

# MOVIMIENTOS DE MÖBIUS LIBRES DE FUERZAS DE LOS GRUPOS UNITARIOS

POR DANIELA BEATRIZ EMMANUELE

PRESENTADO ANTE LA  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA  
COMO PARTE DE LOS REQUERIMIENTOS PARA LA OBTENCIÓN  
DEL GRADO DE DOCTORA EN MATEMÁTICA DE LA  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO

FEBRERO DE 2021

DIRECTOR: MARCOS SALVAI

CODIRECTOR: FRANCISCO VITTONI



## Resumen

Estudiamos la dinámica no rígida inducida por las acciones birracionales estándares de los grupos unitarios split  $G = O_o(n, n)$ ,  $SU(n, n)$  y  $Sp(n, n)$  sobre los grupos de Lie clásicos compactos  $M = SO_n$ ,  $U_n$  y  $Sp_n$ , respectivamente. Más precisamente, estudiamos la geometría de  $G$  munido de la métrica energía cinética asociada a la acción de  $G$  sobre  $M$ , suponiendo que  $M$  porta su métrica riemanniana bi-invariante canónica y tiene inicialmente una distribución homogénea de masa. Por el Principio de Mínima Acción, los movimientos libres de fuerzas (pensados como curvas en  $G$ ) corresponden a geodésicas de  $G$ . La ecuación de las geodésicas podría ser interpretada como una ecuación invíscida de Burgers con restricciones de Möbius. Probamos que la métrica energía cinética en  $G$  no es completa (esto se traduce en la aparición de shocks) y en particular, no invariante; encontramos simetrías y subvariedades totalmente geodésicas de  $G$  e indagamos bajo qué condiciones las geodésicas de movimientos rígidos son geodésicas de  $G$ . Además, estudiamos equivalencias con la dinámica de los movimientos proyectivos y conformes de la esfera en dimensiones bajas.

**Mathematics Subject Classification (2020):** 22F50, 53C22, 58D19, 70K25, 70G65, 76M60

**Palabras y frases claves:** movimientos libres de fuerzas, métrica energía cinética, dinámica no rígida, flujo compresible, grupo unitario, grupo unitario split, acción de Möbius, subespacio isotrópico maximal, ecuación invíscida de Burgers, shocks

## Abstract

We study the nonrigid dynamics induced by the standard birational actions of the split unitary groups  $G = O_o(n, n)$ ,  $SU(n, n)$  and  $Sp(n, n)$  on the compact classical Lie groups  $M = SO_n$ ,  $U_n$  and  $Sp_n$ , respectively. More precisely, we study the geometry of  $G$  endowed with the kinetic energy metric associated with the action of  $G$  on  $M$ , assuming that  $M$  carries its canonical bi-invariant Riemannian metric and has initially a homogeneous distribution of mass. By the least action principle, force free motions (thought of as curves in  $G$ ) correspond to geodesics of  $G$ . The geodesic equation may be understood as an inviscid Burgers equation with Möbius constraints. We prove that the kinetic energy metric on  $G$  is not complete (this amounts to the appearance of shocks) and in particular not invariant, find symmetries and totally geodesic submanifolds of  $G$  and address the question under which conditions geodesics of rigid motions are geodesics of  $G$ . Besides, we study equivalences with the dynamics of conformal and projective motions of the sphere in low dimensions.

**Mathematics Subject Classification (2020):** 22F50, 53C22, 58D19, 70K25, 70G65, 76M60

**Key words and phrases:** force free motion, kinetic energy metric, nonrigid dynamics, compressible flow, unitary group, split unitary group, Möbius action, maximal isotropic subspace, inviscid Burgers equation, shocks

## Agradecimientos

Agradecemos a Carlos Olmos por su sugerencia para la demostración de la Proposición 3 y a Simon Chiossi por una referencia que fue de gran utilidad.

Quiero agradecer también:

- A mi marido y a mis hijos, quienes me acompañaron en este proyecto con amor y comprensión.
- A mi director, Marcos, y a mi codirector, Franciso, quienes con su gran generosidad y excelente predisposición supieron guiarme en esta tesis.
- A mis amigas y compañeras, que me contuvieron en momentos de zozobra.
- A los miembros del jurado, por haber dedicado parte de su tiempo a revisar esta tesis.
- A la Comisión del Doctorado en Matemática y a la Escuela de Posgrado y Educación Continua de la FCEIA, por la organización de su defensa.



## Índice general

|                                                             |     |
|-------------------------------------------------------------|-----|
| Resumen                                                     | III |
| Abstract                                                    | V   |
| Agradecimientos                                             | VII |
| Capítulo 1. Introducción y presentación de los resultados   | 3   |
| Capítulo 2. Preliminares                                    | 11  |
| 2.1. Grupos unitarios                                       | 11  |
| 2.1.1. Los cuaterniones                                     | 11  |
| 2.1.2. Los grupos unitarios                                 | 13  |
| 2.1.3. La métrica bi-invariante                             | 15  |
| 2.1.4. La fórmula de integración de Weyl                    | 16  |
| 2.1.5. La descomposición $KA$                               | 18  |
| 2.2. Los grupos unitarios como grassmannianas isotrópicas   | 20  |
| 2.3. Transformaciones de Möbius de los grupos unitarios     | 21  |
| 2.4. Movimientos libres de fuerzas                          | 25  |
| 2.5. La métrica riemanniana energía cinética                | 27  |
| 2.6. Subvariedades totalmente geodésicas                    | 29  |
| Capítulo 3. Simetrías de la métrica energía cinética        | 33  |
| Capítulo 4. Algunos subgrupos totalmente geodésicos         | 37  |
| Capítulo 5. La incompletitud de la métrica energía cinética | 41  |
| Capítulo 6. Movimientos rígidos libres de fuerzas           | 49  |

|                                                                                                         |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Capítulo 7. Equivalencias con los movimientos proyectivos y conformes de la esfera en dimensiones bajas | 53 |
| 7.1. Relación con los movimientos conformes de $S^3$                                                    | 56 |
| 7.2. Relación con los movimientos proyectivos de $S^3$                                                  | 62 |
| 7.3. Implicaciones dinámicas para los movimientos de Möbius en dimensiones bajas                        | 68 |
| Capítulo 8. Conclusiones                                                                                | 71 |
| Bibliografía                                                                                            | 73 |

## Introducción y presentación de los resultados

La Mecánica Geométrica, introducida por Arnold en [2] (ver también [3]), describe los movimientos libres de fuerzas de un sistema como geodésicas de una métrica riemanniana en el espacio de configuraciones, dada por la energía cinética. Entre los primeros ejemplos aparecen métricas invariantes en  $SO_3$  y en el grupo de difeomorfismos  $\text{Diff}_\mu(M)$  de una variedad riemanniana compacta  $M$  que preservan la forma de volumen  $\mu$ , para describir, respectivamente, los movimientos libres de fuerzas del cuerpo rígido y la dinámica de un fluido ideal en  $M$ .

Este enfoque tuvo aún más impacto cuando muchas ecuaciones diferenciales clásicas se reconocieron dentro de esta teoría (o sea, como ecuaciones de geodésicas), entre otras, las ecuaciones de Korteweg-de Vries [30, 34] (ver más ejemplos en [39, 6]).

Ebin y Marsden [12] extendieron las ideas de Arnold para el grupo total de difeomorfismos  $\text{Diff}(M)$ , estudiando de esta forma flujos compresibles. En este caso la métrica ya no resulta invariante. Los movimientos libres de fuerzas  $t \mapsto \gamma(t)$ , o equivalentemente, las geodésicas en  $\text{Diff}(M)$ , se pueden expresar de manera sencilla:  $t \mapsto \gamma(t)(q)$  resultan ser geodésicas en  $M$  para todo  $q \in M$ . Esta descripción ya no vale si el flujo está sujeto a vínculos extra, por ejemplo para el caso de  $\text{Diff}_\mu(M)$ , que con la métrica heredada de la de  $\text{Diff}(M)$  no es totalmente geodésico.

Se han considerado también las geodésicas de la métrica inducida para grupos de difeomorfismos que preservan otras estructuras en  $M$ , por ejemplo para los grupos de symplectomorfismos [13, 21] y de contactomorfismos [14]. Para estos grupos, y en general para los subgrupos de  $\text{Diff}_\mu(M)$ , la métrica de la energía cinética es invariante y fue estudiada extensivamente. En el caso de dimensión finita, las métricas invariantes aparecen en el contexto rígido, y los movimientos libres de fuerzas, o sea, las geodésicas, han sido muy exploradas y relativamente bien entendidas.

En cuanto a métricas no invariantes, surgen para flujos compresibles (el ejemplo básico es el que mencionamos más arriba de  $\text{Diff}(M)$ ) y han sido menos estudiadas. Recientemente, Bauer y Modin han recuperado el interés por este tema en [5].

Entre las razones por la cuales la dinámica no rígida en dimensión finita ha sido poco abordada, podemos mencionar que las acciones más significativas de grupos de Lie no compactos en variedades riemannianas compactas son en general escasas, por ejemplo para la importante familia de los espacios simétricos compactos: El celebrado teorema de Nagano [28] afirma que si un grupo de Lie  $G$  actúa en un espacio simétrico compacto  $M$  y contiene la componente conexa de su grupo de isometrías, entonces  $M$  es esencialmente un  $R$ -espacio simétrico (o de manera equivalente, es extrínsecamente simétrico) y  $G$  es el llamado grupo grande, o grupo de transformaciones básicas en la terminología de Takeuchi [37]. Los ejemplos más conocidos son las transformaciones conformes y proyectivas de la esfera  $S^n$ , las biholomorfias de las cuádricas complejas y las aplicaciones de las grassmannianas inducidas por isomorfismos lineales. Más generalmente, los  $R$ -espacios, modelos homogéneos de las muy estudiadas geometrías parabólicas [10, 35], admiten acciones de grupos de Lie de dimensión finita que contienen a las isometrías.

En [32] y [25] se estudia la dinámica no rígida (y no invariante) para el más simple de los  $R$ -espacios simétricos, la esfera, para sus dos grupos grandes, asociados a las acciones por transformaciones conformes o proyectivas. También podemos mencionar [9] (movimientos libres de fuerzas afines en el espacio euclídeo).

Otro de los problemas fundamentales en esta área, aparte de la existencia y regularidad del flujo geodésico, es su completitud, relacionada con la aparición de los llamados shocks. Las dos primeras cuestiones (existencia y regularidad) tienen interés solo en dimensión infinita. La tercera (completitud), también en dimensión finita (por supuesto, solo cuando el espacio de configuraciones no sea homogéneo), y aparece naturalmente, como hemos señalado, cuando el grupo actúa sin preservar el volumen.

En dimensión finita, en caso de ser invariante, la métrica energía cinética (como toda métrica invariante) es completa. Como en dimensión infinita no vale el teorema

de Hopf-Rinow, incluso para métricas invariantes, la completitud depende de la regularidad. Bruveris y Vialard investigan esta temática con profundidad en [8]. En [5] se encuentran condiciones suficientes para la completitud en el caso semi-invariante.

En esta tesis estudiamos la dinámica de los movimientos de Möbius de los grupos unitarios, recurriendo principalmente a las simetrías de los sistemas, con el interés de avanzar en la comprensión de los movimientos no rígidos en dimensión finita. En este contexto aparecen naturalmente métricas no invariantes en grupos de Lie.

Consideramos los grupos de Lie clásicos compactos  $M = SO_n$ ,  $U_n$  y  $Sp_n$ , esto es, los grupos unitarios sobre los números reales, complejos y cuaterniónicos,  $\mathbb{H}$  (en cada caso, la componente conexa de la identidad de los grupos de automorfismos de las formas hermitianas definidas positivas sobre estos campos escalares) y los correspondientes grupos unitarios split  $G = O_o(n, n)$ ,  $SU(n, n)$  y  $Sp(n, n)$  (ver la Subsección 2.1.2). Recordamos la acción birracional estándar  $*$  de  $G$  sobre  $M$  en cada caso:

$$(1.0.1) \quad * : G \times M \rightarrow M, \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} * U = (AU + B)(CU + D)^{-1},$$

y la llamamos la **acción de Möbius** de  $G$  sobre  $M$ . Geométricamente, esta acción viene de la identificación de  $M$  con la grassmanniana de subespacios isotrópicos maximales, asignando a cada operador  $U$  en  $M$  su gráfica del segundo al primer factor (ver las Secciones 2.2 y 2.3) y la acción natural de  $G$  sobre esta grassmanniana. Si

$$(1.0.2) \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ux \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AUx + B \\ CUx + D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U'y \\ y \end{pmatrix}$$

para  $x, y = y(x) \in \mathbb{F}^n$  (donde  $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  o  $\mathbb{H}$ ), entonces  $U'$  es el miembro derecho de (1.0.1).

Salvo cubrimientos y componentes conexas,  $G$  es el grupo grande de  $M$ . En [33] se muestra que es el grupo de difeomorfismos de  $M$  que llevan círculos en círculos (ciertas curvas distinguidas en  $M$  determinadas por tres puntos genéricos).

Consideramos ahora la estructura riemanniana en  $M$  inducida por la inclusión en el espacio  $\mathbb{F}^{n \times n}$  de matrices  $n \times n$  con entradas en  $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  o  $\mathbb{H}$ , dotado del producto interno real dado por

$$(1.0.3) \quad \langle X, Y \rangle = \operatorname{Re} \left( \operatorname{tr} \left( \overline{X}^T Y \right) \right),$$

donde el superíndice  $T$  denota transposición. Resulta que la métrica en  $M$  es bi-invariante y también que las transformaciones de Möbius no son necesariamente isometrías (ver la Subsección 2.1.3).

Nos interesa la dinámica no rígida inducida por estas acciones no isométricas. Supongamos que  $M$  tiene inicialmente una distribución homogénea de masa de densidad constante 1 y que a los puntos se les permite moverse solamente de manera tal que dos configuraciones difieran en un elemento de  $G$ . Entonces el **espacio de configuraciones** se identifica naturalmente con  $G$  (salvo para un número finito de elementos que actúan como la identidad), a condición de que la acción sea casi efectiva. Este es el caso excepto para  $G = O_o(2, 2)$ . Por esta razón, a menos que se indique lo contrario, en lo que sigue supondremos que  $n > 2$  cuando  $M = SO_n$ . No obstante, en pos de ser exhaustivos, describimos la acción de Möbius de  $O_o(2, 2)$  sobre  $SO_2$  en la Proposición 25.

Una curva  $\gamma$  en  $G$  se puede pensar como un **movimiento** de  $M$ . La métrica riemanniana en  $M$  nos permite considerar la energía de un movimiento y esto induce una métrica riemanniana en  $G$ , introducida originalmente por Arnold en [2], llamada la **métrica energía cinética** en  $G$  asociada a la acción sobre  $M$ , con la propiedad de que los **movimientos libres de fuerzas** (pensados como curvas en  $G$ ) corresponden a las **geodésicas** de  $G$ , vía el Principio de Mínima Acción.

Para cada  $g \in G$  y  $X \in T_g G$ , la norma al cuadrado de  $X$  para la métrica energía cinética resulta ser

$$\|X\|^2 = \int_M \left| \frac{d}{dt} \right|_0 \left( g e^{tX} * q \right)^2 d\mu(q),$$

donde  $|v|$  denota la norma de un vector tangente  $v$  a  $M$  (ver la Sección 2.5).

La métrica energía cinética en  $G$  es la restricción a  $G$  de la métrica riemanniana débil usual en  $\operatorname{Diff}(M)$  [12] y la ecuación para las geodésicas puede ser interpretada

como la **ecuación invíscida de Burgers con restricciones de Möbius** (ver § 4.1 en [23]).

Ahora establecemos nuestro primer resultado acerca de la geometría de  $G$ , su incompletitud. Denotamos  $I_n$  y  $0_n$  a las matrices identidad y nula  $n \times n$ , respectivamente.

**TEOREMA 1.** *Sea  $G$  munido de la métrica energía cinética. Entonces la curva  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$  definida por*

$$\gamma(t) = \exp \left( t \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \cosh t \, I_n & \sinh t \, I_n \\ \sinh t \, I_n & \cosh t \, I_n \end{pmatrix}$$

*es la reparametrización de una geodésica inextensible en  $G$  de longitud finita. En particular,  $G$  no es completo y la métrica energía cinética en  $G$  no es invariante a derecha ni a izquierda.*

Hemos mencionado arriba el trabajo de Bruveris y Vialard [8] sobre la completitud en el caso invariante. Para el caso semi-invariante, en el artículo reciente [5], Bauer y Modin dan condiciones *suficientes* para la completitud. Notar que la métrica energía cinética en  $G$  que consideramos en esta tesis es semi-invariante en el sentido de [5], como veremos en la Proposición 3.

La incompletitud, en un contexto clásico, corresponde a la existencia de **shocks** (colapsos en tiempo finito). Volviendo a nuestro caso, la siguiente proposición muestra el comportamiento de la masa cuando  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \gamma(t)$ .

**PROPOSICIÓN 2.** *Si  $M \neq SO_n$  con  $n$  impar, bajo la acción de  $\gamma$ , la masa en  $M$  se concentra en  $\pm I_n$  cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ . Más precisamente, para  $\varepsilon = \pm 1$ ,*

$$\lim_{t \rightarrow \varepsilon\infty} \gamma(t) * q = \varepsilon I_n$$

*para todo  $q \in \{p \in M \mid p \text{ no tiene autovalor } -\varepsilon\}$ , que es un conjunto abierto y denso en  $M$ . Si  $M = SO_n$  con  $n$  impar, entonces la misma propiedad vale para  $\varepsilon = 1$ .*

Comparar con el enfoque de Khesin y Misiołek en [22] para estimar la irrupción de shocks para la ecuación invíscida de Burgers.

Ahora consideramos los subgrupos compactos maximales  $K \equiv SO_n \times SO_n$ ,  $S(U_n \times U_n)$  y  $Sp_n \times Sp_n$  de  $G$  (para las tres posibilidades diferentes para  $G$ , esto es,  $O_o(n, n)$ ,  $SU(n, n)$  y  $Sp(n, n)$ ). Es decir, en la forma matricial para los elementos de  $G$  en (1.0.1), los de  $K$  son exactamente aquellos con  $B = C = 0$ . Notar que  $K$  coincide con  $M \times M$  o está contenido en ese producto.

Observamos que

$$(1.0.4) \quad \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & D \end{pmatrix} * U = AUD^{-1},$$

o sea que la acción de Möbius restringida a  $K$  coincide esencialmente con la acción canónica de  $M \times M$  en  $M$ .

Salvo cubrimientos y componentes conexas,  $K$  es el grupo de isometrías de  $M$ , o, en nuestro contexto dinámico, el grupo de las transformaciones rígidas de  $M$ .

Aunque la métrica energía cinética en  $G$  no es invariante, tiene ciertas **simetrías** dadas por la acción de  $K \times K$ , como indica la siguiente proposición, que sitúa este tema en el marco de [5].

**PROPOSICIÓN 3.** a) *La acción de  $K \times K$  sobre  $G$  dada por  $(k_1, k_2)(g) = k_1 g k_2^{-1}$  es por isometrías de la métrica energía cinética de  $G$ .*

b) *La métrica riemanniana en  $K$  inducida por la métrica energía cinética de  $G$  es bi-invariante; más aún, es la restricción a  $K$  de una métrica producto en  $M \times M$  tal que la aplicación  $\rho : K \rightarrow K$  dada por  $\rho(g, h) = (h, g)$  es una isometría.*

Como la métrica en  $K$  es bi-invariante, las geodésicas  $\sigma$  en  $K$  por la identidad son de la forma  $\sigma(t) = \exp(tX)$  con  $X \in \mathfrak{k}$ , donde  $\mathfrak{k}$  denota al álgebra de Lie de  $K$ . El siguiente teorema responde parcialmente a la cuestión de si son también geodésicas en  $G$ . Denotaremos  $\text{diag}(A, B)$  a la matriz diagonal con bloques diagonales  $A$  y  $B$ , y  $\mathfrak{m}$  al álgebra de Lie de  $M$ .

TEOREMA 4. *Sea  $G$  munido de la métrica energía cinética y supongamos que  $Z \in \mathfrak{k}$  es igual a  $\text{diag}(X, 0_n)$  o  $\text{diag}(0_n, X)$ , donde  $X \in \mathfrak{m}$ . Entonces la geodésica  $\gamma(t) = \exp(tZ)$  de  $K$  es también una geodésica de  $G$ .*

En el Corolario 6 damos un refinamiento de este resultado en algunos casos de baja dimensión.

En lo que sigue, presentamos algunas subvariedades totalmente geodésicas  $N$  de  $G$  munido de la métrica energía cinética. En nuestro escenario dinámico, esto significa que si un movimiento libre de fuerzas comienza tangente a  $N$ , entonces permanece en  $N$ .

TEOREMA 5. *Las siguientes inclusiones determinan subvariedades totalmente geodésicas (en todos los casos el grupo ambiente  $G$  porta la métrica energía cinética y el subgrupo, la métrica inducida):*

- a)  $O_o(n, n) \subset SU(n, n)$ ,
- b)  $U(n, n) \subset Sp(n, n)$ ,
- c)  $O_o(n, n) \subset Sp(n, n)$ ,
- d)  $U(n, n) \subset O_o(2n, 2n)$ ,
- e)  $Sp(n, n) \subset O_o(4n, 4n)$ .

Las inclusiones se explicitan en el Capítulo 4, donde también se da la demostración del teorema. En [18, 27] se estudian subgrupos totalmente geodésicos cuando la métrica energía cinética es invariante.

