



Cálculo Diferencial e Integral



Autora: Marta Susana Bonacina

Colaboradores:

Claudia Teti

Alejandra Haidar

Santiago Andrés Bortolato

Valeria Philippe

Franco Lisandrini

Marisa Quiroga

TOMO II

(Tercera Edición)



Autora: Marta S. Bonacina

Colaboradores: Claudia M. Teti, Alejandra P. Haidar, Santiago A. Bortolato

Colaboradores 3º Edición: Claudia M. Teti, Alejandra P. Haidar, Santiago A. Bortolato Valeria Philippe, Franco Lisandrini, Marisa Quiroga

Cálculo Diferencial e Integral

1a ed. - Iniciativa Latinoamericana de Libros de Texto Abiertos (LATIn), 2014. 492 pag.

Primera Edición: Marzo 2014

Iniciativa Latinoamericana de Libros de Texto Abiertos (LATIn)

<http://www.proyectolatin.org/>

Tercera Edición: Octubre 2022



Los textos de este libro se distribuyen bajo una licencia Reconocimiento-CompartirIgual 3.0 Unported (CC BY-SA 3.0) http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.es_ES

Esta licencia permite:

Compartir: copiar y redistribuir el material en cualquier medio o formato.

Adaptar: remezclar, transformar y crear a partir del material para cualquier finalidad.

Siempre que se cumplan las siguientes condiciones:



Reconocimiento. Debe reconocer adecuadamente la autoría, proporcionar un enlace a la licencia e indicar si se han realizado cambios. Puede hacerlo de cualquier manera razonable, pero no de una manera que sugiera que tiene el apoyo del licenciador o lo recibe por el uso que hace.



Compartir Igual — Si remezcla, transforma o crea a partir del material, deberá difundir sus contribuciones bajo **la misma licencia que el original**.

Las figuras e ilustraciones que aparecen en el libro son de autoría de los respectivos autores. De aquellas figuras o ilustraciones que no son realizadas por los autores, se coloca la referencia respectiva.



Este texto forma parte de la Iniciativa Latinoamericana de Libros de Texto abiertos (LATIn), proyecto financiado por la Unión Europea en el marco de su Programa ALFA III EuropeAid.

El Proyecto LATIn está conformado por: Escuela Superior Politécnica del Litoral, Ecuador (ESPOL); Universidad Autónoma de Aguascalientes (UAA), Universidad Católica de San Pablo, Perú (UCSP); Universidade Presbiteriana Mackenzie, Brasil (UPM); Universidad de la República, Uruguay (UdelaR); Universidad Nacional de Rosario, Argentina (UR); Universidad Central de Venezuela, Venezuela (UCV), Universidad Austral de Chile, Chile (UACH), Universidad del Cauca, Colombia (UNICAUCA), Katholieke Universiteit Leuven, Bélgica (KUL), Universidad de Alcaá, España (UAH), Université Paul Sabatier, Francia (UPS).

Índice general: Tomo II

8	Funciones Vectoriales	7
8.1	Límite y continuidad de funciones vectoriales	7
8.2	Derivada de una función vectorial	8
8.2.1	Vector velocidad y vector aceleración	10
8.3	Curvas y movimiento en el espacio	11
8.3.1	Propiedades de la derivación	13
8.4	Actividades	15
8.4.1	Problemas Adicionales	19
9	La Integral	20
9.1	Introducción	20
9.2	Cálculo del resultado o efecto total del “cambio”	21
A	Caso Simple	21
B	Caso Cuasi Simple	22
C	Caso “Desconocido”	24
9.3	El problema y su contexto	26
9.3.1	Relación entre el cálculo de la variación total y cálculo del área	26
9.3.2	Resolución de problemas y pasaje de contexto.....	28
9.4	Área de regiones planas	29
9.5	Problemas relativos a razones de cambio “variables”	34
9.6	La integral	37
9.7	Propiedades de la Integral	39
9.8	Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral	41
9.9	Problemas que resuelve “La Integral”	42
9.10	Cálculo de la integral	43
9.11	Relación entre Cálculo Diferencial y Cálculo Integral	53
9.12	Relación entre función integral y primitiva	56
9.13	El concepto de Integral Indefinida	57
9.13.1	Tabla de Integrales Inmediatas.....	57
9.13.2	Técnicas de integración	58
9.13.3	Propiedades de las integrales indefinidas.....	58
9.13.4	Notas	59
9.14	Apéndice	63
9.15	Actividades	67

10	Aplicaciones de la Integral	80
10.1	Un problema Geométrico: área de figuras planas	80
10.2	Un problema de la Física: el Trabajo	85
10.3	Otro problema de la Física: Cambio o variación total en un proceso de cambio a velocidad variable	85
10.4	Otros problemas geométricos que resuelve la Integral	89
10.4.1	Longitud de un arco de curva C.....	89
10.4.2	Volumen de S, sólido de revolución.....	91
10.5	Actividades	93
10.6	Integrales Impropias	104
10.7	Integrales de Funciones vectoriales	108
10.7.1	Introducción.....	108
10.7.2	Cambio Total.....	108
10.7.3	Actividades.....	109
11	Ecuaciones Diferenciales	111
11.1	Introducción	111
11.2	Definiciones y conceptos básicos	116
11.3	Procedimientos para hallar la solución general de una EDO	124
11.4	Actividades	149
	Aplicaciones.....	164
12	Campos Escalares	177
12.1	Definición	177
12.2	Curvas de Nivel	180
12.3	Límites y continuidad	181
12.4	Derivadas Direccionales	187
12.4.1	Derivadas Parciales	190
12.4.2	Derivadas de Orden Superior	194
12.5	Plano Tangente y Aproximación Lineal	196
12.5.1	Plano Tangente	196
12.5.2	Incrementos y Diferenciales	197
12.6	Cálculo de Derivadas Direccionales: Vector Gradiente	202
12.7	Regla de la cadena	206
12.7.1	Interpretación geométrica el vector gradiente	210
12.7.2	Derivada a lo largo de una curva de nivel	211
12.8	Valores mínimos y máximos	212
12.9	Funciones de tres o más variables	217
12.9.1	Definición	217
12.9.2	Derivada Direccional	218
12.9.3	Diferenciabilidad y Aproximación Lineal	219

12.9.4	Planos Tangentes a superficies de nivel	220
12.10	Actividades	223
12.11	Miscelánea de Problemas (I)	229
12.12	Miscelánea de Problemas (II)	234
13	Cálculo Integral Campos Escalares y Vectoriales	240
13.1	Integrales Múltiples	242
13.1.1	Integrales Dobles	242
13.1.2	Integrales Iteradas	247
13.1.3	Aplicaciones de las Integrales Dobles	250
13.2	Integrales Curvilíneas	254
13.2.1	Integrales de línea sobre campos vectoriales	254
13.2.2	Propiedades de las integrales de línea.....	260
13.2.3	Aplicaciones de las integrales de línea.....	261
13.2.4	Forma diferencial de la integral de línea	263
13.2.5	Teorema fundamental de la Integral de Línea	266
13.2.6	Integral de línea con respecto a la longitud de arco	271
13.3	Actividades	275
13.3.1	Integrales dobles	275
13.3.2	Integrales de línea	279
13.3.3	Miscelánea	282
	Bibliografía	288

8— Funciones vectoriales

En esta unidad utilizaremos los vectores para estudiar el movimiento de un punto en el plano coordenado o en el espacio. Antes de empezar su lectura, es conveniente releer el Capítulo 6.

Si las coordenadas del punto móvil en el instante t están dadas por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, entonces el vector

$$\bar{r}(t) = f(t)\bar{i} + g(t)\bar{j} \text{ ó } \bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j}$$

es el **vector de posición** del punto. La ecuación anterior determina una **función vectorial** $\bar{r} = \bar{r}(t)$ que asocia al número t el vector de posición $\bar{r}(t)$ del punto móvil. En notación vectorial, una función vectorial es un par ordenados de funciones reales: $\bar{r}(t) = (f(t), g(t))$.

8.1 Límite y Continuidad de funciones vectoriales

Gran parte del cálculo de las funciones reales (ordinarias) se aplica a las funciones vectoriales. Para comenzar, el límite de una función vectorial $\bar{r} = (f, g)$ se define como sigue:

$$\lim_{t \rightarrow a} \bar{r}(t) = \left(\lim_{t \rightarrow a} f(t), \lim_{t \rightarrow a} g(t) \right) = \bar{i} \left(\lim_{t \rightarrow a} f(t) \right) + \bar{j} \left(\lim_{t \rightarrow a} g(t) \right)$$

si el límite de las últimas dos expresiones existe. Así, los límites de las funciones vectoriales se obtienen mediante los límites de sus funciones componentes.

Decimos que $\bar{r} = \bar{r}(t)$ es continua en el número a si

$$\lim_{t \rightarrow a} \bar{r}(t) = \bar{r}(a)$$

Esto equivale a decir que $\bar{r}$ es **continua** en a si y sólo si sus funciones componentes son continuas en a .

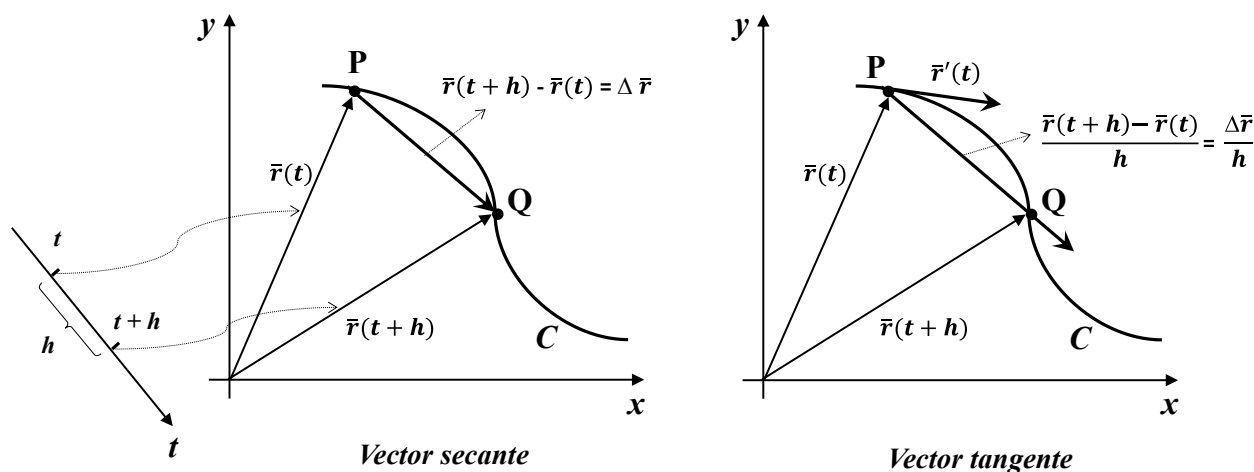
8.2 Derivada de una función vectorial

La derivada $\bar{r}'$ de la función vectorial $\bar{r}$ se define exactamente de la misma manera que la derivada de una función real. Específicamente,

$$\bar{r}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{r}(t+h) - \bar{r}(t)}{h}$$

si este límite existe.

El significado geométrico de esta definición se muestra en la figura de abajo. Si los puntos P y Q tienen vectores de posición $\bar{r}(t)$ y $\bar{r}(t+h)$, respectivamente, entonces $\overline{PQ}$ representa el vector $\bar{r}(t+h) - \bar{r}(t)$, el que puede, por lo tanto, considerarse como un *vector secante*. Si $h > 0$, el vector $(1/h)(\bar{r}(t+h) - \bar{r}(t))$ tiene la misma dirección que $\bar{r}(t+h) - \bar{r}(t)$. Cuando $h \rightarrow 0$, parece que este vector se aproxima a un vector que está en la recta tangente. Por esta razón, el vector $\bar{r}'(t)$ se denomina **vector tangente** a la curva que está definida por $\bar{r}$ en el punto P , siempre que $\bar{r}'(t)$ exista y $\bar{r}'(t) \neq 0$. La recta tangente a C en P se define como la recta que pasa por P y que es paralela al vector tangente $\bar{r}'(t)$. Más adelante, daremos esta interpretación en forma analítica.



Por otro lado, suponga que una partícula se desplaza en el plano de modo que su vector de posición en el tiempo t es $\bar{r}(t)$. Según la figura de arriba, para valores pequeños de h , el vector

$$\frac{\bar{r}(t+h) - \bar{r}(t)}{h}$$

es una aproximación de la dirección de la partícula que se mueve a lo largo de la curva C . Su magnitud mide el tamaño del vector de desplazamiento por unida de tiempo. Podemos decir que este vector da la velocidad promedio sobre un intervalo de longitud h y su límite es el **vector de velocidad** $\bar{v}(t)$ en el tiempo t :

$$\bar{v}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{r}(t+h) - \bar{r}(t)}{h} = \bar{r}'(t)$$

Así, el vector velocidad es también el vector tangente y señala la dirección de la recta tangente.

Finalmente, la **rapidez** de la partícula en el tiempo t es la magnitud o módulo del vector velocidad, o sea, $|\bar{v}(t)|$

El siguiente teorema demuestra el importante hecho de que $\bar{\mathbf{r}}'$ se puede calcular derivando componente a componente.

Teorema 1: “derivación componente a componente”

Sea $\bar{\mathbf{r}}$, con ley $\bar{\mathbf{r}}(t) = (f(t), g(t))$, donde f y g son funciones derivables.

Entonces,

$$\bar{\mathbf{r}}'(t) = (f'(t), g'(t))$$

Demostración

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{r}}'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{\mathbf{r}}(t+h) - \bar{\mathbf{r}}(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(t+h), g(t+h)) - (f(t), g(t))}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(t+h) - f(t), g(t+h) - g(t))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(t+h) - f(t)}{h}, \frac{g(t+h) - g(t)}{h} \right) = \\ &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} \right) = (f'(t), g'(t)).\end{aligned}$$

Interpretación geométrica de $\bar{\mathbf{r}}'$

Sea la curva C dada por

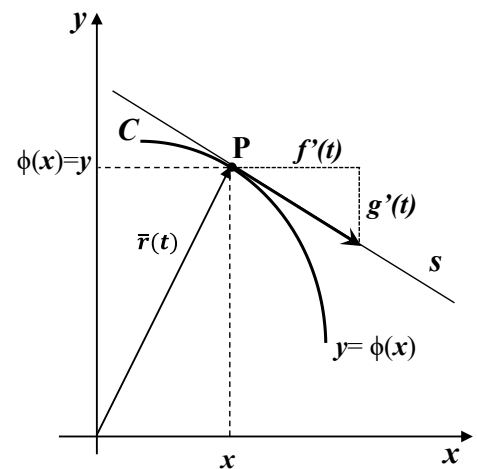
$$C: \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, t \in [a, b]$$

La curva paramétrica C es *suave* si las derivadas f' y g' son continuas y no se anulan en forma simultánea. Si f admite inversa h , entonces la curva se puede dar en forma explícita; o sea, a través de una ecuación con fórmula $y = \Phi(x)$. Para ello sustituimos $t = h(x)$ en $y = g(t)$, y obtenemos:

$$C: \begin{cases} t = h(x) \\ y = g(h(x)) \end{cases}$$

Luego: $y = g(t) = g(h(x)) = \Phi(x)$, con $\Phi = g \circ h$

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &= (g \circ h)'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = g'(t) \cdot h'(x) = \frac{g'(t)}{f'(t)} \\ &\text{(por derivada inversa)}\end{aligned}$$



Conclusión:

La pendiente de s , recta tangente a la curva C en P , es $\frac{g'(t)}{f'(t)} = \Phi'(\)$. Esto significa que el vector de componentes $(f'(t), g'(t))$ es un vector paralelo a la recta s . Este vector es $\bar{\mathbf{r}}'(t)$; luego, concluimos que $\bar{\mathbf{r}}'(t)$ es tangente a la curva en el punto $(f(t), g(t))$.

Teorema 2: Fórmulas de derivación

Sea $\bar{\mathbf{u}}$ y $\bar{\mathbf{v}}$ funciones vectoriales derivables. Sea h una función a variable real y sea c un escalar. Entonces

1. $(\bar{\mathbf{u}}(t) + \bar{\mathbf{v}}(t))' = \bar{\mathbf{u}}'(t) + \bar{\mathbf{v}}'(t),$
2. $(c \bar{\mathbf{u}}(t))' = c \bar{\mathbf{u}}'(t),$
3. $(h(t) \cdot \bar{\mathbf{u}}(t))' = h'(t) \cdot \bar{\mathbf{u}}(t) + h(t) \cdot \bar{\mathbf{u}}'(t),$
4. $(\bar{\mathbf{u}}(t) \cdot \bar{\mathbf{v}}(t))' = \bar{\mathbf{u}}'(t) \cdot \bar{\mathbf{v}}(t) + \bar{\mathbf{u}}(t) \cdot \bar{\mathbf{v}}'(t).$

Demostración Demostraremos la parte (4) y dejaremos el resto como ejercicio.

Si $\bar{\mathbf{u}}(t) = (f_1(t), f_2(t))$ y $\bar{\mathbf{v}}(t) = (g_1(t), g_2(t))$; entonces

$$\bar{\mathbf{u}}(t) \cdot \bar{\mathbf{v}}(t) = f_1(t) \cdot g_1(t) + f_2(t) \cdot g_2(t)$$

Por lo tanto, la regla del producto para las funciones a variable real ordinaria implica

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{u}}(t) \cdot \bar{\mathbf{v}}(t))' &= (f_1(t) \cdot g_1(t) + f_2(t) \cdot g_2(t))' = \\ &= [f_1(t)' \cdot g_1(t) + f_1(t) \cdot g_1(t)'] + [f_2(t)' \cdot g_2(t) + f_2(t) \cdot g_2(t)'] = \\ &= \bar{\mathbf{u}}'(t) \cdot \bar{\mathbf{v}}(t) + \bar{\mathbf{u}}(t) \cdot \bar{\mathbf{v}}'(t). \quad \text{(q.e.d)} \end{aligned}$$

8.2.1 Vector velocidad y vector aceleración

Ahora analizaremos con más detalles el movimiento de un punto con vector de posición $\bar{\mathbf{r}}(t) = f(t)\bar{\mathbf{i}} + g(t)\bar{\mathbf{j}}$. Su **vector velocidad** $\bar{\mathbf{v}}(t)$ y **vector de aceleración** $\bar{\mathbf{a}}(t)$ son:

$$\bar{\mathbf{v}}(t) = \bar{\mathbf{r}}'(t) = f'(t)\bar{\mathbf{i}} + g'(t)\bar{\mathbf{j}}$$

$$\bar{\mathbf{a}}(t) = \bar{\mathbf{r}}''(t) = f''(t)\bar{\mathbf{i}} + g''(t)\bar{\mathbf{j}}$$

También escribimos

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{d\bar{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{dx}{dt}\bar{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt}\bar{\mathbf{j}}$$

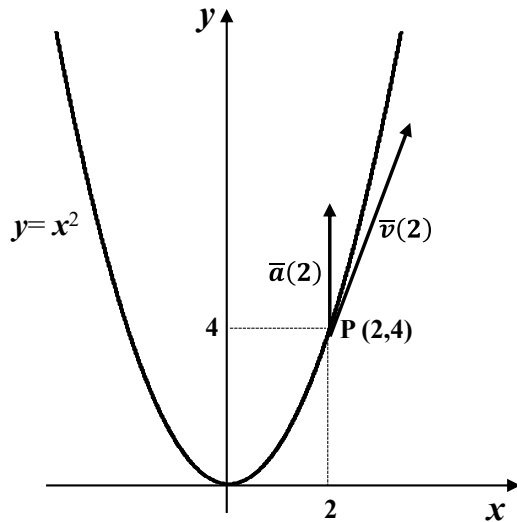
$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{d^2\bar{\mathbf{r}}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\bar{\mathbf{i}} + \frac{d^2y}{dt^2}\bar{\mathbf{j}}$$

El punto móvil tiene **rapidez** $v(t)$ y **aceleración escalar** $a(t)$, funciones escalares que simplemente son las longitudes de los vectores velocidad y aceleración correspondientes. Así,

$$v(t) = |\bar{\mathbf{v}}(t)| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \quad \text{y} \quad a(t) = |\bar{\mathbf{a}}(t)| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$$

Estos últimos resultados no deben confundirnos y hacernos suponer que la aceleración escalar a y la derivada dv/dt de la rapidez son iguales. Aunque esto ocurre en ciertos casos para el movimiento en línea recta, es falso por lo general para el movimiento bidimensional.

Ejemplo 1:



Una partícula en movimiento tiene el vector de posición $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} \rightarrow C: \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$

Determine los vectores velocidad y aceleración, la rapidez y la aceleración escalar cuando $t = 2$.

Solución Como $\vec{r}(2) = 2\vec{i} + 4\vec{j}$, la partícula está en el punto $P(2,4)$ sobre la parábola $y = x^2$ cuando $t = 2$.

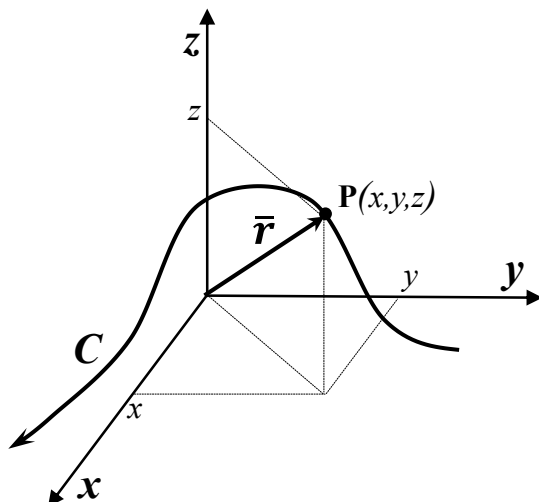
Su vector velocidad es $\vec{v}(t) = \vec{i} + 2t\vec{j}$.

De modo que $\vec{v}(2) = \vec{i} + 4\vec{j}$ y $v(2) = |\vec{v}(2)| = \sqrt{17}$. Entonces, la *velocidad* $\vec{v}(2)$ es un *vector*, mientras que la *rapidez* es un *escalar*.

El vector aceleración es $\vec{a}(t) = 2\vec{j}$. En particular cuando $t = 2$, su vector de aceleración es $2\vec{j}$ y su aceleración escalar $a = 2$. En la figura se muestra la trayectoria de la partícula con los vectores $\vec{v}(2)$ y $\vec{a}(2)$ **anclados** al punto $P(2,4)$ correspondiente a $t = 2$.

8.3 Curvas y movimiento en el espacio

Gran parte del análisis hecho sobre las funciones vectoriales en el plano se aplica, con ligeros cambios, a las curvas y el movimiento en el espacio tridimensional. La diferencia principal es que los vectores tienen ahora tres componentes en vez de dos.



Pensemos en un punto P que se mueve a lo largo de una curva C en el espacio. Podemos describir su posición en el instante t mediante las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t)$$

que dan sus coordenadas en el instante t . De otro modo, podemos determinar la posición del punto mediante su **vector de posición**

$$\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k} \quad \text{ó}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

tal como se muestra en la figura.

Podemos derivar una función vectorial tridimensional, como $\bar{\mathbf{r}}(t)$, componente a componente, igual que una función vectorial bidimensional (véase el **Teorema 1**).

Así, el **vector velocidad** $\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}(t)$ del punto en movimiento en el instante t está dado por

$$\bar{\mathbf{v}}(t) = \bar{\mathbf{r}}'(t) = f'(t)\bar{\mathbf{i}} + g'(t)\bar{\mathbf{j}} + h'(t)\bar{\mathbf{k}}$$

en notación diferencial,

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{d\bar{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{dx}{dt}\bar{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt}\bar{\mathbf{j}} + \frac{dz}{dt}\bar{\mathbf{k}}$$

Su **vector aceleración** $\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}}(t)$ está dado por

$$\bar{\mathbf{a}}(t) = \bar{\mathbf{v}}'(t) = f''(t)\bar{\mathbf{i}} + g''(t)\bar{\mathbf{j}} + h''(t)\bar{\mathbf{k}}$$

o bien,

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\bar{\mathbf{i}} + \frac{d^2y}{dt^2}\bar{\mathbf{j}} + \frac{d^2z}{dt^2}\bar{\mathbf{k}}$$

La **rapidez** $v(t)$ y la **aceleración escalar** $a(t)$ del punto en movimiento son las longitudes de sus vectores velocidad y aceleración, respectivamente:

$$v(t) = |\bar{\mathbf{v}}(t)| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

y

$$a(t) = |\bar{\mathbf{a}}(t)| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}$$

Ejemplo 2:

Las ecuaciones paramétricas de un punto en movimiento son

$$x(t) = a \cos \omega t, \quad y(t) = a \sin \omega t, \quad z = b t$$

donde a , b y ω son números positivos.

Describe la trayectoria del punto en términos geométricos. Calcule su velocidad, rapidez y aceleración en el instante t .

Solución

Como $x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 \omega t + a^2 \sin^2 \omega t = a^2$,

la trayectoria del punto en movimiento está en el **cilindro** que está arriba y abajo del círculo $x^2 + y^2 = a^2$ en el plano xy , extendido de manera infinita en ambas direcciones, tal como se muestra en la figura.

Las ecuaciones paramétricas dadas para x e y nos dicen que la proyección del punto en el plano xy se mueve en sentido contrario a las agujas del reloj en torno del círculo $x^2 + y^2 = a^2$ con velocidad angular ω .

Por otro lado, como $z = b t$, el punto asciende con velocidad vertical b . Su trayectoria en el cilindro es una espiral llamada **hélice**, como también se indica en la figura.

La derivada del vector de posición

$$\bar{\mathbf{r}}(t) = (a \cos \omega t)\bar{\mathbf{i}} + (a \sin \omega t)\bar{\mathbf{j}} + (bt)\bar{\mathbf{k}}$$

del punto en movimiento es el vector velocidad

$$\bar{\mathbf{v}}(t) = (-a\omega \sin \omega t)\bar{\mathbf{i}} + (a\omega \cos \omega t)\bar{\mathbf{j}} + b\bar{\mathbf{k}} \quad (1)$$

Al derivar de nuevo, obtenemos su vector aceleración

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{a}}(t) &= (-a\omega^2 \cos \omega t)\bar{\mathbf{i}} + (-a\omega^2 \sin \omega t)\bar{\mathbf{j}} = \\ &= -a\omega^2(\cos \omega t\bar{\mathbf{i}} + \sin \omega t\bar{\mathbf{j}}) \quad (2) \end{aligned}$$

La rapidez del punto en movimiento es constante ya que

$$v(t) = |\bar{\mathbf{v}}(t)| = \sqrt{a^2\omega^2 + b^2}$$

Observe que el vector aceleración es un vector horizontal de longitud $a\omega^2$. Además, si pensamos que $\bar{\mathbf{a}}(t)$ está fijo en el punto en movimiento en el instante t de evaluación, de modo que el punto inicial $\bar{\mathbf{a}}(t)$ sea el punto terminal de $\bar{\mathbf{r}}(t)$, entonces $\bar{\mathbf{a}}(t)$ apunta directamente hacia el punto $(0, 0, bt)$ en el eje z .

Observación La hélice del ejemplo es una trayectoria típica de una partícula cargada en un campo magnético constante. Esta partícula debe satisfacer la ley de Newton $\bar{\mathbf{F}} = m\bar{\mathbf{a}}$ y la de la fuerza magnética $\bar{\mathbf{F}} = (q\bar{\mathbf{v}}) \wedge \bar{\mathbf{B}}$, donde q es la magnitud de la carga de la partícula, $q\bar{\mathbf{v}}$ la corriente eléctrica y $\bar{\mathbf{B}}$ es el campo magnético.

Por lo tanto, sus vectores velocidad y aceleración deben satisfacer la siguiente ecuación

$$(q\bar{\mathbf{v}}) \wedge \bar{\mathbf{B}} = m\bar{\mathbf{a}} \quad (3)$$

Si el campo magnético constante es vertical, $\bar{\mathbf{B}} = B\bar{\mathbf{k}}$; entonces con el vector velocidad hallado en (1) tenemos que

$$(q\bar{\mathbf{v}}) \wedge \bar{\mathbf{B}} = \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{i}} & \bar{\mathbf{j}} & \bar{\mathbf{k}} \\ q(-a\omega \sin \omega t) & q(a\omega \cos \omega t) & qb \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = qa\omega B(\cos \omega t\bar{\mathbf{i}} + \sin \omega t\bar{\mathbf{j}})$$

Asimismo, el vector aceleración hallado en (2) implica que

$$m\bar{\mathbf{a}} = -ma\omega^2(\cos \omega t\bar{\mathbf{i}} + \sin \omega t\bar{\mathbf{j}})$$

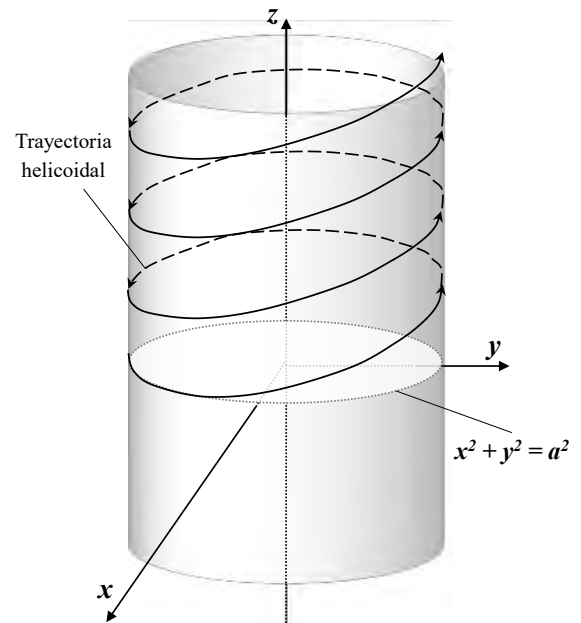
Cuando comparamos los dos últimos resultados, vemos que la hélice del ejemplo satisface la ecuación (3) si:

$$qa\omega B = -ma\omega^2; \quad \text{es decir } \omega = -\frac{qB}{m} \quad (B = |\bar{\mathbf{B}}|)$$

8.3.1 Propiedades de la derivación

La derivación de las funciones vectoriales tridimensionales satisface las mismas propiedades formales enumeradas en el **Teorema 2** para las funciones vectoriales bidimensionales:

1. $(\bar{\mathbf{u}}(t) + \bar{\mathbf{v}}(t))' = \bar{\mathbf{u}}'(t) + \bar{\mathbf{v}}'(t),$
2. $(c\bar{\mathbf{u}}(t))' = c\bar{\mathbf{u}}'(t),$
3. $(h(t) \cdot \bar{\mathbf{u}}(t))' = h(t)' \cdot \bar{\mathbf{u}}(t) + h(t) \cdot \bar{\mathbf{u}}'(t),$
4. $(\bar{\mathbf{u}}(t) \cdot \bar{\mathbf{v}}(t))' = \bar{\mathbf{u}}'(t) \cdot \bar{\mathbf{v}}(t) + \bar{\mathbf{u}}(t) \cdot \bar{\mathbf{v}}'(t)$



En todo caso, $\bar{\mathbf{u}}$ y $\bar{\mathbf{v}}$ son funciones vectoriales con funciones componentes derivables y h es una función real derivable. Además, es válida la esperada regla del producto para la derivada de un producto vectorial:

$$5. \quad (\bar{\mathbf{u}}(t) \wedge \bar{\mathbf{v}}(t))' = \bar{\mathbf{u}}'(t) \wedge \bar{\mathbf{v}}(t) + \bar{\mathbf{u}}(t) \wedge \bar{\mathbf{v}}'(t).$$

El orden de los factores en la última ecuación *debe* ser preservado, ya que el producto vectorial no es conmutativo.

Queda como ejercicio la verificación de las propiedades recién enumeradas, que, en realidad, se puede hacer de manera muy sencilla derivando componente a componente, como se hizo en el caso de la demostración del **Teorema 2**.

Ejemplo 3:

Si $\bar{\mathbf{u}}(t) = 3\bar{\mathbf{j}} + 4t\bar{\mathbf{k}}$ y $\bar{\mathbf{v}}(t) = 5t\bar{\mathbf{i}} - 4\bar{\mathbf{k}}$ entonces $\bar{\mathbf{u}}'(t) = 4\bar{\mathbf{k}}$ y $\bar{\mathbf{v}}'(t) = 5\bar{\mathbf{i}}$.

Por lo tanto $(\bar{\mathbf{u}}(t) \wedge \bar{\mathbf{v}}(t))' = 4\bar{\mathbf{k}} \wedge (5t\bar{\mathbf{i}} - 4\bar{\mathbf{k}}) + (3\bar{\mathbf{j}} + 4t\bar{\mathbf{k}}) \wedge 5\bar{\mathbf{i}} =$

$$\begin{aligned} &= 20t(\bar{\mathbf{k}} \wedge \bar{\mathbf{i}}) - 16(\bar{\mathbf{k}} \wedge \bar{\mathbf{k}}) + 15(\bar{\mathbf{j}} \wedge \bar{\mathbf{i}}) + 20t(\bar{\mathbf{k}} \wedge \bar{\mathbf{i}}) = \\ &= 20t\bar{\mathbf{j}} + 16.0 + 15.(-\bar{\mathbf{k}}) + 20t\bar{\mathbf{j}} = \\ &= 40t\bar{\mathbf{j}} - 15.\bar{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

sin tener que calcular el producto vectorial $\bar{\mathbf{u}}(t) \wedge \bar{\mathbf{v}}(t)$.

8.4 Actividades

1) Para las funciones vectoriales cuyas leyes se dan a continuación, se pide:

- Escribir las ecuaciones paramétricas de la curva C asociada.
- Hallar la ecuación cartesiana de C y, de ser posible, la ecuación explícita, indicando el Dominio.
- De ser posible reconocer C .
- Graficar la curva C , indicando su orientación y la cantidad de veces que se recorre al variar el parámetro en el intervalo indicado en cada caso.
- Para $P_0 / \overline{OP_0} = \bar{r}(t_0)$; hallar la ecuación explícita de la recta tangente a C en P_0 a partir de la ecuación explícita de C .
- Hallar $\bar{r}'(t_0)$. Graficar $\bar{r}'(t_0)$ "anclado" a $P_0 \in C$.
- Hallar $\bar{r}''(t_0)$. Graficar $\bar{r}''(t_0)$ "anclado" a $P_0 \in C$.
- Verificar que $\bar{r}'(t_0)$ es tangente a C en P_0 . (Sugerencia: apoyarse en la recta tangente a C en P_0 .)
- Dar las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a C en P_0 .

a) $\bar{r}(t) = (3+t; 4+t)$; $t \in [-4; 0]$; $t_0 = -2$

b) $\bar{r}(t) = (t; t^2)$; $t \in [-2; 2]$; $t_0 = 1$

c) $\bar{r}(t) = (t^2; t-1)$; $t \in [0; 2]$; $t_0 = 0; 1$

d) $\bar{r}(t) = (2 \cos t; 2 \sin t)$; $t \in [0; 4\pi]$; $t_0 = 0; \frac{\pi}{4}; \pi; 3\frac{\pi}{2}$

e) $\bar{r}(t) = (\cos(2t); \sin(2t))$; $t \in [0; 4\pi]$; $t_0 = 0; \frac{\pi}{4}; \pi; 3\frac{\pi}{2}$

f) $\bar{r}(t) = (\sin(2t); \cos(2t))$; $t \in [0; 2\pi]$; $t_0 = \frac{\pi}{4}$

g) $\bar{r}(t) = (\sin(2t); \cos(2t))$; $t \in [0; \pi]$; $t_0 = \frac{\pi}{4}$

h) $\bar{r}(t) = (3 \cos t + 3; 3 \sin t + 5)$; $t \in [0; 2\pi]$; $t_0 = 3\frac{\pi}{2}$

i) $\bar{r}(t) = (3 \cos t; 4 \sin t)$; $t \in [0; 2\pi]$; $t_0 = \frac{\pi}{2}$

j) $\bar{r}(t) = (4 \sin(2t); 2 \cos(2t))$; $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; $t_0 = \frac{\pi}{4}$

k) $\bar{r}(t) = (t+2; e^t)$; $t \in [-2; 2]$; $t_0 = 0$

l) $\bar{r}(t) = (t; 5)$; $t \in [0; 8]$; $t_0 = 4$

m) $\bar{r}(t) = (e^t; e^{2t})$; $t \in \mathbb{R}$; $t_0 = 0$

n) $\bar{r}(t) = (\ln(t); t^2)$; $t \in \mathbb{R}^+$; $t_0 = 1$

o) $\bar{r}(t) = (e^{-t}; e^t)$; $t \in \mathbb{R}$; $t_0 = 0$

2) Para cada una de las siguientes curvas dadas en ecuaciones cartesianas:

i) Hallar ecuaciones paramétricas sabiendo que las mismas se recorren una sola vez. Escribir una **función** vectorial que las represente. Graficarlas indicando sentido de recorrido.

ii) Idem (i) recorriendo las mismas en el sentido opuesto.

a) $x^2 + y^2 = 25$

d) $9x^2 + 4y^2 = 1$

b) $y = \ln(x) \quad 1 \leq x \leq e$

e) $y = x + 1 \quad -2 \leq x \leq 5$

c) $y = 3x^2 + 6x$

f) $y = e^x \quad 0 \leq x \leq 3$

3)

a) Dados los puntos $A(a_1; a_2)$ y $B(b_1; b_2)$ verificar que $\vec{r}(t) = \vec{OA} + t \cdot \vec{AB}; t \in [0; 1]$ es una función vectorial que representa al segmento $\overline{AB}$ recorrido de A hacia B.

b) Dados $P(3; 5)$ y $Q(6; 6)$, dar la ecuación vectorial del segmento que une P y Q,

b₁) recorrido de P hacia Q

b₂) recorrido de Q hacia P

4) Para las funciones vectoriales cuyas leyes se indican, se pide:

- Escribir las ecuaciones paramétricas de la curva **C** asociada.
- Si es posible reconocer **C** e indicar si es curva “plana”.
- Graficar **C**; indicar la orientación de la curva y cantidad de veces que se recorre.
- Hallar $\vec{r}'(t_0)$. Graficar $\vec{r}'(t_0)$ “anclado” a $P_0 \in C$ y tal que $\vec{OP}_0 = \vec{r}(t_0)$.
- Dar las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a **C** en P_0 .

a) $\vec{r}(t) = (3 - 3t; 2 + 2t; 4t) \quad ; \quad t \in [0; 1] \quad ; \quad t_0 = 0$

b) $\vec{r}(t) = (3t; 5 - 5t; 4) \quad ; \quad t \in [0; 1] \quad ; \quad t_0 = 0$

c) $\vec{r}(t) = (2; 5t; 4 - 3t) \quad ; \quad t \in [0; 1] \quad ; \quad t_0 = 0$

d) $\vec{r}(t) = (2; 3; t) \quad ; \quad t \in [0; 5] \quad ; \quad t_0 = 0$

e) $\vec{r}(t) = (0; 3 + 2t; 0) \quad ; \quad t \in [0; 1] \quad ; \quad t_0 = 0$

f) $\vec{r}(t) = 2t\vec{k} \quad ; \quad t \in \mathbb{R} \quad ; \quad t_0 = 0$

g) $\vec{r}(\theta) = (\cos\theta; \sin\theta; 4) \quad ; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad ; \quad \theta_0 = 0$

h) $\vec{r}(\theta) = \sin\theta \vec{j} + 2\vec{k} \quad ; \quad \theta \in \mathbb{R} \quad ; \quad \theta_0 = 0$

i) $\vec{r}(\theta) = (4; \cos\theta; \sin\theta) \quad ; \quad \theta \in [0; 2\pi] \quad ; \quad \theta_0 = 0$

j) $\vec{r}(\theta) = (\cos\theta; \sin\theta; \frac{\theta}{\pi}) \quad ; \quad \theta \in [0; 2\pi] \quad ; \quad \theta_0 = 0$

5) Hallar una función vectorial que representa la curva que es intersección de las superficies dadas:

a) $(\pi_1) \quad x + y + z = 10 \quad ; \quad (\pi_2) \quad z = 5$

b) $(\pi_1) \quad x + y = 4 \quad ; \quad (\pi_2) \quad y + z = 2$

c) $(S_1) \quad x^2 + y^2 = 9 \quad ; \quad (\pi) \quad z = 5$

d) $(S_1) \quad y = x^2 \quad \forall z \quad ; \quad (\pi) \quad z = 3$

e) $(\pi_1) \quad x = 3 \quad \forall x; \forall y \quad ; \quad (\pi_2) \quad z = 5$

6) Siendo $\bar{r}(t) = (r_1(t); r_2(t))$ y $\bar{s}(u) = (s_1(u); s_2(u))$, $\bar{r}$ y $\bar{s}$ se dicen “equivalentes” si definen la misma curva. (O sea, definen distintas representaciones paramétricas de la misma curva.)

Si $\bar{r}$ y $\bar{s}$ son equivalentes existe $t = h(u)$ tal que $\bar{s}(u) = \bar{r} \circ h(u)$

Se pide: Analizar si $\bar{r}$ y $\bar{s}$ dadas son “equivalentes”; si lo son, hallar “ h ” tal que $\bar{s}(u) = \bar{r} \circ h(u)$:

a) $\bar{r}(t) = (1+t; 2+t)$ con $t \in [0; 2]$ $\bar{s}(u) = (3-u; 4-u)$ con $u \in [0; 2]$

b) $\bar{r}(t) = (t; t^2)$ con $t \in [0; 1]$ $\bar{s}(u) = (\sqrt{u}; u)$ con $u \in [0; 1]$

c) $\bar{r}(t) = (t; t^2)$ con $t \geq 0$ $\bar{s}(u) = (e^u; e^{2u})$ con $u \geq 0$

d) $\bar{r}(t) = (t; 2t+1)$ con $t \in \mathbb{R}$ $\bar{s}(u) = (\cos u; 2\cos u + 1)$ con $u \in \mathbb{R}$

e) $\bar{r}(t) = (2+t; -t; 2+2t)$ con $t \in [0; 1]$ $\bar{s}(u) = (3-u; u-1; 5-2u)$ con $u \in [0; 1]$

f) $\bar{r}(t) = (t; t^2; 1)$ con $t \in [0; 1]$ $\bar{s}(u) = (\sqrt{u}; u; 1)$ con $u \in [0; 1]$

7) Determinar si las siguientes funciones vectoriales son equivalentes:

$\bar{r}_1(t) = (t; 2t+1)$; $t \in \mathbb{R}$

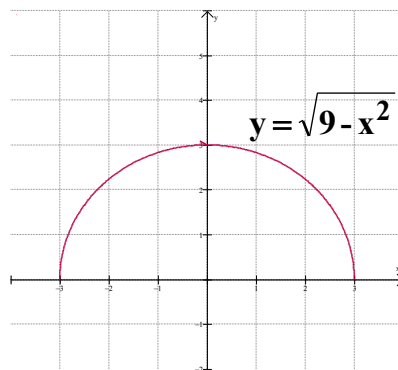
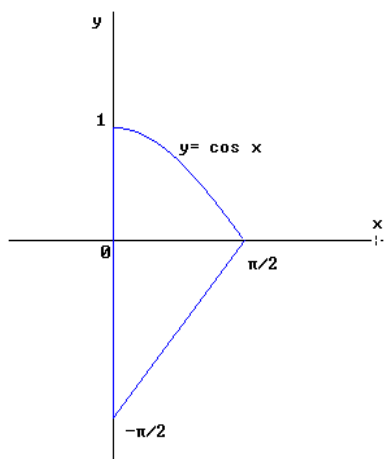
$\bar{r}_2(s) = (\cos s; 2\cos s + 1)$; $s \in \mathbb{R}$

$\bar{r}_3(p) = (e^{-p}; 2e^{-p} + 1)$; $p \in \mathbb{R}$

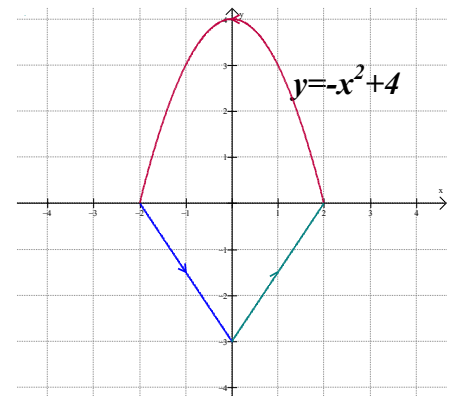
$\bar{r}_4(q) = (e^q; 2e^q + 1)$; $q \in \mathbb{R}$

8) Representar mediante una o más funciones vectoriales cada una de las siguientes curvas dada por sus gráficas si se sabe que las mismas se recorren solo una vez:

a) recorrida en sentido antihorario b)



c)



9) Si $\bar{\mathbf{u}}$ y $\bar{\mathbf{v}}$, con $\bar{\mathbf{u}}(t) = (\mathbf{u}_1(t); \mathbf{u}_2(t))$ y $\bar{\mathbf{v}}(t) = (\mathbf{v}_1(t); \mathbf{v}_2(t))$, son dos funciones vectoriales derivables, se pide demostrar:

a) $(\bar{\mathbf{u}}(t) + \bar{\mathbf{v}}(t))' = \bar{\mathbf{u}}'(t) + \bar{\mathbf{v}}'(t)$

b) $(h(t) \cdot \bar{\mathbf{u}}(t))' = h'(t) \cdot \bar{\mathbf{u}}(t) + h(t) \cdot \bar{\mathbf{u}}'(t)$ (h función escalar)

c) $(\bar{\mathbf{v}} \circ h(t))' = \bar{\mathbf{v}}'(h(t)) \cdot h'(t)$ (h función escalar)

10) Encontrar la velocidad, aceleración y rapidez de una partícula con una función de posición dada. Graficar la trayectoria de la partícula y los vectores aceleración y velocidad en los valores de t dados:

a) $\bar{\mathbf{r}}(t) = (t^2 - 1; t)$ $t = 1$

b) $\bar{\mathbf{r}}(t) = e^t \bar{\mathbf{i}} + e^{-t} \bar{\mathbf{j}}$ $t = 0$

c) $\bar{\mathbf{r}}(t) = \sin t \bar{\mathbf{i}} - 2 \cos t \bar{\mathbf{j}}$ $t = \pi/6$

11) Una persona en un planeador vuela en espiral hacia arriba debido a una corriente de aire de rápido ascenso en una trayectoria cuyo vector posición es $\bar{\mathbf{r}}(t) = (3 \cos(t), 3 \sin(t); t^2)$ para $0 \leq t \leq 4\pi$.

a) Realizar un bosquejo de la trayectoria.

b) Determinar

i) Los vectores velocidad y aceleración.

ii) La rapidez del planeador.

iii) El tiempo, si existe, en que la aceleración del planeador es ortogonal a la velocidad.

c) Graficar sobre la trayectoria los vectores posición, velocidad y aceleración iniciales, como así también el vector desplazamiento.

12) Si la función de posición de una partícula está dada por $\bar{\mathbf{r}}(t) = (t^2; 5t; t^2 - 16t)$ ¿Cuándo es mínima su rapidez?

13) Graficar con un software adecuado:

$$\bar{\mathbf{r}}(t) = (\sin(3t)\cos(t); \sin(3t)\sin(t); t) \quad t \in [0; 4\pi]$$

$$\bar{\mathbf{p}}(s) = (\cos(s); \sin(s); \sin(2s)) \quad s \in [0; 2\pi]$$

$$\mathbf{q}(\alpha) = ((4 + \sin(20\alpha))\cos(\alpha); (4 + \sin(20\alpha))\sin(\alpha); \cos(20\alpha)) \quad \alpha \in [0, 2\pi]$$

Variar los coeficientes para modificar las funciones y graficar las distintas curvas.

14) Graficar con un software adecuado las siguientes hélices, modificar los dominios para visualizar las distintas curvas:

$$\overline{r_1}(t) = (\cos(t); \text{sen}(t); t) \quad t \in [0; 2\pi]$$

$$\overline{r_2}(s) = (\cos(s); \text{sen}(s); 0,3s) \quad s \in [0; 2\pi]$$

$$\overline{r_3}(t) = (\cos(3q); \text{sen}(3q); q) \quad q \in [0; 2\pi]$$

$$\overline{r_4}(u) = (u; \text{sen}(u); \cos(u)) \quad u \in [0; 2\pi]$$

$$\overline{r_5}(w) = (\cos(2w); w; \text{sen}(2w)) \quad w \in [0; 2\pi]$$

8.4.1 Problemas adicionales

15) La *posición* de un electrón en un átomo a un tiempo t (en pseg $\equiv 10^{-12}$ seg) puede describirse, según el modelo clásico, mediante una órbita elíptica.

Si con $\overline{r}(t) = (3 \cos t ; 4 \text{ sen } t)$ modelamos la posición del electrón en un intervalo acotado de tiempo (durante pseg), se pide:

a) Dar posición inicial ($t = 0$), la posición final del electrón y el desplazamiento. Luego, dar la ecuación cartesiana de C , curva que describe la posición de la partícula en cada instante " t ", explicando claramente los pasos para obtenerla.

b) Graficar C , $\overline{r}(0)$ y $\overline{r}(\pi)$ en un mismo sistema. Marcar en el mismo gráfico el vector desplazamiento.

c) Dar $\overline{v}$; función que describe la velocidad del electrón durante los π pseg en que se mueve. Graficar $\overline{v}(0)$ y $\overline{v}(\pi)$, anclado en sus posiciones respectivas.

d) Indicar Verdadero ó Falso, justificar:

- (i) La rapidez del electrón al tiempo inicial y final es la misma.
- (ii) El electrón se mueve con rapidez constante.
- (iii) La aceleración del electrón durante su trayectoria nunca es el vector nulo.

16) Dada $\overline{r}(t) = (\frac{1}{t-1}; t)$

a) Indicar donde están contenidos los conjuntos dominio e imagen de $\overline{r}$. Dar condiciones sobre $\overline{r}$ para poder pasar de la ecuación vectorial a la ecuación explícita de la curva descripta por $\overline{r}$.

b) Si $\overline{r}$ representa, para cada instante t , la posición de una partícula que se mueve en el plano, determinar el dominio de $\overline{r}$ sabiendo que la posición inicial de la partícula está dada por $\overline{OP} = (1; 2)$ y la posición final por $\overline{OQ} = (1/4; 5)$. Graficar $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$ y el vector desplazamiento.

c) Dar la ecuación cartesiana de C , trayectoria de la partícula. Graficarla en el mismo sistema que el ítem anterior indicando el sentido de recorrido.

d) Dar $\overline{v}$, velocidad de la partícula durante las t horas que se mueve. Graficar $\overline{v}(t_{inicial})$ y $\overline{v}(t_{final})$, anclado a las posiciones correspondientes.

9— La Integral

9.1 Introducción

El Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral son las dos áreas básicas de una rama de la matemática que se conoce como Análisis Matemático ó simplemente Cálculo.

Tanto el Cálculo Diferencial como el Integral se ocupan de los *procesos de cambio*.

- El Cálculo Diferencial del estudio, cálculo y aplicaciones de las *razones de cambio*.
En particular, de determinar el *cambio instantáneo* de una magnitud.
- El Cálculo Integral, se ocupa de determinar *qué cosa cambió y cuanto lo hizo*.
O sea, de determinar:

"el resultado ó efecto total de un proceso de cambio"

Por ejemplo el Cálculo Integral da respuestas a cuestiones tales como:

- si un objeto se mueve a una velocidad *variable*, ¿cuál es el *desplazamiento total* del objeto al cabo de t horas?
- si la velocidad a la que entra agua a un tanque es *variable*: ¿cuanto *aumenta el volumen de agua en el tanque* al cabo de t horas?
- si una varilla de metal tiene densidad *variable* (por ej., es más liviana en un extremo que en el otro), ¿cómo calculamos la *masa total* de la varilla?;
- si la tasa de variación de un cultivo de bacterias es *variable*, ¿cuánto *cambia (aumenta o disminuye) la cantidad de bacterias* al cabo t horas?
- de la Física elemental sabemos calcular el trabajo (W) realizado por una fuerza para mover un cuerpo sobre una recta, cuando la fuerza tiene la dirección del movimiento e intensidad *constante* (F): $W = F \times \text{desplazamiento}$; pero, ¿cómo calculamos el trabajo en el caso de una fuerza con intensidad *variable*?
- de la Geometría elemental sabemos calcular el área de rectángulos (R), regiones con altura *constante*: $\text{área } R = \text{base} \times \text{altura}$; pero, ¿cómo hacemos para calcular el área de una región de *altura variable*; por ejemplo, en el caso que el contorno superior del rectángulo no sea recto sino *curvo*?

Si observamos las cuestiones que resuelve la integral, detectamos un rasgo común a todas ellas: que si la función del caso (velocidad, densidad, tasa de variación, intensidad de una fuerza, altura de una figura, etc) es “*constante*”, $f(x) = k$ y definida en $I = [a ; b]$, entonces la solución del problema viene dada por el producto: “ k ” x “*amplitud de I*”. O sea, abordamos aquí un tipo de problema que sabemos resolver si la “*función dato*” es “*constante*” pero cuya resolución desconocemos si tal función es “*variable*”.

Observamos también que la problemática que da origen al Cálculo Integral, “*determinación del resultado total de un proceso de cambio*” tiene que ver con situaciones concretas, muchas de las cuales enfrentamos y resolvemos cotidianamente, aun sin tener conciencia de ello. Se ha observado que individuos sin conocimientos de Cálculo enfrentados a problemas de naturaleza “integral”, los resuelven procediendo de la misma forma en que se hacia esto históricamente, antes de que se desarrollara y formalizara del Cálculo Integral.

