Definición 3.4. Una función medible $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ es de *variación regular en infinito con exponente o índice* $\gamma \in \mathbb{R}$, si para todo $x > 0$ y $t > 0$,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{u(tx)}{u(t)} = x^\gamma$$

existe y es finito.

Se usará la notación $u \in VR\,(\gamma)\,_\infty$.

La función $u(x)$ será de *variación regular en cero con exponente* γ si para todo $x > 0$, $u\,({}^1\!/_x)$ es de variación regular en infinito con exponente $-\gamma$.

Se usará la notación $u \in VR\,(\gamma)\,_{(0)}$ para el caso de variación regular en cero con exponente γ .

Definición 3.5. Una función $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ es de *variación lenta en infinito* si, para todo $x > 0$ y $t > 0$,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{L(tx)}{L(t)} = 1.$$

La función $L(x)$ será de *variación lenta en cero* si $L(1/x)$ es de variación lenta en infinito.

Se usará la notación $L \in VL_\infty$ y $L \in VL_0$ para variación lenta en infinito y en cero respectivamente.

Observación. Si una función $u \in VR\,(\gamma)\,_{\infty(0)}$, resulta que ${}^{u(x)}\!/_{x^\gamma} \in VL_{\infty(0)}$. Tomando $L(x) = {}^{u(x)}\!/_{x^\gamma}$, se puede apreciar que siempre es posible representar una función de variación regular con exponente γ como $x^\gamma L(x)$.

Ahora se extenderá el concepto de variación regular a medidas.

Definición 3.6. Una medida ν sobre $\mathbf{R}_+$ es de *variación regular con exponente* γ si la función de distribución impropia

$$\bar{\nu}(x) = \nu\,\{(0, x]\}$$

varía regularmente con exponente γ en el extremo apropiado de $\mathbb{R}_+$.

En particular, si ν tiene densidad con respecto a la medida de Lebesgue de la forma

$$\nu(dx) = g(x)x^{\gamma-1}, \tag{3.1}$$

donde g es analítica en cero y $g(0) \neq 0$, entonces ν es de variación regular en cero con exponente γ.

Un resultado importante sobre funciones de variación regular se presenta en el siguiente teorema.

Teorema 3.7 (Teorema de representación de Karamata). *i)Una función $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ es de variación lenta si y sólo si L puede ser representada como*

$$L(x) = d(x) \exp\left\{\int_1^x \frac{a(t)}{t} dt\right\}, x > 0,$$

donde $d : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ y

$$\lim_{x\to\infty} d(x) = d_0, \ 0 < d_0 < \infty \tag{3.2}$$

$$\lim_{t\to\infty} a(t) = 0. \tag{3.3}$$

ii) Una función $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ es de variación regular con exponente γ si y sólo si u tiene la representación

$$u(x) = d(x) \exp\left\{\int_1^x \frac{\gamma(t)}{t} dt\right\}, x > 0,$$

donde $d(.)$ satisface (3.2) y

$$\lim_{t\to\infty} \gamma(t) = \gamma. \tag{3.4}$$

Con este resultado J. Karamata muestra que se puede obtener una función de variación lenta dado cualquier par de funciones que cumplan las condiciones (3.2) y (3.3) y una de variación regular, con un par de funciones que cumplan (3.2) y (3.4). La demostración del teorema puede encontrarse en un trabajo realizado por L. de Haan [3] en 1975 o también en un libro más reciente cuya autoría es de S. Resnick [31].

3.3 Teoremas tauberianos

A continuación se enuncia el Teorema tauberiano de Karamata (véase en [6]) que relaciona una medida de variación regular con el comportamiento asintótico de su FGM para dar lugar luego al teorema principal de este capítulo.

Teorema 3.8 (Teorema tauberiano de Karamata). *Sea ν una medida sobre $\mathbb{R}_+$ tal que su transformada de Laplace*

$$w(t) = \int_0^\infty e^{-tx} \nu(dx)$$

existe para $t > 0$. Sea L una función que varía lentamente en infinito (cero) y sea $0 \le \gamma < \infty$. Luego

$$\bar{\nu}(t) \sim \frac{1}{\Gamma(\gamma+1)} t^\gamma L(t) \Longleftrightarrow w\left(\frac{1}{t}\right) \sim t^\gamma L(t)$$

cuando $t \to \infty(0)$.

Se puede observar que, según lo expresado en la sección anterior, $\bar{\nu}$ es de variación regular en infinito (cero) con exponente γ si y sólo si su transformada de Laplace es de variación regular en cero (infinito) con exponente $-\gamma$.

Si se considera una medida ν de la forma (3.1), donde g es analítica en cero y $g(0) \neq 0$, el Teorema tauberiano de Karamata implica que la función acumulante de la familia exponencial natural generada por ν tiene la forma

$$e^{\kappa(\theta)} = (-\theta)^{-\gamma} L(-\theta),$$

donde L varía lentamente en infinito.

El próximo resultado, debido a Jørgensen, Martínez y Tsao [17] muestra que una función acumulante de esa forma conduce a modelos gamma bajo convergencia de tipo variación regular, es decir que concierne al comportamiento límite de distribuciones para las que el parámetro de dispersión está fijo y la media tiende a uno de los extremos de su dominio.

Teorema 3.9 (Jørgensen, Martínez y Tsao). *Sea $ED(\mu, \sigma^2)$ generado por la medida ν con soporte $S \subseteq (0, \infty)$. Supóngase que ν varía regularmente en cero o en infinito, de manera que por el Teorema tauberiano de Karamata la función generadora de momentos para ν tiene la forma*

$$M_\nu(\theta) = (-\theta)^{-\gamma} L(-\theta), \ \theta < 0,$$

para algún $\gamma > 0$, donde L es de variación lenta en infinito o cero, respectivamente. Si $l(x) = \log L(x)$ satisface que

$$\lim_{x \to \infty} x l'(x) = 0 \tag{3.5}$$

o

$$\lim_{x \to 0} l'(x) = 0,$$

respectivamente, luego para cualquier $\mu > 0$ y cualquier σ^2 tal que $1/\sigma^2 \in \Lambda$se cumple que

$$c^{-1} ED(c\mu, \sigma^2) \xrightarrow{d} Ga\left(\mu, \sigma^2/\gamma\right)$$

para c tendiendo a cero o infinito, respectivamente.

La importancia de este teorema radica en que permite afirmar la equivalencia asintótica, del tipo variación regular, de ciertos modelos exponenciales con dispersión y la distribución gamma con supuestos más débiles que los relacionados con el comportamiento asintótico de las funciones varianza impuestos por el Teorema 3.3.

Se muestra a continuación un ejemplo de la convergencia tauberiana establecida en el teorema recién presentado.

Ejemplo. Sean los modelos exponenciales con dispersión $ED(\mu, \sigma^2)$ generados por la medida presentada por Letac ([21]) definida como

$$\nu(dy) = \left(e^{2y} - 1\right) dy \ \ y > 0, \tag{3.6}$$

cuya función acumulante es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
\kappa(\theta) &= \log \int_0^\infty e^{y\theta}\nu(dy) \\
&= \log \int_0^\infty e^{y\theta}(e^{2y}-1)dy \\
&= \log \left\{ \lim_{b\to\infty} \left[\frac{e^{y(\theta+2)}}{\theta+2} - \frac{e^{y\theta}}{\theta} \right]_0^b \right\} \\
&= \log \left\{ \lim_{b\to\infty} \left[\left(\frac{e^{b(\theta+2)}}{\theta+2} - \frac{1}{\theta+2} \right) - \left(\frac{e^{b\theta}}{\theta} - \frac{1}{\theta} \right) \right] \right\} \\
&= \log \left[-\frac{1}{\theta+2} + \frac{1}{\theta} \right] \\
&= \log \frac{2}{\theta^2+2\theta}.
\end{aligned}
$$

Para comprobar si ν es de variación regular, se define la función $\bar{\nu}(y) = \nu\{(0,y]\}$:

$$\bar{\nu}(y) = \int_0^y e^{2u} - 1du = \frac{e^{2y}}{2} - y - \frac{1}{2}$$

y se calcula el siguiente límite:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\bar{\nu}(ty)}{\bar{\nu}(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{2ty}-2ty-1}{e^{2t}-2t-1}.$$

La indeterminación se resuelve aplicando la regla de L´Hopital dos veces:

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{\bar{\nu}(ty)}{\bar{\nu}(t)} &= \lim_{t\to 0} \frac{\bar{\nu'}(ty)}{\bar{\nu'}(t)} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{2ye^{2ty}-2y}{2e^{2t}-2} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\bar{\nu''}(ty)}{\bar{\nu''}(t)} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{4y^2e^{2ty}}{4e^{2t}} = \lim_{t\to 0} y^2 e^{2t(y-1)} = y^2.
\end{aligned}
$$

Luego $\bar{\nu} \in VR_0(\gamma = 2)$ y por Definición 3.5, la medida ν también lo es.

El Teorema 3.8 permite afirmar que

$$e^{\kappa(\theta)} = (-\theta)^{-2} L(-\theta), \quad L \in VL_\infty,$$

de manera que

$$\frac{2}{\theta^2+2\theta} = (-\theta)^{-2} L(-\theta),$$

siendo $L(x) = \frac{2x}{x-2}$.

Sea $l(x) = \log L(x)$ tal que:

$$\lim_{x \to \infty} x l'(x) = \lim_{x \to \infty} x \frac{-4}{2x(x-2)} = 0$$

cumpliéndose (3.5). Se cumplen, entonces, las condiciones del Teorema 3.9, de modo que un modelo exponencial con dispersión generado por (3.6) satisface que

$$c^{-1} ED(c\mu, \sigma^2) \xrightarrow{d} Ga\left(\mu, \sigma^2/\gamma\right)$$

cuando $c \to 0$, siendo Ga la distribución de probabilidad gamma.

4 Modelos exponenciales con dispersión multivariados

Hace unos años Jørgensen y Martínez [16, 13] avanzaron en la construcción de modelos exponenciales con dispersión multivariados mediante el desarrollo de un método general para obtener modelos con una estructura de correlaciones flexible y con distribuciones marginales de la misma familia. Estos modelos se construyen en su forma aditiva y reproductiva tal como es en el caso de los modelos con dispersión univariados. La construcción de la forma aditiva del modelo exponencial con dispersión multivariado se basa en un método denominado de convolución extendido, mediante el cual se logra generar el número deseado de parámetros de valores medios y de covarianza. La forma reproductiva del modelo se obtiene aplicando una transformación de escala al modelo aditivo. Estos nuevos modelos son particularmente útiles como distribuciones del error de una forma de modelos lineales generalizados multivariados más abarcativa que la que considera como posibles distribuciones del error las correspondientes a la familia exponencial natural multivariada.

Antes de presentar este método de convolución extendido es necesario precisar algunas definiciones sobre las familias exponenciales naturales y los modelos exponenciales con dispersión multivariados derivados a partir de ellas.

4.1 Familia exponencial natural multivariada

Definición 4.1. Una *familia exponencial natural multivariada* para el vector aleatorio k-dimensional $\mathbf{Z}$ se define por las funciones de densidad de probabilidad

$$p\left(\mathbf{z};\boldsymbol{\theta}\right) = c(\mathbf{z})exp\left[\mathbf{z}^T\boldsymbol{\theta}-\kappa(\boldsymbol{\theta})\right], \ \ \mathbf{z}\in\mathbb{R}^k, \tag{4.1}$$

con respecto a una medida adecuada sobre $\mathbb{R}^k$, para alguna función c, donde el dominio para $\boldsymbol{\theta}$ es el conjunto

$$\Theta = \left\{\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{R}^k : \int_{\mathbb{R}^k} c(\mathbf{z})e^{\mathbf{z}^T\boldsymbol{\theta}}d\mathbf{z} < \infty\right\}.$$

La función κ, como en el caso univariado, se la denomina *función acumulante.*

La distribución correspondiente a (4.1) tiene FGA dada por

$$\kappa_\theta(\mathbf{s}) = \kappa(\boldsymbol{\theta}+\mathbf{s}) - \kappa(\boldsymbol{\theta}) \tag{4.2}$$

para todo $\boldsymbol{\theta}+\mathbf{s}\in\Theta$.

El vector de medias y la matriz de covarianzas de un vector aleatorio $\mathbf{Z}$ distribuido de acuerdo a (4.1) puede obtenerse derivando una y dos veces la función $\kappa(\boldsymbol{\theta})$ con respecto a θ_i $i = 1, ...k$. El vector de medias $\boldsymbol{\mu}$ es

$$\boldsymbol{\mu} = E(\mathbf{Z}) = (\nabla\kappa)^T = (\kappa_{\theta_1}, \kappa_{\theta_2}, ..., \kappa_{\theta_k})^T \tag{4.3}$$

donde κ_{θ_i} denota la derivada parcial de κ con respecto a θ_i, es decir $\kappa_{\theta_i} = \frac{\partial}{\partial\theta_i}\kappa(\boldsymbol{\theta})$. La función $\tau(\boldsymbol{\theta}) = (\nabla\kappa(\boldsymbol{\theta}))^T$ muestra, como en el caso univariado, la relación entre los parámetros canónicos y los valores medios.

La matriz de covarianzas $H\kappa(\boldsymbol{\theta}) = J\tau(\boldsymbol{\theta})$ está dada por la matriz de derivadas segundas parciales, $\kappa_{\theta_i\theta_j}$ $i, j = 1, ..., k$. Debido a que esta matriz es definida positiva y a que$\nabla\kappa$ es un vector de funciones uno a uno, se puede parametrizar (4.1) por el vector de medias (4.3) para $\boldsymbol{\theta} \in \operatorname{int}(\boldsymbol{\Theta})$, dando lugar a la función varianza matricial

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\mu}) = H\kappa\left(\tau^{-1}(\boldsymbol{\mu})\right) = J\tau\left(\tau^{-1}(\boldsymbol{\mu})\right), \tag{4.4}$$

donde se entiende por inversa de la función $\tau : \operatorname{int}(\boldsymbol{\Theta}) \subseteq \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$, la función $\tau^{-1} : \boldsymbol{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ tal que

$$\begin{aligned}
&\left(\tau^{-1} \circ \tau\right)_{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}, \quad \boldsymbol{\theta} \epsilon \operatorname{int}(\boldsymbol{\Theta}) \\
&\left(\tau \circ \tau^{-1}\right)_{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu}, \quad \boldsymbol{\mu} \epsilon \boldsymbol{\Omega} = J(\operatorname{int}(\boldsymbol{\Theta})).
\end{aligned}$$

Dado que $\boldsymbol{\tau}$ tiene k funciones coordenadas τ_i, $i = 1, ...k$, es decir $\mu_i = \tau_i(\boldsymbol{\theta})$, se consideran las funciones inversas que describen a θ_i, $i = 1, ..., k$ como funciones de $\boldsymbol{\mu}$, es decir se consideran las funciones $\theta_i = \delta_i(\boldsymbol{\mu})$, funciones coordenadas de $\boldsymbol{\tau^{-1}}$.