Finalmente, es bien conocido que en dimensiones bajas hay isomorfismos (salvo cubrimientos) entre algunos de los grupos  $G$  que estamos considerando en esta tesis y  $SL_m(\mathbb{R})$  o  $O_o(1, m)$ . Para  $m = 3$ , estos últimos actúan en  $S^3$  por transformaciones proyectivas o conformes, respectivamente, mientras que para  $m = 2$  lo hacen de manera canónica en la circunferencia. La dinámica de estas acciones se estudió en [32], [25] y [15]. Nos preguntamos si los resultados de estos artículos tienen implicaciones

en la dinámica de los movimientos de Möbius de los grupos unitarios. Para ello, para  $m = 3$  probamos que las acciones correspondientes sobre los grupos unitarios, por un lado, y sobre la esfera, por el otro, son equivalentes (ver las Secciones 7.1 y 7.2). Esto, que a nuestro entender tiene interés en sí mismo, hasta donde sabemos, no ha sido tratado en la literatura. La tarea resultó ser más demandante de lo esperado, si bien la existencia de los morfismos entre los grupos es conocida. Trasladando los resultados de [32] y [25], obtenemos una versión más fuerte del Teorema 4 en dimensiones bajas:

**PROPOSICIÓN 6.** *Sean  $Sp(1, 1)$  y  $O_o(3, 3)$  munidos de las respectivas métricas energía cinética. Entonces:*

- a) *El subgrupo  $Sp_1 \times Sp_1$  es totalmente geodésico en  $Sp(1, 1)$ .*
- b) *Una geodésica en  $SO_3 \times SO_3$  es una geodésica en  $O_o(3, 3)$  si y solo si permanece en uno de los factores.*

Esta proposición provee además una nueva perspectiva para uno de los teoremas de [25].

La tesis está organizada en siete capítulos. En este, el primero, introducimos la temática y enunciamos los resultados principales, al mismo tiempo que los ponemos en contexto.

El Capítulo 2 corresponde a los preliminares, donde presentamos los conceptos de la introducción con más detalles, que en algunos casos, hasta donde sabemos, no son accesibles de forma explícita en la literatura. Aquí también incluimos las propiedades que necesitamos, así como las herramientas básicas para probar los teoremas.

En los capítulos del 3 al 7 se encuentran las demostraciones.

## Capítulo 2

### Preliminares

#### 2.1. Grupos unitarios

**2.1.1. Los cuaterniones.** Recordamos que  $\mathbb{H}$ , el álgebra de división normada de los cuaterniones, es el espacio euclídeo con base ortonormal  $\{1, i, j, k\}$ , provisto de la multiplicación (asociativa, pero no conmutativa) definida en esa base mediante

$$(2.1.1) \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j, \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

extendida de manera bilineal a  $\mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ . Denotamos  $|q|$  a la norma de  $q \in \mathbb{H}$ .

Dado  $q = a + bi + cj + dk$ , con  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , se denota

$$\operatorname{Re} q = a \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} q = bi + cj + dk$$

a las partes real e imaginaria de  $q$ , respectivamente. Si  $\operatorname{Re} q = 0$  se dice que  $q$  es imaginario puro. Al conjunto de tales cuaterniones lo llamamos  $\operatorname{Im}(\mathbb{H})$ . Se cumple que si  $\xi \in \operatorname{Im}(\mathbb{H})$ , digamos,  $\xi = bi + cj + dk$ , entonces por (2.1.1) tenemos que

$$(2.1.2) \quad \xi^2 = (bi + cj + dk)^2 = -(b^2 + c^2 + d^2) = -|\xi|^2.$$

El conjugado de  $q$  es  $\bar{q} = \operatorname{Re}(q) - \operatorname{Im}(q)$  y vale que

$$(2.1.3) \quad \overline{pq} = \bar{q} \bar{p} \quad \text{y} \quad \langle p, q \rangle = \operatorname{Re} \bar{p}q = \operatorname{Re} p\bar{q}$$

para todo  $p, q \in \mathbb{H}$ . En particular, si  $\{p, q\}$  es ortogonal, tenemos que  $\bar{p}q$  es imaginario puro, con lo cual,

$$(2.1.4) \quad p\bar{q} = -\overline{\bar{p}q} = -q\bar{p}.$$

También,  $|q|^2 = \operatorname{Re} \bar{q}q$ . Se satisface que  $|pq| = |p||q|$  y que todo elemento no nulo  $q$  tiene inverso multiplicativo  $q^{-1} = \bar{q}/|q|^2$ . En particular, la esfera  $S^3$  de los cuaterniones unitarios es un grupo de Lie.

Para  $q \in \mathbb{H}$  se definen  $L_q : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  y  $R_q : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  mediante

$$(2.1.5) \quad L_q(p) = qp \quad \text{y} \quad R_q(p) = pq$$

para todo  $p \in \mathbb{H}$ . Notemos que si  $\xi \in \text{Im}(\mathbb{H})$ ,  $L_\xi$  y  $R_\xi$  son ambas transformaciones antisimétricas; de hecho,

$$(2.1.6) \quad \langle L_\xi(p), p \rangle = \langle \xi p, p \rangle = \text{Re}(\xi p \bar{p}) = \text{Re}(\xi |p|^2) = \text{Re}(\xi) |p|^2 = 0$$

para todo  $p \in \mathbb{H}$  (y de manera similar para  $R_\xi$ ). Además, si  $\xi, \eta \in \text{Im}(\mathbb{H})$ , entonces

$$(2.1.7) \quad L_\xi = R_\eta \text{ si y solo si } \xi = \eta = 0.$$

En efecto, evaluando en 1 resulta que  $\xi = \eta$ . Así,  $\xi$  está en el centro de  $\mathbb{H}$ , que es  $\mathbb{R}$ , como se verifica fácilmente. Luego  $\xi = 0$ . Esto se puede visualizar mejor escribiendo  $\xi = xi + yj + zk$  y comparando las entradas de las matrices

$$L_\xi = \begin{pmatrix} 0 & -x & -y & -z \\ x & 0 & -z & y \\ y & z & 0 & -x \\ z & -y & x & 0 \end{pmatrix}, \quad R_\xi = \begin{pmatrix} 0 & -x & -y & -z \\ x & 0 & z & -y \\ y & -z & 0 & x \\ z & y & -x & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea  $o_n$  el espacio vectorial de las transformaciones antisimétricas de  $\mathbb{R}^n$ , el álgebra de Lie del grupo ortogonal especial  $SO_n$  de los operadores ortogonales de  $\mathbb{R}^n$  con determinante 1.

Llamando

$$\mathcal{L} = \{L_\xi \mid \xi \in \text{Im}(\mathbb{H})\} \quad \text{y} \quad \mathcal{R} = \{R_\eta \mid \eta \in \text{Im}(\mathbb{H})\},$$

e identificando  $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H}$ , tenemos la descomposición

$$(2.1.8) \quad o_4 = \mathcal{L} \oplus \mathcal{R},$$

que tiene asociada la bien conocida presentación

$$(2.1.9) \quad SO_4 = \{L_p \circ R_{\bar{q}} \mid p, q \in S^3\}$$

(notar que como  $|pq| = |p||q|$  para todo  $p, q \in \mathbb{H}$ , se cumple que  $L_p$  y  $R_q$  son isometrías  $\mathbb{R}$ -lineales de  $\mathbb{H}$  si  $p, q \in S^3$ ). También contamos con una descripción similar para  $SO_3$ , a saber,

$$(2.1.10) \quad SO_3 = \{L_p \circ R_{\bar{p}} \mid p \in S^3\}$$

(previa identificación de  $\text{Im}(\mathbb{H})$  con  $\mathbb{R}^3$ ).

Por último, para una referencia posterior, señalamos que para todo  $\eta \in \text{Im}(\mathbb{H})$  se cumple que

$$(2.1.11) \quad \exp_{SO_4}(L_\eta) = L_{e^\eta} \quad \text{y} \quad \exp_{SO_4}(R_\eta) = R_{e^\eta}.$$

En efecto, para todo  $p \in \mathbb{H}$  tenemos

$$(\exp(L_\eta))(p) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (L_\eta)^j p = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (L_{\eta^j}) p = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \eta^j p = e^\eta p = L_{e^\eta}(p).$$

La verificación para la multiplicación a derecha es análoga.

**2.1.2. Los grupos unitarios.** En esta subsección repasamos la definición de los grupos unitarios sobre  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  y  $\mathbb{H}$ . Vamos a considerar a  $\mathbb{H}^n$  como un  $\mathbb{H}$ -espacio vectorial a derecha. Por la asociatividad de  $\mathbb{H}$  tenemos en particular que  $(xq)p = x(qp)$  vale para todo  $x \in \mathbb{H}^n$  y todo  $q, p \in \mathbb{H}$ .

Una transformación  $f : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$  se dice  $\mathbb{H}$ -lineal si

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{y} \quad f(xq) = f(x)q$$

para todo  $x, y \in \mathbb{H}^n$  y  $q \in \mathbb{H}$ . Sea  $A \in \mathbb{H}^{n \times n}$ , el espacio de matrices  $n \times n$  con entradas en  $\mathbb{H}$ . Se cumple que la aplicación

$$f_A : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n, \quad f_A(x) = Ax$$

es una transformación  $\mathbb{H}$ -lineal (ver por ejemplo [19]). Las matrices  $A^T$ ,  $\bar{A}$  y  $A^{-1}$  se definen de la manera usual (la barra denota conjugación y el superíndice  $T$  indica transposición). Usaremos repetidamente que

$$\overline{(AB)}^T = \bar{B}^T \bar{A}^T$$

vale para toda  $A, B \in \mathbb{H}^{n \times n}$ . Advertimos que, en general,

$$(2.1.12) \quad \begin{aligned} (AB)^T &\neq B^T A^T, & \overline{(AB)} &\neq \overline{B} \overline{A}, \\ (A^{-1})^T &\neq (A^T)^{-1}, & (\overline{A})^{-1} &\neq \overline{(A^{-1})}, \end{aligned}$$

en contraste con propiedades bien conocidas para matrices con entradas en  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$  (ver el Teorema 4.1 de [40]).

Sea  $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  o  $\mathbb{H}$ . Para  $n \in \mathbb{N}$  y  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  llamamos  $b_{n,m}^{\mathbb{F}} : \mathbb{F}^{n+m} \times \mathbb{F}^{n+m} \rightarrow \mathbb{F}$  a la forma sesquilineal

$$(2.1.13) \quad b_{n,m}^{\mathbb{F}}((x, y), (\xi, \eta)) = \overline{x}^T \xi - \overline{y}^T \eta,$$

donde  $x, \xi \in \mathbb{F}^n$ , e  $y, \eta \in \mathbb{F}^m$  (si  $m \neq 0$ ) son vectores columna.

La forma  $b_{n,m}^{\mathbb{F}}$  se llama el  **$\mathbb{F}$ -producto interno simétrico hermitiano de signatura  $(n, m)$**  en  $\mathbb{F}^{n+m}$  y el espacio  $\mathbb{F}^{n+m}$  munido de esta forma se denomina  $\mathbb{F}^{n,m}$ .

Un isomorfismo  $\mathbb{F}$ -lineal  $A : \mathbb{F}^{n+m} \rightarrow \mathbb{F}^{n+m}$  es un **automorfismo** de  $\mathbb{F}^{n,m}$  si

$$b_{n,m}^{\mathbb{F}}(Az, Aw) = b_{n,m}^{\mathbb{F}}(z, w)$$

para todo  $z, w \in \mathbb{F}^{n+m}$ . Estos automorfismos se llaman operadores unitarios de signatura  $(n, m)$  sobre  $\mathbb{F}$  y forman un grupo que denotamos  $U(n, m, \mathbb{F})$ , que claramente es un subgrupo cerrado de  $GL(n+m, \mathbb{F})$  (los endomorfismos  $\mathbb{F}$ -lineales invertibles de  $\mathbb{F}^{n+m}$ ) y por lo tanto es un grupo de Lie. Para  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ,  $SU(n, m, \mathbb{F})$  es el subgrupo de  $U(n, m, \mathbb{F})$  de todas las transformaciones con determinante igual a uno.

Estamos interesados en los casos donde  $n = m$  o  $m = 0$ . Más brevemente, por comodidad, llamaremos  $U(n, \mathbb{F}) = U(n, 0, \mathbb{F})$ . Entonces, para cada  $n \in \mathbb{N}$  tenemos, por un lado, los grupos ortogonal, unitario y simpléctico,

$$U(n, \mathbb{R}) = O_n, \quad U(n, \mathbb{C}) = U_n \quad \text{y} \quad U(n, \mathbb{H}) = Sp_n$$

(este último es también llamado  $HU(n)$ ), y por el otro

$$U(n, n, \mathbb{R}) = O(n, n), \quad U(n, n, \mathbb{C}) = U(n, n) \quad \text{y} \quad U(n, n, \mathbb{H}) = Sp(n, n)$$

(el último se conoce también como  $HU(n, n)$ ).

**2.1.3. La métrica bi-invariante.** Consideramos en  $\mathbb{F}^{n \times n}$  el producto interno real definido por

$$\langle X, Y \rangle = \operatorname{Re} \left( \operatorname{tr} \left( \overline{X}^T Y \right) \right)$$

para todo  $X, Y \in \mathbb{F}^{n \times n}$ . Es claro que es bilineal y definido positivo. La conmutatividad se deduce de que  $\operatorname{Re} \left( \operatorname{tr} \left( \overline{Z}^T \right) \right) = \operatorname{Re} (\operatorname{tr} (Z))$  para todo  $Z \in \mathbb{F}^{n \times n}$ .

Observamos que para este producto interno, la base

$$\{qE^{s,t} \mid 1 \leq s, t \leq n \text{ y } q = 1, i, j, k\}$$

de  $\mathbb{H}^{n \times n}$  es ortonormal, donde  $(E^{s,t})_{i,j} = \delta_{is}\delta_{jt}$ . Descripciones análogas valen para  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ .

**PROPOSICIÓN 7.** *Este producto interno real en  $\mathbb{F}^{n \times n}$  es bi-invariante por la acción de  $U(n, \mathbb{F})$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Dados  $A, B \in U(n, \mathbb{F})$ , sean  $L_A, R_B : \mathbb{F}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{F}^{n \times n}$  la multiplicación a izquierda por  $A$  y a derecha por  $B$ , respectivamente, o sea,  $L_A(X) = AX$  y  $R_B(X) = XB$ , para todo  $X$ .

Basta ver que  $L_A$  y  $R_B$  son isometrías  $\mathbb{R}$ -lineales de  $\mathbb{F}^{n \times n}$ . Antes de efectuar los cálculos recordamos que

$$\operatorname{Re}(\operatorname{tr}(XY)) = \operatorname{Re}(\operatorname{tr}(YX))$$

para todo  $X, Y \in \mathbb{F}^{n \times n}$ , incluso para  $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ , donde dicha propiedad se deduce del hecho de que dados  $p, q \in \mathbb{H}$ ,  $\operatorname{Re}(pq) = \operatorname{Re}(qp)$  aún si  $p$  y  $q$  no conmutan. También,  $\overline{Z}^T Z = I$  vale si y solo si  $Z \overline{Z}^T = I$ , pues  $\mathbb{F}$  es asociativo.

Calculamos

$$\begin{aligned}
\langle L_A R_B X, L_A R_B Y \rangle &= \operatorname{Re} \left( \operatorname{tr} \left( \overline{A X B}^T A Y B \right) \right) \\
&= \operatorname{Re} \left( \operatorname{tr} \left( \overline{B}^T \overline{X}^T \overline{A}^T A Y B \right) \right) \\
&= \operatorname{Re} \left( \operatorname{tr} \left( \overline{B}^T \overline{X}^T Y B \right) \right) \\
&= \operatorname{Re} \left( \operatorname{tr} \left( \overline{X}^T Y B \overline{B}^T \right) \right) \\
&= \operatorname{Re} \left( \operatorname{tr} \left( \overline{X}^T Y \right) \right) \\
&= \langle X, Y \rangle. \quad \square
\end{aligned}$$

PROPOSICIÓN 8. *La conjugación  $C : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $C(X) = \overline{X}$ , es una isometría  $\mathbb{R}$ -lineal.*

DEMOSTRACIÓN. Como  $\operatorname{Re}(\operatorname{tr}(Z)) = \operatorname{Re}(\operatorname{tr}(\overline{Z}))$  y  $\overline{Z^T} = \overline{Z}^T$  se cumplen para todo  $Z \in \mathbb{F}^{n \times n}$ , tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle \bar{X}, \bar{Y} \rangle &= \operatorname{Re}(\operatorname{tr}(X^T \bar{Y})) = \operatorname{Re}(\operatorname{tr}(\overline{X^T Y})) = \operatorname{Re}(\operatorname{tr}(\overline{X^T} \overline{Y})) \\
&= \operatorname{Re}(\operatorname{tr}(\overline{X}^T Y)) = \langle X, Y \rangle
\end{aligned}$$

para todo  $X, Y \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , pues  $\overline{AB} = \overline{A} \overline{B}$  vale para todo  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ .  $\square$

En  $U(n, \mathbb{F}) \subset \mathbb{F}^{n \times n}$  consideramos la métrica riemanniana inducida.

COROLARIO 9. a) *La métrica riemanniana inducida en  $U(n, \mathbb{F})$  es bi-invariante.*

b) *La conjugación  $C : U_n \rightarrow U_n$ ,  $C(A) = \overline{A}$ , es una isometría de  $U_n$  con la métrica riemanniana inducida de  $\mathbb{C}^{n \times n}$ .*

DEMOSTRACIÓN. Las afirmaciones siguen de las dos proposiciones anteriores, pues  $L_A$  y  $R_B$  preservan  $U(n, \mathbb{F})$  y  $C$  preserva  $U_n$ .  $\square$

**2.1.4. La fórmula de integración de Weyl.** Necesitaremos integrar sobre los grupos unitarios munidos de las métricas bi-invariantes. Nos será de suma utilidad la fórmula de integración de Weyl para estos grupos.

Comenzamos presentando una definiciones. Sea  $H$  un grupo de Lie compacto. Se dice que una función  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$  es **central** (también llamada **función de clases**)

si  $f(BAB^{-1}) = f(A)$  para todo  $A, B \in H$ . Además, un **toro maximal** en  $H$  es un subgrupo de Lie abeliano y conexo de  $H$  que es maximal entre los subgrupos con tales propiedades (en particular, es difeomorfo a un toro).

Para los grupos unitarios introducidos más arriba, y también para sus componentes conexas de la identidad, los siguientes subgrupos  $T$  son toros maximales (cuando esté claro por el contexto, omitiremos escribir la dependencia de  $D$  del grupo unitario correspondiente):

- Para  $SO_{2m}$ ,  $T = \{D(\theta_1, \dots, \theta_m) \mid \theta_j \in \mathbb{R}\}$ , donde  $D(\theta_1, \dots, \theta_m)$  es igual a  $\text{diag}(R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_m})$ , con

$$R_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

- Para  $SO_{2m+1}$ ,  $T = \{D(\theta_1, \dots, \theta_m) \mid \theta_j \in \mathbb{R}\}$ , donde  $D(\theta_1, \dots, \theta_m)$  es igual a  $\text{diag}(R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_m}, 1)$ .

- Para  $U_n$  o  $Sp_n$ ,  $T = \{D(\theta_1, \dots, \theta_n) \mid \theta_j \in \mathbb{R}\}$ , donde  $D(\theta_1, \dots, \theta_n)$  es igual a  $\text{diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})$ .

Sea  $H$  un grupo de Lie compacto munido de una métrica riemanniana bi-invariante, sea  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$  una función central y sea  $T$  un toro maximal de  $H$ . De la **fórmula de integración de Weyl**, que no necesitamos en detalle (ver por ejemplo [36]), se deduce que

$$\int_H f(A) d\mu(A) = \int_T f(X) F(X) d\nu(X),$$

para cierta función acotada  $F : T \rightarrow (0, \infty)$ , donde  $\mu$  y  $\nu$  son las formas de volumen de  $H$  y  $T$ , respectivamente. En particular, si  $f \geq 0$ ,

$$(2.1.14) \quad \int_H f(A) d\mu(A) \leq C \int_T f(D(\theta_1, \dots, \theta_n)) d\theta_1 \cdots d\theta_n,$$

para cierta constante positiva  $C$ .

En [36] encontramos las fórmulas precisas correspondientes para  $Sp_n$  (Teorema IX.9.3),  $SO_{2m+1}$  (Teorema IX.9.4) y  $SO_{2m}$  (Teorema IX.9.5), y en [26] para  $U_n$  (Teorema 3.1).

Por ejemplo, para los grupos  $U_n$  y  $Sp_n$  con volumen unitario y toros maximales como arriba, tenemos que

$$F(D(\theta_1, \dots, \theta_n)) = \frac{2}{(2\pi)^n n!} \prod_{j < k} |e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}|^2$$

para el primero, mientras que para el segundo vale

$$F(D(\theta_1, \dots, \theta_n)) = \frac{1}{n! 2^n} \frac{1}{(2\pi)^n} \left( \prod_{i < j} 2(\cos \theta_i - \cos \theta_j) \prod_{i=1}^n 2 \sin \theta_i \right)^2.$$

**2.1.5. La descomposición  $KAK$ .** En las pruebas de las Proposiciones 28 y 33 vamos a necesitar descomposiciones canónicas de los grupos  $Sp(1, 1)$  y  $SL_4(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \mid \det A = 1\}$ , específicamente, las llamadas descomposiciones  $KAK$ , que repasamos a continuación basándonos en [24] (aunque no enunciamos los resultados en su mayor generalidad).

Sea  $H$  un grupo de Lie conexo semisimple de matrices y sea  $\mathfrak{h}$  su álgebra de Lie. Sea  $\theta$  un automorfismo involutivo de  $\mathfrak{h}$  tal que  $\theta^2 = \text{id}$  (en particular, los autovalores de  $\theta$  son 1 y  $-1$ ) y sean  $\mathfrak{k}$  y  $\mathfrak{p}$  los autoespacios de autovalores 1 y  $-1$ , respectivamente. Tenemos entonces la llamada descomposición de Cartan  $\mathfrak{h} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ .

Se cumple que  $\mathfrak{k}$  es una subálgebra de  $\mathfrak{h}$  y el subgrupo conexo de  $H$  asociado, que llamamos  $K$ , es un subgrupo compacto maximal de  $H$ . Sea  $\mathfrak{a}$  un subespacio abeliano maximal de  $\mathfrak{p}$ . Sea  $A$  el subgrupo conexo de  $H$  con álgebra de Lie  $\mathfrak{a}$ . Entonces se cumple que

$$H = KAK,$$

es decir, cualquier elemento  $h \in H$  se puede escribir como un producto  $k_1 a k_2$ , con  $a \in A$  y  $k_1, k_2 \in K$ .

Para  $SL_4(\mathbb{R})$  se trata simplemente de la conocida descomposición en valores singulares, pero de todos modos lo situamos en este marco más amplio, lo cual sentará las bases para el caso  $Sp(1, 1)$ . Tenemos que  $\mathfrak{h} = \{X \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \mid \text{tr} X = 0\}$  y

$$\theta(X) = -X^T, \quad \mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{h} \mid X^T = -X\} \quad \text{y} \quad \mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{h} \mid X^T = X, \text{tr} X = 0\}.$$

Como  $\mathfrak{a}$ , se puede tomar el conjunto de matrices diagonales en  $\mathfrak{h}$ . Resulta así que  $K = SO_4$  y  $A = \{\text{matrices diagonales } 4 \times 4 \text{ con determinante igual a } 1\}$ .

Para  $Sp(1, 1)$  tenemos por (5.0.1) que

$$(2.1.15) \quad \mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} \xi & \bar{\alpha} \\ \alpha & \eta \end{pmatrix} \mid \xi, \eta \in \text{Im } \mathbb{H}, \alpha \in \mathbb{H} \right\},$$

como automorfismo involutivo tomamos  $\theta : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$  definido por  $\theta(X) = -\bar{X}^T$ , con lo cual

$$\mathfrak{k} = \left\{ \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix} \mid \xi, \eta \in \text{Im } \mathbb{H} \right\} \quad \text{y} \quad \mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \bar{\alpha} \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{H} \right\}.$$

Se cumple que  $\mathfrak{a} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$  es un subespacio abeliano maximal en  $\mathfrak{p}$ . En efecto, dado un elemento  $\begin{pmatrix} 0 & \bar{\alpha} \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$  de un subespacio abeliano que lo contenga, tenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \bar{\alpha} \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\alpha} \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix}$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ , o sea,

$$\begin{pmatrix} t\alpha & 0 \\ 0 & t\bar{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\alpha}t & 0 \\ 0 & \alpha t \end{pmatrix},$$

con lo cual  $\alpha \in \mathbb{R}$  y en consecuencia  $\mathfrak{a}$  es maximal.

Finalmente,

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \mid p, q \in S^3 \right\} \equiv Sp_1 \times Sp_1,$$

$$A = \exp(\mathfrak{a}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

## 2.2. Los grupos unitarios como grassmannianas isotrópicas

Se dice que un  $\mathbb{F}$ -subespacio  $V$  de  $\mathbb{F}^{n,n}$  es **totalmente isotrópico** si

$$b_{n,n}^{\mathbb{F}}|_{V \times V} \equiv 0.$$

Es bien conocido que un subespacio totalmente isotrópico maximal debe tener dimensión  $n$  (ver por ejemplo el Capítulo 2 de [19]). Denotamos  $\text{Grass}_0(n, \mathbb{F})$  a la grassmanniana de subespacios maximales totalmente isotrópicos de  $\mathbb{F}^{n,n}$ .

Se sabe que los grupos unitarios se identifican con ciertas grassmannianas de subespacios nulos. Lo detallamos a continuación.

Dada  $T \in U(n, \mathbb{F})$ , denotamos  $\text{rgraf}(T)$  al gráfico de  $T$  reflejado con respecto a la diagonal, o equivalentemente, el gráfico de  $T^{-1}$ , o el gráfico de  $T$  como una aplicación del segundo factor en el primero.

**PROPOSICIÓN 10.** *La siguiente aplicación es una biyección:*

$$(2.2.1) \quad f : U(n, \mathbb{F}) \rightarrow \text{Grass}_0(n, \mathbb{F}), \quad f(T) = \text{rgraf}(T) = \{(Tx, x) \mid x \in \mathbb{F}^n\}.$$

**DEMOSTRACIÓN.** Veamos primero que  $f$  está bien definida. Si  $T \in U(n, \mathbb{F})$ , tenemos que  $b_{n,0}^{\mathbb{F}}(Tx, Ty) = b_{n,0}^{\mathbb{F}}(x, y)$ , esto es,  $\overline{(Tx)}^T(Ty) = \bar{x}^T y$ , para todo  $x, y \in \mathbb{F}^n$ . Luego,

$$b_{n,n}^{\mathbb{F}}((Tx, x), (Ty, y)) = \overline{(Tx)}^T(Ty) - \bar{x}^T y = \bar{x}^T y - \bar{x}^T y = 0.$$

Así,  $\text{rgraf}(T)$  es en efecto un subespacio totalmente isotrópico, y es maximal pues tiene dimensión  $n$ . De esta manera,

$$f(T) = \text{rgraf}(T) \in \text{Grass}_0(b_{n,n}^{\mathbb{F}}).$$

Además,  $f$  es claramente inyectiva. Ahora mostramos que también  $f$  es sobreyectiva. Si  $V \in \text{Grass}_0(n, \mathbb{F})$ , entonces

$$V \cap (\mathbb{F}^n \times \{0\}) = \{0\}$$

pues  $b_{n,n}^{\mathbb{F}}((x, 0), (x, 0)) > 0$  para todo  $x$  no nulo en  $\mathbb{F}^n$ . Para  $i = 1, 2$ , sean  $\pi_i : \mathbb{F}^{2n} \rightarrow \mathbb{F}^n$  las proyecciones canónicas dadas por  $\pi_1(x, y) = x$  y  $\pi_2(x, y) = y$ . Resulta que

$\pi_2|_V$  es inyectiva. De hecho,

$$0 = \pi_2(x, y) = y \Rightarrow (x, y) = (x, 0) \in (\mathbb{F}^n \times \{0\}) \cap V \Rightarrow x = 0.$$

Como  $V$  y  $\mathbb{F}^n$  tienen la misma dimensión,  $\pi_2|_V : V \rightarrow \mathbb{F}^n$  es un isomorfismo. Sea  $T = \pi_1 \circ (\pi_2|_V)^{-1}$ . Veamos que  $V = \text{rgraf}(T)$ . En efecto,  $(\pi_2|_V)^{-1}(y)$  es de la forma  $(u, y)$  con  $u \in \mathbb{F}^n$ , pues está en  $V$ . Ahora,

$$u = \pi_1(u, y) = \pi_1(\pi_2|_V)^{-1}(y) = Ty.$$

Así  $(Tx, x) \in V$  para todo  $x \in \mathbb{F}^n$ . Ergo,  $\text{rgraf}(T) \subset V$  y coinciden pues tienen la misma dimensión. Resta solo mostrar que  $T \in U(n, \mathbb{F})$ . Como  $(Tx, x), (Ty, y) \in V$  para todo  $x, y \in \mathbb{F}^n$  y  $V$  es totalmente isotrópico, tenemos que

$$b_{n,n}^{\mathbb{F}}((Tx, x), (Ty, y)) = 0.$$

Luego  $\overline{(Tx)}^T(Ty) - \bar{x}^T y = 0$  para todo  $x, y$ , lo que implica que  $T \in U(n, \mathbb{F})$ .  $\square$

En  $\text{Grass}_0(n, \mathbb{F})$  consideramos la estructura diferenciable inducida por la biyección de la proposición.

### 2.3. Transformaciones de Möbius de los grupos unitarios

El grupo  $U(n, n, \mathbb{F})$  actúa de manera natural en  $\text{Grass}_0(n, \mathbb{F})$ , pues sus elementos, al preservar el producto interno, llevan subespacios isotrópicos maximales en subespacios isotrópicos maximales.

Por el Teorema de Witt ([38]), la acción canónica de  $U(n, n, \mathbb{F})$  en  $\text{Grass}_0(n, \mathbb{F})$  es transitiva. En la Proposición 10 hemos identificado  $U(n, \mathbb{F})$  con  $\text{Grass}_0(n, \mathbb{F})$ , lo que induce una acción  $*$  de  $U(n, n, \mathbb{F})$  sobre  $U(n, \mathbb{F})$  que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} U(n, n, \mathbb{F}) \times U(n, \mathbb{F}) & \xrightarrow{*} & U(n, \mathbb{F}) \\ \downarrow (\text{id}, f) & & \downarrow f \\ U(n, n, \mathbb{F}) \times \text{Grass}_0(n, \mathbb{F}) & \longrightarrow & \text{Grass}_0(n, \mathbb{F}). \end{array}$$

A continuación la explicitamos, con lo cual queda justificada la expresión (1.0.1).

PROPOSICIÓN 11. *La acción de  $U(n, n, \mathbb{F})$  sobre  $U(n, \mathbb{F})$  está dada por*

$$(2.3.1) \quad T * U = (AU + B)(CU + D)^{-1}$$

para

$$(2.3.2) \quad T \in U(n, n, \mathbb{F}), \quad T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

con  $A, B, C, D \in \mathbb{F}^{n \times n}$ .

DEMOSTRACIÓN. Un elemento  $U \in U(n, \mathbb{F})$  tiene asociado mediante  $f$  el subespacio

$$(2.3.3) \quad \text{rgraf}(U) = \{(Ux, x) : x \in \mathbb{F}^n\} \in \text{Grass}_0(b_{\mathbb{F}}).$$

El grupo  $U(n, n, \mathbb{F})$  actúa en  $\text{Grass}_0(b_{\mathbb{F}})$  de la manera usual. Por lo tanto,  $T * U$  se corresponde con  $T(\text{rgraf}(U))$ , que será un elemento de  $\text{Grass}_0(b_{\mathbb{F}})$ , que por la Proposición 10 es igual a  $\text{rgraf}(U')$  para cierto  $U' \in U(n, \mathbb{F})$ . Si  $(Ux, x) \in \text{rgraf}(U)$ , tenemos que

$$T \begin{pmatrix} Ux \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AUx + Bx \\ CUx + Dx \end{pmatrix} \in \text{rgraf}(U')$$

para todo  $x \in \mathbb{F}^n$ . Poniendo  $y(x) = CUx + Dx$ , para todo  $x$  se cumple que

$$AUx + Bx = U'y(x) = U'(CUx + Dx)$$

o equivalentemente,  $AU + B = U'(CU + D)$ . Ahora bien,  $CU + D$  es una matriz invertible. En efecto, supongamos que existe  $x \in \mathbb{F}^n$  tal que  $(CU + D)x = 0$ . Entonces  $(AU + B)x = 0$  y así,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ux \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como  $T$  es invertible, deben ser  $Ux = 0$  y  $x = 0$ , de donde surge lo afirmado. Luego

$$U' = (AU + B)(CU + D)^{-1}.$$

Consecuentemente, la acción queda como en (2.3.1).  $\square$

Comentamos que el grupo  $G = U(n, n, \mathbb{F})$  actúa sobre la grassmanniana de subespacios espaciales maximales  $G_+(n, n)$  de  $\mathbb{F}^{n, n}$ , del cual  $M = U(n; F)$ , vía la identificación (2.2.1), es un borde, en el sentido de que está incluida en la frontera de  $G_+(n, n)$  y hereda la acción.

A continuación restringimos la acción de Möbius  $*$  de dos maneras, tomando componentes conexas en el caso real, por una cuestión de comodidad, y determinante unitario en el caso complejo, por razones que especificaremos en el curso de la subsección.

Llamamos  $U_o(n, m, \mathbb{F})$  a la componente conexa de la identidad de  $U(n, m, \mathbb{F})$ . Cuando  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$  o  $\mathbb{H}$ ,  $U(n, \mathbb{F})$  y  $U(n, n, \mathbb{F})$  son conexos. El grupo ortogonal  $O_n$  tiene dos componentes conexas y se cumple que  $(O_n)_o = SO_n$ , mientras que el grupo ortogonal split  $O(n, n)$  tiene cuatro componentes conexas (ver por ejemplo el Corolario 7 del Capítulo 9 de [29]).

En la Subsección 2.5 veremos la necesidad de trabajar con acciones casi efectivas. Recordamos que una acción  $\varphi : H \times N \rightarrow N$  continua de un grupo topológico  $H$  en un espacio topológico  $N$  se dice **efectiva** si  $\varphi(h, q) = q$  para todo  $q \in N$  solo si  $h$  es la identidad de  $H$ , y se dice **casi efectiva** si el núcleo de  $\varphi$ ,

$$\text{Ker}(\varphi) = \{h \in H \mid \varphi(h, q) = q \text{ para todo } q \in N\}$$

es un subconjunto discreto de  $H$ .

Por otro lado, la acción  $\varphi$  induce un morfismo de  $H$  en el grupo de homeomorfismos de  $N$ . Que este morfismo sea inyectivo, o que su núcleo sea discreto, equivalen a que la acción sea efectiva o casi efectiva, respectivamente. Al homeomorfismo correspondiente a  $h \in H$  lo llamamos  $\hat{h}$ , es decir,

$$(2.3.4) \quad q \mapsto \hat{h}(q) = \varphi(h, q).$$

Esta notación la usamos solo cuando existe riesgo de confusión; en general, por abuso de notación, identificaremos  $h$  con  $\hat{h}$ .

Un grupo de Lie  $H$  se dice simple si es conexo, no abeliano, y sus únicos subgrupos normales conexos son triviales (o sea, todo  $H$  o  $\{e\}$ ). Esta última condición equivale a que sus únicos subgrupos normales son discretos (ver por ejemplo [1]), en particular, los núcleos de los morfismos lo son. En consecuencia, toda acción no trivial suave de  $H$  sobre una variedad diferenciable es casi efectiva (por suave entenderemos siempre de clase  $C^\infty$ ).

Observamos que el grupo  $U(n, n)$  no actúa efectivamente sobre  $U_n$ . Más precisamente, la siguiente proposición afirma que el núcleo de la acción consiste en los múltiplos de la identidad con módulo 1.

PROPOSICIÓN 12. *Para todo  $T \in U(n, n)$  se cumple que*

$$T * U = U \text{ para todo } U \in U_n \quad \text{si y solo si} \quad T = uI_{2n} \text{ con } u \in S^1.$$

DEMOSTRACIÓN. Para  $u \in S^1$ , llamamos  $T_u = uI_{2n}$ . Supongamos primero que  $T = T_u = \text{diag}(uI_n, uI_n)$ . Entonces

$$(2.3.5) \quad T_u * U = (uI_n U)(uI_n)^{-1} = U$$

se cumple para todo  $u \in S^1 \subset \mathbb{C}$  y  $U \in U(n, \mathbb{F})$ .

Ahora mostramos la otra implicación. Sea  $T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in U(n, n)$  tal que  $T * U = U$  para todo  $U \in U_n$ , esto es,  $AU + B = U(CU + D)$  para todo  $U \in U_n$ . En particular esto vale para  $U = \lambda I_n$  con  $\lambda \in S^1$ . Evaluando en  $\lambda = 1, -1, i$  y  $-i$  obtenemos que  $A = D$  y  $B = C = 0$ . Así resulta que  $AU = UA$  para todo  $U \in U_n$ , esto es,  $A$  está en el centro de  $U_n$ . Ergo,  $A = uI_n$  con  $u \in S^1$ .  $\square$

Como corolario, la acción del grupo  $PU(n, n) = U(n, n)/S^1$  es efectiva. Pero, por la conveniencia de trabajar con grupos matriciales, consideraremos la acción del grupo  $SU(n, n)$  sobre  $U_n$ , que resulta casi efectiva, como muestra la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 13. *Las restricciones de las acciones de Möbius a los subgrupos  $O_o(n, n)$ ,  $SU(n, n)$  y  $Sp(n, n)$  sobre  $SO_n$ ,  $U_n$  y  $Sp_n$ , respectivamente, son transitivas y casi efectivas.*

DEMOSTRACIÓN. Como sabemos que la acción canónica de  $U(n, n, \mathbb{F})$  sobre  $U(n, \mathbb{F})$  es transitiva, la acción restringida a  $U_o(n, n, \mathbb{F})$  lo es sobre  $U_o(n, \mathbb{F})$  (ver por ejemplo la Proposición 1.2 del Capítulo II de [11]). En consecuencia,  $O_o(n, n)$ ,  $U(n, n)$  y  $Sp(n, n)$  actúan transitivamente sobre  $SO_n$ ,  $U_n$  y  $Sp_n$ , respectivamente.

Veamos ahora que la restricción de la acción de Möbius de  $U(n, n)$  a  $SU(n, n)$  sobre  $U_n$  es transitiva. Basta verificar que la órbita de  $I_n \in U_n$  bajo la acción de

$SU(n, n)$  es todo  $U_n$ . Sea  $B \in U_n$ . Como la acción de  $U(n, n)$  es transitiva, existe  $T \in U(n, n)$  tal que  $T * I_n = B$ . Sean  $v = (\det T)^{1/(2n)}$  y  $\tilde{T} = v^{-1}T$ . Usando (2.3.5), calculamos

$$\tilde{T} * I_n = T_{v^{-1}} * (T * I_n) = T * I_n = B.$$

Además,  $\tilde{T} \in SU(n, n)$  pues  $\tilde{T} \in U(n, n)$  y  $\det(\tilde{T}) = (v^{-1})^{2n} \det T = 1$ .

Finalmente, notemos que los grupos  $O_o(n, n)$ ,  $SU(n, n)$  y  $Sp(n, n)$  son simples (recordemos que hemos excluido  $O_o(2, 2)$ ). Luego, las acciones son casi efectivas, por lo observado más arriba. Incluimos la prueba para el caso  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ , ya que es directa: Sea  $T \in SU(n, n)$  tal que  $T * U = U$  para todo  $U \in U_n$ . Por la Proposición 12,  $T = uI_{2n}$  con  $u \in S^1$ . Como  $1 = \det T = u^{2n}$ , la afirmación resulta de que el conjunto de raíces  $(2n)$ -ésimas de la unidad es finito.  $\square$

Hemos mencionado arriba que en la Subsección 2.5 necesitaremos trabajar con acciones casi efectivas. Además de que se trata de una condición naturalmente deseable, veremos que en nuestro caso permitirá que la métrica de la energía cinética en  $SU(n, n)$  sea riemanniana, de lo contrario se degeneraría (ver más abajo la Proposición 17).

## 2.4. Movimientos libres de fuerzas

Sea  $M$  una variedad riemanniana compacta orientada y sea  $G$  un grupo de Lie que actúa de manera suave y casi efectiva en  $M$ , preservando la orientación. Cada  $g$  en  $G$  puede pensarse entonces como un difeomorfismo de  $M$ . Esto lleva a definir un **movimiento** de  $M$  como una curva suave en  $G$ .

Supongamos que  $M$  tiene inicialmente una distribución uniforme de masa, y que a las partículas se les permite moverse solo de tal manera que dos configuraciones difieran en una transformación de  $G$ . Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow G$  una curva suave en  $G$ . Al pensarla como un movimiento de  $M$ , tenemos que  $\gamma(t) : M \rightarrow M$  es un difeomorfismo de  $M$ , para cada  $t \in [a, b]$ .

La energía cinética  $E_\gamma(t)$  del movimiento  $\gamma$  en el instante  $t$  está dada por

$$(2.4.1) \quad E_\gamma(t) = \frac{1}{2} \int_M |v_t(q)|^2 \rho_t(q) \, d\mu(q),$$

donde la integración se toma con respecto a la forma de volumen canónica de  $M$  y, si  $q = \gamma(t)(p)$  para  $p \in M$ , entonces

$$v_t(q) = \left. \frac{d}{ds} \right|_t \gamma(s)(p) \in T_q M \quad \text{y} \quad \rho_t(q) = 1 / \det(d\gamma(t)_p)$$

son la velocidad de la partícula  $q$  y la densidad en  $q$  en el instante  $t$ , respectivamente. La expresión (2.4.1) es el análogo suave de  $\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$ , una vez que uno reconoce  $\rho d\mu$  como el elemento de masa. Aplicando a (2.4.1) la fórmula de cambio de variables, se obtiene

$$(2.4.2) \quad E_\gamma(t) = \frac{1}{2} \int_M \left| \left. \frac{d}{ds} \right|_t \gamma(s)(p) \right|^2 d\mu(p)$$

En vista de que la definición de la densidad involucra el determinante, hacemos un paréntesis para comentar sobre el tema. En principio, el determinante de un isomorfismo lineal  $T : V \rightarrow W$  entre dos espacios vectoriales tiene sentido solo cuando  $V = W$ , bien definido como  $\det A$ , donde  $A = [T]_{\mathcal{B}}$ , para  $\mathcal{B}$  una base cualquiera de  $V$ . Si bien la transformación  $d\gamma(t)_p$  considerada arriba es un isomorfismo entre espacios vectoriales distintos,  $T_p M$  y  $T_{\gamma(p)} M$ , el determinante está bien definido pues los espacios tangentes tienen productos internos y están orientados. De hecho, la siguiente definición es buena:

$$\det T = \det \left( [T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \right),$$

donde  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  son bases ortonormales positivamente orientadas de los espacios vectoriales de partida y de llegada, respectivamente, ya que las matrices de cambio de base son ortogonales con determinante 1.