Así, con el objetivo de promover un aprendizaje que permita tanto la cabal comprensión de los conceptos como el acertado y efectivo uso de “la integral”, en lo que sigue se proponen las ideas básicas del Cálculo Integral a partir de lo intuitivo y relacionándolas con aplicaciones conocidas. Lograda la familiarización con tales ideas, se procede finalmente a la “formalización” de las mismas.

9.2 Cálculo del “resultado o efecto total del cambio”

Ejemplo:

***Proceso:** entrada/salida de líquido (agua, solución salina, etc.) en un tanque.

Función asociada, $V = V(t)$, volumen de líquido en el tanque al instante t .

***Incógnita:** ΔV ; variación de volumen en el tanque, en un intervalo de tpo $I = [t_i; t_f]$

***Resolución:** como todo problema, esta depende del dato de que se dispone:

❶ **Dato:** $V = V(t)$; **volumen total de líquido en el tanque, al instante t .**

Aquí, el cálculo de ΔV remite a una simple resta: $\Delta V = V(t_f) - V(t_i)$.

❷ **Dato:** $v = V'(t)$; o sea, **velocidad a la que se desarrolla el proceso.**

Este caso remite al **problema tipo** que resuelve el **cálculo integral**; o sea, Al caso en que la obtención de ΔV depende de cómo sea “ v ”:

*si $v = cte$, ΔV se calcula a través del simple producto “ $v \times \Delta t$ ”; pero,

*si $v \neq cte$, **no sabemos (hasta ahora) como proceder** para obtener ΔV .

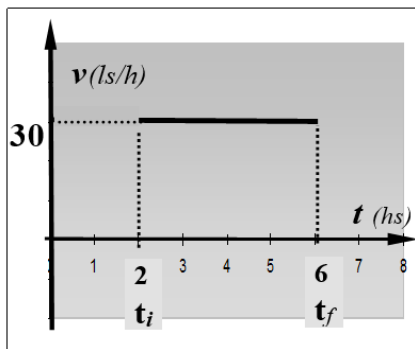
❶ Cuando el investigador se encuentra ante un problema cuya resolución desconoce lo primero que hace es simplificar hipótesis al efecto de transformar el problema en otro análogo cuya resolución conoce (el “*caso simple*”). Luego, y a partir de lo observado para el caso simple, idea, propone y prueba un proceso de resolución para el problema original.

❷ Con el objeto de resolver el problema del cálculo de ΔV , variación de volumen en un Δt conocida la velocidad del proceso ($v \neq cte$); comenzamos por el *caso simple* ($v = cte$).

(A) CASO SIMPLE ($v = cte$).

Cálculo de la “*variación de volumen*” para “*velocidad constante*”.

Problema 1: El gráfico adjunto corresponde al registro de la *velocidad* (v) con que entra agua a un tanque durante 4 hs. y a partir de las 2 hs. de *iniciado el proceso*. Se desea conocer la “*variación de volumen*” en el tanque en este lapso de tiempo.



***Función del proceso:** $V = V(t)$

$V \rightarrow$ vol. de agua en el tanque, al instante t

***Incógnita:** $\Delta V =$ variación de vol. entre las 2 y las 6.

***Datos:** $v = 30$ (ls/h) $\rightarrow$ velocidad del proceso = cte (*)

$\Delta t = t_f - t_i = 4$ ($t_f = t_{\text{final}}$; $t_i = t_{\text{inicial}}$)

***Resolución:** por (*) $v = \frac{\Delta V}{\Delta t} \Rightarrow \Delta V = v \cdot \Delta t$

$v = 30$; $\Delta t = 4 \Rightarrow \Delta V = 30 \cdot 4 = 120$

Rta: entre las 2 y las 6 el volumen de agua en el

tanque “*aumenta*” 120 ls.

► **Conclusión:** $v = cte \Rightarrow \Delta V = v \times \Delta t$ (*variación de vol. = “velocidad” $\times$ “tiempo”*)

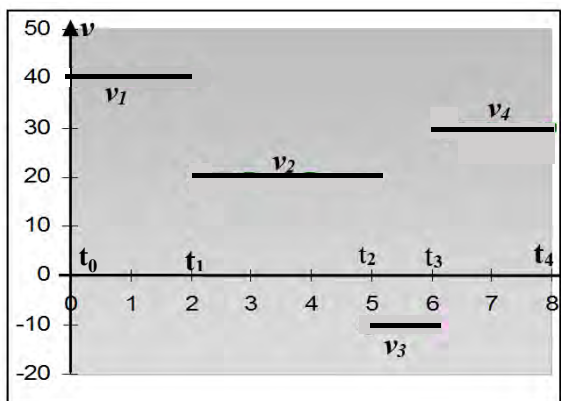
► **Observación:** $\Delta V_{[2;6]} = V(6) - V(2) \Rightarrow V(6) = \Delta V_{[2;6]} + V(2) = 120 + V(2)$

Luego, de conocerse $V(2)$ (volumen de agua en el tanque a las 2 hs. de iniciado el proceso), se puede calcular $V(6)$ (volumen de agua en el tanque a las 6 hs. de iniciado el proceso).

(B) **CASO CUASI SIMPLE** (se resuelve en forma simple, aunque no sea el caso simple).

Cálculo de la “**variación de volumen**” para “**velocidad constante a tramos**”.

Problema 2 : El gráfico adjunto corresponde al registro de la **velocidad (v)** con que durante **8 hs** entra o sale agua de un tanque. Al respecto se desea conocer la “**variación de volumen**” de agua en el tanque, en ese intervalo de tiempo.



***Función del proceso:** $V = V(t)$

***Incógnita:** $\Delta V = \text{variación de vol.}$ en 8 hs.

***Datos:** $v = v(t) \rightarrow \text{velocidad del proceso}$

$v = v_{\text{graf}} \rightarrow \text{velocidad} \neq \text{cte}$

$I = [0; 8] \rightarrow t_i = 0; t_f = 8$

$\Delta t = t_f - t_i = 8$

Observamos y concluimos:

$\rightarrow v_{\text{graf}}$ constante “a tramos”.

$\rightarrow 4$ subintervalos $I_i = [t_{i-1}; t_i]$, $i = 1, 2, 3, 4$; tal que $I_i \subset I$ y $v(t) = v_i$, $\forall t \in I_i$

Conclusión 1: en cada I_i estamos en el “caso simple” ($v = \text{cte}$); luego, y según la fórmula hallada en (A); en cada I_i : $\Delta V_i = v_i \times \Delta t_i$.

Por ejemplo:

• $I_1 = [0; 2]$, $v_1 = 40 \Rightarrow \Delta V_1 = v_1 \times \Delta t_1 \Rightarrow \Delta V_1 = 40 \times 2 = 80$

La **variación de volumen** (en este caso, **aumento**) en las 2 primeras horas es de **80 lts.**

• $I_3 = [5; 6]$, $v_3 = -10 \Rightarrow \Delta V_3 = v_3 \times \Delta t_3 \Rightarrow \Delta V_3 = -10 \times 1 = -10$

La **variación de volumen** (en este caso, **disminución**) entre la 5ta y 6ta hora de iniciado el proceso, es de **30 lts.**

Conclusión 2: ΔV_i indica la “**variación de volumen**” en un **subintervalo** ($\rightarrow I_i$).

Luego, al ΔV_i lo llamamos “**variación parcial**”.

Finalmente vemos que para obtener la “**variación total**”; o sea, la correspondiente a las 8 hs. que dura el proceso, basta “**sumar**” las “**variaciones parciales**”.

CONCLUSIÓN FINAL para el problema 2:

$v = \text{cte a tramos} \Rightarrow$ la **variación total** en I es la **suma** de las **variaciones parciales**

$\Delta V_{[0;8]} = \text{suma de las “variaciones parciales”}$

$$\Delta V_{[0;8]} = \sum_{i=1}^4 v_i \times \Delta t_i$$

$$\Delta V_{[0;8]} = v_1 \times \Delta t_1 + v_2 \times \Delta t_2 + v_3 \times \Delta t_3 + v_4 \times \Delta t_4.$$

Resolución del Problema 2: cálculo de la “*variación total*” de volumen en 8 hs.

tpo(hs)	I _i	Δt _i	v _i	ΔV _i [t _{i-1} ; t _i] v _i x Δt _i = variac. parcial	VARIACIÓN TOTAL en [t ₀ ; t _i]
t ₀	0				-----
t ₁	2	[0 ; 2]	Δt ₁ = 2	40 40 x 2 = 80 (entran 80 ls)	ΔV _[0 ; 2] = 80
t ₂	5	[2 ; 5]	Δt ₂ = 3	20 20 x 3 = 60 (entran 60 ls)	ΔV _[0 ; 5] = 80 + 60
t ₃	6	[5 ; 6]	Δt ₃ = 1	-10 -10 x 1 = -10 (salen 10 ls)	ΔV _[0 ; 6] = 80 + 60 - 10
t ₄	8	[6 ; 8]	Δt ₄ = 2	30 30 x 2 = 60 (entran 60 ls)	ΔV _[0 ; 8] = 80 + 60 - 10 + 60 = 190

Luego, $\Delta V_{[0; 8]} = 190$; o sea, la variación de volumen (o volumen “acumulado”) en el tanque en 8 hs. es de 190 ls.

CONCLUSIÓN FINAL para el CASO B :

Lo observado en el ejemplo puede generalizarse a cualquier proceso de cambio con velocidad cte a tramos; es decir, la variación total al final del proceso se obtiene de:

1º) hacer el producto “ $v \times \text{tiempo}$ ” en cada I_i donde $v = \text{cte}$ (variación parcial)

2º) sumar las “variaciones parciales”. (VARIACIÓN TOTAL)

O sea, si subdividimos el intervalo genérico $I = [t_0; t_n]$ en los n subintervalos $I_i = [t_{i-1}; t_i]$ donde la velocidad permanece constante e igual a v_i ; tenemos que:

$$\Delta V_{[t_0; t_n]} = v_1 \times \Delta t_1 + v_2 \times \Delta t_2 + v_3 \times \Delta t_3 + \dots + v_n \times \Delta t_n = \sum_{i=1}^n v_i \times \Delta t_i$$

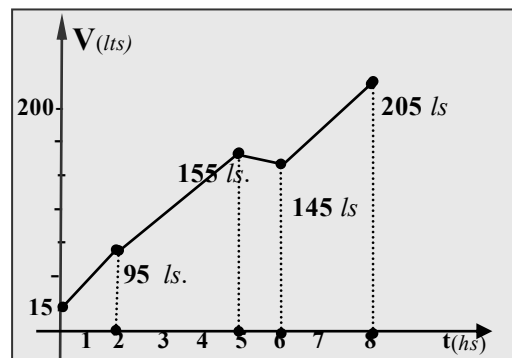
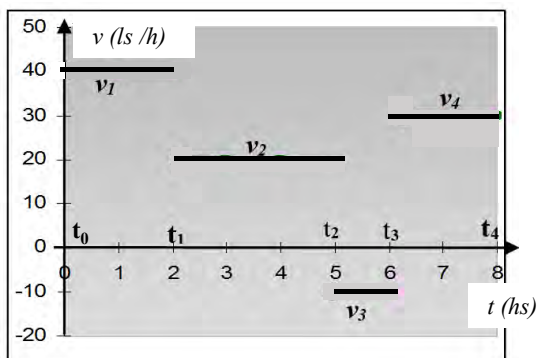
Observación 1: $\Delta V[a; b] = V(b) - V(a) \Rightarrow V(b) = \Delta V[a; b] + V(a)$.

Ejemplo: si en el problema 2 se agrega el dato $V(0) = 15$, se puede hallar $V(8)$.

$$V(8) = \Delta V_{[0; 8]} + V(0) \Rightarrow V(8) = 190 + 15 = 205 \Rightarrow V(8) = 205 \text{ (ls.)}$$

Observación 2: si v es cte a tramos entonces se puede reconstruir la función V tal que $V' = v$ pues en cada I_i donde v es cte, $V = V_i(t)$ con $V_i(t)$ función lineal.

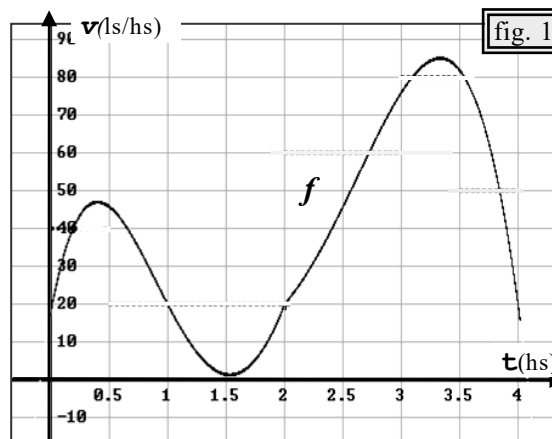
Ejercicio: para el problema 2, hallar y graficar V tal que $V' = v$.



(C) CASO DESCONOCIDO

Cálculo de la “variación de volumen” para “velocidad variable con continuidad”

En la generalidad de los procesos físicos los cambios no son tan bruscos, a “saltos” como en el ejemplo anterior, sino que se desarrollan en forma continua. Así, lo natural es que si una función $v = f(t)$ representa una *razón de cambio* o *velocidad*, entonces f sea continua. El gráfico continuo adjunto es más representativo de la *velocidad* con que varía el volumen de agua dentro del tanque, que uno *escalonado*, como en el ejemplo anterior.



En este caso: ¿cómo obtenemos ΔV , volumen acumulado en 4 hs.?

Y este es, en esencia, el problema que resuelve el cálculo integral:
 "cálculo de la variación total debida a un proceso de cambio
 cuando la velocidad del mismo varía con continuidad "

El primer paso para resolver este problema es “simplificarlo”:

- ☞ ¿Con que fin?: llevarlo al caso conocido; aquí, al de velocidad constante a tramos.
- ☞ ¿Cómo?: reemplazando el dato, f continua en $I = [a;b]$, por una función constante a tramos a la que llamamos **función escalera**: f_{esc} (**)
- ☞ ¿Qué logramos?: construida la f_{esc} y aplicada a la misma la fórmula hallada en (B), logramos una aproximación del ΔV buscado.

(**) Construcción de la f_{esc} ; ¿ancho y alto del “escalón(i)” de la “escalera”?:

- a) “ancho(i)” $\rightarrow$ resulta de dividir I (intervalo dato) en n subintervalos ($\rightarrow I_i$).
- b) “altura(i)” $\rightarrow$ resulta de elegir un $c_i \in I_i$, calcular $f(c_i)$ y tomar este valor como altura del *escalón(i)* $\rightarrow altura_{(i)} = f(c_i)$.

Observaciones :

- La división de $I = [a;b]$ en subintervalos se hace en “*forma arbitraria*”; es decir, “ n ” puede ser cualquier “*nro natural*”. De hecho, esta división se logra dando “ $n+1$ ” puntos arbitrarios de I con la sola condición de que se tomen en forma creciente, que el primero y el último coincidan con los extremos de I .

$$\rightarrow t_0 \equiv a < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n \equiv b$$

$$\rightarrow I_i = [t_{i-1}; t_i] \Rightarrow ancho_{(i)} = longitud\ I_i = \Delta t_i = t_i - t_{i-1}.$$

- Los c_i también se eligen en “*forma arbitraria*” (uno y sólo uno por cada I_i).

Calculo de una aproximación de ΔV para f de la fig.1

1º) Construimos una f_{esc} (fig. 2)

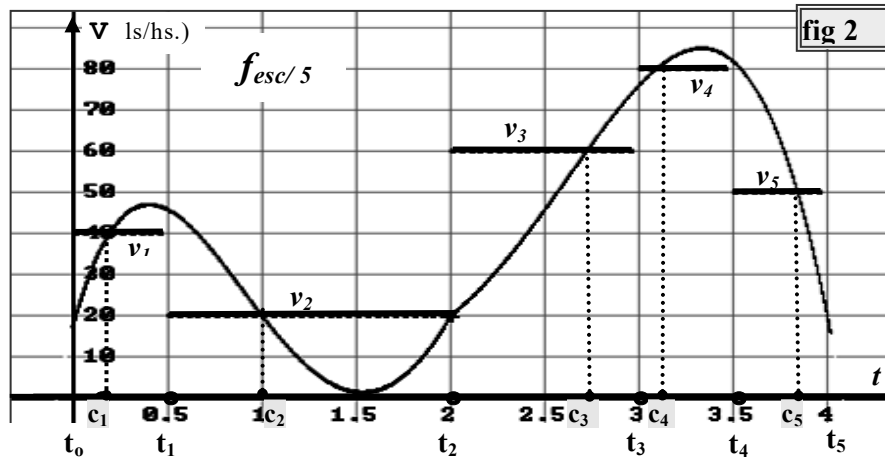
a) *ancho escalón* $\rightarrow$ dividimos $I = [0; 4]$ en n subintervalos $I_i = [t_{i-1}; t_i]$

$$*EJ: n = 5 \rightarrow \{t_0 \equiv 0; t_1 = 0.5; t_2 = 2; t_3 = 3; t_4 = 3.5; t_5 \equiv 4\}$$

$$\rightarrow I_i = [t_{i-1}; t_i]; \Delta t_i = t_i - t_{i-1}, i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

b) *alto del escalón* $\rightarrow$ elegimos un c_i en I_i , $i=1, \dots, 5$;

$\rightarrow$ calculamos $f(c_i) = v_i$. Hacemos $v(t) = v_i$; $\forall t \in I_i$.

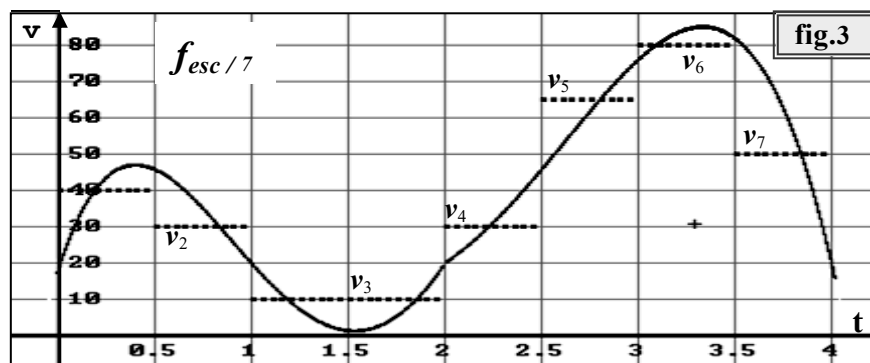


Ej: $c_1 \in I_1 = (0; 0.5)$; $v_1 = f(c_1) = 40 \rightarrow f_{esc}(t) = 40$; $\forall t \in I_1$ y $\Delta t_1 = 0.5$
 $c_2 \in I_2 = (0.5; 2)$; $v_2 = f(c_2) = 20 \rightarrow f_{esc}(t) = 20$; $\forall t \in I_2$ y $\Delta t_2 = 1.5$
 $c_3 \in I_3 = (2; 3)$; $v_3 = f(c_3) = 60 \rightarrow f_{esc}(t) = 60$; $\forall t \in I_3$ y $\Delta t_3 = 1$
 $c_4 \in I_4 = (3; 3.5)$; $v_4 = f(c_4) = 80 \rightarrow f_{esc}(t) = 80$; $\forall t \in I_4$ y $\Delta t_4 = 0.5$
 $c_5 \in I_5 = (3.5; 4)$; $v_5 = f(c_5) = 50 \rightarrow f_{esc}(t) = 50$; $\forall t \in I_5$ y $\Delta t_5 = 0.5$

2º Calculamos: $\Delta V(f_{esc}) = \sum_{i=1}^5 v_i \times \Delta t_i \Rightarrow \Delta V(f_{esc}) = 175$ (verificar)

3º Concluimos: $\Delta V_{[0;4]} \cong \Delta V(f_{esc}) \Rightarrow \Delta V_{[0;4]} \cong 175$ (lts.).

☞ Para $n=7$ obtenemos otra f_{esc} (fig 3) cuyos escalones son “menos anchos”, “más finos” que en la (fig 2). Vemos que esta f_{esc} se “ajuste mejor” al *graf f*.



Calculando $\Delta V(f_{esc})$ para la f_{esc} de la fig. 3:

obtenemos: $\Delta V(f_{esc/7}) = \sum_{i=1}^7 v_i \times \Delta t_i \Rightarrow \Delta V(f_{esc/7}) = 157,5$ (verificar)

Concluimos: $\Delta V_{[0;4]} \cong \Delta V(f_{esc/7}) \Rightarrow \Delta V_{[0;4]} \cong 157,5$ (lts.).

☞ El hecho que la f_{esc} correspondiente a $n=7$ se “ajuste mejor” al *graf f* que la construida con $n=5$ induce a suponer que la aproximación obtenida con $n=7$ tiene que ser “mejor” que la correspondiente a $n=5$; en otras palabras, que 157,5 debe estar más próximo al verdadero valor de $\Delta V_{[0;4]}$, que 175.

- ☒ Así, el problema de hallar la “*variación total*” cuando la velocidad es “*continua*” queda ligado al de las funciones escaleras a través del siguiente interrogante:

¿podrán construirse funciones escaleras que permitan aproximar cada vez mejor y tanto como se quiera la “variación total” resultado de un proceso que se desarrolla a velocidad $v=f(t)$ con f continua?

Antes de investigar esta cuestión, reforzamos algunos conceptos e ideas:

Definición 1: llamamos *función escalera* a cualquier función *constante a tramos*.

Reflexión:

Existen infinitas formas de construir funciones escalera (basta cambiar ancho y alto del “escalón”). En definitiva, existen infinitas formas de aproximar el resultado buscado. Así, el problema que se presenta ahora es determinar el “carácter” de estas aproximaciones, si realmente mejoran al afinar el ancho de los escalones; y, si lo hacen, ir por más, tratar de establecer que “comportamiento” tienen los sucesivos valores que se van obteniendo. Particularmente, determinar si tienen un “comportamiento definido”, se acercan tanto como se quiera a un “único número”. (en otras palabras, determinar que pasa con el límite de estas aproximaciones cuando el “ancho de los escalones” tiende a cero).

Definición 2: *región escalonada*

Dada una función escalera, llamamos *región escalonada* a la región **R** que resulta de unir los rectángulos determinados por la *graf. f* y el *eje x*.

Ejemplo: (f_{esc} fig. 4 = f_{esc} fig. 2)

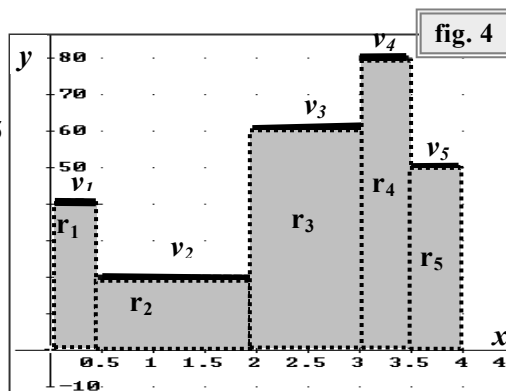
Sea f definida por la gráfica de la fig 4.

$$\text{Luego: } R = \bigcup_{i=1}^5 r_i = r_1 \cup r_2 \cup r_3 \cup r_4 \cup r_5$$

Curiosidad: ¿área de R ??

$$\text{área } R = \sum_{i=1}^5 \text{área } r_i = 175 \text{ (verificar)}$$

¿**Casualidad?**: $\Delta V(f_{esc} \text{ fig. 2}) = 175$



9.3 El problema y su contexto

9.3.1 Relación entre el cálculo de la “variación total” y el cálculo de “áreas”

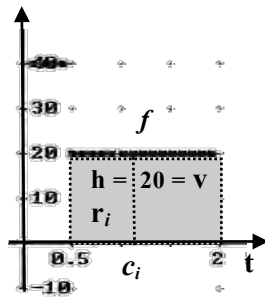
En el párrafo 2 para aproximar ΔV usamos una f_{esc} (fig.2), luego vimos que tal función define una región escalonada (**R**-fig.4). Calculada el **área de R** observamos que aun cuando ambos problemas son de naturaleza muy distinta (uno físico, el otro geométrico), se resuelven a través del mismo “proceso de cálculo”.

Área de r :

En cada I_i donde f es cte.

$$h \text{ (alt.)} = f(c_i) (= 20)$$

$$b \text{ (base)} = \Delta t_i (= 1.5)$$



$$\text{área } r_i = h \times \Delta t_i = 30$$

$$\text{área } r_i = f(c_i) \times \Delta t_i$$

Variación de volumen:

En cada I_i donde f es cte:

$$v \text{ (vel. en } I_i) = f(c_i) (= 20)$$

$$(\text{tpo de proceso}) = \Delta t_i (= 1.5)$$

$$\Delta V_{|I_i|} = v \times \Delta t_i = 30$$

$$\Delta V_{|I_i|} = f(c_i) \times \Delta t_i$$

$$\text{área } r_i = f(c_i) \times \Delta t_i = \Delta V_{|I_i|}$$

Ídem: si f representa la intensidad de una fuerza aplicada sobre un cuerpo, entonces:

$$\text{área } r_i = f(c_i) \times \Delta t_i = W_{|I_i|} \quad (\rightarrow \text{trabajo en } I_i)$$

Conclusión: superficie del rectángulo ($h = \text{cte}$), variación de volumen para $v = \text{cte}$. y trabajo para $f = \text{cte}$., se **calculan** de la misma forma.

Nota: por uso y costumbre es habitual referirse a estos resultados con expresiones como:

◀ *la variación de volumen en $[a; b]$ es “igual” al área bajo la graf f* ▶ ; ó,
 ◀ *el trabajo realizado por f en $[a; b]$ es “igual” al área bajo la graf f* ▶

Cabe observar que en estas oraciones el término “igual” está usado en “sentido amplio”; que esto, de no tenerse en cuenta, puede generar equívocos, puede llevar a “confundir” el “concepto” (por ejemplo: *trabajo*) con su “forma de cálculo”. Hacemos algunas reflexiones al respecto.

► Lo correcto en un problema en el que intervienen magnitudes es que la **respuesta** incluya “**medida**” y “**unidad**”. Así, en el caso de la variación de volumen, el trabajo para f constante o la superficie del rectángulo, las **respuestas** son **30 ls**, **30 joule** o **30 cm²** (por ej.); las cuales, y claramente, no son “iguales” (30 ls. de agua no es “lo mismo” que 30 cm² de tela). Lo que se quiere remarcar aquí es que el hecho de que la **medida** de dos “cosas” se calcule de igual forma no hace a la “esencia” de estas cosas; esto es, **no implica** que sean **la misma cosa**.

► Entonces: ¿por qué el uso de estas expresiones?. Porque cuando una comunidad de trabajo hace suyo un concepto, lo **asimila**¹, todos en ella entienden de que se habla aun cuando no se lo haga con precisión. Así, se aceptan ciertos *deslizamientos* del lenguaje ya que los mismos alivianan la comunicación sin grandes riesgos en cuanto a que se desvirtúe su esencia.

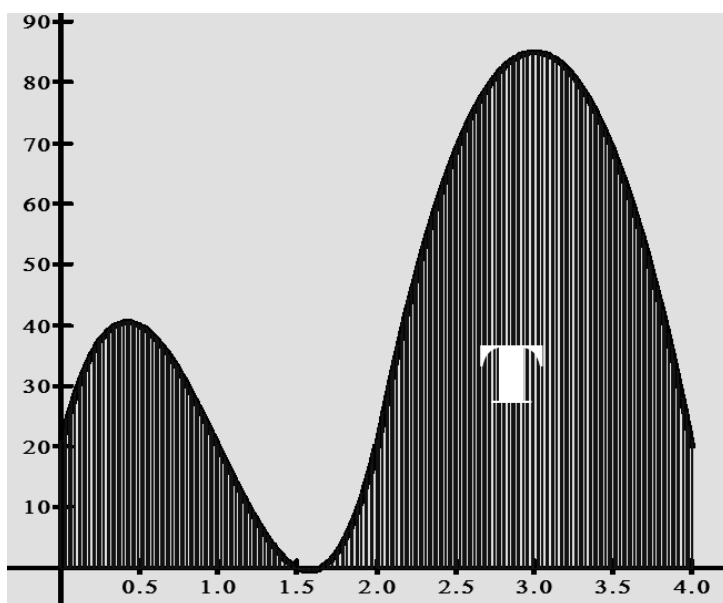
¹ **Asimilar:** comprender lo que se aprende, incorporarlo en forma efectiva y significativa a los conocimientos previos. Así, y por ejemplo, haber asimilado el concepto de “trabajo” permite interpretar correctamente la expresión “el trabajo realizado por f es **igual** al área bajo la **graf. f** ”; entender que lo que la misma dice es que aun cuando “trabajo” y “área de una figura” no son la misma “cosa”, tienen **algo**, **una parte de sí, donde se reconocen iguales**. En este caso, este **algo** donde se reconocen **iguales** es el **proceso matemático** por el cual se **calcula su medida**.

9.3.2 Resolución de Problemas y “pasaje de contexto”

Dada la función f (positiva) de la fig.1, la *graf* f determina con el *eje* x una región (**T**).

El contorno superior de esta región es “*curvo*”; y esto plantea un problema para el cálculo del **área T**. (problema que, como dijimos en la introducción, es del “tipo” de los que resuelve la integral).

Lo antes visto indica que el *proceso* a seguir para hallar valores *aproximados* del **área T** es el mismo que el requerido para hallar valores *aproximados* de la **variación de volumen** en un tanque donde entra o sale agua a una velocidad $v = f(t)$.



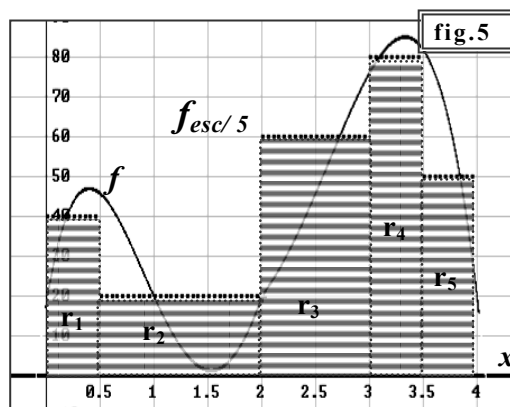
Ejemplos: aproximamos f por distintas funciones escaleras y concluimos:

a) Dada **R**, región escalonada de la fig.5 correspondiente a la $f_{esc/5}$; tenemos:

$$R = \bigcup_{i=1}^5 r_i = r_1 \cup r_2 \cup r_3 \cup r_4 \cup r_5$$

$$a(R) = \sum_{i=1}^5 a(r_i) = \sum_{i=1}^5 h_i \times \Delta t_i = 175$$

$$a(R) \approx a(T) \Rightarrow a(T) \approx 175 .$$

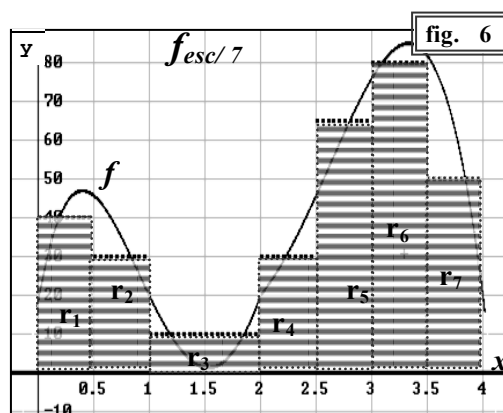


b) Dada **R**, región escalonada de la fig.6 correspondiente a la $f_{esc/7}$; tenemos:

$$R = \bigcup_{i=1}^7 r_i = r_1 \cup r_2 \cup r_3 \dots \dots \dots \cup r_7$$

$$a(R) = \sum_{i=1}^7 a(r_i) = \sum_{i=1}^7 h_i \times \Delta t_i = 157,5$$

$$a(R) \approx a(T) \Rightarrow a(T) \approx 157,5 .$$



Observación 1: de los gráficos podemos “*ver*” que la región escalonada **R** formada por la función escalera más “*fina*” ($f_{esc/7}$) brinda una mejor aproximación del **área T** que la de la región **R** de escalones más “*anchos*” (la determinada por $f_{esc/5}$).

Estos ejemplos muestran como trabajar en el contexto geométrico permite *visualizar* mejor el *carácter* de las *distintas aproximaciones*. En particular, *ver* que es factible construir funciones escaleras cuyo comportamiento sea el conveniente al objetivo propuesto; o sea, que permitan acercarnos más y más, al “**área T**” (*incógnita*).

Observación 2: el hecho observado tiene una aplicación práctica al momento de resolver problemas que aun cuando de distinta naturaleza al del “cálculo del área” basan su resolución en el mismo proceso matemático que este último. Entre ellos y como vimos: el cálculo de la “variación total” debida a un proceso cuya velocidad describe la curva, del “trabajo” requerido para mover un cuerpo por una fuerza cuya intensidad describe la curva, etc. En particular este hecho habilita una muy poderosa herramienta de la Matemática: “el pasaje del problema del contexto original a otro contexto donde la resolución se facilita”. En el caso que nos ocupa, “el pasaje del problema del contexto original al contexto geométrico” (donde, y según mostramos, la “visualización” del problema facilita su resolución).

Cabe aclarar que para un proceso de cambio relativo a un fenómeno físico *la interpretación del resultado depende de la f del caso*; no es la misma si f indica una velocidad de disolución que si indica la velocidad de un móvil.

Por ejemplo:

→ Si $v = x'$ es la velocidad (*constante*) de un móvil en una trayectoria rectilínea, entonces área $r = \text{altura} \times \text{base} \leftrightarrow \text{velocidad} \times \Delta t = \Delta x$ (= **desplazamiento** del móvil en ese Δt)

→ Si $v = m'$ es la velocidad (*constante*) de disolución de un soluto (m) en un solvente; entonces área $r = \text{altura} \times \text{base} \leftrightarrow \text{velocidad} \times \Delta t = \Delta m$ (= **masa disuelta** en ese Δt).

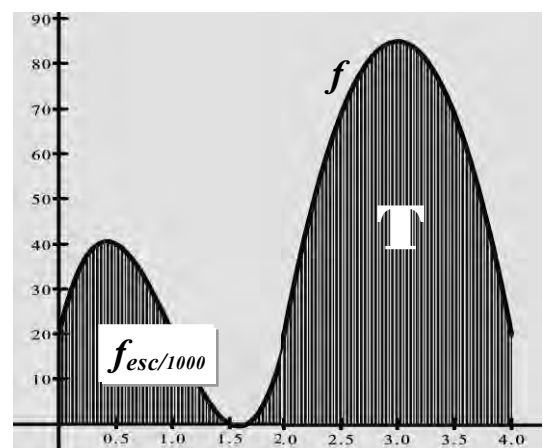
Observación 3: concluimos así que resuelto el problema del área para una región de contorno curvo, automáticamente tenemos resuelto cualquier otro problema relativo a razones de cambio variables. Luego, y en razón de esto, nos abocamos al problema del “**cálculo del área de regiones planas con contornos curvos**”; hacemos esto teniendo en cuenta lo que podríamos llamar la idea fuerza del Cálculo Integral:

“ el área de la región debajo de una curva C gráfica de una función , se puede aproximar por rectángulos cada vez más delgados y esta aproximación se puede hacer tan exacta como se quiera”.

☞ El importante avance tecnológico habido en las últimas décadas permite hoy día calcular rápida y efectivamente aproximaciones del verdadero valor del área de la región bajo la curva; “mejorar” estas aproximaciones con sólo tomar “ n ” cada vez más grandes.

Así, y por ej., acudiendo a un utilitario podemos proponer una función escalera con **1000** “escalones” (tomando $n = 1000$), la que, como “vemos” permite obtener una muy buena aproximación del área T . (al graficar la función escalera con el utilitario, podemos “ver” que la misma prácticamente se confunde con la gráfica de f).

$$\begin{aligned} \text{área } T &\cong a(R)_{(n=1000)} \\ \text{área } T &\cong \sum_{i=1}^{1000} v_i \times \Delta t_i = 162,133 \end{aligned}$$



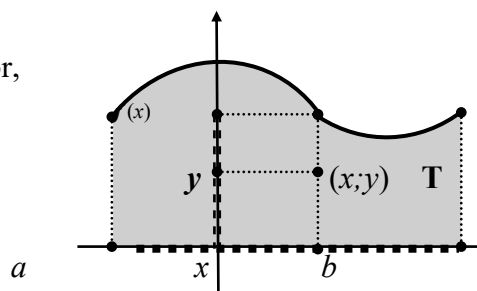
9.4 Área de Regiones Planas

Comenzamos a trabajar a partir de la región de contornos curvos más sencilla que encontramos; o sea, a partir de una región particular a la que damos el nombre de “trapezoide”. Luego, y a partir de los resultados hallados en el caso particular, resolvemos el caso general.

TRAPEZOIDE:

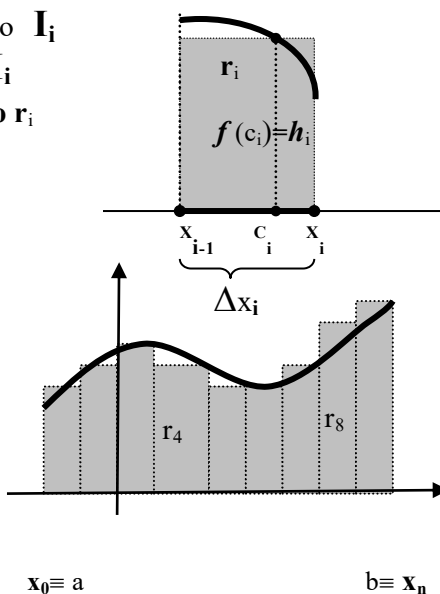
Dada $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$; f definida positiva ,
 llamamos trapezoide T a la figura plana limitada por,
 la gráfica de f , el eje x y las rectas $x = a$, $x = b$.

$$T = \{(x,y) / a \leq x \leq b ; 0 \leq y \leq f(x)\}$$



Históricamente, es Arquímedes quien desarrolla un método para el cálculo del área de regiones con contornos curvos, el conocido como “*método de exhaustión*”. El mismo consiste, en esencia, en sustituir la curva original por funciones escaleras “*especiales*”. En la explicación de este método usaremos las siguientes notaciones:

n	$\rightarrow$ número de subdivisiones del intervalo $I = [a ; b]$
x_i	$\rightarrow$ punto de <i>subdivisión</i> del intervalo I .
$\mathcal{P}$	$\rightarrow$ partición de $I = \{x_0 \equiv a; x_1; x_2; x_3; \dots; x_i; \dots; x_n \equiv b\}$
I_i	$\rightarrow$ subintervalo $[x_{i-1}; x_i]$
$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$	$\rightarrow$ amplitud del subintervalo I_i
c_i	$\rightarrow$ punto del subintervalo I_i
$f(c_i)$	$\rightarrow h_i$: altura del rectángulo r_i
$f(c_i) \cdot \Delta x_i$	$\rightarrow$ área de r_i
m_i	$\rightarrow$ <i>mínimo</i> de f en I_i
M_i	$\rightarrow$ <i>máximo</i> de f en I_i
$r = \bigcup_{i=1}^n r_i$	$\rightarrow$ región escalonada
$a(r) = \sum_{i=1}^n a(r_i)$	$\rightarrow$ área de r

**Área de un trapezoide definido por una f positiva y continua en I .**

Dado T , definido por f en $I = [a; b]$, hallar el área de T por el método de exhaustión requiere: (ver ejemplo en el APENDICE)

1er paso) Dar una *equipartición* (partición de I en n subintervalos de igual amplitud)

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n} ; \forall i$$

2do paso) Construir dos funciones escaleras “*especiales*” :

a) $f_{esc \text{ inf.}}$ $\rightarrow$ toda por debajo del *graf* f ($h_i = m_i = \text{mín. } f \text{ en } I_i$)

b) $f_{esc \text{ sup.}}$ $\rightarrow$ toda por arriba del *graf* f ($h_i = M_i = \text{Max. } f \text{ en } I_i$).

3er paso) Obtener las dos regiones escalonadas definidas por $f_{esc \text{ inf.}}$ y $f_{esc \text{ sup.}}$,

$$\text{a) } r_{[n]} = \bigcup_{i=1}^n r_i \rightarrow \text{región escalonada inferior. } \rightarrow r_{[n]} \subseteq T$$

$$b) R_{[n]} = \bigcup_{i=1}^n R_i \rightarrow \text{región escalonada superior.} \rightarrow T \subseteq R_{[n]}$$

4to paso) Repetir los pasos anteriores para distintos valores de n y con $n \rightarrow +\infty$; generar dos *sucesiones* de regiones escalonadas, $r_{[n]}$ y $R_{[n]}$; tales que:

$$r_{[n]} \subseteq T \subseteq R_{[n]}; \forall n \in \mathbb{N}$$

luego, si T fuera *medible*, por propiedades geométricas:

$$\text{área } r_{[n]} \leq a(T) \leq \text{área } R_{[n]}; \forall n \in \mathbb{N}$$

n	$r_{[n]} \rightarrow a_n = \text{área } r_{[n]} \leq a(T) \leq A_n = \text{área } R_{[n]} \leftarrow R_{[n]}$
2	$r_{[2]} = r_1 \cup r_2 \rightarrow a_2 = \text{área } r_{[2]}$ $\vdots$ $A_2 = \text{área } R_{[2]} \leftarrow R_{[2]} = R_1 \cup R_2$
3	$r_{[3]} = \bigcup_{i=1}^3 r_i \rightarrow a_3 = \text{área } r_{[3]}$ $\vdots$ $A_3 = \text{área } R_{[3]} \leftarrow R_{[3]} = \bigcup_{i=1}^3 R_i$
$\vdots$	$\vdots$

5to paso) Analizar el comportamiento de la sucesión de valores formadas,

$a_2; a_3; a_4; a_5; a_6; a_7; \dots, a_n, \dots$ (sucesión creciente, acotada superiormente).

$A_2; A_3; A_4; A_5; A_6; A_7; \dots, A_n, \dots$ (sucesión decreciente, acotada inferiormente).

Calcular el límite para $n \rightarrow \infty$ de ambas sucesiones (los cuales existen según un resultado básico del Cálculo): $a_n \rightarrow L_1$ para $n \rightarrow \infty$; $A_n \rightarrow L_2$ para $n \rightarrow \infty$.

6to paso) CONCLUIR

$$\begin{array}{ll} \text{si } L_1 = L_2 = L \Rightarrow T \text{ es medible y } a(T) = L \\ \text{si } L_1 \neq L_2 \Rightarrow T \text{ no es medible, no existe } a(T) \end{array}$$

Notas:

⊗ Muy pocas veces el método de exhaustión puede aplicarse hasta el último paso y hallar el valor exacto del área. En el ejemplo del apéndice (T trapecioide determinado por $f(x) = x^2$ en $[0;1]$) el método puede ser aplicado con éxito debido a las características de f .

Lo que en este caso posibilita la ejecución del método hasta el final es que:

- $f(x) = x^2$ es estrictamente creciente en $I = [0;1]$. Esto facilita el **cálculo** del área de las regiones escalonadas (inf. y sup.) pues *máximo* y *mínimo absoluto* de f en I_i se producen, respectivamente, en el extremo superior e inferior de $I_i = [x_{i-1}; x_i]$. Particularmente, esto permite “generalizar” el cálculo de dichas áreas:

$$a_n = \text{área } r_{[n]} = \left(\frac{1}{n}\right)^3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2);$$

$$A_n = \text{área } R_{[n]} = \left(\frac{1}{n}\right)^3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2).$$

- por otro lado, como se conoce una fórmula para “la suma de los cuadrados de los k primeros números naturales”:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k \cdot (k+1) \cdot (2k+1)}{6};$$

esto permite reducir la expresión generalizada de las áreas a una fórmula a la que se puede calcular el límite; obtener así, y finalmente, el valor del área buscada.

⊗ Los factores que posibilitan la aplicación del método de exhaustión en el ejemplo son muy específicos y propios de la función del ejemplo; luego, es fácil ver que el método de exhaustión no resulta aplicable en general.

Método alternativo para el cálculo del área de un trapezoide definido por una función continua (y positiva)

La región T cuya área se quiere calcular se aproxima por una **región escalonada** Q en la que los subrectángulos Q_i tienen su altura igual al valor de la función en un punto cualquiera del subintervalo I_i ; o sea, tal que $h_i = f(c_i)$ con $c_i \in I_i$.

Luego, $Q = \bigcup_{i=1}^n Q_i \Rightarrow \text{área } Q \cong \text{área } T$.

Por otro lado f continua en I_i implica:

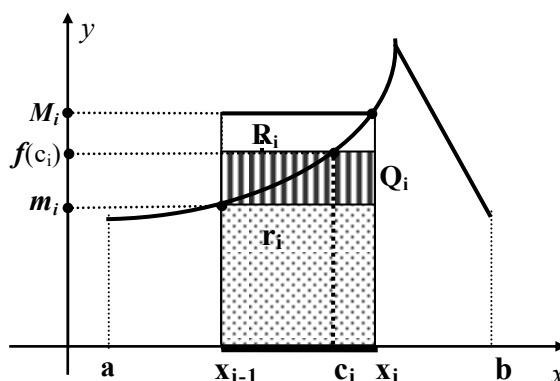
$$m_i \leq f(c_i) \leq M_i ; \forall i$$

$$m_i \Delta x_i \leq f(c_i) \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i ; \forall i$$

$$a(r_i) \leq a(Q_i) \leq a(R_i) ; \forall i$$

$$\sum_{i=1}^n a(r_i) \leq \sum_{i=1}^n a(Q_i) \leq \sum_{i=1}^n a(R_i)$$

$$\text{área } r_{[n]} \leq \text{área } Q_{[n]} \leq \text{área } R_{[n]} ; \forall n \in \mathbb{N}.$$



y tenemos entonces que la sucesión originada por $\text{área } Q_{[n]}$ queda “*encajada*” entre las originadas por $\text{área } r_{[n]}$ y $\text{área } R_{[n]}$. Concluimos así que el comportamiento de $aQ_{[n]}$ para $n \rightarrow \infty$ depende del comportamiento de $\text{área } r_{[n]}$ y $\text{área } R_{[n]}$ para $n \rightarrow \infty$; sucesiones que, según vimos, tienen límite para $n \rightarrow \infty$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} a r_{[n]} = L_1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a R_{[n]} = L_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{si } L_1 = L_2 = L \Rightarrow T \text{ es medible y } a(T) = L \\ \text{si } L_1 \neq L_2 \Rightarrow T \text{ no es medible, no existe } a(T) \end{array}$$

Por otro lado:

$$* \quad L_1 = L_2 = L \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a Q_{[n]} = L$$

Concluimos así que:

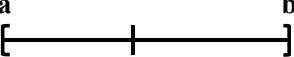
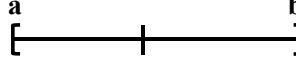
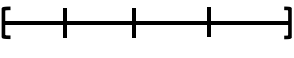
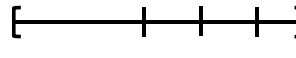
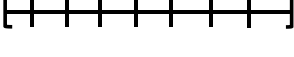
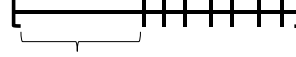
$$L_1 = L_2 = L \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a Q_{[n]} = a(T)$$

El método puede generalizarse más aún ya que en este caso no es necesario tomar “equiparticiones”. En tal caso debemos cuidar el planteo del límite.

- En el caso de una “equipartición”, $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$, y se tiene que:

$$* \quad n \rightarrow \infty \Rightarrow \Delta x_i \rightarrow 0; \quad \forall i$$

- Para una partición “cualquiera”: $* \quad n \rightarrow \infty \text{ no implica } \Delta x_i \rightarrow 0; \quad \forall i.$

	EQUIPARTICIÓN	PARTICIÓN 'CUALQUIERA'
$n = 2$	 $\Delta x_i = (b-a)/2$	
$n = 4$	 $\Delta x_i = (b-a)/4$	
$n = 8$	 $\Delta x_i = (b-a)/8$	
$\downarrow$ ∞	$\downarrow$ 0	$\Delta x_i \rightarrow \text{cte.}$

Luego, para particiones cualesquiera, hacerlas cada vez más '*finas*' requiere pedir que los $\Delta x_i \rightarrow 0, \forall i$; equivalentemente, que para $n \rightarrow \infty$ el $\max_{i=1,2,\dots,n} \Delta x_i \rightarrow 0$

Estamos así en condiciones de definir "área de un trapezoide"

DEFINICIÓN:

Si existe L , resultado del proceso de aproximación por regiones escalonadas, decimos que T es medible y L su medida.

A L lo llamamos *área del trapezoide* e indicamos $a(T)$.

O sea,
$$a(T) = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^n f(c_i) \times \Delta x_i \right]$$

RESUMEN: área de un trapezoide T para f definida positiva en $I = [a; b]$

Proceso de búsqueda y/o aproximación del $a(T)$:

1) Damos una partición de "*n+1 puntos cualesquiera*" del intervalo I .

Determinamos n subintervalos I_i , de amplitud $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

Seleccionamos un c_i en cada subintervalo I_i .

Construimos $Q = \bigcup_{i=1}^n Q_i$; con Q_i rectángulos de altura $f(c_i)$ y base Δx_i .

2) Calculamos las aproximaciones parciales (*áreas parciales*):

$$a(Q_i) = f(c_i) \times \Delta x_i$$

3) Calculamos la aproximación total (*suma de las áreas parciales*):

$$a(Q_{[n]}) = \sum_{i=1}^n a(Q_i) = \sum_{i=1}^n f(c_i) \times \Delta x_i$$

4) Estudiamos el comportamiento de las aproximaciones obtenidas $(\sum f(c_i) \times \Delta x_i)$.