4.2 Derivación del modelo multivariado

El *modelo exponencial con dispersión aditivo multivariado* generado a partir de (4.1) se define por la función de densidad de probabilidad

$$p^*(\mathbf{z}; \boldsymbol{\theta}, \lambda) = c^*(\mathbf{z}; \lambda) exp\left[\mathbf{z}^T\boldsymbol{\theta} - \lambda\kappa(\boldsymbol{\theta})\right], \ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^k \tag{4.5}$$

para alguna función $c^*(\mathbf{z}; \lambda)$, la que corresponde al reemplazar la función acumulante κ por $\lambda\kappa$ en (4.1). Se asume que (4.5) es infinitamente divisible, de manera tal que λ tiene como dominio $\mathbb{R}_+$. La FGA se define, al igual que en el caso univariado, como

$$\lambda\kappa_\theta(\mathbf{s}) = \lambda\left\{\kappa(\boldsymbol{\theta} + \mathbf{s}) - \kappa(\boldsymbol{\theta})\right\}$$

Derivando una y dos veces esta FGA con respecto a cada coordenada de $\mathbf{s}$ se obtiene el vector de medias y la matriz de covarianzas de (4.5) respectivamente, a saber:

$$E(\mathbf{Z}) = \lambda\boldsymbol{\mu}$$

y

$$Cov\,(\mathbf{Z}) = \lambda \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\mu})$$

donde $\boldsymbol{V}$, definida por (4.4), es la denominada función varianza unitaria.

El modelo con k+1 parámetros correspondiente a (4.5) se denota como $ED^*(\boldsymbol{\mu}, \lambda)$. Este modelo satisface la propiedad de convolución:

$$ED^*(\boldsymbol{\mu}, \lambda_1) + ED^*(\boldsymbol{\mu}, \lambda_2) = ED^*(\boldsymbol{\mu}, \lambda_1 + \lambda_2)$$

para $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

El *modelo exponencial con dispersión reproductivo multivariado* generado a partir de (4.1) se define aplicando la transformación de escala $\mathbf{Y} = \mathbf{Z}/\lambda$ a (4.5), obteniendo

$$p(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \lambda) = c(\mathbf{y}; \lambda) exp \left\{ \lambda \left[\mathbf{y}^T \boldsymbol{\theta} - \kappa(\boldsymbol{\theta}) \right] \right\} \text{ para } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k, \tag{4.6}$$

para algún $c(\mathbf{y}; \lambda)$. Un vector aleatorio $\mathbf{Y}$ distribuido de acuerdo a (4.6) tiene media $\boldsymbol{\mu}$ definida por (4.3) y matriz de covarianza

$$Cov(\mathbf{Y}) = \lambda^{-1} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\mu}), \tag{4.7}$$

donde $\lambda^{-1} = \sigma^2$ es el parámetro de dispersión y la forma reproductiva del modelo se denota $ED(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2)$. Los modelos $ED^*(\boldsymbol{\mu}, \lambda)$ y $ED(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2)$ se denominarán *modelos exponenciales con dispersión aditivo y reproductivo ordinarios* respectivamente.

Se puede observar que la matriz de covarianzas (4.7) está gobernada por un único parámetro λ. Con el objeto de obtener una estructura de correlaciones más flexible entre las variables resulta necesario generalizarla a la forma $\boldsymbol{\Sigma} \odot \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\mu})$ incluyendo una matriz $\boldsymbol{\Sigma}$ de manera de contar con $\frac{k(k+1)}{2}$ parámetros. Esta generalización se obtiene mediante la aplicación del método desarrollado por Jørgensen y Martinez en [16] y [13], el cual se presenta a continuación para el caso de modelos exponenciales con dispersión bivariados.

4.3 Modelo exponencial con dispersión bivariado

Se presenta el método de convolución extendido desarrollado por Jørgensen y Martínez para la construcción de los modelos exponenciales con dispersión bivariados con una estructura de covarianzas con el número deseado de parámetros, tres en este caso. El punto de partida es una familia exponencial natural bivariada de la forma (4.1) y la función acumulante $\kappa(\theta_1, \theta_2)$ se considera ahora como una función de las dos coordenadas del vector $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)^T$ con dominio $\boldsymbol{\Theta}$. Sean s_1 y s_2 los argumentos de la FGA

$$(s_1, s_2) \longmapsto \lambda_{12} \kappa_\theta(s_1, s_2) = \lambda_{12} \left\{ \kappa\left(\theta_1 + s_1, \theta_2 + s_2\right) - \kappa\left(\theta_1, \theta_2\right) \right\}, \tag{4.8}$$

donde el parámetro λ_{12} se denomina ahora *peso*. Debido a que se asume divisibilidad infinita, el parámetro *peso* tiene dominio $\mathbb{R}_+$.

El método se basa en la representación estocástica siguiente para el vector aleatorio $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2)^T$,

$$\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ U_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{12} \end{bmatrix}, \tag{4.9}$$

donde los tres vectores del lado derecho se asumen independientes.

Sean las variables U_j distribuidas de acuerdo a un modelo exponencial con dispersión aditivo con media $\lambda_j\mu_j$ y varianza $\lambda_j V(\mu_j)$, es decir $U_j \sim ED^*(\mu, \lambda_j)$, $j = 1, 2$. Se asume además que la distribución conjunta de U_{11} y U_{12} tiene FGA dada por (4.8) y que las distribuciones marginales de U_{11} y U_1 pertenecen a la misma familia $ED^*(\mu_1, \lambda_1)$, de manera similar que las distribuciones marginales de U_{12} y U_2 pertenecen a la misma familia, $ED^*(\mu_2, \lambda_2)$. Se puede pensar a estas familias como correspondientes a los vectores $(U_1, 0)^T$ y $(0, U_2)^T$ respectivamente, de modo de considerarlas como distribuciones bivariadas degeneradas. Luego, se asume que $(U_1, 0)^T$ tiene FGA con peso positivo λ_1, definido por

$$(s_1, s_2) \longmapsto \lambda_1 \kappa_{\boldsymbol{\theta}}(s_1, 0). \tag{4.10}$$

Y $(0, U_2)^T$tiene FGA con peso positivo λ_2, definido por

$$(s_1, s_2) \longmapsto \lambda_2 \kappa_{\boldsymbol{\theta}}(0, s_2). \tag{4.11}$$

Ahora se suman los tres términos (4.8), (4.10) y (4.11), obteniendo la siguiente FGA bivariada para el vector aleatorio $\mathbf{Z}$ definido en (4.9),

$$K^*(s_1, s_2; \boldsymbol{\mu}, \lambda_{12}, \lambda_1, \lambda_2) = \lambda_{12}\kappa_{\boldsymbol{\theta}}(s_1, s_2) + \lambda_1\kappa_{\boldsymbol{\theta}}(s_1, 0) + \lambda_2\kappa_{\boldsymbol{\theta}}(0, s_2). \tag{4.12}$$

Se puede observar que la distribución marginal de Z_1 tiene la misma forma que (4.10), pero con λ_1 reemplazado por $\lambda_{11} = \lambda_{12} + \lambda_1$, y de manera similar la distribución marginal de Z_2 tiene la forma de (4.11) pero con parámetro $\lambda_{22} = \lambda_{12} + \lambda_2$. Ambas distribuciones marginales en general dependen de los dos parámetros θ_1 y θ_2.

Resta calcular el vector de medias y la matriz de covarianzas para $\mathbf{Z}$, diferenciando $K^*_{\boldsymbol{\theta}}$. Sean $\kappa_{\theta_1}(\theta_1, \theta_2)$y $\kappa_{\theta_2}(\theta_1, \theta_2)$ las dos componentes del vector de derivadas de primer orden $\nabla\kappa(\theta_1, \theta_2)$ y sean $\kappa_{\theta_i\theta_j}(\theta_1, \theta_2)$ para $i, j = 1, 2$ las derivadas de segundo orden de κ. Luego

$$E(\mathbf{Z}) = \begin{bmatrix} (\lambda_{12} + \lambda_1)\, \kappa_{\theta_1}(\theta_1, \theta_2) \\ (\lambda_{12} + \lambda_2)\, \kappa_{\theta_2}(\theta_1, \theta_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11}\mu_1 \\ \lambda_{22}\mu_2 \end{bmatrix},$$

donde μ_1 y μ_2 son las componentes del vector de medias $\boldsymbol{\mu}$ definido en (4.3), y

$$Cov(\mathbf{Z}) = \begin{bmatrix} \lambda_{11}\kappa_{\theta_1\theta_1}(\theta_1, \theta_2) & \lambda_{12}\kappa_{\theta_1\theta_2}(\theta_1, \theta_2) \\ \lambda_{12}\kappa_{\theta_2\theta_1}(\theta_1, \theta_2) & \lambda_{22}\kappa_{\theta_2\theta_2}(\theta_1, \theta_2) \end{bmatrix}.$$

La matriz de covarianzas de $\mathbf{Z}$ se puede expresar como función de los valores medios teniendo en cuenta (4.3) y (4.4). En este caso la función varianza unitaria para (4.5) es de dimensión 2x2 y sus componentes se definen como sigue:

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\mu}) = \begin{bmatrix} V_{11}(\boldsymbol{\mu}) & V_{12}(\boldsymbol{\mu}) \\ V_{21}(\boldsymbol{\mu}) & V_{22}(\boldsymbol{\mu}) \end{bmatrix}.$$

Siendo que $V_{11}(\boldsymbol{\mu})$ sólo depende de μ_1, se escribirá $V_{11}(\boldsymbol{\mu}) = V_1(\mu_1)$ y de igual manera, $V_{22}(\boldsymbol{\mu}) = V_2(\mu_2)$. En cambio los elementos no diagonales de la función varianza dependen de μ_1 y μ_2. La función varianza se podrá expresar entonces de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\mu}) = \left[\begin{array}{cc} V_1(\mu_1) & V_{12}(\mu_1, \mu_2) \\ V_{21}(\mu_1, \mu_2) & V_2(\mu_2) \end{array} \right].$$

La matriz de covarianzas se puede expresar como

$$Cov(\mathbf{Z}) = \left[\begin{array}{cc} \lambda_{11} V_1(\mu_1) & \lambda_{12} V_{12}(\mu_1, \mu_2) \\ \lambda_{12} V_{12}(\mu_1, \mu_2) & \lambda_{22} V_2(\mu_2) \end{array} \right],$$

la cual es de la forma $\mathbf{\Lambda} \odot \mathbf{V}(\boldsymbol{\mu})$, donde $\mathbf{\Lambda}$ es la matriz de pesos definida por

$$\mathbf{\Lambda} = \left[\begin{array}{cc} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} \end{array} \right] \tag{4.13}$$

y $\odot$ denota el producto matricial de Hadamard (elemento por elemento).

Esta construcción proporciona la forma aditiva del modelo exponencial con dispersión bivariado con la estructura de correlación flexible dependiente de tres parámetros pretendida, el cual se simboliza: $ED^*(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Lambda})$.

Como paso final en la construcción, se deriva la forma reproductiva del modelo exponencial con dispersión bivariado por medio de la transformación dual. Se define ahora el vector aleatorio $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)^T$, como sigue:

$$\left[\begin{array}{c} Y_1 \\ Y_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} Z_1/\lambda_{11} \\ Z_2/\lambda_{22} \end{array} \right], \tag{4.14}$$

con vector de medias

$$E(\mathbf{Y}) = \left[\begin{array}{c} \mu_1 \\ \mu_2 \end{array} \right]$$

y matriz de covarianzas

$$\mathrm{Cov}(\boldsymbol{Y}) = \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{\lambda_{11}} V_1(\mu_1) & \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}\lambda_{22}} V_{12}(\mu_1, \mu_2) \\ \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}\lambda_{22}} V_{12}(\mu_1, \mu_2) & \frac{1}{\lambda_{22}} V_2(\mu_2) \end{array} \right] = \mathbf{\Sigma} \odot \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\mu}),$$

donde $\mathbf{\Sigma}$ es la matriz simétrica definida positiva dada por

$$\mathbf{\Sigma} = \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{\lambda_{11}} & \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}\lambda_{22}} \\ \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}\lambda_{22}} & \frac{1}{\lambda_{22}} \end{array} \right],$$

que se denomina matriz de dispersión.

La expresión obtenida para la matriz de covarianzas de la forma reproductiva del modelo muestra nuevamente la estructura flexible que se buscaba y se designa al modelo correspondiente como $ED(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma})$.

Este método de construcción de modelos bivariados se puede considerar que consiste en una interpolación entre la distribución bivariada generadora, es decir la familia exponencial natural, y la distribución con marginales independientes. Por esta razón, la correlación de la distribución bivariada de partida limita el rango de posibles correlaciones para el correspondiente modelo exponencial con dispersión bivariado resultante a valores positivos.

Para ilustrar esta metodología de construcción de modelos bivariados se elige la distribución de probabilidad gamma ya que se trata de la distribución a la que convergen ciertos modelos exponenciales con dispersión bivariados, resultado principal de esta Tesis que se probará en el Capítulo 6.

4.3.1 Caso particular: gamma bivariada

Dado que la distribución gamma univariada ocupa un lugar importante en la Estadística y ha sido utilizada en innumerables aplicaciones, se han propuesto diferentes distribuciones denominadas gamma multivariadas en la literatura estadística (veáse en Kotz et al. [19] una revisión de ellas). Varias de estas distribuciones fueron desarrolladas a partir de combinaciones lineales de variables gamma estándares independientes. En 1991 Mathai y Moschopoulos [24] presentaron una gamma multivariada cuyas componentes están correlacionadas en forma positiva usando distribuciones gamma univariadas de tres parámetros. En años más recientes diversos autores continúan presentando diferentes propuestas entre las que se puede mencionar la de Nadarajah y Gupta [8], quienes introducen una nueva distribución gamma bivariada a partir de productos de variables aleatorias gamma y beta, y Saboor, Provost y Ahmad [32] que proponen una distribución del tipo gamma bivariada con la respectiva función generadora de momentos expresada en términos de funciones hipergeométricas generalizadas.

A continuación se presenta la construcción, de acuerdo al método de convolución extendido recién descrito, del modelo exponencial con dispersión gamma bivariado que se obtiene a partir de la versión gamma debida a Kibble y Moran [19], la cual fue ampliamente desarrollada posteriormente por Letac [22]. Con fines ilustrativos, se construye también otro modelo gamma bivariado tomando como punto de partida la distribución desarrollada por Mathai y Moschopoulos (véase en Apéndice A).

Versión gamma bivariada de Kibble y Moran

La distribución gamma bivariada debida a Kibble y Moran [19] tiene como función acumulante la siguiente expresión:

$$\kappa(\theta_1, \theta_2) = -\log(\theta_1\theta_2 - \rho),$$

definida sobre el conjunto $\Theta = \{(\theta_1, \theta_2)\, \theta_1 < 0, \theta_2 < 0, \theta_1\theta_2 - \rho > 0\}$ donde $\rho > 0$ es un parámetro fijo.