Una manera equivalente de enfocar esta cuestión es notar que como la variedad  $M$  es riemanniana y orientada, entonces la forma de volumen canónica, digamos  $\omega$ , está bien definida en  $q \in M$  mediante  $\omega_q(u_1, \dots, u_n) = 1$  para cualquier base ortonormal positiva  $\{u_1, \dots, u_n\}$  de  $T_q M$ . Se cumple que

$$\gamma(t)^* (\omega_{\gamma(t)(p)}) = \det(d\gamma(t)_p) \omega_p.$$

La energía cinética de la curva  $\gamma$  viene dada por

$$E(\gamma) = \int_a^b E_\gamma(t) dt.$$

La siguiente definición está basada en el **Principio de Mínima Acción**.

Una curva suave en  $G$ , pensada como un movimiento en  $M$ , se dice **libre de fuerzas** si es un punto crítico del funcional de energía.

### 2.5. La métrica riemanniana energía cinética

En la introducción mencionamos la métrica riemanniana débil usual en el grupo de todos los difeomorfismos de una variedad riemanniana compacta (ver, por ejemplo, el Teorema 9.1 (i) en [12]). En esta sección, consideramos la restricción a un subgrupo de dimensión finita, extendiendo a un contexto más amplio algunos de los conceptos presentados en [32] y [25]. Si bien la generalización es directa, presentamos todos los detalles.

Sea  $G$  un grupo de Lie conexo que actúa suave y casi efectivamente sobre una variedad riemanniana compacta y orientada  $M$ , preservando la orientación. Tenemos entonces una acción  $\varphi : G \times M \rightarrow M$  suave y casi efectiva.

DEFINICIÓN 14. *Dados  $g \in G$  y  $X \in T_g G$ , se define la aplicación  $\tilde{X} : M \rightarrow TM$  por*

$$(2.5.1) \quad \tilde{X}(q) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \varphi(\gamma(t), q) \in T_{\varphi(g, q)} M$$

donde  $\gamma$  es cualquier curva suave en  $G$  con  $\gamma(0) = g$  y  $\gamma'(0) = X$ .

PROPOSICIÓN 15. *La aplicación  $\tilde{X}$  está bien definida y es suave.*

DEMOSTRACIÓN. Para cada  $q \in M$  calculamos

$$\tilde{X}(q) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \varphi(\gamma(t), q) = (d\varphi_q)_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) = (d\varphi_q)_g(X),$$

donde  $\varphi_q(g) = \varphi(g, q)$ . Como la última expresión depende suavemente de  $g$  y  $X$ , y solo de ellos, la definición es buena. La suavidad de  $\tilde{X}$  ahora es clara a partir de la de  $\varphi$ . □

Se cumple que  $\tilde{X}$  es un campo vectorial en  $M$  si y solo si  $X \in T_e G$ .

Para  $q \in M$ , la correspondencia  $X \in T_g G \mapsto \tilde{X}(q) \in T_{\varphi(g,q)} M$  es lineal. Por lo tanto,

$$(2.5.2) \quad X \mapsto \|X\|^2 = \int_M \left| \tilde{X}(q) \right|^2 d\mu(q)$$

es una forma cuadrática en  $T_g G$  (aquí  $|z|$  denota la norma de  $z \in TM$  e integramos con respecto a la medida inducida por la métrica riemanniana de  $M$ ).

**PROPOSICIÓN 16.** *La forma cuadrática determina una métrica riemanniana en  $G$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Dado  $X \in T_g G$ , claramente  $\|X\| \geq 0$ . Mostramos a continuación que  $\|X\| = 0$  solo si  $X = 0$ . Supongamos que  $\|X\| = 0$ . En este caso, por la continuidad de  $\tilde{X}$ , resulta que  $\tilde{X}$  es idénticamente nulo en  $M$ . Sea  $Y \in T_e G$  tal que  $X = dL_g(Y)$ . Usando la notación  $\hat{g} : M \rightarrow M$ ,  $\hat{g}(q) = \varphi(g, q)$ , que introdujimos en (2.3.4), calculamos

$$\begin{aligned} (d\hat{g})(\tilde{Y}(q)) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \hat{g}(\varphi(\exp(tY), q)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \varphi(g, \varphi(\exp(tY), q)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \varphi(g \exp(tY), q) \\ &= \tilde{X}(q) = 0 \end{aligned}$$

para todo  $q \in M$ . Luego  $\tilde{Y}$  es el campo nulo en  $M$ , pues  $\hat{g}$  es un difeomorfismo. Como  $s \mapsto \exp(sY)$  es el flujo de  $\tilde{Y}$ , resulta que  $\exp(sY)$  es la función identidad en  $M$  para todo  $s$ . Así, al ser la acción casi efectiva,  $\{\exp(sY) \mid s \in \mathbb{R}\}$  es discreto, y esto ocurre solo si  $Y = 0$ , o equivalentemente,  $X = 0$ .

Finalmente, la métrica es suave, pues dado un campo vectorial suave  $Y$  en  $M$ , la función  $\|Y\|^2 : G \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\|Y(g)\|^2 = \int_M \left| \widetilde{Y(g)}(q) \right|^2 d\mu(q) = \int_M \|(d\varphi_q)_g(Y(g))\|^2 d\mu(q),$$

es suave. □

A esta métrica se le llama la **métrica energía cinética** y viene dada explícitamente por la expresión

$$(2.5.3) \quad \langle X, Y \rangle = \int_M \langle \tilde{X}(q), \tilde{Y}(q) \rangle d\mu(q)$$

para todo  $X, Y \in T_g G$ ,  $g \in G$ .

La propiedad fundamental de esta métrica en  $G$  es que una curva  $\gamma$  en  $G$  es una geodésica si y sólo si (pensada como un movimiento) es libre de fuerzas, pues de la expresión (2.4.2) resulta que  $E_\gamma(t) = \frac{1}{2} \|\gamma'(t)\|^2$ .

Hemos visto en la Proposición 12 que la acción de Möbius de  $U(n, n)$  sobre  $U_n$  no es casi efectiva. La siguiente proposición muestra que la expresión (2.5.3) determina, en esta situación, una forma bilineal degenerada. Por ello hemos restringido la acción a  $SU(n, n)$  (ver Proposición 13).

**PROPOSICIÓN 17.** *Sea  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow U(n, n)$ ,  $\gamma(t) = e^{it} I_{2n}$ . Entonces  $\langle \gamma'(0), X \rangle = 0$  para todo  $X \in T_{I_{2n}} U(n, n)$ . En particular, la forma bilineal se degenera.*

**DEMOSTRACIÓN.** Por (2.5.1) y (2.3.5) con  $u = e^{it}$  tenemos que

$$\widetilde{\gamma'(0)}(U) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \gamma(t) * U = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 U \equiv 0$$

para todo  $U \in U_n$ . Luego, dado  $X$  como en el enunciado,

$$\langle \gamma'(0), X \rangle = \int_{U_n} \langle \widetilde{\gamma'(0)}(U), \tilde{X}(U) \rangle d\mu(U) = 0. \quad \square$$

## 2.6. Subvariedades totalmente geodésicas

Repasamos el concepto de subvariedad totalmente geodésica, que además de estar presente en los enunciados de los resultados de la tesis (como vimos en la introducción), nos servirá como herramienta, al permitirnos encontrar trayectorias de geodésicas usando repetidas veces la Proposición 18 de abajo.

Sea  $M$  una variedad riemanniana. Una subvariedad  $S$  de  $M$  con la métrica inducida se dice **totalmente geodésica** si las geodésicas de  $S$  son también geodésicas de  $M$ .

Detallamos algunas propiedades:

- Si  $S$  es una subvariedad totalmente geodésica de  $N$  y esta, a su vez, es una subvariedad totalmente geodésica de  $M$ , entonces  $S$  es una subvariedad totalmente geodésica de  $M$ . En particular, las componentes conexas de una subvariedad totalmente geodésica son totalmente geodésicas.

- Cada componente conexa de la intersección de dos subvariedades totalmente geodésicas es una subvariedad totalmente geodésica.

- Si  $S$  es una subvariedad conexa totalmente geodésica de dimensión uno de una variedad riemanniana  $M$ , digamos, la imagen de una curva regular  $\sigma$ , entonces existe una reparametrización  $\gamma$  de  $\sigma$  tal que  $\gamma$  es geodésica en  $M$ .

Al buscar subvariedades totalmente geodésicas, es muy útil hallar isometrías de la variedad en sí misma y el conjunto de sus puntos fijos. Esto se debe a que cada componente conexa de este conjunto constituirá, según veremos más adelante, una subvariedad totalmente geodésica.

Recordamos que un difeomorfismo  $F : M \rightarrow N$  entre dos variedades diferenciables es una isometría si para toda curva diferenciable  $\sigma : [a, b] \rightarrow M$ , la curva  $F \circ \sigma : [a, b] \rightarrow N$  tiene la misma longitud que  $\sigma$ . Equivalentemente, si para todo  $p \in M$ , la transformación lineal  $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$  es ortogonal o, lo que es lo mismo,  $dF_p$  preserva las normas. Se cumple que las isometrías llevan geodésicas en geodésicas.

Si  $f$  es una isometría de la variedad riemanniana  $M$ , denotamos mediante

$$\text{Fix}(f) = \{q \in M \mid f(q) = q\}$$

al conjunto de los puntos fijos de  $f$ . El siguiente enunciado y su demostración se pueden encontrar en [7] (Proposición 10.3.6).

**PROPOSICIÓN 18.** *Si  $f$  es una isometría de  $M$  y  $\text{Fix}(f)$  es no vacío, entonces cada componente conexa de  $\text{Fix}(f)$  es una subvariedad totalmente geodésica de  $M$ .*

Para finalizar, mostramos un ejemplo de que en la proposición es necesario tomar componentes conexas. La cinta de Möbius es el conjunto

$$M = \{\varphi(s, t) \mid s \in \mathbb{R}, |t| < r\},$$

para  $r$  pequeño, donde  $\varphi(s, t) = \alpha(s) + tv(s)$ , con

$$\alpha(s) = (\cos s, \sin s, 0) \quad \text{y} \quad v(s) = \cos\left(\frac{s}{2}\right)\alpha(s) + \sin\left(\frac{s}{2}\right)(0, 0, 1).$$

PROPOSICIÓN 19. *La rotación  $R$  en un ángulo llano alrededor del eje  $x$  preserva  $M$  y el conjunto de los puntos fijos es*

$$(2.6.1) \quad \text{Fix}(R) = \{(t, 0, 0) \mid |t - 1| < r\} \cup \{(-1, 0, 0)\},$$

*que es la unión de dos subvariedades, una de dimensión uno y otra de dimensión cero. Por lo tanto,  $\text{Fix}(R)$  no es una subvariedad de  $M$ .*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que  $R(x, y, z) = (x, -y, -z)$ . Calculamos

$$R(\varphi(s, t)) = R(\alpha(s) + tv(s)) = R\alpha(s) + tRv(s) = \alpha(-s) + tv(-s) = \varphi(-s, t)$$

y así,  $R$  preserva  $M$  y claramente es una isometría.

Llamamos  $A$  al conjunto en el miembro derecho de (2.6.1). Es fácil ver que  $A \subset \text{Fix}(R)$ . Ahora verificamos la otra contención. Supongamos que  $\varphi(s, t) \in \text{Fix}(R)$ . Entonces  $R(\varphi(s, t)) = \varphi(s, t)$ , o sea,  $\varphi(s, t) = \varphi(-s, t)$ :

$$\begin{aligned} & (\cos s, \sin s, 0) + t \left( \cos\left(\frac{s}{2}\right) (\cos s, \sin s, 0) + \sin\left(\frac{s}{2}\right) (0, 0, 1) \right) \\ &= (\cos s, -\sin s, 0) + t \left( \cos\left(\frac{s}{2}\right) (\cos s, -\sin s, 0) - \sin\left(\frac{s}{2}\right) (0, 0, 1) \right). \end{aligned}$$

Igualando componentes resulta que

$$\begin{cases} \cos s \left(1 + t \cos\left(\frac{s}{2}\right)\right) = \cos s \left(1 + t \cos\left(\frac{s}{2}\right)\right) \\ \sin s \left(1 + t \cos\left(\frac{s}{2}\right)\right) = -\sin s \left(1 + t \cos\left(\frac{s}{2}\right)\right) \\ t \sin\left(\frac{s}{2}\right) = -t \sin\left(\frac{s}{2}\right). \end{cases}$$

De ello surge que cuando  $t = 0$  vale  $\sin s = -\sin s = 0$ , y así,  $s = k\pi$ , y  $\cos(k\pi) = \pm 1$ ; de este modo obtenemos los puntos  $(\pm 1, 0, 0)$ , que están en  $A$ . Para  $t \neq 0$ ,  $\sin\left(\frac{s}{2}\right) = -\sin\left(\frac{s}{2}\right) = 0$ , de donde  $\frac{s}{2} = k\pi$ , o sea,  $s = 2k\pi$ , con lo cual  $\varphi(s, t) = (1 \pm t, 0, 0)$ , que también pertenece a  $A$ .  $\square$



## Capítulo 3

### Simetrías de la métrica energía cinética

De ahora en adelante, retomando la nomenclatura de la introducción, denotamos

$$(3.0.1) \quad G = O_o(n, n), \quad SU(n, n), \quad Sp(n, n),$$

sus subgrupos compactos maximales respectivos,

$$(3.0.2) \quad K = SO_n \times SO_n, \quad S(U_n \times U_n), \quad Sp_n \times Sp_n,$$

y las variedades-grupos

$$(3.0.3) \quad M = SO_n, \quad U_n, \quad Sp_n,$$

sobre las que actúan los grupos  $G$  mediante la acción de Möbius (1.0.1) de manera transitiva y casi efectiva, por la Proposición 13.

Comentamos, sin ánimo de ser precisos, que  $M$  se manifiesta, por un lado, de manera pasiva, como la variedad que contiene el fluido cuyo movimiento tiene restricciones de Möbius, y también, por el otro, de manera activa, actuando sobre ella misma a izquierda y a derecha. A esto alude el concepto de variedad-grupo (que tomamos del inglés *group manifold*).

Recordamos que  $K$  coincide con  $M \times M$  o está contenido en este producto.

A los efectos de agilizar la lectura, reproducimos los enunciados principales de la introducción antes de demostrarlos.

PROPOSICIÓN 3. a) *La acción de  $K \times K$  sobre  $G$  dada por  $(k_1, k_2)(g) = k_1 g k_2^{-1}$  es por isometrías de la métrica energía cinética de  $G$ .*

b) *La métrica riemanniana en  $K$  inducida por la métrica energía cinética de  $G$  es bi-invariante; más aún, es la restricción a  $K$  de una métrica producto en  $M \times M$  tal que la aplicación  $\rho : K \rightarrow K$  dada por  $\rho(g, h) = (h, g)$  es una isometría.*

DEMOSTRACIÓN. a) Para  $k_1, k_2 \in K$ , ponemos

$$(3.0.4) \quad F_{k_1, k_2} : G \rightarrow G, \quad g \mapsto F_{k_1, k_2}(g) = k_1 g k_2^{-1}.$$

Tenemos que verificar que  $F_{k_1, k_2}$  es una isometría de la métrica energía cinética en  $G$ .

Sean  $X \in T_g G$  y  $\gamma$  una curva en  $G$  tal que  $\gamma(0) = g$ ,  $\gamma'(0) = X$ . Tenemos que

$$dF_{k_1, k_2}(X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 k_1 \gamma(t) k_2^{-1}$$

y así para cada  $q \in M$  resulta por (2.5.1) que

$$\widetilde{dF_{k_1, k_2}(X)}(q) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (k_1 \gamma(t) k_2^{-1}) * q = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (k_1 \gamma(t)) * (k_2^{-1} * q).$$

Observamos que como  $k_i \in K$ , entonces  $k_i = \text{diag}(A_i, B_i)$  con  $A_i, B_i \in M$ , y por lo tanto  $k_i * q = A_i q B_i^{-1} = R_{B_i^{-1}} L_{A_i}(q)$  por (1.0.1). Definimos

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(q) = \left| \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (k_1 \gamma(t)) * q \right|^2,$$

y  $h : M \rightarrow M$  por  $h = R_{B_2} L_{A_2^{-1}}$ . Luego,

$$(3.0.5) \quad \|dF_{k_1, k_2}(X)\|^2 = \int_M (f \circ h) d\mu = \int_M f(h^* d\mu) = \int_M f d\mu,$$

ya que  $d\mu$  es bi-invariante por la acción de  $M$  por la parte (a) del Corolario 9.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} f(q) &= \left| \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \left( R_{B_1^{-1}} L_{A_1} \gamma(t) \right) * q \right|^2 \\ &= \left| \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \left( R_{B_1^{-1}} L_{A_1} \right) * (\gamma(t) * q) \right|^2 \\ &= \left| dR_{B_1^{-1}} dL_{A_1} \left( \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \gamma(t) * q \right) \right|^2 \\ &= \left| \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \gamma(t) * q \right|^2, \end{aligned}$$

pues la métrica en  $M$  es bi-invariante (la penúltima igualdad se justifica por (1.0.4)).

Así,

$$\|dF_{k_1, k_2}(X)\|^2 = \int_M \left| \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \gamma(t) * q \right|^2 d\mu(q) = \|X\|^2.$$

Entonces  $F_{k_1, k_2}$  es una isometría.

b) Comenzamos con el caso menos sencillo  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ , cuando  $K$  está contenido estrictamente en  $M \times M$ , es decir,  $K = S(U_n \times U_n)$  y  $M = U_n$ . Los casos  $M = SO_n$  y  $Sp_n$ , que son grupos de Lie semisimples (en el primero consideramos  $n > 2$ ), se tratan de la misma forma, pero de manera más directa.

Debemos ver que la métrica energía cinética restringida a  $K = S(U_n \times U_n)$  es la restricción de una métrica producto en  $M \times M = U_n \times U_n$  tal que  $\rho$  sea una isometría.

Por la primera parte de la prueba, la métrica energía cinética restringida a  $K$  es bi-invariante, en particular, el producto interno en  $\mathfrak{k} = T_{(I_n, I_n)}K$  es  $\text{Ad}(K)$ -invariante. Escribimos

$$\mathfrak{k} = s(u_n \oplus u_n) = su_n \oplus su_n \oplus \mathbb{R}iI_{2n}^-$$

donde  $I_{2n}^- = \text{diag}(I_n, -I_n)$ . Como  $su_n$  es simple y el último sumando directo tiene dimensión 1, los sumandos son ortogonales (ver por ejemplo la demostración del Teorema 2.2 del Capítulo II en [11]). Así, por el Lema 20 más abajo, la restricción de  $d\rho_{(I_n, -I_n)}$  a  $su_n \oplus su_n$  es una isometría lineal.

Finalmente, verificamos que la métrica en  $K$  es la restricción a  $K$  de una métrica producto en  $M \times M$ . Observamos que

$$u_n \oplus u_n = \mathfrak{k} \oplus \mathbb{R}iI_{2n}.$$

Sean  $\epsilon_1 = \text{diag}(iI_n, 0_n)$  y  $\epsilon_2 = \text{diag}(0_n, iI_n)$ , que forman una base de

$$\mathbb{R}iI_{2n}^- \oplus \mathbb{R}iI_{2n}.$$

Tenemos que

$$u_n \oplus u_n = (su_n \oplus \mathbb{R}\epsilon_1) \oplus (su_n \oplus \mathbb{R}\epsilon_2) \equiv (su_n \oplus su_n) \oplus \mathbb{R}\epsilon_1 \oplus \mathbb{R}\epsilon_2.$$

Suponemos que  $\|iI_{2n}^-\| = \ell$ . En el último miembro consideramos un producto interno tal que los tres sumandos son ortogonales,  $su_n \oplus su_n$  tiene la métrica inducida de la energía cinética y  $\|\epsilon_1\| = \|\epsilon_2\| = \ell/\sqrt{2}$ . Como  $iI_{2n}^- = \epsilon_1 - \epsilon_2$ , este producto interno en  $u_n \oplus u_n$  satisface las condiciones requeridas.  $\square$

LEMA 20. Sea  $\mathbb{F} \neq \mathbb{C}$  (en particular,  $K = M \times M$ ). Asumiendo que los factores son ortogonales para la restricción de la métrica energía cinética a  $K$ , entonces  $\rho : K \rightarrow K$ ,  $\rho(g, h) = (h, g)$ , es una isometría. La afirmación análoga también vale para  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ , considerando la restricción a  $SU_n \times SU_n$ .

DEMOSTRACIÓN. Por la  $K$ -invariancia, es suficiente mostrar que  $d\rho_{(I_n, I_n)}$  es una isometría lineal. Basta verificar que  $\|(X, 0_n)\| = \|(0_n, X)\|$  para todo  $X \in \mathfrak{m}$ , pues

$$\begin{aligned} \|d\rho_{(I_n, I_n)}(X, Y)\|^2 &= \|d\rho_{(I_n, I_n)}(X, 0_n) + d\rho_{(I_n, I_n)}(0_n, Y)\|^2 \\ &= \|(0_n, X) + (Y, 0_n)\|^2 \\ &= \|(0_n, X)\|^2 + \|(Y, 0_n)\|^2 \\ &= \|(X, 0_n)\|^2 + \|(0_n, Y)\|^2 \\ &= \|(X, Y)\|^2 \end{aligned}$$

(hemos usado que ya sabemos que  $\mathfrak{k}$  porta una métrica producto). Para  $q \in M$  calculamos

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt} \Big|_0 e^{t(X, 0_n)} * q \right|^2 &= \left| \frac{d}{dt} \Big|_0 \text{diag}(e^{tX}, I_n) * q \right|^2 \\ &= \left| \frac{d}{dt} \Big|_0 e^{tX} q \right|^2 \\ &= |Xq|^2, \end{aligned}$$

que es igual a  $|R_q(X)|^2 = |X|^2$ , pues el producto interno en  $\mathbb{F}^{m \times m}$  es bi-invariante por la Proposición 7. Integrando sobre  $M$  encontramos que

$$\begin{aligned} \|(X, 0_n)\|^2 &= \int_M \left| \frac{d}{dt} \Big|_0 e^{t(X, 0_n)} * q \right|^2 d\mu(q) \\ &= \int_M |X|^2 d\mu(q) \\ &= \text{vol}(M) |X|^2. \end{aligned}$$

Similarmente, obtenemos que  $\|(0_n, X)\|^2 = \text{vol}(M) |X|^2$ .