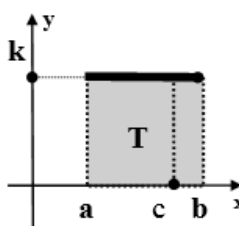
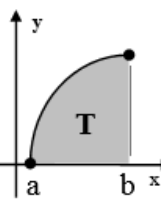
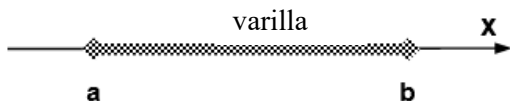
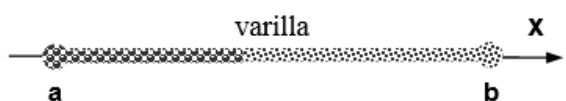
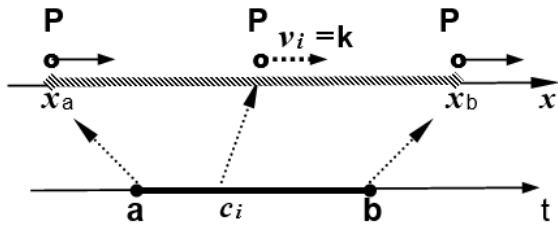
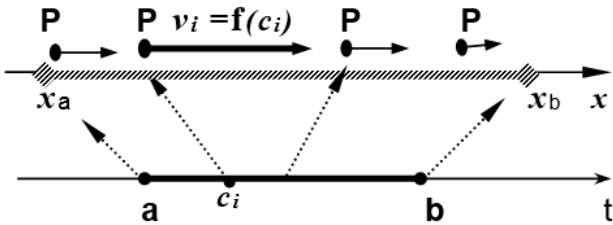
Si existe un número L al que las sumas se acercan tanto como se quiera cuando el $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ y para todas las elecciones posibles de los c_i , decimos que,

$$\blacktriangleright \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^n f(c_i) \times \Delta x_i \right] = L \quad (L \text{ puede existir o no existir})$$

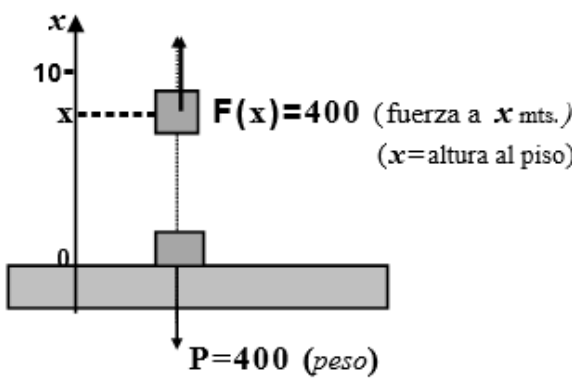
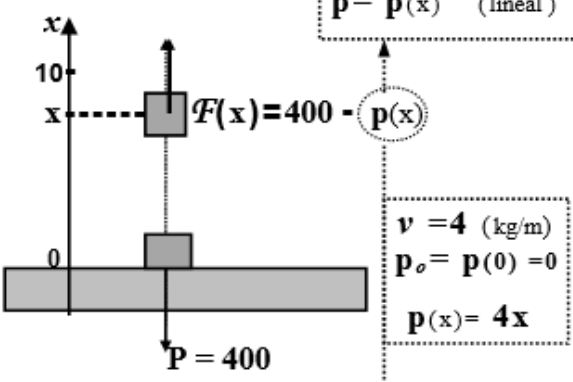
$$\blacktriangleright \text{área}(T) = L$$

9.5 Problemas relativos a razones de cambio “variables”

Resuelto el problema del cálculo de áreas de figuras con contornos curvos, queda resuelto el problema del cálculo de la “variación total” de algo que “cambia” a velocidad “variable”. Quedan resueltos también otros importantes problemas como por ejemplo: trabajo realizado por una fuerza “variable”. Una aclaración: en este capítulo y en el próximo, cuando hablemos de fuerza o velocidad, nos referiremos a la intensidad de las mismas, o sea, las trabajaremos como magnitudes escalares. Resumiendo:

EXPERIENCIA PREVIA	CONFLICTO
1- ÁREA RECTÁNGULO $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = k$ (positivo)  $a(T) = k.(b-a)$	→ AREA TRAPEZOIDE $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R} / f(x) \neq k; f(x) > 0 \forall x$ $(f \rightarrow \text{altura variable del trapezoide } T)$  $a(T) = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \times \Delta x_i$
2- M, masa de una varilla $\delta = \text{cte}$  $\delta = \delta(x) \text{ con } \delta(x) = k \Rightarrow$ $M_{[a;b]} = k.(b-a)$ (masa = densidad x longitud)	→ $\delta \neq \text{cte}$ [$\delta = \text{densidad lineal}$]  $\delta = \delta(x) \text{ con } \delta(x) \neq k \Rightarrow$ $M_{[a;b]} = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \delta(c_i) \times \Delta x_i$
3. DESPLAZAMIENTO $[\Delta x]: v = \text{cte}$ (movimiento rectilíneo)  $v = v(t) \text{ con } v(t) = k \Rightarrow$ $\Delta x = k.(b-a)$ (desplazamiento = velocidad x tiempo)	→ $v \neq \text{cte}$ ($v = \text{velocidad}$)  $v = v(t) \text{ con } v(t) \neq k \Rightarrow$ $\Delta x = \lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \times \Delta t_i$

4. Trabajo W efectuado por una fuerza F / $F: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$

EXPERIENCIA PREVIA	CONFLICTO
$F = k$ (fuerza constante)	$F \neq k$
➤ Hallar el trabajo "W" requerido para levantar una bolsa de arena de 400 kg, una altura de 10 m.  $F(x)=400$ (fuerza a x mts.) (x=altura al piso) $P=400$ (peso) $F: [0; 10] \rightarrow \mathbb{R}$ $x \rightarrow F(x) = 400$ (fuerza cte) ➤ $W^*_{[0; 10]} = 400 \times 10 = 4000$ $W^*_{[0; d]} = F \times d$ (d=desplazamiento)	➤ Idem, si la bolsa "pierde arena" a razón de 4 kg/m.  p= pérdida a x mts $p = p(x)$ (lineal) $v = 4$ (kg/m) $p_0 = p(0) = 0$ $p(x) = 4x$ $F(x)=400 - p(x)$ $P = 400$ $F: [0; 10] \rightarrow \mathbb{R}$ $x \rightarrow F(x) = 400 - 4x$ (ff variable) ➤ $W_{[0; 10]} = ? \dots ?$ $W_{[0; 10]} = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(c_i) \times \Delta x_i$

- ▶ "partimos" el $[0; 10]$ en subintervalos $I_i = [x_{i-1}; x_i]$, $i=1, 2, \dots, n$
- ▶ tomamos $c_i \in I_i$; $i = 1, 2, \dots, n$
- ▶ hacemos $F(x) = F(c_i) = k_i$, $\forall x \in I_i$; obtenemos "aprox. parciales" del trabajo requerido en el $I_i \rightarrow W^*_{[I_i]} = F(c_i) \times \Delta x_i = k_i \times \Delta x_i$
- ▶ sumamos las "aprox. parciales" obtenemos la "aprox. total"

$$W_{[0; 10]} \approx \sum_{i=1}^n W^*_{[I_i]} = \sum_{i=1}^n F(c_i) \times \Delta x_i$$

Ejemplos: $n=1 \rightarrow I=[0; 10]$; $c \in I$, $F(c)=k \Rightarrow W_{[I]} \approx W^*_{[I]} = k \times 10$

$$\hookrightarrow c=3.5; F(3.5)=386 = k \xrightarrow{k=386; d=10} W^*_{[0; 10]} = 3860 \approx W_{[0; 10]} \quad (F \text{ no cte})$$

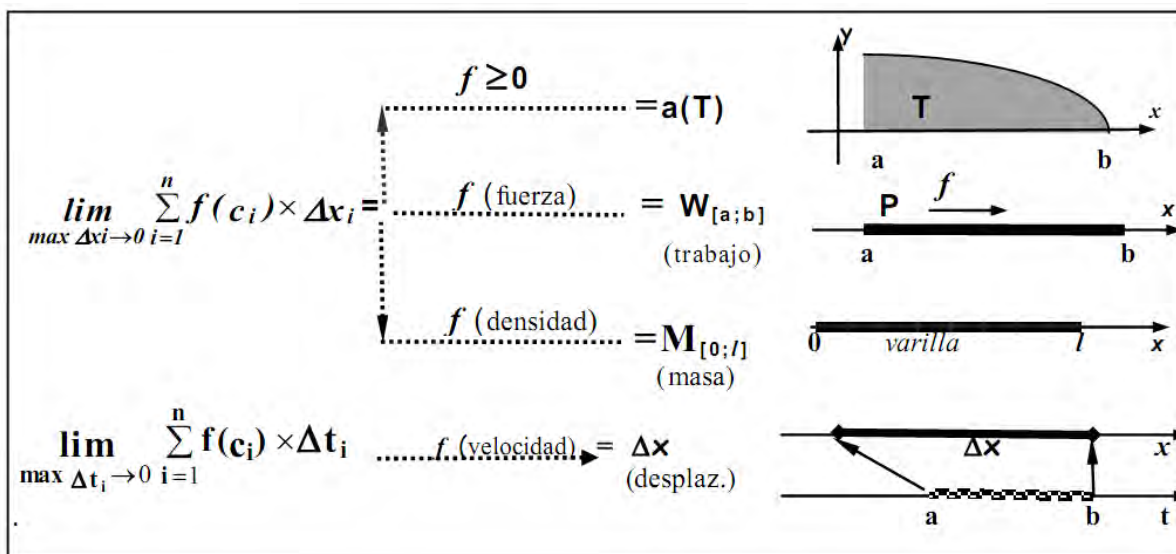
$$\hookrightarrow c=0; F(0)=400 = F_{\text{Max}} \xrightarrow{k_{\text{Max}}=400; d=10} W^*_{[0; 10]} = 4000 \geq W_{[0; 10]} \quad (F \text{ no cte})$$

$$\hookrightarrow c=10 \rightarrow F(10)=360 = F_{\text{min}} \xrightarrow{k_{\text{min}}=360; d=10} W^*_{[0; 10]} = 3600 \leq W_{[0; 10]} \quad (F \text{ no cte})$$

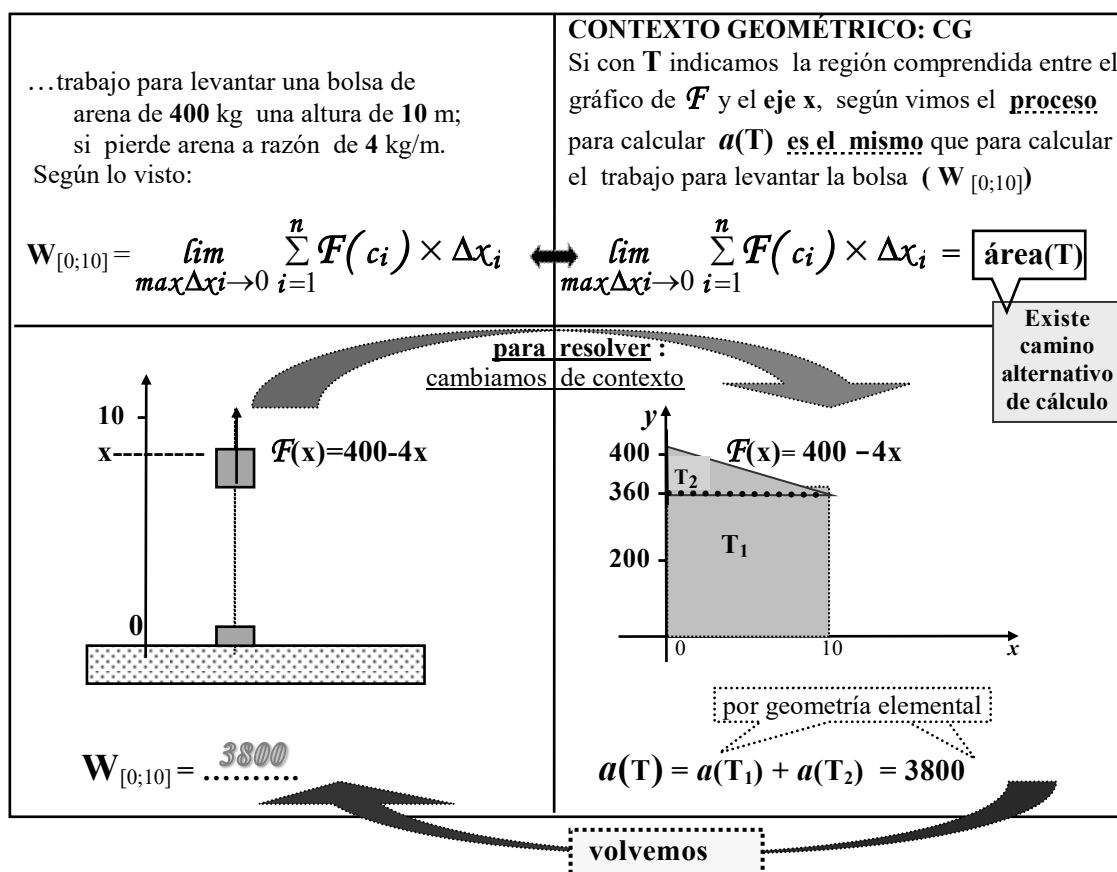
Observación: $3600 \leq W_{[0; 10]} \leq 4000$

En este caso podemos dar cota superior e inferior del valor buscado; o sea, un intervalo donde con seguridad se halla el "verdadero valor" de $W_{[0; 10]}$. Y esto no es poco cuando no se conoce (o es muy complicada) la expresión matemática que permite calcular dicho valor.

Conclusión: la interpretación del resultado de un proceso de “aproximación por sumas” depende del carácter de la función que se somete a dicho proceso. Así:



¿Resolvemos el problema del trabajo realizado por una fuerza no constante?



ANÁLISIS DEL RESULTADO

- En el caso considerado podemos “evitar” el cálculo del límite a través de “recodificar” el problema; o sea, de “trasladarlo a otro contexto” (el geométrico) donde disponemos de herramientas más accesibles para resolverlo.

■ **¿otras herramientas?:** fórmulas de cálculo de área de la geometría elemental (rectángulo, triángulo). Obviamente el traslado del problema al contexto geométrico sirve en este caso porque el trapecioide determinado por la función $\mathcal{F}$, intensidad de la fuerza, no tiene contornos curvos sino rectos, disponemos por lo tanto de fórmulas conocidas para el cálculo del área de la región que delimita $\mathcal{F}$.

■ **¿resulta este recurso accesible cualquier sea la función de la fuerza?**

Evidentemente no, ya que, salvo para el círculo, la geometría elemental no provee fórmulas para el cálculo de áreas de regiones con contornos curvos.

■ **¿cómo se procede si no se puede acudir a la geometría básica? → ¡¡problema!!**

Problema del que nos ocupamos a partir de ahora. Así, en lo que sigue, nos dedicamos a la búsqueda y determinación de técnicas algebraicas simples para el cálculo del límite de sumas. (¡¡ *que existen!!*, y para muchas funciones aunque no para todas.)

9.6 La integral

En párrafos anteriores hemos visto como problemas totalmente distintos terminan por resolverse a través de la misma expresión, el siguiente “límite de sumas”:

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n f(c_i) \times \Delta x_i \right)$$

Dada la importancia de este límite; su dificultad de cálculo, nos abocamos a su estudio al efecto de hallar un **camino alternativo** para calcular su valor. Para ello trabajamos con una función genérica f prescindiendo de cualquier tipo de interpretación geométrica o física que se pueda dar y comenzamos aclarando el significado de los términos a usar.

▪ Dada $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, llamamos:

Partición del $[a;b]$: $\mathcal{P} = \{x_0; x_1; x_2; x_3; \dots; x_i; \dots; x_n\}$

al conjunto de “ $n+1$ ” puntos del intervalo $[a; b]$; tal que el primero coincide con “ a ”, el último con “ b ” y verifican: $a \equiv x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_i \leq \dots \leq x_n \equiv b$

- Cada partición determina n subintervalos $I_i = [x_{i-1}; x_i]$ de amplitud $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$
- Entre los n subintervalos hay uno que es el de mayor longitud.

Norma de la Partición : $\|\mathcal{P}\|$

La “norma de la partición” es la longitud del subintervalo de mayor longitud.

O sea : $\|\mathcal{P}\| = \max \Delta x_i ; i = 1, 2, 3, \dots, n$

- Dada la función y la partición se selecciona un punto “ c_i ” en cada subintervalo al efecto de construir la función escalera. A este conjunto de puntos lo llamamos:

Selección de puntos compatible con $\mathcal{P}$: $\mathcal{Q} = \{c_1; c_2; c_3; \dots; c_i; \dots; c_n\}$
tal que $c_i \in I_i$

Proceso de Integración: construcción y búsqueda del “límite de sumas”.

El proceso consta de cuatro etapas:

1. Subdivisión del problema (o construcción de la *función escalera*, f_{esc}).

Este paso consiste en:

* partir el intervalo $[a; b] \Rightarrow$ dar $\mathcal{P}$, partición del $[a; b]$.

* fijar, en cada subintervalo I_i , la altura del “escalón” de la f_{esc}

$\Rightarrow$ dar $\mathcal{Q}$, selección de puntos compatible con $\mathcal{P}$.

2. Cálculo de las aproximaciones parciales: calculo de los “n” productos: $f(c_i) \cdot \Delta x_i$.

3. Cálculo de la aproximación TOTAL:

suma de las *aproximaciones parciales*: $\sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i$.

Estas sumas se conocen con el nombre de “SUMAS de RIEMANN” y con el símbolo:

$$S(f, \mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i$$

4. Cálculo del límite de las Sumas de Riemann para $|\mathcal{P}| \rightarrow 0$.

Estudio del comportamiento de las Sumas de Riemann a medida que se “afina” la partición; o sea, a medida que los escalones se hacen cada vez “más cortos”.

En definitiva, calculo: $\lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} S(f; \mathcal{P}; \mathcal{Q})$ (límite que puede o no existir).

Definición 1: FUNCIÓN INTEGRABLE

Dada $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$; decimos que f es integrable en $[a; b]$ si y sólo si existe un número “ L ” tal que para $|\mathcal{P}| \rightarrow 0$, las correspondientes sumas de Riemann $S(f, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$, se acercan tanto como se quiera al número L , cualquiera sea la selección $\mathcal{Q}$ considerada.

Si esto último sucede decimos que: $\lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} S(f; \mathcal{P}; \mathcal{Q}) = L$

Definición 2: INTEGRAL

Si existe $L = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} S(f; \mathcal{P}; \mathcal{Q})$ a este número

▪ **lo llamamos** : integral de f en $[a; b]$

▪ **lo indicamos** : $\int_a^b f(x) \cdot dx$

O sea :

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \times \Delta x_i$$

Observaciones:

a) “a” y “b” se llaman extremo inferior y superior de integración, respectivamente.
En la definición 2, “a” y “b” son los extremos del intervalo dominio f , luego, $a < b$.

b) El concepto de integral se amplía definiendo el símbolo para el caso de otra relación entre los extremos de integración; o sea, para los siguientes casos:

Definición 3: Si $a > b$; entonces: $\int_a^b f(x) \cdot dx = -\int_b^a f(x) \cdot dx$

Definición 4: Si $a = b$; entonces: $\int_a^a f(x) \cdot dx = 0$

c) Para $f \geq 0$ en $[a; b]$, definimos: $a(T) = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^n f(c_i) \times \Delta x_i \right];$

luego, por la *definición 2*: $a(T) = \int_a^b f(x) \cdot dx.$

NOTA: Definido el concepto de integral como el “límite de sumas” cabe preguntarse bajo qué condiciones existirá finito este límite de sumas; o sea, “la integral”. Existen teoremas que dan respuesta a esta pregunta (teoremas que sólo enunciamos).

TEOREMA: f continua en $[a; b] \Rightarrow f$ integrable en $[a; b]$.

TEOREMA: f seccionalmente continua en $[a; b] \Rightarrow f$ integrable en $[a; b]$.

Nota: f seccionalmente continua en $[a; b] \Leftrightarrow$ tiene un nro. finito de discontinuidades de salto finito en $[a; b]$. Ejemplo: las funciones escalera.

9.7 Propiedades de la integral

En todos los caso f y g son funciones integrables en el intervalo en que se plantea la integral.

$$(I_1) \quad \int_a^b k \cdot f(x) \cdot dx = k \cdot \int_a^b f(x) \cdot dx \quad ; \text{ donde } k \text{ es cualquier constante.}$$

$$(I_2) \quad \int_a^b [f(x) + g(x)] \cdot dx = \int_a^b f(x) \cdot dx + \int_a^b g(x) \cdot dx$$

$$(I_3) \quad \int_a^b f(x) \cdot dx = \int_a^c f(x) \cdot dx + \int_c^b f(x) \cdot dx;$$

sin importar el orden entre a, b y c .

$$(I_4) \quad \int_a^b f(x) \cdot dx \leq \int_a^b g(x) \cdot dx \quad ; \text{ si } f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

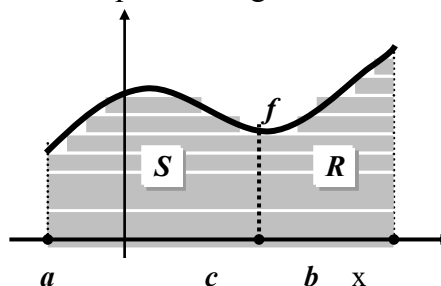
$$(I_5) \quad \int_a^b f(x) \cdot dx = \int_a^b k \cdot dx = k \cdot (b - a) \quad ; \text{ si } f(x) = k, \quad \forall x \in [a, b]$$

Observaciones:

a) I_1 e I_2 se pueden reunir en una sola propiedad que se llama *propiedad de linealidad*:

$$\int_a^b [k_1 \cdot f(x) + k_2 \cdot g(x)] \cdot dx = k_1 \int_a^b f(x) \cdot dx + k_2 \int_a^b g(x) \cdot dx$$

b) I_3 , para el caso de f *definida positiva* y $a < c < b$, admite la siguiente interpretación geométrica

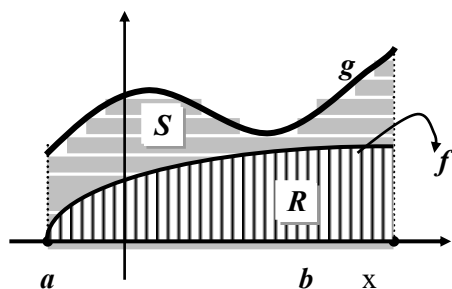


Si $T = S \cup R$.

Entonces: $\int_a^b f(x) \cdot dx = \int_a^c f(x) \cdot dx + \int_c^b f(x) \cdot dx$

equivale a: $a(T) = a(S) + a(R)$.

c) I_4 , para f y g *definidas positivas*, admite la siguiente interpretación geométrica:



Si $S = \{ (x, y) / a \leq x \leq b ; 0 \leq y \leq g(x) \}$

$R = \{ (x, y) / a \leq x \leq b ; 0 \leq y \leq f(x) \}$

y, $0 \leq f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$

Entonces: $R \subseteq S$ y $a(R) \leq a(S)$

y se verifica I_4 :

$$\int_a^b f(x) \cdot dx \leq \int_a^b g(x) \cdot dx$$

d) La propiedad I_5 se prueba fácilmente teniendo en cuenta que $\sum_{i=1}^n \Delta x_i = \text{long de } [a, b] = b - a$

$$\int_a^b k \cdot dx = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (k) \cdot \Delta x_i = \lim_{|P| \rightarrow 0} \left[(k) \cdot \sum_{i=1}^n \Delta x_i \right] = \lim_{|P| \rightarrow 0} [(k) \cdot (b - a)] = k \cdot (b - a)$$

9.8 Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral

- Dada f función continua en $[a; b]$, existe al menos un $c \in (a; b)$ tal que:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = f(c) \cdot (b - a).$$

- Demostración:

f continua en $[a; b]$. Luego, por el teorema de Weierstrass, admite máximo y mínimo absoluto en $[a; b]$; o sea, existen x_m y x_M en $[a; b]$ tales que:

$$f(x_m) = m_a \quad \text{y} \quad f(x_M) = M_a$$

$$\text{y}; \quad m_a \leq f(x) \leq M_a; \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\text{Luego, por } I_4: \quad \int_a^b m_a \cdot dx \leq \int_a^b f(x) \cdot dx \leq \int_a^b M_a \cdot dx$$

$$\text{por } I_5: \quad m_a \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) \cdot dx \leq M_a (b - a)$$

Dividiendo por, $(b - a)$ (con $b - a > 0$ dado que $b > a$) tenemos entonces que:

$$m_a \leq \frac{\int_a^b f(x) \cdot dx}{b - a} \leq M_a$$

equivalentemente: $f(x_m) \leq \frac{\int_a^b f(x) \cdot dx}{b - a} \leq f(x_M)$

Finalmente, por el teorema del valor *intermedio* aplicado al intervalo $[x_m; x_M]$ (ó $[x_M; x_m]$) tenemos que existe $c \in (x_m; x_M) \subseteq (a; b)$ tal que $f(c) = k$; o sea que:

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x) \cdot dx}{b - a}; \quad \text{con } c \in (a; b)$$

$$\text{equivalentemente:} \quad \int_a^b f(x) \cdot dx = f(c) \cdot (b - a); \quad \text{con } c \in (a; b). \quad \text{q.e.d.}$$

Observaciones:

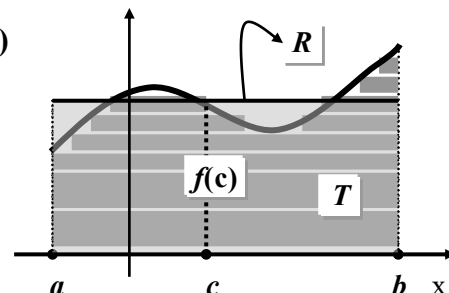
1) El teorema es válido también en el caso de $a \geq b$ (ejercicio).

2) En el caso de una f *definida positiva* en $[a; b]$, el teorema admite una interpretación geométrica: “existe un punto $c \in (a; b)$ ” para el cual el área del rectángulo de altura $f(c)$ y ancho $(b - a)$ es igual al área bajo la curva gráfico de f .

$$a(T) = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

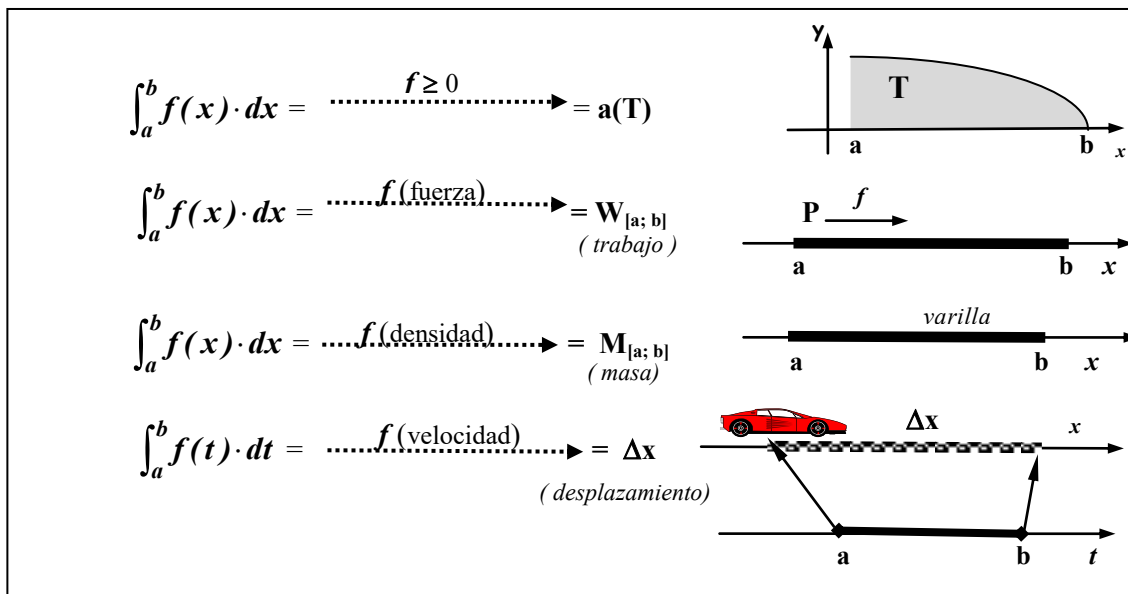
$$a(R) = f(c) \cdot (b - a)$$

Luego, por el teorema: $a(T) = a(R)$



9.9 Problemas que resuelve “LA INTEGRAL”

Por definición $\int_a^b f(x) \cdot dx = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i$. Luego, la integral resuelve todos aquellos problemas que, según vimos, resuelven por medio de “límite de sumas”.



Observaciones:

1) En el Apéndice al final del Capítulo se calcula el área de una figura plana a partir del correspondiente “límite de sumas” y con el método históricamente conocido como “método de exhausción”. Se calcula el área de T , trapezoide determinado por $f(x) = x^2$ en $[0; 1]$.

Se demuestra que $\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i = 1/3$. En otras palabras que $a(T) = 1/3$.

Como con la nueva notación, $a(T) = \int_0^1 x^2 dx$; concluimos así que: $\int_0^1 x^2 dx = 1/3$.

2) Si Δx indica el desplazamiento de un móvil a velocidad variable, si la velocidad es conocida y la variable independiente el tiempo, $v = f(t) = t^2$ en $[0; 1]$, entonces:

$$\Delta x_{[0; 1]} = \int_0^1 t^2 dt \Rightarrow \Delta x_{[0; 1]} = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta t_i$$

Es fácil ver que el “límite” resultante es “igual” al planteado para el cálculo del **área (T)** con $f(x) = x^2$ (sólo difiere en la letra usada para representar la “variable independiente”).

$$\text{Cómo } \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta t_i = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i = 1/3 \Rightarrow \int_0^1 t^2 dt = \int_0^1 x^2 dx = 1/3$$

Vemos entonces que el objetivo del **diferencial** (dx , dt , u otro) en el símbolo integral es señalar la letra que corresponde a la **variable independiente de f** . Así:

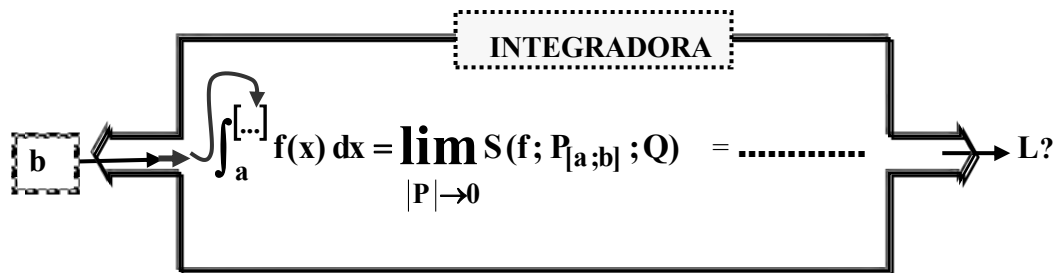
$$\int_a^b f(x) \cdot dx = \int_a^b f(t) \cdot dt = \int_a^b f(z) \cdot dz \rightarrow$$

El resultado sólo depende de:
 ☞ la función integrando (f);
 ☞ del intervalo de integración;
 o sea, de “a” y “b”.

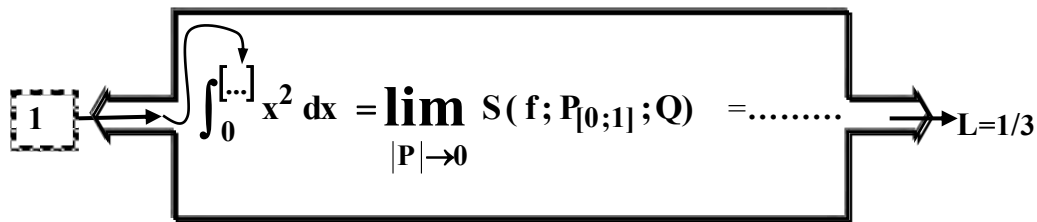
$$\bullet \int_0^1 x^2 \cdot dx = \int_0^1 t^2 \cdot dt = \int_0^1 z^2 \cdot dz = 1/3.$$

$$\bullet \int_0^1 x^2 dx \neq \int_0^1 t^2 dx = t^2 \text{ (prop. } I_5 \text{)}$$

9.10 Cálculo de la integral: $\int_a^b f(x) dx$



Ejemplo: dada $f(x) = x^2$; ¿cómo calculamos $\int_0^1 f(x) dx$?



En el APENDICE se muestra el cálculo **por definición** de $\int_0^1 x^2 dx$

→En este caso las características de la función integrando (x^2 , creciente en $[0;1]$) hacen posible el cálculo del correspondiente “límite de sumas”; por ende, el cálculo de la integral “por definición”.

Pero, y en general, este límite es prácticamente imposible calcular.

→Así, nuestro objetivo en lo que sigue es la búsqueda de un camino “alternativo” para el “cálculo de integrales”; o sea, de un camino que permita “obviar” el “límite de sumas”.

PROBLEMA: hallar un camino alternativo al de la definición para el cálculo de integrales.

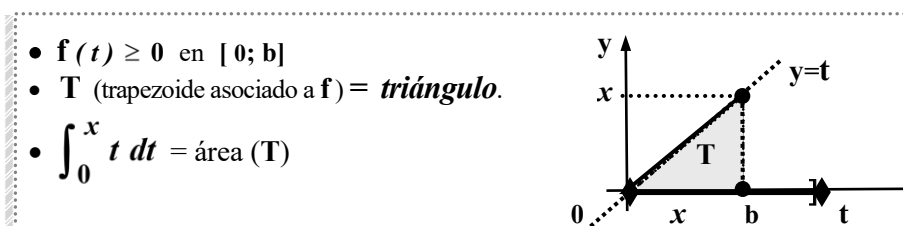
PLAN DE TRABAJO: como venimos haciendo hasta aquí, primero procedemos a analizar el caso simple con el objetivo de hallar pistas que permitan reformular el problema en otros términos; en particular, términos tales que faciliten su resolución. Hecho esto, procedemos luego a resolver el problema reformulado.

Análisis de un caso simple: $f(t) = t$; $D_f = [0; b]$

Objetivo: cálculo $\int_0^x t dt$, $x \in [0; b]$

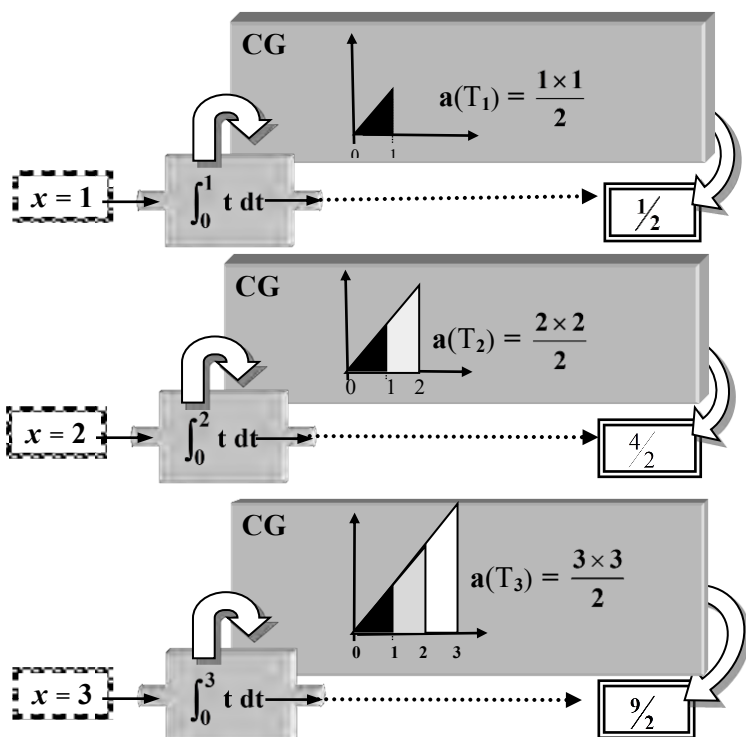
⊗ En general, y al efecto de reformular un problema, una estrategia efectiva es la de trasladar el problema a otro contexto en el que se facilite la acción.

En este caso, al ser f positiva en su dominio, el traslado al Contexto Geométrico (CG) permite reformular el cálculo de la integral en término de áreas.



Así, para calcular $\int_0^x t \, dt$, tenemos un camino alternativo: **calcular el área de T**, trapezoide determinado por el **graff**, el **eje t** y la **recta t = x**. Investigamos este camino en busca de pistas que ayuden a nuestro objetivo; pero, y fundamentalmente, de aquellas que permitan **generalizar** el proceso.

1ro) Calculamos $\int_0^x t \, dt$ para distintos x 's en $[0; b]$ trasladando el problema al CG.



•1er ANÁLISIS:

☞ Calculada la integral para distintos extremos superiores vemos que;

$$\int_0^{[*]} t \, dt \rightarrow \text{depende del ext. sup.}$$

queda definida una función: F

$$F: [0; b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow F(x) = \int_0^x t \, dt$$

que llamamos

FUNCIÓN INTEGRAL

NOTA:

Se puede demostrar que toda f integrable en $[a; b]$, define una “Función Integral”.

Definición 1: FUNCIÓN INTEGRAL

Dada f integrable en $[a; b]$ llamamos **función integral** a la función F tal que:

$$\triangleright F(x) = \int_a^x f(t) \cdot dt$$

$$\triangleright \text{Dom. } F = \text{Dom. } f = [a; b]$$

Se vislumbra así **otro camino** para el cálculo de integrales: el **cálculo de $F(x)$** .

$$\text{Pero...}, F(x) = \int_a^x f(t) \cdot dt \quad \text{y} \quad \int_a^x f(t) \cdot dt = \lim_{|P| \rightarrow 0} S(f; P_{[a; x]}; Q)$$

O sea, y hasta aquí, el cálculo del “límite de sumas” sigue siendo “inevitable”....

¿Qué hacemos?, ¿abandonamos este camino o persistimos en busca de pistas?...

Retomamos la exploración del caso simple, quizás resten cosas por descubrir....

En particular analizamos la existencia de algún patrón en la formación de las $F(x)$.

$$\begin{aligned}
 x=1 &\rightarrow F(1) = \int_0^1 t \, dt = \frac{1}{2} = \frac{1^2}{2} \\
 x=2 &\rightarrow F(2) = \int_0^2 t \, dt = \frac{4}{2} = \frac{2^2}{2} \\
 x=3 &\rightarrow F(3) = \int_0^3 t \, dt = \frac{9}{2} = \frac{3^2}{2}
 \end{aligned}$$

$$x = x_0 \rightarrow F(x_0) = \int_0^{[x_0]} t \, dt = \frac{x_0^2}{2}$$

Conclusión: si $P(x) = \frac{x^2}{2}$; tenemos que:

$$*) F(x) = P(x), \forall x \in [0; b]$$

*) P es una **función elemental** (*)

(*) **función elemental:** función cuyas imágenes se obtienen a partir de un número finito de operaciones algebraicas básicas ($\pm$; x ; $\div$; $\sqrt{}$) entre funciones “conocidas”.

Ejemplos: potencias, polinomios, cociente de polinomios, raíces, $x^2 + \sin x$, etc.

Observaciones:

→ La complejidad de F , función integral asociada a una integral, radica en que **por definición, no es una función elemental:** su cálculo trasciende los métodos del álgebra. (Calcular un límite requiere un número infinito de operaciones).

→ Por otro lado, sabemos que las funciones admiten distintos registros de representación (algebraico, gráfico, numérico y verbal) y que, dentro de un mismo registro, es posible el proceso de “conversión”; o sea, de reescribirla de otra forma pero dentro del mismo registro.

• 2do ANÁLISIS:

1) Para el caso simple investigado, el cambio de contexto (del analítico al geométrico) permite hallar una **función elemental**, P , tal que $F(x) = P(x)$, $\forall x \in [0; b]$.

En definitiva, **calcular la integral** por medio de una **función elemental**.

$$\int_0^x t \, dt = F(x); \quad F(x) = P(x); \quad P(x) = \frac{x^2}{2} \Rightarrow \int_0^x t \, dt = \frac{x^2}{2}$$

2) Dado que las funciones admiten distintas formas de ser representadas, hemos hallado un camino distinto al de la definición para calcular integrales: hallar, de ser posible, una función elemental (P) que coincida con la función integral (F) asociada a la integral.

En tal caso: $\int_a^x f(t) \, dt = P(x)$ (y obviamos el “límite de sumas”!!!)

Y este hecho señala la posibilidad de **reformular** el problema original.

PROBLEMA REFORMULADO (1):

Dada $F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$, $\text{Dom } F = [a; b]$

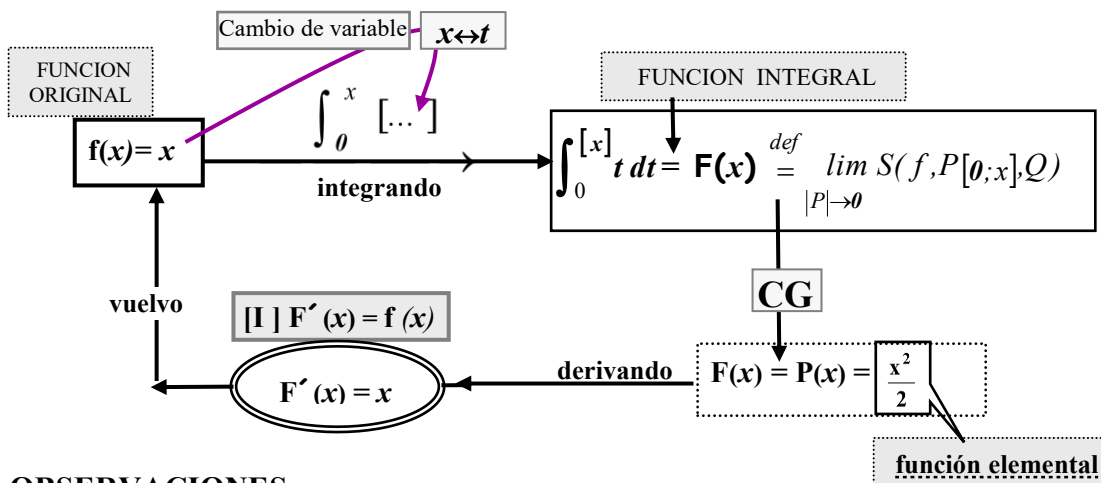
hallar P , **función elemental** tal que $F(x) = P(x)$, $\forall x \in [a; b]$.

3) En el caso simple investigado, lo que permite hallar la función elemental $P / P = F$ es el traslado del problema del contexto analítico al geométrico. Pero es fácil ver que esta estrategia no se puede aplicar a cualquier función pues hasta ahora, salvo para el círculo, no disponemos de fórmulas para el cálculo del área de regiones con contornos curvos.

Luego, trasladar el problema al Contexto Geométrico no es una alternativa válida para una f genérica. En lo que sigue, investigamos la existencia de otro contexto al que trasladar el problema y en el cual se simplifique su resolución. En particular..., **retomamos la exploración del caso simple, quizás resten cosas por descubrir....**

• 3er ANÁLISIS: (Caso Simple: $f(t) = t$; $D_f = [0; b]$)

Expresada F por medio de la función elemental P ($F(x) = P(x) = \frac{x^2}{2}$, $\forall x \in [0; b]$), procedemos a **derivar F** , observar que resulta de esta operación. Y descubrimos ..., **que la derivada de la Función Integral es, ¡ la función original! $\rightarrow F'(x) = f(x)$.**



OBSERVACIONES:

1) Descubrimos que F (función integral para el caso simple), actúa a modo de **punto** entre el **cálculo integral** y el **cálculo diferencial**; es decir, **establece un nexo entre ambos contextos** determinando un circuito donde quedan relacionadas las dos herramientas más poderosas del cálculo: la **Integral** y la **Derivada**.

En razón de ello a este circuito lo llamamos, "**circuito ID**" (Integro-Diferencial).

2) La existencia de este circuito sugiere la existencia de otro camino a explorar: el traslado del problema al **contexto del Cálculo Diferencial** (siempre y cuando esto sea posible). Si observamos el circuito detectamos que esta posibilidad está condicionada a la existencia de la igualdad [I] (**derivada de la Función Integral igual a la Función Original**). Tenemos así el:

I: Primer interrogante fundamental:

Cualquiera sea la f de partida, ¿siempre será $F'(x) = f(x)$?

Al cual da respuesta el:

1er Teorema Fundamental del Cálculo Integral - 1er TFCI:

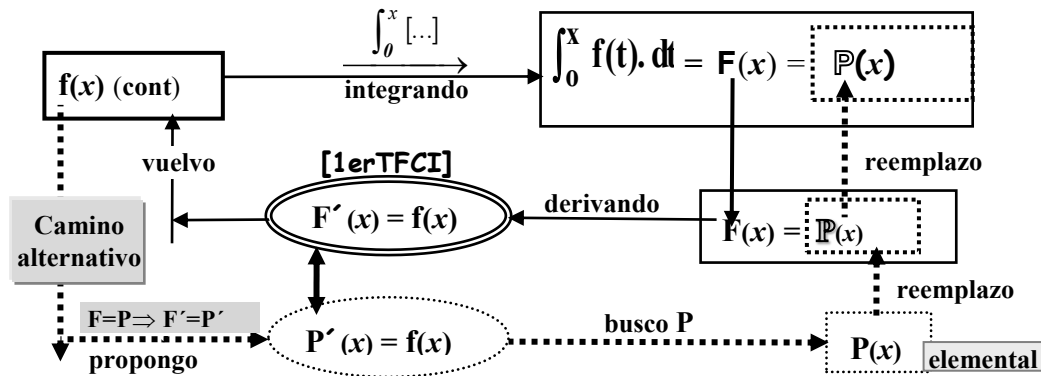
"Si f es continua en $[a; b]$ entonces F , su función integral, es derivable y $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a; b]$ ".

Demostración:
(más adelante)

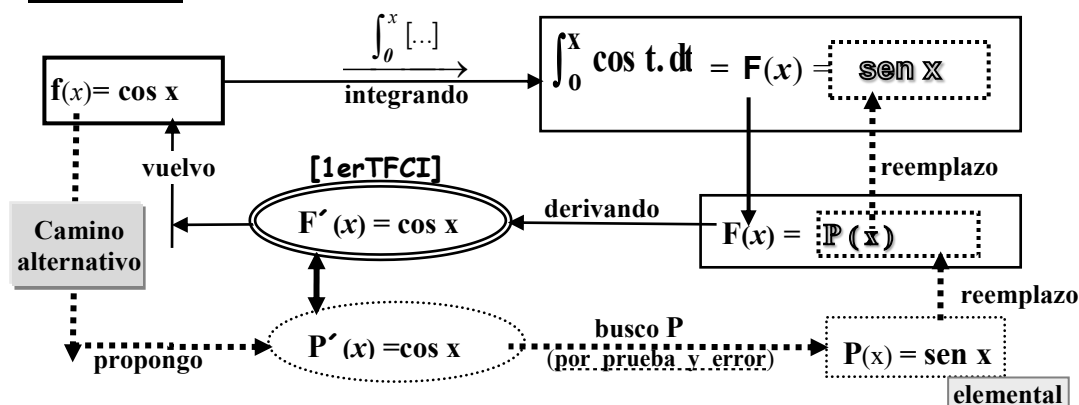
CONCLUSIÓN: si f , la función original, es continua en el intervalo, el circuito se forma. Luego, procedemos a explorarlo; en particular a investigar si se puede recorrer al revés.

O sea, **asumir que existe** P (elemental) tal que $P = F$ y **buscar** P .

¿Cómo?: recordando que si dos funciones son iguales, sus derivadas lo son ($P' = F'$)



EJEMPLO:



Momento de Reflexión: trasladar el problema al contexto del **Calculo Diferencial** permite reformular el mismo en término de derivadas (reformulación (2)).

PROBLEMA (original): $f: [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$;

↪ hallar un camino alternativo para el cálculo de la integral $\int_a^x f(t)dt$ con $x \in [a; b]$

PROBLEMA REFORMULADO (1): $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$; f continua en $[a;b]$

↪ hallar una función elemental P tal que $P = F$ con $F(x) = \int_a^x f(t)dt$; $x \in [a;b]$

PROBLEMA REFORMULADO (2): $f: [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$; f continua en $[a; b]$

↪ hallar una función elemental P tal que $P'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a; b]$

NOTA: en este punto vemos que la existencia o no de una función elemental P tal que $P' = f$ es determinante para el cálculo de la integral por un camino alternativo. Luego, dado su importancia, damos un nombre a esta función y estudiamos sus propiedades.

Observación: $P' = f$ implica que f “proviene” de P ; en otras palabras, que P está “antes” que f .

Definición 2: PRIMITIVA (o ANTIDERIVADA)

P es una **primitiva** de **f** en $[a; b]$ si y solo si $P'(x) = f(x); \forall x \in [a; b]$.

Finalmente el problema original (cálculo de la integral) queda reformulado así:

PROBLEMA REFORMULADO (3):

↪ dada **f** continua en $[a; b]$ hallar **P**, **primitiva elemental** de **f**.

Ejemplos:

- a) si $f(x) = x$; una primitiva de **f** es $P(x) = x^2/2$; $[P'(x) = x \rightarrow \text{verifica}]$
 b) si $f(x) = \cos x$; una primitiva de **f** es $P(x) = \sin x$; $[P'(x) = \cos x \rightarrow \text{verifica}]$
 c) si $f(x) = 1$; una primitiva de **f** es $P(x) = x$; $[P'(x) = 1 \rightarrow \text{verifica}]$

Notas:

- 1.- Derivada en los extremos del intervalo:
 el concepto de derivada lo hemos presentado y definido para puntos interiores a un intervalo. Luego, cabe aclarar que las derivadas en los extremos, $P'(a)$ y $P'(b)$, se definen de la misma forma solo que reemplazando “límite” por “límite lateral” para $x \rightarrow a^+$ y $x \rightarrow b^-$ respectivamente.
- 2.- Las primitivas de los ejemplos las hallamos por el método de **prueba y error**; o sea, a partir de **proponer** una función y **probar** si verifica lo buscado. Si no verifica se detecta el error, se corrige y se vuelve a probar. Y así hasta encontrar la primitiva elemental de **f** (si existe). Este método es el único posible para las funciones elementales básicas; no así para las demás. Así, otro objetivo del cálculo integral es hallar métodos efectivos para el cálculo de primitivas.
- 3.- No siempre existe **P**, **primitiva elemental** de **f**; aún para **f** continua. Ejemplo: $f(x) = e^{-x^2}$.
- 4.- Por el 1er TFCL, si **f** es continua en $[a; b]$ y $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ su función integral entonces $F'(x) = f(x), \forall x \in [a; b]$. **Luego:** **F** es una primitiva de **f**.

PROPIEDADES DE LAS PRIMITIVAS

Teorema I-Pr: Si una función tiene una primitiva **P**, entonces tiene infinitas $(P + k, k \in \mathbb{R})$

Demostración:

- Sea **P** primitiva de **f** $\rightarrow P'(x) = f(x)$
- Dada $G(x) = P(x) + k, k \in \mathbb{R} \rightarrow G'(x) = [P(x) + k]' = P'(x) + (k)' = f(x)$
- Luego, $G = P + k$ es primitiva de **f**. (q.e.d)

Teorema II-Pr: Dos primitivas de **f** difieren en una constante; o sea, $G(x) - P(x) = k$

Demostración:

- **P** primitiva de **f** $\Rightarrow P'(x) = f(x)$
- **G** primitiva de **f** $\Rightarrow G'(x) = f(x)$
- Sea $H(x) = G(x) - P(x); \forall x \in [a; b]$
 $H'(x) = [G(x) - P(x)]' = G'(x) - P'(x) = f(x) - f(x) = 0; \forall x \in [a; b]$.
 Luego, $H'(x) = 0; \forall x \in [a; b] \Rightarrow H(x) = k; \forall x \in [a; b]$.
- **Conclusión:** $G(x) - P(x) = k$ ó $G(x) = P(x) + k; \forall x \in [a; b]$. (q.e.d)

Observación: $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es una primitiva de f . Luego, por el Teo II-Pr, si P es otra primitiva de f , entonces existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) = P(x) + k$; $\forall x \in [a; b]$.

Teorema III-Pr:

Si P y G son dos primitivas de f en $[a; b]$ y existe $x_0 \in [a; b]$ tal que $G(x_0) = P(x_0)$ entonces $G(x) = P(x)$; $\forall x \in [a; b]$.

- P y G primitivas de f en $[a; b] \Rightarrow G(x) - P(x) = k$; $\forall x \in [a; b]$ (Teo II-Pr)
luego, para $x_0 \in [a; b]$ tenemos: $G(x_0) - P(x_0) = k$
- Por hipótesis: $G(x_0) = P(x_0) \Rightarrow G(x_0) - P(x_0) = 0 \Rightarrow k = 0$
- Conclusión:** $G(x) - P(x) = 0$; $\forall x \in [a; b] \Rightarrow G(x) = P(x)$; $\forall x \in [a; b]$. (q.e.d)

• 4to ANÁLISIS:

Descubierto el hecho de que si existe una primitiva P de f entonces existen infinitas $(P + k)$, se nos plantea un problema en cuanto al recorrido al revés del circuito ID: la primitiva que hallamos por prueba y error, ¿será la que coincide con F , la función integral asociada a f ?

• Por definición de igualdad de funciones, sabemos que:

$$F = P \Leftrightarrow \text{Dom } P = \text{Dom } F = [a; b] \text{ y } F(x) = P(x) \quad \forall x \in [a; b].$$

PROBLEMA ENGORROSO:

Averiguar si $F = P$ requiere calcular $F(x)$, $\forall x \in [a; b]$ y este es justamente el problema que estamos tratando de resolver!!!: cómo calcular $F(x)$ por un camino alternativo al de la definición de F ("límite de sumas").

☞ Por definición podemos calcular F en único punto: el extremo inferior de la integral.

$$\text{Si } F(x) = \int_a^x f(t) \cdot dt, \quad \forall x \in [a; b] \xrightarrow{\text{por def.}} F(a) = \int_a^a f(t) \cdot dt = 0.$$

Luego, para averiguar si $F = P$, no podemos usar la definición de igualdad de funciones.

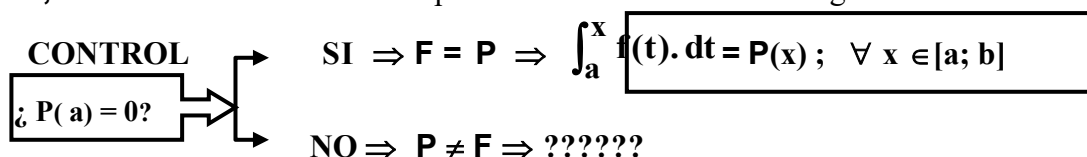
☞ Y aquí es donde el **Teorema III-Pr** nos rescata de esta engorrosa situación!!!

F y P son primitivas de f ; luego, y según este teorema, si existe $x_0 \in [a; b]$ tal que $F(x_0) = P(x_0)$ entonces $F(x) = P(x)$; $\forall x \in [a; b]$. O sea, para decidir si $F = P$ basta comparar las funciones en un único punto, y esto sí lo podemos hacer!!!...

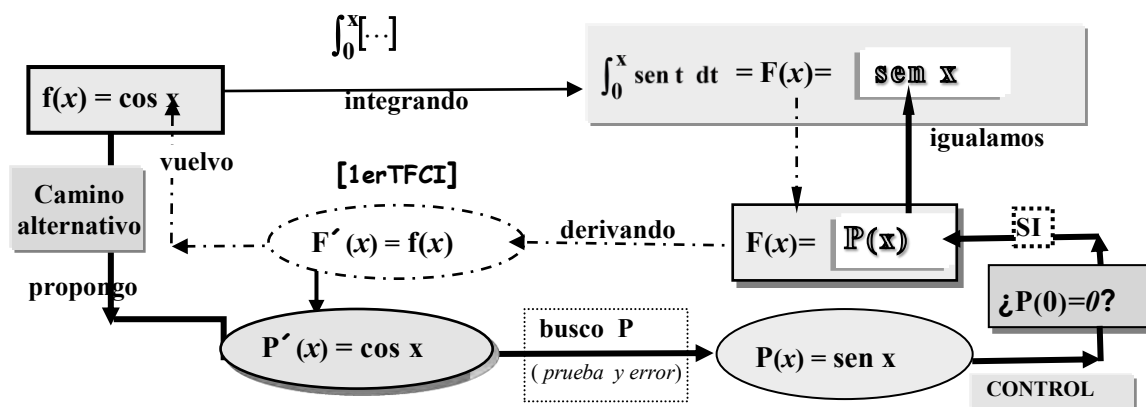
Conclusiones: si $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$; $F(x) = \int_a^x f(t) \cdot dt$; P primitiva elemental de f .

1) $P = F \Leftrightarrow P(a) = F(a) \Leftrightarrow P(a) = 0$.

2) Si en el circuito ID introducimos un **CONTROL** al efecto de determinar si $P = F$, tenemos "casi" resuelto el problema del cálculo de integrales.