Nótese que:

$$\nabla\kappa(\theta_1,\theta_2) = \begin{bmatrix} \kappa_{\theta_1}(\theta_1,\theta_2) \\ \kappa_{\theta_2}(\theta_1,\theta_2) \end{bmatrix} = \frac{1}{\rho-\theta_1\theta_2}\begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{aligned} H\kappa(\theta_1,\theta_2) &= \begin{bmatrix} \kappa_{\theta_1\theta_1}(\theta_1,\theta_2) & \kappa_{\theta_1\theta_2}(\theta_1,\theta_2) \\ \kappa_{\theta_2\theta_1}(\theta_1,\theta_2) & \kappa_{\theta_2\theta_2}(\theta_1,\theta_2) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(\rho-\theta_1\theta_2)^2}\begin{bmatrix} \theta_2^2 & \rho \\ \rho & \theta_1^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Esta matriz de covarianzas puede expresarse también en términos de los parámetros valores medios:

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\mu}) = \begin{bmatrix} \mu_1^2 & \phi\mu_1\mu_2 \\ \phi\mu_1\mu_2 & \mu_2^2 \end{bmatrix}$$

donde $\phi = 1 - \frac{1}{2\rho\mu_1\mu_2}\left(\sqrt{1+4\rho\mu_1\mu_2}-1\right)$. Los pasos que permiten obtener esta reparametrización se detallan en el Apéndice B.

La FGA correspondiente a la familia exponencial natural bivariada es:

$$\begin{aligned} \kappa_{\boldsymbol{\theta}}(s_1,s_2) &= \kappa(\theta_1+s_1,\theta_2+s_2) - \kappa(\theta_1,\theta_2) \\ &= -\log\left((\theta_1+s_1)(\theta_2+s_2)-\rho\right) + log\left(\theta_1\theta_2-\rho\right) \\ &= \log\left\{\frac{(\theta_1+s_1)(\theta_2+s_2)-\rho}{\theta_1\theta_2-\rho}\right\}^{-1} \\ &= -\log\left\{\frac{\theta_1\theta_2+\theta_1 s_2+\theta_2 s_1+s_1 s_2-\rho}{\theta_1\theta_2-\rho}\right\} \\ &= -\log\left\{1+\frac{\theta_1 s_2}{\theta_1\theta_2-\rho}+\frac{\theta_2 s_1}{\theta_1\theta_2-\rho}+\frac{s_1 s_2}{\theta_1\theta_2-\rho}\right\}. \end{aligned}$$

Expresando θ_1, θ_2 y ρ en función de μ_1, μ_2 y ϕ, se obtiene la siguiente expresión de la FGA:

$$\kappa_{\boldsymbol{\mu}}(s_1,s_2) = -\log\left\{1-\mu_2 s_2-\mu_1 s_1+\mu_1\mu_2(1-\phi)s_1 s_2\right\}.$$

La FGA del vector aleatorio $\mathbf{Z} = (Z_1,Z_2)^T$, que de acuerdo a (4.12) toma la siguiente forma:

$$K^*(s_1,s_2;\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Lambda}) = \lambda_{12}\kappa_{\boldsymbol{\mu}}(s_1,s_2)+\lambda_1\kappa_{\boldsymbol{\mu}}(s_1,0)+\lambda_2\kappa_{\boldsymbol{\mu}}(0,s_2),$$

resulta para este caso

$$\begin{aligned} K^*(s_1,s_2;\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Lambda}) = &-\lambda_{12}\log\left\{1-\mu_1 s_1-\mu_2 s_2+\mu_1\mu_2(1-\phi)s_1 s_2\right\} \\ &-\lambda_1\log\left\{1-\mu_1 s_1\right\}-\lambda_2\left\{1-\mu_2 s_2\right\}. \end{aligned}$$

La respectiva FGM será entonces:

$$M^*(s_1, s_2; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Lambda}) = (1 - \mu_1 s_1 - \mu_2 s_2 + \mu_1\mu_2 (1-\phi) s_1 s_2)^{-\lambda_{12}} (1-\mu_1 s_1)^{-\lambda_1} (1-\mu_2 s_2)^{-\lambda_2}. \tag{4.15}$$

Derivando K^* una y dos veces con respecto a s_1 y s_2 se obtiene el vector de medias y la matriz de covarianzas. El vector de medias del modelo en la forma aditiva resulta:

$$E(\mathbf{Z}) = \begin{bmatrix} (\lambda_{12}+\lambda_1)\,\kappa_{\theta_1}(\theta_1,\theta_2) \\ (\lambda_{12}+\lambda_2)\,\kappa_{\theta_2}(\theta_1,\theta_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11}\mu_1 \\ \lambda_{22}\mu_2 \end{bmatrix}$$

y la matriz de covarianzas resultante es

$$Cov(\mathbf{Z}) = \begin{bmatrix} \lambda_{11}\kappa_{\theta_1\theta_1}(\theta_1,\theta_2) & \lambda_{12}\kappa_{\theta_1\theta_2}(\theta_1,\theta_2) \\ \lambda_{12}\kappa_{\theta_2\theta_1}(\theta_1,\theta_2) & \lambda_{22}\kappa_{\theta_2\theta_2}(\theta_1,\theta_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11}\mu_1^2 & \lambda_{12}\phi\mu_1\mu_2 \\ \lambda_{12}\phi\mu_1\mu_2 & \lambda_{22}\mu_2^2 \end{bmatrix}.$$

La forma reproductiva del modelo exponencial con dispersión bivariado se obtiene aplicando la transformación de escala. Se define entonces el vector aleatorio $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)^T$ como sigue:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1/\lambda_{11} \\ Z_2/\lambda_{22} \end{bmatrix},$$

con vector de medias

$$E(\mathbf{Y}) = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$$

y matriz de covarianzas

$$Cov\,(\mathbf{Y}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11}\mu_1^2 & \sigma_{12}\phi\mu_1\mu_2 \\ \sigma_{12}\phi\mu_1\mu_2 & \sigma_{22}\mu_2^2 \end{bmatrix},$$

donde los σ_{ij} representan las componentes de la matriz $\boldsymbol{\Sigma}$ **:**

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_{11}} & \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}\lambda_{22}} \\ \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}\lambda_{22}} & \frac{1}{\lambda_{22}} \end{bmatrix}.$$

La presencia de ϕ en la forma que asume la matriz de covarianzas del vector $\mathbf{Y}$ produce una estructura de covarianza bastante complicada, con correlación restringida a valores positivos en el intervalo $(0, \phi)$.

Las formas aditiva y reproductiva del modelo gamma bivariado obtenido se designan $Ga^*(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Lambda})$ y $Ga(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ respectivamente. Por último, la FGM de la forma reproductiva del modelo se obtiene aplicando la propiedad de las funciones generadoras de momentos ante transformaciones de escala. Sea $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2)^T$ con FGM $M^*(s_1, s_2; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Lambda})$, la transformación de escala $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)^T = \left(\frac{Z_1}{\lambda_{11}}, \frac{Z_2}{\lambda_{22}}\right)^T$ tendrá FGM de la forma:

$$M(s_1, s_2; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Lambda}) = M^*(\frac{s_1}{\lambda_{11}}, \frac{s_2}{\lambda_{22}}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Lambda}).$$

Luego, a partir de la expresión (4.15), la FGM asociada a la forma reproductiva del modelo gamma resulta:

$$M(s_1, s_2; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Lambda}) = (1-\mu_1\frac{s_1}{\lambda_{11}}-\mu_2\frac{s_2}{\lambda_{22}}+\mu_1\mu_2\,(1-\phi)\,\frac{s_1 s_2}{\lambda_{11}\lambda_{22}})^{-\lambda_{12}}(1-\mu_1\frac{s_1}{\lambda_{11}})^{-\lambda_1}(1-\mu_2\frac{s_2}{\lambda_{22}})^{-\lambda_2}. \tag{4.16}$$

Nótese que cuando $\phi = 0$, es decir cuando las componentes del vector $(U_{11}, U_{12})^T$ son independientes, la forma de la FGM se reduce a:

$$\begin{aligned} M(s_1, s_2; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Lambda}) &= (1-\mu_1\frac{s_1}{\lambda_{11}}-\mu_2\frac{s_2}{\lambda_{22}}+\mu_1\mu_2\frac{s_1 s_2}{\lambda_{11}\lambda_{22}})^{-\lambda_{12}}(1-\mu_1\frac{s_1}{\lambda_{11}})^{-\lambda_1}(1-\mu_2\frac{s_2}{\lambda_{22}})^{-\lambda_2} \\ &= \left[(1-\mu_1\frac{s_1}{\lambda_{11}})(1-\mu_2\frac{s_2}{\lambda_{22}})\right]^{-\lambda_{12}}(1-\mu_1\frac{s_1}{\lambda_{11}})^{-\lambda_1}(1-\mu_2\frac{s_2}{\lambda_{22}})^{-\lambda_2} \\ &= (1-\mu_1\frac{s_1}{\lambda_{11}})^{-\lambda_{11}}(1-\mu_2\frac{s_2}{\lambda_{22}})^{-\lambda_{22}}, \end{aligned} \tag{4.17}$$

expresión que corrresponde al producto de las funciones generadoras de momentos de dos distribuciones de probabilidad gamma univariadas.

Cuando $\lambda_{12} = 0$, lo que implica $\sigma_{12} = 0$, es decir cuando las variables Y_1 e Y_2 son independientes, la expresión se reduce a:

$$M(s_1, s_2; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Lambda}) = (1-\mu_1\frac{s_1}{\lambda_1})^{-\lambda_1}(1-\mu_2\frac{s_2}{\lambda_2})^{-\lambda_2}. \tag{4.18}$$

Nuevamente, esta expresión corrresponde al producto de las funciones generadoras de momentos de dos distribuciones de probabilidad gamma univariadas. Es importante mencionar que con el modelo gamma construido tomando como punto de partida la distribución desarrollada por Mathai y Moschopoulos (véase en Apéndice A) también se llega a esta expresión para el caso de variables independientes.

A modo de síntesis se puede señalar que Jørgensen y Martínez han desarrollado una metodología unificada de modelos exponenciales con dispersión multivariados, que conduce a versiones multivariadas de un amplio rango de distribuciones de probabilidad conocidas. Esta construcción de modelos multivariados con una estructura de correlaciones completamente flexible en términos del número de parámetros de covarianza habilita al estudio del comportamiento asintótico de los mismos, en particular, al estudio de la convergencia de tipo variación regular de modelos bivariados.

5 Teoremas tauberianos y variación regular bivariada

Como se ha visto en el Capítulo 3, la contribución realizada por J. Karamata con el desarrollo de la teoría de funciones de variación regular facilitó el estudio del comportamiento asintótico de los modelos exponenciales con dispersión univariados. Con el propósito de desarrollar en el capítulo siguiente un teorema que describe propiedades asintóticas de ciertos modelos exponenciales con dispersión bivariados, resulta necesario en primer lugar extender algunas definiciones y propiedades sobre variación regular al caso bivariado.

5.1 Variación regular bivariada

La definición que se da a continuación fue presentada por Omey y Willekens ([28], en ecuación (2.3)) como una forma de generalización a dos dimensiones de la definición clásica de variación regular unidimensional.

Definición 5.1. Una función medible $u : \mathbb{R}_+^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ es de *variación regular en infinito con exponentes* α y $\beta \in \mathbb{R}$ si para todo $x\,, y > 0$, el límite

$$\lim_{\min(t,s)\to\infty} \frac{u(tx, sy)}{u(t,s)} = x^\alpha y^\beta$$

existe y es finito.

Se usará la notación $u \in VR\,(\alpha, \beta)_\infty$.

La función $u(x, y)$ será de *variación regular en cero con exponentes* α y $\beta \in \mathbb{R}$ si para todo $x\,, y > 0$, $u\,(1/x, 1/y)$ es de variación regular en infinito con exponentes $-\alpha$ y $-\beta \in \mathbb{R}$.

Se usará la notación $u \in VR\,(\alpha, \beta)_0$ para el caso de variación regular en cero con exponentes α y β.

Observación. Si $\alpha = \beta$ y $t = s$, la definición de variación regular se simplifica a la siguiente expresión:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{u(tx, ty)}{u(t,t)} = (xy)^\alpha\,, \tag{5.1}$$

que conduce a la definición de variación regular de Stam [33] con un único índice para ambas variables.

La definición de variación regular lenta presentada para el caso univariado se extiende a $\mathbb{R}_+^2$ de la siguiente manera:

Definición 5.2. Una función $L(x,y)$ es de *variación lenta en infinito* si para cualquier $x,\ y>0$:

$$\lim_{\min(t,s)\to\infty} \frac{L(tx,sy)}{L(t,s)} = 1.$$

La función $L(x,y)$ será de *variación lenta en cero* si para todo $x,\ y>0$, $L\left({}^1\!/x, {}^1\!/y\right)$ es de variación lenta en infinito.

Se usará la notación $L \in VL_\infty$ y $L \in VL_0$ para variación lenta en infinito y en cero respectivamente.

La representación de una función de variación regular como el producto de una función potencia por una de variación lenta también es válida en el caso bivariado y se prueba en la siguiente proposición.

Proposición 5.3. *$u\,(x,y) \in VR\,(\alpha,\beta)_{\infty(0)} \Leftrightarrow u(x,y) = x^\alpha y^\beta L(x,y)$ donde $L \in VL_{\infty(0)}$.*

Demostración. Se verá cada implicación.

$\Rightarrow$)Puede verse que

$$\begin{aligned}\frac{L(tx,sy)}{L(t,s)} &= \frac{u(tx,sy)}{(tx)^\alpha(sy)^\beta}\frac{t^\alpha s^\beta}{u(t,s)}\\ &= \frac{u(tx,sy)}{u(t,s)}\frac{1}{x^\alpha y^\beta}\end{aligned}$$

y esta expresión tiende a $x^\alpha y^\beta \frac{1}{x^\alpha y^\beta} = 1$, cuando $\min(t,s) \to \infty$, es decir que L es de variación lenta en infinito.

$\Leftarrow$)Por otra parte,

$$\frac{u(tx,sy)}{u(t,s)} = \frac{(tx)^\alpha(sy)^\beta L(tx,sy)}{t^\alpha s^\beta L(t,s)} = x^\alpha y^\beta \frac{L(tx,sy)}{L(t,s)}$$

y esta expresión tiende a $x^\alpha y^\beta$, cuando $\min(t,s) \to \infty$, es decir que u es de variación regular en infinito.

En forma similar, se demuestra la equivalencia para el caso de variación regular y variación lenta en 0 . □

A continuación se extiende el concepto de variación regular a medidas ya que resulta necesario para establecer las hipótesis del teorema principal de esta tesis.

Definición 5.4. Una medida ν sobre $\mathbb{R}_+^2$ es de *variación regular en infinito o cero* con exponente $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ si la función

$$\bar{\nu}\,(x,y) = \nu\left\{(0,x] \times (0,y]\right\} \tag{5.2}$$

lo es.

Antes de introducir una generalización del Teorema tauberiano de Karamata se presenta la definición de transformada de Laplace para el caso de dos dimensiones.