La última afirmación del lema se muestra usando los mismos argumentos.  $\square$

## Capítulo 4

### Algunos subgrupos totalmente geodésicos

Comenzamos reproduciendo el resultado objeto de este capítulo, enunciado en la introducción.

**TEOREMA 5.** *Las siguientes inclusiones determinan subvariedades totalmente geodésicas (en todos los casos el grupo ambiente  $G$  porta la métrica energía cinética y el subgrupo, la métrica inducida):*

- a)  $O_o(n, n) \subset SU(n, n)$ ,
- b)  $U(n, n) \subset Sp(n, n)$ ,
- c)  $O_o(n, n) \subset Sp(n, n)$ ,
- d)  $U(n, n) \subset O_o(2n, 2n)$ ,
- e)  $Sp(n, n) \subset O_o(4n, 4n)$ .

Antes de probar el teorema comentamos acerca de las inclusiones canónicas. Primero, notamos que

$$(4.0.1) \quad U(n, n) = \{A \in Sp(n, n) \mid iA = Ai\},$$

$$(4.0.2) \quad O(n, n) = \{A \in Sp(n, n) \mid iA = Ai \text{ y } jA = Aj\},$$

pues para cada entrada  $q = a + bi + cj + dk$  de una matriz en  $Sp(n, n)$  se cumple que  $iq = qi$  si y solo si  $c = d = 0$ , y también  $jq = qj$  si y solo si  $b = d = 0$ .

Ahora realizamos  $U(n, n)$  y  $Sp(n, n)$  como subgrupos de  $O_o(2n, 2n)$  y  $O_o(4n, 4n)$ , respectivamente. Seguimos el Capítulo 2 de [19]. Recordamos que bajo una conveniente identificación de  $\mathbb{C}^{2n}$  con  $\mathbb{R}^{4n}$ , es posible describir

$$(4.0.3) \quad U(n, n) \equiv \{A \in O_o(2n, 2n) \mid JA = AJ\},$$

donde  $J : \mathbb{R}^{4n} \rightarrow \mathbb{R}^{4n}$  es la matriz con  $2n$  bloques diagonales de la forma

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Consideremos ahora el espacio vectorial a derecha  $\mathbb{H}^{2n}$  sobre  $\mathbb{H}$ . Recordemos que cualquier  $q \in \mathbb{H}$  tiene la forma  $q = a + bi + cj + dk$ , con  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  y entonces  $\mathbb{H}^{2n}$  es naturalmente isomorfo a  $\mathbb{R}^{8n}$ . Via esta identificación,

$$(4.0.4) \quad Sp(n, n) \equiv \{A \in O_o(4n, 4n) \mid R_i A = A R_i \text{ y } R_j A = A R_j\},$$

donde  $R_p$  denota a la matriz  $8n \times 8n$  de la multiplicación a derecha por  $p \in \mathbb{H}$ , con respecto a la base canónica. Para  $p = i, j$ , estas matrices consisten, respectivamente, en  $2n$  bloques diagonales de la forma

$$\begin{pmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & -J_0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & -I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para demostrar que  $O_o(n, n)$  es totalmente geodésico en  $SU(n, n)$  será de utilidad el siguiente lema.

**LEMA 21.** *Si  $G = SU(n, n)$  está munido de la métrica energía cinética, entonces la conjugación  $C : G \rightarrow G$ ,  $C(q) = \bar{q}$ , es una isometría.*

**DEMOSTRACIÓN.** Sean  $X \in T_A G$  y  $\gamma$  una curva tal que  $\gamma(0) = A$  y  $\gamma'(0) = X$ . Como  $dC_A(X) = \frac{d}{dt}\big|_0 \overline{\gamma(t)}$ , tenemos por (2.5.1) y (2.5.2) que

$$\begin{aligned} \|dC_A(X)\|^2 &= \int_{U_n} \left| \frac{d}{dt} \right|_0 \left( \overline{\gamma(t)} * q \right)^2 d\mu(q) \\ &= \int_{U_n} \left| \frac{d}{dt} \right|_0 \left( \gamma(t) * \bar{q} \right)^2 d\mu(q) \\ &= \int_{U_n} \left| \frac{d}{dt} \right|_0 \left( \gamma(t) * \bar{q} \right)^2 d\mu(q) = \|X\|^2. \end{aligned}$$

La última igualdad se cumple por el teorema de cambio de variables, ya que la conjugación en  $U_n$  es una isometría de  $U_n$  por la parte (b) del Corolario 9.  $\square$

Observamos que los argumentos de la demostración no valen para  $Sp(n, n)$  por (2.1.12).

PRUEBA DEL TEOREMA 5. Usamos repetidamente las propiedades de las subvariedades totalmente geodésicas que detallamos en la Sección 2.6, en particular, la de que cada componente conexa del conjunto de puntos fijos de una isometría es una subvariedad totalmente geodésica (Proposición 18).

La primera aseveración sigue directamente de esto y del Lema 21, ya que  $O_o(n, n)$  es una componente conexa del conjunto de puntos fijos de la conjugación.

Para  $k \in K$ , sea  $F_k : G \rightarrow G$  la conjugación por  $k$ , es decir,  $F_k(g) = kgk^{-1}$ . Notemos que  $F_k = F_{k,k}$  con la notación de (3.0.4). Por la Proposición 3 (a), es suficiente mostrar en cada caso la existencia de  $k \in K$  tal que el subgrupo correspondiente sea la componente conexa de la identidad del conjunto de puntos fijos de la isometría  $F_k$ . En realidad, en los casos (c) y (e) necesitamos considerar la intersección de tales conjuntos para diferentes elementos de  $K$ .

Ahora,  $U(n, n)$  es un subgrupo totalmente geodésico en  $Sp(n, n)$  pues es conexo y por (4.0.1) es el conjunto de puntos fijos de  $F_{iI_{2n}}$ , que es una isometría de  $Sp(n, n)$ , dado que  $iI_n \in Sp_n$ . De manera análoga,  $O_o(n, n)$  es un subgrupo totalmente geodésico en  $Sp(n, n)$ , ya que por (4.0.2) es la componente conexa de la identidad de la intersección de los conjuntos de puntos fijos de  $F_{iI_{2n}}$  y  $F_{jI_{2n}}$ , que son isometrías de  $Sp(n, n)$ .

Por (4.0.3), el grupo  $U(n, n)$  es el conjunto de puntos fijos de la aplicación

$$F_J : O_o(2n, 2n) \rightarrow O_o(2n, 2n), \quad F_J(A) = JAJ^{-1} = -JAJ.$$

Ahora bien, por la descripción de  $J$  arriba,  $J \in SO_{2n} \times SO_{2n}$ . Entonces,  $F_J$  es una isometría de  $O_o(2n, 2n)$  munido de la métrica energía cinética. Como  $U(n, n)$  es conexo, es una subvariedad totalmente geodésica de  $O_o(2n, 2n)$ .

Por (4.0.4), el grupo  $Sp(n, n)$  es la intersección de los conjuntos de puntos fijos de las aplicaciones  $F_{R_i}, F_{R_j} : O_o(4n, 4n) \rightarrow O_o(4n, 4n)$  dadas por  $F_{R_i}(A) = R_i A R_i^{-1}$ , y similarmente para  $F_{R_j}$ . De la forma de las matrices de  $R_i$  y  $R_j$  (ver más arriba) se deduce que pertenecen a  $SO_{4n} \times SO_{4n}$ . Así,  $F_{R_i}$  y  $F_{R_j}$  son isometrías de  $O_o(4n, 4n)$  munido de la métrica energía cinética. Entonces,  $Sp(n, n)$ , que es conexo, es totalmente geodésico en  $O_o(4n, 4n)$ .  $\square$



## Capítulo 5

### La incompletitud de la métrica energía cinética

En esta sección probamos el Teorema 1. Sea  $\delta = \text{diag}(I_n, -I_n)$ . Entonces  $b_{n,n}^{\mathbb{F}}$  como en (2.1.13) está dada por

$$b_{n,n}^{\mathbb{F}}(x, y) = \bar{x}^T \delta y,$$

para  $x, y \in \mathbb{F}^{2n}$ . Así,  $T \in U(n, n, \mathbb{F})$  si y solo si  $\bar{T}^T \delta T = \delta$ . De esta expresión obtenemos que  $u \in \mathfrak{u}(n, n, \mathbb{F})$ , el álgebra de Lie de  $U(n, n, \mathbb{F})$ , si y solo si  $\bar{u}^T \delta + \delta u = 0$ . Por lo tanto,

$$(5.0.1) \quad \mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} a & \bar{c}^T \\ c & b \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{F}^{n \times n}, \bar{a}^T = -a, \bar{b}^T = -b \right\}$$

es el álgebra de Lie de  $G$  como en (3.0.1) para  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  y  $\mathbb{H}$ , mientras que  $su(n, n)$  consiste en elementos de la misma forma, con la condición extra  $\text{tr } a + \text{tr } b = 0$ .

LEMA 22. Para  $i = 2, \dots, n$ , sea  $T_i$  la transformación  $\mathbb{F}$ -lineal de  $\mathbb{F}^n$  tal que

$$T_i(e_1) = e_i, \quad T_i(e_i) = -e_1 \quad y \quad T_i(e_s) = e_s$$

para  $1 < s \leq n$ ,  $s \neq i$ . Entonces una transformación  $\mathbb{F}$ -lineal  $T$  de  $\mathbb{F}^n$  conmuta con  $T_i$  para todo  $i = 2, \dots, n$  si y solo si  $T = \lambda I_n$ , para algún  $\lambda \in \mathbb{F}$ .

DEMOSTRACIÓN. La matriz de  $T_i$  con respecto a la base canónica es  $A^i$ , donde

$$A_{1,i}^i = 1, \quad A_{i,1}^i = -1, \quad A_{j,j}^i = 1$$

para  $1 < j \neq i$  y  $A_{s,t}^i = 0$  en los casos restantes. Primero observemos que para cualquier matriz  $X \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ,  $A^i X$  es la matriz cuyas filas coinciden con aquellas de  $X$ , excepto que su primera fila es la  $i$ -ésima fila de  $X$  y su  $i$ -ésima fila es la opuesta de la primera fila de  $X$ . Por otro lado,  $X A^i$  se obtiene mediante un procedimiento

similar, pero considerando columnas de  $X$  en lugar de filas. Luego hemos encontrado que

$$(5.0.2) \quad X_{ii} = (A^i X)_{1,i} = (X A^i)_{1,i} = X_{11}.$$

para todo  $1 < i \leq n$ . También, para  $t \neq i$ ,

$$(5.0.3) \quad X_{ti} = (A^i X)_{ti} = (X A^i)_{ti} = X_{t1} = (A^i X)_{t1} = (X A^i)_{t1} = -X_{ti}.$$

Combinando las condiciones (5.0.2) y (5.0.3), resulta que  $X_{ii} = X_{11}$  para todo  $i$  y  $X_{ti} = 0$  para  $t \neq i$ . Por lo tanto  $X = \lambda I_n$  para algún  $\lambda \in \mathbb{F}$ .  $\square$

El siguiente lema involucra el concepto de función central, que fue presentado en la Subsección 2.1.4.

LEMA 23. Sea  $\sigma : (-1, 1) \rightarrow G$  una curva suave tal que para todo  $s$ ,  $\sigma(s)$  conmuta con todos los elementos de  $K$  de la forma  $\text{diag}(B, B)$ . Dado  $t \in (-1, 1)$ , sea  $f_t : M \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f_t(A) = \left| \frac{d}{ds} \Big|_t \sigma(s) * A \right|^2.$$

Entonces  $f_t$  es una función central.

DEMOSTRACIÓN. Por (1.0.4) tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma(s) * (BAB^{-1}) &= \sigma(s) * (\text{diag}(B, B) * A) \\ &= (\sigma(s) \text{diag}(B, B)) * A \\ &= (\text{diag}(B, B) \sigma(s)) * A \\ &= \text{diag}(B, B) * (\sigma(s) * A) \\ &= B(\sigma(s) * A)B^{-1} \end{aligned}$$

Calculamos ahora

$$\begin{aligned}
 f_t(BAB^{-1}) &= \left| \frac{d}{ds} \Big|_t \sigma(s) * (BAB^{-1}) \right|^2 \\
 &= \left| \frac{d}{ds} \Big|_t B(\sigma(s) * A) B^{-1} \right|^2 \\
 &= \left| B \left( \frac{d}{ds} \Big|_t (\sigma(s) * A) \right) B^{-1} \right|^2 \\
 &= \left| \frac{d}{ds} \Big|_t (\sigma(s) * A) \right|^2 \\
 &= f_t(A)
 \end{aligned}$$

pues la norma en  $\mathbb{F}^{n \times n}$  es bi-invariante, por la Proposición 7.  $\square$

**TEOREMA 1.** *Sea  $G$  munido de la métrica energía cinética. Entonces la curva  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$  definida por*

$$\gamma(t) = \exp \left( t \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \cosh t \, I_n & \sinh t \, I_n \\ \sinh t \, I_n & \cosh t \, I_n \end{pmatrix}$$

*es la reparametrización de una geodésica inextensible en  $G$  de longitud finita. En particular,  $G$  no es completo y la métrica energía cinética en  $G$  no es invariante a derecha ni a izquierda.*

**DEMOSTRACIÓN.** La prueba consiste en dos partes.

**Parte 1.** Probamos que la imagen de  $\gamma$  es un subvariedad totalmente geodésica de  $G$  y así  $\gamma$  resulta la reparametrización de una geodésica en  $G$ , que es inextensible pues  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \gamma(t)$  no existe.

Para  $i = 2, \dots, n$ , sea  $k_i = \text{diag}(A^i, A^i) \in K$ , donde  $A^i$  es la matriz introducida en el Lema 22 (notar que  $A^i \in SO_n$ ), y sea

$$F_{k_i} : G \rightarrow G, \quad F_{k_i}(g) = k_i g k_i^{-1},$$

como en la demostración del Teorema 5.

Sea  $L$  la componente conexa de la identidad del grupo de Lie

$$(\cap_{i=2}^n \text{Fix}_0(F_{k_i})) \cap O_o(n, n).$$

Mostraremos que el subgrupo  $L$  coincide con la trayectoria de  $\gamma$ . Así, esta será totalmente geodésica en  $G$  por la Proposición 18, ya que  $\text{Fix}_0(F_{k_i})$  y  $O_o(n, n)$  son totalmente geodésicos en  $G$  por la parte (a) de la Proposición 3 y las partes (a) y (c) del Teorema 5, respectivamente.

El álgebra de Lie de  $L$  es  $\mathfrak{f} \cap o(n, n)$ , donde

$$\mathfrak{f} := \bigcap_{i=2}^n \text{Fix}(\text{Ad}(k_i)),$$

ya que el álgebra de Lie de la componente conexa de la identidad de la intersección de un número finito de subgrupos de Lie coincide con la intersección de sus álgebras de Lie.

Para cada  $i = 2, \dots, n$  aplicamos  $\text{Ad}(k_i)$  a un elemento genérico de  $\mathfrak{g}$  como en el comienzo del capítulo. Es sencillo verificar que

$$\text{Ad}(k_i) \begin{pmatrix} a & \bar{c}^T \\ c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_i a A_i^{-1} & A_i \bar{c}^T A_i^{-1} \\ A_i c A_i^{-1} & A_i b A_i^{-1} \end{pmatrix}.$$

Como

$$\text{Fix}(\text{Ad}(k_i)) = \{X \in \mathfrak{g} \mid X \text{ conmuta con } k_i\},$$

por las condiciones sobre  $a$  y  $b$  en (5.0.1), usando el Lema 22 resulta que

$$\mathfrak{f} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha I_n & \bar{\lambda} I_n \\ \lambda I_n & \beta I_n \end{pmatrix} \mid \alpha, \lambda \in \mathbb{F}, \bar{\alpha} = -\alpha, \bar{\beta} = -\beta \right\}$$

(con la condición extra  $\alpha + \beta = 0$  en el caso complejo). Ahora bien, como  $o(n, n)$  consiste en matrices cuyas entradas son reales, tenemos que

$$\mathfrak{f} \cap o(n, n) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Ergo, las álgebras de Lie de  $L$  y  $\gamma$  coinciden. En consecuencia,  $L = \gamma(\mathbb{R})$ , porque ambos son conexos.

**Parte 2.** Probaremos que  $\gamma$  tiene longitud finita. Será conveniente considerar la reparametrización  $\sigma : (-1, 1) \rightarrow G$  de  $\gamma$  dada por

$$\sigma(s) = \gamma(\tanh^{-1}(s)) = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \begin{pmatrix} I_n & sI_n \\ sI_n & I_n \end{pmatrix}.$$

Entonces, por (2.5.1) y (2.5.2),

$$(5.0.4) \quad \|\sigma'(t)\|^2 = \int_M \left| \widetilde{\sigma'(t)}(A) \right|^2 d\mu(A) = \int_M \left| \frac{d}{ds} \Big|_t \sigma(s) * A \right|^2 d\mu(A).$$

Ya hemos probado en el Lema 23 que el integrando es una función central. Así, por (2.1.14),

$$(5.0.5) \quad \int_M \left| \frac{d}{ds} \Big|_t \sigma(s) * A \right|^2 d\mu(A) \leq C \int_T \left| \frac{d}{ds} \Big|_t \sigma(s) * D(\theta_1, \dots, \theta_n) \right|^2 d\theta_1 \cdots d\theta_n,$$

donde  $C$  es una constante que depende solo de  $M$  (conservamos la notación de la Subsección 2.1.4).

Consideremos primero el caso  $M = SO_n$  con  $n = 2m$ . Como

$$\sigma(s) * D(\theta_1, \dots, \theta_m) = \text{diag}(\sigma_2(s) * R_{\theta_1}, \dots, \sigma_2(s) * R_{\theta_m}),$$

donde  $\sigma_2(s) = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \begin{pmatrix} I_2 & sI_2 \\ sI_2 & I_2 \end{pmatrix} \in O_o(2, 2)$ , entonces

$$(5.0.6) \quad \left| \frac{d}{ds} \Big|_t \sigma(s) * D(\theta_1, \dots, \theta_m) \right|^2 = \sum_{j=1}^m \left| \frac{d}{ds} \Big|_t \sigma_2(s) * R_{\theta_j} \right|^2.$$

Calculamos

$$(5.0.7) \quad \begin{aligned} \sigma_2(s) * R_\theta &= (R_\theta + sI_2)(sR_\theta + I_2)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} s + \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & s + \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + s \cos \theta & -s \sin \theta \\ s \sin \theta & 1 + s \cos \theta \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{1 + 2s \cos \theta + s^2} \begin{pmatrix} 2s + (1 + s^2) \cos \theta & (s^2 - 1) \sin \theta_j \\ (1 - s^2) \sin \theta & 2s + (1 + s^2) \cos \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora, identificamos  $SO_2$  con  $S^1$  de la manera usual, esto es,  $R_\alpha$  se identifica con  $e^{i\alpha}$ . Entonces (5.0.7) queda

$$\sigma_2(s) * e^{i\theta} = \frac{e^{i\theta} + s}{1 + se^{i\theta}},$$

ya que las partes real e imaginaria de este número complejo son iguales a la primera y segunda entrada de la primera columna de la matriz (5.0.7), respectivamente.

Reemplazando en (5.0.5) y usando (5.0.6), obtenemos

$$\begin{aligned} \|\sigma'(t)\|^2 &= \int_M \left| \frac{d}{ds} \right|_t \sigma(s) * A \Big|^2 d\mu(A) \\ &\leq C \sum_{j=1}^m \int_{S^1} \left| \frac{d}{ds} \right|_t \frac{e^{i\theta_j} + s}{1 + se^{i\theta_j}} \Big|^2 d\theta_j \\ &= mC \int_{S^1} \left| \frac{d}{ds} \right|_t \frac{e^{i\theta} + s}{1 + se^{i\theta}} \Big|^2 d\theta \\ &= mC \int_{S^1} \left| \frac{1 - e^{i2\theta}}{(1 + te^{i\theta})^2} \right|^2 d\theta. \end{aligned}$$

Poniendo  $z = e^{i\theta}$ , la última integral puede escribirse como una integral sobre la circunferencia de una función meroforma con dos polos en el disco, la cual puede calcularse por residuos y resulta igual a  $4\pi/(1 - t^2)$ . Esto fue realizado en [15], donde se estudiaron los movimientos de Möbius libres de fuerzas de la circunferencia (el integrando es igual a  $\left| \tilde{Y}(e^{i\theta}) \right|^2$ , con  $\tilde{Y}$  como en la prueba del Teorema 3 de dicho artículo). Por lo tanto,

$$\text{energía}(\sigma|_{[0,1)}) = \lim_{T \rightarrow 1^-} \int_0^T \|\sigma'(t)\|^2 dt \leq mC \int_0^1 \frac{4\pi}{1 - t^2} dt < \infty$$

y entonces la longitud de  $\sigma|_{[0,1)}$  es finita, como queríamos probar.