EJEMPLO: $f(x) = \cos x$; $x \in [0; b]$

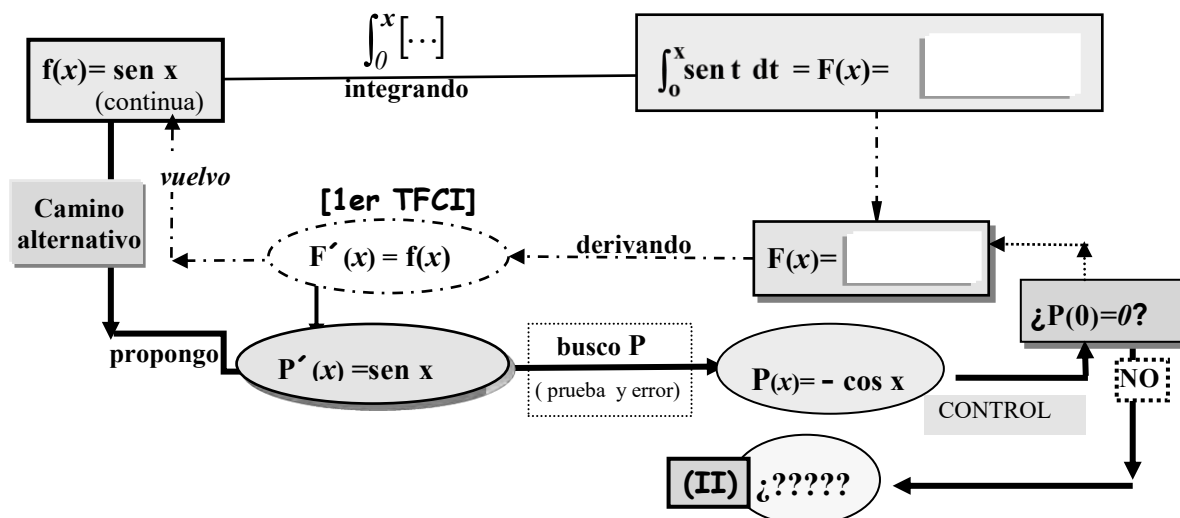


CONCLUSIÓN:

$$\Rightarrow \int_0^x \cos t \, dt = \sin x$$

$$\begin{aligned} &\triangleright x = \pi/2 \rightarrow \int_0^{\pi/2} \cos t \, dt = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \\ &\triangleright x = \pi \rightarrow \int_0^{\pi} \cos t \, dt = \sin \pi = 0 \\ &\triangleright x = 2 \rightarrow \int_0^2 \cos t \, dt = \sin 2 \end{aligned}$$

..... exploramos el circuito ID para otra función



(II) ¿tenemos alternativa?: SI, proponer otra primitiva. ¿CUAL?

- Por Teo I - Pr $\rightarrow$ si existe una primitiva (P) entonces hay infinitas.
- Por Teo II - Pr $\rightarrow$ dos primitivas difieren en una constante;

Luego; si $P \neq F$; buscamos otra primitiva G, tal que $F(x) = G(x)$ ($G(x) = P(x) + k$)

Y tenemos así el:

Segundo interrogante fundamental: dada $F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$ y P otra primitiva de f: "el valor de $k \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) = P(x) + k$, $\forall x \in [a; b]$, ¿se puede determinar fácilmente?"

Al cual da respuesta el:

2do Teorema Fundamental del Cálculo Integral – 2do TFCI :

“Dada f continua en $[a; b]$;

F la función integral asociada a f y

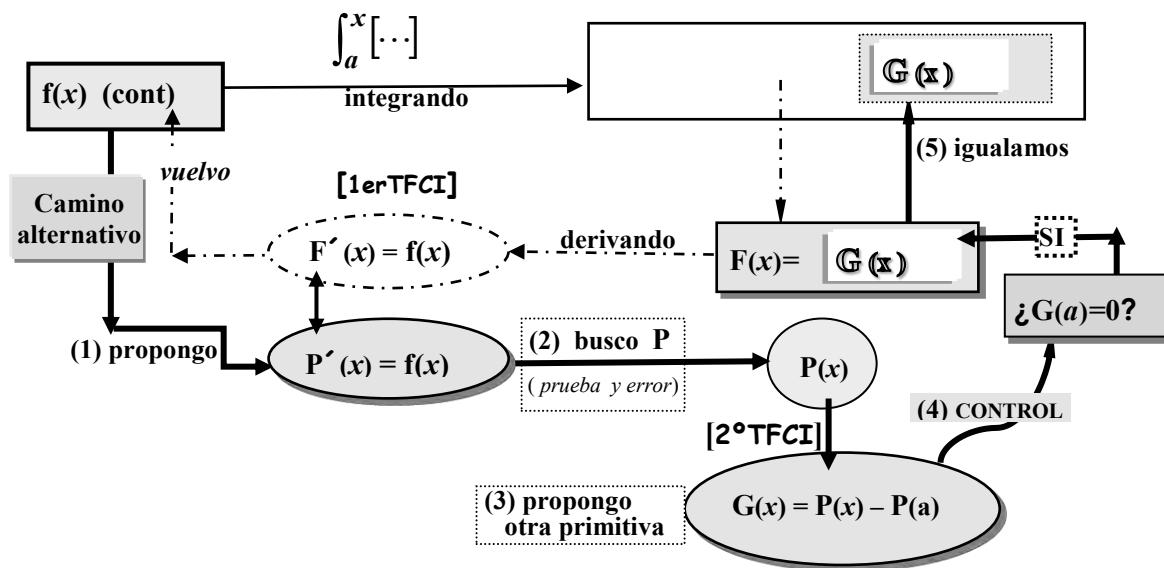
P otra primitiva de f ,

entonces $F(x) = P(x) + k, \forall x \in [a; b]$ con $k = -P(a)$ ”.

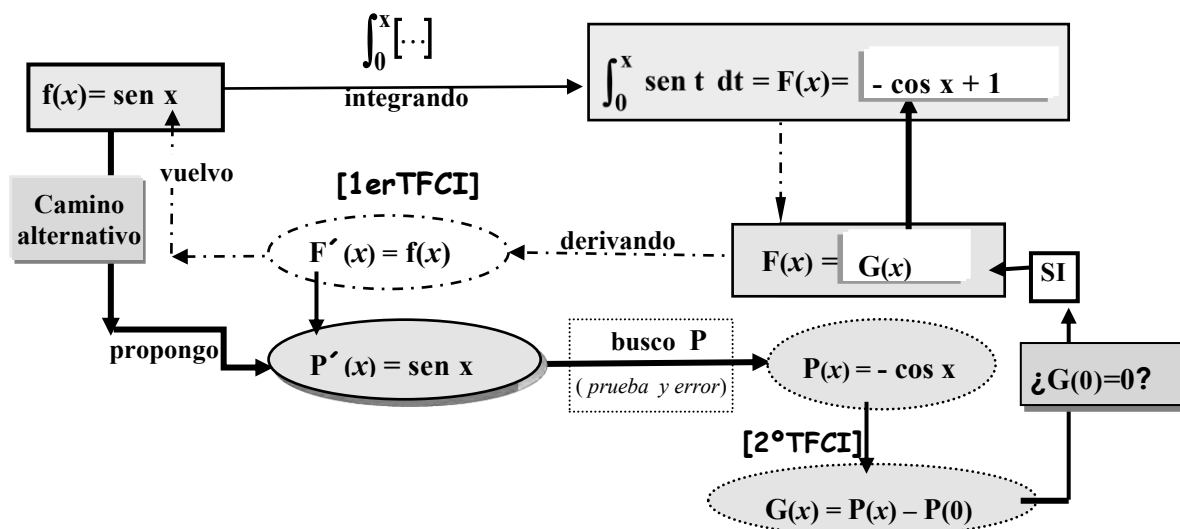
Demostración:
(más adelante)

Este teorema permite ajustar el circuito ID de modo que permita calcular integrales de funciones continuas, f , toda vez que encontremos al menos una primitiva $P_{(elem)}$ de f .

CONCLUSIÓN: f continua en el intervalo y admite primitiva (*elem.*) el circuito queda:



Ejemplo: usemos el circuito para calcular $\int_0^x \text{sen } t \, dt$

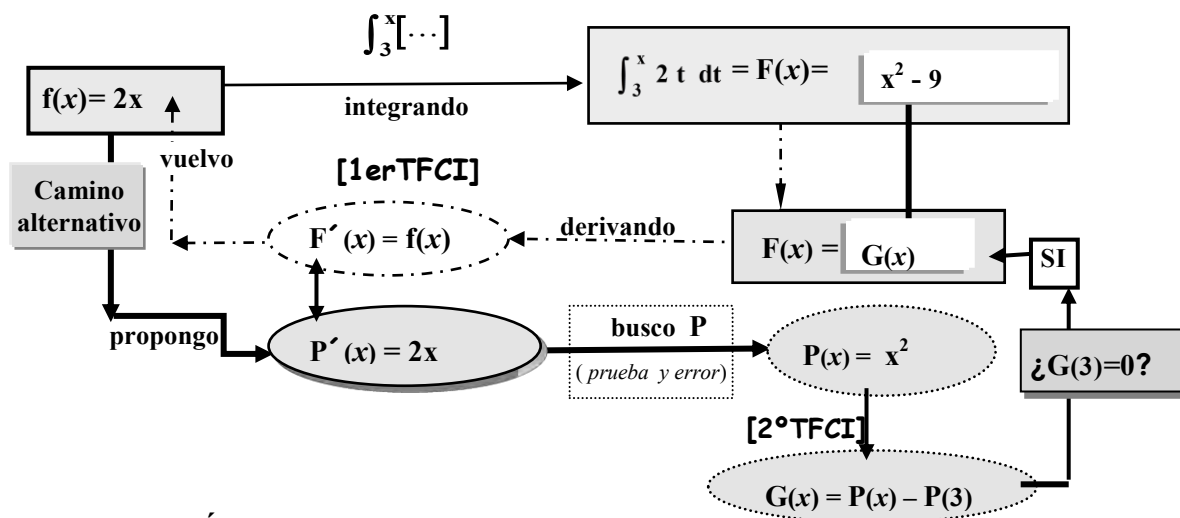


CONCLUSIÓN:

$$\int_0^x \sin t \, dt = -\cos t \Big|_0^x = -\cos x + \cos 0 = 1 - \cos x$$

$$\begin{aligned} &> x = \pi/2 \rightarrow \int_0^{\pi/2} \sin t \, dt = -\cos(\pi/2) + 1 = 1 \\ &> x = \pi \rightarrow \int_0^{\pi} \sin t \, dt = -\cos(\pi) + 1 = 2 \\ &> x = 2 \rightarrow \int_0^2 \sin t \, dt = -\cos(2) + 1 \end{aligned}$$

Ejemplo: dada $f(x) = 2x$, $Df = [3; 7]$ usemos el circuito para calcular $\int_3^x f(t) \, dt$, $x \in [3; 7]$

**CONCLUSIÓN:**

$$\int_3^x 2t \, dt = x^2 - 9 \Rightarrow \begin{aligned} &> \int_3^5 2t \, dt = 5^2 - 9 = 16 \\ &> \int_3^4 2t \, dt = 4^2 - 9 = 7 \end{aligned}$$

⊗ Resumiendo el trabajo hecho tenemos un:

Proceso alternativo para el cálculo de $\int_a^x f(t) \, dt = F(x)$

- 1) Proponer $P'(x) = f(x)$
- 2) Hallar (si existe) P , una primitiva elemental de f .
- 3) Plantear todas las primitivas que difieren de P en una constante: $P(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$
- 4) Hallar k de modo que $F(x) = P(x) + k \rightarrow (2^\circ \text{ TFCI}) \rightarrow k = -P(a)$
- 5) Volver a $\int_a^x f(t) \, dt = F(x)$;
reemplazar F por la primitiva elemental obtenida en (4); concluir una fórmula elemental para calcular la integral: $\int_a^x f(t) \, dt = P(x) - P(a)$.

En lo que sigue nos dedicamos a validar este proceso; o sea, a demostrar todas las cuestiones que hacen a la circulación del circuito ID tanto en forma *directa* como *al revés*.

9.11 Relación entre el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral

- En párrafos anteriores vimos los fundamentos del Cálculo Integral, su aparición como una rama independiente de la matemática la cual, entre otras cosas, resuelve el problema del cálculo del área de regiones de contornos curvos, permite determinar el “efecto total” o “acumulado” en un proceso de cambio con velocidad no constante.
- Vimos también la necesidad de buscar métodos alternativos al de la “definición de integral” para posibilitar el “cálculo de integrales”; como esta búsqueda contribuye tanto al hallazgo de importantes resultados teóricos como al descubrimiento de que el Cálculo Integral se podía trabajar como Cálculo Diferencial “al revés”. La detección de este hecho tiene consecuencias prácticas trascendentes pues es el que finalmente permite hallar “métodos alternativos” para el “cálculo de integrales”.
- Cabe mencionar que aún cuando lo útil de este hecho en su momento (y aún hoy), el desarrollo de nuevas tecnologías y como consecuencia de ello de los “métodos numéricos”, ha permitido volver la mirada al cálculo por definición de la integral. Y este hecho tiene su ventaja ya que permite abordar el cálculo de integrales de cualquier tipo de función, cosa que no siempre es posible con el Cálculo Integral pensado como Cálculo Diferencial “al revés”.

☞ Una de las cuestiones que vimos al investigar el circuito ID, fue que variando el *extremo superior* de la integral generábamos una función, la **función integral**.

Definición 1: (FUNCIÓN INTEGRAL)

Dada f integrable en $[a; b]$ llamamos **función integral** a la función F tal que:

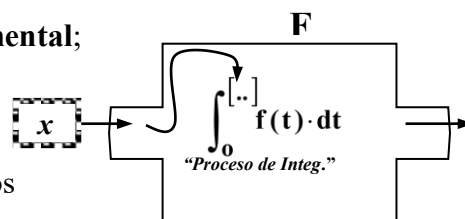
➤ Ley F : $F(x) = \int_a^x f(t) \cdot dt$

➤ $\text{Dom. } F = \text{Dom. } f = [a; b]$

Observaciones:

- 1.- Por definición, **F no es una función elemental**;

su cálculo requiere el cálculo del “límite de sumas de Riemann”; o sea, una operación que trasciende los métodos del álgebra y que, salvo casos muy puntuales como el de $f(x) = x^2$, resulta imposible de realizar.



- 2.- Para ciertas funciones, bajo ciertas condiciones y trasladado el problema al contexto geométrico, pudimos calcular $F(x)$ para algunos valores de x' , y luego, por inducción, expresar la ley de F por una **fórmula “elemental”**.

Así, dada $f(x) = x$ calculamos $F(x) = \int_0^x t \cdot dt$ para distintos valores de x' , y concluimos,

$$x \rightarrow F(x) = \lim_{|P| \rightarrow 0} S(f, P_{[0;x]}, Q) = L = x^2/2 \rightarrow$$

$$F(x) = x^2/2$$

Luego, derivamos F , obtuvimos $F'(x) = f(x)$; o sea, descubrimos que la derivada de la función integral nos volvía a la función original. Este hecho crucial nos lleva al,

Primer Interrogante Fundamental: “cualquiera sea f , ¿siempre será $F'(x) = f(x)$?”

La respuesta a este interrogante la dio el **1er TFCI**, el que demostramos a continuación:

1er TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL (1º TFCI)

Sea f continua en $[a; b]$ y $F(x) = \int_a^x f(t) \cdot dt$ la función integral que ella genera.

Entonces, F es derivable en $[a; b]$ y $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a; b]$.

Demostración:

a) Dado $x_0 \in (a; b)$ nos proponemos analizar la existencia de $F'(x_0)$.

$$\begin{aligned} F'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x_0+h} f(t) \cdot dt - \int_a^{x_0} f(t) \cdot dt}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x_0} f(t) \cdot dt + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) \cdot dt - \int_a^{x_0} f(t) \cdot dt}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t) \cdot dt}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c) \cdot h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(c) = f(x_0) \end{aligned}$$

f continua en x_0

$\updownarrow$

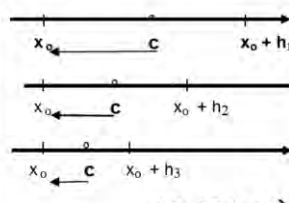
$(c \rightarrow x_0)$

Por TVMCI (Teo. Valor Medio del Calc. Int.)
existe $c \in [x_0; x_0+h]$ (*) (ó $[x_0+h; x_0]$)
($h > 0$) ($h < 0$)

tal que:

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(t) \cdot dt = f(c) \cdot [(x_0+h) - x_0] = f(c) \cdot h$$

- si $h \rightarrow 0$ entonces,
- $x_0 + h \rightarrow x_0$ y, por (*),
- $c \rightarrow x_0$



b) Si $x_0 = a$ ó $x_0 = b$.

La prueba es la misma sólo hay que tomar, $h \rightarrow 0^-$ ó $h \rightarrow 0^+$, según sea $x_0 = a$ ó $x_0 = b$.

Conclusión: como x_0 es genérico hemos probado que: $F'(x) = f(x)$; $\forall x \in [a; b]$.

(q.e.d)

☞ Otra de las cuestiones que vimos fue que para recorrer el circuito **ID** “al revés” dada f debíamos buscar P tal que $P' = f$. A esta P le dimos un nombre: **primitiva de f** .

Definición 2: (Primitiva ó antiderivada de una función)

P es una primitiva de f en $[a; b]$ si y sólo si $P'(x) = f(x)$; $\forall x \in [a; b]$.

☞ Vimos también las siguientes propiedades de “primitivas” (pags. 30 -31):

Teorema I-Pr: Si f tiene una “primitiva” P, entonces tiene infinitas $(P + k, k \in \mathbb{R})$

Teorema II-Pr: Dos primitivas de f difieren en una constante: $G(x) - P(x) = k$

Teorema III-Pr: Si P y G son dos primitivas de f en $[a; b]$ y existe $x_0 \in [a; b]$ tal que $G(x_0) = P(x_0)$ entonces $G(x) = P(x)$; $\forall x \in [a; b]$.

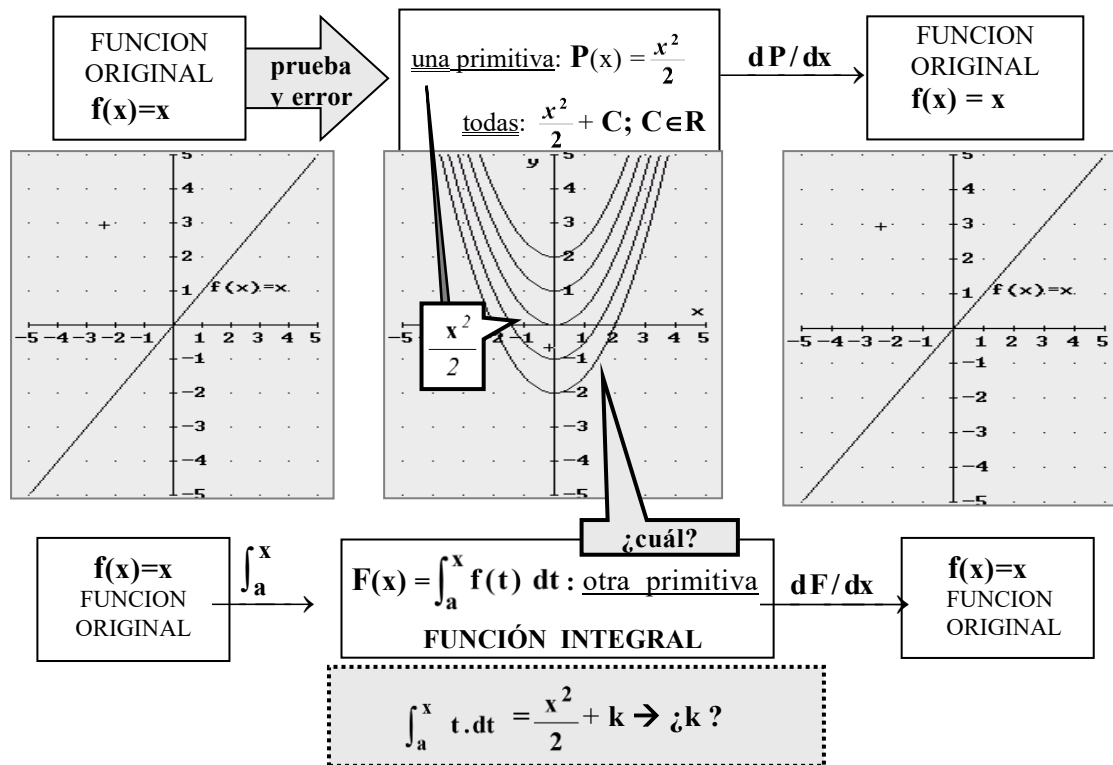
De estas propiedades concluimos:

☞ Por **1erTFCI**: f continua en $[a; b]$ y $F(x) = \int_a^x f(t) dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a; b]$.

O sea, F, la **función integral**, es una **primitiva** de f en $[a; b]$.

☞ Por **Teo II-Pr** : dos primitivas de f difieren en una “constante”.

O sea, que dada P, otra primitiva de f, existe $k \in \mathbb{R}$ / $F(x) = P(x) + k \rightarrow \text{¿} k \text{?}$



☞ Retomando el problema surge el **Segundo Interrogante Fundamental:**

“dadas f continua en $[a; b]$; $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ y P otra primitiva de f ;
el valor de k tal que $F(x) = P(x) + k$, $\forall x \in [a; b]$, ¿ se puede hallar ?”.

Interrogante que resuelve el **2ºTFCI**.

9.12 Relación entre función integral y primitiva

2do TEOREMA FUNDAMENTAL del CÁLCULO INTEGRAL (2ºTFCI)

Hipótesis: Dadas: f función continua en $[a; b]$

P primitiva cualquiera de f en $[a; b]$

F función integral asociada a f : $F(x) = \int_a^x f(t).dt$;

Tesis: para cada $x \in [a; b]$ se tiene que: $F(x) = P(x) - P(a)$;

o sea que:

$$\int_a^x f(t).dt = P(x) - P(a)$$

Demostración:

» Por hipótesis $\rightarrow P$ primitiva de f .

» Por 1ºTFCI $\rightarrow F$ primitiva de f .

» Luego, por **teorema II Pr.**, F y P difieren en una constante $\rightarrow F(x) = P(x) + C$

» O sea $\rightarrow \int_a^x f(t).dt = P(x) + C \quad \forall x \in [a; b] \quad (*)$

» Si $x = a \rightarrow \int_a^a f(t).dt = P(a) + C$
 $0 = P(a) + C \quad \Rightarrow C = -P(a)$

» Reemplazando en $(*) \rightarrow \int_a^x f(t).dt = P(x) - P(a). \quad \forall x \in [a; b] \quad (\text{q.e.d})$

• Corolario: REGLA de BARROW

$$\text{En el 2ºTFCI; si } x=b \rightarrow \int_a^b f(t).dt = P(b) - P(a) = P(t)|_a^b$$

• El 2ºTFCI prueba que $k = -P(a)$; o sea, resuelve el último interrogante planteado en relación al circuito ID a la vez que muestra que en el cálculo de la integral también interviene el extremo inferior de la integral (a).

En el ejemplo de la pág. anterior: $\int_a^x t.d t = \frac{x^2}{2} + C \rightarrow (2^\circ \text{TFCI}) \quad C = -\frac{a^2}{2}$

y finalmente: $\int_a^x t.d t = \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2} \quad . \quad (\text{ej: } a=3 \rightarrow \int_3^x t \, dt = \frac{x^2}{2} - \frac{9}{2})$

En definitiva, si por algún medio obtenemos una **primitiva elemental de f** , el cálculo de **la integral**, con la aplicación de la **Regla de Barrow**, se reduce a una **simple resta**. Con el hallazgo de esta regla hemos entonces concluido exitosamente (será así?) la búsqueda de un camino alternativo para el cálculo de la integral.

Ejemplo: $\int_0^6 15.t^2 \, dt = P(6) - P(0) = 5.6^3 - 5.0^3 = 1080$
 $(P(t) = 5.t^3)$

¿Hemos resuelto *exitosamente* nuestro problema? ; ¿podemos, por ej., calcular $\int_1^{10} \ln x \, dx$?

Evidentemente resulta prácticamente imposible hallar **P**, primitiva de $f(x) = \ln x$, por “prueba y error”; por ende, aplicar Barrow y calcular la integral. Vemos así que la aplicación de la potente regla que acabamos de hallar (la de Barrow) queda supeditada al hallazgo de al menos una primitiva elemental y que esto, salvo algunos casos simples, no es algo que se pueda hacer por “prueba y error” Surge así la necesidad de hallar “métodos” más eficaces para la búsqueda de primitivas. En el párrafo que sigue nos abocamos a esta cuestión e introducimos para ello un nuevo concepto el cual facilita el trabajo “metódico” que nos proponemos para esta instancia.

9.13 El concepto de “integral indefinida”

Vimos que si f admite una primitiva, admite infinitas; luego, tenemos un conjunto de primitivas.

Conjunto de Primitivas de f = $\{P(x) + C \mid C \in \mathbf{R} \text{ y } P'(x) = f(x)\}$.

A este conjunto le damos un nombre y un símbolo al efecto de facilitar su obtención.

Definición (INTEGRAL INDEFINIDA)

Al Conjunto de Primitivas de f ,

* lo llamamos: **Integral Indefinida**,

* lo indicamos con el símbolo: $\int f(x) \, dx$.

O sea, $\int f(x) \, dx = P(x) + C$; P primitiva de f y $C \in \mathbf{R}$ ($C = \text{cte de integración}$)

9.13.1 Tabla de “Integrales” (Primitivas) Inmediatas

NOTAS:

- 1) El uso y costumbre ha impuesto el término “integral” para referirse a la “integral indefinida” de f . Esto sin dudas crea importantes confusiones pues el mismo término se usa para dos conceptos distintos: la *integral indefinida* (primitivas de f) y la *integral de f en $[a; b]$* (“límite de Sumas de Riemann de f en $[a; b]$ ”). El dominio de ambos conceptos es indispensable entonces para usar este término en el modo y forma que corresponda según el contexto de trabajo.
- 2) El primer recurso del que disponemos para hallar “integrales indefinidas” ó “primitivas” es el de prueba y error. Con este método, y recurriendo a la tabla de derivadas, hallamos las primitivas de las funciones prototípicas básicas con las que construimos la Tabla de Integrales “inmediatas”. El resto de las primitivas se encuentran a partir de esta tabla y con el recurso de “técnicas de integración” que se construyen apoyándose en las “técnicas de derivación”.

• **Integrales “inmediatas”:**

$$1) \int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C ; \alpha \neq -1$$

$$2) \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$$

$$3) \int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$4) \int \cos x \cdot dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$5) \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx = \operatorname{tg}(x) + C$$

$$6) \int e^x \cdot dx = e^x + C$$

$$7) \int \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = \operatorname{arctg}(x) + C$$

$$8) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \operatorname{arcsen}(x) + C$$

$$9) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = -\operatorname{arc.cos}(x) + C$$

9.13.2 Técnicas de “integración” ó de “búsqueda de primitiva”:

Existen distintas técnicas que permiten buscar primitivas “con método”. Veremos sólo algunas de ellas y, dado su carácter, las veremos directamente en la práctica. Los métodos que vamos a ver y usar son:

I) método de integración por descomposición

II) método de integración por sustitución

III) método de integración por partes

IV) método de integración por desarrollo en fracciones simples

9.13.3 Propiedades de la integral indefinida

II-1) Si f y g admiten primitivas en un intervalo I , entonces “ $f \pm g$ ” también admite primitiva en I y vale: $\int (f(x) \pm g(x)) \cdot dx = \int f(x) \cdot dx \pm \int g(x) \cdot dx$

II-2) Si f admite primitiva en un intervalo I , $k \in \mathbb{R}$; entonces “ $k \cdot f$ ” también admite primitiva en I y vale: $\int k \cdot f(x) \cdot dx = k \cdot \int f(x) \cdot dx$

II-3) $(\int f(x) \cdot dx)' = f(x)$

Por definición: $\int f(x) \cdot dx = P(x) + C$ con $P'(x) = f(x)$;

entonces $(\int f(x) \cdot dx)' = (P(x) + C)' = P'(x) = f(x)$ (q.e.d.)

II-4) $\int f'(x) \cdot dx = f(x) + C$

Por definición: $\int f'(x) \cdot dx = P(x) + C$, con P primitiva de f .

Como $f(x)$ es obviamente una primitiva de $f'(x)$, entonces $P(x) = f(x)$. (q.e.d.)

9.13.4 Notas:

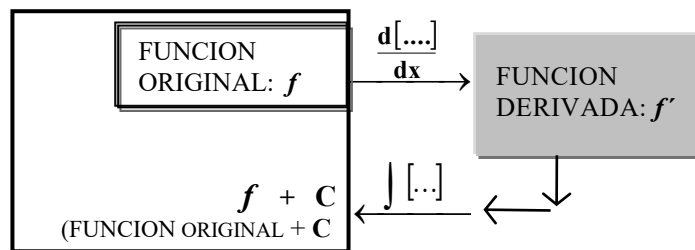
a) II-1 y II-2 se resumen en una sola condición, llamada propiedad de linealidad .

$$\int (k_1 \cdot f(x) + k_2 \cdot g(x)) \cdot dx = k_1 \cdot \int f(x) \cdot dx + k_2 \cdot \int g(x) \cdot dx$$

b) Cabe señalar que II-3 muestra que al aplicar los dos procesos uno a continuación del otro (integración y derivación) comenzando por el de “integración” volvemos a la función original.

Esto puede hacernos pensar que ambos procesos son “*inversos uno del otro*”.

Sin embargo II-4 muestra que si hacemos lo mismo, pero comenzando por la derivación volvemos a “*mucho más*” que la función original pues, debido a la constante de integración, volvemos a un conjunto infinito de funciones ($f + C$, $C \in \mathbb{R}$).



Luego, y en rigor, “integración” y “diferenciación” no son procesos inversos uno de otro. (Aplicados uno a continuación del otro, no siempre se vuelve al punto de partida: al “integrar” una “derivada” recuperamos mucho más que la función original).

Y este hecho tiene consecuencias prácticas que vemos a continuación a través de un ejemplo.

Ejemplo: Se comienza a llenar un tanque con agua que sale de una canilla a una velocidad $v(t) = 3t^2$, $[v] = \text{lbs./h.}$. Si el tanque tiene **6 ls** al inicio, y una capacidad de **70 lbs**.
¿Cuánto tarda en llenarse?

» **Datos:** velocidad del proceso $\rightarrow v(t) = 3t^2$

volumen inicial = 6 (ls) ; capacidad del tanque: 70 (ls)

» **Incógnita:** t_f = instante final ó instante en que el tanque se llena.

Si introducimos la variable V = **volumen de agua en el tanque en cada instante t** ;

* podemos reescribir la incógnita de manera más “operativa” $\rightarrow t_f / V(t_f) = 70$.

* descubrir la existencia de una incógnita oculta: $V = V(t)$, (función que rige el proceso)

» **Resolución**

El problema, reformulado según el análisis previo, queda: “conocida v , velocidad a la que se desarrolla el proceso ($v = V'$), hallar $V = V(t)$, función que rige el proceso” ;

Concluimos así que el problema consiste en hallar la función de la que proviene v ; en definitiva, en hallar “**la primitiva de v** ”.

$$v = 3t^2 \xrightarrow{\text{prueba y error}} P(t) = t^3 ; \quad P \text{ primitiva cualquiera de } v, \text{ ¿será } V?$$

Por **Teor.II Pr.** : $V(t) = P(t) + C \Rightarrow V(t) = t^3 + C \rightarrow \text{¿ } C?$

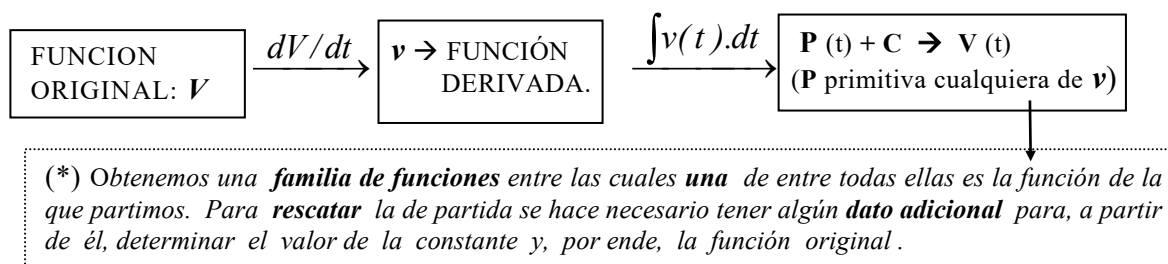
• Aquí apreciamos el rol de la cte de integración C , que es otra incógnita del problema y tan importante que si no hay algún dato que permita calcularla, no podemos resolver el problema.

En este caso, tenemos ese dato: $V(0) = 6$.

$$\text{Así : } V(t) = t^3 + C \Rightarrow V(0) = 0 + C \Rightarrow C = 6.$$

Finalmente obtenemos V : $V(t) = t^3 + 6$ y hallamos t_f : $V(t) = 70 \Rightarrow t^3 + 6 = 70 \Rightarrow t = 4 \Rightarrow$ el tanque tarda **4 hs.** en llenarse.

Observamos así que al derivar se *pierden* datos (se pierde V_0 , lo que es consistente con la realidad pues la velocidad de entrada del agua *no depende* del volumen inicial). Y así, este hecho que por un lado *valida el modelo*, por otro, ocasiona un problema a la hora de *reconstruir* V a partir de su derivada v .



En este punto resulta conveniente detenerse y reflexionar acerca de los conceptos vistos.

❶ Integral e Integral Indefinida son dos conceptos distintos.

(*) La integral, $\int_a^b f(x) \cdot dx$, se calcula sobre un intervalo y su resultado es **un número**.

(*) La integral indefinida, $\int f(x) dx$, refiere al cálculo de primitivas de f y su resultado es un **conjunto de funciones**: $\int f(x) dx = P(x) + C \quad / \quad P'(x) = f(x)$

(*) La conexión entre ellas se establece en el **2ºTFCI** (regla de Barrow).

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = P(x) \Big|_a^b \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x) \cdot dx = \left\langle \int f(t) dt \right\rangle \Big|_a^b$$

❷ La regla de Barrow,

¿resuelve el problema del cálculo de la integral para toda función f ?

Ya hemos dicho que no, pues **no siempre existe primitiva “elemental” de f** .

Resulta claro entonces que si no existe primitiva elemental, volvemos a foja cero ya que no podemos expresar la función integral a través de una “**fórmula elemental**”, obviar así el cálculo del límite de sumas. Cabe aclarar que cuando decimos que no existe primitiva elemental, ello no obedece al hecho de que no se conoce un método para hallarla, sino a que tal método no existe por razones intrínsecas a la naturaleza misma de la función.

Ej: la función $f(x) = e^{x^2}$ no admite primitiva elemental; o sea, no existe $P_{(elem.)} / P' = f$
Luego, y por ej.; dada $\int_0^3 e^{x^2} dx$ no existe $P_{(elemental)} / \int_0^3 e^{x^2} dx = P(3) - P(0)$

→ ¿Implica esto que la $\int_0^3 e^{x^2} dx$ **no existe**?

→ No, $f(x) = e^{x^2}$ es continua, por ende integrable. O sea, $\int_0^3 e^{x^2} dx = L \in \mathbb{R}$.

Lo que no existe es un método sencillo para calcular “L”

Lo mismo pasa con otras funciones como por ejemplo: $\text{sen}(x^2)$; $\frac{e^x}{x}$; $\frac{\text{sen} x}{x}$

¿Cómo evaluamos la integral en el caso que no existe primitiva elemental?

En este caso no podemos dar el valor “*exacto*” de la integral pero podemos dar “*estimaciones*” del mismo tan buenas como queramos. Y podemos hacer esto de distintas formas:

• **Acudiendo a la definición de integral:**

Por definición la integral es el “límite de Sumas de Riemann”.

Si por alguna propiedad de la función integrando podemos asegurar que el límite existe sabemos entonces que las “Sumas de Riemann” se acercan tanto como quieran a dicho valor. Luego, dichas sumas proporcionan un valioso instrumento para calcular valores “aproximados” de la integral; valores que serán tanto mejores cuanto mayor sea “n”, la cantidad de sumandos que se tomen.

$$\int_0^3 e^{x^2} dx = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n e^{c_i^2} \cdot \Delta x_i \Rightarrow \int_0^3 e^{x^2} dx \approx \sum_{i=1}^n e^{c_i^2} \cdot \Delta x_i$$

• **Aproximando la función por otra función “integrable” (polinomios de Taylor)**

O sea, otra forma de obtener un valor aproximar de la integral es a partir de:

1) aproximar primero la función integrando f por un conveniente polinomio de Taylor,

$$f(x) = e^{x^2} \xrightarrow{\text{pol. de Taylor}} p_4(x) = 1 + x^2 + x^4/2$$

$$e^{x^2} \approx 1 + x^2 + x^4/2$$

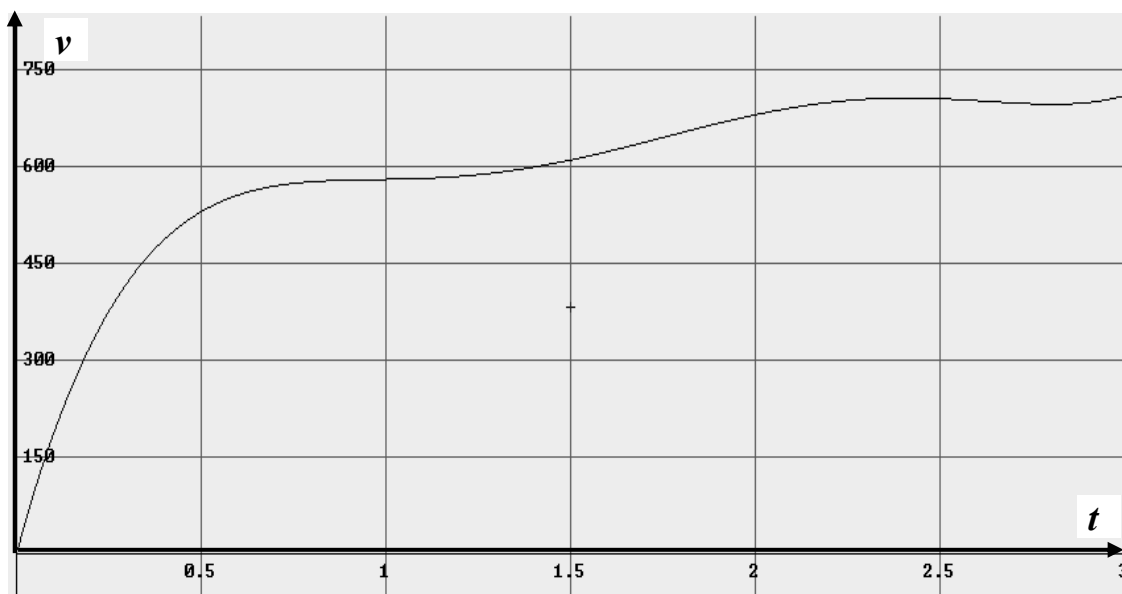
2) integrar luego el polinomio de Taylor.

$$\int_0^3 e^{x^2} dx \approx \int_0^3 (1 + x^2 + x^4/2) \cdot dx = \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} \right) \Big|_0^3 = 36,3$$

❸ Evidentemente tampoco podremos utilizar la Regla de Barrow cuando la función integrando venga dada por un gráfico o una tabla de valores. En estos casos, lo único que podemos hacer es dar aproximaciones de la integral, y hacer esto a través de “Sumas de Riemann” convenientemente construidas a partir de los datos que se tengan.

Ejemplo:

La gráfica adjunta muestra el registro de la tasa de “disolución” (en mg/hs.) de un soluto en un solvente, durante las 3 primeras horas de puestas ambos en contacto.



Se pide: hallar una aproximación de la masa disuelta al cabo de las 3 hs .

→ **función del proceso:** $m = \text{masa de soluto disuelta al instante "t"}$.
 $m = m(t)$

→ **dato :** gráf. v ; $v = \text{velocidad de disolución del soluto en el solvente}$.
 $v = m'(t)$

→ **incógnita:** $\Delta m = \text{"variación de masa" en el solvente, en 3 hs.}$
 $\Delta m = m(3) - m(0)$

→ **resolución:** $\Delta m = \int_0^3 m'(t).dt$

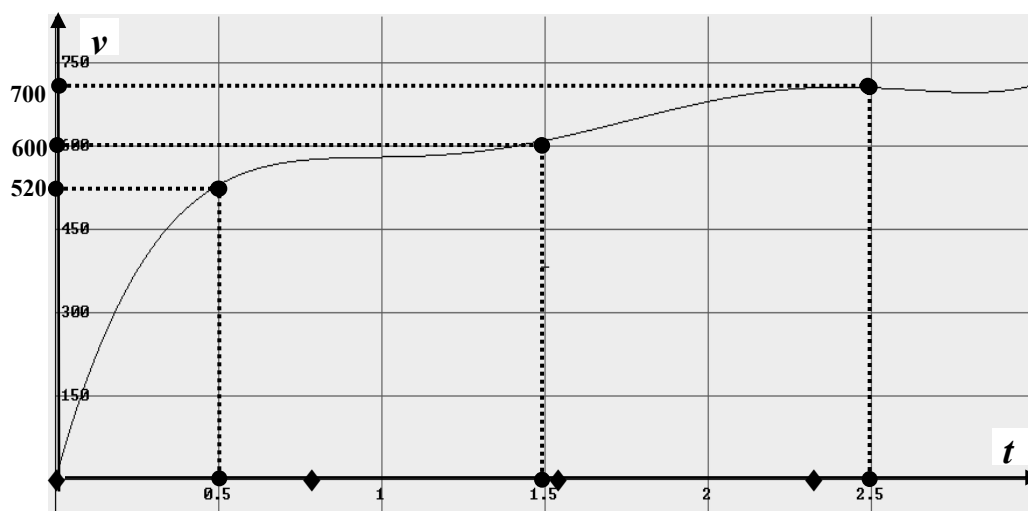
$$\Delta m = \int_0^3 v(t).dt \approx \sum_{i=1}^3 v(c_i) \cdot \Delta t_i$$

- **Partición del $[0;3]$:** $\mathcal{P} = \{0 ; 1; 2; 3\}$; $\Delta t_i = 1$
- **Selección de puntos compatible con $\mathcal{P}$:** $Q = \{c_1=0.5 ; c_2=1.5; c_3=2.5\}$
- **Cálculo de la aproximación *TOTAL*:** $\sum_{i=1}^3 v(c_i) \cdot \Delta t_i$

$$\sum_{i=1}^3 v(c_i) \cdot \Delta t_i = \sum_{i=1}^3 v(c_i) = v(0.5) + v(1.5) + v(2.5)$$

$$\approx 520 + 600 + 700 = 1820$$

→ **Rta:** la masa disuelta al cabo de las 3 hs es de, aproximadamente, **1820 mg.**



9.14 Apéndice

Cálculo, por el método de exhaustión, del área de T, trapecioide determinado por $f(x) = x^2$ en $I = [0; 1]$.

1• Comenzamos calculando para $n = 4$.

2• Seguimos con $n = 8$; 16 ;;

3• Para cada n , tomamos: $\Delta x_i = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$, $\forall i$

4 • Construimos Sumas de Riemann (Inferior y Superior):

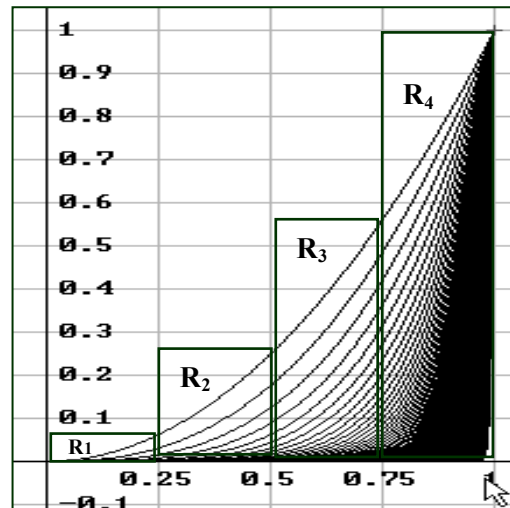
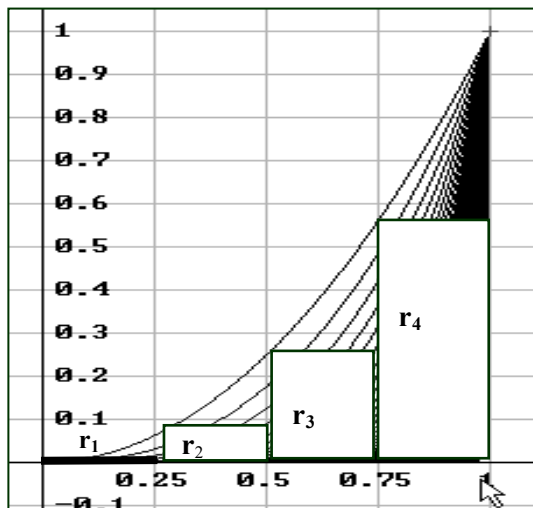
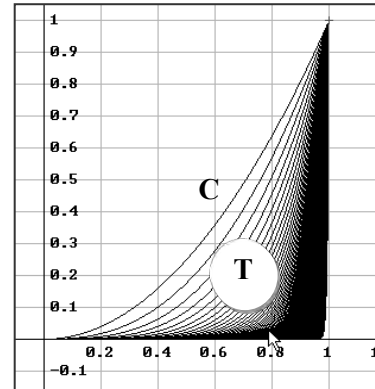
* SR(*inf*) $\rightarrow c_i \in I_i$ / $f(c_i) = m_i = \text{mínimo de } f \text{ en } I_i \rightarrow \text{altura del } r_i$

$$r_{[n]} = \bigcup_{i=1}^n r_i \text{ (región escalonada inferior); } a(r_i) = m_i \times \frac{1}{n}$$

* SR(*sup*) $\rightarrow c_i \in I_i$ / $f(c_i) = M_i = \text{máximo de } f \text{ en } I_i \rightarrow \text{altura del } R_i$

$$R_{[n]} = \bigcup_{i=1}^n R_i \text{ (región escalonada superior); } a(R_i) = M_i \times \frac{1}{n}$$

$\triangleright [n=4] \rightarrow 4I_i$; $\Delta x_i = 1/4$; $x_i = x_{i-1} + 1/4$; $x_0 = 0 \Rightarrow P = \{x_0=0; 1/4; 2/4; 3/4; x_4=1\}$



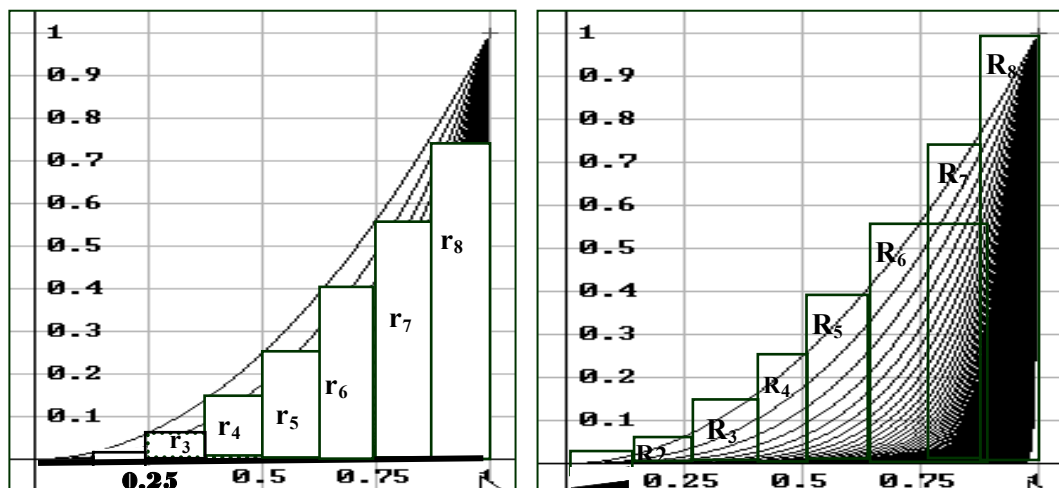
$r_{[4]}$ = región escalonada inferior ($n = 4$)

$$a r_{[4]} = \sum_{i=1}^4 a(r_i) = \sum_{i=1}^4 m_i \cdot \frac{1}{4} = 0.22$$

$R_{[4]}$ = región escalonada superior

$$a R_{[4]} = \sum_{i=1}^4 a(R_i) = \sum_{i=1}^4 M_i \cdot \frac{1}{4} = 0.47$$

➤ $[n=8] \rightarrow 8I_i$; $\Delta x_i = 1/8 \Rightarrow x_i = x_{i-1} + 1/8 \Rightarrow P = \{x_0 \equiv 0; 1/8; 2/8; 3/8; \dots; x_8 \equiv 1\}$.



$r_{[8]}$ = región escalonada inferior ($n = 8$) $R_{[8]}$ = región escalonada superior

$$a r_{[8]} = \sum_{i=1}^8 a(r_i) = 0.27$$

$$a R_{[8]} = \sum_{i=1}^8 a(R_i) = 0.39$$

➤ En ambos casos ($n = 4; 8$) vemos que: $r_{[n]} \subseteq T \subseteq R_{[n]}$

➤ que, si T fuera “medible”: $a r_{[n]} \leq a(T) \leq a R_{[n]}$.

➤ Vamos entonces al *4to* y *5to paso* del proceso; es decir, a ordenar el cálculo de modo que si existe algún “patrón” en la formación de los términos de la sucesión, este se haga “visible”.

Repetimos el proceso tanto como sea necesario hasta hallar un *patrón* de formación

n	Δx_i	$a r_{[n]} = \sum_{i=1}^n \left(m_i \times \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n m_i \leq$	$a(T)$	$\leq a R_{[n]} = \sum_{i=1}^n \left(M_i \times \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n M_i$
4	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \cdot [(1/4)^2 + (2/4)^2 + (3/4)^2]$ $(\frac{1}{4})^3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2) = \mathbf{0.22} \leq$	$a(T)$	$\leq \mathbf{0.46} = (\frac{1}{4})^3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2)$
8	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8} \cdot [(1/8)^2 + (2/8)^2 + \dots + (7/8)^2]$ $(\frac{1}{8})^3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 7^2) = \mathbf{0.27} \leq$	$a(T)$	$\leq \mathbf{0.39} = (\frac{1}{8})^3 \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + 7^2 + 8^2)$
16	$\frac{1}{16}$	$\dots$ $(\frac{1}{16})^3 \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + 15^2) = \mathbf{0.30} \leq$	$a(T)$	$\leq \mathbf{0.34} = (\frac{1}{16})^3 \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + 15^2 + 16^2)$
		$\dots$		$\dots$
n	$\frac{1}{n}$	$\underbrace{\left(\frac{1}{n} \right) \cdot \left(\left(\frac{1}{n} \right)^2 + \left(\frac{2}{n} \right)^2 + \dots + \left(\frac{n-1}{n} \right)^2 \right)}_{\left(\frac{1}{n} \right)^3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2)}$ $\left(\frac{1}{n} \right)^3 \cdot \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6} (*) \leq$	$a(T)$	$\underbrace{\left(\frac{1}{n} \right) \cdot \left(\left(\frac{1}{n} \right)^2 + \dots + \left(\frac{n-1}{n} \right)^2 + \left(\frac{n}{n} \right)^2 \right)}_{\left(\frac{1}{n} \right)^3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2)}$ $\left(\frac{1}{n} \right)^3 \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} (*)$

(*) resultado obtenido al aplicar la siguiente fórmula:
 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k \cdot (k+1) \cdot (2k+1)}{6}$

➤ El trabajo realizado permite:

a) **Expresar** el área de cada región por medio de una “*fórmula elemental*”:

$$* \text{ área región escalonada inferior } \rightarrow a r_{[n]} = \left(\frac{1}{n} \right)^3 \cdot \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6}$$

$$* \text{ área región escalonada superior } \rightarrow a R_{[n]} = \left(\frac{1}{n} \right)^3 \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

b) **Observar** que se generan *dos funciones*, $a(n) = a r_{[n]}$ y $A(n) = a R_{[n]}$; ambas con dominio en los naturales.

Al conjunto imagen de una función con dominio en $\mathbf{N}$, se lo llama **sucesión**; así, vemos que al variar n , con $n \rightarrow +\infty$, se originan dos *sucesiones*:

* la correspondiente a las áreas de las regiones escalonadas inferiores: $\{ a r_{[n]} \}_{n \in \mathbf{N}}$

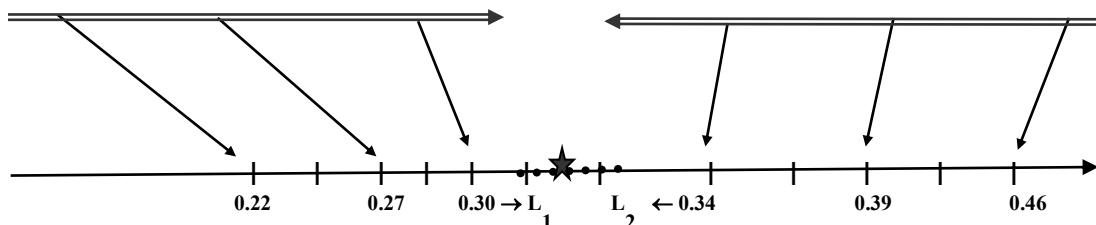
* la correspondiente a las áreas de las regiones escalonadas superiores: $\{ a R_{[n]} \}_{n \in \mathbf{N}}$

c) **Comprobar** que al afinarse la partición la sucesión dada por $\{a r_{[n]}\}_{n \in \mathbb{N}}$, *crece*; mientras que la determinada por $\{a R_{[n]}\}_{n \in \mathbb{N}}$, *decrece*.