Definición 5.5. Dada una medida ν sobre $\mathbb{R}_+^2$ su transformada de Laplace es la función en $\mathbb{R}_+^2$ dada por

$$\omega(t,s) = \iint_0^\infty e^{-tx-sy}\nu(dx,dy). \tag{5.3}$$

5.2 Extensión bivariada del Teorema tauberiano de Karamata

La relación entre una medida de variación regular y el comportamiento asintótico de su FGM establecida por Karamata para el caso univariado se puede extender a $\mathbb{R}_+^2$. Omey y Willekens [28] la enuncian de la siguiente manera.

Teorema 5.6 (Teorema tauberiano de Karamata bivariado según Omey y Willekens)**.** *Sea ν una medida sobre $\mathbb{R}_+^2$ con la transformada de Laplace dada en (5.3) finita en $\mathbb{R}_+^2$, la función $\bar{\nu}$ definida en (5.2) pertenece a $VR(\alpha,\beta)_\infty$ si y sólo si su transformada de Laplace $\omega(1/t, 1/s) \in VR(\alpha,\beta)_\infty$ siendo α y β no negativos. Además, en ese caso*

$$\lim_{\min(t,s)\to\infty} \frac{\omega(x/t, y/s)}{\omega(t,s)} = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{x^\alpha y^\beta}.$$

Se propone un enunciado equivalente, el cual se obtiene generalizando el enunciado dado por Jørgensen en [12] para el caso univariado.

Teorema 5.7 (Teorema tauberiano de Karamata bivariado, versión de Jørgensen extendida)**.** *Sea ν una medida sobre $\mathbb{R}_+^2$ con la transformada de Laplace dada en (5.3), sea $L \in VL_\infty$ y sean α y β no negativos. Entonces*

$$\bar{\nu}(t,s) \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} t^\alpha s^\beta L(t,s) \Longleftrightarrow \omega\left(\frac{1}{t},\frac{1}{s}\right) \sim t^\alpha s^\beta L(t,s)$$

cuando $\min(t,s)\to\infty$, siendo $\bar{\nu}$ la función definida en (5.2).

Se muestra a continuación que las afirmaciones del Teorema 5.7 equivalen a las del Teorema 5.6.

Proposición 5.8. *La afirmación $\bar{\nu}(t,s) \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} t^\alpha s^\beta L(t,s)$ cuando $\min(t,s)\to\infty$ equivale a que $\bar{\nu} \in VR(\alpha,\beta)_\infty$ siendo α y β no negativos.*

Demostración. La afirmación enunciada en esta proposición se puede expresar como

$$L(t,s) \sim \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\bar{\nu}(t,s)}{t^\alpha s^\beta} \tag{5.4}$$

cuando $\min(t,s)\to\infty$. Se sabe además que

$$\lim_{\min(a,b)\to\infty}\frac{L(at,bs)}{L(a,b)}=1$$

por ser L de VL.

Reemplazando en esta última expresión y teniendo en cuenta (5.4):

$$\begin{aligned}1 &= \lim_{\min(a,b)\to\infty}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\bar{\nu}(at,bs)\big/a^{\alpha}t^{\alpha}b^{\beta}s^{\beta}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\bar{\nu}(a,b)\big/a^{\alpha}b^{\beta}}\\ &= \lim_{\min(a,b)\to\infty}\frac{\bar{\nu}(at,bs)\big/t^{\alpha}s^{\beta}}{\bar{\nu}(a,b)}\end{aligned}$$

si y sólo si

$$\lim_{\min(a,b)\to\infty}\frac{\bar{\nu}(at,bs)}{\bar{\nu}(a,b)}=t^{\alpha}s^{\beta},$$

es decir $\bar{\nu}(t,s)\in VR(\alpha,\beta)_{\infty}$. □

Proposición 5.9. *La afirmación* $\omega\left({}^{1}/_{t},{}^{1}/_{s}\right)\sim t^{\alpha}s^{\beta}L(t,s)$ *donde* $L\in VL_{\infty}$ *implica que* $\omega\left({}^{1}/_{t},{}^{1}/_{s}\right)\in VR(\alpha,\beta)_{\infty}$ *siendo* α *y* β *no negativos.*

Demostración. $L(t,s)\in VL_{\infty}\Longrightarrow t^{\alpha}s^{\beta}L(t,s)\in VR(\alpha,\beta)_{\infty}$ por Proposición 5.3 y, como $\omega\left({}^{1}/_{t},{}^{1}/_{s}\right)\sim t^{\alpha}s^{\beta}L(t,s)$, entonces $\omega\left({}^{1}/_{t},{}^{1}/_{s}\right)\in VR(\alpha,\beta)_{\infty}$. □

Los Teoremas 5.7 y 5.6 se pueden enunciar para el caso de variación regular en cero y la demostración de la equivalencia entre ambos resulta análoga a la presentada.

Considérese, ahora, una medida ν que tiene la forma $\nu(dx,dy)=g(x,y)\,x^{\alpha-1}y^{\beta-1}$, siendo g analítica y no nula en $(0,0)$ por lo que $\upsilon\in VR_{(0)}$ con exponentes α y β. La extensión bivariada del Teorema tauberiano de Karamata presentada permite afirmar que la FGM de la familia exponencial natural generada por dicha medida tiene la forma

$$M_{\nu}(\theta_1,\theta_2)=(-\theta_1)^{-\alpha}(-\theta_2)^{-\beta}L(-\theta_1,-\theta_2)\,,\ \theta_1,\theta_2<0, \tag{5.5}$$

donde $L(-\theta_1,-\theta_2)\in VL_{\infty}$.

5.3 Extensión bivariada del Teorema de representación de Karamata

La extensión natural del Teorema de representación que J. Karamata presenta para el caso univariado (Teorema 3.7), particularizada en funciones bivariadas de variación lenta permite afirmar que una función de variación lenta $L:\mathbb{R}_{+}^{2}\to\mathbb{R}$ puede representarse como:

$$L(x,y) = d(x,y) \exp\left\{ \int_{1}^{\|(x,y)\|} \frac{a(t)}{t} dt \right\} \tag{5.6}$$

siendo las funciones $d : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ y $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tales que

$$\lim_{t\to\infty} \mid d(tx,ty) - d_0 \mid = 0 \tag{5.7}$$

para algún $0 < d_0 < \infty$ y

$$\lim_{t\to\infty} a(t) = 0. \tag{5.8}$$

Esta representación muestra que se puede obtener una función de variación lenta dado cualquier par de funciones que cumplan las condiciones (5.7) y (5.8) y será aplicada en el siguiente capítulo.

6 Convergencia de tipo variación regular en modelos exponenciales con dispersión bivariados

En este capítulo se presenta un resultado relevante sobre la convergencia de modelos exponenciales con dispersión bivariados, donde el modelo gamma aparece como distribución límite. Este estudio se refiere a la convergencia de tipo variación regular, es decir para el caso de valores medios tendiendo a cero o infinito y parámetro de dispersión constante, y consiste en una extensión del teorema desarrollado por Jørgensen, Martínez y Tsao para modelos exponenciales con dispersión univariados (Teorema 3.9) enunciado en el Capítulo 3. Los lineamientos de esta extensión bivariada fueron presentados en ocasión del 60° Congreso Internacional de Estadística organizado por el *International Statistical Institute*[1].

Los modelos exponenciales con dispersión tienen, en algunos casos, funciones de densidad que no pueden expresarse analíticamente en forma cerrada pero sus funciones generadoras de momentos son simples. Es por esto que la prueba del teorema que se desarrolla en la Sección 6.2 se basa en estudiar la convergencia de estas últimas siguiendo el enfoque adoptado por los autores recién mencionados para el caso univariado para lo cual resultan imprescindibles los resultados del capítulo anterior.

6.1 Descripción del problema

Sea un modelo exponencial con dispersión bivariado $ED(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ generado por la medida ν con soporte $S \subseteq (0, \infty) \times (0, \infty)$. Si ν es de variación regular en cero o en infinito con índice $\alpha > 0$, por la extensión del Teorema tauberiano de Karamata para el caso bivariado, la FGM para ν tiene la siguiente forma, de acuerdo a (5.5):

$$M_\nu(\theta_1, \theta_2) = (-\theta_1)^{-\alpha} (-\theta_2)^{-\alpha} L(-\theta_1, -\theta_2), \; \theta_1, \theta_2 < 0,$$

donde L es de variación lenta en infinito o cero, respectivamente.

Se puede notar que el índice de la variación regular es el mismo para ambas variables remitiendo a la definición de variación regular dada por Stam [33] ya que la consideración de medidas de variación regular de diferente índice para cada variable implicaría la existencia de modelos vinculados con los Tweedie bivariados cuya función varianza fuera una potencia de exponente diferente para cada una de las variables y ello es difícil de concebir [14].

La función acumulante κ toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\kappa(\theta_1,\theta_2) = \log M_\nu(\theta_1,\theta_2) &= \log\left\{(\theta_1\theta_2)^{-\alpha} L(-\theta_1,-\theta_2)\right\}\\ &= -\alpha\left\{\log(\theta_1)+\log(\theta_2)\right\} + \log L(-\theta_1,-\theta_2)\\ &= -\alpha\log(\theta_1) - \alpha\log(\theta_2) + l(-\theta_1,-\theta_2),\end{aligned} \tag{6.1}$$

donde $l(x,y) = \log L(x,y)$.

El vector de funciones de los valores medios, que se obtiene diferenciando $\kappa(\theta_1,\theta_2)$ con respecto a θ_1 y θ_2 resulta:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\kappa_{\theta_1}(\boldsymbol{\theta})\\ \kappa_{\theta_2}(\boldsymbol{\theta})\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\tau_1(\boldsymbol{\theta})\\ \tau_2(\boldsymbol{\theta})\end{bmatrix} = \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\theta})$$

y en este caso particular toma la forma:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix}\tau_1(\boldsymbol{\theta})\\ \tau_2(\boldsymbol{\theta})\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{\alpha}{\theta_1} - \frac{\partial l(-\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_1}\\ -\frac{\alpha}{\theta_2} - \frac{\partial l(-\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_2}\end{bmatrix}. \tag{6.2}$$

Teniendo en cuenta que

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix} = \boldsymbol{\tau}^{-1}(\boldsymbol{\mu}) = \begin{bmatrix}\delta_1(\boldsymbol{\mu})\\ \delta_2(\boldsymbol{\mu})\end{bmatrix} \tag{6.3}$$

y reemplazando en (6.2) por $\theta_1 = \delta_1(\mu_1,\mu_2)$ y $\theta_2 = \delta_2(\mu_1,\mu_2)$ se obtiene:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{\alpha}{\delta_1(\boldsymbol{\mu})} - \frac{\partial l(-\delta_1(\boldsymbol{\mu}),-\delta_2(\boldsymbol{\mu}))}{\partial\delta_1(\boldsymbol{\mu})}\\ -\frac{\alpha}{\delta_2(\boldsymbol{\mu})} - \frac{\partial l(-\delta_1(\boldsymbol{\mu}),-\delta_2(\boldsymbol{\mu}))}{\partial\delta_2(\boldsymbol{\mu})}\end{bmatrix}.$$

Trabajando la primera componente del vector $\boldsymbol{\mu}$ se llega a:

$$\mu_1 + \frac{\partial}{\partial\delta_1(\boldsymbol{\mu})} l(-\delta_1(\boldsymbol{\mu}), -\delta_2(\boldsymbol{\mu})) = -\frac{\alpha}{\delta_1(\boldsymbol{\mu})}.$$

Despejando:

$$\delta_1(\boldsymbol{\mu}) = \frac{-\alpha}{\mu_1 + \partial l\left(-\boldsymbol{\tau}^{-1}(\boldsymbol{\mu})\right)/\partial\delta_1(\boldsymbol{\mu})},$$

y de manera análoga:

$$\delta_2(\boldsymbol{\mu}) = \frac{-\alpha}{\mu_2 + \partial l\left(-\boldsymbol{\tau}^{-1}(\boldsymbol{\mu})\right)/\partial\delta_2(\boldsymbol{\mu})}.$$

O sea que el vector $\tau^{-1}(\boldsymbol{\mu})$ se puede expresar de la siguiente forma

$$\tau^{-1}(\boldsymbol{\mu}) = \begin{bmatrix}\delta_1(\boldsymbol{\mu})\\ \delta_2(\boldsymbol{\mu})\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{-\alpha}{\mu_1 + \frac{\partial l\left(-\boldsymbol{\tau}^{-1}(\boldsymbol{\mu})\right)}{\partial\delta_1(\boldsymbol{\mu})}}\\ \frac{-\alpha}{\mu_2 + \frac{\partial l\left(-\boldsymbol{\tau}^{-1}(\boldsymbol{\mu})\right)}{\partial\delta_2(\boldsymbol{\mu})}}\end{bmatrix}. \tag{6.4}$$

Con todos estos elementos se está en condiciones de presentar la extensión del teorema sobre convergencia tauberiana desarrollado por Jørgensen, Martínez y Tsao.

6.2 Extensión bivariada del Teorema de Jørgensen, Martínez y Tsao

Para facilitar el desarrollo de la extensión del Teorema de Jørgensen, Martínez y Tsao, se presenta primero la siguiente proposición, cuyo resultado se utiliza en la demostración del teorema.