El caso  $M = SO_{2m+1}$  es análogo. Si  $M = U_n$  o  $Sp_n$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma(s) * D(\theta_1, \dots, \theta_n) &= (D(\theta_1, \dots, \theta_n) + sI_n)(sD(\theta_1, \dots, \theta_n) + I_n)^{-1} \\ &= \text{diag} \left( \frac{e^{i\theta_1} + s}{1 + se^{i\theta_1}}, \dots, \frac{e^{i\theta_n} + s}{1 + se^{i\theta_n}} \right) \end{aligned}$$

y la prueba sigue con argumentos similares. □

La siguiente proposición muestra el comportamiento de la masa cuando

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \gamma(t).$$

PROPOSICIÓN 2. *Si  $M \neq SO_n$  con  $n$  impar, bajo la acción de  $\gamma$ , la masa en  $M$  se concentra en  $\pm I_n$  cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ . Más precisamente, para  $\varepsilon = \pm 1$ ,*

$$\lim_{t \rightarrow \varepsilon\infty} \gamma(t) * q = \varepsilon I_n$$

para todo  $q \in \{p \in M \mid p \text{ no tiene autovalor } -\varepsilon\}$ , que es un conjunto abierto y denso en  $M$ . Si  $M = SO_n$  con  $n$  impar, entonces la misma propiedad vale para  $\varepsilon = 1$ .

DEMOSTRACIÓN. Para  $q \in M$  calculamos

$$\begin{aligned} \gamma(t) * q &= (\cosh t \, q + \sinh t \, I_n) (\sinh t \, q + \cosh t \, I_n)^{-1} \\ &= (q + \tanh t \, I_n) (\tanh t \, q + I_n)^{-1}. \end{aligned}$$

Para  $\varepsilon = \pm 1$ , si  $-\varepsilon$  no es un autovalor de  $q$ , tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow \varepsilon\infty} \gamma(t) * q = (q + \varepsilon I_n) (\varepsilon q + I_n)^{-1} = \varepsilon I_n.$$

Supongamos que  $M = SO_n$  con  $n$  par. Dado  $q \in M$  con autovalor  $-\varepsilon$ , verificamos que cualquier entorno de  $q$  contiene matrices sin autovalor  $-\varepsilon$ . Denotemos por  $R_t$  la rotación en  $\mathbb{R}^2$  de ángulo  $t$ . Tenemos que

$$q = O \operatorname{diag} (R_{\alpha_1}, \dots, R_{\alpha_k}, -\varepsilon I_{2\ell}) O^{-1}$$

para algún  $O \in SO_n$ , donde  $R_{\alpha_i}$  no tiene ningún autovalor  $-\varepsilon$ , pues cada  $q \in M$  es conjugado a un elemento del toro maximal estándar  $T$  de  $M$  (ver por ejemplo el Teorema 4.36 de [24] y la descripción de  $T$  en la Subsección 2.1.4). Ahora bien, la curva

$$t \mapsto q_t := O \operatorname{diag} (R_{\alpha_1}, \dots, R_{\alpha_k}, -\varepsilon R_t, \dots, -\varepsilon R_t) O^{-1}$$

(la cantidad de las  $R_t$  es  $\ell$ ) tiene punto inicial  $q$  y  $q_t$  no tienen autovalor  $-\varepsilon$  para  $t > 0$  próximo a 0. Argumentos similares valen para  $SO_n$  con  $n$  impar si  $\varepsilon = 1$ .

Los casos  $M = U_n$  y  $Sp_n$  se pueden abordar análogamente, con  $e^{i\alpha_j}$  y  $e^{it}$  en lugar de  $R_{\alpha_j}$  y  $R_t$ , respectivamente.  $\square$



## Capítulo 6

### Movimientos rígidos libres de fuerzas

En este capítulo consideraremos los subgrupos compactos maximales  $K$  de  $G$  descriptos en (3.0.2), que están contenidos en grupos producto  $M \times M$ . Denotamos  $\mathfrak{k}$  y  $\mathfrak{m}$  a las álgebras de Lie de  $K$  y  $M$  respectivamente; en particular,  $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{m} \times \mathfrak{m}$ .

Recordemos de la Proposición 3 que la métrica energía cinética en  $G$  restringida a  $K$  es bi-invariante. Entonces, los subgrupos monoparamétricos  $\exp(tX)$ , con  $X \in \mathfrak{k}$ , son geodésicas de  $K$  con la métrica riemanniana inducida. Sin embargo, en principio, podrían no ser geodésicas de  $G$ .

El teorema siguiente, ya enunciado en la introducción, afirma que las geodésicas en  $K$  contenidas en uno de los factores son también geodésicas en el grupo de Lie ambiente  $G$  munido de la métrica energía cinética.

**TEOREMA 4.** *Sea  $G$  munido de la métrica energía cinética y supongamos que  $Z \in \mathfrak{k}$  es igual a  $\text{diag}(X, 0_n)$  o  $\text{diag}(0_n, X)$ , donde  $X \in \mathfrak{m}$ . Entonces la geodésica  $\gamma(t) = \exp(tZ)$  de  $K$  es también una geodésica de  $G$ .*

Antes de demostrarlo, presentamos el siguiente conocido lema, cuya prueba incluimos pues aporta a la comprensión del tema de este capítulo.

**LEMA 24.** *Sean  $H$  un grupo de Lie,  $Z \in T_e H$  y  $\widehat{Z}$  el campo vectorial invariante a derecha tal que  $\widehat{Z}_e = Z$ . Entonces el flujo de  $\widehat{Z}$  es  $\varphi_t = L_{\exp(tZ)}$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Para  $h \in H$  calculamos

$$\begin{aligned} \widehat{Z}(\exp(t_o Z)h) &= dR_{\exp(t_o Z)h}(Z) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 R_{\exp(t_o Z)h}(\exp(tZ)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \exp(tZ) \exp(t_o Z)h = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \exp((t + t_o)Z)h \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t_o} \exp(tZ)h = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t_o} L_{\exp(tZ)}(h). \end{aligned} \quad \square$$

PRUEBA DEL TEOREMA 4. Para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $L_{\exp(tZ)}$  es una isometría de  $G$  por la parte (a) de la Proposición 3. Entonces,  $\widehat{Z}$  como en el lema es un campo vectorial de Killing de  $G$ . Como  $\gamma$  es una curva integral de  $\widehat{Z}$  por la identidad, para ver que  $\gamma$  es una geodésica de  $G$ , necesitamos mostrar que

$$(\nabla_{\widehat{Z}} \widehat{Z})_{\gamma(t)} = 0$$

para todo  $t$ , donde  $\nabla$  es la conexión de Levi-Civita de  $G$  munido de la métrica energía cinética. Pero como  $K$  actúa sobre  $G$  por isometrías, es suficiente ver que

$$(6.0.1) \quad (\nabla_{\widehat{Z}} \widehat{Z})_{I_{2n}} = 0.$$

De hecho,

$$\begin{aligned} (\nabla_{\widehat{Z}} \widehat{Z})_{\gamma(t)} &= \left. \frac{D}{ds} \right|_0 \widehat{Z}(\gamma(t+s)) \\ &= \left. \frac{D}{ds} \right|_0 \widehat{Z}(\exp((t+s)Z)) \\ &= \left. \frac{D}{ds} \right|_0 \widehat{Z}(\exp(sZ) \exp(tZ)) \\ &= \left. \frac{D}{ds} \right|_0 dR_{\exp(tZ)} \left( \widehat{Z}(\exp sZ) \right) \\ &= dR_{\exp(tZ)} \left( \left. \frac{D}{ds} \right|_0 \widehat{Z}(\exp sZ) \right) \\ &= dR_{\exp(tZ)} \left( (\nabla_{\widehat{Z}} \widehat{Z})_{I_{2n}} \right). \end{aligned}$$

Ahora, como  $\widehat{Z}$  es Killing, (6.0.1) equivale a que

$$(6.0.2) \quad 0 = -2\langle \nabla_Z \widehat{Z}, Y \rangle = 2\langle \nabla_Y \widehat{Z}, Z \rangle = Y(\|\widehat{Z}\|^2) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \|\widehat{Z}(\exp(tY))\|^2$$

para todo  $Y \in \mathfrak{g}$  (para la tercera igualdad hemos recurrido a la fórmula de Koszul para la conexión de Levi Civita). Tenemos que

$$\widehat{Z}(\exp(tY)) = (dR_{e^{tY}})(Z) = \left. \frac{d}{ds} \right|_0 e^{sZ} e^{tY}$$

y entonces, por (2.5.1) y (2.5.2),

$$\begin{aligned}
 \|\widehat{Z}(\exp(tY))\|^2 &= \int_M \left| \frac{d}{ds} \Big|_0 (e^{sZ} e^{tY}) * q \right|^2 d\mu(q) \\
 (6.0.3) \qquad &= \int_M \left| \frac{d}{ds} \Big|_0 e^{sZ} * q_t \right|^2 d\mu(q),
 \end{aligned}$$

donde  $q_t = e^{tY} * q \in M$ .

Supongamos ahora que  $Z = \text{diag}(X, Y)$  con  $X, Y \in \mathfrak{m}$ ,  $X = 0_n$  o  $Y = 0_n$ . Luego, por (1.0.4),

$$e^{sZ} * q_t = \text{diag}(e^{sX}, e^{sY}) * q_t = e^{sX} q_t e^{-sY},$$

con lo cual,

$$\frac{d}{ds} \Big|_0 e^{sZ} * q_t = X q_t - q_t Y.$$

Así, el integrando en (6.0.3) es  $|X q_t - q_t Y|^2$ , que es igual a  $|X q_t|^2 = |X|^2$  o  $|q_t Y|^2 = |Y|^2$  si  $Y = 0$  o  $X = 0$ , respectivamente (notar que el producto interno en  $\mathbb{F}^{n \times n}$  es bi-invariante, por la Proposición 7). En ambos casos tenemos independencia respecto de  $t$ . Ergo, la expresión (6.0.2) se hace cero, como queríamos probar.  $\square$



## Capítulo 7

### Equivalencias con los movimientos proyectivos y conformes de la esfera en dimensiones bajas

En [32] y [25] se estudiaron problemas similares a los de esta tesis para los movimientos proyectivos y conformes de la esfera. Recordamos las acciones proyectiva y conforme sobre  $S^m$ ,

$$\begin{aligned} *_p : SL_{m+1}(\mathbb{R}) \times S^m &\rightarrow S^m, \\ *_c : O_o(1, m+1) \times S^m &\rightarrow S^m, \end{aligned}$$

respectivamente, que están dadas por

$$(7.0.1) \quad A *_p z = Az / |Az| \quad \text{y} \quad A *_c z = z',$$

donde  $z'$  es el único punto en  $S^m$  tal que

$$(7.0.2) \quad A(1, z)^T \in \mathbb{R}(1, z')^T.$$

Antes de continuar, aprovechamos para comentar sobre la acción conforme. Si pensamos a  $z$  como un vector de  $m+1$  componentes en la esfera unitaria  $S^m$ , y le agregamos una componente inicial igual a 1, obtenemos un vector de  $2+m$  componentes, que ahora es un vector nulo del espacio de Lorentz  $\mathbb{R}^{1, m+1}$ , es decir,  $\mathbb{R}^{2+m}$  munido del producto interno  $-b_{1, m+1}^{\mathbb{R}}$  como en (2.1.13). Como el grupo ortogonal  $O_o(1, m+1)$  preserva el cono de vectores nulos (llamado cono de luz), el transformado de  $(1, z)^T$  es también un vector nulo, cuyas últimas  $m+1$  componentes constituyen el vector  $z'$  al que hacemos referencia.

Es bien conocido que en dimensiones bajas hay isomorfismos (salvo cubrimientos) entre  $SL_m(\mathbb{R})$  o  $O_o(1, m)$  y algunos de los grupos  $G$  que estamos considerando en esta tesis (ver por ejemplo [20], pp 517–528). En esta sección exploramos si las

acciones correspondientes sobre las esferas, por un lado, y las de Möbius sobre los grupos unitarios, por el otro, son equivalentes (la tarea resultó ser más demandante de lo esperado). Esto tendrá implicaciones en la dinámica de los movimientos de Möbius de los grupos de Lie clásicos compactos: Trasladando los resultados de [32] y [25], obtendremos versiones más fuertes del Teorema 4 en dimensiones bajas.

El caso más simple es la acción de Möbius  $SU(1, 1) \times U_1 \rightarrow U_1$ . Se conocen bien las equivalencias (salvo cubrimientos) con las acciones usuales de  $SL_2(\mathbb{R})$  y  $O_o(1, 2)$  sobre la circunferencia (Möbius o proyectiva, y conforme, respectivamente). En [15] se dio una descripción completa de la geometría de la métrica energía cinética en este caso simple. Ver también [16], donde se ofrece una presentación dinámica de una métrica en el disco definida en [4], que es distinguida desde el punto de vista espectral. La métrica energía cinética, salvo un factor trivial  $S^1$ , es una métrica incompleta en un disco negativamente curvado cuyas geodésicas son hipocicloides.

El próximo caso más sencillo es la acción de Möbius  $O_o(2, 2) \times SO_2 \rightarrow SO_2$ , que resulta el único caso donde la acción no es ni siquiera casi efectiva. Con el fin de brindar una versión completa de nuestro tema de estudio, comentamos su relación con las transformaciones conformes del plano que preservan la circunferencia.

Tomando como referencia [19] recordamos que los cuaterniones split  $\mathbb{M}$ , que forman el álgebra asociativa normada  $M(2, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{2 \times 2}$  con la multiplicación matricial usual y el producto interno que viene dado por la expresión  $\langle X, X \rangle = \det X$ . En particular,  $SL_2(\mathbb{R})$  es el conjunto de elementos unitarios de  $\mathbb{M}$ , se diría, la esfera unitaria en  $\mathbb{M}$  (aunque no es topológicamente una esfera).

Las matrices

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

forman una base de  $\mathbb{M}$  y valen las siguientes relaciones:

$$-\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{1}, \quad \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = -\mathbf{i} \quad \text{y} \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}.$$

La norma cuadrada está dada por

$$\langle a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}, a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \rangle = a^2 + b^2 - c^2 - d^2.$$

y por lo tanto el producto interno tiene signatura  $(2, 2)$ .

Dado  $X = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ , se define el conjugado  $\overline{X} = a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}$ . Resulta que  $\langle X, X \rangle = X\overline{X}$  y que  $X^{-1} = \overline{X} / \langle X, X \rangle$  si  $\langle X, X \rangle \neq 0$ .

Observamos que la multiplicación a izquierda por  $p$ , que denotamos  $L_p$ , es una isometría lineal de  $\mathbb{M}$  para todo  $p$  unitario en  $\mathbb{M}$ , o sea  $p \in SL_2(\mathbb{R})$ ; lo mismo se cumple para la multiplicación a derecha por  $p$ ,  $R_p$ . Se tiene que

$$SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{R}) \longrightarrow O_o(\mathbb{M}), \quad (p, q) \mapsto L_p \circ R_{\bar{q}}$$

es un morfismo cubrimiento doble con núcleo discreto  $\{(\mathbf{1}, \mathbf{1}), (-\mathbf{1}, -\mathbf{1})\}$ .

En particular,

$$O_o(\mathbb{M}) = \{L_p \circ R_{\bar{q}} \mid p, q \in SL_2(\mathbb{R})\}.$$

Ponemos  $\mathbb{R}\mathbf{1} \equiv \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R} + \mathbf{i}\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{M} \equiv \mathbb{C} + \mathbf{j}\mathbb{C}$  y escribimos los operadores en  $O_o(\mathbb{M})$  en bloques con respecto a esta descomposición. Las bases ordenadas  $\{\mathbf{1}, \mathbf{i}\}$  y  $\{\mathbf{j}, \mathbf{j}\mathbf{i} = -\mathbf{k}\}$  de  $\mathbb{C}$  y  $\mathbf{j}\mathbb{C}$  determinan un isomorfismo de  $SO_2 \equiv S^1$  en  $SO(\mathbf{j}\mathbb{C}, \mathbb{C})$ , asignando a  $u \in S^1$  la aplicación  $\mathbf{j}\mathbb{C} \ni \mathbf{j}z \mapsto uz$ . La yuxtaposición de esas bases provee la identificación  $O_o(\mathbb{M}) \equiv O_o(2, 2)$ .

Consideramos ahora la acción de Möbius  $* : O_o(2, 2) \times SO_2 \rightarrow SO_2$  como en (1.0.1). Es más conveniente usar la presentación en (1.0.2), identificando  $u \in SO_2 \equiv S^1$  con el conjunto  $\{uz + \mathbf{j}z \mid z \in \mathbb{C}\}$ , según lo realizado en (2.3.3). Así,

$$(7.0.3) \quad L_p R_{\bar{q}} * u = v(p, q, u),$$

donde  $v(p, q, u)$  es el único elemento de  $S^1$  que satisface que para todo  $z \in \mathbb{C}$  existe  $w(z) \in \mathbb{C}$  tal que

$$p(uz + \mathbf{j}z)\bar{q} = v(p, q, u)w(z) + \mathbf{j}w(z).$$

PROPOSICIÓN 25. a) *La acción de Möbius  $O_o(2, 2) \times SO_2 \rightarrow SO_2$  no es casi efectiva. Más precisamente,  $(L_p \circ R_{\bar{q}}) * u = L_p * u$  para todo  $p, q \in SL_2(\mathbb{R})$  y  $u \in S^1$ .*

b) *El siguiente diagrama conmuta :*

$$\begin{array}{ccc} SL_2(\mathbb{R}) \times S^1 & \xrightarrow{\quad} & S^1 \\ \downarrow (F, \rho) & & \downarrow \rho \\ O_o(2, 2) \times SO_2 & \xrightarrow{*} & SO_2, \end{array}$$

donde  $F(p) = L_p$ ,  $\rho(u)(z) = uz$  y  $\cdot$  denota la acción usual por transformaciones conformes del plano que preservan la circunferencia, es decir,

$$(7.0.4) \quad p \cdot u = (\alpha u + \bar{\beta})(\beta u + \bar{\alpha})^{-1}$$

si  $p = \alpha + \mathbf{j}\beta$ , con  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,  $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$ .

DEMOSTRACIÓN. a) Sea  $q = \alpha + \mathbf{j}\beta \in SL_2(\mathbb{R})$  con  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ; en particular,  $\bar{q} = \bar{\alpha} - \mathbf{j}\beta$ . Dado  $u \in S^1$ , calculamos

$$R_{\bar{\alpha}-\mathbf{j}\beta}(uz + \mathbf{j}z) = (uz + \mathbf{j}z)(\bar{\alpha} - \mathbf{j}\beta) = uz\bar{\alpha} - \bar{z}\beta + \mathbf{j}(z\bar{\alpha} - \bar{u}\bar{z}\beta)$$

(hemos usado que  $w\mathbf{j} = \mathbf{j}\bar{w}$  para todo  $w \in \mathbb{C}$ ). Como  $uz\bar{\alpha} - \bar{z}\beta = u(z\bar{\alpha} - \bar{u}\bar{z}\beta)$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ , tenemos por (7.0.3) que  $v(1, q, u) = u$ , y así,  $R_{\bar{q}} * u = u$ . Notemos que esta acción no depende de  $q$ .

b) Sea ahora  $p = \alpha + \mathbf{j}\beta \in SL_2(\mathbb{R})$  con  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Calculamos

$$L_{\alpha+\mathbf{j}\beta}(uz + \mathbf{j}z) = (\alpha + \mathbf{j}\beta)(uz + \mathbf{j}z) = (\alpha u + \bar{\beta})z + \mathbf{j}(\beta u + \bar{\alpha})z.$$

Llamando  $w = (\beta u + \bar{\alpha})z$ , resulta  $z = (\beta u + \bar{\alpha})^{-1}w$ , y así  $v(p, 1, u)$  como en (7.0.3) es igual al miembro derecho de (7.0.4), como deseábamos.  $\square$

### 7.1. Relación con los movimientos conformes de $S^3$

Comenzamos efectuando unos cálculos que resultarán útiles. En el siguiente lema, en el miembro izquierdo de (7.1.1), los cuaterniones están pensados como vectores columna, bajo la identificación canónica de  $\mathbb{H}$  con  $\mathbb{R}^4$ . En el miembro derecho empleamos la notación de (2.1.5) para las multiplicaciones a izquierda y a derecha por elementos de  $\mathbb{H}$ .

LEMA 26. Para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{H}$  se cumple que

$$(7.1.1) \quad 4(\alpha\beta^T - \beta\alpha^T) = L_{\alpha\bar{\beta} - \beta\bar{\alpha}} - R_{\bar{\alpha}\beta - \bar{\beta}\alpha}.$$

DEMOSTRACIÓN. Usando la primera propiedad en (2.1.3), es fácil notar que  $\alpha\bar{\beta} - \beta\bar{\alpha}$  y  $\bar{\alpha}\beta - \bar{\beta}\alpha$  son cuaterniones imaginarios puros, lo que implica que los operadores en el miembro derecho son antisimétricos (ver (2.1.6)).