Además, para todo n siempre resulta $a r_{[n]}$ menor que $a R_{[n]}$.

$$a r_{[4]} \leq \dots \leq a r_{[8]} \leq \dots \leq a r_{[16]} \leq \dots \leq a R_{[16]} \leq \dots \leq a R_{[8]} \leq \dots \leq a R_{[4]}$$

$$0.22 \leq \dots \leq 0.27 \leq \dots \leq 0.30 \leq \dots \leq 0.34 \leq \dots \leq 0.39 \leq \dots \leq 0.46$$



Observaciones:

Se puede probar que $a r_{[n]}$ está *acotada superiormente* y que $a R_{[n]}$ está *acotada inferiormente*; que esto implica (según un resultado básico del Cálculo) que ambas tienen límite para $n \rightarrow \infty$. Así:

- para $n \rightarrow \infty$; $a r_{[n]} \rightarrow L_1$
- para $n \rightarrow \infty$; $a R_{[n]} \rightarrow L_2$

Luego:

$\begin{aligned} \text{si } L_1 = L_2 = L &\Rightarrow T \text{ es medible y } a(T) = L \\ \text{si } L_1 \neq L_2 &\Rightarrow T \text{ no es medible, no existe } a(T) \end{aligned}$

En el ejemplo tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a r_{[n]} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{n} \right)^3 \cdot \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{6} \cdot \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{n^3} \right] = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a R_{[n]} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{n} \right)^3 \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{6} \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{n^3} \right] = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

O sea, $L_1 = L_2 = \frac{1}{3}$.

Conclusión: T es medible y $a(T) = \frac{1}{3}$

9.15 Actividades

	► Dom. $f = [a ; b] = I$ ► $P \rightarrow$ partición de I; $P = \{x_0 \equiv a; x_1; x_2; x_3; \dots; x_i; \dots; x_n \equiv b\}$ ► $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \rightarrow$ amplitud del subintervalo $I_i = [x_{i-1}; x_i]$. ► $c_i \rightarrow$ punto del subintervalo I_i ► $Q \rightarrow$ selección de ptos compatibles con P; $Q = \{c_1; c_2; c_3; \dots; c_i; \dots; c_n\}$ ► $S(f; P; Q) \rightarrow$ SUMA de RIEMANN; $S(f; P; Q) = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$
INTEGRAL (de una función en un intervalo)	Definición: $\int_a^b f(x) dx = \lim_{ P \rightarrow 0} S(f; P; Q)$ (cuando el límite existe)

1) Para la función f adjunta se pide:

a) dadas P y Q en $[0 ; 3]$;

$$P = \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$$

$$Q = \{\frac{1}{2} ; \frac{3}{2} ; \frac{5}{2}\}.$$

controlar que Q sea compatible con P y, leyendo del graf., calcular $S(f; P; Q)$.

Indicar que representa el valor obtenido.

b) dar una aproximación por defecto de

$$I = \int_0^3 f(x) dx, \text{ tomando } n=6.$$

*Sug: tomar c_i tal que $f(c_i) \approx \min f$ en I_i

c) dar una aproximación por exceso de

$$I = \int_0^3 f(x) dx, \text{ tomando } n=6$$

*Sug: tomar c_i tal que $f(c_i) \approx \max f$ en I_i

d) para $I = \int_0^3 f(x) dx$;

i) dar una cota inferior y otra superior de I .

ii) si $I^* = \int_0^3 f(t) dt$: ¿es $I^* = I$?

porqué?

iii) si $I^{**} = \int_0^3 f(t) dx$: ¿es $I^{**} = I$?; porqué?. (Sug: calcular I^{**} aplicando prop.s de integ.s)

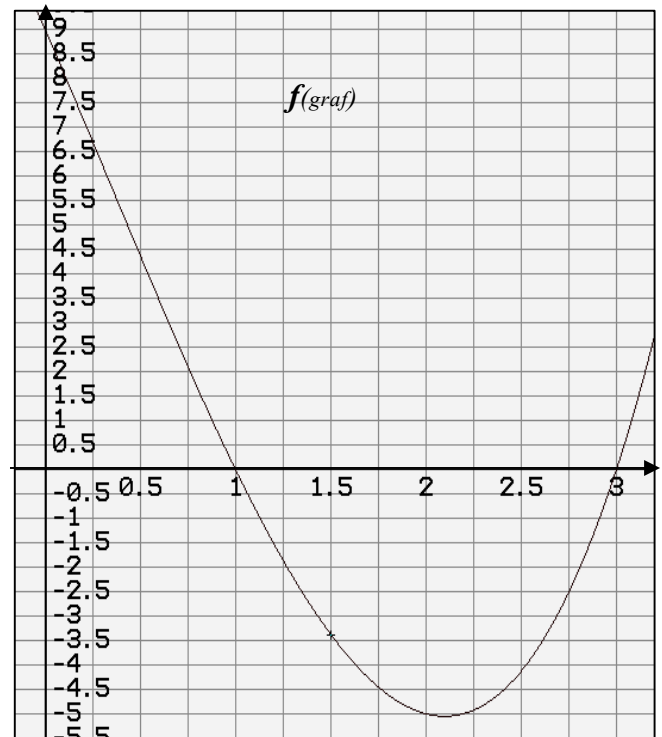
e) En el proceso de llenado/vaciado de un tanque indicamos con V al volumen de agua en el tanque y con v , a la velocidad de variación de V en el tanque. ($[t] = \text{hs}$; $[V] = \text{ls.}$; $[v] = \text{ls./h}$). Si $V = V(t)$, $V_0 = 10$ y $v = f_{(\text{graf})}$, entonces:

i) $f_{(\text{graf})}$, ¿es el gráfico de $V'(t)$?; V , ¿es una primitiva de v ?; porqué?

ii) ¿ $\Delta V_{(3 \text{ hs})} = V(3) - V(0)$? Aquí, ¿se puede calcular $\Delta V_{(3)}$ con esta diferencia?; ¿porqué?

iii) Dar una estimación del “resultado ó efecto total” del proceso de cambio dentro del tanque al cabo de 3 horas de haberse iniciado el mismo.

iv) Si me informan que $\int_0^3 f(t) dt = -2,2$, ¿puedo calcular $V(3)$?; ¿es $V(3) = 7,75$?



f) En el *proceso* relativo al movimiento de una partícula P sobre una recta, indicamos con $x = \text{posición de P sobre la recta}$ y $v = \text{velocidad de P}$. ([x]= ms., [t]= hs.)

Si $x = x(t)$, $x_0 = 1$ y $v = f_{(graf)}$, entonces :

i) $f_{(graf)}$, ¿es el gráfico de $x'(t)$? ; x , ¿es una primitiva de v ?, porqué?

ii) ¿ $\Delta x_{(3 \text{ hs})} = x(3) - x(0)$? Aquí, ¿se puede calcular $\Delta x_{(3)}$ con esta diferencia?; ¿porqué?

iii) dar una estimación del “*desplazamiento total de P*” al cabo de 3 horas de haberse iniciado el movimiento.

iv) si me informan que $\int_0^3 f(t) dt = -2,25$; ¿puedo calcular $x(3)$?, ¿es $x(3) = -1,25$?

v) Realizar un bosquejo de la trayectoria de P durante las 3 primeras horas de movimiento.

g) Si me informan que $P(t) = \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} - 9\frac{t^2}{2} + 9t$ es una primitiva de $f_{(graf)}$, explicar porque este dato permite:

i) dar la ley de f por medio una fórmula. Obtenerla.

ii) calcular con exactitud el valor de $I = \int_0^3 f(t) dt$. Calcularlo.

iii) dar la ley de $V(t)$ por una fórmula. Darla.

iv) dar la ley de $x(t)$ por una fórmula. Darla.

<u>Primitiva</u> (de una función en un intervalo)	<u>Definición:</u> dada f definida en $[a ; b]$; P es una primitiva de f en $[a ; b] \Leftrightarrow P'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a ; b]$. <u>Las primitivas son $\rightarrow$ una herramienta para el cálculo de integrales.</u> dada f <u>continua en</u> $[a;b]$, si f <u>admite primitiva elemental</u> P en $[a;b]$, entonces $\int_a^b f(x) dx = P(b) - P(a) \text{ (Regla de Barrow).}$ <u>Las primitivas son $\rightarrow$ una herramienta para el cálculo del resultado o efecto total de un proceso de cambio a $v \neq cte$</u>
---	---

- 2) a) Cada una de las funciones “g” de la columna (II) es “*primitiva*” de alguna función “h” de la columna (I). Se pide unir cada función de la columna (I) con su primitiva.

(I)	(II)
1) $h(x) = 3 \operatorname{sen} x - \frac{\cos x}{2}$	a) $g(x) = 4 e^{2x}$
2) $h(x) = \frac{1}{2} + \operatorname{sen} x \cdot \cos x$	b) $g(x) = -(3 \cos x + \frac{1}{2} \operatorname{sen} x)$
3) $h(x) = \frac{x-2}{x-3}$	c) $g(x) = \ln(x-3) - \ln(x-2) + 5$
4) $h(x) = 8 e^{2x}$	d) $g(x) = 3 \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \cos x$
5) $h(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$	e) $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \cdot \cos(2x) + 3$
6) $h(x) = 3 \cos x - \frac{\operatorname{sen} x}{2}$	f) $g(x) = \ln(x-3) + x + \pi$

- b) En cada caso que esto sea posible, calcular $\int_0^\pi h(x) dx$ aplicando la Regla de Barrow.

* Conocer o saber obtener *primitivas* de una función f continua en un intervalo $[a;b]$, permite transformar el cálculo de *la integral*, $\int_a^b f(x) dx$, en una simple resta (regla de Barrow). En lo que sigue, y dado la utilidad de esta herramienta, trabajamos sobre el concepto de “primitiva”

- 3) Verificar por el método más simple las siguientes afirmaciones. Dar luego tres primitivas de f .

a) $P(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \cdot \operatorname{sen}(2x) + 3$ es una primitiva de $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$, $\forall x \in [a;b]$.

b) $P(x) = \ln(1 + \frac{1}{2-x})$ es una primitiva de $f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$, $\forall x \in [a;b]$, tal que $2, 3 \notin [a;b]$.

c) $P(x) = \ln|x|$ es una primitiva de $f(x) = \frac{1}{x}$; $\forall x \in [a;b]$, tal que $0 \notin [a;b]$.

d) $P(x) = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}(\frac{x}{a})$ es una primitiva de $f(x) = \frac{1}{a^2 + x^2}$, $\forall x \in [a;b]$ y $\forall a \neq 0$.

e) $P(x) = \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsen}(\frac{x}{a}) + \frac{1}{2}(x \cdot \sqrt{a^2 - x^2})$ es una primitiva de $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$,

$$\forall a \neq 0 \text{ y } \forall x \in [a;b] \subseteq [-|a|; |a|]$$

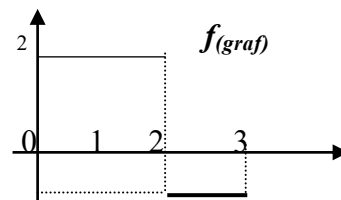
- 4) Hallar por prueba y error la primitiva F de f que satisface la condición que se indica. Verificar.

a) $f(x) = 5x^4 - 3x^2$; $F(0) = 4$

b) $f(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2}$; $F(1) = 0$

c) $f(t) = e^t + \sin t$; $F(0) = -2$

d) $f = f_{(graf)}$ adjunta ; $F(0) = 1$
 F continua en $[0; 3]$.



5) Hallar por prueba y error g si se sabe que:

a) $g'(x) = \frac{1}{2} \sqrt{x} \cdot x^{-1}$; $g(4) = 5$

b) $g'(x) = 1/x$; $x < 0$; $g(-1) = 5$

c) $g'(x) = x^2 + x + \frac{1}{6}$; $g(1) = 1$

d) $g''(x) = 2x + 1$; $g'(0) = \frac{1}{6}$ y $g(1) = 0$

e) $x = g(t)$ y g es la función de posición de una partícula que se mueve en línea recta con aceleración constante, $a = 5$ (m/seg²), velocidad inicial v_o y posición inicial x_o .

f) $x = g(t)$ y g es la función de posición de una partícula que se mueve en línea recta con aceleración $a = t + 5$ (m/seg²), velocidad inicial $v_o = -6$ (m/seg) y posición inicial $x_o = 9$ (ms.)

* CÁLCULO de PRIMITIVAS de $f \rightarrow P / P' = f$

En lo que sigue procedemos a sistematizar el cálculo de primitivas. Para ello vamos a:

1º) Construir una tabla de primitivas “inmediatas” (aquellas que se obtienen por “prueba y error”)

2º) Estudiar métodos para obtener primitivas, cuando las mismas no sean “inmediatas”. Estos son:

I) Descomposición

II) Sustitución: (II-a) Directa; (II-b) Inversa.

III) Integración por Partes

IV) Descomposición en Fracciones Simples

<u>INTEGRAL “Indefinida”</u>	<u>Definición:</u> $\int f(x) dx = P(x) + C \quad / \quad C \in \mathbf{R}, \quad P \text{ primitiva de } f.$ (o sea, <u>símbolo</u> usado para indicar <u>todas</u> las <u>primitivas</u> de f)
------------------------------	---

TABLA de INTEGRALES INDEFINIDAS “Inmediatas”

* Completar la siguiente “tabla” procediendo por “prueba y error”:

$f(x)$	$P(x)$	$\int f(x) dx = P(x) + C$
1	(x)	$\int dx = x + C$
$x^\alpha; \alpha \neq -1$		
$\frac{1}{x}$		
e^x		
$a^x (a > 0)$		
$\sin x$		
$\cos x$		
$\frac{1}{\cos^2 x}$		
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		
$\frac{1}{1+x^2}$	(arc tg x)	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \text{arc tg } x + C$

Método I: Descomposición $\rightarrow \int [a.f(x) + b.g(x)] dx = a \int f(x).dx + b \int g(x).dx$

6) Resolver usando el método de descomposición y la tabla de integrales inmediatas.

a) $\int (5x^4 + 12x^2) dx$

b) $\int [(x-2)^2 + 4x - 3] dx$

c) $\int \frac{x^3 + x^2 + x - 3}{x^2} . dx$

d) $\int \left[\sqrt[5]{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x} \right] . dx$

e) $\int \sqrt{x} . (x - \sqrt{x} + 1) . dx$

f) $\int \left(3 \sin x - \frac{\cos x}{2} \right) . dx$

g) $\int \frac{3x \cdot \sin^2 x - (1 - \cos^2 x)}{\sin^2 x} . dx$

i) $\int (1 + \text{tg}^2 x) dx$

j) $\int \frac{(1 - \cos x) \cdot (1 + \cos x)}{\sin x} . dx$

k) $\int \frac{\sqrt{x} - x^3 \cdot e^x + 2 \cdot x + e}{x^3} . dx$

l) $\int e^x (1 + 2e^{-x}) . dx$

m) $\int \frac{x^2 + t^2}{x^2} . dx$

n) $\int \frac{x^2 + t^2}{x^2} . dt$

o) $\int \frac{\sin x}{x} \cdot \left(x + \frac{t \cdot x}{\sin x} \right) . dx$

Método II: Sustitución**II-a) Directa:**

$$\int f(g(x))g'(x)dx \underset{\substack{g(x)=u \\ g'(x)dx=du}}{=} \int f(u)du \underset{\substack{P \text{ tal que} \\ P'(u)=f(u)}}{=} P(u)+C = P(g(x))+C$$

7) Calcular :

7.1 a) $\int \frac{1}{x+3} dx$

b) $\int \frac{1}{x-5} dx$

7.2 a) $\int \frac{1}{2x+3} dx$

b) $\int \frac{1}{-4x-5} dx$

7.3 a) $\int \frac{2x+5}{x^2+5x+1} dx$

b) $\int \frac{3x^2+4}{x^3+4x} dx$

7.4 a) $\int \frac{1}{1+\frac{x^2}{9}} dx$

b) $\int \frac{1}{25+x^2} dx$

7.5 a) $\int 2 \cdot e^{2 \cdot x+3} dx$

b) $\int -5 \cdot e^{l-5x} \cdot dx$

7.6 a) $\int e^{\text{sen} \cdot x} \cos x dx$

b) $\int e^{x^2+3} \cdot 2x \cdot dx$

7.7 a) $\int \cos(x^3) \cdot 3x^2 dx$

b) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} \cdot dx$

7.8 a) $\int (x^2+3x)^5 (2x+3) dx$

b) $\int \frac{(\ln x)^2}{x} \cdot dx$

7.9 a) $\int \frac{5 \cdot x^4 + 12x^3}{x^5 + 3x^4 - 5} \cdot dx$

b) $\int \frac{1}{x \cdot \ln x} \cdot dx$

Tabla Integrales “Semi - Inmediatas”

$\int \frac{1}{x+b} dx =$

$\int \frac{1}{ax+b} dx =$

 p : polinomio

$\int \frac{p'(x)}{p(x)} dx =$

$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx =$

$\int e^{m \cdot x+h} \cdot dx =$

$\int e^{g(x)} \cdot g'(x) \cdot dx =$

$\int \cos(g(x)) \cdot g'(x) \cdot dx =$

$\int (g(x))^\alpha \cdot g'(x) \cdot dx =$

$\int \frac{g'(x)}{g(x)} \cdot dx =$

8) A) Calcular usando el método de sustitución directa o tablas de integrales (inmed. ó semi-inmediata). Verificar los resultados obtenidos mediante derivación.

a) $\int (x^2+6x-2)^{20} (x+3) dx$

h) $\int \frac{e^x}{1+e^x} \cdot dx$

b) $\int (2x-4)^{-5} dx$

i) $\int \frac{x^5+4x^3+x}{x^6+6x^4+3x^2+2} \cdot dx$

c) $\int e^{-5x} \cdot dx$

j) $\int \cos^2 x \cdot \text{sen} x dx$

d) $\int e^{x^3} \cdot x^2 \cdot dx$

k) $\int \cos^3 x \cdot dx$

e) $\int x e^{l-5x^2} \cdot dx$

l) $\int \frac{1-\ln x}{x \cdot \ln x} \cdot dx$

f) $\int \cos x \operatorname{sen} x \, dx$

m) $\int \operatorname{sen}^2 x \, dx$ (aplicar: $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x)$)

g) $\int \sqrt{9-3x} \, dx$

n) $\int [\cos(2x) + x \cdot \cos(x^2) + \cos(x-2)] dx$

B) Para las f del ítem (A) calcular $\int_0^\pi f(x) \cdot dx$ aplicando la *Regla de Barrow*, en cada caso que ello sea posible.

C) El “método de sustitución” consiste esencialmente en un “cambio de variable”. Así, para calcular una **integral** (*definida*) con este método, no es necesario volver a la variable original.

Verificar la validez de la siguiente fórmula para el cambio de variable en la **integral** (*definida*) suponiendo que se conoce P , una primitiva de f .

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) \cdot dx \underset{g(x)=u}{=} \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \cdot du = P(g(b)) - P(g(a)).$$

* Calcular de esta forma: $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cos x \cdot dx$; $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(2x - \pi) \cdot dx$;
 $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos u}{\operatorname{sen}^2 u - 4 \operatorname{sen} u + 4} \cdot du$; $\int_0^1 \frac{x^5 + 4x^3 + x}{x^6 + 6x^4 + 3x^2 + 2} \cdot dx$.

D) Verificar que las siguientes integrales no se pueden calcular por sustitución directa.

$$\int \sqrt{4-x^2} \, dx \quad ; \quad \int \frac{1}{x^2-1} \cdot dx \quad ; \quad \int \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot dx \quad ; \quad \int e^{x^2} \, dx$$

Método II: Sustitución**II-b) Inversa:**

$$\int f(x).dx \underset{\substack{x=k(t) \\ dx=k'(t)dt}}{=} \int f(k(t))k'(t)dt \underset{\substack{P \text{ tal que} \\ P'=(f \circ k).k'}}{=} P(t)+C=P(k^{-1}(x))+C$$

* ¿Qué condiciones deben darse para poder realizar una “sustitución inversa”?

9) A) Establecer un intervalo donde la integral indicada exista. Calcular luego la integral usando el método de sustitución inversa. Verificar los resultados obtenidos mediante derivación.

a) $\int \sqrt{4-x^2} dx$; $x = 2 \sin t$ (dato : $\int \cos^2 t. dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin(2t)$)

b) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. dx$; $x = \sin t$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}. dx$; $x = 3 \sin t$

d) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}. dx$; $x = \sin t$ (dato : $\int \sin^2 t. dt = \frac{1}{2} t - \frac{1}{4} \sin(2t)$)

B) En este caso tampoco es necesario volver a la variable original para calcular la integral (‘definida’) aplicando Barrow ya que, supuesto que se conoce P , una primitiva de $(f \circ k) \cdot k'$ vale la siguiente fórmula para el cambio de variable por sustitución inversa ($x = k(t)$).

$$\int_a^b f(x).dx \underset{\substack{x=k(t) \\ \rightarrow t=k^{-1}(x) \\ c=k^{-1}(a) \\ d=k^{-1}(b)}}{=} \int_c^d f(k(t)).k'(t).dt = P(d) - P(c).$$

* Calcular de esta forma: $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}.dx$; $\int_0^{0,5} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.dx$; $\int_{-0,5}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.dx$

* Justificar la siguiente igualdad con un argumento “geométrico”:

$$\int_{-0,5}^{0,5} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.dx = 2. \int_0^{0,5} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.dx$$

C) Verificar que las siguientes integrales no se pueden calcular por sustitución (ni directa, ni inversa):

$$\int x \sin x dx ; \int \frac{1}{x^2-1}.dx ; \int \frac{\sin x}{x}.dx ; \int e^{x^2} dx$$

Método III: Integración por Partes $\int u.dv = u.v - \int v.du$

10) A) Calcular usando el método de descomposición y la tabla de integrales inmediatas ó semi-inmediata.

Verificar los resultados obtenidos mediante derivación

a) $\int x e^x dx$

b) $\int x^2 e^x dx$

c) $\int x e^{2x} dx$

d) $\int x \cdot \sin x dx$

e) $\int x^2 \cdot \cos x dx$

f) $\int x \cdot \cos^3 x dx$

g) $\int e^x \sin x dx$

h) $\int x \cdot \sqrt{x+4} dx$

p) $\int \cos^2 x dx$

q) $\int \sin^2 (x-1) dx$

r) $\int \cos(\ln x) dx$

s) $\int \ln x dx$

t) $\int x \cdot \ln^2 x dx$

u) $\int x^2 \cdot \ln x dx$

v) $\int \arcsen x dx$

w) $\int x \cdot \arctg x dx$

x) $\int \sqrt{x} \sen \sqrt{x} dx$ (sustituir: $x = t^2$)

B) Calcular $\int_0^\pi f(x).dx$ para f del item (A); en cada caso que se pueda aplicar la Regla de Barrow.

C) Verificar que las siguientes integrales no se pueden integrar “por partes”

$$\int \frac{1}{x^2-1}.dx ; \int \frac{\sen x}{x}.dx ; \int e^{x^2} dx$$

Método IV: para funciones racionales $\rightarrow \int f(x) dx$ con $f(x) = \frac{r(x)}{q(x)}$ ($r; q$ polinomios)

El método de **desarrollo en fracciones simples**, permite integrar cualquier función racional.

No estudiaremos este método en forma exhaustiva, pero profundizaremos lo suficiente para mostrar cómo cualquier función racional se puede integrar mediante *reducción* a las *fórmulas básicas*:

$$\int x^n .dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad (n \neq -1);$$

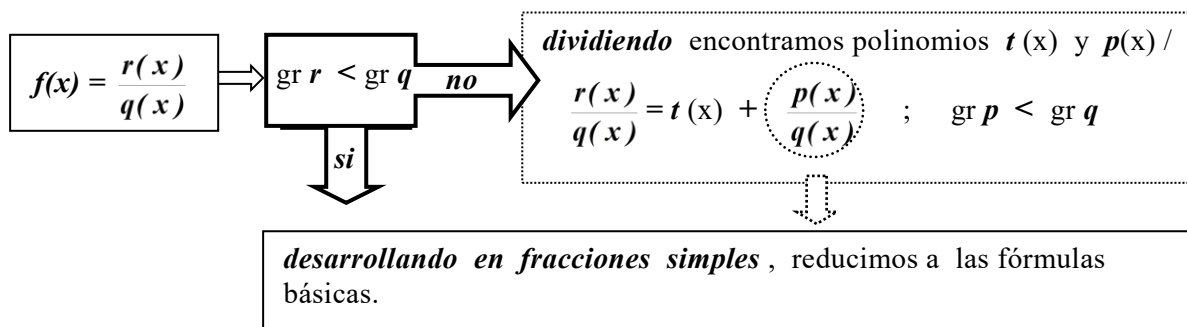
$$\int \frac{1}{x} .dx = \ln|x| + C;$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} .dx = \arctg x + C ;$$

$$\int \frac{1}{x^2-1} .dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$$

* Una función racional $\frac{p(x)}{q(x)}$ se dice “*propia*” si el grado de p es **menor** que el de q .

* Así, en la integración de funciones racionales, tenemos una primera cuestión a resolver:



Desarrollo en fracciones simples

Dada la función racional “propia” $\frac{p(x)}{q(x)}$ (gr $p < \text{gr } q$);

donde gr $q = n$ y q tiene m raíces reales y distintas ($m \leq n$), $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$; existen n números reales $A_1, A_2, \dots, A_n$, tal que:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{(x-x_1)} + \frac{A_2}{(x-x_2)} + \dots + \frac{a(x)}{c(x)} + \dots + \frac{A_n}{(x-x_m)}; \quad a(x): \text{ lineal}; \quad c(x): \text{ cuadrática}$$

* Luego, dada la función racional propia, *si hace falta*, realizamos su desarrollo en fracciones simples e integramos. Las integrales a la derecha del igual son o pueden ser reducidas a fórmulas básicas.

11) Calcular (gr $p < \text{gr } q$)

11.1) a) $\int \frac{1}{x+3} dx$ b) $\int \frac{1}{x-5} dx$

11.2) a) $\int \frac{x}{x+3} dx$ b) $\int \frac{x}{-4x+8} dx$

11.3) a) $\int \frac{2x+5}{x^2+5x+1} dx$ b) $\int \frac{3x^2+4}{x^3+4x} dx$

11.4) a) $\int \frac{1}{x^2+9} dx$ b) $\int \frac{1}{4x^2+16} dx$

11.5) a) $\int \frac{1}{x^2-1} dx$ b) $\int \frac{1}{x^2-9} dx$

11.6) a) $\int \frac{x^2+5x+36}{(x^2-4)(x^2-9)} dx$

Formas Básicas:

$I_1: \int \frac{1}{x+b} dx =$

$I_2: \int \frac{x}{ax+b} dx =$

$I_3: \int \frac{p'(x)}{p(x)} dx =$

$I_4: \int \frac{1}{x^2+a^2} dx =$

$I_5: \int \frac{1}{x^2-a^2} dx =$

$I_6: \int \frac{p(x)}{x^4+bx^3+cx^2+dx+e} dx$
(4 raíces reales $\neq s$)

11.7) a) $\int \frac{l}{(x-4)^3} \cdot dx$	b) $\int \frac{l}{(x+2)^2} \cdot dx$	$I_6 = \int \left[\frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \frac{A_3}{x-x_3} + \frac{A_4}{x-x_4} \right] \cdot dx$
11.8) a) $\int \frac{x^2 + l}{(x-2)(x-1)^3} \cdot dx$		$I_7 : \int \frac{l}{(x+a)^n} \cdot dx =$ ($n \neq 1$)
11.9) a) $\int \frac{l}{x^2 + 4x + 5} \cdot dx$ ($b^2 - 4ac < 0$)	b) $\int \frac{2x+5}{x^2 + 4x + 5} \cdot dx$	$I_8 : \int \frac{p(x)}{x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e} \cdot dx =$ (una raíz triple) $\int \left[\frac{A_1}{(x-x_1)^3} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \frac{A_3}{x-x_1} + \frac{A_4}{x-x_4} \right] \cdot dx$
11.10) a) $\int \frac{p(x) \cdot dx}{(x^2 + 4x + 5) \cdot (x-1)}$ ($b^2 - 4ac < 0$)		$I_9 : \int \frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c} \cdot dx$ $\alpha \neq 0$ $\alpha = 0$; completar cuadrados trab.alg. + I_3 $\int \frac{\beta}{(x+h)^2 \pm k} \cdot dx \rightarrow I_4 \text{ ó } I_5$
		$\int \frac{p(x) \cdot dx}{(ax^2 + bx + c) \cdot (x+d)} =$ $\int \left[\frac{A_1 \cdot x + A_2}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_3}{(x+d)} \right] \cdot dx$

12) A) Calcular usando el desarrollo en fracciones simples.

Verificar los resultados obtenidos mediante derivación

a) $\int \frac{x-3}{x^2 + 4x - 5} \cdot dx$

h) $\int \frac{2x^3}{x^2 - x - 2} \cdot dx$

b) $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 4}$

i) $\int \frac{2x^3 - 12x^2 + 23x - 17}{x^2 - 3x + 2} \cdot dx$

c) $\int \frac{dx}{2x^2 + 2x - 12}$

j) $\int \frac{6x}{(x-1)(x^2 + 1)} \cdot dx$

d) $\int \frac{3x^2 - 10x - 4}{x^3 - x^2 - 4x + 4} \cdot dx$

k) $\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 10}$

e) $\int \frac{5x-1}{x^3 - x^2} \cdot dx$

l) $\int \frac{(2x+3)dx}{x^2 + 6x + 10}$

f) $\int \frac{x^2 + 4}{(x-2)(x^2 - 4x + 4)} \cdot dx$

m) $\int \frac{x^3}{x^4 + 1} \cdot dx$

g) $\int \frac{x^2 + 3x - 2}{x^4 + x^3 - 5x^2 + 3x} \cdot dx$

n) $\int \frac{l}{x^4 - 16} \cdot dx$

B) Calcular $\int_0^1 f(x) \cdot dx$ para f del ítem (A); en cada caso que se pueda aplicar la Regla de Barrow.

C) Las siguientes integrales, ¿se pueden integrar usando el desarrollo en fracciones simples?

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx ; \quad \int e^{x^2} dx$$

..... y se terminaron los “métodos”.

¿Qué pasa con estas funciones?, ¿son integrables? Investigue esta cuestión.

13) Calcular $\int \operatorname{sen}^5 x dx$ usando la siguiente “fórmula de recurrencia”:

$$I_n = \int \operatorname{sen}^n x dx \Rightarrow I_n = \frac{-1}{n} \operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

14) Calcular $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$ usando la siguiente “fórmula de recurrencia”:

$$I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x} = \int \sec^n x dx \Rightarrow I_n = \frac{1}{n-1} \frac{\operatorname{sen}^x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

15) Calcular utilizando el método que más convenga:

a) $\int \sqrt{x} (x^2 + 1)^2 dx$

b) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\cos^3 x}} dx$

c) $\int \frac{x \operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

d) $\int \sqrt{2x+1} dx$

e) $\int \frac{x^2}{x^2+x-6} dx$

f) $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^2 x} dx$

g) $\int \frac{1+tg^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

h) $\int x^{-2} \operatorname{sen} \frac{1}{x} dx$

i) $\int \frac{dx}{x^3-x^2-x+1}$

j) $\int \frac{u^2 - x^2}{u^3} dx$

k) $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$

l) $\int \ln(3t - 2) \, dt$

m) $\int \operatorname{arcsen}(2x - 5) \, dx$

n) $\int \frac{t^4 - x^2}{t \, x} dt$

o) $\int \frac{2 \ln x - 3}{(1 + \ln^2 x)x} dx$

p) $\int \frac{dx}{4x^2 + 9}$

q) $\int \frac{x^3}{\sqrt[4]{x^4 - 1}} dx$

10—Aplicaciones de la Integral

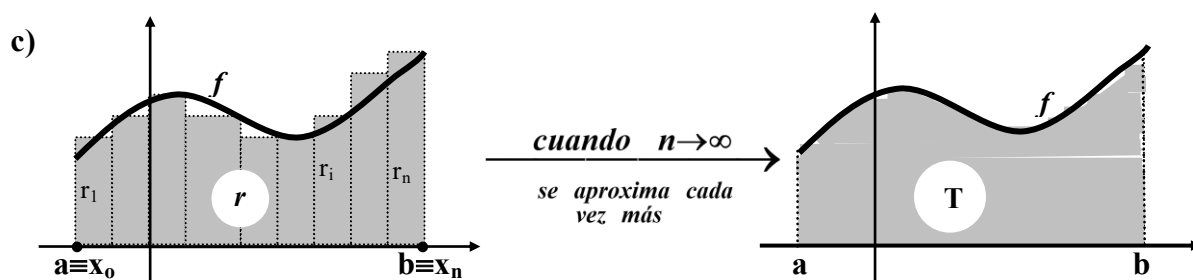
10.1 Problemas que resuelve la Integral: $\int_a^x f(t)dt$

La integral es una herramienta que permite resolver problemas de muy distinta naturaleza (físicos, biológicos, geométricos, etc...). Para estudiar esta cuestión resulta útil recordar que el proceso de integración admite tres “representaciones” distintas:

- a) *simbólica*,
- b) *verbal*,
- c) *gráfica*.

$$\text{a) } \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i \xrightarrow[\text{se aproxima cada vez más a}]{\text{cuando } n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cdot dx$$

b) el resultado “aproximado”
del cambio en $[a; b]$
ó
la suma de las áreas
de los rectángulos r_i ,
(área de r).
 $\xrightarrow[\text{se aproxima cada vez más}]{\text{cuando } n \rightarrow \infty}$ al “cambio total” en $[a; b]$.
al área T .
 T región bajo la *graf f (f def. positiva)*



El ítem (b) resume dos de los problemas que resuelve el cálculo integral: *cálculo del resultado ó efecto total de un proceso de cambio* y *cálculo del área de regiones con contornos curvos*.

Respecto al problema del área hasta ahora sólo hemos dado respuesta al caso particular de las regiones que llamamos “trapezoides”; o sea, las determinadas por una f “*definida positiva*”. Resta entonces resolver este problema para otro tipo de regiones planas; por ejemplo, aquellas determinadas por una función f *definida negativa* ($f(x) < 0, \forall x \in [a; b]$) o que *cambien de signo* en $[a; b]$.

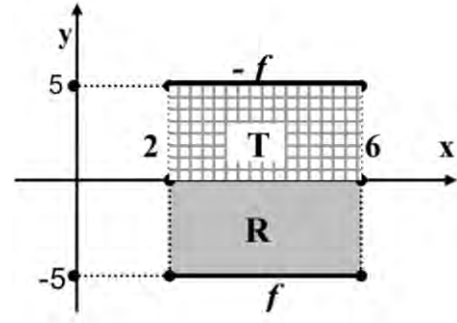
Ejemplo: dada $f(x) = -5$ con dominio en el intervalo $[2; 6]$, calcular el área de **R**, región determinada por la graf. f y el eje x .

Evidentemente, y por geometría elemental:

$$a(R) = \text{base} \times \text{altura} = 4 \times 5 = 20.$$

También por geometría elemental,

$$a(R) = a(T) \quad (T \text{ trapecioide determinado por } -f).$$



Por otro lado, $-f$ es *definida positiva* $\Rightarrow a(T) = \int_2^6 (-f(x)) \cdot dx = 5 \times (6 - 2) = 20$.

Conclusión: $a(R) = \int_2^6 (-f(x)) \cdot dx$

Si para $f(x) = -5$ calculamos $\int_2^6 f(x) \cdot dx$, tenemos que:

$$\int_2^6 f(x) \cdot dx = \int_2^6 (-5) \cdot dx = -5x \Big|_2^6 = -30 - (-10) = -20$$

Conclusiones:

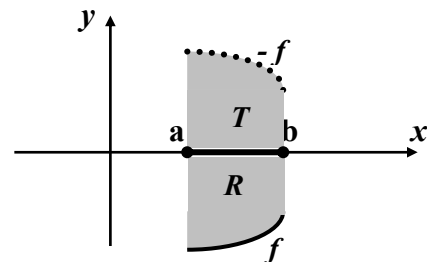
* si f es positiva en todo el intervalo *la integral da por resultado un número positivo.*

* si f es negativa en todo el intervalo *la integral da por resultado un número negativo.*

Así, para f negativa: $a(R) \neq \int_a^b f(x) \cdot dx$ (pues $a(R) > 0$ y la integral negativa).

⊗ f *definida negativa* en $[a,b]$; el **área de R**, región comprendida por la *graf. f* y el **eje x** se obtiene *integrando* $(-f)$, la función opuesta de f .

$$a(R) = a(T) = \int_a^b (-f(x)) \cdot dx.$$



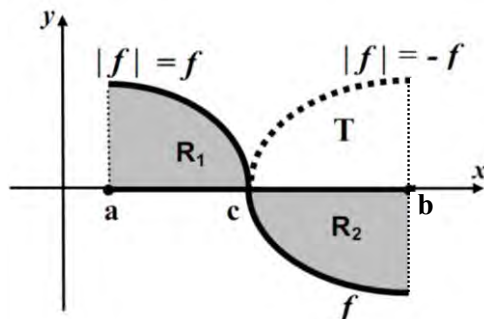
⊗ ***f* cambia de signo** en $[a, b]$; el **área de R** , región comprendida por la **graf. f** y el **eje x** se obtiene **subdividiendo el intervalo en cada punto donde f cambia de signo**; calculando las áreas de las regiones en cada subintervalo donde el signo **f permanece constante**; **sumándolas**.

O sea; $R = R_1 \cup R_2$

Área $R = \text{área}(R_1 \cup R_2) = \text{área } R_1 + \text{área } R_2$

Por lo visto: $a(R_1) = \int_a^c f(x) \cdot dx$

$$a(R_2) = a(T) = \int_c^b (-f(x)) \cdot dx$$



$$\text{Luego: Área } R = a(R_1) + a(T) = \int_a^c f(x) \cdot dx + \int_c^b (-f(x)) \cdot dx$$

$$\text{Área } R = a(R_1) + a(T) = \int_a^c |f(x)| \cdot dx + \int_c^b |f(x)| \cdot dx$$

Finalmente:

$$\boxed{\text{área } R = \int_a^b |f(x)| \cdot dx}$$

⊗ **Área de la región determinada por la gráfica de una función y el eje x**

Los tres casos vistos para el cálculo del área de R , región comprendida entre el gráfico de una función f definida en $[a; b]$ y el **eje x** , pueden resumirse en uno ya que, en cualquier caso, el **área de R** se obtiene calculando **la integral entre a y b , del valor absoluto de f**

$$\bullet f \text{ definida positiva en } [a; b] \rightarrow a(R) = \int_a^b f(x) \cdot dx \xrightarrow{|f|=f} \int_a^b |f(x)| \cdot dx$$

$$\bullet f \text{ definida negativa en } [a; b] \rightarrow a(R) =$$

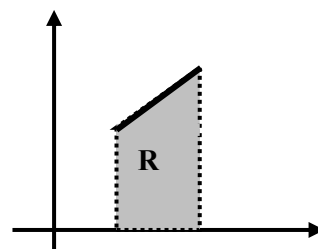
$$\int_a^b (-f(x)) \cdot dx \xrightarrow{|f|=-f} \int_a^b |f(x)| \cdot dx$$

$$\bullet f \text{ definida en } [a; b] \rightarrow a(R) = \int_a^b |f(x)| \cdot dx$$

Ejemplo 1:

Graficar R , región determinada por $f(x) = 2x+1$ y el eje x , si $Df = [1; 3]$. Hallar al área de la región R .

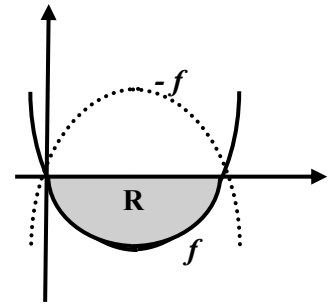
$$a(R) = \int_1^3 |f(x)| \cdot dx \xrightarrow{f>0} \int_1^3 f(x) \cdot dx = \int_1^3 (2x+1) \cdot dx = 10$$



Ejemplo 2:

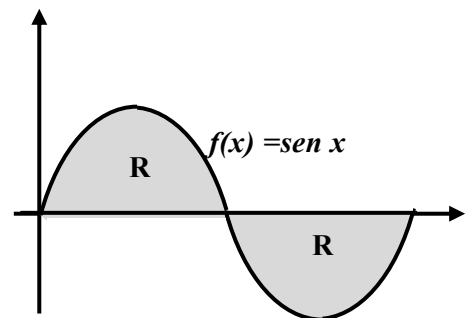
Graficar **R**, región determinada por $f(x) = x^2 - 2x$ y el eje x , si $Df = [0; 2]$.
Hallar al área de la región **R**.

$$\begin{aligned} a(R) &= \int_0^2 |f(x)| \cdot dx \stackrel{f < 0}{=} \int_0^2 (-f(x)) \cdot dx = \\ &= \int_0^2 -(x^2 - 2x) \cdot dx = 4/3 \end{aligned}$$

**Ejemplo 3:**

Graficar **R**, región determinada por $f(x) = \text{sen } x$ y el eje x , si $Df = [0; 2\pi]$.
Hallar al área de la región **R**.

$$\begin{aligned} a(R) &= \int_0^{2\pi} |f(x)| \cdot dx = \int_0^{2\pi} |\text{sen } x| \cdot dx \\ &= \int_0^{\pi} |\text{sen } x| \cdot dx + \int_{\pi}^{2\pi} |\text{sen } x| \cdot dx = \\ &= \int_0^{\pi} \text{sen } x \cdot dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\text{sen } x) \cdot dx = 4 \end{aligned}$$



Nota: Observar que, $\int_0^{2\pi} \text{sen } x \cdot dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = (-\cos 2\pi) - (-\cos 0) = -1 + 1 = 0$

Ejemplo 4: dada $f(x) = -x + 5$ con $Df = [1; 8]$

a) calcular $\int_1^8 f(x) \cdot dx$

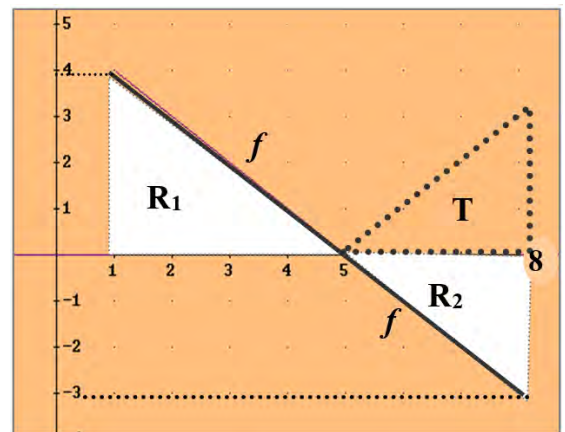
b) calcular el área de **R** región comprendida por la *graf. f* y el eje x .

c) Comparar los resultados.

$$a) \int_1^8 f(x) \cdot dx = \int_1^8 (-x + 5) \cdot dx \stackrel{\text{Barrow}}{=} \underbrace{\frac{-x^2}{2} + 5x} \Big|_1^8 = (-32 + 40) - \left(\frac{-1}{2} + 5\right) = \frac{7}{2}$$

$$\begin{aligned} b) \text{ área } R &= \int_1^8 |f(x)| \cdot dx \\ \text{área } R &= \int_1^5 f(x) \cdot dx + \int_5^8 (-f(x)) \cdot dx = \\ &= 8 + \frac{9}{2} = \frac{25}{2} \end{aligned}$$

• En este caso, donde f es lineal, podemos calcular más rápido y fácil *acudiendo a la geometría elemental*. Así, subdividimos convenientemente el intervalo y calculamos el área de los triángulos formados.



$$R = R_1 \cup R_2 \Rightarrow a(R) = a(R_1) + a(R_2)$$

$$a(R_1) = \frac{1}{2} (\text{base} \times \text{alt.}) = \frac{1}{2} (4 \times 4) = 8$$

$$a(R_2) = a(T) = \frac{1}{2} (\text{base} \times \text{alt.}) = \frac{1}{2} (3 \times 3) = \frac{9}{2}$$

$$a(R) = a(R_1) + a(R_2) = 8 + \frac{9}{2} = \frac{25}{2}$$

c) **Conclusión:** $\int_I f(x) \cdot dx \neq a(R)$

⊗ **Área de la región determinada por la gráfica de dos funciones f y g.**

Sean **f** y **g** dos funciones definidas en el intervalo $[a;b]$ y tales que $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a;b]$.

En este caso queda determinada una región plana **R**; definida como sigue:

$$R = \{ (x; y) / a \leq x \leq b ; f(x) \leq y \leq g(x) \}$$

Teorema

Dadas : * **f** y **g** dos funciones integrables en $[a;b]$ y tales que $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a;b]$;

* **R** la región plana determinada por **f** y **g** en $[a;b]$;

entonces: $a(R) = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx$

Demostración: la demostración se divide en dos casos:

Caso 1: $0 \leq f(x) \leq g(x); \quad \forall x \in [a;b]$

Caso 2: $f(x) \leq g(x); \quad \forall x \in [a;b]$

Caso 1: $0 \leq f(x) \leq g(x); \quad \forall x \in [a;b]$ (o sea, ambas funciones definidas positivas)

Sean: $T_1 = \{ (x; y) / a \leq x \leq b ; 0 \leq y \leq g(x) \}$

$$T_2 = \{ (x; y) / a \leq x \leq b ; 0 \leq y \leq f(x) \}$$

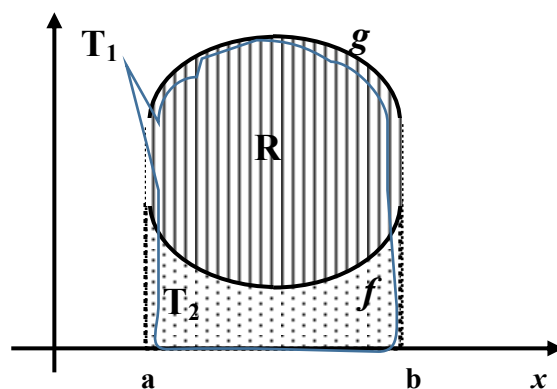
$$R = \{ (x; y) / a \leq x \leq b ; 0 \leq f(x) \leq y \leq g(x) \}$$

Luego: $T_2 \subset T_1 \rightarrow R = T_1 - T_2$

$$a(R) = a(T_1) - a(T_2)$$

$$a(R) = \int_a^b g(x) \cdot dx - \int_a^b f(x) \cdot dx ; (f \text{ y } g \text{ positivas})$$

$$a(R) = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx ; (\text{por linealidad de la int})$$



Caso 2: $f(x) \leq g(x)$; $\forall x \in [a;b]$

Sea: $R = \{ (x; y) / a \leq x \leq b ; f(x) \leq y \leq g(x) \}$

Luego, existe $k \in \mathbf{R}$ tal que:

$$0 \leq f(x) + k \leq g(x) + k ; \quad \forall x \in [a;b]$$

$T = \{ (x; y) / a \leq x \leq b ; 0 \leq f(x) + k \leq y \leq g(x) + k \}$

Y estamos en el **Caso 1**; o sea,

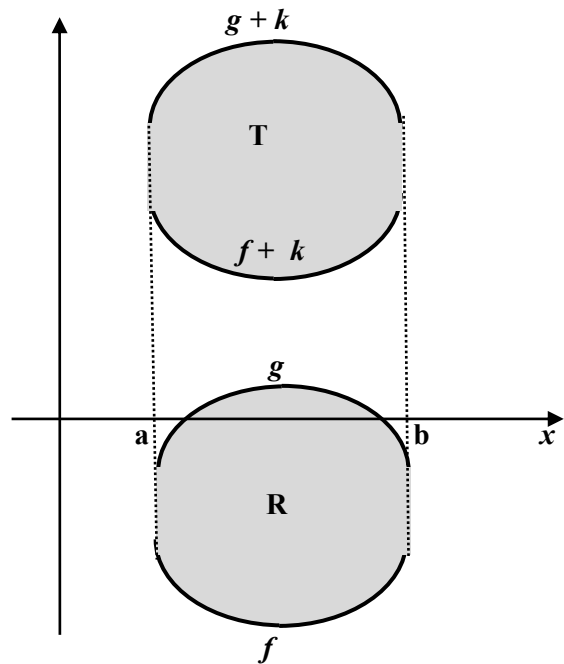
$$a(T) = \int_a^b [(g(x) + k) - (f(x) + k)] dx ;$$

$$a(T) = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx ;$$

Como **R** y **T** son la “misma figura” pues al trasladar las funciones en un valor k , lo que hacemos es trasladar la región **R** un valor k “sin deformarla”; tenemos que:

$$a(R) = a(T)$$

$$a(R) = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx$$



Nota: en definitiva, cualquiera sea el caso el área de una región comprendida entre dos funciones se calcula haciendo la integral de *la función de ‘arriba’ menos la de ‘abajo’*.

10.2 Un problema de la Física que resuelve la Integral: “trabajo”.

Basándonos en la Física elemental, podemos determinar el “trabajo” (**W**) realizado por una fuerza para mover un cuerpo en línea recta. Para una fuerza en la dirección del movimiento y de magnitud *constante* la fórmula correspondiente es: **W** = fuerza (*cte*) $\times$ desplazamiento. Vimos luego (pags. 34-35) que si la fuerza no es constante, el trabajo se calcula acudiendo a un proceso de integración, el trabajo realizado por **F** en $[a;b]$ se obtiene de hacer:

$$W_{[a;b]} = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(c_i) \times \Delta x_i = \int_a^b F(x) \cdot dx$$

10.3 Otros problemas de la Física que resuelve la integral: “cambio total” ó “variación total” en un proceso de cambio a velocidad variable

El **2ºTFCI** permite concluir la Regla de Barrow; regla que proporciona una forma práctica de evaluar la integral para toda f continua en $[a,b]$ que admita *primitiva elemental* P , en $[a, b]$.

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = P(b) - P(a)$$

Como $P' = f$, reemplazando en la fórmula anterior tenemos:

$$\int_a^b P'(x) \cdot dx = \Delta P_{[a;b]}$$

Con esta fórmula confirmamos todos los supuestos hechos al inicio de este tema y concluimos el:

⊖ TEOREMA del CAMBIO TOTAL

“la integral de la razón de cambio es el cambio total”

En principio, se puede aplicar a todas las razones de cambio en las ciencias naturales y sociales.

- Si V es el volumen de agua en un tanque en cada instante t , entonces su derivada V' es la razón a la que está variando el volumen de agua en el tanque en el instante t y, por lo tanto,

$$\int_{t_1}^{t_2} V'(t).dt = V(t_2) - V(t_1) = \Delta V_{[t_1; t_2]}$$

“*cambio total*” de la cantidad de agua en el tanque entre t_1 y t_2 (ó, “*variación total*”).

- Si P indica la cantidad de individuos o “*población*” de cierta especie en cada instante t , entonces su derivada P' es la tasa de crecimiento (o decrecimiento) de la misma. Por lo tanto,

$$\int_{t_1}^{t_2} P'(t).dt = P(t_2) - P(t_1) = \Delta P_{[t_1; t_2]}$$

“*variación total*” en la *población* durante el período comprendido entre t_1 y t_2 .

- Si M es la masa producida en una cierta reacción química en cada instante t ; su derivada,

$M' = v$, la velocidad de reacción. Por lo tanto,

$$\int_{t_1}^{t_2} M'(t).dt = M(t_2) - M(t_1) = \Delta M$$

“*variación de masa*” producida entre t_1 y t_2 (ó, “*masa acumulada*”).

Ejemplo: sea $v = \frac{2}{(10-2t)^2}$; con $v = \frac{dM}{dt}$ y $[v] = \frac{mg}{seg.}$

Luego $\int_0^4 v(t).dt = \Delta M_{[0;4]} = M(4) - M(0)$; *variación de masa* producida a los 4 segundos. Para *calcular* esta integral basta hallar una primitiva P cualquiera de v ; es decir, esta no tiene que ser necesaria y exactamente M .

$$\Delta M = \int_0^4 v(t).dt = P(t) \Big|_0^4 = \frac{1}{10-2t} \Big|_0^4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = 0,40 \text{ (mg.)}$$

¿ $M(4)$? $\rightarrow M(4) = \Delta M - M(0) = 0,40 - M(0)$ (para responder necesitamos un dato: $M(0)$).

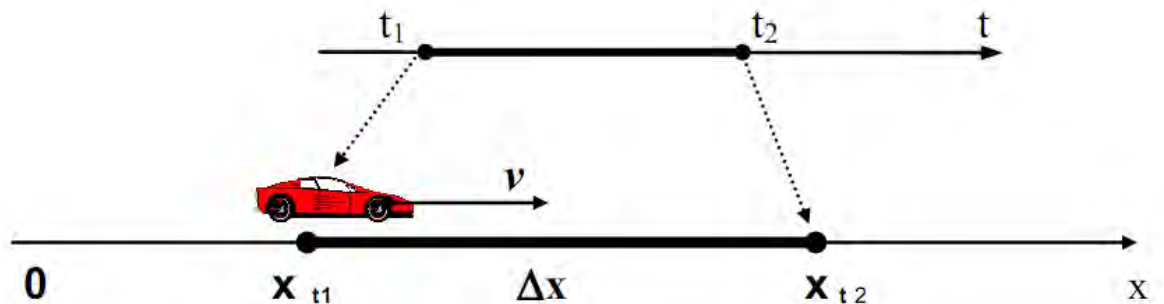
- Si la masa de una varilla, medida desde la izquierda hasta un punto x , es $m(x)$, entonces $m'(x) = \delta(x)$ es la *densidad lineal* (masa por unidad de longitud) en cada punto x .

Por lo tanto, $\int_a^b m'(x).dx = m(b) - m(a) = \Delta m$, es la *masa total* del segmento de varilla comprendido entre $x = a$ y $x = b$.