Proposición 6.1. *Sea un modelo exponencial con dispersión* $ED(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ *con parámetros canónicos* $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)^T$ *tal que* $\boldsymbol{\theta}^T = (\delta_1(\boldsymbol{\mu}), \delta_2(\boldsymbol{\mu}))^T$ *con* $\boldsymbol{\mu}^T = (\mu_1, \mu_2)$*. Dado* $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}^T = \left(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2\right)^T = (\delta_1(c\boldsymbol{\mu}), \delta_2(c\boldsymbol{\mu}))^T$, $c \to 0$ *implica* $\tilde{\theta}_1 = \delta_1(c\boldsymbol{\mu}) \to -\infty$ *y* $\tilde{\theta}_2 = \delta_2(c\boldsymbol{\mu}) \to -\infty$ *para* μ_1 *y* μ_2 *fijos .*

Demostración. Para el cálculo de las derivadas de $\tilde{\theta}_i,\ i = 1, 2$ con respecto a c se definen las siguientes funciones:

$$g_i(c) = c\mu_i, \quad i = 1, 2$$

y se considera la composición de funciones $\delta_i\left(g_1(c), g_2(c)\right), \quad i = 1, 2.$

Entonces:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dc}\delta_i\left(c\mu_1, c\mu_2\right) &= \frac{d}{dc}\delta_i\left(g_1(c), g_2(c)\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial g_1}\delta_i\left(g_1(c), g_2(c)\right)\frac{d}{dc}g_1 + \frac{\partial}{\partial g_2}\delta_i\left(g_1(c), g_2(c)\right)\frac{d}{dc}g_2\\ &= \frac{\partial}{\partial\left(c\mu_1\right)}\delta_i\left(c\boldsymbol{\mu}\right)\mu_1 + \frac{\partial}{\partial\left(c\mu_2\right)}\delta_i\left(c\boldsymbol{\mu}\right)\mu_2.\end{aligned}$$

Sea la matriz jacobiana $J\boldsymbol{\tau}^{-1}\left(c\boldsymbol{\mu}\right)$:

$$J\boldsymbol{\tau}^{-1}\left(c\boldsymbol{\mu}\right) = J\begin{bmatrix}\delta_1\left(c\boldsymbol{\mu}\right)\\ \delta_2\left(c\boldsymbol{\mu}\right)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\partial\delta_1(c\boldsymbol{\mu})}{\partial(c\mu_1)} & \frac{\partial\delta_1(c\boldsymbol{\mu})}{\partial(c\mu_2)}\\ \frac{\partial\delta_2(c\boldsymbol{\mu})}{\partial(c\mu_1)} & \frac{\partial\delta_2(c\boldsymbol{\mu})}{\partial(c\mu_2)}\end{bmatrix},$$

y como se sabe por propiedad del Jacobiano que $J\boldsymbol{\tau}^{-1}\left(c\boldsymbol{\mu}\right) = \left(J\boldsymbol{\tau}(\widetilde{\boldsymbol{\theta}})\right)^{-1}$, entonces $J\boldsymbol{\tau}^{-1}\left(c\boldsymbol{\mu}\right) = \left(J\boldsymbol{\tau}\left(\boldsymbol{\tau}^{-1}\left(c\boldsymbol{\mu}\right)\right)\right)^{-1} = \boldsymbol{V}^{-1}\left(c\boldsymbol{\mu}\right)$, es decir:

$$J\boldsymbol{\tau}^{-1}\left(c\boldsymbol{\mu}\right) = \begin{bmatrix}V_1\left(c\mu_1\right) & V_{12}\left(c\boldsymbol{\mu}\right)\\ V_{12}\left(c\boldsymbol{\mu}\right) & V_2\left(c\mu_2\right)\end{bmatrix}^{-1}.$$

En el caso de variables independientes:

$$J\boldsymbol{\tau}^{-1}\left(c\boldsymbol{\mu}\right) = \begin{bmatrix}V_1\left(c\mu_1\right) & 0\\ 0 & V_2\left(c\mu_2\right)\end{bmatrix}^{-1}.$$

De aquí resulta que $\frac{\partial}{\partial(c\mu_1)}\delta_1\left(c\boldsymbol{\mu}\right) = V_1^{-1}\left(c\mu_1\right)$, $\frac{\partial}{\partial(c\mu_2)}\delta_2\left(c\boldsymbol{\mu}\right) = V_2^{-1}\left(c\mu_2\right)$ y $\frac{\partial}{\partial(c\mu_1)}\delta_2\left(c\boldsymbol{\mu}\right) = \frac{\partial}{\partial(c\mu_2)}\delta_1\left(c\boldsymbol{\mu}\right) = 0$. Entonces:

$$\frac{d}{dc}\delta_i\left(c\boldsymbol{\mu}\right) = V_i^{-1}\left(c\mu_i\right)\mu_i \quad i = 1, 2.$$

Estas derivadas son positivas ya que $\mu_i > 0,\ i = 1, 2$ y las derivadas de $\delta_i\left(c\boldsymbol{\mu}\right)$ con respecto a $c\mu_i$ son los elementos diagonales de la inversa de la matriz $\boldsymbol{V}(c\boldsymbol{\mu})$. Ello implica que las funciones $\delta_i\left(c\boldsymbol{\mu}\right)$ son estrictamente crecientes. De manera que $c \to 0$ implica $\tilde{\theta}_1 \to -\infty$ y $\tilde{\theta}_2 \to -\infty$ para μ_1 y μ_2 fijos.

En el caso de que las variables no sean independientes:

$$\begin{aligned} J\boldsymbol{\tau}^{-1}\left(c\boldsymbol{\mu}\right) &= \begin{bmatrix} V_1\left(c\mu_1\right) & V_{12}\left(c\boldsymbol{\mu}\right) \\ V_{12}\left(c\boldsymbol{\mu}\right) & V_2\left(c\mu_2\right) \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{\triangle}\begin{bmatrix} V_2\left(c\mu_2\right) & -V_{12}\left(c\boldsymbol{\mu}\right) \\ -V_{12}\left(c\boldsymbol{\mu}\right) & V_1\left(c\mu_1\right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

con $\triangle = V_1\left(c\mu_1\right)V_2\left(c\mu_2\right) - V_{12}^2\left(c\boldsymbol{\mu}\right)$.

Se analiza la derivada de $\delta_1\left(c\boldsymbol{\mu}\right)$:

$$\frac{d}{dc}\delta_1\left(c\boldsymbol{\mu}\right) > 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{\triangle}\left(V_2\left(c\mu_2\right)\mu_1 - V_{12}\left(c\boldsymbol{\mu}\right)\mu_2\right) > 0 \Longleftrightarrow V_2\left(c\mu_2\right)\mu_1 - V_{12}\left(c\boldsymbol{\mu}\right)\mu_2 > 0$$

ya que $\triangle$ es no negativo por tratarse del determinante de una matriz semidefinida positiva. Luego:

$$\frac{d}{dc}\delta_1\left(c\boldsymbol{\mu}\right) > 0 \Longleftrightarrow V_2\left(c\mu_2\right)\mu_1 > V_{12}\left(c\boldsymbol{\mu}\right)\mu_2.$$

De manera análoga se llega a:

$$\frac{d}{dc}\delta_2\left(c\boldsymbol{\mu}\right) > 0 \Longleftrightarrow V_1\left(c\mu_1\right)\mu_2 > V_{12}\left(c\boldsymbol{\mu}\right)\mu_1.$$

Estas condiciones siempre se cumplen teniendo en cuenta la definición del coeficiente de correlación lineal y su cota superior igual a 1. Entonces, las $\frac{d}{dc}\delta_i\left(c\boldsymbol{\mu}\right)$ resultan positivas y las $\delta_i\left(c\boldsymbol{\mu}\right)$ estrictamente crecientes, por lo que $c \to 0$ implica $\delta_1(c\boldsymbol{\mu}) \to -\infty$ y $\delta_2(c\boldsymbol{\mu}) \to -\infty$ para μ_1 y μ_2 fijos quedando demostrada la proposición. $\square$

Teorema 6.2. *Sea $ED(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ un modelo exponencial con dispersión generado por la medida ν con soporte $S \subseteq (0,\infty) \times (0,\infty)$. Supóngase que ν es de variación regular en cero o en infinito con el mismo exponente para ambas variables, de manera que por la extensión del Teorema tauberiano de Karamata para el caso bivariado, la FGM para ν tiene la forma*

$$M_\nu(\theta_1, \theta_2) = \left(-\theta_1\right)^{-\alpha}\left(-\theta_2\right)^{-\alpha}L\left(-\theta_1, -\theta_2\right),\ \theta_1, \theta_2 < 0,$$

para algún $\alpha > 0$ donde L es de variación lenta en infinito o cero, respectivamente.

Suponiendo válida la condición (5.6) y si $l(x, y) = \log L(x, y)$ satisface:

$$\lim_{c \to 0(\infty)} \frac{1}{c}\frac{\partial l\left(-\delta_1(c\boldsymbol{\mu}), -\delta_2(c\boldsymbol{\mu})\right)}{\partial \delta_i(c\boldsymbol{\mu})} = 0, \quad i = 1, 2 \tag{6.5}$$

para cualquier $\boldsymbol{\mu}^T = (\mu_1, \mu_2)$ *tal que* $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$ *y*

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_{11}} & \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}\lambda_{22}} \\ \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}\lambda_{22}} & \frac{1}{\lambda_{22}} \end{bmatrix}$$

con $\lambda_{11} > 0$, $\lambda_{22} > 0$ *y* $\lambda_{12} \geq 0$ *entonces, se cumplirá que:*

$$\frac{1}{c} ED(c\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \xrightarrow{d} Ga\left(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}_\alpha\right) \tag{6.6}$$

para $c > 0$ *tendiendo a cero o infinito, respectivamente y donde* Ga *es la distribución de probabilidad gamma bivariada con* $\boldsymbol{\Sigma}_\alpha = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha\lambda_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha\lambda_{22}} \end{bmatrix}$.

Demostración. Se probará el teorema para una medida ν de variación regular en cero, de modo que L es de variación lenta en infinito. La demostración para el caso en que ν es de variación regular en infinito es análoga.

Sea el modelo exponencial con dispersión aditivo bivariado generado por ν, simbolizado $ED^*(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Lambda})$, con $\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_{12} \\ \lambda_{12} & \lambda_2 \end{bmatrix}$ y construido de acuerdo al método descripto en la Sección 4.3. Sea el vector aleatorio $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2)^T \sim ED^*(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Lambda})$; su FGA, de acuerdo a (4.12), tiene la siguiente forma:

$$K^*(s_1, s_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Lambda}) = \lambda_1 \kappa_{\boldsymbol{\theta}}(s_1, 0) + \lambda_2 \kappa_{\boldsymbol{\theta}}(0, s_2) + \lambda_{12} \kappa_{\boldsymbol{\theta}}(s_1, s_2) \tag{6.7}$$

y teniendo en cuenta que la FGA de la familia exponencial natural bivariada de la cual se parte es $\kappa_{\boldsymbol{\theta}}(s_1, s_2) = \kappa(s_1+\theta_1, s_2+\theta_2) - \kappa(\theta_1, \theta_2)$, (6.7) se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} K^*(\mathbf{s}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Lambda}) &= \lambda_1 \left[\kappa(\theta_1 + s_1, \theta_2) - \kappa(\theta_1, \theta_2)\right] + \lambda_2 \left[\kappa(\theta_1, \theta_2 + s_2) - \kappa(\theta_1, \theta_2)\right] \\ &\quad + \lambda_{12} \left[\kappa(\theta_1 + s_1, \theta_2 + s_2) - \kappa(\theta_1, \theta_2)\right] \\ &= \lambda_1 \kappa(\theta_1 + s_1, \theta_2) + \lambda_2 \kappa(\theta_1, \theta_2 + s_2) + \lambda_{12} \kappa(\theta_1 + s_1, \theta_2 + s_2) - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12})\, \kappa(\theta_1, \theta_2) \end{aligned}$$

con $\mathbf{s}^T = (s_1, s_2)$.

La expresión de la FGM correspondiente es:

$$\begin{aligned} M^*(\mathbf{s}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Lambda}) &= e^{K^*(\mathbf{s}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Lambda})} \\ &= \frac{\left[e^{\kappa(\theta_1+s_1,\theta_2)}\right]^{\lambda_1} \left[e^{\kappa(\theta_1,\theta_2+s_2)}\right]^{\lambda_2} \left[e^{\kappa(\theta_1+s_1,\theta_2+s_2)}\right]^{\lambda_{12}}}{\left[e^{\kappa(\theta_1,\theta_2)}\right]^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_{12}}}. \end{aligned}$$

Reemplazando por la expresión (6.1) de la función acumulante:

$$\begin{aligned}
M^*(\mathbf{s};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\Lambda}) &= \frac{\left\{\left[\left(\theta_1+s_1\right)\theta_2\right]^{-\alpha} L\left(-\theta_1-s_1,-\theta_2\right)\right\}^{\lambda_1}\left\{\left[\theta_1\left(\theta_2+s_2\right)\right]^{-\alpha} L\left(-\theta_1,-\theta_2-s_2\right)\right\}^{\lambda_2}}{\left[\left(\theta_1\theta_2\right)^{-\alpha} L\left(-\theta_1,-\theta_2\right)\right]^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_{12}}} \\
&\quad\times\left\{\left[\left(\theta_1+s_1\right)\left(\theta_2+s_2\right)\right]^{-\alpha} L\left(-\theta_1-s_1,-\theta_2-s_2\right)\right\}^{\lambda_{12}} \\
&= \left[\frac{\left(\theta_1+s_1\right)\theta_2}{\theta_1\theta_2}\right]^{-\alpha\lambda_1}\left[\frac{\theta_1\left(\theta_2+s_2\right)}{\theta_1\theta_2}\right]^{-\alpha\lambda_2}\left[\frac{\left(\theta_1+s_1\right)\left(\theta_2+s_2\right)}{\theta_1\theta_2}\right]^{-\alpha\lambda_{12}} \\
&\quad\times\left[\frac{L\left(-\theta_1-s_1,-\theta_2\right)}{L\left(-\theta_1,-\theta_2\right)}\right]^{\lambda_1}\left[\frac{L\left(-\theta_1,-\theta_2-s_2\right)}{L\left(-\theta_1,-\theta_2\right)}\right]^{\lambda_2}\left[\frac{L\left(-\theta_1-s_1,-\theta_2-s_2\right)}{L\left(-\theta_1,-\theta_2\right)}\right]^{\lambda_{12}} \\
&= \left(1+\frac{s_1}{\theta_1}\right)^{-\alpha(\lambda_1+\lambda_{12})}\left(1+\frac{s_2}{\theta_2}\right)^{-\alpha(\lambda_2+\lambda_{12})} \\
&\quad\times\left[\frac{L\left(-\theta_1-s_1,-\theta_2\right)}{L\left(-\theta_1,-\theta_2\right)}\right]^{\lambda_1}\left[\frac{L\left(-\theta_1,-\theta_2-s_2\right)}{L\left(-\theta_1,-\theta_2\right)}\right]^{\lambda_2}\left[\frac{L\left(-\theta_1-s_1,-\theta_2-s_2\right)}{L\left(-\theta_1,-\theta_2\right)}\right]^{\lambda_{12}}.
\end{aligned}$$

Utilizando la notación introducida en la Sección 4.3, a saber: $\lambda_{11}=\lambda_{12}+\lambda_1$ y $\lambda_{22}=\lambda_{12}+\lambda_2$, esta FGM se expresa como

$$\begin{aligned}
M^*(\mathbf{s};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\Lambda}) &= \left(1+\frac{s_1}{\theta_1}\right)^{-\alpha\lambda_{11}}\left(1+\frac{s_2}{\theta_2}\right)^{-\alpha\lambda_{22}} \\
&\quad\times\left[\frac{L\left(-\theta_1-s_1,-\theta_2\right)}{L\left(-\theta_1,-\theta_2\right)}\right]^{\lambda_1}\left[\frac{L\left(-\theta_1,-\theta_2-s_2\right)}{L\left(-\theta_1,-\theta_2\right)}\right]^{\lambda_2}\left[\frac{L\left(-\theta_1-s_1,-\theta_2-s_2\right)}{L\left(-\theta_1,-\theta_2\right)}\right]^{\lambda_{12}}.
\end{aligned}$$

Por la transformación de escala $\mathbf{Y}=(Y_1,Y_2)^T=\left(\frac{Z_1}{\lambda_{11}},\frac{Z_2}{\lambda_{22}}\right)^T$ definida en (4.14) y por propiedad de las funciones generadoras de momentos [12], la FGM de la forma reproductiva del modelo, $M\left(\mathbf{s};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\Lambda}\right)$, resulta igual a:

$$M\left(\mathbf{s};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\Lambda}\right)=M^*\left(\frac{s_1}{\lambda_{11}},\frac{s_2}{\lambda_{22}};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\Lambda}\right).$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
M\left(\mathbf{s};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\Lambda}\right) &= \left(1+\frac{s_1}{\lambda_{11}\theta_1}\right)^{-\alpha\lambda_{11}}\left(1+\frac{s_2}{\lambda_{22}\theta_2}\right)^{-\alpha\lambda_{22}} \\
&\quad\times\left[\frac{L\left(-\theta_1-\frac{s_1}{\lambda_{11}},-\theta_2\right)}{L\left(-\theta_1,-\theta_2\right)}\right]^{\lambda_1}\left[\frac{L\left(-\theta_1,-\theta_2-\frac{s_2}{\lambda_{22}}\right)}{L\left(-\theta_1,-\theta_2\right)}\right]^{\lambda_2}\left[\frac{L\left(-\theta_1-\frac{s_1}{\lambda_{11}},-\theta_2-\frac{s_2}{\lambda_{22}}\right)}{L\left(-\theta_1,-\theta_2\right)}\right]^{\lambda_{12}}.
\end{aligned}$$