Entonces, cada miembro de (7.1.1) define una aplicación  $\mathbb{R}$ -bilineal antisimétrica

$$(\alpha, \beta) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \{\text{transformaciones antisimétricas } \mathbb{R}\text{-lineales de } \mathbb{H}\}$$

(para el miembro izquierdo es claro). Por ello basta verificar la igualdad (7.1.1) solo para  $\{\alpha, \beta\}$  ortonormal. Evaluamos ambos miembros en  $q \in \mathbb{H}$ . Por la linealidad, basta ver la igualdad en  $q = \alpha$ ,  $q = \beta$  y  $q \in \{\alpha, \beta\}^\perp$ . Si  $q = \alpha$ , el miembro izquierdo queda

$$4(\alpha\beta^T\alpha - \beta\alpha^T\alpha) = 4(\alpha\langle\beta, \alpha\rangle - \beta\|\alpha\|^2) = -4\beta,$$

que resulta igual al miembro derecho, pues por (2.1.4),  $\alpha\bar{\beta}\alpha = -\beta$ , y así

$$\alpha\bar{\beta}\alpha - \beta\bar{\alpha}\alpha - \alpha\bar{\alpha}\beta + \alpha\bar{\beta}\alpha = -4\beta.$$

Si  $q = \beta$ , se procede de la misma manera. Finalmente si  $q \in \{\alpha, \beta\}^\perp$ , el miembro izquierdo es

$$4(\alpha\beta^Tq - \beta\alpha^Tq) = 4(\alpha\langle\beta, q\rangle - \beta\langle\alpha, q\rangle) = 0,$$

que coincide con el derecho ya que, usando repetidamente (2.1.4), tenemos

$$\begin{aligned} \alpha\bar{\beta}q - \beta\bar{\alpha}q - q\bar{\alpha}\beta + q\bar{\beta}\alpha &= -\beta\bar{\alpha}q - \beta\bar{\alpha}q - q\bar{\alpha}\beta - q\bar{\alpha}\beta \\ &= -2(\beta\bar{\alpha}q + q\bar{\alpha}\beta) \\ &= -2(\beta\bar{\alpha}q + \alpha\bar{\beta}q) \\ &= -2(\beta\bar{\alpha} + \alpha\bar{\beta})q \\ &= -4\operatorname{Re}(\alpha\bar{\beta})q \\ &= -4\langle\alpha, \beta\rangle q = 0. \end{aligned}$$

□

En el siguiente lema recurrimos a la descripción de los elementos del álgebra de Lie de  $Sp(1, 1)$  dada en (2.1.15).

LEMA 27. Sea  $f : sp(1, 1) \rightarrow o(1, 4)$  definida por

$$f \begin{pmatrix} \xi & \bar{\alpha} \\ \alpha & \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2\alpha^T \\ 2\alpha & L_\eta - R_\xi \end{pmatrix}$$

donde  $\xi, \eta \in \operatorname{Im}(\mathbb{H})$  y  $\alpha \in \mathbb{H}$ . Entonces  $f$  es un isomorfismo de álgebras de Lie. Además, induce un morfismo de grupos  $F : Sp(1, 1) \rightarrow O_o(1, 4)$ .

DEMOSTRACIÓN. Sean  $X = \begin{pmatrix} \xi & \bar{\alpha} \\ \alpha & \eta \end{pmatrix}$  e  $Y = \begin{pmatrix} \xi' & \bar{\alpha}' \\ \alpha' & \eta' \end{pmatrix}$  con  $\xi, \xi', \eta, \eta' \in \text{Im}(\mathbb{H})$  y  $\alpha, \alpha' \in \mathbb{H}$ . Veamos primero que

$$f([X, Y]) = [f(X), f(Y)].$$

Por un lado, tenemos que

$$\begin{aligned} f([X, Y]) &= f(XY - YX) \\ &= f\left(\begin{pmatrix} \xi & \bar{\alpha} \\ \alpha & \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi' & \bar{\alpha}' \\ \alpha' & \eta' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \xi' & \bar{\alpha}' \\ \alpha' & \eta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi & \bar{\alpha} \\ \alpha & \eta \end{pmatrix}\right) \\ &= f\left(\begin{pmatrix} \xi\xi' + \bar{\alpha}\alpha' & \xi\bar{\alpha}' + \bar{\alpha}\eta' \\ \alpha\xi' + \eta\alpha' & \alpha\bar{\alpha}' + \eta\eta' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \xi'\xi + \bar{\alpha}'\alpha & \xi'\bar{\alpha} + \bar{\alpha}'\eta \\ \alpha'\xi + \eta'\alpha & \alpha'\bar{\alpha} + \eta'\eta \end{pmatrix}\right) \\ &= f\left(\begin{pmatrix} \xi\xi' + \bar{\alpha}\alpha' - \xi'\xi - \bar{\alpha}'\alpha & \xi\bar{\alpha}' + \bar{\alpha}\eta' - \xi'\bar{\alpha} - \bar{\alpha}'\eta \\ \alpha\xi' + \eta\alpha' - \alpha'\xi - \eta'\alpha & \alpha\bar{\alpha}' + \eta\eta' - \alpha'\bar{\alpha} - \eta'\eta \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2(\alpha\xi' + \eta\alpha' - \alpha'\xi - \eta'\alpha)^T \\ 2(\alpha\xi' + \eta\alpha' - \alpha'\xi - \eta'\alpha) & L_{\alpha\bar{\alpha}' + \eta\eta' - \alpha'\bar{\alpha} - \eta'\eta} - R_{\xi\xi' + \bar{\alpha}\alpha' - \xi'\bar{\alpha} - \bar{\alpha}'\alpha} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por el otro,

$$[f(X), f(Y)] = f(X)f(Y) - f(Y)f(X)$$

Calculamos el primer término de esta expresión y obtenemos

$$\begin{aligned} f(X)f(Y) &= f\begin{pmatrix} \xi & \bar{\alpha} \\ \alpha & \eta \end{pmatrix} f\begin{pmatrix} \xi' & \bar{\alpha}' \\ \alpha' & \eta' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2\alpha^T \\ 2\alpha & L_\eta - R_\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2\alpha'^T \\ 2\alpha' & L_{\eta'} - R_{\xi'} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4\alpha^T\alpha' & 2\alpha^T(L_{\xi'} - R_{\eta'}) \\ (L_\eta - R_\xi)2\alpha' & 4\alpha\alpha'^T + (L_\eta - R_\xi)(L_{\eta'} - R_{\xi'}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Con un cómputo similar, llegamos a que el segundo término es

$$f(Y)f(X) = \begin{pmatrix} 4\alpha'^T\alpha & 2\alpha'^T(L_\xi - R_\eta) \\ (L_{\eta'} - R_{\xi'})2\alpha & 4\alpha'\alpha^T + (L_{\eta'} - R_{\xi'})(L_\eta - R_\xi) \end{pmatrix}.$$

De allí,  $[f(X), f(Y)]$  es igual a

$$\begin{pmatrix} 0 & 2\alpha^T(L_{\eta'} - R_{\xi'}) - 2\alpha'^T(L_{\eta} - R_{\xi}) \\ (L_{\eta} - R_{\xi})2\alpha' - (L_{\eta'} - R_{\xi'})2\alpha & 4(\alpha\alpha'^T - \alpha'\alpha^T) + L_{\eta\eta'} - \eta'\eta - R_{\xi\xi'} - \xi'\xi \end{pmatrix}$$

pues  $\alpha^T\alpha' = \langle\alpha, \alpha'\rangle = \alpha'^T\alpha$  y

$$(L_{\eta} - R_{\xi})(L_{\eta'} - R_{\xi'}) - (L_{\eta'} - R_{\xi'})(L_{\eta} - R_{\xi}) = L_{\eta\eta'} - \eta'\eta - R_{\xi\xi'} - \xi'\xi,$$

ya que las multiplicaciones a izquierda conmutan con aquellas a derecha.

Ahora comparamos las matrices  $f([X, Y])$  y  $[f(X), f(Y)]$ . Como

$$2(\alpha\xi' + \eta\alpha' - \alpha'\xi - \eta'\alpha) = (L_{\eta} - R_{\xi})2\alpha' - (L_{\eta'} - R_{\xi'})2\alpha$$

y también, por el Lema 26, tenemos que

$$L_{\alpha\bar{\alpha}'} - \alpha'\bar{\alpha} - R_{\bar{\alpha}\alpha'} - \bar{\alpha}'\alpha = 4(\alpha\alpha'^T - \alpha'\alpha^T),$$

y por ello,

$$L_{\alpha\bar{\alpha}'} + \eta\eta' - \alpha'\bar{\alpha} - \eta'\eta - R_{\xi\xi'} + \bar{\alpha}\alpha' - \xi'\xi - \bar{\alpha}'\alpha = 4(\alpha\alpha'^T - \alpha'\alpha^T) + L_{\eta\eta'} - \eta'\eta - R_{\xi\xi'} - \xi'\xi,$$

resulta que las matrices en cuestión coinciden. Concluimos que  $f$  es un homomorfismo.

Veamos ahora que  $f$  es un isomorfismo. Como  $sp(1, 1)$  y  $o(1, 4)$  tienen la misma dimensión, basta ver que el núcleo es trivial. Planteamos

$$f \begin{pmatrix} \xi & \bar{\alpha} \\ \alpha & \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2\alpha^T \\ 2\alpha & L_{\eta} - R_{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y obtenemos  $\alpha = 0$  y  $L_{\eta} = R_{\xi}$ . Como vimos en (2.1.7), esto implica que  $\eta = \xi = 0$ .

Finalmente,  $f$  induce un morfismo  $F : Sp(1, 1) \rightarrow O_o(1, 4)$ , ya que  $Sp(1, 1)$  es simplemente conexo pues es difeomorfo a  $(S^3 \times S^3) \times \mathbb{R}^6$  por la descomposición de Cartan.  $\square$

PROPOSICIÓN 28. *El siguiente diagrama es conmutativo :*

$$\begin{array}{ccc} Sp(1, 1) \times Sp_1 & \xrightarrow{*} & Sp_1 \\ \downarrow (F, \rho) & & \downarrow \rho \\ O_o(1, 4) \times S^3 & \xrightarrow{*c} & S^3, \end{array}$$

donde  $\rho(u) = \bar{u}$ ,  $*$  denota la acción de Möbius y  $*_c$  la acción conforme.

DEMOSTRACIÓN. Calculamos primero  $F$  en los elementos del subgrupo compacto maximal  $K = Sp_1 \times Sp_1$  de  $Sp(1, 1)$ . Dados  $p, q \in Sp_1 = S^3$ , ponemos  $p = e^{t\xi}$  y  $q = e^{t\eta}$ , con  $\xi, \eta \in \text{Im}(\mathbb{H})$ . Por el Lema 27 tenemos que

$$\begin{aligned}
 F(\text{diag}(p, q)) &= F(\text{diag}(e^{t\xi}, e^{t\eta})) \\
 &= F(\exp(\text{diag}(\xi, \eta))) \\
 &= \exp(f(\text{diag}(\xi, \eta))) \\
 &= \exp \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & L_\eta - R_\xi \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(L_\eta) \exp(-R_\xi) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L_{e^\eta} R_{e^{-\xi}} \end{pmatrix} \\
 &= L_q R_{\bar{p}} \in SO_4 \subset O_o(1, 4)
 \end{aligned}$$

(usamos que  $L_\eta$  conmuta con  $R_\xi$  y (2.1.11)). Para aplicar (7.0.2), como  $\rho(u) = \bar{u}$ , calculamos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L_q R_{\bar{p}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ q \bar{u} \bar{p} \end{pmatrix}.$$

Así tenemos que para todo  $u \in S^3$  vale

$$F(\text{diag}(p, q)) *_c \rho(u) = L_q R_{\bar{p}} *_c \bar{u} = q \bar{u} \bar{p} = \rho(\text{diag}(p, q) * u).$$

Dado que  $F$  es un morfismo, por la descomposición  $KAK$  de  $Sp(1, 1)$  (ver la Subsección 2.1.5), donde  $A = \exp(\mathbb{R}X)$  con  $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , solo resta verificar que

$$F(\exp tX) *_c \rho(u) = \rho(\exp(tX) * u)$$

vale para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Llamamos

$$H_t = \exp(tX) = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \in O_o(1, 1) \subset Sp(1, 1).$$

Por la definición de la acción de Möbius tenemos

$$\begin{aligned} \rho(\exp(tX) * u) &= \rho(H_t * u) \\ &= \rho((u \cosh t + \sinh t)(u \sinh t + \cosh t)^{-1}) \\ (7.1.2) \quad &= (\bar{u} \sinh t + \cosh t)^{-1}(\bar{u} \cosh t + \sinh t). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} F(\exp tX) &= \exp(t f(X)) \\ &= \exp\left(t \begin{pmatrix} 0 & 2e_1^T \\ 2e_1 & 0_4 \end{pmatrix}\right) \\ &= \exp(t \operatorname{diag}(2X, 0_3)) \\ &= \operatorname{diag}(H_{2t}, I_3). \end{aligned}$$

Ahora, escribiendo  $u = a + w \in S^3$ , con  $a \in \mathbb{R}$ ,  $w \in \operatorname{Im}(\mathbb{H})$  (en particular,  $\rho(u) = \bar{u} = a - w$ ), calculamos

$$\begin{pmatrix} \cosh 2t & \sinh 2t & 0 \\ \sinh 2t & \cosh 2t & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(2t) + \sinh(2t)a \\ \sinh(2t) + \cosh(2t)a \\ -w \end{pmatrix}.$$

Así, por (7.0.2),

$$\begin{aligned} F(\exp tX) *_c \bar{u} &= \operatorname{diag}(H_{2t}, I_3) *_c \bar{u} \\ (7.1.3) \quad &= \frac{\sinh(2t) + a \cosh(2t) - w}{\cosh(2t) + a \sinh(2t)}. \end{aligned}$$

En lo que sigue desarrollamos la expresión (7.1.2) y llegamos a que coincide con (7.1.3), como queríamos probar. Notamos que

$$(7.1.4) \quad |u|^2 = a^2 + |w|^2 = 1 \quad \text{y} \quad 1 = u\bar{u} = (a + w)(a - w) = a^2 - w^2.$$

Tenemos que (7.1.2) es igual a

$$\begin{aligned} & ((a - w) \sinh t + \cosh t)^{-1} ((a - w) \cosh t + \sinh t) \\ &= ((a \sinh t + \cosh t) - w \sinh t)^{-1} ((a \cosh t + \sinh t) - w \cosh t) \end{aligned}$$

que, como  $q^{-1} = \bar{q}/|q|^2$  para todo  $q \neq 0$ , resulta ser el cociente  $N/D$ , donde el numerador es el cuaternión

$$\begin{aligned} N &= ((a \sinh t + \cosh t) + w \sinh t) ((a \cosh t + \sinh t) - w \cosh t) \\ &= 2 \sinh t \cosh t + a (\cosh^2 t + \sinh^2 t) + w (\sinh^2 t - \cosh^2 t) \\ &= \sinh(2t) + a \cosh(2t) - w \end{aligned}$$

(hemos usado (7.1.4)) y el denominador es el número real

$$\begin{aligned} D &= (a \sinh t + \cosh t)^2 + |w|^2 \sinh^2 t \\ &= (a^2 + |w|^2) \sinh^2 t + \cosh^2 t + a \sinh(2t) \\ &= \cosh(2t) + a \sinh(2t). \end{aligned}$$

□

## 7.2. Relación con los movimientos proyectivos de $S^3$

Primero explicitamos un morfismo cubrimiento doble de  $SL_4(\mathbb{R})$  a  $O_o(3, 3)$ . Damos los detalles de la construcción, que involucra varias identificaciones, tomando elementos de [31] y [17].

Sea  $o_4 = \{\text{matrices reales antisimétricas } 4 \times 4\}$ . Existe un isomorfismo

$$(7.2.1) \quad \omega : o_4 \rightarrow \Lambda^2(\mathbb{R}^4)^*, \quad Z \mapsto \omega_Z,$$

donde  $\omega_Z(x, y) = x^T Z y$ . Consideramos en  $o_4$  el producto interno  $g$ , que resultará de signatura  $(3, 3)$ , inducido vía  $\omega$  del producto interno  $h$  en  $\Lambda^2(\mathbb{R}^4)^*$  dado por

$$(7.2.2) \quad h(\sigma, \tau) \det = \frac{1}{2} \sigma \wedge \tau.$$

LEMA 29. *El grupo  $SL_4(\mathbb{R})$  actúa en  $\Lambda^2(\mathbb{R}^4)^*$  por isometrías lineales con respecto a  $h$  mediante  $A \cdot \sigma = (A^T)^* \sigma$ . Además, el siguiente diagrama es conmutativo*

:

$$\begin{array}{ccc}
SL_4(\mathbb{R}) \times o_4 & \longrightarrow & o_4 \\
\downarrow (\text{id}, \omega) & & \downarrow \omega \\
SL_4(\mathbb{R}) \times \Lambda^2(\mathbb{R}^4)^* & \xrightarrow{\quad} & \Lambda^2(\mathbb{R}^4)^*
\end{array}$$

y por lo tanto induce un morfismo

$$(7.2.3) \quad \Phi : SL_4(\mathbb{R}) \rightarrow O_o(o_4, g), \quad \Phi(A)(Z) = AZA^T.$$

DEMOSTRACIÓN. Veamos primero que la acción es por isometrías lineales. De hecho, dado  $A$  con  $\det A = 1$ , resulta de la definición de  $h$  que

$$\begin{aligned}
h((A^T)^* \sigma, (A^T)^* \tau) \det &= \frac{1}{2} ((A^T)^* \sigma) \wedge ((A^T)^* \tau) \\
&= \frac{1}{2} (A^T)^* (\sigma \wedge \tau) \\
&= \frac{1}{2} \det(A^T) (\sigma \wedge \tau) \\
&= \frac{1}{2} (\sigma \wedge \tau) \\
&= h(\sigma, \tau) \det.
\end{aligned}$$

Además, el diagrama es conmutativo, pues para  $A \in SL_4(\mathbb{R})$  y  $Z \in o_4$ , tenemos que para todo  $x, y \in \mathbb{R}^4$  vale

$$\begin{aligned}
(A \cdot \omega_Z)(x, y) &= (\omega_Z)(A^T x, A^T y) = (A^T x)^T Z A^T y \\
&= x^T (AZA^T) y = (\omega_{AZA^T})(x, y),
\end{aligned}$$

y así  $\Phi(A)(Z) = AZA^T$  es el morfismo buscado entre  $SL_4(\mathbb{R})$  y  $O_o(o_4, g)$ .  $\square$

Recordamos de (2.1.8) la descomposición  $o_4 = \mathcal{L} \oplus \mathcal{R}$ .

LEMA 30. *El conjunto  $\mathcal{B} = \{L_i, L_j, L_k\} \cup \{R_i, R_j, R_k\}$  es una  $(3, 3)$ -base ortonormal de  $o_4$  con respecto a  $g$ , donde los primeros elementos son espaciales y los últimos, temporales. En particular, el isomorfismo*

$$(7.2.4) \quad \iota : (o_4, g) \rightarrow \mathbb{R}^{3,3}, \quad \iota(L_\xi + R_\eta) = (\xi, \eta).$$

*es una isometría lineal.*

DEMOSTRACIÓN. Verificamos solo que  $g(L_i, L_j) = 0$  y  $g(L_i, L_i) = 1$  (las restantes igualdades se muestran de manera análoga). Por definición,  $g(L_i, L_j) = h(\omega_{L_i}, \omega_{L_j})$ . De la misma manera obtenemos que  $\omega_{L_j} = -e^1 \wedge e^3 + e^2 \wedge e^4$ . Luego

$$\begin{aligned}\omega_{L_i} \wedge \omega_{L_i} &= (-1)^2 (e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4) \wedge (e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4) \\ &= 2 e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \wedge e^4 = 2 \det\end{aligned}$$

Entonces, por (7.2.2),  $h(\omega_{L_i}, \omega_{L_i}) = 1$ . También

$$\omega_{L_i} \wedge \omega_{L_j} = - (e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4) \wedge (-e^1 \wedge e^3 + e^2 \wedge e^4) = 0,$$

y por lo tanto  $h(\omega_{L_i}, \omega_{L_j}) = 0$ . □

Por el lema anterior, a partir de (7.2.4), tenemos un isomorfismo

$$I : O_o(o_4, g) \rightarrow O_o(3, 3),$$

que combinado con el morfismo  $\Phi$  de (7.2.3) da el morfismo que mencionamos al comienzo de esta sección,

$$F = I \circ \Phi : SL_4(\mathbb{R}) \rightarrow O_o(3, 3).$$

LEMA 31. Para todo  $A \in SL_4(\mathbb{R})$  y  $\xi, \eta \in \text{Im}(\mathbb{H})$  se cumple que

$$(7.2.5) \quad F(A)(\xi, \eta) = \iota(\Phi(A)(L_\xi + R_\eta)).$$

DEMOSTRACIÓN. Por definición de  $I$ , el diagrama

$$\begin{array}{ccc} o_4 & \xrightarrow{B} & o_4 \\ \downarrow \iota & & \downarrow \iota \\ \mathbb{R}^{3,3} & \xrightarrow{I(B)} & \mathbb{R}^{3,3} \end{array}$$

es conmutativo para todo  $B \in O_o(o_4, g)$ . En particular,  $(I(B))(\iota(Z)) = \iota(B(Z))$  para todo  $Z \in o_4$ . Luego, por (7.2.4) vale que

$$F(A)(\xi, \eta) = I(\Phi(A))(\iota(L_\xi + R_\eta)) = \iota(\Phi(A)(L_\xi + R_\eta))$$

para todo  $A \in SL_4(\mathbb{R})$ . □

Recordamos de (2.1.9) y (2.1.10) las presentaciones  $SO_4 = \{L_p \circ R_{\bar{q}} \mid p, q \in S^3\}$  y  $SO_3 = \{L_p \circ R_{\bar{p}} \mid p \in S^3\}$ .