➤ Si un objeto se mueve a lo largo de una recta con función de posición $x = x(t)$, entonces su velocidad es $v(t) = x'(t)$.

Por lo tanto, $\int_{t_1}^{t_2} x'(t) \cdot dt = x(t_2) - x(t_1) = \Delta x$, es el “**variación total en su posición**” ó “**desplazamiento total**”, Δx , entre t_1 y t_2 .



(*) En este caso, si la velocidad cambia de signo en el intervalo de integración, hay que tener sumo cuidado en la interpretación del resultado; recordar que “**desplazamiento total**” y “**distancia**” recorrida por un móvil en un cierto intervalo de tiempo $[t_1; t_2]$; son dos nociones distintas. Una resulta de integrar la **velocidad**, v ; la otra, de integrar la **rapidez**, $|v|$.

Ejemplo: Una partícula se mueve sobre una recta de modo que su velocidad en cada instante t es $v(t) = -6t^2 + 18t$ (m/sg.);

(a) ¿cuánto se **desplaza** esta partícula en cada uno de los periodos de tiempo que se indican a continuación: $0 \leq t \leq 2$; $0 \leq t \leq 3$; $0 \leq t \leq 4$; $0 \leq t \leq 4,5$; $0 \leq t \leq 5$;

(b) ¿qué **distancia** recorre en cada uno de tales periodos?

(a) **Desplazamiento de la partícula en cada Δt .**

$$0 \leq t \leq 2 \quad \rightarrow \quad \Delta x = \int_0^2 (-6t^2 + 18t) dt = 20$$

$$0 \leq t \leq 3 \quad \rightarrow \quad \Delta x = \int_0^3 (-6t^2 + 18t) dt = 27$$

$$0 \leq t \leq 4 \quad \rightarrow \quad \Delta x = \int_0^4 (-6t^2 + 18t) dt = 16$$

$$0 \leq t \leq 4,5 \quad \rightarrow \quad \Delta x = \int_0^{4,5} (-6t^2 + 18t) dt = 0$$

$$0 \leq t \leq 5 \quad \rightarrow \quad \Delta x = \int_0^5 (-6t^2 + 18t) dt = -25$$

¿Cómo se entienden estos resultados?; ¿puede la partícula desplazarse “menos” en 4 seg. que en 3?; ¿puede ser $\Delta x = 0$?; ¿puede ser $\Delta x < 0$?

* el **signo de la velocidad** tiene una interpretación física concreta: indica el **sentido** del movimiento de la partícula sobre la recta, en cada instante t . Así, en una recta **vertical** orientada (+) **hacia arriba**:

$v(t) > 0$; indica que, en el instante t , la partícula está **avanzando** hacia **arriba**.

$v(t) < 0$; indica que, en el instante t , la partícula está **avanzando** hacia **abajo**.

En este caso $v(t) = -6t^2 + 18t$. Luego, si suponemos que el eje del movimiento es una recta **vertical**; que la orientación positiva del mismo es **hacia arriba**; tenemos que:

- * $v(t) > 0$ en $[0, 3] \rightarrow$ la partícula **sube** entre $[0, 3]$;
- * $v(3) = 0 \rightarrow$ la partícula **cambia el sentido del movimiento**, a los 3 seg.
- * $v(t) < 0$ en $[3, +\infty) \rightarrow$ la partícula **baja** a partir de los 3 seg..

Luego, y recordando que $\Delta x = x(t_f) - x(t_0)$, los resultados obtenidos tienen total sentido.

* el **desplazamiento** a los 4 seg. ($\Delta x = 16$) es “menor” que a los 3 ($\Delta x = 27$) pues la partícula “sube” hasta los 3 seg. y a partir de allí comienza a “bajar”.

* $\Delta x = 0$ indica que la partícula, “bajando”, a los 4,5 seg. ha llegado al punto de partida ($x = 0$)

* $\Delta x < 0$ indica que la partícula, “bajando”, ha sobrepasado el punto de partida.

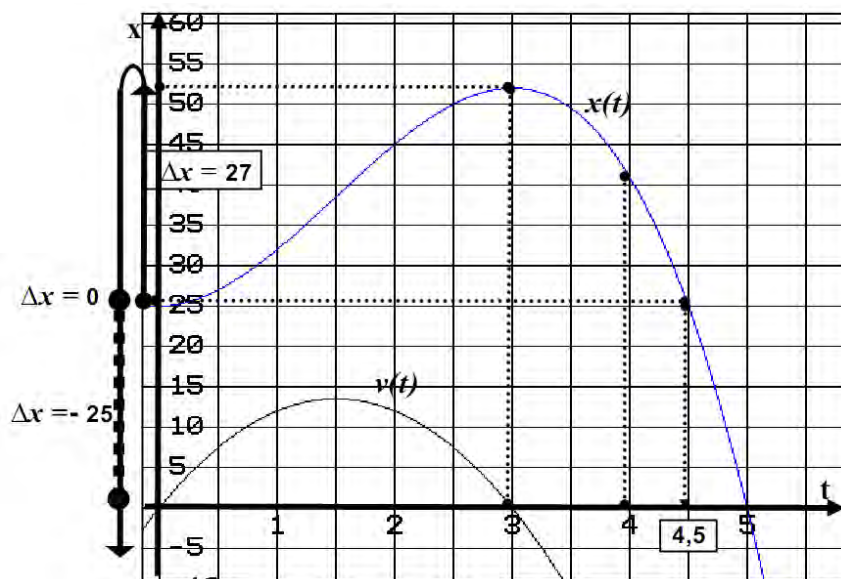
¿Cómo verificamos?: un camino, a través de la función de posición de la partícula, $x = x(t)$.

¿Cómo obtenemos $x = x(t)$?: recordando que $x(t)$ es una primitiva de $v(t) = -6t^2 + 18t$;

Calculamos para un “t” genérico:

$$\Delta x_{[0; t]} = \int_0^t v(\tau) \cdot d\tau = \int_0^t (-6\tau^2 + 18\tau) \cdot d\tau = -2t^3 + 9t^2$$

$$\Delta x_{[0; t]} = x(t) - x(0) \Rightarrow x(t) - x(0) = -2t^3 + 9t^2$$



Concluimos que: $x(t) = -2t^3 + 9t^2 + x(0) \xrightarrow{\text{si } x(0)=25} x(t) = -2t^3 + 9t^2 + 25$

b) **Distancia recorrida en cada Δt .**

$$0 \leq t \leq 2 \rightarrow d_{[0, 2]} = \Delta x = \int_0^2 (-6t^2 + 18t) dt = 20 \text{ (ms.)}$$

$$0 \leq t \leq 3 \rightarrow d_{[0, 3]} = \Delta x = \int_0^3 (-6t^2 + 18t) dt = 27 \text{ (ms.)}$$

$$0 \leq t \leq 4 \rightarrow d_{[0, 4]} = d_{[0, 3]} + d_{[3, 4]} = \int_0^3 v(t) \cdot dt + \int_3^4 -v(t) \cdot dt = 27 + 11 = 38 \text{ (ms.)}$$

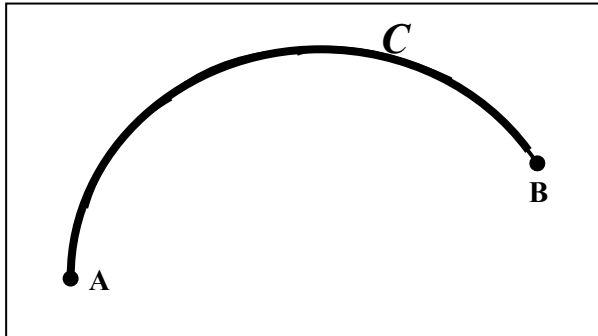
$$0 \leq t \leq 4,5 \rightarrow d_{[0, 4,5]} = d_{[0, 3]} + d_{[3, 4,5]} = \int_0^3 v(t) \cdot dt + \int_3^{4,5} -v(t) \cdot dt = 27 + 27 = 54 \text{ (ms.)}$$

$$0 \leq t \leq 5 \rightarrow d_{[0, 5]} = d_{[0, 3]} + d_{[3, 5]} = \int_0^3 v(t) \cdot dt + \int_3^5 -v(t) \cdot dt = 27 + 52 = 79 \text{ (ms.)}$$

10.4 Otros problemas geométricos que resuelve la Integral

10.4.1 Longitud de un arco de curva C .

* Dada una curva plana C de puntos extremos A y B , deseamos calcular la longitud de C .

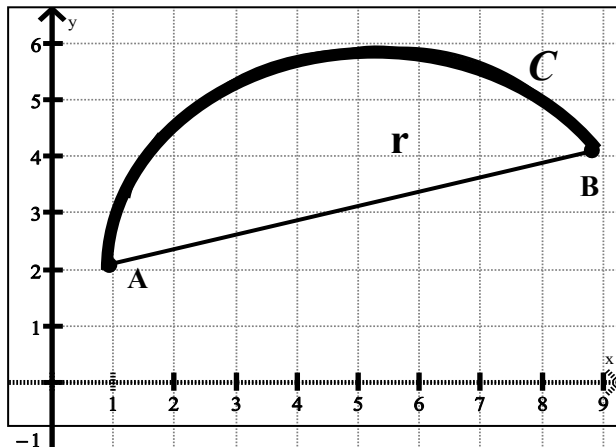


* ¿Cómo haría para “estimar” la longitud de esta curva?

* ¿A que “herramientas” de la **geometría analítica** acudiría a tal efecto?

(Antes de seguir reflexione un instante sobre estas preguntas, descubra que sus conocimientos previos lo habilitan a responderlas)

* Si $C = r$, un segmento de recta de extremos $A(x_1; y_1)$; $B(x_2; y_2)$, sabemos resolver el problema (Obviamente, previa introducción de un sistema de referencia).



$$\text{long. } r_{AB} = d(A; B) =$$

$$\text{long. } r_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

* En el ejemplo:

$A(1; 2)$; $B(9; 4)$

* $\text{long. } r_{AB} = d(A; B)$

$$\text{long. } r_{AB} = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{68}$$

* y tenemos un valor “apro.”

$$\text{de } \text{long. } C_{AB} (\cong \sqrt{68} \cong 8,25)$$

* Si C no es un segmento de recta, no sabemos calcular su longitud, acudimos entonces a resolver el problema apoyándonos en el caso conocido (“longitud de un segmento de recta”); o sea, acudimos a un “**proceso de integración**”:

(1) subdividimos el problema (en este caso, la curva C): la curva queda dividida en “n” sub-arcos C_i .

(2) realizamos las aproximaciones parciales: reemplazamos cada sub-arco por un segmento, calculamos la longitud de cada segmento.

(3) realizamos la aproximación “total”: suma de todas las aproximaciones parciales.

(4) calculamos el límite de estas sumas para la norma de la partición tendiendo a cero.

Proceso de integración

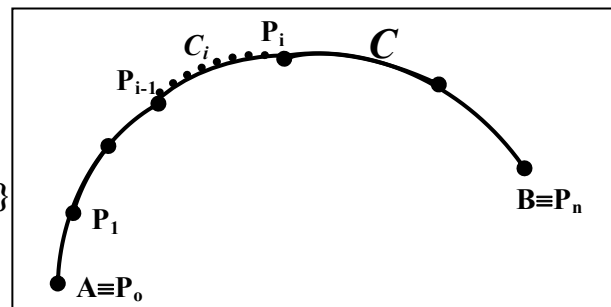
(1) subdivisión del problema

Tomamos “n+1” puntos de C_{AB}

$\{P_0 \equiv A; P_1; P_2; \dots; P_i; \dots, P_n \equiv B\}$

Estos puntos generan “n” subarcos:

$C_1; C_2; \dots; C_i; \dots; C_n$



(2) aproximaciones parciales: aproximamos cada C_i por el segmento que une sus extremos.

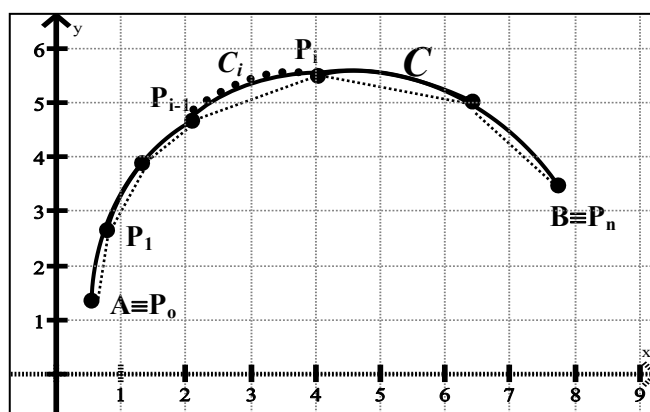
$$\text{long. } C_i \cong \text{long. } \overline{P_{i-1}P_i}$$

$$\text{long. } C_i \cong d(P_{i-1}; P_i)$$

(3) aproximación "total":

Si indicamos con $\mathbf{P}$ a la poligonal determinada por los P_i , tenemos que

$$\text{long. } C_{AB} \cong \text{long. } \mathbf{P} = \sum_{i=1}^n d(P_{i-1}; P_i)$$



(4) cálculo del límite de la longitud de las poligonales.

Def: decimos que el arco de curva C_{AB} es "rectificable" si existe un número "L" al cual se acercan tanto como se quiera las longitudes de las poligonales $\mathbf{P}$, cuando $d(P_{i-1}; P_i) \rightarrow 0, \forall i$.

Def: si C_{AB} es "rectificable",

$$* \quad L = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n d(P_{i-1}; P_i)$$

* a L lo llamamos "longitud de C_{AB} "

$$\left. \begin{array}{l} * \quad L = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n d(P_{i-1}; P_i) \\ * \quad \text{a } L \text{ lo llamamos "longitud de } C_{AB} \end{array} \right\} \text{longitud de } C_{AB} = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n d(P_{i-1}; P_i)$$

Hemos desembocado en un límite de sumas, por ende, en una integral; pero, ¿cómo la calculamos?

Y aquí se abre el camino ya que la función integrando depende de la forma como esté dada la curva.

Tenemos así dos casos:

Caso 1: $C = \text{graf } f$, f definida en $[a; b]$.

Caso 2: C dada por sus ecuaciones paramétricas; o sea, $C = \{(x; y) / x = x(t); y = y(t), t \in [a; b]\}$

Caso 1: $C = \text{graf } f$, f definida en $[a; b]$.

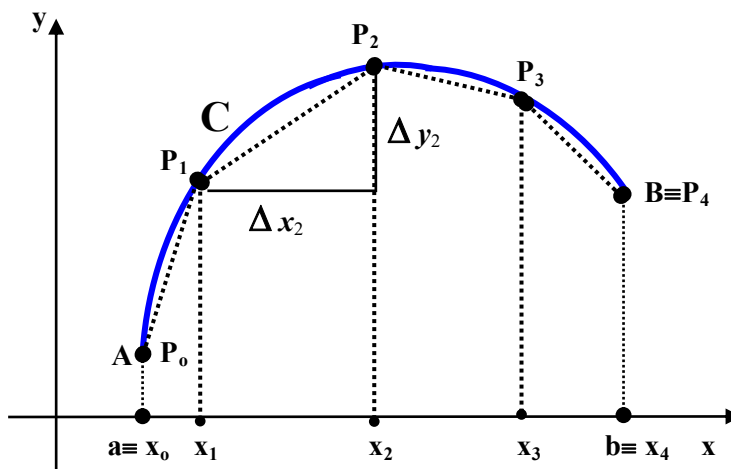
Introducido un sistema de referencia los puntos:

$\{P_0; P_1; P_2; \dots; P_i; \dots, P_n\}$ definen una partición de $[a; b]$,

$$\bullet \quad \mathcal{P} = \{x_0=a; x_1; x_2; \dots; x_i; \dots; x_n=b\}$$

$$\bullet \quad P_i(x_i; y_i) \rightarrow \overline{P_{i-1}P_i} = (\Delta x_i; \Delta y_i)$$

$$\bullet \quad \text{long. } \mathbf{P} = \sum_{i=1}^n d(P_{i-1}; P_i)$$



$$\text{long. } \mathbf{P} = \sum_{i=1}^n d(P_{i-1}; P_i) = \sum_{i=1}^n \sqrt{\Delta^2 x_i + \Delta^2 y_i} ; \text{ con } \Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad \Delta y_i = y_i - y_{i-1}$$

- **Teorema:** Si f y f' son continuas en $[a; b]$ entonces $C = \text{graf } f$ es rectificable y vale:

$$\text{longitud } C_{AB} = L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} \cdot dx$$

Demostración: Por definición: $L = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n d(P_{i-1}; P_i)$;

o sea; $L = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{\Delta^2 x_i + \Delta^2 y_i} = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i \quad (\text{I})$

f continua y derivable en $[a; b] \rightarrow (\text{Ter. Lagrange}) \rightarrow \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f'(c_i)$ con $c_i \in (x_{i-1}; x_i) \quad (\text{II})$

Reemplazando en (I):

$$\begin{aligned} L &= \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \cdot \Delta x_i = \\ &= \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(c_i) \cdot \Delta x_i = \lim_{|P| \rightarrow 0} S(g; P; Q) = \int_a^b g(x) \cdot dx \end{aligned}$$

$$g(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

Finalmente, reemplazando g : **longitud de** $C_{AB} = L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} \cdot dx \quad (\text{q.e.d.})$

Caso 2: $C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [c; d]$

Trabajando en forma análoga a la anterior llegamos a $L = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{\Delta^2 x_i + \Delta^2 y_i}$;

teniendo en cuenta que en este caso:

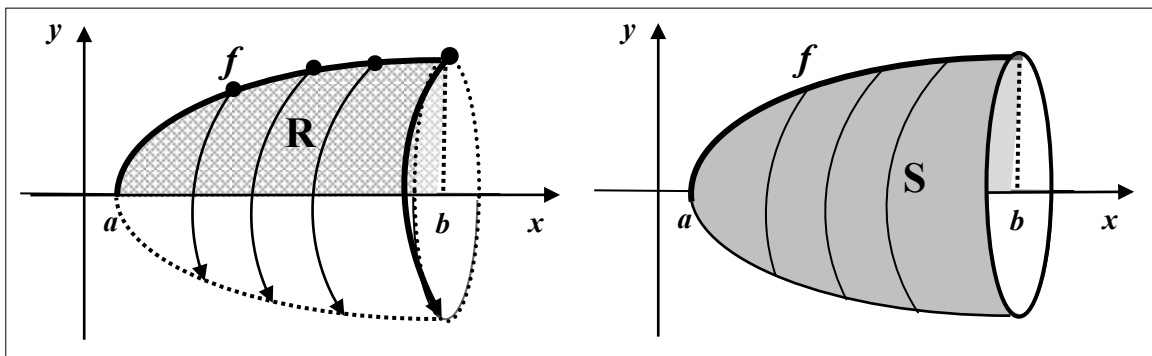
$$\Delta x_i = x(t_i) - x(t_{i-1}); \quad \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i} = x'(\alpha_i) \quad \text{con } \alpha_i \in (t_{i-1}; t_i) \quad (\text{teorema de Lagrange}).$$

$$\Delta y_i = y(t_i) - y(t_{i-1}); \quad \frac{\Delta y_i}{\Delta t_i} = y'(\beta_i) \quad \text{con } \beta_i \in (t_{i-1}; t_i) \quad (\text{teorema de Lagrange}).$$

Concluimos que: **longitud de** $C_{AB} = L = \int_c^d \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} \cdot dt$

10.4.2 Volumen de S, sólido de revolución

Al hacer girar alrededor del eje x la **región R** comprendida entre la curva **graf. f** y el eje x se genera un sólido “S”, llamado “**sólido de revolución**”,



Para obtener el volumen del sólido S debemos acudir a un “proceso de integración; o sea: particionar el intervalo; obtener las “aproximaciones parciales”; sumarlas y obtener la “aproximación total”. Finalmente, analizar si las aproximaciones totales para la norma de la partición tendiendo a cero tienden a un número. Si lo hacen, este número es, por definición el volumen del sólido S .

Se demuestra que si f es continua en $[a; b]$, entonces:

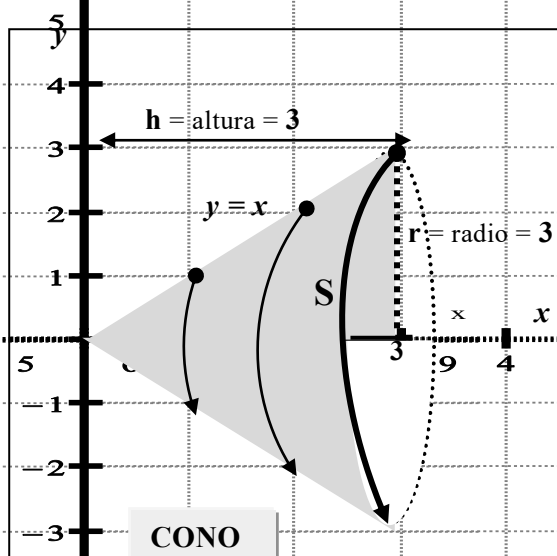
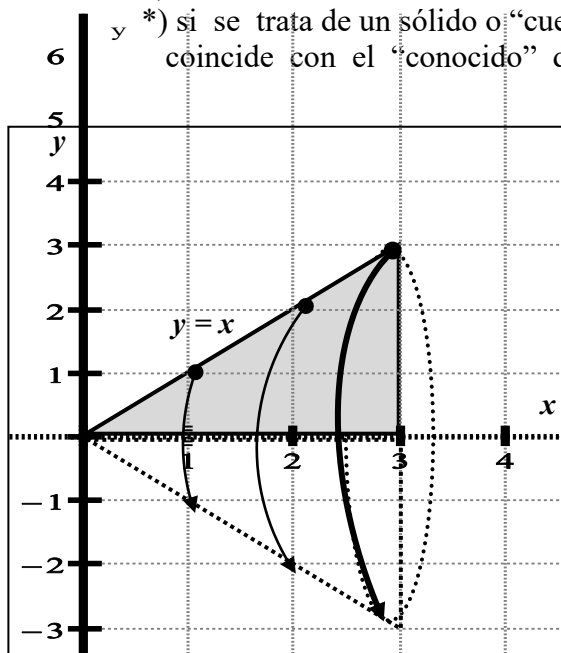
$$\text{vol. } S = \pi \int_a^b f^2(x) \cdot dx$$

Ejemplo: dada $f(x) = x$ en $[0; 3]$ se pide:

*) graficar S , el sólido de revolución que genera la región R determinada por f .

*) calcular el volumen de S acudiendo al *cálculo integral*.

*) si se trata de un sólido o “cuerpo” conocido verificar si el resultado obtenido coincide con el “conocido” de la *geometría analítica*.

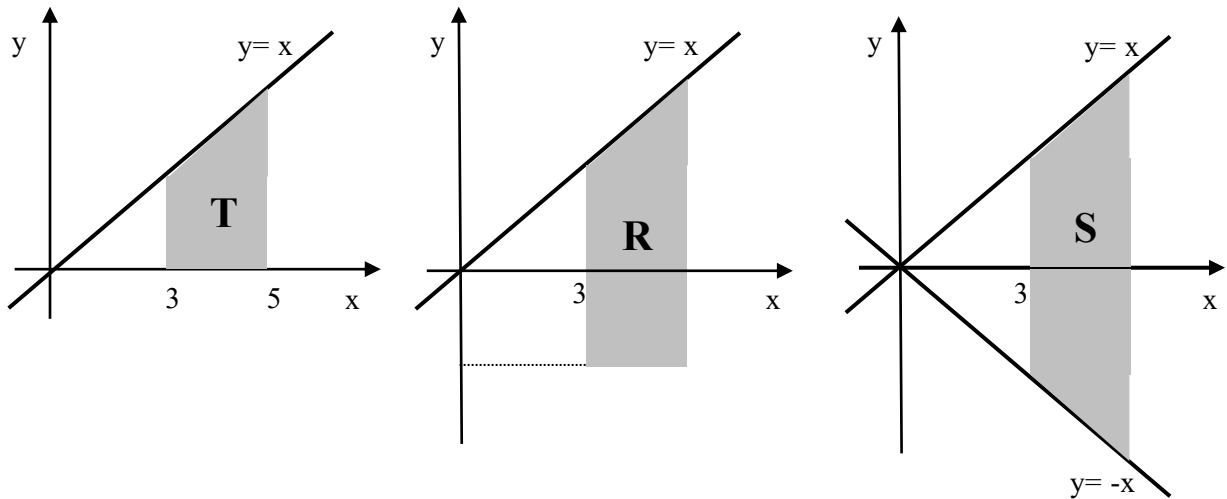


*) $\text{vol. cono} = \pi \int_0^3 x^2 \cdot dx = \pi \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 = 9\pi \checkmark$

*) $\text{vol. cono} = \frac{1}{3} \cdot \text{“área base”} \times \text{“altura”} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \times h = 9\pi \checkmark$

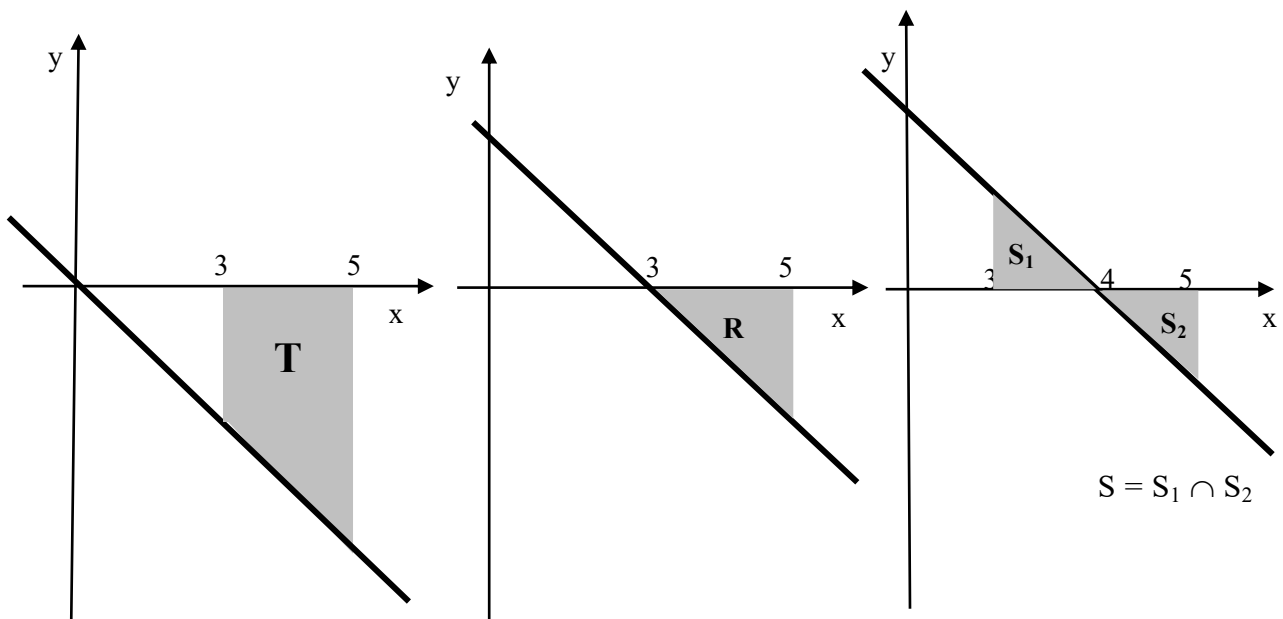
10.5 Actividades: Aplicaciones de la Integral

- 1) Dadas las figuras planas que se indican a continuación, se pide:
- hallar el área de las regiones sombreadas con las fórmulas usuales de la geometría.
 - Verificar luego el resultado hallado con el auxilio del Cálculo Integral.

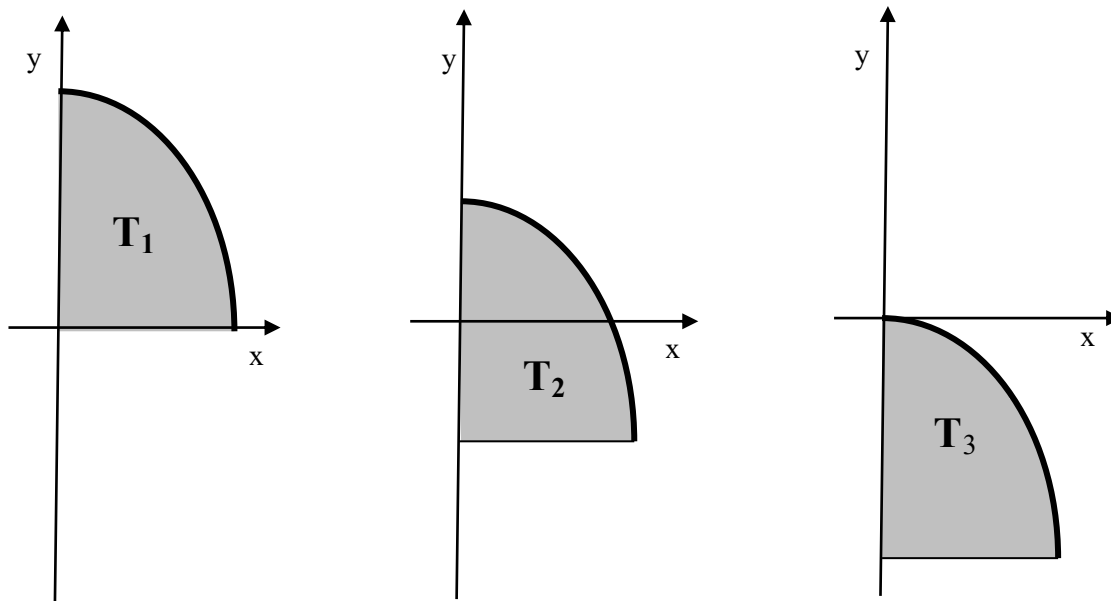


- 2) Las figuras planas que se indican a continuación están generadas por las funciones f , g , h con $f(x) = -x$; $g(x) = f(x) + 3$ y $h(x) = f(x) + 4$; y todas definidas en el $[3; 5]$. Se pide:

- hallar el área de las regiones sombreadas con las fórmulas usuales de la geometría.
- Verificar luego el resultado hallado con el auxilio del Cálculo Integral.



3) Las figuras planas T_1 ; T_2 ; T_3 a continuación están generadas por las funciones f , g , h con $f(x) = -x^2 + 9$; $g(x) = f(x) - 5$ y $h(x) = f(x) - 9$; todas definidas en el $[0; 3]$. Se pide:

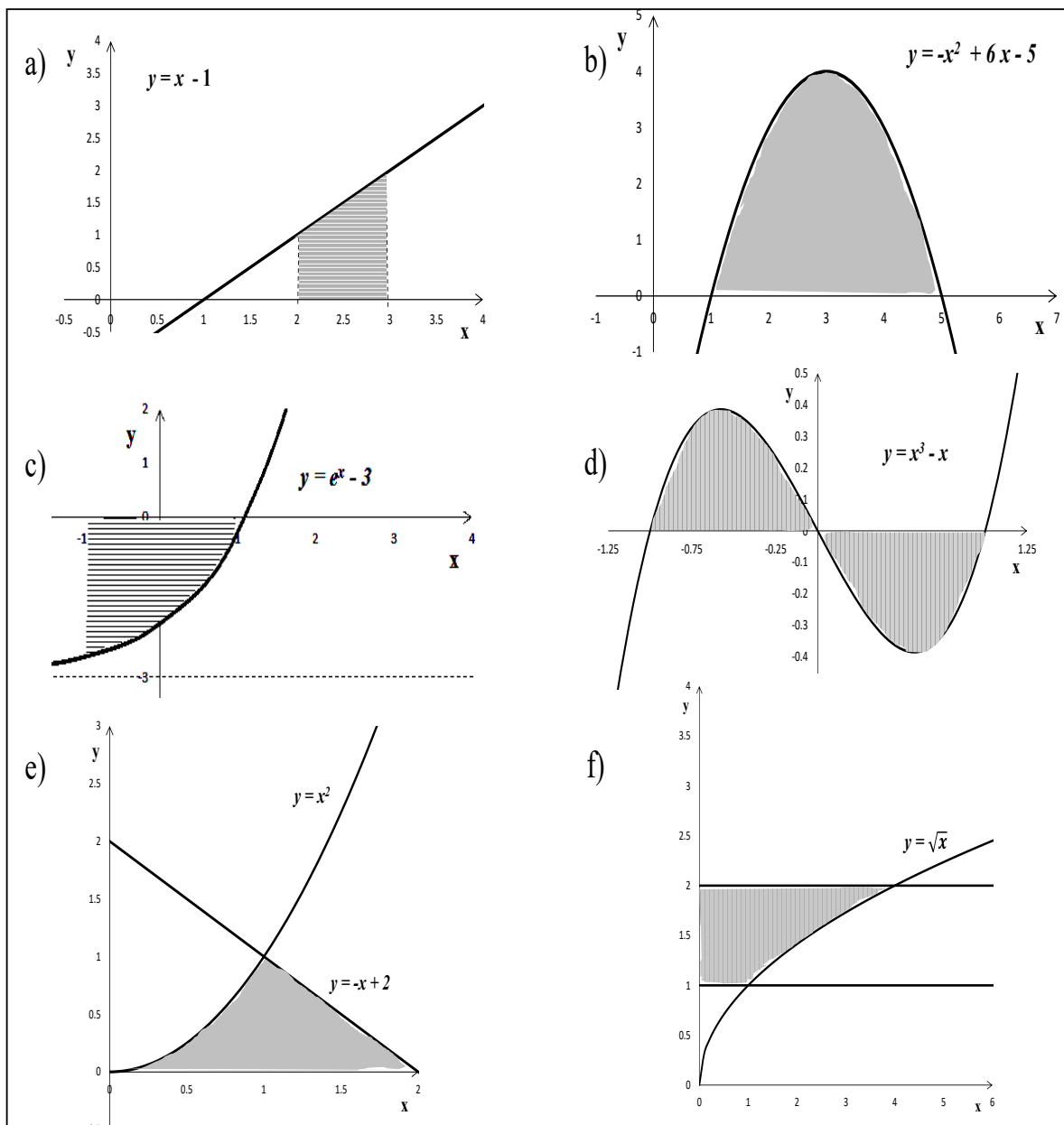


- hallar el área de T_1 ; T_2 ; T_3 con el auxilio del cálculo integral y *verificar* que todas tienen el mismo área. Justificar este resultado.
- Graficar la región determinada por f y $-f$ en el $[0; 3]$; hallar su área:
 - con el auxilio del cálculo integral.
 - Aplicando propiedades de la geometría.
- Graficar las regiones R_1 , R_2 y R_3 simétricas respecto del “eje y ” de T_1 , T_2 y T_3 respectivamente. Hallar luego las áreas de $S_i = T_i \cup R_i$; $i = 1, 2, 3$.
 - con el auxilio del cálculo integral.
 - aplicando propiedades de la geometría.
- Para f , g , h definidas en $[0; 3]$ determinar el o los valores de “ c ” del Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral. Interpretar geoméricamente el resultado en cada caso posible.
- Para f , g , h definidas en $[-3; 3]$, determinar el o los valores de “ c ” del Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral. Interpretar geoméricamente el resultado en cada caso posible.

4) Si $f(x) = -x^3 + 8$; $g(x) = f(x) - 7$; $h(x) = f(x) - 8$

- Graficar las regiones T ; R ; S *respectivamente* comprendidas entre el gráfico de f , g , h y el eje x y todas con dominio en el $[0; 2]$. Luego, calcular su área.
- Graficar las regiones T , R y S , *respectivamente* comprendidas entre el gráfico de f , g , h y el eje x (y todas con dominio en el $[-2; 2]$). Hallar sus áreas.
 - con el auxilio del cálculo integral;
 - Aplicando propiedades de la geometría (en el caso de ser posible).
- Para f , g , h definidas en $[-3; 3]$, determinar el o los valores de “ c ” del Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral. Interpretar geoméricamente el resultado en cada caso posible.

- 5) Si con R representamos un círculo de radio 5, se pide:
- Graficar el círculo en un sistema cartesiano ortogonal, indicar las funciones que representan su contorno, escribir la región R en función de ellas.
 - Dar el área de las siguientes figuras planas a partir del área del círculo y la aplicación de propiedades geométricas pertinentes al caso. Luego, obtener el área de las mismas pero a través del cálculo integral.
 - un cuarto de círculo.
 - medio círculo.
- 6) Hallar el área de las regiones rayadas mediante adecuadas integrales definidas.



7) Calcular el área de las regiones limitadas por:

- a) $f(x) = x^2 - 4$; $g(x) = -(x-2)^2$.
- b) $y = \cos x$; $y = \sin x$; $x = 0$; $x = \pi$.
- c) $y = \ln x$; $y = 1$; $x = 2e$; $y = 0$.
- d) $f(x) = 0$; $g(x) = x^2 - 2|x| - 3$.

8) Para la función f cuyo gráfico se adjunta se pide:

- a) dar I_{sup} e I_{inf} con $n=16$, aproximaciones por por exceso y defecto respectivamente de

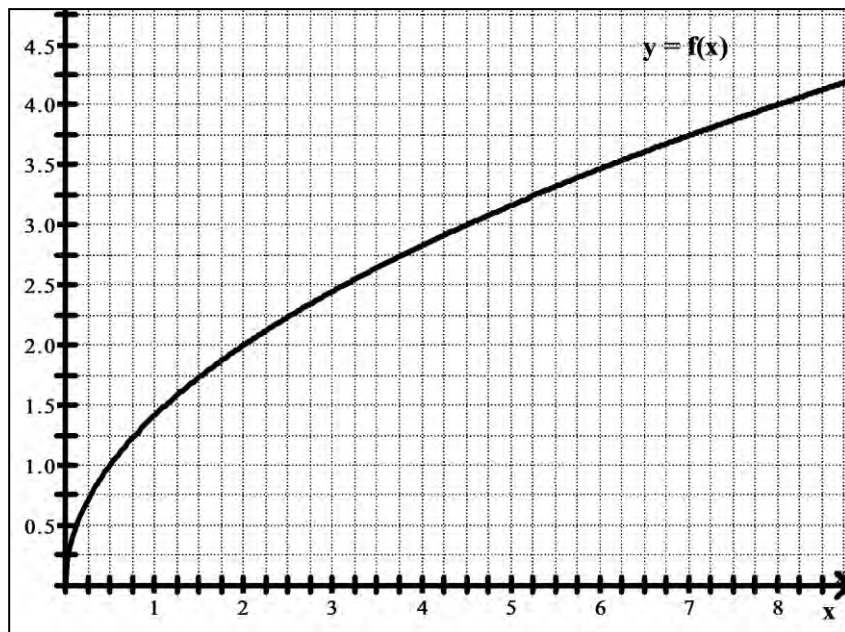
$$I = \int_0^8 f(x) dx$$

Hacer esto aplicando un conveniente “proceso de integración” y “leyendo” del **graf.** f los valores que necesite al efecto.

- b) Calcular $I = \int_0^8 f(x) dx$

para $f(x) = \sqrt{2x}$.

- c) **Vó F:** estimar el “orden” del error cometido al aproximar I con I_{sup} e I_{inf} del ítem (a).

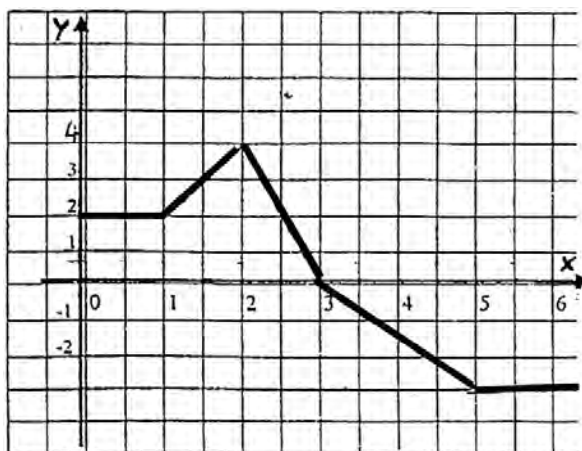


¿Cómo haría para que estos errores, $E = |I - I_{\text{inf}}|$ ó $E = |I - I_{\text{sup}}|$, sean menor a $1/10$?

9) Demostrar, usando un conveniente polinomio de Taylor que $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-t^2} dt \approx 0,4613$.

10) Sea $g(x) = \int_0^x f(t) dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra:

- a) Evaluar $g(0)$, $g(1)$, $g(3)$ y $g(6)$.
- b) ¿Sobre qué intervalos g es creciente?
- c) ¿Dónde tiene g un valor máximo?
- d) Hallar la ley de g .
- e) Graficar g y g' .



11) Dada $F: [1; 5] \rightarrow \mathbb{R}$ con $F(x) = \int_1^x (t^3 - 3t^2 - 2) dt$, se pide calcular F' por dos caminos distintos

12) Dada $F: [0; 10] \rightarrow \mathbb{R}$ con $F(x) = \int_0^x (3-t).dt$, se pide:

- Calcular $F(3)$; $F(4)$; $F(6)$; $F(9)$. Interpretar geoméricamente los valores obtenidos (si puede).
- Calcular $F'(x)$ por el camino “más simple”.
- Graficar P ; Q ; R siendo estas funciones 3 primitivas de $F'(x)$, tales que: $P(0) = 2$; $Q(0) = 0$; $R(0) = -2$;
Luego, indicar si alguna de ellas es igual a F .

13) Para la función f cuyo gráfico se adjunta se pide:

a) dar un valor aproximado de

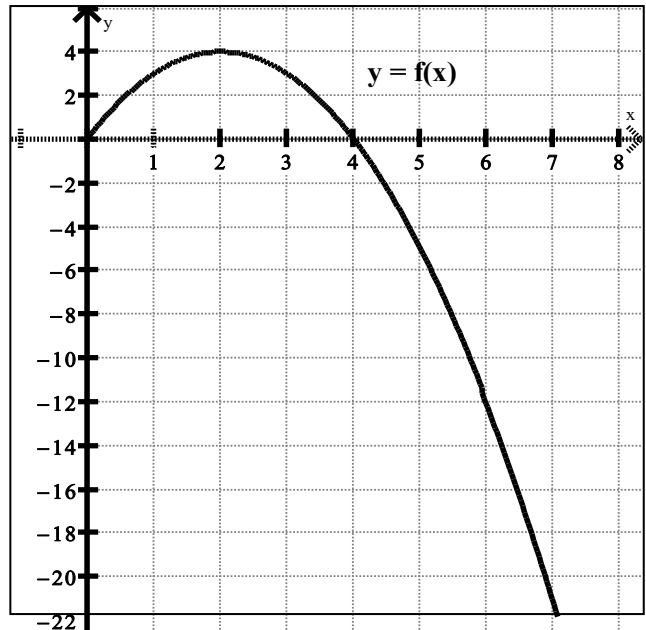
a₁) $\int_0^4 f(x) dx$

a₂) $\int_0^5 f(x) dx$

a₃) $\int_0^6 f(x) dx$

a₄) $\int_0^7 f(x) dx$

Hacer esto aplicando un conveniente “proceso de integración” y “leyendo” del **graf. f** los valores que necesite al efecto.



b) Dar una estimación del área con de los intervalos que se indican a

c) Sabiendo que el **graf f** es el de c₁) hallar la ley de f .

c₂) Calcular $\int_0^4 f(x) dx$; $\int_0^5 f(x) dx$; $\int_0^6 f(x) dx$; $\int_0^7 f(x) dx$; luego, indicar si las aproximaciones obtenidas en (a) son por exceso o por defecto.

d) Calcular las áreas indicadas en el ítem (b) e indicar el carácter de las aproximaciones.

e) Si $x = x(t)$ es la función de posición de una partícula que se mueve a lo largo de una recta, y v su velocidad entonces $v = x'(t)$ ($[x] = \text{km}$; $[t] = \text{hs.}$ y $[v] = \text{km/hs.}$

e₁) Si $v = f(t)$ se pide explicar que representa (y porqué) c/u de las integrales en el ítem (c).

Sugerencia: tener en cuenta que $v = f(t)$ y $v = x'(t)$; o sea, que $f(t) = x'(t)$; aplicar el **TEOREMA DEL CAMBIO TOTAL** (para la función de posición $x = x(t)$, $v(t) = x'(t)$).

$\Delta x =$ “desplazamiento total” entre t_1 y t_2 es:

$$\Delta x = \int_{t_1}^{t_2} x'(t) dt = \Delta x_{[t_1; t_2]}.$$

e₂) **Graficar la trayectoria de la partícula si $x(0)=2$** , hallando para ello $x = x(t)$.

e₃) Explicar qué representa cada uno de los valores obtenidos en el ítem (d).

➤ **Cambio total o variación total en procesos a velocidad variable.**

Para resolver problemas donde la incógnita es el “*cambio o variación total*” debida a un “*proceso de cambio*” tenemos un importante resultado teórico en el que se tiene un principio válido tanto para *razones de cambio* en las ciencias naturales como en las sociales.

⊖ **TEOREMA del CAMBIO TOTAL**

En un proceso de cambio:

“la integral de la razón de cambio es el cambio total”

De otra forma, si $z = f(t)$ es la función que describe un proceso para cada t en $[a; b]$ y v la *velocidad del proceso*, entonces $v = f'(t)$ y Δf , la *variación o cambio total* de f , es:

$$\Delta f = \int_a^b v(t).dt = \int_a^b f'(t).dt = \Delta f_{[a,b]}$$

En los problemas que siguen se sugiere tener en cuenta este teorema.

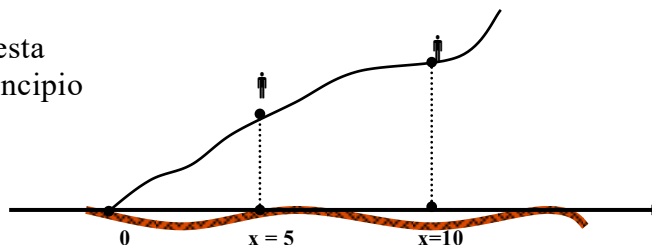
14) a) Si $w'(t)$ es la razón de crecimiento de un niño en Kg. por años, ¿qué representa $\int_5^{10} w'(t).dt$?

b) Si se fuga aceite de un tanque a razón de $r = r(t)$ lts./min., ¿qué representa $\int_0^{120} r(t).dt$?

c) Una población de abejas se inicia con 100 ejemplares y se incrementa a razón $p'(t)$ especímenes por semana, ¿qué representa $\int_0^{12} p'(t).dt + 100$?

15) Si $f'(x)$ es la pendiente de una cuesta a una distancia de x metros del principio de la misma,

¿qué representa $\int_5^{10} f'(t).dt$?



16) Una partícula se mueve sobre una recta de modo que su velocidad en cada instante t es $v(t) = -6t^2 + 18t$ (m/sg);

a) ¿cuánto se **desplaza** esta partícula en cada uno de los períodos de tiempo que se indican a continuación: $0 \leq t \leq 2$; $0 \leq t \leq 3$; $0 \leq t \leq 4$; $0 \leq t \leq 4,5$; $0 \leq t \leq 5$?

b) ¿qué **distancia** recorre en cada uno de tales períodos?

17) Si $v(t) = -6t^2 + 18t$ (ls/h) representa la velocidad con que entra(sale) agua de un tanque que inicialmente tiene 25 ls. de agua; se pide:

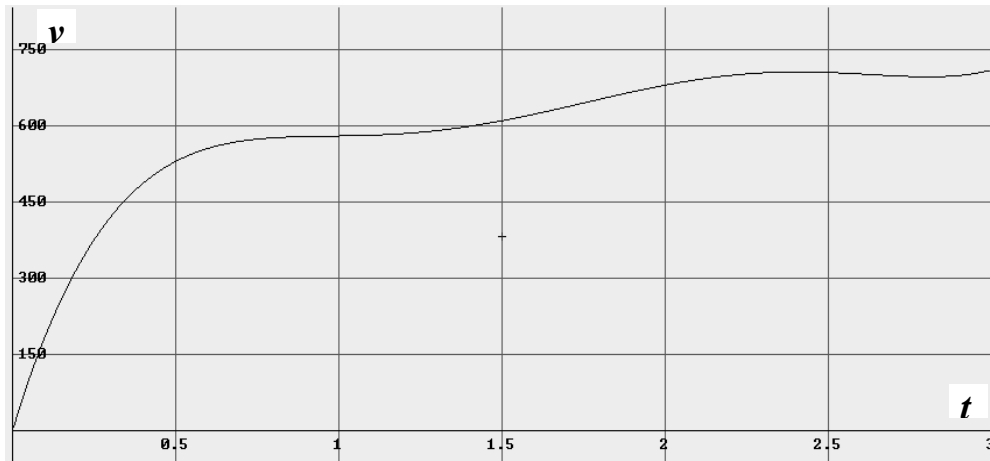
a) determinar la variación de volumen en el tanque en los períodos de tiempo que se indican a continuación: $0 \leq t \leq 2$; $0 \leq t \leq 3$; $0 \leq t \leq 4$; $0 \leq t \leq 4,5$.

b) determinar el volumen total de agua en el tanque a las 2; 3; 4 y 4 ½ hs.

c) el tanque, ¿se vacía en algún instante?, ¿cuándo?

18) Sea $v = \frac{2}{(10-2t)^2}$; $[v] = \frac{mg}{seg.}$ la velocidad con que cierta masa de soluto se disuelve en un solvente. Si la masa de soluto originariamente puesta en contacto con el solvente es de 0,4 mg y en ese instante no había soluto en el solvente y esa cantidad está muy lejos del punto de saturación, ¿en qué instante estará disuelta toda la masa?

19) La gráfica adjunta muestra el registro de la tasa de “disolución” en [mg/hs.] de un soluto en un solvente, durante las 3 primeras horas de puestos ambos en contacto.



a) Proponga y ejecute un proceso que le permita dar un valor aproximado de la masa total *disuelta* al cabo de las 3 hs.

b) ¿Cómo mejoraría la aproximación? ¿Cómo obtendría el valor exacto?. ¿Puede obtener el valor *exacto*?, ¿porqué?

20) Si el gráfico del ejercicio (17) representa la densidad lineal (en [mg/ms.]) en cada punto de una varilla de acero, la cual tiene 3 metros de largo.

a) Ejecute un proceso que le permita dar un valor aproximado de la masa de la varilla.

b) ¿Cómo mejoraría la aproximación? ¿Cómo obtendría el valor exacto?. ¿Puede obtenerlo?

21) La velocidad de un móvil que avanza en línea recta se lee en su velocímetro a intervalos de diez segundos y se registra en una tabla. Usar esta tabla para dar una estimación de la distancia recorrida en 100 segundos.

t (s)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
v (m/s)	40	48	52	55	65	70	65	65	60	55	50

22) Se da la función velocidad (en metros por segundo) para una partícula que se mueve a lo largo de una recta. Encontrar el desplazamiento y la distancia recorrida por la partícula durante el intervalo de tiempo dado en cada caso. Graficar la trayectoria.

a) $v(t) = -3t + 6$ en: $0 \leq t \leq 2$; $0 \leq t \leq 4$ y $0 \leq t \leq 5$; siendo $x(0) = 0$

b) $v(t) = 3t^2 - 6t + 3$ en: $0 \leq t \leq 1$ y $0 \leq t \leq 2$; siendo $x(0) = 0$.

23) Un automovilista viaja hacia el campo desde una ciudad de tránsito muy congestionado; comienza a paso de tortuga y, conforme el tránsito disminuye acelera gradualmente. El conductor (para entretenerse) cada $\frac{1}{2}$ hora registra la velocidad a la que va. Con sorpresa al cabo de un tiempo (y varias anotaciones) observa que los registros muestran un “patrón” el cual (haciendo rápidos cálculos mentales) le permite concluir que está viajando a una velocidad $v = 8t^2$ (Km/hs.).

Si los cálculos de este automovilista estuvieran bien; ¿qué *distancia* había recorrido a las 3hs. de haber salido si durante ese tiempo no para nunca? Si el lugar al que va está a 243 Km. de donde partió y sigue a esa velocidad hasta llegar, ¿a qué velocidad llega?

24) Una partícula que se mueve a lo largo de una recta tiene velocidad $v(t) = t^2 \cdot e^{-t}$ mts. por segundos, ¿cuánto se desplaza en 3 segundos?, ¿qué distancia recorre en 3 segundos?

25) La función $\delta(x) = 9 + 2\sqrt{x}$ da, en kilogramos por metro, la densidad lineal de una varilla cuya longitud total es de 4 m. y para la cual x se mide en metros desde uno de los extremos de la varilla. Se pide, encontrar la masa total de la varilla.

26) Una cuerda no homogénea de 3 metros de largo está hecha de un material que es muy liviano cerca del extremo izquierdo y muy pesada cerca del derecho. Si se sabe que a una distancia “ x ” del extremo izquierdo su densidad es de $5x^2$ gr./m; hallar la masa total de la cuerda.

27) Una población de animales crece a razón de “ $200 + 50t$ ” animales al año (t medido en años), ¿en cuánto aumenta la población entre el cuarto y el décimo año?. ¿cuántos animales habrá al cabo de 10 años si no muere ninguno e inicialmente había 2?

28) Una población de bacterias se inicia con 400 ejemplares y crece a razón de $r(t) = 450.200 \cdot e^{1.13t}$ bacterias por horas. ¿Cuántas habrá después de tres horas?

29) Suponga que h es una función tal que $h(1) = -2$; $h'(1) = 2$; $h''(1) = 3$; $h(2) = 6$; $h'(2) = 5$; $h''(2) = 13$ y h'' es continua en todo $\mathbb{R}$. Evaluar $\int_1^2 h''(u) du$.