Si se tiene en cuenta que $\theta_1=\delta_1\left(\boldsymbol{\mu}\right)$ y $\theta_2=\delta_2\left(\boldsymbol{\mu}\right)$ y aplicando nuevamente la propiedad de las funciones generadoras de momentos ante transformaciones de escala, la FGM de $\frac{1}{c}ED(c\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$ resulta, para $\boldsymbol{\mu}>0$ fijo y c lo suficientemente chico como para que $c\boldsymbol{\mu}\in\Omega$, igual a:

$$
\begin{aligned}
M\left(\frac{1}{c}\mathbf{s};\boldsymbol{\tau}^{-1}\left(c\boldsymbol{\mu}\right),\boldsymbol{\Lambda}\right) &= \left(1+\frac{s_1}{\lambda_{11}c\delta_1(c\boldsymbol{\mu})}\right)^{-\alpha\lambda_{11}}\left(1+\frac{s_2}{\lambda_{22}c\delta_2(c\boldsymbol{\mu})}\right)^{-\alpha\lambda_{22}} \\
&\times \left[\frac{L\left(-\delta_1(c\boldsymbol{\mu})-\frac{s_1}{\lambda_{11}c},-\delta_2(c\boldsymbol{\mu})\right)}{L\left(-\delta_1(c\boldsymbol{\mu}),-\delta_2(c\boldsymbol{\mu})\right)}\right]^{\lambda_1} \\
&\times \left[\frac{L\left(-\delta_1(c\boldsymbol{\mu}),-\delta_2(c\boldsymbol{\mu})-\frac{s_2}{\lambda_{22}c}\right)}{L\left(-\delta_1(c\boldsymbol{\mu}),-\delta_2(c\boldsymbol{\mu})\right)}\right]^{\lambda_2} \\
&\times \left[\frac{L\left(-\delta_1(c\boldsymbol{\mu})-\frac{s_1}{\lambda_{11}c},-\delta_2(c\boldsymbol{\mu})-\frac{s_2}{\lambda_{22}c}\right)}{L\left(-\delta_1(c\boldsymbol{\mu}),-\delta_2(c\boldsymbol{\mu})\right)}\right]^{\lambda_{12}},
\end{aligned}
\tag{6.8}
$$

Se llamará $h_1(\mathbf{s};c,\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Lambda})$ a la expresión de exponente λ_1 , $h_2(\mathbf{s};c,\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Lambda})$ a la de exponente λ_2 y $h_{12}(\mathbf{s};c,\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Lambda})$ a la de exponente λ_{12} de forma que (6.8) queda expresada de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
M\left(\frac{1}{c}\mathbf{s};\boldsymbol{\tau}^{-1}\left(c\boldsymbol{\mu}\right),\boldsymbol{\Lambda}\right) &= \left(1+\frac{s_1}{\lambda_{11}c\delta_1(c\boldsymbol{\mu})}\right)^{-\alpha\lambda_{11}}\left(1+\frac{s_2}{\lambda_{22}c\delta_2(c\boldsymbol{\mu})}\right)^{-\alpha\lambda_{22}} \\
&\times\ h_1^{\lambda_1}(\mathbf{s};c,\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Lambda})\,h_2^{\lambda_2}(\mathbf{s};c,\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Lambda})\,h_{12}^{\lambda_{12}}(\mathbf{s};c,\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Lambda}).
\end{aligned}
$$

Si se pueden demostrar las siguientes igualdades:

$$\lim_{c\to 0} c\delta_1(c\boldsymbol{\mu}) = -\frac{\alpha}{\mu_1} \tag{6.9}$$

$$\lim_{c\to 0} c\delta_2(c\boldsymbol{\mu}) = -\frac{\alpha}{\mu_2} \tag{6.10}$$

$$\lim_{c\to 0} h_1(\mathbf{s};c,\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Lambda}) = 1 \tag{6.11}$$

$$\lim_{c\to 0} h_2(\mathbf{s};c,\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Lambda}) = 1 \tag{6.12}$$

$$\lim_{c\to 0} h_{12}(\mathbf{s};c,\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Lambda}) = 1, \tag{6.13}$$

se podrá concluir que:

$$\lim_{c\to 0} M\left\{\frac{1}{c}\mathbf{s};\boldsymbol{\tau}^{-1}\left(c\boldsymbol{\mu}\right),\boldsymbol{\Lambda}\right\} = \left(1-\mu_1\frac{s_1}{\alpha\lambda_{11}}\right)^{-\alpha\lambda_{11}}\left(1-\mu_2\frac{s_2}{\alpha\lambda_{22}}\right)^{-\alpha\lambda_{22}},$$

que coincide con la expresión correspondiente a la FGM del modelo con dispersión bivariado $Ga(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}_\alpha)$ para el caso de variables independientes, de acuerdo a lo comprobado en (4.17). La matriz $\boldsymbol{\Sigma}_\alpha$ toma la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\Sigma}_\alpha = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha\lambda_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha\lambda_{22}} \end{bmatrix}.$$

De esta forma quedará demostrado (6.6).

Prueba de (6.9)
De (6.4) se tiene que

$$\delta_1(c\boldsymbol{\mu}) = \frac{-\alpha}{c\mu_1 + {}^{\partial l\left(-\boldsymbol{\tau}^{-1}(c\boldsymbol{\mu})\right)}/_{\partial\delta_1(c\boldsymbol{\mu})}},$$

por lo que

$$\begin{aligned} c\delta_1(c\boldsymbol{\mu}) &= \frac{-\alpha}{\frac{1}{c}\left[c\mu_1 + {}^{\partial l\left(-\boldsymbol{\tau}^{-1}(c\boldsymbol{\mu})\right)}/_{\partial\delta_1(c\boldsymbol{\mu})}\right]} \\ &= \frac{-\alpha}{\mu_1 + \frac{1}{c}{}^{\partial l\left(-\boldsymbol{\tau}^{-1}(c\boldsymbol{\mu})\right)}/_{\partial\delta_1(c\boldsymbol{\mu})}}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta además que por (6.5),

$$\lim_{c\to 0}\frac{1}{c}\frac{\partial l\left(-\delta_1(c\boldsymbol{\mu}), -\delta_2(c\boldsymbol{\mu})\right)}{\partial\delta_1(c\boldsymbol{\mu})} = 0,$$

resulta que

$$\lim_{c\to 0} c\delta_1(c\boldsymbol{\mu}) = -\frac{\alpha}{\mu_1}.$$

Prueba de (6.10)
Trabajando del mismo modo se obtiene:

$$\delta_2(c\boldsymbol{\mu}) = \frac{-\alpha}{c\mu_2 + {}^{\partial l\left(-\boldsymbol{\tau}^{-1}(c\boldsymbol{\mu})\right)}/_{\partial\delta_2(c\boldsymbol{\mu})}},$$

por lo que

$$\begin{aligned} c\delta_2(c\boldsymbol{\mu}) &= \frac{-\alpha}{\frac{1}{c}\left[c\mu_2 + {}^{\partial l\left(-\boldsymbol{\tau}^{-1}(c\boldsymbol{\mu})\right)}/_{\partial\delta_2(c\boldsymbol{\mu})}\right]} \\ &= \frac{-\alpha}{\mu_2 + \frac{1}{c}{}^{\partial l\left(-\boldsymbol{\tau}^{-1}(c\boldsymbol{\mu})\right)}/_{\partial\delta_2(c\boldsymbol{\mu})}} \end{aligned}$$

y, teniendo en cuenta que por (6.5),

$$\lim_{c\to 0}\frac{1}{c}\frac{\partial l\left(-\delta_1(c\boldsymbol{\mu}), -\delta_2(c\boldsymbol{\mu})\right)}{\partial\delta_2(c\boldsymbol{\mu})} = 0,$$

resulta que

$$\lim_{c\to 0} c\delta_2(c\boldsymbol{\mu}) = -\frac{\alpha}{\mu_2}.$$

Prueba de (6.11)

Con el objeto de simplificar la notación, se utiliza la denominación $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}^T = \left(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2\right)^T$ para representar a $(\delta_1(c\boldsymbol{\mu}), \delta_2(c\boldsymbol{\mu}))^T$. Luego, se expresa a $h_1(\mathbf{s}; c, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Lambda})$, con $\boldsymbol{\tau}^{-1}(c\boldsymbol{\mu})$ en términos de $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}$, así:

$$h_1\left(\mathbf{s}; c, \widetilde{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\Lambda}\right) = \frac{L\left(-\tilde{\theta}_1\left(1 + \frac{s_1}{\lambda_1 c\tilde{\theta}_1}\right), -\tilde{\theta}_2\right)}{L\left(-\tilde{\theta}_1, -\tilde{\theta}_2\right)}.$$

Para hallar el $\lim\limits_{c\to 0} h_1\left(\mathbf{s}; c, \widetilde{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\Lambda}\right)$ se recurre a la extensión bivariada de la representación de una función de variación lenta desarrollada por Karamata. De modo que, por (5.6), h_1 se puede representar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} h_1\left(\mathbf{s}; c, \widetilde{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\Lambda}\right) &= \frac{d\left(-\tilde{\theta}_1\left(1 + \frac{s_1}{\lambda_1 c\tilde{\theta}_1}\right), -\tilde{\theta}_2\right)}{d\left(-\tilde{\theta}_1, -\tilde{\theta}_2\right)} \frac{\exp\left\{\int_0^{\left\|\left(-\tilde{\theta}_1\{1+z_1\}, -\tilde{\theta}_2\right)\right\|} \frac{a(t)}{t} dt\right\}}{\exp\left\{\int_0^{\left\|\left(-\tilde{\theta}_1, -\tilde{\theta}_2\right)\right\|} \frac{a(t)}{t} dt\right\}} \\ &= \frac{d\left(-\tilde{\theta}_1(1 + z_1), -\tilde{\theta}_2\right)}{d\left(-\tilde{\theta}_1, -\tilde{\theta}_2\right)} \exp\left\{\int_{\left\|\left(-\tilde{\theta}_1, -\tilde{\theta}_2\right)\right\|}^{\left\|\left(-\tilde{\theta}_1\{1+z_1\}, -\tilde{\theta}_2\right)\right\|} \frac{a(t)}{t} dt\right\} \end{aligned}$$

con $z_1 = \frac{s_1}{\lambda_1 c\tilde{\theta}_1}$.

A continuación se calcula el límite de cada uno de los dos factores que componen a h_1 en forma separada.

- Primer factor de h_1

Por (6.9), $\lim\limits_{c\to 0}\left(1 + \frac{s_1}{\lambda_1 c\tilde{\theta}_1}\right) = 1 - \frac{s_1\mu_1}{\lambda_1\alpha} > 0$ por ser $s_1 < 0$. Además por (5.7) y teniendo en cuenta la Proposición 6.1, se deduce que:

$$\lim_{c\to 0} \frac{d\left(-\tilde{\theta}_1\left(1 + \frac{s_1}{\lambda_1 c\tilde{\theta}_1}\right), -\tilde{\theta}_2\right)}{d\left(-\tilde{\theta}_1, -\tilde{\theta}_2\right)} = \frac{d_0}{d_0} = 1.$$

- Segundo factor de h_1

Nótese que

$$a(t) \leq \sup_{\left\|\left(-\tilde{\theta}_1, -\tilde{\theta}_2\right)\right\| \leq t \leq \left\|\left(-\tilde{\theta}_1\{1+z_1\}, -\tilde{\theta}_2\right)\right\|} a(t) \text{ y } \frac{1}{t} \leq \frac{1}{\left\|\left(-\tilde{\theta}_1, -\tilde{\theta}_2\right)\right\|}.$$

Entonces, llamando $m = \left\|\left(-\tilde{\theta}_1, -\tilde{\theta}_2\right)\right\|$ y $n = \left\|\left(-\tilde{\theta}_1\{1 + z_1\}, -\tilde{\theta}_2\right)\right\|$, resulta:

$$\int_m^n \frac{a(t)}{t} dt \leq \left\{\sup_{m\leq t\leq n} a(t)\right\} \frac{1}{m}(n - m) \leq \sup_{m\leq t\leq n} a(t) \frac{1}{m}(n - m).$$

Para el caso de norma tipo 1:

$$m = \left\| \left(-\tilde{\theta}_1, -\tilde{\theta}_2 \right) \right\| = \mid \tilde{\theta}_1 \mid + \mid \tilde{\theta}_2 \mid$$

y

$$n = \left\| \left(-\tilde{\theta}_1 \left\{ 1 + z_1 \right\}, -\tilde{\theta}_2 \right) \right\| = \mid \tilde{\theta}_1 \mid\mid 1 + z_1 \mid + \mid \tilde{\theta}_2 \mid,$$

resultando:

$$\begin{aligned} n - m &= \mid \tilde{\theta}_1 \mid\mid 1 + z_1 \mid + \mid \tilde{\theta}_2 \mid - \mid \tilde{\theta}_1 \mid - \mid \tilde{\theta}_2 \mid \\ &= \mid \tilde{\theta}_1 \mid \left(\mid 1 + z_1 \mid - 1 \right). \end{aligned}$$

Así:

$$\int_m^n \frac{a(t)}{t} dt \leq \sup_{m \leq t \leq n} a(t) \frac{1}{\mid \tilde{\theta}_1 \mid + \mid \tilde{\theta}_2 \mid} \mid \tilde{\theta}_1 \mid \left(\mid 1 + z_1 \mid - 1 \right).$$

Además ya que $\mid \tilde{\theta}_1 \mid \leq \mid \tilde{\theta}_1 \mid + \mid \tilde{\theta}_2 \mid$, resulta $\frac{1}{|\tilde{\theta}_1|} \geq \frac{1}{|\tilde{\theta}_1| + |\tilde{\theta}_2|}$. Utilizando esta cota:

$$\begin{aligned} \lim_{c \to 0} \left\{ \int_{\left\| \left(-\tilde{\theta}_1, -\tilde{\theta}_2 \right) \right\|}^{\left\| \left(-\tilde{\theta}_1 \{1+z_1\}, -\tilde{\theta}_2 \right) \right\|} \frac{a(t)}{t} dt \right\} &= \lim_{c \to 0} \int_m^n \frac{a(t)}{t} dt \\ &\leq \lim_{c \to 0} \left\{ \sup_{m \leq t \leq n} a(t) \frac{1}{\mid \tilde{\theta}_1 \mid} \mid \tilde{\theta}_1 \mid \left(\mid 1 + z_1 \mid - 1 \right) \right\} \\ &= \lim_{c \to 0} \left\{ \sup_{m \leq t \leq n} a(t) \left(\mid 1 + z_1 \mid - 1 \right) \right\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ello conduce a que

$$\lim_{c \to 0} \exp \left\{ \int_{\left\| \left(-\tilde{\theta}_1, -\tilde{\theta}_2 \right) \right\|}^{\left\| \left(-\tilde{\theta}_1 \{1+z_1\}, -\tilde{\theta}_2 \right) \right\|} \frac{a(t)}{t} dt \right\} = 1.$$

Reuniendo los resultados hallados para los dos factores resulta que

$$\lim_{c \to 0} h_1 \left(\mathbf{s}; c, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Lambda} \right) = 1.$$

Teniendo en cuenta la similitud entre h_1, h_2 y h_{12} , los límites cuando $c \to 0$ de h_2 y h_{12} se calculan de manera análoga, comprobándose (6.12) y (6.13).