PROPOSICIÓN 32. *La restricción de  $F$  a  $SO_4$  viene dada por*

$$F|_{SO_4} : SO_4 \rightarrow SO_3 \times SO_3 \subset O_o(3, 3), \quad F(L_p \circ R_{\bar{q}}) = (L_p \circ R_{\bar{p}}, L_q \circ R_{\bar{q}}).$$

DEMOSTRACIÓN. Comenzamos evaluando  $\Phi$  en elementos de  $SO_4$ . Para  $A \in SO_4$  y  $Z \in o_4$  calculamos

$$\Phi(A)(Z) = AZA^T = AZA^{-1}.$$

Poniendo  $A = L_p \circ R_{\bar{q}}$  ( $p, q \in S^3$ ) y  $Z = L_\xi + R_\eta$  ( $\xi, \eta \in \text{Im } \mathbb{H}$ ), obtenemos

$$\begin{aligned} \Phi(A)(Z) &= L_p R_{\bar{q}} (L_\xi + R_\eta) R_q L_{\bar{p}} \\ &= L_p R_{\bar{q}} L_\xi R_q L_{\bar{p}} + L_p R_{\bar{q}} R_\eta R_q L_{\bar{p}} \\ &= L_p L_\xi L_{\bar{p}} + R_{\bar{q}} R_\eta R_q \\ &= L_{p\xi\bar{p}} + R_{q\eta\bar{q}}. \end{aligned}$$

Entonces, por (7.2.5), resulta

$$\begin{aligned} F(L_p \circ R_{\bar{q}})(\xi, \eta) &= \iota(\Phi(L_p \circ R_{\bar{q}})(L_\xi + R_\eta)) \\ &= \iota(L_{p\xi\bar{p}} + R_{q\eta\bar{q}}) \\ &= (p\xi\bar{p}, q\eta\bar{q}) \\ &= \text{diag}(L_p \circ R_{\bar{p}}, L_q \circ R_{\bar{q}})(\xi, \eta). \end{aligned} \quad \square$$

Ahora que hemos definido el morfismo de  $SL_4(\mathbb{R})$  a  $O_o(3, 3)$  y lo hemos explicitado en los elementos de  $SO_4$  estamos en condiciones de enunciar y demostrar la relación entre la acción proyectiva en  $S^3$  definida en (7.0.1) y la de Möbius en  $SO_3$ . Llamamos

$$\rho : S^3 \rightarrow SO_3, \quad \rho(q) = L_q R_{\bar{q}}.$$

PROPOSICIÓN 33. *El siguiente diagrama es conmutativo*

$$(7.2.6) \quad \begin{array}{ccc} SL_4(\mathbb{R}) \times S^3 & \xrightarrow{*_p} & S^3 \\ \downarrow (F, \rho) & & \downarrow \rho \\ O_o(3, 3) \times SO_3 & \xrightarrow{*} & SO_3, \end{array}$$

donde  $*$  denota la acción de Möbius y  $*_p$  la acción proyectiva.

DEMOSTRACIÓN. Primero verificamos la conmutatividad del diagrama para  $A = L_p \circ R_{\bar{q}} \in SO_4 \subset SL_4(\mathbb{R})$ . Debemos mostrar que

$$(7.2.7) \quad F(A) * \rho(u) = \rho(A *_p u)$$

para todo  $u \in S^3$ .

Por un lado,  $A *_p u = pu\bar{q}$ , ya que este cuaternión tiene norma uno. Por el otro, por la Proposición 32,

$$F(A) * \rho(u) = (L_p \circ R_{\bar{p}}, L_q \circ R_{\bar{q}}) * L_u R_{\bar{u}}.$$

En consecuencia, (7.2.7) es equivalente a

$$L_p R_{\bar{p}} L_u R_{\bar{u}} (L_q R_{\bar{q}})^{-1} = L_{pu\bar{q}} (R_{pu\bar{q}})^{-1},$$

que se verifica fácilmente usando (1.0.4) y que las multiplicaciones a izquierda conmutan con aquellas a derecha.

Por la descomposición  $KAK$  de  $SL_4(\mathbb{R})$  descrita en la Subsección 2.1.5, como  $F$  es un morfismo, solo falta comprobar que el diagrama conmuta para cualquier matriz diagonal  $E$  en  $SL_4(\mathbb{R})$ . Ahora bien,  $E$  tiene la forma  $E = \exp(x_1 D + x_2 D_2 + x_3 D_3)$ , donde

$$D = \text{diag}(1, 1, -1, -1), \quad D_2 = \text{diag}(1, -1, 1, -1) \quad \text{y} \quad D_3 = \text{diag}(1, -1, -1, 1).$$

Pero existen  $k_2, k_3 \in SO_4$  tales que  $D_l = k_l D k_l^{-1}$  para  $l = 2, 3$ . Ergo,

$$E = \exp(x_1 D) k_2 \exp(x_2 D) k_2^{-1} k_3 \exp(x_3 D) k_3^{-1}.$$

Por lo tanto, es suficiente ver la conmutatividad del diagrama para

$$A_t := \exp(tD) = \text{diag}(e^t I_2, e^{-t} I_2).$$

Sea  $B_t$  la matriz de la transformación  $\Phi(A_t)(L_i) = A_t L_i A_t^T \in o(\mathbb{H})$  con respecto a la base  $\{1, i, j, k\}$ . Calculamos

$$\begin{aligned} B_t &= \begin{pmatrix} e^t I_2 & 0_2 \\ 0_2 & e^{-t} I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t I_2 & 0_2 \\ 0_2 & e^{-t} I_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t} J & 0_2 \\ 0_2 & e^{-2t} J \end{pmatrix} \\ &= \cosh(2t) \begin{pmatrix} J & 0_2 \\ 0_2 & J \end{pmatrix} + \sinh(2t) \begin{pmatrix} J & 0_2 \\ 0_2 & -J \end{pmatrix} \\ &= \cosh(2t) L_i + \sinh(2t) R_i \end{aligned}$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ , donde  $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Cálculos similares arrojan lo siguiente:

$$A_t L_{ai+bj+ck} A_t^T = \cosh(2t) L_{ai} + \sinh(2t) R_{ai} + L_{bj+ck}$$

$$A_t R_{ai+bj+ck} A_t^T = \sinh(2t) L_{ai} + \cosh(2t) R_{ai} + R_{bj+ck}$$

para todo  $a, b, c, t \in \mathbb{R}$ . Consecuentemente, llamando

$$C_t = \text{diag}(\cosh 2t, I_2) \quad \text{y} \quad S_t = \text{diag}(\sinh 2t, 0_2),$$

ambos en  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ , la matriz del operador  $\Phi(A_t)$  con respecto a la base  $\mathcal{B}$  como en el Lema 30, que es igual a la matriz de  $F(A_t)$  por el Lema 31, es

$$\begin{pmatrix} C_t & S_t \\ S_t & C_t \end{pmatrix} \in O_o(3, 3).$$

Ahora, para  $w \neq 0$  en  $\mathbb{H}$ , llamamos  $I_w$  a la matriz del operador  $L_w(R_w)^{-1}$  en  $\text{Im}(\mathbb{H})$  con respecto a la base  $\{i, j, k\}$ .

La conmutatividad del diagrama para  $A_t$  se reduce a la validez de

$$(C_t I_u + S_t)(S_t I_u + C_t)^{-1} = L_{(A_t u)/|A_t u|}(R_{(A_t u)/|A_t u|})^{-1} = L_{A_t u}(R_{A_t u})^{-1} = I_{A_t u}$$

para todo  $u \in S^3$  y todo  $t \in \mathbb{R}$ , o equivalentemente,

$$C_t I_u + S_t = I_{A_t u}(S_t I_u + C_t).$$

Escribiendo  $I_w = \frac{1}{|w|^2} M_w$ , con  $M_w = L_w R_{\bar{w}}$ , esta identidad se traduce en

$$(7.2.8) \quad |A_t u|^2 (C_t M_u + S_t) = M_{A_t u} (S_t M_u + C_t).$$

Sea  $w = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ . Tenemos que  $A_t w = (e^t a, e^t b, e^{-t} c, e^{-t} d)$ . También, a partir de que

$$L_w = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad R_{\bar{w}} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix},$$

resulta

$$M_w = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 - d^2 - c^2 & -2ad + 2bc & 2bd + 2ac \\ 2ad + 2bc & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & -2ab + 2cd \\ -2ac + 2bd & 2ab + 2cd & a^2 - b^2 + d^2 - c^2 \end{pmatrix}.$$

Ahora, (7.2.8) puede comprobarse con un cómputo muy extenso pero directo, usando que  $c^2 + d^2 = 1 - a^2 - b^2$  cuando  $w \in S^3$ .  $\square$

### 7.3. Implicaciones dinámicas para los movimientos de Möbius en dimensiones bajas

Sean  $Sp(1, 1)$  y  $O_o(3, 3)$  munidos de las métricas energía cinética. Por la Proposición 3, las métricas riemannianas inducidas en los subgrupos compactos maximales respectivos  $Sp_1 \times Sp_1$  y  $SO_3 \times SO_3$  son bi-invariantes. El Teorema 4 asegura que cada factor es totalmente geodésico. Los resultados en esta sección brindan más información acerca de esta cuestión. Al mismo tiempo, proveen una formulación alternativa (quizás más iluminadora) para el Teorema 3 (b) en [25], en relación con el cubrimiento doble canónico  $S^3 \times S^3 \rightarrow SO_4$ .

**LEMA 34.** *Sea  $Z \in o_4$ . Entonces  $Z = \lambda X$  para algún  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $X \in o_4$  con  $X^2 = -I_4$  si y solo si  $Z = L_\zeta$  o  $Z = R_\zeta$  para cierto  $\zeta \in \text{Im}(\mathbb{H})$ .*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que  $Z = L_\zeta$  con  $\zeta \in \text{Im}(\mathbb{H})$ . Si  $\zeta = 0$ , se pueden elegir  $\lambda = 0$  y  $X \in o_4$  cualquiera con  $X^2 = -I_4$ ; si  $\zeta \neq 0$ , por (2.1.2), podemos tomar  $\lambda = |\zeta|$  y  $X = L_{\zeta/|\zeta|}$ . Para  $Z = R_\zeta$  valen argumentos similares.

Ahora mostramos la recíproca. Por (2.1.8) escribimos  $Z = L_\xi + R_\eta$  con  $\xi, \eta \in \text{Im}(\mathbb{H})$ . Calculamos, por un lado,

$$Z^2 = \lambda^2 X^2 = -\lambda^2 I_4.$$

Por el otro, por (2.1.2) y como  $L_\xi$  y  $R_\eta$  conmutan,

$$Z^2 = (L_\xi + R_\eta)^2 = L_\xi^2 + R_\eta^2 + 2L_\xi R_\eta = -(|\xi|^2 + |\eta|^2) I_4 + 2L_\xi R_\eta.$$

Esto implica que  $L_\xi R_\eta = \mu I_4$  para algún  $\mu \in \mathbb{R}$ . Si por ejemplo  $\eta \neq 0$ , tenemos que

$$L_\xi = \mu R_{\bar{\eta}/|\eta|^2} = R_{\mu\bar{\eta}/|\eta|^2}.$$

Como vimos en 2.1.7, esto implica que  $\xi = 0$ . De manera similar se muestra que  $\eta = 0$  si  $\xi \neq 0$ .  $\square$

Este lema nos permite demostrar la siguiente Proposición, que fue enunciada en la introducción.

PROPOSICIÓN 6. Sean  $Sp(1, 1)$  y  $O_o(3, 3)$  munidos de las respectivas métricas energía cinética. Entonces:

- a) El subgrupo  $Sp_1 \times Sp_1$  es totalmente geodésico en  $Sp(1, 1)$ .
- b) Una geodésica en  $SO_3 \times SO_3$  es una geodésica en  $O_o(3, 3)$  si y solo si permanece en uno de los factores.

DEMOSTRACIÓN. Por las Proposiciones 28 y 33, las acciones de Möbius de  $Sp(1, 1)$  sobre  $Sp_1$  y de  $O_o(3, 3)$  sobre  $SO_3$  son equivalentes, salvo cubrimientos dobles, a la acción conforme de  $O_o(1, 4)$  sobre  $S^3$  y a la acción proyectiva de  $SL_4(\mathbb{R})$  sobre  $S^3$ , respectivamente. Los morfismos preservan las correspondientes métricas energía cinética.

Por el Teorema 2 (b) en [32],  $SO_4$  es totalmente geodésico en  $O_o(1, 4)$  munido de la métrica energía cinética asociada a la acción conforme. La parte (a) del corolario resulta de que el morfismo  $F$  en la Proposición 28 lleva  $Sp_1 \times Sp_1$  a  $SO_4$ .

Por otro lado, el Teorema 3 (b) en [25] asegura que para  $Z \in o_4$ , la geodésica  $\sigma(t) = \exp(tZ)$  de  $SO_4$  por la identidad es también una geodésica de  $SL_4(\mathbb{R})$  si y solo si  $Z = \lambda X$  para algún  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $X \in o_4$  con  $X^2 = -I_4$ . Luego, la parte (b) es una consecuencia directa del lema anterior y de la Proposición 33.  $\square$

## Capítulo 8

### Conclusiones

En esta tesis hemos realizado aportes a la dinámica de flujos compresibles en variedades riemannianas de dimensión finita, un área que ha sido menos abordada que la correspondiente para movimientos rígidos. Específicamente, hemos estudiado la dinámica no rígida inducida por las acciones birracionales estándares de los grupos unitarios split  $G = O_o(n, n)$ ,  $SU(n, n)$  y  $Sp(n, n)$  sobre los grupos de Lie clásicos compactos  $M = SO_n$ ,  $U_n$  y  $Sp_n$ , respectivamente. De manera más precisa, hemos estudiado la geometría de  $G$  munido de la métrica energía cinética asociada a la acción de  $G$  sobre  $M$ , suponiendo que  $M$  porta su métrica riemanniana bi-invariante canónica y tiene inicialmente una distribución homogénea de masa. Por el Principio de Mínima Acción, los movimientos libres de fuerzas (pensados como curvas en  $G$ ) corresponden a geodésicas de  $G$ .

En el Teorema 1 hemos probado que la métrica energía cinética en  $G$  no es completa (en particular, no invariante), exhibiendo una geodésica  $\gamma$  de  $G$  inextensible de longitud finita. La incompletitud, en un contexto clásico, corresponde a la existencia de shocks (colapsos en tiempo finito). En la Proposición 2 hemos mostrado el comportamiento en cuanto a cómo se acumula la masa cuando  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \gamma(t)$ .

En la Proposición 3 hemos encontrado simetrías de  $G$  munido de la métrica energía cinética.

En el Teorema 5 hemos podido hallar subvariedades totalmente geodésicas  $N$  de  $G$ , lo que en nuestro escenario dinámico significa que si un movimiento libre de fuerzas comienza tangente a  $N$ , entonces permanece en  $N$ .

En el Teorema 4 hemos establecido condiciones suficientes bajo las cuales geodésicas de movimientos rígidos son geodésicas de  $G$ .

Finalmente, en el Corolario 6 hemos estudiado equivalencias con la dinámica de los movimientos proyectivos y conformes de la esfera en dimensiones bajas, obteniendo una versión más fuerte del Teorema 4 para estas dimensiones. Concretamente, en las Secciones 7.1 y 7.2 hemos probado que las acciones correspondientes sobre los grupos unitarios, por un lado, y sobre la esfera, por el otro, son equivalentes. Esto, que a nuestro entender tiene interés en sí mismo, hasta donde sabemos, no ha sido tratado en la literatura. La tarea resultó ser más demandante de lo esperado, pues si bien la existencia de los morfismos entre los grupos es conocida en cada caso, las presentaciones disponibles no son suficientemente explícitas para nuestros fines.

## Bibliografía

- [1] Agol, I. *Notes on simple Lie algebras and Lie groups*. Universidad de California en Berkeley (2009). Disponible en: <https://math.berkeley.edu/~ianagol/261A.F09/Simplegroups.pdf>
- [2] Arnold, V.I. *Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications a l'hydrodynamique des fluids parfaits*. Ann. Inst. Grenoble **16** (1966), 316–361.
- [3] Arnold, V.I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Graduate Texts in Mathematics **60**. Springer, Nueva York (1978).
- [4] Bates, L.; Gibson, P. *A geometry where everything is better than nice*. Proc. Amer. Math. Soc. **145** (2017), 461–465.
- [5] Bauer, M.; Modin, K. *Semi-invariant Riemannian metrics in hydrodynamics*. Calc. Var. Partial Differential Equations **59**, paper No. 65 (2020), 25 pp.
- [6] Bauer, M.; Bruveris, M.; Michor, P.W. *Overview of the geometries of shape spaces and diffeomorphism groups*. J. Math. Imaging Vis. **50** (2014), 60–97.
- [7] Berndt, J.; Console, S.; Olmos, C. *Submanifolds and Holonomy*. Monographs and Research Notes in Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL (2016).
- [8] Bruveris, M.; Vialard, F.-X. *On completeness of groups of diffeomorphisms*. J. Eur. Math. Soc. **19** (2017), 1507–1544.
- [9] Burov, A.A.; Chevallier, D.P. *Dynamics of affinely deformable bodies from the standpoint of theoretical mechanics and differential geometry*. Rep. Math. Phys. **62** (2008), 283–321.
- [10] Čap, A.; Slovák, J. *Parabolic Geometries. I. Background and general theory*. Mathematical Surveys and Monographs **154**. American Mathematical Society, Providence, RI (2009).
- [11] Dotti, I.G. *Tópicos de la Geometría Riemanniana Homogénea*. Texto de posgrado de Matemática de FaMAF n° 3 (1987). Disponible en la página de publicaciones de FaMAF.
- [12] Ebin, D.G.; Marsden, J. *Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid*. Ann. of Math. (2) **92** (1970), 102–163.
- [13] Ebin, D.G. *Geodesics on the symplectomorphism group*. Geom. Funct. Anal. **22** (2012), 202–212.
- [14] Ebin, D.G.; Preston, S.C. *Riemannian geometry of the contactomorphism group*. Arnold Math. J. **1** (2015), 5–36.

- [15] Emmanuele, D.; Salvai, M. *Force free Möbius motions of the circle*. J. Geom. Symmetry Phys. **27** (2012), 59–65.
- [16] Emmanuele, D.; Salvai, M. *A dynamical presentation of the better than nice metric on the disc*. arXiv:1605.03863 [math.DG] (2016).
- [17] Garret, P. *Sporadic isogenies to orthogonal groups*. Notas de un curso dictado en la Universidad de Minnesota (2015). Disponibles en:  
[http://www-users.math.umn.edu/~garrett/m/v/sporadic\\_isogenies.pdf](http://www-users.math.umn.edu/~garrett/m/v/sporadic_isogenies.pdf)
- [18] Haller S.; Teichmann J.; Vizman C. *Totally geodesic subgroups of diffeomorphisms*. J. Geom. Phys. **42** (2002), 342–354.
- [19] Harvey, F.R. *Spinors and Calibrations*. Perspectives in Mathematics **9**. Academic Press, Boston, MA (1990).
- [20] Helgason, S. *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*. Graduate Studies in Mathematics **34**. American Mathematical Society, Providence, RI (2001).
- [21] Khesin, B. *Dynamics of symplectic fluids and point vortices*. Geom. Funct. Anal. **22** (2012), 1444–1459.
- [22] Khesin, B.; Misiołek, G. *Shock waves for the Burgers equation and curvatures of diffeomorphism groups*. Proc. Steklov Inst. Math. **259** (2007), 73–81.
- [23] Khesin, B.; Misiołek, G.; Modin, K. *Geometric hydrodynamics and infinite-dimensional Newton’s equations*. arXiv:2001.01143 [math.SG] (2020), to appear in Bulletin of the Amer. Math. Soc.
- [24] Knapp, A. *Lie Groups Beyond an Introduction*. Progress in Mathematics **140**. Birkhäuser, Boston, MA (2002).
- [25] Lazarte, M.; Salvai, M.; Will, A. *Force free projective motions of the sphere*. J. Geom. Phys. **57** (2007), 2431–2436.
- [26] Meckes, E. *The Random Matrix Theory of the Classical Compact Groups*. Cambridge Tracts in Mathematics **218**. Cambridge University Press, Cambridge (2019).
- [27] Modin, K.; Perlmutter, M.; Marsland, S.; McLachlan, R.I. *On Euler-Arnold equations and totally geodesic subgroups*. J. Geom. Phys. **61** (2011), 1446–1461.
- [28] Nagano, T. *Transformation groups on compact symmetric spaces*. Trans. Amer. Math. Soc. **118** (1965), 428–453.
- [29] O’Neill, B. *Semi-Riemannian Geometry (with applications to Relativity)*. Academic Press, New York (1983).
- [30] Ovsienko, V.Y.; Khesin, B. *Korteweg–de Vries superequations as an Euler equation*. Funct. Anal. Appl. **21** (1987), 329–331.

- [31] Salamon, S. *Instantons on the 4-sphere*. Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino **40** (1982), 1–20.
- [32] Salvai, M. *Force free conformal motions of the sphere*. Diff. Geom. Appl. **16** (2002), 285–292.
- [33] Salvai, M. *Circles in self-dual symmetric R-spaces*. Aceptado para su publicación en Tohoku Math. J. (2021).
- [34] Segal, G. *The geometry of the KdV equation*. Topological methods in quantum field theory (Trieste, 1990). Internat. J. Modern Phys. A **6** (1991), 2859–2869.
- [35] Sharpe, R. *Differential Geometry: Cartan's generalisation of Klein's Erlangen program*. Graduate Texts in Mathematics **166**. Springer-Verlag, New York (1997).
- [36] Simon, B. *Representations of Finite and Compact Groups*. Graduate Studies in Mathematics **10**. American Mathematical Society, Providence, RI (1996).
- [37] Takeuchi, M. *Basic transformations of symmetric R-spaces*. Osaka J. Math. **25** (1988), 259–297.
- [38] Thorbergsson, G. *Classical symmetric R-spaces*. Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino **74** (2016), 329–354.
- [39] Vizman, C. *Geodesic equations on diffeomorphism groups*. SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. **4**, paper No. 030 (2008), 22 pp.
- [40] Zhang, F. *Quaternions and matrices of quaternions*. Linear Algebra Appl. **251** (1997), 21–57.