➤ **Longitud arco de curva:**

30) Calcular la longitud de cada uno de los siguientes arcos de curva.

a) $y = \frac{x^2}{2}; 0 \leq x \leq \sqrt{3}$

b) $y = \sqrt{x^3}; 0 \leq x \leq 32/9$

c) $\begin{cases} x = 4\cos t - 1 \\ y = 4\sin t + 1 \end{cases}; 0 \leq t \leq \pi/4$

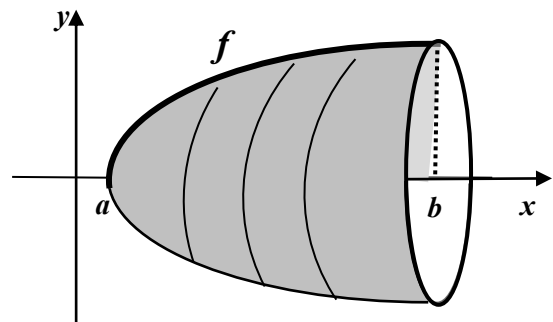
d) $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = \frac{t^2}{2} \end{cases}; 0 \leq t \leq 1$

➤ **Volumen de un sólido de revolución:**

31) Al hacer girar alrededor del **eje x** la **región** comprendida entre una curva gráfica de una función **f** continua y definida positiva en $[a; b]$; se genera un sólido “S”, llamado “sólido de revolución”, cuyo volumen se calcula a través de la siguiente integral:

$$\text{vol. S} = \pi \int_a^b f^2(x) \cdot dx$$

Para las siguientes funciones se pide graficar el sólido que generan al girar alrededor del **eje x** y calcular su volumen usando la integral indicada. En caso de resultar un sólido “conocido”, verificar que el resultado obtenido coincide con el de la geometría clásica.



a) $f(x) = x - 3$; $Df = [3; 8]$.

d) $f(x) = e^x$; $Df = [0; 1]$.

b) $f(x) = 2\sqrt{x}$; $Df = [0; 4]$.

e) la región limitada por $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$

c) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$; $Df = [-3; 3]$.

➤ **TRABAJO:**

32) Para un gas perfecto cuando la expansión es **isotérmica** entonces se cumple la ley de Boyle-Mariotte : $p v = \text{cte}$; en particular, $p v = n R T$

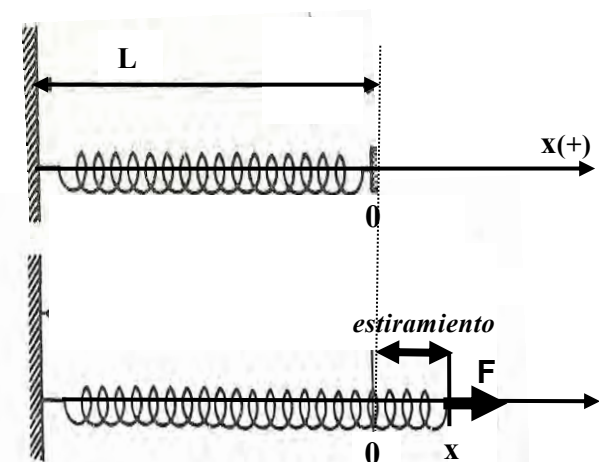
(**p**=presión; **v**=volumen; **R**=cte. de los gases; **n**=nº de moles; **T**=Temperatura (cte.))

a) **V ó F**, justificar: para una expansión isotérmica, $p = f(v)$; **f** continua en $\mathbb{R}^+$.

b) Sabiendo que el trabajo requerido para **expandir isotérmicamente** un gas perfecto desde un volumen v_1 a otro v_2 se calcula con la siguiente expresión: $W = \int_{v_1}^{v_2} p \cdot dv$, se pide resolver la integral, hallar una expresión para **W**. Luego, discutir el signo **W**.

33) Lev de Hooke

La ley de Hooke expresa que la fuerza (**F**) de recuperación de un resorte es proporcional a la “elongación” sufrida en el mismo: $F = k \cdot x$ (**k** = cte del resorte ó cte de elasticidad).



Consideramos un resorte cuyo extremos izquierdo está fijo mientras el derecho es libre de moverse a la largo de la recta de acción del resorte. El resorte, en **reposo** (ni comprimido ni estirado) tiene una longitud **L** a la que llamamos **longitud natural**. Si está en reposo decimos que está en su **posición de equilibrio**

En estas condiciones se introduce un sistema de referencia (eje **x**) a lo largo de la línea del resorte, con el sentido positivo (+) hacia la derecha y el origen, **O**, en el extremo derecho del resorte cuando está en

la **posición de reposo**. Con **x** indicamos la **posición** del extremo derecho del resorte a partir de **O** y a lo largo del **eje x**. Así construido el sistema **x** puede ser **positiva**, **cero** o **negativa** según el extremo móvil esté a la **derecha**, **en**, o la **izquierda** de su **posición de equilibrio** ($x=0$).

El sistema se pone en movimiento *forzando* al extremo derecho a abandonar la posición de equilibrio a través de una fuerza **F** cuya intensidad y sentido depende de “**x**” según la **ley de Hooke**. Para estirar el resorte la fuerza debe actuar hacia la derecha ($x > 0$). Para comprimir el resorte la fuerza debe actuar hacia la izquierda ($x < 0$).

Si con **W** indicamos el trabajo realizado para estirar (o comprimir) un resorte “**ℓ cm**” respecto a su posición de equilibrio, entonces $W = \int_0^{\ell} F(x) \cdot dx$ con $F(x) = k \cdot x$

- Calcular el trabajo realizado sobre un resorte cuya constante elástica es $k=1,8$ erg/cm, si el mismo mide **7 cm**. y se lo ha estirado hasta alcanzar **9 cm**.
- Calcular el trabajo realizado para comprimir un resorte **6 cm**. desde su posición de reposo si se sabe que para comprimirlo **2,5 cm** la fuerza requerida es de **12 kg**.

➤ Valor Promedio de f sobre $[a; b]$:

Dado un conjunto discreto de “**n**” números $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ su promedio es:

$$y_{prom} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$$

Pero, ¿cómo calculamos el *promedio* de un *continuo* de números, o sea, de un conjunto de números que viene dado por una función $y=f(x)$ en un intervalo $[a; b]$?

Por ejemplo, ¿cómo calculamos la temperatura *promedio* de un día, T_{prom} , si conocemos la función $T=f(t)$, t en horas (minutos o segundos) que informa la temperatura en cualquier momento de ese día?

Para hacer este cálculo dividimos el intervalo en 'n' partes iguales, cada una de ellas de longitud: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, elegimos 'n' puntos $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ en cada sub-intervalo y calculamos el promedio de $f(c_1), f(c_2), f(c_3), \dots, f(c_n)$: $\frac{f(c_1)+f(c_2)+f(c_3)+\dots+f(c_n)}{n}$

Por ejemplo si f es la función temperatura y $n=24$, esto significa que tomamos lecturas de temperaturas cada una hora y las promediamos.

Si despejamos 'n' de Δx y reemplazamos en el promedio anterior queda:

$$\frac{f(c_1) + f(c_2) + f(c_3) + \dots + f(c_n)}{n} = \frac{\Delta x}{b-a} \sum_{i=1}^n f(c_i) = \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x$$

Si hacemos que 'n' crezca calculamos el promedio de una cantidad mayor de números (por ejemplo, promediando lecturas de temperatura cada minuto, o cada segundo). En el límite, tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(c_i) dx$$

Definimos entonces **el valor promedio de f sobre $[a; b]$** , como:

$$f_{prom} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(c_i) dx$$

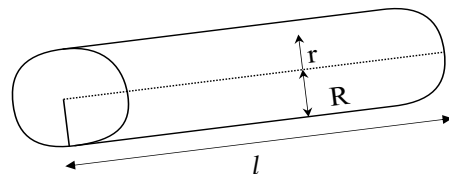
Actividades:

1) Hallar el valor promedio de $f(x) = 1 + x^2$ sobre $[-1,2]$. ¿Existe algún número de $c \in [-1,2]$ tal que $f(c) = f_{prom}$?

2) Dada $x=f(t)$, función posición de un móvil, demostrar que la velocidad media del móvil en $[t_1, t_2]$ es la misma que el promedio de velocidades (v_{prom} con $v=x'$) en el mismo intervalo. (Sugerencia: usar el teorema del cambio total)

3) La velocidad v de la sangre que fluye en un vaso de radio R y longitud l , a una distancia r del eje central es:

$$v(r) = \frac{P}{4\eta l} (R^2 - r^2)$$



donde P es la diferencia de presión entre los extremos del vaso y η la viscosidad de la sangre.

Se pide hallar la velocidad promedio, v_{prom} , sobre el intervalo $0 < r < R$. Compare la velocidad promedio con la velocidad máxima.

10.6 Integrales Impropias

Ciertas aplicaciones del cálculo conducen de manera natural a la formulación de integrales en las que:

1.- El intervalo de integración no es acotado; tiene la forma: $[a; +\infty)$ ó $(-\infty; b]$ ó $(-\infty; +\infty)$

2.- El integrando tiene una discontinuidad infinita en algún punto c : $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm \infty$

O sea, de integrales de la forma: $\int_1^{\infty} f(x) \cdot dx$; $\int_{-\infty}^4 f(x) \cdot dx$; $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot dx$;

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} \cdot dx$$

Estas integrales reciben el nombre de “**Integrales Impropias**”.

Ejemplo 1: Integral Impropia

(1ra especie- intervalo no acotado)

Dada $f : [1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = \frac{1}{x^2}$,

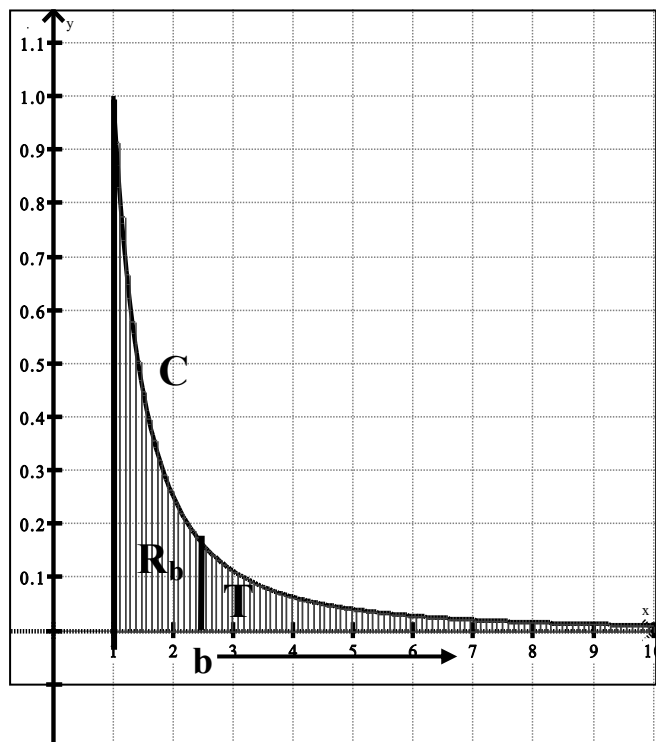
si R_b es la región “acotada” por la curva $C = \text{graf } f$, el eje x y las rectas $x = 1$; $x = b$ entonces,

$$\text{área } R_b = \int_1^b \frac{1}{x^2} \cdot dx \quad (b > 1)$$

$$\text{área } R_b = 1 - \frac{1}{b} \quad (\text{verificar}).$$

Dada T , la región “no acotada” comprendida entre la curva C , el eje x y la recta $x = 1$, lo “razonable” es suponer que esta región no tiene “área finita”.

Sin embargo, y aunque resulte sorprendente, existen regiones no acotadas con áreas finitas.



Problema: ¿área T?

Para analizar si este área existe (o no), lo que hacemos es calcular que sucede con el área R_b cuando $b \rightarrow +\infty$. Si este límite es **finito** ($L \in \mathbb{R}$); decimos que **área T = L**.

$$\text{Calculamos:} \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} \text{área } R_b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\int_1^b \frac{1}{x^2} \cdot dx \right] = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[1 - \frac{1}{b} \right] = 1$$

$$\text{Concluimos:} \quad \text{área } T = 1 \quad (= \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} \cdot dx)$$

Definición Integrales Impropias (1ra especie)

Caso 1: $\text{dom } f = (a; +\infty)$:
$$\int_a^{\infty} f(x).dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\int_a^b f(x).dx \right] \quad (b > a)$$

Caso 2: $\text{dom } f = (-\infty; b)$:
$$\int_{-\infty}^b f(x).dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[\int_a^b f(x).dx \right] \quad (a < b)$$

Caso 3: $\text{dom } f = (-\infty; \infty)$:
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x).dx = \left[\int_{-\infty}^c f(x).dx \right] + \left[\int_c^{\infty} f(x).dx \right]$$

(si ambas integrales “convergen” para cualquier elección conveniente de c)

Integrales Impropias

- Si el límite existe decimos que la integral impropia “converge”. (ej. 1)
- Si el límite no existe decimos que la integral impropia “diverge”.
- Si el límite es “infinito” decimos que la integral impropia “diverge a infinito”.

Actividades:

1) Evaluar las siguientes integrales impropias de 1ra especie, indicar V ó F:

a) $\int_3^{\infty} \frac{1}{x^2}.dx = \frac{1}{3}$

b) $\int_{-\infty}^3 \frac{1}{x^2}.dx = \frac{1}{3}$ (¿puede prever este resultado sin calcular la integral?; ¿porqué?)

c) $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}.dx = \frac{\pi}{2}$

d) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}.dx = \frac{\pi}{2}$ (¿puede prever este resultado sin calcular la integral?; ¿porqué?)

e) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}.dx = \pi$

f) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x}}.dx = +\infty$

g) $\int_1^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2}.dx = +\infty$ (sug.: usar la siguiente igualdad $\frac{1+x}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2}$).

2) Para el Caso 3,
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x).dx = \left[\int_{-\infty}^c f(x).dx \right] + \int_c^{\infty} f(x).dx$$

(si ambas integrales “convergen” para cualquier conveniente elección de c)

Podemos preguntarnos si no habrá otra forma “más simple” de calcular esta integral

como por ejemplo, con la siguiente expresión:
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t f(x).dx$$

La respuesta es **NO**. Para justificar esta respuesta basta mostrar que no da el mismo resultado.

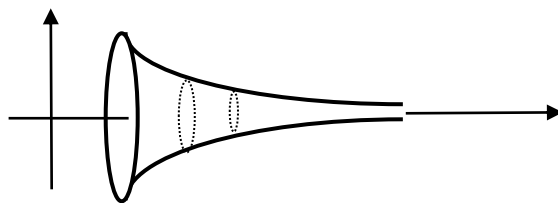
Se pide: mostrar que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t \frac{1+x}{1+x^2}.dx = \pi$ mientras que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2}.dx$, diverge.

(sug.: tomar $c = 1$; usar ejercicio (g)).

3) Muestre que el área bajo la curva $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \geq 1$ es “infinita”.

4) Calcule el volumen del “cuerno de Gabriel” si se sabe que este volumen es finito.

* cuerno de Gabriel: sólido generado al girar alrededor del eje x la región determinada por la curva $y = \frac{1}{x}$ y el eje x , para $x \geq 1$



Ejemplo 2: Integral Impropia

(2da especie- función discontinua)

Dada $f: (0; 4] \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$,

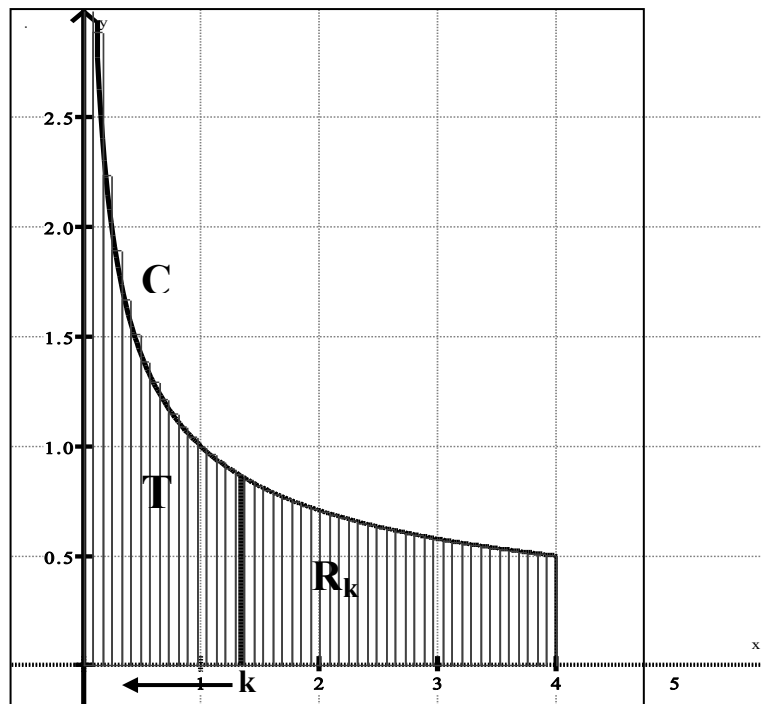
si R_k es la región “acotada” por la curva $C = \text{graf } f$, el eje x y las rectas $x = k$;

$x = 4$ entonces, $\text{área } R_k = \int_k^4 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot dx$. ($a > 0$)

$\text{área } R_k = 4 - 2\sqrt{k}$ (verificar).

Dada T , la región “no acotada” comprendida entre C , el eje x y las rectas $x = 0$, $x = 4$; lo “razonable” es suponer que esta región no tiene “área finita”.

Sin embargo, y aunque siga siendo sorprendente, existen regiones de este tipo con áreas finitas.



Problema: ¿área T?

Para analizar si este área existe (o no), lo que hacemos es calcular que sucede con el $\text{área } R_k$ cuando $k \rightarrow 0$. Si este límite es finito ($L \in \mathbb{R}$); decimos que $\text{área } T = L$

O sea; calculamos: $\lim_{k \rightarrow 0} R_k = \lim_{k \rightarrow 0^+} \left[\int_k^4 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot dx \right] = \lim_{k \rightarrow 0^+} [4 - 2\sqrt{k}] = 4$

concluimos: $\text{área } T = 4$ ($= \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot dx$)

Definición Integrales Impropias (2da especie)

Caso 1: $\text{dom } f = (a; b]$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$; $\int_a^b f(x) \cdot dx = \lim_{k \rightarrow a^+} \left[\int_k^b f(x) \cdot dx \right]$

Caso 2: $\text{dom } f = [a; b)$, $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \pm \infty$; $\int_a^b f(x) \cdot dx = \lim_{k \rightarrow b^-} \left[\int_a^k f(x) \cdot dx \right]$

Caso 3: $\text{dom } f = [a; b] - \{c\}$, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm \infty$

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = \left[\int_a^c f(x) \cdot dx \right] + \left[\int_c^b f(x) \cdot dx \right]$$

(si ambas integrales impropias del lado derecho, “convergen”)

5) Evaluar las siguientes integrales impropias de 1ra especie, indicar V ó F:

a) $\int_1^2 \frac{1}{(x-2)^2} \cdot dx = +\infty$

b) $\int_1^3 \frac{1}{(x-2)^2} \cdot dx = +\infty$

c) $\int_0^2 \frac{1}{(2x-1)^{2/3}} \cdot dx = \frac{3}{2}(1 + \sqrt[3]{3})$

10.7 Integrales de Funciones Vectoriales

10.7.1 Introducción

Sea la función vectorial $\vec{v}: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, con $\vec{v}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j}$, donde f y g son funciones continuas $\forall t \in [a; b]$, las **primitivas** de $\vec{v}$ son funciones vectoriales y la **integral indefinida** es una familia de funciones vectoriales.

Dado que las funciones componentes de $\vec{v}$ son funciones escalares, la familia de primitivas de $\vec{v}$ puede obtenerse a partir de las integrales indefinidas de sus funciones componentes. Luego:

$$\int \vec{v}(t) dt = \left(\int f(t) dt \right) \vec{i} + \left(\int g(t) dt \right) \vec{j}$$

Haciendo extensivos los **Teoremas Fundamentales del Cálculo Integral** para funciones vectoriales y aplicando a continuación la **Regla de Barrow**, la **integral definida** de una función vectorial $\vec{v}$ en $[a; b]$ es un vector y puede obtenerse integrando cada una de sus funciones componentes y luego evaluando en los extremos del intervalo:

$$\int_a^b \vec{v}(t) dt = \vec{R}(t) \Big|_a^b = \vec{R}(b) - \vec{R}(a) \text{ donde } \vec{R} \text{ es una primitiva de } \vec{v}, \text{ es decir, } \vec{R}'(t) = \vec{v}(t)$$

$$\forall t \in [a; b]. \text{ Reemplazando llegamos a: } \int_a^b \vec{R}'(t) dt = \vec{R}(t) \Big|_a^b = \vec{R}(b) - \vec{R}(a) = \Delta \vec{R}_{[a; b]}$$

Es decir que el resultado de integrar la razón de cambio instantánea de $\vec{R}$ cuando t varía desde a hasta b es el cambio total de $\vec{R}$ para ese mismo intervalo.

10.7.2 Cambio total

* Si $\vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t); y(t))$, es la **función de posición** de un objeto que se mueve en el plano con $t \in [t_1; t_2]$, entonces su **velocidad** es $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t) dt &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{r}'(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} (x'(t); y'(t)) dt = \left(\int_{t_1}^{t_2} x'(t) dt; \int_{t_1}^{t_2} y'(t) dt \right) = \\ &= (x(t_2) - x(t_1); y(t_2) - y(t_1)) = (\Delta x; \Delta y) = \Delta \vec{r}_{[t_1; t_2]} \end{aligned}$$

es el “cambio total de posición” ó “desplazamiento total” $(\Delta x; \Delta y)$ entre t_1 y t_2

Conocida la función **velocidad**, ¿Se puede determinar cuál es la **posición** del móvil en cada instante? **NO**, pues falta la condición inicial.

$$\int \vec{v}(t) dt = \int \vec{r}'(t) dt = \int (x'(t); y'(t)) dt = \left(\int x'(t) dt; \int y'(t) dt \right) = (x(t) + A; y(t) + B)$$

Ejemplo: Una partícula comienza su movimiento siendo su posición inicial $\vec{r}(0) = (1; 0)$ con una velocidad $\vec{v}(t) = (2t; \sin(t))$. Determina la velocidad inicial, posición y aceleración en cada instante.

$$\int \vec{v}(t) dt = \int \vec{r}'(t) dt = \int (2t; \sin(t)) dt = \left(\int 2t dt; \int \sin(t) dt \right) = (t^2 + A; -\cos(t) + B)$$

$$A=1; B=1 \Rightarrow \vec{r}(t) = (t^2 + 1; -\cos(t) + 1)$$

10.7.3 Actividades:

1) Evaluar las siguientes integrales:

a) $\int_0^1 \vec{r}(t) dt$ si $\vec{r}(t) = (2t; t+1)$

b) $\int_0^\pi \vec{r}(\theta) d\theta$ si $\vec{r}(\theta) = (\cos\theta; \sin\theta)$

c) $\int_3^8 \vec{r}(t) dt$ si $\vec{r}(t) = (5; t; \sqrt{t+1})$

2) Encontrar $\vec{r}(t)$ si $\vec{r}'(t) = t^2 \vec{i} + 4t^3 \vec{j} - t^2 \vec{k}$ y $\vec{r}(0) = \vec{j}$

3) Determinar los vectores velocidad y posición de una partícula que tiene la aceleración y la velocidad y posición inicial dadas:

a) $\vec{a}(t) = -10\vec{k}$ $\vec{v}(0) = (1; 1; -1)$ $\vec{r}(0) = (2; 3; 0)$

b) $\vec{a}(t) = \vec{i} + 2\vec{j} + 2t\vec{k}$ $\vec{v}(0) = \vec{0}$ $\vec{r}(0) = \vec{i} + \vec{k}$

c) $\vec{a}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + \cos 2t\vec{k}$ $\vec{v}(0) = \vec{i} + \vec{k}$ $\vec{r}(0) = \vec{j}$

4) Una partícula en movimiento comienza con una posición inicial $\vec{r}(0) = (1; 0; 0)$ y una velocidad $\vec{v}(t) = (2t^2 + 1; 3t^2 - 1; t + 1)$. Determinar velocidad inicial, posición y aceleración en el tiempo y aceleración inicial.

5) En un laboratorio de biología se cruzan moscas de la fruta (*Drosophila melanogaster*) con distintas características a fin de estudiar el efecto sobre la progenie. Una de ellas se escapa del frasco donde estaban y se posa en un pizarrón que había en la habitación. Suponiendo situar un sistema de referencia cartesiano ortogonal con origen ubicado en el vértice inferior izquierdo del pizarrón y ejes coordenados conteniendo a dos de los lados del mismo, la mosca estaría inicialmente posada en el punto $\mathbf{P}(0; 5)$. A partir de esa posición comienza a moverse con velocidad instantánea dada por $\vec{v}(t) = (2; 8 - 8t)$ hasta que alcanza el borde inferior del pizarrón, momento en el cual deja de verse. Si el tiempo se mide en minutos y las dimensiones del pizarrón en decímetros:

- Determinar la función $\vec{r}$ que describe la posición de la mosca en cada instante explicitando dominio, ley y codominio.
- Demostrar que la trayectoria T descrita por la mosca es un arco de parábola.
- Hallar el vector desplazamiento en el período de tiempo estudiado.
- Graficar la trayectoria de la mosca señalando el sentido de recorrido y el vector desplazamiento hallado en el ítem anterior.
- Indicar verdadero o falso justificando la respuesta:
 - A los 2 minutos la mosca se hallaba a igual altura que al comienzo del movimiento.
 - La mosca tarda 5 minutos en detener su movimiento.
 - $\vec{s}(\lambda) = (\lambda; 4\lambda - \lambda^2 + 5)$ con $0 \leq \lambda \leq 5$ describe también la trayectoria de la mosca.

6) Según el modelo atómico de Bohr-Rutherford, los electrones giran alrededor del núcleo atómico siguiendo órbitas circulares estables. Si situamos un sistema de referencia cartesiano ortogonal con **origen de coordenadas en el centro de la circunferencia** recorrida por cada electrón, la **posición** de uno de ellos puede definirse por la función vectorial $\vec{r}$, con $t \in [0, +\infty]$. Siendo $\vec{v}(t) = (\text{sen}(2t), \cos(2t))$ la **velocidad** del electrón

en cada instante t y $\vec{r}(0) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

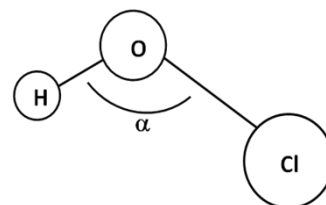
a) Hallar la ley de la función $\vec{r}$ y graficar la trayectoria del electrón señalando el sentido de recorrido.

b) Indicar el tiempo que tarda el electrón en volver a pasar por la posición inicial.

c) Calcular el desplazamiento neto del electrón en el período $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ mediante dos procedimientos diferentes.

7) Una molécula no es una asociación rígida de átomos. Está demostrado que todas las moléculas están en movimiento continuo; por lo tanto un modelo molecular puede ser un sistema en el que los átomos de la molécula se representan con esferas de diferentes masas y los enlaces químicos de la misma con resortes de longitudes variables.

En una molécula triatómica heteronuclear, como el ácido hipocloroso (HClO, ver gráfico adjunto a la derecha), el aumento y disminución periódica del ángulo del enlace H-O-Cl produce un cambio continuo en la distancia interatómica entre los átomos de H y Cl.



Si situamos la molécula en un sistema de referencia cartesiano ortogonal de manera que:

- el "átomo de oxígeno" (O), simula quedar estático en el origen de coordenadas;
- la posición del "átomo de hidrógeno" (H) podría considerarse fija en el punto $(-1; 0)$;
- la posición del átomo de cloro (Cl) podría describirse por una función vectorial $\vec{r}$ y la velocidad con que se mueve puede modelizarse a través de la función $\vec{v}(t) = (-\text{sen}(t), 2\cos(t)\text{sen}(t))$ con $t \in \mathbb{R}_0^+$. Sabiendo que inicialmente el Cl estaba ubicado en el punto de coordenadas $(1, 1)$:

a) Graficar la situación inicial de la molécula de HClO en un sistema cartesiano apropiado.

b) Hallar la función $\vec{r}$ que modeliza la posición de Cl en cada instante t , indicando ley, dominio y codominio de $\vec{r}$.

c) Dar una parametrización de la curva C definida por $\vec{r}$.

d) Demostrar que la trayectoria descrita por el átomo de Cl es un arco de parábola, encontrando previamente la ecuación cartesiana de C .

e) Graficar la trayectoria del Cl en el gráfico del ítem a.

f) Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justificar todas tus respuestas:

i) En el instante $t = \frac{3}{2}\pi$, el Cl se está acercando a su posición inicial.

ii) El tiempo T empleado en volver a alcanzar la posición inicial es $T = \pi$

iii) En el intervalo $[0, 2\pi]$ el desplazamiento del Cl es nulo.

iv) En el intervalo $[0, 2\pi]$ la distancia recorrida por el Cl es nula.

v) La aceleración del Cl es constante.

11 — Ecuaciones Diferenciales

11.1 Introducción

La descripción matemática de procesos o fenómenos de distinta naturaleza se hace mediante funciones que muestran la relación de dependencia entre las magnitudes del caso. Conocida f (*función del proceso*) se sabe que para hallar la velocidad del mismo basta calcular f' y para hallar su aceleración, f'' .

A menudo debemos resolver problemas que de alguna manera podemos llamar *inversos* del anterior; o sea, problemas donde se conoce la velocidad (f') y/o la aceleración (f'') a la que se desarrolla el proceso y la *incógnita* es f , la función del proceso. En general, y en los hechos, puede que velocidad y aceleración tampoco sean conocidas pero que, investigando, se pueda describir por medio de una *ecuación* la “*relación entre f y sus derivadas*”.

***Ecuación Diferencial:** ecuación donde la **incógnita** es una **función** y en la que aparecen una o más **derivadas** de la función incógnita.

En este capítulo nos ocupamos de las **Ecuaciones Diferenciales**, los distintos tipos y métodos de resolución de las mismas. Vemos problemas de naturaleza análoga a la siguiente:

Ej.1: ***dato:** $y' = v(t)$ ($v = \text{velocidad}$) $\rightarrow$ **incógnita:** $y = f(t)$ tal que $f'(t) = v(t)$

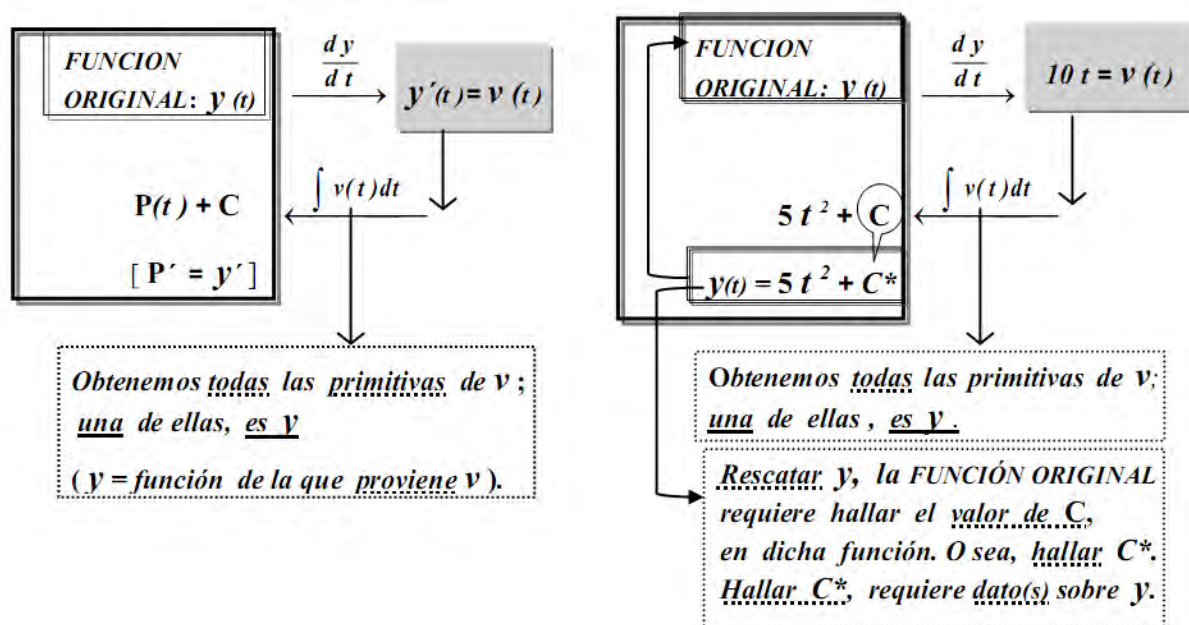
Ej.2: ***dato:** $y'' = a(t)$ ($a = \text{aceleración}$) $\rightarrow$ **incógnita:** $y = f(t)$ tal que $f''(t) = a(t)$

Ej. 3: ***dato:** $y' = 0.1 y$ $\rightarrow$ **incógnita:** y tal que, la razón de cambio de y sea proporcional a y .

Ej.1: la resolución de este problema requiere hallar una función f tal que $f' = v$; en otras palabras, una primitiva de v .

⊗ Ya sabemos obtener **primitivas** de una función; que para ello debemos **integrar** la función. Sabemos también que al integrar no obtenemos una sino **infinitas primitivas**.

Así, en el caso de un problema “real”, vemos que para hallar la solución debemos **integrar** la función dato y hacer “algo más”.



⊗ Resumiendo:

El tipo de *problema* del que nos vamos a ocupar tiene, en esencia, la siguiente estructura:

* **Incógnita:** f (una función)

* **Datos:** $\begin{cases} \text{ecuación diferencial} & (\text{la que describe la relación entre } f \text{ y sus derivadas}) \\ \text{dato}_{(s)} \text{ inicial}_{(s)} & (\text{para determinar una solución del problema}). \end{cases}$

Problema 1:

Se comienza a llenar un tanque de **100 ls.** con agua que sale de una canilla a una velocidad $v(t) = 3t^2$, $[v] = \text{lbs./h.}$ Hallar $V = V(t)$ si el tanque tiene **6 ls** al comenzar a llenarlo.

* **proceso:** llenado de un tanque de **100 ls.** de capacidad.

Función del proceso: $V = V(t)$ con $V =$ volumen de agua en el tanque al instante t .

* **incógnita:** $V = V(t)$

* **datos:** $v = 3t^2$, velocidad del proceso $\Rightarrow \frac{dV}{dt} = 3t^2$

$V(0) = V_0 = 6 \text{ (ls)} \Rightarrow$ dato inicial sobre la función incógnita

Problema reformulado: $\begin{cases} \frac{dV}{dt} = 3t^2 & (\text{ecuación diferencial}) \\ V(0) = 6 & (\text{dato inicial}) \end{cases}$

* **Resolución:**

1ro) resolvemos la ecuación diferencial $\rightarrow$ hallamos todas las primitivas de v .

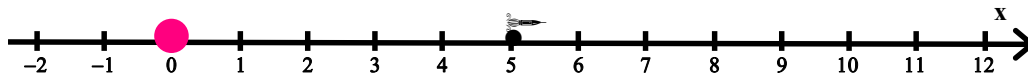
$$\frac{dV}{dt} = 3t^2 \xrightarrow{\text{todas las primitivas}} \int 3t^2 \cdot dt = t^3 + C$$

2do) determinamos C^* / $V(t) = t^3 + C^*$

$$V(0) = 0 + C^* \xrightarrow{\text{data } V(0)=6} C^* = 6$$

3ro) **Rta:** la función solución es: $V(t) = t^3 + 6$.

Problema 2:



Una partícula **P** se desplaza según un movimiento rectilíneo y con aceleración $a = -6t$ [a]= $\frac{cm}{seg^2}$. Si la velocidad inicial es $v_o = 12$ y al momento de comenzar a moverse la partícula está a 5 cms. del origen; ¿dónde se encuentra pasado 1 seg?; ¿2 segs?; ¿3 segs?. Graficar su “trayectoria”.

* **proceso:** movimiento rectilíneo con aceleración no constante.
Función del proceso: $x = x(t)$ con x = posición de **P** al instante t .

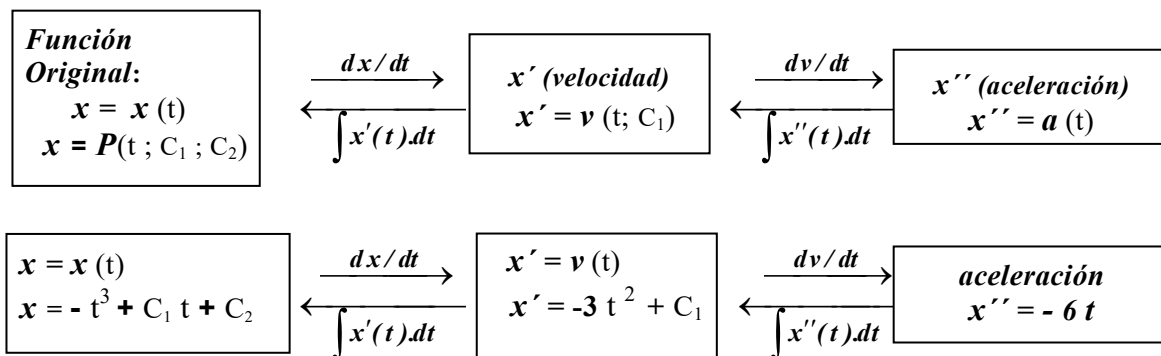
* **datos:** $a = -6t$; aceleración de **P** $\Rightarrow x''(t) = -6t$
 $x_o = 5$ (posición inicial) $\Rightarrow x(0) = 5$
 $v_o = 12$ (velocidad inicial) $\Rightarrow x'(0) = 12$

* **incógnita:** $x(1)$; $x(2)$; $x(3) \Rightarrow$ incógnita “oculta”: $x = x(t)$.

Problema reformulado: $\left\{ \begin{array}{l} x'' = -6t \\ x(0) = 5 \\ x'(0) = 12 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{(ecuación diferencial)} \\ \text{(condiciones iniciales)} \end{array}$
--

* Resolución:

El **dato** es la **derivada segunda** de la función incógnita; así, rescatar la función requiere integrar dos veces. Como consecuencia de esto, tenemos dos constantes en la función solución (una por cada integral), de allí la necesidad de dos condiciones iniciales.



$$\diamond x = -t^3 + C_1 t + C_2 \Rightarrow x(0) = C_2 \xrightarrow{\text{1er cond.} \rightarrow x(0)=5} C_2 = 5$$

$$\diamond x' = -3t^2 + C_1 \Rightarrow x'(0) = C_1 \xrightarrow{\text{2da cond.} \rightarrow x'(0)=12} C_1 = 12$$

Rta 1: $x(t) = -t^3 + 12t + 5$ ($v(t) = x'(t) = -3t^2 + 12 \rightarrow v(2) = 0$)

Rta 2: $t = 1 \rightarrow x(1) = 16 \Rightarrow P$ está 16 cm. a la **derecha** del origen ($v(1) > 0$).

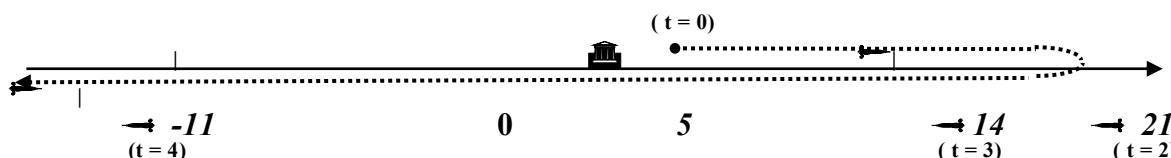
$t = 2 \rightarrow x(2) = 21 \Rightarrow P$ está 21 cm. a la **derecha** del origen ($v(2) = 0$)

$t = 3 \rightarrow x(3) = 14 \Rightarrow P$ está 14 cm. a la **derecha** del origen ($v(3) < 0$)

$t = 4 \rightarrow x(4) = -11 \Rightarrow P$ está 11 cm. a la **izquierda** del origen ($v(4) < 0$)

Trayectoria: P parte de $x_0 = 5$ y *avanza* hacia la *derecha* durante **2 seg.**, instante en que se “para”, $v(2) = 0$, a **21 ms.** del origen. A partir de allí la velocidad es negativa ($v(t) < 0$, $\forall t > 2$), lo que indica que a los **2 seg.** *pega la vuelta* y comienza a moverse *avanzando* hacia la *izquierda*. A los **3 seg.** todavía no llegó al origen, está a **14 cm.** del mismo y a su *derecha*. A los **4 seg.** se encuentra a **11 cm.** del origen pero, a su *izquierda*.

Observación: averiguar cuando P pasa por el origen requiere resolver la ecuación $x(t^*)=0$, ecuación que no podemos resolver sin auxilio de la tecnología pues no conocemos su “resolvente”. Si no necesitamos mucha precisión en el valor de t^* entonces, a simple vista, vemos que la partícula pasa por el origen en algún momento entre los 3 y 4 seg. de iniciado el movimiento.



Problema 3:

Para hallar la función f que **modeliza** el proceso de disolución de cierto soluto en un solvente se procede a medir, cada hora y durante 5 horas, la cantidad de masa de soluto disuelta hasta el momento de tomar la muestra. Se organiza la información obtenida en una tabla, la que se adjunta. (en otras palabras, se obtiene la representación “numérica” de f).

Se pide investigar la “nube de puntos/dato” en busca de algún tipo de “regularidad” o “patrón” en el conjunto de puntos que la forma. En caso de detectar “algo”, usar este dato para dar la ley de f con fórmula, $m = f(t)$.

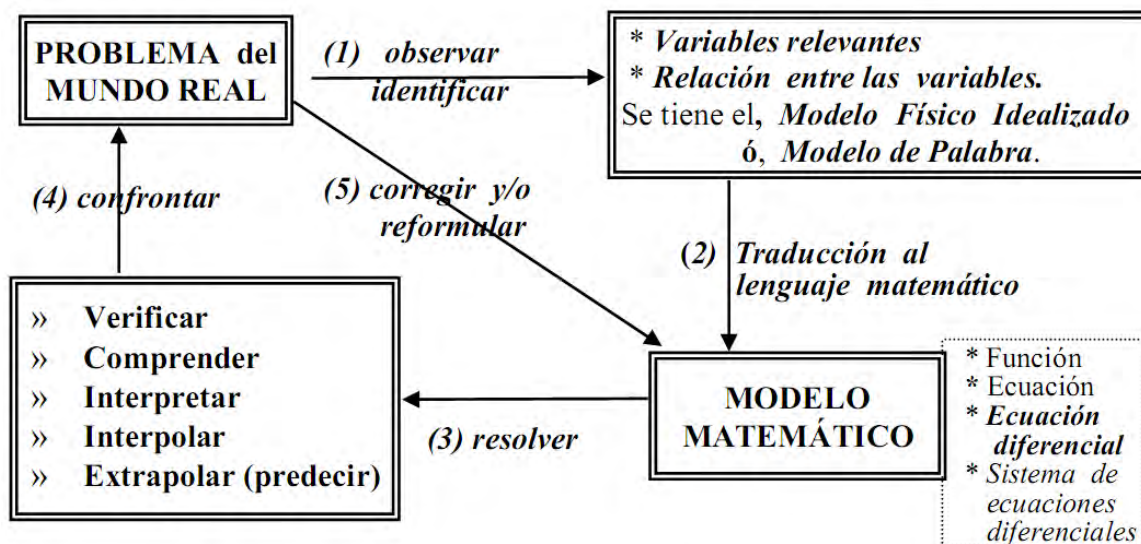
(m = masa disuelta en t hs., [m] = gr)

(NOTA: se sabe que el proceso se desarrolla en forma regular y continua durante las 5 hs.)

t	$m = f(t)$
0	$m_0 = 10.00$
1	$m_1 = 11.00$
2	$m_2 = 12.10$
3	$m_3 = 13.31$
4	$m_4 = 14.64$
5	$m_5 = 16.10$

En este caso el problema planteado consiste en buscar el “**modelo matemático**” de un cierto proceso a partir de **datos experimentales**; o sea, lo que en particular se ha dado en llamar, el “**modelo empírico**”. **Modelo Empírico:** modelo obtenido por *observación*, *experimentación* o *simulación* del proceso. O sea, es un *modelo matemático* basado en la *obtención y registro metódico de datos*; posterior búsqueda de un *patrón de comportamiento* para la *nube de puntos* que se obtenga. Muchas veces este proceso desemboca en una “**ecuación diferencial**”

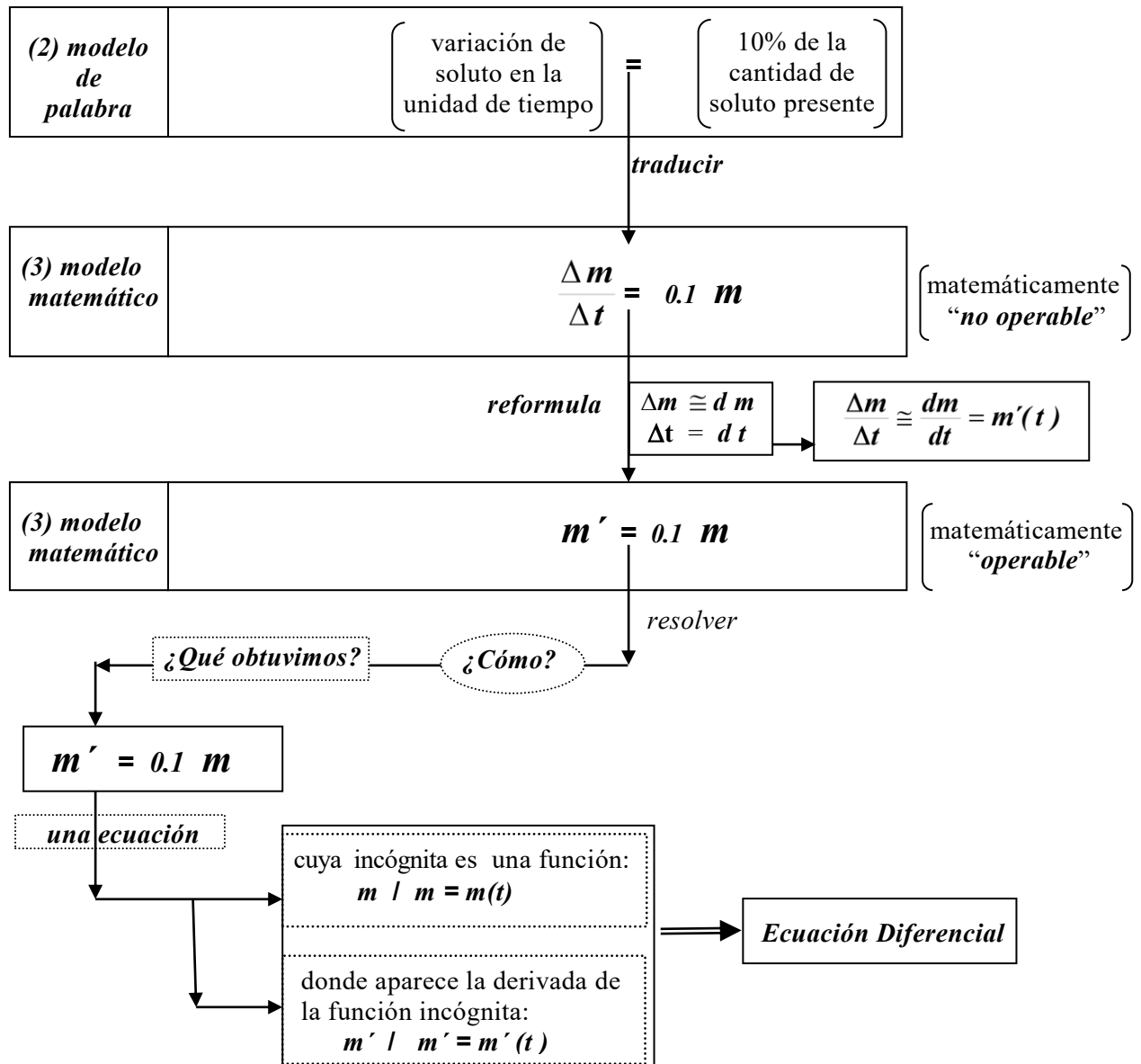
El siguiente cuadro resume el proceso descrito:



⊗ Procedemos a recorrer este circuito, comenzando por (1)

			(1) OBSERVACIÓN
t	$m = f(t)$	$\Delta m_i = m_i - m_{i-1}$	relación entre Δm_i y m_{i-1}
0	$m_0 = 10.00$	-----	-----
1	$m_1 = 11.00$	$\Delta m_1 = 1$	= 10% m_0
2	$m_2 = 12.10$	$\Delta m_2 = 1.1$	= 10% m_1
3	$m_3 = 13.31$	$\Delta m_3 = 1.21$	= 10% m_2
4	$m_4 = 14.64$	$\Delta m_4 = 1.33$	= 10% m_3
5	$m_5 = 16.10$	$\Delta m_5 = 1.46$	= 10% m_4
i	m_i		
i+1	m_{i+1}	Δm_{i+1}	= 10% m_i

(1) Relación entre las variables: $\Delta t = 1 \rightarrow \Delta m = 10\% m$



El modelo empírico finalmente resulta ser una “**ecuación diferencial**” y, en consecuencia, la respuesta del problema planteado, **una solución** de dicha ecuación.

Pero, ¿cómo resolvemos esta ecuación? La misma es *distinta* a las vistas en los problemas anteriores pues en ella aparecen *relacionadas* la derivada y la propia función incógnita, $m = m(t)$.

En general en los problemas que desembocan en el planteo de una ecuación diferencial, dicha ecuación consiste (como en este caso) en una *relación* entre la función y una (o más) de sus derivadas. En tal caso la resolución de ecuaciones diferenciales se complica, no podemos simplemente “rescatar” la función a partir de sucesivas integraciones; más aún, existen ecuaciones para las cuales no existe forma o método conocido de encontrar la solución exacta, aunque teóricamente se haya probado que dicha solución existe. Sin embargo, para algunos tipos de ecuaciones diferenciales, existen métodos simples y efectivos para hallar la solución exacta.

En lo que sigue vemos algunos de estos métodos, para algunos tipos particulares de ecuaciones diferenciales.

11.2 Definiciones y Conceptos Básicos

***Ecuación Diferencial:** llamamos ecuación diferencial a toda ecuación donde la incógnita es una función y en la cual aparecen una o más derivadas de la función incógnita. Según sea la función incógnita las ecuaciones diferenciales se clasifican en:

Ecuaciones diferenciales ordinarias - EDO:

la incógnita es función de una variable; o sea, funciones de la forma: $y = y(x)$; $x = x(t)$.

Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales:

la incógnita es función de dos o más variables; o sea, funciones del tipo: $z = f(x,y)$; $w = f(x,y,z)$

***Orden de una ecuación diferencial:** es el orden de la derivada de *mayor orden* en la ecuación.

Ejemplos:

Ecuación Diferencial	Incógnita	Tipo	Orden
$V' = 3t^2$ (Problema 1)	$V = V(t)$	EDO	1
$x'' = -6t$ (Problema 2)	$x = x(t)$	EDO	2
$x' = 0.1x$ (Problema 3)	$x = x(t)$	EDO	1
$x^2 y'' + x y' - 4y = 0$	$y = y(x)$	EDO	2
$y'' - 3y' + 2y = 0$	$y = y(x)$	EDO	2
$y''' - 3y'' + 2y' = 0$	$y = y(x)$	EDO	3
$x + y y' = 0$	$y = y(x)$	EDO	1
$y' = y^{2/3}$	$y = y(x)$	EDO	1
$(y')^2 + 3y^3 = \sin x$	$y = y(x)$	EDO	1

<i>Ecuación Diferencial</i>	<i>Incógnita</i>	<i>Tipo</i>	<i>Orden</i>
$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$	$z = f(x; y)$	<i>Der. Parciales</i>	<i>1</i>
$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{-2mE}{h^2} \cdot \psi$ <i>Ecuación de Schrödinger. Modelo atómico para una partícula</i>	$\psi = \psi(x; y; z)$ ψ no depende de t.	<i>Der. Parciales</i>	<i>2</i>
$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = \frac{-2mE}{h^2} \cdot \psi$ <i>Ecuación de Schrödinger. Modelo atómico para una partícula</i>	$\psi = \psi(x)$ ψ no depende de t	EDO	<i>2</i>

*** Solución de una Ecuación Diferencial:**

Dada una ecuación diferencial, decimos que la función ϕ es **solución** de la ecuación si **al sustituir** la función y las derivadas que aparecen en la ecuación, por ϕ y sus derivadas, la ecuación **se satisface**; es decir, **se verifica la igualdad**.

Ejemplos: verificar que las funciones indicadas son solución de la correspondiente ecuación.