Se ha probado así que los modelos exponenciales con dispersión bivariados generados por una medida de variación regular con el mismo exponente para ambas variables que verifican las condiciones establecidas en el teorema cumplen que, cuando $c \to 0$:

$$\frac{1}{c} ED(c\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \xrightarrow{d} Ga \left(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}_\alpha \right)$$

con $\mathbf{\Sigma}_\alpha = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha\lambda_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha\lambda_{22}} \end{bmatrix}$. $\square$

Se ilustra este resultado sobre convergencia tauberiana con un ejemplo.

Ejemplo. Sean los modelos exponenciales con dispersión bivariados $ED(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma})$ generados por la siguiente extensión de la medida presentada por Letac ([21]):

$$\nu\left(dy_1, dy_2\right) = \left(e^{2y_1} - 1\right)\left(e^{2y_2} - 1\right) dy_1 dy_2 \quad (y_1, y_2) \in \mathbb{R}_+^2, \tag{6.14}$$

con $\boldsymbol{\mu}^T = (\mu_1, \mu_2)$, $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$ y

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_{11}} & \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}\lambda_{22}} \\ \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}\lambda_{22}} & \frac{1}{\lambda_{22}} \end{bmatrix}$$

donde $\lambda_{11} > 0$, $\lambda_{22} > 0$ y $\lambda_{12} \geq 0$.

La función acumulante es la siguiente:

$$\begin{aligned}
\kappa\left(\boldsymbol{\theta}\right) &= \log \int_0^\infty \int_0^\infty e^{y_1\theta_1 + y_2\theta_2} \nu\left(dy_1, dy_2\right) \\
&= \log \int_0^\infty \int_0^\infty e^{y_1\theta_1 + y_2\theta_2} \left(e^{2y_1} - 1\right)\left(e^{2y_2} - 1\right) dy_1 dy_2 \\
&= \log \left\{ \int_0^\infty e^{y_1\theta_1 +} \left(e^{2y_1} - 1\right) dy_1 \int_0^\infty e^{y_2\theta_2} \left(e^{2y_2} - 1\right) dy_2 \right\} \\
&= \log \frac{2}{\theta_1^2 + 2\theta_1} + \log \frac{2}{\theta_2^2 + 2\theta_2}.
\end{aligned}$$

Para comprobar si ν es de variación regular, se define la función $\bar{\nu}(y_1, y_2) = \nu\left\{(0, y_1] \times (0, y_2]\right\}$:

$$\bar{\nu}(y_1, y_2) = \int_0^{y_1} \left(e^{2u} - 1\right) du \int_0^{y_2} \left(e^{2s} - 1\right) ds = \left[\frac{e^{2y_1}}{2} - y_1 - \frac{1}{2}\right]\left[\frac{e^{2y_2}}{2} - y_2 - \frac{1}{2}\right]$$

y se calcula el siguiente límite:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{\bar{\nu}(ty_1, ty_2)}{\bar{\nu}(t, t)} &= \lim_{t\to 0} \frac{e^{2ty_1} - 2ty_1 - 1}{e^{2t} - 2t - 1} \frac{e^{2ty_2} - 2ty_2 - 1}{e^{2t} - 2t - 1} \\
&= y_1^2 y_2^2 = \left(y_1 y_2\right)^2
\end{aligned}$$

Luego $\bar{\nu} \in VR_0(\alpha = 2)$ y por Definición 5.4, la medida ν también lo es.

La expresión (5.5) permite afirmar que

$$e^{\kappa(\boldsymbol{\theta})} = \left(-\theta_1\right)^{-2}\left(-\theta_2\right)^{-2} L\left(-\theta_1, -\theta_2\right), \quad L \in VL,$$

de manera que

$$\frac{2}{\theta_1^2 + 2\theta_1} \frac{2}{\theta_2^2 + 2\theta_2} = \left(-\theta_1\right)^{-2}\left(-\theta_2\right)^{-2} L\left(-\theta_1, -\theta_2\right),$$

siendo $L(-\theta_1,-\theta_2)=\frac{4\theta_1\theta_2}{(\theta_1+2)(\theta_2+2)}$.

Luego, $l(-\theta_1,-\theta_2)=\log L(-\theta_1,-\theta_2)$ tiene como derivadas parciales:

$$\frac{\partial l(-\theta_1,-\theta_2)}{\partial\theta_i}=\frac{1}{\theta_i}-\frac{1}{\theta_i+2}=\frac{2}{\theta_i(\theta_i+2)}\quad i=1,2.$$

Teniendo en cuenta, además, que:

$$\kappa_{\theta_i}=-\frac{2(\theta_i+1)}{\theta_i(\theta_i+2)}\quad i=1,2,$$

$$\kappa_{\theta_i\theta_i}(\theta_1,\theta_2)=\frac{2}{\theta_i^2+2\theta_i}+\frac{4(\theta_i+1)^2}{(\theta_i+2)^2}\quad i=1,2$$

y que estas derivadas segundas se pueden expresar en términos de los valores medios:

$$\kappa_{\theta_i\theta_i}(\theta_1,\theta_2)=V_i(\mu_i)=\mu_i^2+1-\sqrt{\mu_i^2+1}\quad i=1,2,$$

resulta:

$$\frac{\partial l(-\theta_1,-\theta_2)}{\partial\theta_i}=\sqrt{\mu_i^2+1}-1\quad i=1,2.$$

Entonces:

$$\lim_{c\to 0}\frac{1}{c}\frac{\partial l\left(-\tilde{\theta}_1,-\tilde{\theta}_2\right)}{\partial\tilde{\theta}_i}=\lim_{c\to 0}\frac{\sqrt{c^2\mu_i^2+1}-1}{c}\quad i=1,2.$$

La indeterminación se resuelve por L´Hopital:

$$\lim_{c\to 0}\frac{1}{c}\frac{\partial l\left(-\tilde{\theta}_1,-\tilde{\theta}_2\right)}{\partial\tilde{\theta}_i}=\lim_{c\to 0}\frac{1}{2}\left(c^2\mu_i^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}2c\mu_i^2=0\quad i=1,2$$

cumpliéndose (6.5).

Luego, bajo el cumplimiento de (5.6), los modelos exponenciales con dispersión generados por (6.14) satisfacen de acuerdo al Teorema 6.2 que, cuando $c\to 0$:

$$\frac{1}{c}ED(c\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})\overset{d}{\to}Ga(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}_\alpha)$$

siendo Ga la distribución de probabilidad gamma bivariada asociada a variables independientes con $\boldsymbol{\Sigma}_\alpha=\begin{bmatrix}\frac{1}{2\lambda_{11}} & 0\\ 0 & \frac{1}{2\lambda_{22}}\end{bmatrix}$.

7 Discusión

En este trabajo se probó un teorema de convergencia de tipo variación regular para modelos exponenciales con dispersión bivariados que cumplan ciertas hipótesis. Estos modelos fueron formalmente desarrollados y presentados en forma univariada por Jørgensen en 1986 y 1987 [10, 11]. Si bien ya Fisher [7] señalaba la importancia de describir los datos en su medio o habitat natural, ya sea que fuera la recta real, la esfera, los números enteros o cualquier otro, pretendiendo destacar la importancia de tener en cuenta la forma real del espacio muestral para cada tipo de datos, la distribución normal fue por mucho tiempo el soporte de la mayoría de los análisis estadísticos. Sin dejar de reconocer la enorme importancia de esta distribución para el caso de datos con dispersión pequeña, quedaba pendiente la consideración de datos con mucha dispersión. Jørgensen se propone desarrollar la teoría de los modelos con dispersión para tener en cuenta, entre otros aspectos, esas dispersiones grandes y abarcar de esa forma infinitas distribuciones entre las cuales poder elegir la más adecuada para los datos.

Ante el requerimiento de modelar datos con una variable respuesta multivariada y tratar de expandir algunos de los métodos de análisis clásicos multivariados a datos no-normales, surgió la necesidad de desarrollar familias de distribuciones multivariadas flexibles para modelar estocásticamente este tipo de datos. La literatura estadística provee una gran variedad de tales familias, sin embargo no es fácil saber a cuál recurrir y Letac [22] lo ilustra muy bien al comentar que "*mientras muchas distribuciones en $\mathbb{R}$ son generalmente inequívocas, por el contrario en la jungla de distribuciones en $\mathbb{R}^k$ casi nada está codificado fuera de los casos Gaussiano y de Wishart*". Teniendo en cuenta estas consideraciones, es razonable que la búsqueda se basara en la identificación de distribuciones multivariadas que preserven algunas de las características de la correspondiente distribución univariada, como por ejemplo que sean marginal o condicionalmente cerradas. Pero tan importante como los temas teórico-estadísticos, eran las interpretaciones de los parámetros y los métodos de estimación e inferencia. Estas demandas no fueron siempre fáciles de conciliar y condujeron a veces a interrogantes numéricos y matemáticos muy complicados. Con todas estas inquietudes presentes, Jørgensen y Martínez presentaron en el año 2012 una nueva clase de modelos exponenciales con dispersión multivariados con el número ideal de parámetros de covarianza basada en una extensión del método de convolución [16, 13].

Por otro lado, los estudios sobre convergencia de modelos exponenciales con dispersión univariados realizados por Jørgensen, Martínez y Tsao [12] y por Jørgensen, Martínez y Vinogradov [18], permitieron a Jørgensen y Martínez conjeturar que podrían sostenerse resultados análogos para los modelos multivariados por ellos construidos. Haciendo foco en un tipo de convergencia no tan difundido, que se distingue por el hecho de que el parámetro de dispersión es constante y describe el comportamiento asintótico de los modelos cuando la media tiende a uno de los extremos de su dominio, en esta tesis se abordó su estudio para el caso particular de los modelos exponenciales con dispersión bivariados. En este tipo de convergencia, denominada de variación regular o tipo Tauber, son muy importantes las contribuciones de J. Karamata quien extendió ciertos teoremas tauberianos para funciones de variación regular. Su aporte resultó muy importante al establecer que las funciones de variación regular tienen un comportamiento asintótico similar al de sus transformadas de Laplace. Ello permitió realizar el estudio de la convergencia de los modelos exponenciales con dispersión con funciones de densidad que no pueden expresarse analíticamente en forma cerrada, a través de sus funciones generadoras de momentos.

El trabajo realizado en esta tesis permitió mostrar que los modelos exponenciales con dispersión bivariados generados por medidas de variación regular, bajo ciertas hipótesis particulares, convergen a una distribución gamma bivariada cuando el parámetro medio tiende a uno de los extremos de su dominio. Esta distribución límite es la correspondiente a variables gamma independientes, lo que simplifica en gran medida cualquier análisis estadístico. Se considera importante continuar esta línea de trabajo con el objeto de estudiar cuáles son las características particulares de los modelos exponenciales con dispersión generados por medidas de variación regular del mismo orden ya que este resultado sobre convergencia tauberiana permitirá analizar datos con valores medios extremadamente pequeños o grandes en base a un modelo gamma mediante una transformación de escala. Cabe señalar que esta extensión del Teorema 3.9 garantiza la convergencia tipo Tauber a la distribución gamma sin necesidad de imponer condiciones sobre el comportamiento asintótico de la función varianza, por lo que conserva justamente esta cualidad del teorema univariado.

Es oportuno comentar que se considera sólo el caso de medidas de variación regular del mismo índice para ambas variables porque la extensión del Teorema 6.2 al caso de modelos generados por medidas de variación regular de diferente índice para cada variable implicaría la existencia de modelos Tweedie bivariados cuya función varianza fuera una potencia de exponente diferente para cada una de las variables y ello es difícil de concebir [14].

A modo de cierre se puede concluir que el resultado teórico alcanzado tendrá suma utilidad práctica pudiendo garantizarse el uso de la distribución gamma para el estudio de los modelos exponenciales con dispersión generados por medidas de variación regular. Es de interés mencionar también que en 2016 A. Hitz y R. Evans [9] desarrollaron una extensión del teorema de Karamata a funciones de distribución y densidades multivariadas de variación regular por componente cuyos resultados son fundamentales en la teoría de valores extremos. Este resultado abre una interesante línea de investigación para el estudio de propiedades de convergencia de los modelos con dispersión para extremos teniendo en cuenta el paralelismo existente entre estos modelos y los modelos exponenciales con dispersión [15, 23].

Bibliografía

[1] G. Boggio, L. Ricci, and J.R. Martínez. Some convergence theorems for bivariate exponential dispersion models. In *60th ISI World Statistics Congress*, Rio de Janeiro, Brazil, July 2015.

[2] S. G. Candy. Modelling catch and effort data using generalized linear models, the Tweedie distribution, random vessel effects and random stratum by year effects. *CCAMLR Science*, 11:59–80, 2004.

[3] L. de Haan. On regular variation and its applications to the weak convergence of sample extremes. In *Mathematical Centre Tracts*, volume 32. Amsterdam: Mathematical Centre, 1975.

[4] P.K. Dunn. Occurrence and quantity of precipitation can be modelled simultaneously. *International Journal of Climatology*, 24:1231–1239, 2004.

[5] P.K. Dunn and G. K. Smith. Series evaluation of Tweedie exponential dispersion model densities. *Statistics and Computing*, 15:267–280, 2005.

[6] W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications*, volume II. Second edition.

[7] R. A. Fisher. Dispersion on a sphere. *Proceedings of the Royal Society Series A*, 217:295–305, 1953.

[8] A. K. Gupta and C. F. Wong. On a Morgenstern-type bivariate gamma distribution. *Metrika*, 31(1):327–332, 1984.

[9] A. Hitz and R. Evans. One-component regular variation and graphical modeling of extremes. *Journal of Applied Probability*, 53(3):733–746, 2016.

[10] B. Jørgensen. Some properties of exponential dispersion models. *Scandinavian Journal of Statistics*, 13:187–198, 1986.

[11] B. Jørgensen. Exponential dispersion models (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society. Series B*, 49:127–162, 1987.

[12] B. Jørgensen. *The theory of dispersion models*. Chapman and Hall, 1997.

[13] B. Jørgensen. Construction of multivariate dispersion models. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, 27(3):285–309, 2013.

[14] B. Jørgensen. Comunicación personal, 2015.

[15] B. Jørgensen, Y. Goegebeur, and J. R. Martínez. Dispersion models for extremes. *Extremes*, 13(4):399–437, 2010.

[16] B. Jørgensen and J. R. Martínez. *Multivariate exponential dispersion models*, pages 73–98. World Scientific, 2013.

[17] B. Jørgensen, J. R. Martínez, and M. Tsao. Asymptotic behavior of the variance function. *Scandinavian Journal of Statistics*, 21:223–243, 1994.

[18] B. Jørgensen, J. R. Martínez, and V. Vinogradov. Domains of attractions to Tweedie distributions. *Lithuanian Mathematical Journal*, 49(4):399–425, 2009.

[19] S. Kotz, N. Balakrishnan, and N.L. Johnson. *Continuous multivariate distributions.* John Wiley and Sons, 2000.

[20] U. Kuchler. Exponential families of Markov processes-Part I. General results. *Math Operationsforsch Statistics. Series Statistics*, 13(1):57–69, 1982.

[21] G. Letac. Lectures on natural exponential families and their variance functions. In *Monografias de Matematica*, volume 50. Río de Janeiro: Instituto de Matematica Pura e Aplicada, 1992.

[22] G. Letac. The bivariate gamma distribution with laplace transform $(1 + as + bt + cst)^{-q}$: History, characterizations, estimation. http://www.math.univ-toulouse.fr/letac/bivgamma.pdf, 2007.

[23] H. Li and L. Hua. Higher order tail densities of copulas and hidden regular variation. *Journal of Multivariate Analysis*, 138:143 – 155, 2015.

[24] A. M. Mathai and P. G. Moschopoulos. On a multivariate gamma. *Journal of Multivariate Analysis*, 39(1):135–153, 1991.

[25] M. Mora. La convergence des fonctions variances des familles exponentielles naturelles. *Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse*, 5(11):105–120, 1990.

[26] J.A. Nelder and R.W.M. Wedderburn. Generalized linear models. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A*, 135:370–384, 1972.

[27] R. Nielsen. *Exponential dispersion models and Tweedie convergence.* PhD thesis, University of Southern Denmark, 2000.

[28] E. Omey and E. Willekens. Abelian and Tauberian theorems for the Laplace transform of functions in several variables. *Journal of Multivariate Analysis*, 30(2):292–306, 1989.

[29] N. Liseras P. Alegre and L. Ricci. Una aplicación de los modelos Tweedie a las decisiones económicas de los hogares. In *Actas de las Jornadas Internacionales de Estadística*, Rosario, Argentina, octubre 2006.

[30] M. L. Patat, L. Ricci, A. Comino, and M. Scagliola. Estimating percentiles of bacteriological counts of recreational water quality using Tweedie models. *Water Quality, Exposure and Health*, pages 1–5, 2014.

[31] S. Resnick. *Heavy-tail phenomena. Probabilistic and statistical modelling.* Springer, 2007.

[32] A. Saboor, S. B. Provost, and M. Ahmad. The moment generating function of a bivariate gamma-type distribution. *Applied Mathematics and Computation*, 218(24):11911–11921, 2012.

[33] A. Stam. Regular variation in R_+^d and the Abel-Tauber theorem. *Mathematisch Instituut Rijksuniversiteit Groningen*, preprint, 1977.

[34] M.C.K. Tweedie. Functions of statistical variate with given means, with special reference to Laplacian distributions. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 49:41–49, 1947.

Apéndice A

Versión gamma bivariada de Mathai-Moschopoulos

Se presenta una generalización de la distribución gamma bivariada de Mathai y Moschopoulos ([24]) mediante la construcción de un modelo exponencial con dispersión por el método de convolución extendido propuesto por Jørgensen y Martínez [16, 13]. Se recuerda que este método se basa en la representación estocástica siguiente para el vector aleatorio $\mathbf{Z}$ =$(Z_1, Z_2)^T$,

$$\left[\begin{array}{c} Z_1 \\ Z_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} U_1 \\ 0 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} 0 \\ U_2 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} U_{11} \\ U_{12} \end{array}\right],$$

donde los tres vectores del lado derecho se asumen independientes con $U_j \sim ED^*(\mu_j, \lambda_j),\ j = 1, 2$ siendo $ED^*(\mu_j, \lambda_j)$ un modelo exponencial con dispersión aditivo con media $\lambda_j \mu_j$ y varianza $\lambda_j V(\mu_j)$.

Se inicia la construcción del modelo bivariado a partir de la función generadora de acumulantes (FGA) correspondiente al vector $(U_{11}, U_{12})^T$ definida por:

$$\kappa_{\boldsymbol{\mu}}(s_1, s_2) = -log(1 - \mu_1 s_1 - \mu_2 s_2),$$

con media $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)^T$. La FGA para el vector aleatorio $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2)^T$ es:

$$K^*(s_1, s_2, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Lambda}) = \lambda_{12} \kappa_{\boldsymbol{\mu}}(s_1, s_2) + \lambda_1 \kappa_{\boldsymbol{\mu}}(s_1, 0) + \lambda_2 \kappa_{\boldsymbol{\mu}}(0, s_2),$$

donde los λ_{ij} conforman la matriz de pesos $\boldsymbol{\Lambda}$ dada por:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \left[\begin{array}{cc} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} \end{array}\right].$$

La FGA para este caso resulta:

$$K^*(s_1, s_2, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Lambda}) = -\lambda_{12} log(1 - \mu_1 s_1 - \mu_2 s_2) - \lambda_1 log(1 - \mu_1 s_1) - \lambda_2 log(1 - \mu_2 s_2).$$

Y la FGM es entonces:

$$M^*(s_1, s_2; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Lambda}) = (1 - \mu_1 s_1 - \mu_2 s_2)^{-\lambda_{12}} (1 - \mu_1 s_1)^{-\lambda_1} (1 - \mu_2 s_2)^{-\lambda_2}$$

Diferenciando K^* una y dos veces con respecto a s_1 y s_2 y fijando s_1 y s_2 en cero, se obtiene el vector de medias y la matriz de covarianzas.

El vector de medias del modelo en la forma aditiva resulta entonces:

$$E(\mathbf{Z}) = \left[\begin{array}{c} (\lambda_{12} + \lambda_1)\, \mu_1 \\ (\lambda_{12} + \lambda_2)\, \mu_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \lambda_{11} \mu_1 \\ \lambda_{22} \mu_2 \end{array}\right] = \operatorname{diag}(\boldsymbol{\Lambda}) \odot \boldsymbol{\mu}$$

donde diag $(\mathbf{\Lambda}) = [\lambda_{11}, \lambda_{22}]^T$.

La matriz de covarianzas por su parte resulta:

$$Cov\,(\mathbf{Z}) = \begin{bmatrix} \lambda_{11}\kappa_{\theta_1\theta_1}(\theta_1,\theta_2) & \lambda_{12}\kappa_{\theta_1\theta_2}(\theta_1,\theta_2) \\ \lambda_{12}\kappa_{\theta_2\theta_1}(\theta_1,\theta_2) & \lambda_{22}\kappa_{\theta_2\theta_2}(\theta_1,\theta_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11}\mu_1^2 & \lambda_{12}\mu_1\mu_2 \\ \lambda_{12}\mu_1\mu_2 & \lambda_{22}\mu_2^2 \end{bmatrix},$$

la cual es de la forma $\mathbf{\Lambda} \odot \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\mu})$ donde $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\mu})$ es la función varianza unitaria:

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\mu}) = \begin{bmatrix} V_1(\mu_1) & V_{12}(\mu_1,\mu_2) \\ V_{21}(\mu_1,\mu_2) & V_2(\mu_2) \end{bmatrix}.$$

La forma reproductiva del modelo exponencial con dispersión bivariado se obtiene por medio de la transformación de escala. Se define el vector aleatorio $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)^T$ como sigue:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1/\lambda_{11} \\ Z_2/\lambda_{22} \end{bmatrix},$$

con vector de medias

$$E(\mathbf{Y}) = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$$

y matriz de covarianzas

$$Cov\,(\mathbf{Y}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11}\mu_1^2 & \sigma_{12}\mu_1\mu_2 \\ \sigma_{12}\mu_1\mu_2 & \sigma_{22}\mu_2^2 \end{bmatrix},$$

donde los σ_{ij} representan las componentes de la matriz $\mathbf{\Sigma}$ **:**

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_{11}} & \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}\lambda_{22}} \\ \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}\lambda_{22}} & \frac{1}{\lambda_{22}} \end{bmatrix},$$

pudiendo expresar a la matriz de covarianzas como:

$$Cov\,(\mathbf{Y}) = \mathbf{\Sigma} \odot V(\boldsymbol{\mu}).$$

Por último, la FGM de la forma reproductiva del modelo se obtiene aplicando la propiedad de las funciones generadoras de momentos ante transformaciones de escala.

Sea $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2)^T$ con FGM $M^*(s_1, s_2; \theta_1, \theta_2)$, la transformación dual $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)^T = \left(\frac{Z_1}{\lambda_{11}}, \frac{Z_2}{\lambda_{22}}\right)^T$ tendrá FGM de la forma: $M(s_1, s_2; \theta_1, \theta_2) = M^*(\frac{s_1}{\lambda_{11}}, \frac{s_2}{\lambda_{22}}; \theta_1, \theta_2)$.

Entonces, la FGM asociada a la forma reproductiva del modelo gamma resulta:

$$M(s_1, s_2; \boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Lambda}) = (1 - \mu_1\frac{s_1}{\lambda_{11}} - \mu_2\frac{s_2}{\lambda_{22}})^{-\lambda_{12}}(1 - \mu_1\frac{s_1}{\lambda_{11}})^{-\lambda_1}(1 - \mu_2\frac{s_2}{\lambda_{22}})^{-\lambda_2}. \qquad (7.1)$$

Nótese que cuando las variables Y_1 e Y_2 son independientes, la forma de la FGM se reduce a

$$M(s_1, s_2; \boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Lambda}) = (1 - \mu_1\frac{s_1}{\lambda_1})^{-\lambda_1}(1 - \mu_2\frac{s_2}{\lambda_2})^{-\lambda_2}.$$

Apéndice B

Reparametrización de la función varianza de la distribución gamma bivariada de Kibble y Moran

En la Subsección 4.3.1 se obtuvo la expresión del vector de valores medios y de la función varianza correspondiente a la versión de la distribución gamma bivariada debida a Kibble y Moran, la cual se reproduce a continuación:

$$\nabla\kappa\left(\boldsymbol{\theta}\right) = \boldsymbol{\mu} = \frac{1}{\rho - \theta_1\theta_2}\left[\begin{array}{c}\theta_2\\ \theta_1\end{array}\right] \tag{7.2}$$

y

$$H\kappa\left(\boldsymbol{\theta}\right) = V(\boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{\left(\rho - \theta_1\theta_2\right)^2}\left[\begin{array}{cc}\theta_2^2 & \rho\\ \rho & \theta_1^2\end{array}\right]. \tag{7.3}$$

De (7.3) se puede deducir fácilmente que el coeficiente de correlación es $\phi = \frac{\rho}{\theta_1\theta_2}$.

La reparametrización de los elementos diagonales de la función de varianza es directa ya que como por (7.2)

$$\mu_1 = \frac{\theta_2}{\rho - \theta_1\theta_2} \text{ y } \mu_2 = \frac{\theta_1}{\rho - \theta_1\theta_2},$$

resulta

$$\kappa_{\theta_1\theta_1}(\theta_1,\theta_2) = \mu_1^2 \text{ y } \kappa_{\theta_2\theta_2}(\theta_1,\theta_2) = \mu_2^2.$$

Para obtener la expresión de los elementos no diagonales de (7.3) en términos de los valores medios se realizan los siguientes pasos.

Sea

$$\kappa_{\theta_1\theta_2}(\theta_1,\theta_2) = \frac{\rho}{\left(\rho - \theta_1\theta_2\right)^2}.$$

Multiplicando y dividiendo esta expresión por $\theta_1\theta_2$ y teniendo en cuenta la forma hallada para μ_1 y μ_2 resulta:

$$\kappa_{\theta_1\theta_2}(\theta_1,\theta_2) = \mu_1\mu_2\frac{\rho}{\theta_1\theta_2}.$$

Teniendo en cuenta la expresión del coeficiente de correlación ϕ en función de los parámetros canónicos, se obtiene:

$$\kappa_{\theta_1\theta_2}(\theta_1,\theta_2)=\mu_1\mu_2\phi.$$

De esta manera, la función varianza queda expresada en términos de los parámetros valores medios como sigue:

$$H\kappa\left(\boldsymbol{\theta}\right)=V(\boldsymbol{\mu})=\begin{bmatrix}\mu_1^2 & \phi\mu_1\mu_2\\ \phi\mu_1\mu_2 & \mu_2^2\end{bmatrix}$$

Resta hallar la reparametrización del coeficiente de correlación. Nótese que a partir de las expresiones encontradas para μ_1 , μ_2 y ϕ se pueden establecer las siguientes relaciones:

$$\rho-\theta_1\theta_2=\phi\theta_1\theta_2-\theta_1\theta_2=\left(\phi-1\right)\theta_1\theta_2,$$

$$\mu_1=\frac{\theta_2}{\rho-\theta_1\theta_2}=\frac{\theta_2}{\left(\phi-1\right)\theta_1\theta_2}=\frac{1}{\left(\phi-1\right)\theta_1}\Longrightarrow\theta_1=\frac{1}{\left(\phi-1\right)\mu_1}$$

$$\mu_2=\frac{\theta_1}{\rho-\theta_1\theta_2}=\frac{\theta_1}{\left(\phi-1\right)\theta_1\theta_2}=\frac{1}{\left(\phi-1\right)\theta_2}\Longrightarrow\theta_2=\frac{1}{\left(\phi-1\right)\mu_2}.$$

A partir de la expresión $\phi=\frac{\rho}{\theta_1\theta_2}$ y haciendo uso de las relaciones recién halladas se obtiene:

$$\begin{aligned}\phi&=\rho\left(\phi-1\right)\mu_1\left(\phi-1\right)\mu_2\\&=\left(\rho\phi\mu_1-\rho\mu_1\right)\left(\phi\mu_2-\mu_2\right)\\&=\rho\mu_1\mu_2\phi^2-2\rho\mu_1\mu_2\phi+\rho\mu_1\mu_{2.}\end{aligned}$$

Operando algebráicamente:

$$\rho\mu_1\mu_2\phi^2-\left(\rho\mu_1\mu_2+1\right)\phi+\rho\mu_1\mu_2=0.$$

De las soluciones de esta ecuación de segundo grado se elige la que conduce a un coeficiente de correlación menor que 1, o sea:

$$\begin{aligned}\phi&=1+\frac{1}{2\rho\mu_1\mu_2}-\frac{1}{2\rho\mu_1\mu_2}\sqrt{4\rho\mu_1\mu_2+1}\\&=1-\frac{1}{2\rho\mu_1\mu_2}\left(\sqrt{4\rho\mu_1\mu_2+1}-1\right).\end{aligned}$$