<i>Ecuaciones Diferenciales</i>	<i>Incógnita</i>	<i>Orden</i>	<i>Solución general</i>	<i>Sol. particular</i>
$V' = 3t^2$ (Problema 1)	$V = V(t)$	<i>1</i>	$V(t) = t^3 + C$	$V(t) = t^3 + 6$
$x'' = -6t$ (Problema 2)	$x = x(t)$	<i>2</i>	$x = -t^3 + C_1 t + C_2$	$x = -t^3 + 4t + 5$
$x' = 0.1x$ (Problema 3)	$x = x(t)$	<i>1</i>	$x = C e^{0.1t}$	$x = 10 e^{0.1t}$
$x^2 y'' + x y' - 4y = 0$	$y = y(x)$	<i>2</i>	$y = C_1 x^2 + C_2 x^{-2}$	$y = x^2$
$y'' - 3y' + 2y = 0$	$y = y(x)$	<i>2</i>	$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$	$y = e^x - e^{2x}$
$y''' - 3y'' + 2y' = 0$	$y = y(x)$	<i>3</i>	$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3$	$y = e^x + e^{2x} + 3$
$x + y y' = 0$	$y = y(x)$	<i>1</i>	$x^2 + y^2 = C$	$x^2 + y^2 = 25$
$y' = y^{2/3}$	$y = y(x)$	<i>1</i>	$y = \left(\frac{x}{3} + C\right)^3$	$y = \left(\frac{x}{3} + 2\right)^3$
$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = -\lambda \cdot \psi$	$\psi = \psi(x)$	<i>2</i>	$\psi = A \sin(\sqrt{\lambda} t) + B \cos(\sqrt{\lambda} t)$ ó $\psi = C \sin(\sqrt{\lambda} t + \alpha)$	$\psi = 3 \cos(\sqrt{\lambda} t)$

Verificación de soluciones: para *establecer* si una función $y = f(x)$ es solución de una ecuación diferencial, reemplazamos y por $f(x)$ en la ecuación, derivamos, y concluimos recordando que

“ f es solución de la ecuación diferencial $\Leftrightarrow$ verifica la igualdad, $\forall x$ ”.

Ejemplo: analizar si $y = x^2$ es solución de $x^2 y'' + x y' - 4y = 0$.

$$\begin{aligned} x^2 y'' + x y' - 4y &= (\text{reemplazamos } y \text{ por } x^2) \\ &= x^2 [x^2]'' + x [x^2]' - 4[x^2] = x^2 \cdot [2] + x [2x] - 4[x^2] = \\ &= 2x^2 + 2x^2 - 4x^2 = 4x^2 - 4x^2 = 0 \quad \forall x \end{aligned}$$

Derivadas:

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ y' &= 2x \\ y'' &= 2 \end{aligned}$$

Luego; $y = x^2$, es solución de: $x^2 y'' + x y' - 4y = 0$

Ejemplo: analizar si $y = x^3$ es solución de $x^2 y'' + x y' - 4y = 0$

$$\begin{aligned} x^2 y'' + x y' - 4y &= (\text{reemplazamos } y \text{ por } x^3) \\ &= x^2 [x^3]'' + x [x^3]' - 4[x^3] = x^2 \cdot [6x] + x [3x^2] - 4[x^3] = \\ &= 6x^3 + 3x^3 - 4x^3 = 9x^3 - 4x^3 = 5x^3 \neq 0 \quad \forall x \end{aligned}$$

Derivadas:

$$\begin{aligned} y &= x^3 \\ y' &= 3x^2 \\ y'' &= 6x \end{aligned}$$

Luego; $y = x^3$, no es solución de $x^2 y'' + x y' - 4y = 0$

Observaciones:

En los problemas 1 y 2 aparece una ecuación diferencial de orden “1” y “2” respectivamente. En la resolución vimos que *recuperar* la función original (la solución) requiere a su vez “1” ó “2” integraciones; que cada integración aporta una constante a la función solución. O sea, que en la *solución general*, estarían apareciendo tantas constantes como el orden de la ecuación diferencial.

Se puede probar que:

*si una ecuación diferencial admite una solución entonces **admite infinitas**; en particular, admite una **familia de soluciones** (es decir un conjunto de soluciones del mismo tipo).

* si la ecuación diferencial es de orden “ n ” entonces, en la ecuación prototipo que representa la familia de soluciones, aparecen “ n ” constantes arbitrarias.

Tenemos distintos tipos de soluciones:

Definición 1: solución general: solución en la que aparecen las “ n ” constantes arbitrarias.

$$x = -t^3 + C_1 t + C_2 \quad ; \quad x^2 + y^2 = C$$

Definición 2: solución particular: solución que se obtiene al asignar un valor fijo a cada una de las constantes de la solución general.

$$x = -t^3 + 4t + 5 \quad ; \quad x^2 + y^2 = 9$$

Definición 3: solución singular:

Es una solución “aislada”; es decir, que no se encuentra incluida en la solución general (no se puede obtener asignando valores a las constantes)

Ejemplo: $y' = y^{2/3} \rightarrow$ **solución general:** $y = (\frac{x}{3} + C)^3, C \in \mathbb{R}$.

En este caso es fácil verificar que $y(x) = 0 \quad \forall x$, también es solución. También es fácil ver que no hay valor que se pueda dar a C tal que $y(x) = 0$ quede *incluida* en la solución general. Luego, $y(x) = 0$ es una ***solución singular***.

Modos de obtener una solución particular

Una solución particular se puede obtener básicamente de dos formas, y cuál de ellas uso depende del problema que se esté resolviendo. Así, esta solución puede darse:

- a) directamente, asignando valores arbitrarios a las constantes de la solución general; ó,
b) a partir de las llamadas “***condiciones iniciales***” (en el caso que estas existan).

Por ejemplo:

- a) resolver $y'' = -9,8$ y dar una solución particular.

**solución general*: $y(t) = -4,9 t^2 + C_1 t + C_2$ (obtenida integrando 2 veces);

**solución particular (arbitraria)*: $C_1 = 3; C_2 = -5 \rightarrow y(t) = -4,9 t^2 + 3 t - 5$

- b) Se arroja un peso **P** desde **16 Km** de altura y con velocidad inicial igual a cero. ¿Cuánto tarda **P** en llegar al suelo?

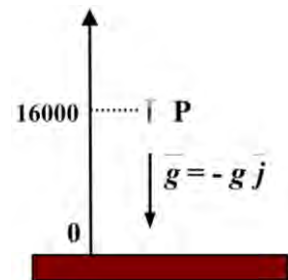
***proceso**: caída de un cuerpo (movimiento rectilíneo con aceleración **constante**: $g = 9,8 \text{ m/seg}^2$)

Función del proceso: $y = y(t)$ con $y = \text{posición de } P \text{ al instante } t$.

* **datos**: $g = 9,8$ (m/seg²), *aceleración de la gravedad*.

$y(0) = 16000$ (mts.) (*posición inicial (velocidad inicial)*).

* **incógnita**: $t \mid y(t) = 0 \Rightarrow \text{incógnita 'oculta': } y = y(t)$



Luego, reformulamos el problema: $\left[\begin{array}{l} y'' = -9,8 \text{ (ecuación diferencial)} \\ y(0) = 16000 \\ y'(0) = 0 \end{array} \right\} \text{ (condiciones iniciales)}$

* **resolución**: *solución general* $\rightarrow y(t) = -4,9 t^2 + C_1 t + C_2$

condiciones iniciales: $\left. \begin{array}{l} y(0) = 16000 \Rightarrow C_2 = 16000 \\ y'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \end{array} \right\} y(t) = -4,9 t^2 + 16000$

Rta: $t \mid y(t) = 0; y(t) = -4,9 t^2 + 16000 = 0 \Leftrightarrow t = \pm \sqrt{\frac{16000}{4,9}} \approx \pm 56$

Luego; **P** tarda aproximadamente **56 seg.** en llegar al suelo.

El “problema de valores iniciales” (Pvi)

Cuando hallar la solución de un problema requiere resolver una ecuación diferencial sujeta a ***condiciones iniciales***, decimos que tenemos un ***Pvi***.

Esto sucede, por ejemplo, en el problema (b) del ítem anterior:

Pvi. $\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y'' = -9,8 \text{ (ecuación diferencial)} \\ y(0) = 16000 \\ y'(0) = 0 \end{array} \right\} \text{ (condiciones iniciales)}$

Observar que en este caso la cantidad de condiciones iniciales (2), coincide con el orden de la EDO. Luego veremos que esto no es casual sino que es necesario para obtener la solución que, entre las infinitas soluciones de la ecuación diferencial es, “***solución del problema***”.

Ecuación y Curva / Solución.

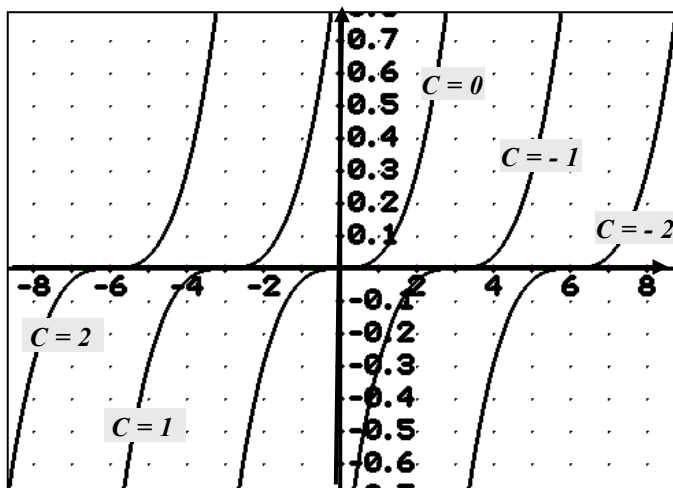
La solución general de una EDO es siempre una **ecuación en dos variables** en la que además aparecen una o más *constantes* (C), las que llamamos *parámetros*.

Geométricamente, una ecuación en dos variables en la que aparecen parámetros, es la ecuación prototipo de una **familia de curvas**. (O sea, de un conjunto de curvas, todas del mismo tipo).

Tenemos entonces que la **ecuación/solución** de una ecuación diferencial define una **familia de curvas**, las que llamamos **curvas/solución**. (También conocidas como **curvas integrales**).

Ejemplo 1: $y' = y^{2/3} \rightarrow$ solución general:

$$y = \left(\frac{x}{3} + C\right)^3; \quad C \in \mathbb{R}$$

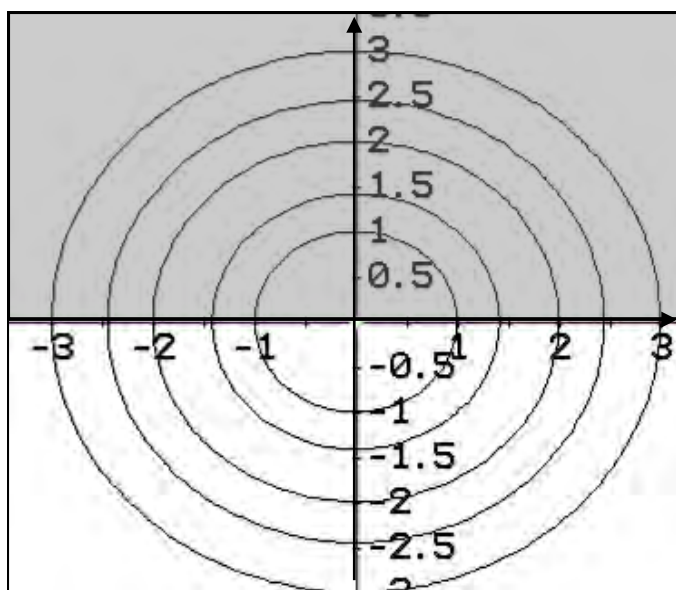


familia de curvas/solución

familia de parábolas cúbicas

Ejemplo 2: $x + y y' = 0 \rightarrow$ solución general:

$$x^2 + y^2 = C; \quad C \in \mathbb{R}$$



($C > 0$)

familia de curvas/solución

familia de circunferencias

* no definen $y = f(x)$

* no definen $x = f(y)$

Verificación de solución en ejercicio 2:

Si restringimos la región del plano donde trabajar (por ej., 1er y 2do cuadrante) entonces, en esa zona, las curvas/solución (semicircunferencias) definen función con fórmula $y = y(x)$.

Tenemos así que 'escondidas' en la ecuación/solución hay funciones las cuales no se pueden explicitar sin una apropiada restricción de la región de trabajo. Para verificar que estas funciones escondidas en la ecuación son las funciones/solución de la ecuación diferencial, lo que hacemos es reemplazar y por $y(x)$ en la ecuación/solución, derivar luego según las reglas ordinarias de derivación:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = 4 &\xrightarrow[\substack{y = y(x) \\ \text{ej: } y = \sqrt{4-x^2}}]{\text{reemplazamos}} x^2 + y^2_{(x)} = 4 \xrightarrow{\text{derivamos}} 2x + 2y_{(x)} y'_{(x)} = 0 \quad \forall x \\ &\xrightarrow{\text{finalmente}} x + y_{(x)} y'_{(x)} = 0 \quad \forall x \end{aligned}$$

Conclusión: $x^2 + y^2_{(x)} = 4$ es solución de $x + y y' = 0$.

Tenemos así otros tipos de soluciones: e p  citas, implícitas y "formales"

Al resolver una ecuación diferencial puede ser que la ecuación/solución obtenida sea directamente la función/solución (ej.1) o que, por el contrario, dicha función se encuentre 'escondida' en la ecuación (ej.2). Para indicar esto decimos que la solución de una EDO viene dada en forma:

◆ explícita: si en la ecuación/solución la variable dependiente aparece explicitada o se puede explicitar en función de la independiente. (ej.1 $\rightarrow y = (\frac{x}{3} + C)^3$).

◆ implícita: si en la ecuación/solución la variable dependiente no aparece explicitada en función de la independiente. En este caso decimos que la ecuación define implícitamente a y como función de x .

Y esto puede ocurrir por dos motivos:

- (1) Porque la ecuación/solución define función sólo poniendo restricciones (ejemplo 2 $\rightarrow x^2 + y^2 = C$).
- (2) Porque no se puede explicitar y en función de x debido a la estructura de la ecuación/solución.

Ejemplo: $(y - 3) \cdot y' - \frac{4}{x} \cdot y = 0 \rightarrow$ solución general $\rightarrow y = \ln(K x^4 |y^3|)$; $K > 0$ (sol. implícita)

(No se puede explicitar y en función de x aún poniendo restricciones).

(También resulta difícil determinar si existe o no, curva/solución).

◆ Soluciones "formales".

Vimos que $x^2 + y^2_{(x)} = C$ verifica $x + y y' = 0$, $\forall x$. Obviamente también lo hace $\forall C$.

Pero, $x^2 + y^2 = C$,    define curva $\forall C$? Vemos esta cuestión:

* $C < 0 \rightarrow \{(x; y) \mid x^2 + y^2 = C\} = \emptyset$ (no existe punto alguno que verifique la ecuación)

* $C = 0 \rightarrow \{(x; y) \mid x^2 + y^2 = C\} = \{(0; 0)\}$ (existe un único punto que verifica la ecuación)

* $C > 0 \rightarrow \{(x; y) \mid x^2 + y^2 = C\} = \text{circunferencia, centro en } O(0;0); \text{ radio } \sqrt{C}$.

Concluimos entonces que la ecuación define curva/solución sólo en el caso de C positivo, aun cuando "de forma" (   "formalmente") verifica $x + y y' = 0$ para todo valor de C .

Al resolver una ecuación diferencial muchas veces nos vamos a encontrar con situaciones como las dos últimas en las que no podemos explicitar una variable en función de la otra. En general, tampoco vamos a poder decidir si existe o no *curva/solución*. O lo que es lo mismo, si existe “*solución*”. En tal caso, para salvar la situación, decimos que la ecuación hallada es una “***solución formal***”: solución que tiene la *forma* de una solución, *pero puede no serlo*.

¿Para qué sirve una solución formal?: si acudiendo a algún resultado *teórico* podemos establecer que la ecuación diferencial *tiene solución*, entonces dicha solución tiene la “*forma*” hallada.

EDO – 1er Orden. Distintas formas en la que se pueden presentar

$$(A) \quad x + y y' = 0; \quad \text{o sea, de la forma: } \boxed{F(x; y; y') = 0}$$

$$(B) \quad y' = \frac{x+y}{x-y} = f(x; y) \quad ; \text{ o sea, de la forma: } \boxed{y' = f(x; y)}$$

$$(C) \quad \boxed{\frac{3 \cdot x}{y}} dx + \boxed{\frac{\cos y}{x y}} dy = 0 \quad ; \text{ o sea, de la forma: } \boxed{P(x; y) dx + Q(x; y) dy = 0}$$

“forma diferencial”

Se puede pasar de una forma a la otra:

$$(A) \rightarrow (B) \quad x + y \cdot y' = 0 \quad \rightarrow \quad y' = -x/y$$

$$(B) \rightarrow (C) \quad y' = \frac{x+y}{x-y} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y} \rightarrow (x+y) dx - (x-y) dy = 0$$

$$(C) \rightarrow (B) \quad \frac{3 \cdot x}{y} dx + \frac{\cos y}{x y} dy = 0 \rightarrow \frac{\cos y}{x y} dy = - \frac{3 \cdot x}{y} dx \rightarrow \frac{dy}{dx} = - \frac{3x^2}{\cos y}$$

$$\rightarrow y' = - \frac{3x^2}{\cos y}$$

ECUACIONES DIFERENCIALES DE 1er ORDEN

Teorema de Existencia y Unicidad (TEU)

Dada f una función de dos variables, $z = f(x; y)$, y $P_0(x_0; y_0)$ un punto del dominio de f entonces, si f satisface una “*serie de requisitos*” el problema de valores iniciales,

$$Pvi: \begin{cases} y' = f(x; y) & (\text{ecuación diferencial de 1er orden}) \\ y(x_0) = y_0 & (\text{condición inicial}) \end{cases}$$

tiene solución (***Existencia***), y esta es única (***Unicidad***)
(sin demostración).

Observación: f es una función de dos variables “*derivable*”. Lo que se pide es que f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ (*derivada parcial de f respecto de y*) sean *continuas* en alguna región plana que contenga al punto $P_0(x_0; y_0)$.

Ejemplo: Hallar la curva Γ que pase por el punto $P_0(0; 5)$ y para la cual, en cada punto $P(x; y) \in \Gamma$ la pendiente de la recta tangente a Γ en P es igual al opuesto del cociente entre la abscisa y la ordenada de P .

* **Datos:** $P_0(0; 5)$ punto de paso de la curva Γ .
 t recta tg a Γ en P , entonces $m_t = -x/y$

* **Incógnita:** $\Gamma \Rightarrow$ 'incógnita oculta': $y = y(t)$ tal que $\text{graf } y = \Gamma$.

* **Resolución:** reformulando el problema queda un **Pvi**:

$$\text{Pvi: } \begin{cases} y' = -x/y & (\text{ecuación diferencial de 1er orden, con } f(x,y) = -x/y) \\ y(0) = 5 & (\text{condición inicial}) \end{cases}$$

♦ La solución gral. es: $x^2 + y^2 = C$; $C \in \mathbf{R}$ (como vimos, una solución *formal*).

♦ El TEU asegura que este **Pvi**, tiene solución y única: $y = y(x)$
 (en este caso se cumplen los requisitos para f ; particularmente, existe $\frac{\partial f}{\partial y} = x/y^2$ en $(0;5)$)

$$x^2 + y^2 = C \xrightarrow{y=y(x)} x^2 + y^2(x) = C \rightarrow 0 + (y(0))^2 = C \xrightarrow{y(0)=5} C = 25$$

♦ La solución particular es: $x^2 + y^2 = 25$.

¿Podemos explicitar $y = y(x)$?; ¿dar la ecuación de Γ en forma explícita?

Despejando y en la ecuación llegamos a: $y = \pm \sqrt{25 - x^2}$; o sea,
 obtenemos dos funciones: $y_1 = \sqrt{25 - x^2}$ (semicircunferencia superior); e,
 $y_2 = -\sqrt{25 - x^2}$ (semicircunferencia inferior)

Como Γ es la curva que pasa por $P_0(0; 5)$, tenemos que: $y = y_1 = \sqrt{25 - x^2}$; o sea, Γ es la semicircunferencia superior de una circunferencia de radio 5.

11.3 Procedimientos para hallar la Solución General de una EDO

En lo que sigue nos ocupamos de ciertos tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias, para los cuales existen métodos de resolución; o sea, una forma sistemática de buscar la solución general.

Veremos los siguientes casos:

Ecuación	Forma de la ecuación	MÉTODO	
<i>1er orden</i>	$y' = M(x).N(y)$	<i>variables</i>	*se separan las variables.
<i>1er orden</i>	$P(x) dx + Q(y) dy = 0$	<i>separables (v.s.)</i>	* se integra * se concluye
<i>lineal-1er orden</i>	$y' + P(x)y = Q(x)$	<i>sustitución</i>	*se propone $y = u \cdot v$ *se sustituye en la ec. * u y v nuevas
<i>lineal-2do orden (homogénea)</i>	$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$	<i>'teórico'</i>	$y_h = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ { y_1 ; y_2 } l.i.
<i>lineal-2do orden (no homogénea)</i>	$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x)$	<i>'teórico'</i>	$y = y_h + y_p$
<i>lineal-2do orden (homogénea-coef. ctes)</i>	$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ ($a_0 ; a_1 ; a_2 \in \mathbb{R}$)	<i>'práctico'</i> (ecuación característica)	$y_h = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ { y_1 ; y_2 } l.i. → para hallar, y_1 e y_2
<i>lineal-2do orden (no homogénea-coef. ctes)</i>	$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = b(x)$ ($a_0 ; a_1 ; a_2 \in \mathbb{R}$)	<i>'práctico'</i> (coef. indet.)	$y = y_h + y_p$ → para hallar y_p

Observación:

Por simplicidad de escritura, en el cuadro, el método para las ecuaciones lineales de orden mayor que “1” se ejemplifica sólo para las de orden “2”. En realidad el mismo vale para *ecuaciones lineales* de cualquier orden,

$$\text{EDO lineal -orden } n : a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n y = b(x)$$

con la única diferencia que en y_h , solución de la homogénea, aparecen ' n ' constantes en lugar de “2” y, por ende, ' n ' funciones solución: $y_1 ; y_2 ; \dots ; y_n$.

En lo que sigue veremos primero las **EDO-1er orden**.

Observar que en este caso el tipo de ecuación más sencillo es: $y' = f(x)$; o sea, el que ocurre cuando la función del segundo miembro es sólo función de x . Ya vimos que en este caso basta buscar la (o las) primitivas de f .

Veremos luego las **EDO- lineales de orden ' n '**. Para estas ecuaciones existe una *teoría general* acerca de cómo hallar la solución; teoría muy potente pero que sólo puede ser llevada a la práctica en el caso que la ecuación lineal sea *a coeficientes constantes* (único caso en que tenemos un método *práctico* para hallar las ' n ' soluciones necesarias para dar la solución de la homogénea).

EDO a VARIABLES SEPARABLES

Una EDO a *variables separables* es de la forma: $y' = M(x).N(y)$ ó $P(x)dx + Q(y)dy = 0$. Luego, cualquiera sea el caso, para este tipo de ecuaciones podemos reunir todos los términos en x por un lado y todos los términos en y por otro, y resolver.

Procedimiento para resolver $y' = M(x).N(y)$

- 1) establecer claramente la incógnita de la ecuación diferencial. En este caso: $y = y(x)$.
- 2) llevar la ecuación a la **forma diferencial**. $\frac{dy}{dx} = M(x).N(y)$.
- 3) separar, si existe, $y^* \in \mathbb{R}$ tal que $N(y^*) = 0$ (o sea, $y(x) = y^*, \forall x \in \mathbb{R}$)
- 4) separar variables, llegar a la expresión: $q(y) dy = p(x) dx$.
- 5) integrar miembro a miembro: $\int q(y) dy = \int p(x) dx$
- 6) resolver las integrales: $R(y) + C_1 = S(x) + C_2$ (R y S / $R' = q$ y $S' = p$)
obtener la **solución general**: $R(y) = S(x) + C$; $C \in \mathbb{R}$ (**forma implícita**)
- 7) explicitar y (de ser posible): $y = R^{-1}(S(x) + C)$; $C \in \mathbb{R}$ (**forma explícita**)
- 8) analizar si $y = y^*$ es solución. Si lo fuera, analizar si puede o no ser incluida en la general. Si fuera solución y no se puede incluir en la general, es una **solución singular**.
- 9) escribir todas las soluciones de la ecuación diferencial.

$$\begin{cases} y = R^{-1}(S(x) + C); C \in \mathbb{R} & (\text{sol. general}) \\ y = y^* & (\text{sol. singular}) \text{ (si existe y tantas como existan)} \end{cases}$$

Procedimiento para resolver un problema de valores iniciales con una **EDO a v.s.**

$$\text{Pvi: } \begin{cases} y' = M(x).N(y). & (\text{ecuación diferencial 1er orden - v.s.}) \\ y(x_0) = y_0 & (\text{condición inicial}) \end{cases}$$

En este caso tenemos dos caminos:

- 1º) Realizar los **pasos 1-9** antes indicados para resolver la ecuación diferencial y luego, con los valores iniciales, determinar la solución particular.
- 2º) En el **paso 5**, si y_0 no es solución singular, en vez de aplicar integral indefinida, aplicar las **Integrales "definidas"**, tomando como extremos inferiores, y_0 y x_0 respectivamente.
 - 5) integrar miembro a miembro: $\int_{y_0}^y q(y) dy = \int_{x_0}^x p(x) dx$
 - 6) resolver las integrales: $R(y) - R(y_0) = S(x) - S(x_0)$ (R y S / $R' = q$ y $S' = p$)
obtener directamente la **solución particular**: $R(y) = S(x) - S(x_0) + R(y_0)$
 - 7) explicitar y (de ser posible).

Ejemplo: resolver $y' = \frac{y-1}{x+2}$

1) $y' = \frac{1}{x+2} \cdot (y-1) \Rightarrow$ 1er orden – v.s.; **Incógnita:** $y = y(x)$.

2) pasamos a la *forma diferencial*: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+2} \cdot (y-1)$

3) separamos $y^* = 1$ (debemos dividir por “ $y-1$ ” para “*separar variables*”)

4) separamos variables: $\frac{1}{y-1} dy = \frac{1}{x+2} \cdot dx$

5) integramos miembro a miembro: $\int \frac{1}{y-1} dy = \int \frac{1}{x+2} \cdot dx$

6) resolvemos las integrales: $\ln |y-1| + C_1 = \ln |x+2| + C_2$
obtenemos la **solución general**: $\ln |y-1| = \ln |x+2| + C$; $C \in \mathbb{R}$ (*forma implícita*)

7) explicitamos y (de ser posible): $\ln |y-1| = \ln |x+2| + C$; $C \in \mathbb{R}$
 $\ln |y-1| = \ln |x+2| + \ln K$; $K > 0$
 $\ln |y-1| = \ln(K |x+2|)$; $K > 0$ (aplicamos *inversa ln*)
 $|y-1| = K |x+2|$; $K > 0$ (eliminamos valor abs.)
 $y-1 = \pm K (x+2)$; $K > 0$ (reescribimos la cte)
 $y-1 = C (x+2)$; $C \neq 0$

solución general: $y = C (x+2) + 1$; $C \neq 0$ (*forma explícita*)

8) analizamos $y = 1 \rightarrow \begin{cases} y' = 0 \\ y-1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ verifica la ecuación $\Rightarrow y = 1$ es solución

En la solución general si $C = 0$ entonces $y = 1$; o sea, esta solución se puede incluir en la general sacando la restricción de que C no sea cero.

9) **todas las soluciones de la ecuación diferencial:** $y = C (x+2) + 1$; $C \in \mathbb{R}$

Ejemplo: resolver el Pvi: $y' = \frac{y-1}{x+2}$; $y(1) = 7$

***Camino 1:** reemplazo en la solución general y obtengo la particular:
 $y = C (x+2) + 1 \xrightarrow{x=1; y=7} 7 = C (1+2) + 1 \rightarrow C = 2$

solución particular: $y = 2 (x+2) + 1 \rightarrow y = 2x + 5$

*Camino 2: $y' = \frac{y-1}{x+2}$; $y(1) = 7$

5) integramos miembro a miembro: $\int_7^y \frac{1}{y-1} dy = \int_1^x \frac{1}{x+2} dx$

6) resolvemos las integrales: $\ln |y-1| - \ln |6| = \ln |x+2| - \ln |3|$
 $\ln |y-1| = \ln |x+2| + \ln \frac{6}{3}$

7) explicitamos y

$$\begin{aligned} |y-1| &= 2|x+2| \\ y-1 &= \pm 2(x+2) \rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow y &= 2x+5 \\ \rightarrow y &= -2x-3 \end{aligned}$$

solución particular ($y(1) = 7$): $y = 2x + 5$

Ejemplo: resolver $x dx + y dy = 0$

4) separamos variables:

$$y dy = -x dx$$

5) integramos miembro a miembro: $\int y dy = - \int x dx$

6) obtenemos la **solución general**: $\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$; $C \in \mathbb{R}$ (*sol. formal*)

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C \quad \text{ó} \quad x^2 + y^2 = C$$

7) explicitamos y (de ser posible): **no es posible**

9) escribo todas las soluciones de la ecuación diferencial: $x^2 + y^2 = C$; $C \in \mathbb{R}$

Ejemplo: hallar la curva solución de $x dx + y dy = 0$ que pase por el punto $P(3; -4)$.

* Reemplazamos en la solución general y obtenemos la particular

$$x^2 + y^2 = C \xrightarrow{x=3; y=-4} 3^2 + (-4)^2 = C \rightarrow C = 25$$

¿Curva?: $x^2 + y^2 = 25$

Luego, la curva pedida es la
 semicircunferencia 'inferior'
 de radio 5 y centro en el origen.

$$\rightarrow y = \sqrt{25-x^2} \rightarrow y(3) = 4$$

$$\rightarrow y = -\sqrt{25-x^2} \rightarrow y(3) = -4 \rightarrow \text{pasa por P}$$

Observación: cuando la ecuación diferencial está en la *forma diferencial*, entonces la *incógnita* puede ser tanto "*y como función de x*" como "*x como función de y*".

Así, por ejemplo, en el caso anterior otra forma de dar la solución del problema es:

$$x = \sqrt{25-y^2} \rightarrow x(-4) = 3 \rightarrow \text{pasa por P.}$$

(semicircunferencia 'derecha' de radio 5 y centro en el origen)

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE 1er ORDEN – EDOL-1

***DEFINICIÓN 1:**

Llamamos ecuación diferencial “*lineal*” de 1er orden a toda ecuación de la forma:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

donde P y Q son funciones continuas en un mismo intervalo I .

Dentro de las **EDOL-1** distinguimos dos tipos de ecuaciones:

DEF 1.1: EDOL-1-Homogénea, si Q es la función “nula”; o sea, $Q(x) = 0$, $\forall x \in I$.

DEF 1.2: EDOL-1- No Homogénea, si Q “no” es la función “nula”; o sea, $Q \neq 0$.

Procedimiento para resolver $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$

1) Proponemos un cambio de variable $\rightarrow y(x) = u(x) \cdot v(x)$ con u ; v derivables y a determinar.

2) Derivamos: $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$

3) Cambio de ecuación: $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$ (reemplazamos y e y')
 $u' \cdot v + u \cdot v' + P(x) \cdot u \cdot v = Q(x)$ (asociamos, sacamos factor común)
 $[u' + P(x) \cdot u] \cdot v + u \cdot v' = Q(x)$ (*) ecuac. dif. con “2” incógnitas.

4) Condiciones sobre u y v para resolver (*)

$$\begin{cases} 1) & u' + P(x) \cdot u = 0 \quad \rightarrow ? u ? \\ 2) & u \cdot v' = Q(x) \quad \rightarrow ? v ? \end{cases}$$

Si u y v satisfacen 1-2) entonces $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ es **solución** de $y' + P(x)y = Q(x)$

5) **Resolución de (1):**

$$u' + P(x)u = 0 \quad (\rightarrow \text{EDOL-1-Homogénea ; a “variables separables”})$$

Resolvemos por separación de variables, obtenemos una solución de (1) : $u = u^*(x)$

6) **Resolución de (2):** reemplazamos la u obtenida en (5) en (2) .

$$u^*(x) \cdot v'(x) = Q(x) \quad (\rightarrow \text{EDO a “variables separables”})$$

Resolvemos por separación de variables, obtenemos la solución gral. de (2): $v = v^*(x) + C$

7) Damos la **solución general** de $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$

$$y = u \cdot v \quad \rightarrow \quad \boxed{y(x) = u^*(x) \cdot [v^*(x) + C]}$$

Resolver: $y' - \frac{2}{x} \cdot y = x$

$$\rightarrow y' + P(x) \cdot y = Q(x) \quad / \quad P(x) = -\frac{2}{x} \quad ; \quad Q(x) = x$$

1) Proponemos cambio de variable $\rightarrow y(x) = u(x) \cdot v(x)$ con u ; v derivables .

2) Derivamos: $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$

3) Cambio de ecuación: $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$ (reemplazamos y e y')
 $u' \cdot v + u \cdot v' + P(x) \cdot u \cdot v = Q(x)$ (asociamos, sacamos factor común)
 $[u' + P(x) \cdot u] \cdot v + u \cdot v' = Q(x)$ (*) ecuac. dif. con "2" incógnitas.

4) Condiciones sobre u y v para resolver (*)

$$\begin{cases} 1) & u' + P(x) \cdot u = 0 \quad \rightarrow \text{¿ } u? \\ 2) & u \cdot v' = Q(x) \quad \rightarrow \text{¿ } v? \end{cases} \quad \begin{cases} 1) & u' - \frac{2}{x} \cdot u = 0 \\ 2) & u \cdot v' = x \end{cases}$$

Si u y v satisfacen 1-2) entonces $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ es *solución* de $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$

5) Resolución de (1): $u' + P(x) \cdot u = 0$ (EDOL-1-Homogénea; a "variables separables")
 $u' - (2/x) \cdot u = 0 \rightarrow u^*(x) = x^2$

5) Resolución de (2): reemplazamos $u \rightarrow u^*(x)$. $v'(x) = Q(x)$ ($\rightarrow$ EDO "vs. separables")
 $x^2 \cdot v' = x \rightarrow v(x) = \ln |x| + C$

7) Damos la solución general de $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$.

$$y(x) = u^*(x) \cdot v(x) \rightarrow y(x) = x^2 \cdot [\ln |x| + C]$$

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES de ORDEN “n” [EDOL- n]

***DEFINICIÓN 1:**

Llamamos ecuación diferencial “lineal” de orden “n” a toda ecuación de la forma:

$$a_0(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = b(x)$$

con $a_0 ; a_1 ; \dots ; a_n ; b$, *funciones* definidas en I ; $a_0(x) \neq 0$; $\forall x \in I$.

DEF 1.1: EDOL-n - No Homogénea, si b no es la función nula; o sea, $b \neq 0$.

$$a_0(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = b(x) \quad (I)$$

DEF 1.2: EDOL-n -Homogénea, si b es la función nula $\rightarrow b = 0$ con $0(x) = 0$, $\forall x \in I$

$$a_0(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = 0 \quad (II)$$

EJEMPLOS: $x^2 y'' + 2y = 0$ (lineal orden 2 - homogénea)
 $y''' + x \cdot y'' - 3 \cos x \cdot y' + 4y = e^x$ (lineal orden 3 – no homogénea)

DEF 1.3: EDOL-n, “a coeficientes constantes”

Ecuación diferencial lineal (homogénea o no) en la que todos los coeficientes, $a_i(x)$, son *funciones constantes*; o sea, son de la forma:

$$a_0 \cdot y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y = b(x)$$

con $a_0 ; a_1 ; \dots ; a_{n-1} ; a_n \in \mathbb{R}$; $a_0 \neq 0$

EJEMPLOS: $3y'' + 2y = 0$ (lineal orden 2 - homogénea)
 $2y''' + 5y'' - 3y' + 4y = e^x$ (lineal orden 3 – no homogénea)

DEFINICIÓN 2: Problema de valores iniciales – Pvi

El problema de hallar una función $y = y(x)$ tal que:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = b(x) \\ y_{(x_0)} = y_0 \\ y'_{(x_0)} = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}_{(x_0)} = y_{n-1} \end{array} \right\} \text{Condiciones Iniciales}$$

con $x_0 \in I$; $y_0 ; y_1 ; \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$; es llamado “Problema de valores iniciales”.

TEU (1) - Teorema de Existencia y Unicidad:

Si las funciones $a_1; a_2; \dots; a_n$ y b son continuas en I ; entonces cualquiera sea $x_0 \in I$ y cualesquiera sean los “n” números reales $y_0; y_1; \dots, y_{n-1}$, el Pvi tiene solución (*Existencia*) y única (*Unicidad*) en I . (s/d)

Corolario: si $a_1; a_2; \dots; a_n$ son continuas en I , la ecuación diferencial es homogénea,

$x_0 \in I$, $y_0 = y_1 = y_2 = \dots = y_{n-1} = 0$; entonces, el siguiente, Pvi:

$$\begin{cases} a_0(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = 0 & (\text{homogénea}) \\ y(x_0) = y'(x_0) = y''(x_0) = \dots = y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

tiene solución única, y esta es la *trivial*: $y(x) = 0, \forall x \in I$.

Demostración: ♦ $y(x) = 0, \forall x \in I$; es solución de toda EDOL-n, **homogénea**;

♦ $y(x) = 0, \forall x \in I$; verifica las condiciones iniciales;

entonces, $y(x) = 0, \forall x \in I$, **es solución del Pvi**.

♦ por hipótesis, los coeficientes son funciones continuas;

entonces por el TEU, $y(x) = 0, \forall x \in I$, es solución y “**única**”.

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES “HOMOGÉNEAS” [EDOLH-n]

TEOREMA 2: Si $\{f_1; f_2; \dots; f_j\}$ son *j-soluciones* de una EDOL-Homogénea entonces cualquier combinación lineal (c.l.) de ellas, *también lo es*.

O sea, si $\Phi = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_j f_j \Rightarrow \Phi$ es *solución* de la EDOL-H

Demostración: (demostramos para $n = 2, j = 3$; queda como ejercicio para $n = 3; j = 2$)

Dadas $\{f; g; h\}$, tres soluciones de una EDOLH-2:

$$a_0 \cdot y'' + a_1 \cdot y' + a_2 \cdot y = 0; \quad (\forall x \in D) \quad (I)$$

debemos demostrar que $\Phi(x) = [c_1 f + c_2 g + c_3 h]_{(x)}$ es solución de (I);

o sea que, reemplazada Φ en la ecuación (I), **la satisface $\forall x \in D$**

Por **Hip**: ♦ f sol. de (I) $\Rightarrow a_0 \cdot f'' + a_1 \cdot f' + a_2 \cdot f = 0; \quad (\forall x \in D)$

♦ g sol. de (I) $\Rightarrow a_0 \cdot g'' + a_1 \cdot g' + a_2 \cdot g = 0; \quad (\forall x \in D)$

♦ h sol. de (I) $\Rightarrow a_0 \cdot h'' + a_1 \cdot h' + a_2 \cdot h = 0; \quad (\forall x \in D)$

A partir de estos datos, investigamos si $\Phi(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x) + c_3 h(x)$ cumple la **Tesis**:

$$\begin{aligned} & a_0 \cdot \Phi'' + a_1 \cdot \Phi' + a_2 \cdot \Phi = \\ & = a_0 \cdot [c_1 f'' + c_2 g'' + c_3 h''] + a_1 \cdot [c_1 f' + c_2 g' + c_3 h'] + a_2 \cdot [c_1 f + c_2 g + c_3 h] = \\ & = c_1 \cdot [a_0 f'' + a_1 f' + a_2 f] + c_2 \cdot [a_0 g'' + a_1 g' + a_2 g] + c_3 \cdot [a_0 h'' + a_1 h' + a_2 h] = \\ & = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot 0 = 0; \quad (\forall x \in D) \\ & \text{[q.e.d.]} \end{aligned}$$

Ejercicio: Verificar que $f(x) = \sin x$; $g(x) = \cos x$ y $\Phi(x) = 3 f(x) + 5 g(x)$,
son solución de $y'' + y = 0$

DEFINICIÓN 3: “linealmente dependiente” (l.d.)

El conjunto de funciones $\{f_1; f_2; \dots; f_j\}$ es “linealmente dependiente” en $[a; b]$, si existen constantes $c_1; c_2; \dots; c_j$ (no todas nulas), tales que:

$$c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x) + \dots + c_j \cdot f_j(x) = 0; \quad \forall x \in [a; b].$$

DEFINICIÓN 4: “linealmente independiente” (l.i.)

El conjunto de funciones $\{f_1; f_2; \dots; f_j\}$ es “linealmente independiente” en $[a; b]$, si no es “linealmente dependiente”. O sea; $\{f_1; f_2; \dots; f_j\}$ es l.i. si:

$$“c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x) + \dots + c_j \cdot f_j(x) = 0; \quad \forall x \in [a; b] \Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_j = 0”.$$

NOTA: Si a “ $c_1 \cdot f_1 + c_2 \cdot f_2 + \dots + c_j \cdot f_j = 0$ ” la llamamos, **ecuación básica (E.B.)**; entonces $\{f_1; f_2; \dots; f_j\}$ es l.i. $\Leftrightarrow$ la E.B. se satisface únicamente si todas las constantes son nulas.

Ejemplos:

1) $\{f(x) = e^x; g(x) = 3 \cdot e^x\}$; Dominio: $\mathbb{R}$

$$\text{E.B.} \rightarrow c_1 \cdot f(x) + c_2 \cdot g(x) = 0; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\rightarrow c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot 3 e^x = 0; \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e^x \cdot [c_1 + 3 c_2] = 0; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{e^x \neq 0; \forall x} \Leftrightarrow c_1 + 3 c_2 = 0 \Leftrightarrow c_1 = -3 \cdot c_2$$

Luego, si por ejemplo, $c_1 = 6; c_2 = -2 \Rightarrow [6] \cdot e^x + [-2] \cdot 3 e^x = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$; o sea, existen constante no nulas para las cuales se satisface la E.B.

Conclusión: $\{f(x) = e^x; g(x) = 3 e^x\}$ es l.d.

Observación 1: en este caso “vemos” que: $\frac{g(x)}{f(x)} = 3$ (cte)

2) $\{f(x) = 1; g(x) = x\}$; Dominio: $\mathbb{R}$

$$\text{E.B.} \rightarrow c_1 \cdot f(x) + c_2 \cdot g(x) = 0; \quad \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow c_1 + c_2 \cdot x = 0; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Pero, $c_1 + c_2 \cdot x \not\equiv 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow c_1 = c_2 = 0$ (porque existe único x verifica (*))

Luego, la E.B. se satisface únicamente si todas las constantes son nulas.

Conclusión: $\{f(x) = 1; g(x) = x\}$ es l.i. en $\mathbb{R}$.

Observación: en este caso “vemos” que: “ $\frac{g(x)}{f(x)} = x$ ”; o sea, que: $\frac{g(x)}{f(x)} \neq \text{cte}$.

3) $\{f(x) = 1; g(x) = x; h(x) = x^2\}$; Dominio: $\mathbb{R}$

$$\text{E.B.} \rightarrow c_1 \cdot f(x) + c_2 \cdot g(x) + c_3 \cdot h(x) = 0; \quad \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot x^2 = 0; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0 \text{ (a lo sumo dos } x\text{'s verifican (*))}$$

Conclusión: $\{f(x) = 1; g(x) = x; h(x) = x^2\}$ es l.i. en $\mathbb{R}$

CRITERIOS PARA DETERMINAR “l.d.” ó “l.i.”

(1) Dos o más funciones no pueden ser **li** si una de ellas es la **función nula**. (verificar)

(2) **f** y **g** tal que ninguna sea la función nula en $[a; b]$ y $g(x) \neq 0, \forall x \in [a; b]$, entonces:

$$\{f; g\} \text{ l.d. en } [a; b] \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \text{cte.}$$

Ej. 1) $\{3e^x; e^x\}$ l.d. en $\mathbb{R}$

(3) **f** y **g** tal que ninguna sea la función nula en $[a; b]$ y $g(x) \neq 0, \forall x \in [a; b]$, entonces:

$$\{f; g\} \text{ l.i. en } [a; b] \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \neq \text{cte.}$$

Ej. 2) $\{1; x\}$ l.i. en $\mathbb{R}$

(4) Si **f** y **g** **soluciones no nulas** en $[a; b]$ de una EDOLH-2; entonces:

$$\{f; g\} \text{ l.i. en } [a; b] \Leftrightarrow \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} \neq 0; \forall x \in [a; b]$$

$$\text{Ej. 2) } \{1; x\} \text{ l.i. en } \mathbb{R} \text{ pues } \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0; \forall x \in \mathbb{R}$$

(5) Si $\{f_1; f_2; \dots; f_n\}$ **n-soluciones no nulas** en $[a; b]$ de una EDOLH – orden “n” entonces “ $\{f_1; f_2; \dots; f_n\}$ l.i. en $[a; b] \Leftrightarrow \det A \neq 0; \forall x \in [a; b]$ ”

→ A matriz de “n” filas por “n” columnas, donde cada columna está formada por una **función solución** (f_i) y sus **(n-1) derivadas** ($f'_i; f''_i; \dots; f_i^{(n-1)}$).

$$\text{Ej. 3): } \{1; x+1; x^2\} \text{ l.i. en } \mathbb{R} \text{ pues } \begin{vmatrix} 1 & x+1 & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0; \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ejemplos:

4) Determinar si $f(x) = \sin x$ y $g(x) = \cos x$ son solución l.i. de $y'' + y = 0$.

♦ $f(x) = \sin x; f'(x) = \cos x; f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(x) + f(x) = 0, \forall x$ (f sol.)

♦ $g(x) = \cos x; g'(x) = -\sin x; g''(x) = -\cos x \Rightarrow g''(x) + g(x) = 0, \forall x$ (g sol.)

♦ $\frac{f(x)}{g(x)} = \tan x \neq \text{cte} \Rightarrow \sin x$ y $\cos x$ son soluciones l.i. de la EDOLH-2.

5) Mostrar que $f(x) = 1; g(x) = x$ y $h(x) = x^2$ son soluciones l.i. de $y''' = 0$.

6) Mostrar que $f(x) = e^{3x}$ y $g(x) = 5e^{3x}$ son soluciones l.d. de $y'' - 6y' + 9y = 0$.

7) Mostrar que $f(x) = e^{3x}$ y $g(x) = xe^{3x}$ son soluciones l.i. de $y'' - 6y' + 9y = 0$.

8) Mostrar que $e^x; e^{-x}; e^{2x}$ son soluciones l.i. de $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$.

TEOREMA 3 – FUNDAMENTAL

Dada una ecuación diferencial lineal, homogénea y de **orden n** (EDOLH–n)

$$a_0(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = 0$$

si $a_0; a_1; \dots; a_n$ son funciones continuas en $[a;b]$ y $a_0(x) \neq 0; \forall x \in [a;b]$ entonces se verifica que:

(I) la ecuación tiene “n” soluciones “linealmente independientes”: $f_1; f_2; \dots; f_n$.

(II) f es solución de la EDOLH $\Leftrightarrow$ es combinación lineal de “n” soluciones l.i. (s/d)

Observaciones:

☞ $f_1; f_2; \dots; f_n$ solucs. de EDOLH } Φ solución de EDOLH – n (Teor. 2)

$$\Phi = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n$$

☞ $f_1; f_2; \dots; f_n$ solucs. l.i. de EDOLH } $f = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n$ (Teo 3-F)

“n” : orden de la EDOLH

f : solución de la EDOLH

Conclusiones respecto a las EDOLH-n :

(1) En (I) Teo 3-F se asegura la existencia de “n” soluciones; en el Teo 2, que toda combinación lineal (c.l.) de soluciones de una EDO es solución de la EDO.

Luego, y dado las infinitas formas como se pueden elegir las constantes en la c.l.; concluimos que las EDOLH tienen infinitas soluciones.

(2) Por (II) del Teo 3-F, si las “n” soluciones son “l.i.”, entonces todas las soluciones se pueden escribir como c.l. de ellas (no existen soluciones que no se puedan escribir como c.l. de n soluciones l.i.). Luego, y dado este principio, concluimos que en la solución de una EDOLH debe haber tantas constantes como orden tenga la ecuación.

DEFINICIÓN 5: BASE de SOLUCIONES

Dada una EDOLH-n, llamamos **Base de Soluciones** a todo conjunto de “n” soluciones “linealmente independientes” de la ecuación diferencial.

DEFINICIÓN 6: SOLUCION GENERAL.

Llamamos **solución general** de una EDOLH-n a la solución f construida como combinación lineal de las funciones de la **Base de Soluciones**; o sea:

$$f = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n; (c_i = \text{ctes arbitrarias}).$$

La conclusión más importante y útil a los efectos del cálculo de soluciones que obtenemos del Teo 3-F es que: conocido un “conjunto finito de soluciones”, conocemos “todas”.

Ejemplos:9) $y''' = 0$ (EDOLH – orden 3)

$$B = \{y_1(x) = 1; y_2(x) = x; y_3(x) = x^2\} \text{ (l.i.)}$$

$$S = \{f / f \text{ solución de } y''' = 0\}$$



$S =$ conjunto de *todas* las soluciones

$$S = \{f / f(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2; c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$S \diamond g(x) = 2 + 3x + x^2$$

$$\diamond k(x) = 5 \quad \diamond h(x) = 5x^2$$

$$\diamond p(x) = x + x^2$$

$$\diamond q(x) = 2 + x + 3x^2$$

BASE

$$* y_1 = 1$$

$$* y_2 = x$$

$$* y_3 = x^2$$

10) Dada $y'' + y = 0$ (EDOLH – orden 2):

$$B = \{y_1(x) = \sin x; y_2(x) = \cos x\} \text{ (l.i.)}$$

$$S = \{f / f(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x; c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$S \diamond k(x) = 3 \sin x + 4 \cos x$$

$$\diamond g(x) = 5 \sin x$$

$$\diamond p(x) = -3 \cos x$$

$$\diamond q(x) = \sin x - \cos x$$

BASE

$$* y_1 = \sin x$$

$$* y_2 = \cos$$



Si una función tiene “otra forma”, por ejemplo, $h(x) = \sin(x + \frac{\pi}{6})$,

¿se puede afirmar que **no es** solución de $y'' + y = 0$? La respuesta es, **NO**. Hay funciones que se pueden representar de “distintas maneras” (entre ellas las trigonométricas). Así, el solo hecho de que una función no tenga la “forma” de la solución general no implica que no sea solución. Al respecto, no podemos decir nada.

Para resolver esta incógnita, hay dos caminos:

(C.1) derivar, reemplazar en la ecuación y “ver” que pasa (si la verifica o no).

(C.2) tratar de escribir **h** como **c.l.** de las funciones de la **BASE** de la **EDOLH**.

(Por **Teo. 3-(II)** si esto es posible; **h** es solución de la EDOLH)

$$(C.1) \text{ Derivamos: } h(x) = \sin(x + \frac{\pi}{6}); h'(x) = \cos(x + \frac{\pi}{6}); h''(x) = -\sin(x + \frac{\pi}{6})$$

$$\text{Reemplazamos: } h''(x) + h(x) = -\sin(x + \frac{\pi}{6}) + \sin(x + \frac{\pi}{6}) = 0; \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Concluimos: **h** es solución de $y'' + y = 0$.

$$(C.2) \text{ Por Trigonometría: } \sin(x + \frac{\pi}{6}) = \sin x \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{6}) = \sin x \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{C_1} + \cos x \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{C_2} = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

Conclusión: **h** es solución de $y'' + y = 0$.



Respecto al C.2: ¿siempre se puede acudir a él? La respuesta es, **NO**.

¿Porqué?: porque requiere conocer una **Base de Soluciones**, lo que no siempre se da.

11) Dada $x^2 y'' + x y' - 4y = 0$ en $[1; \infty) \rightarrow h(x) = \frac{x^4 - 16}{x^2}$; ¿es solución?

$$x^2 y'' + x y' - 4y = 0 \rightarrow \text{EDOLH- orden 2} \rightarrow B = \{y_1; y_2\} \text{ (l.i.) } (\text{¿?})$$

Luego, para resolver este problema no se puede acudir al C.2; si al C.1

Ejercicio: verificar, por el C.1, que **h** es solución de $x^2 y'' + x y' - 4y = 0$

Ecuaciones Diferenciales Lineales “No Homogéneas” [EDOL-no H-n]

A partir de la Ecuación Diferencial Lineal “No Homogénea”:

$$a_0(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = b(x) \quad (\text{I})$$

con $a_i(x)$ $i = 0, 1, \dots, n$, funciones continuas en $[a; b]$; $a_0(x) \neq 0$; $\forall x \in [a; b]$ definimos los siguientes nociones:

DEF. 7: A la **EDOL- Homogénea** incluida en (I),

$$a_0(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = 0 \quad (\text{II})$$

la llamamos: **Ecuación Homogénea asociada a (I)**.

DEF 7.1: A la solución general de (II), la llamamos: **solución de la homogénea** ;

la indicamos: y_h

DEF 7.2: A cualquier solución de (I) que no tenga constantes:

la llamamos: **solución particular** ;

la indicamos: y_p .

TEOREMA 4:

Si f es una solución cualquiera de (I) (No Homogénea);

y h es una solución cualquiera de (II) (Homogénea asociada) ;

entonces, $f + h$ es solución de (I), la No Homogénea .

O sea, si $\Phi = f + h \Rightarrow [a_0 \cdot \Phi^{(n)} + a_1 \cdot \Phi^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) \cdot \Phi' + a_n \cdot \Phi](x) = b(x)$,

✓

Demostración: (demostramos para $n = 2$; queda como ejercicio para $n = 3$)

Sea $a_0 \cdot y'' + a_1 \cdot y' + a_2 \cdot y = b$; $(\forall x \in D)$ (I)

$a_0 \cdot y'' + a_1 \cdot y' + a_2 \cdot y = 0$; $(\forall x \in D)$ (II)

debemos demostrar que $\Phi(x) = [f + h](x)$ es solución de (I);

o sea que, reemplazada Φ en la ecuación (I), **la satisface $\forall x \in D$**

Por Hip: $\diamond f$ sol. de (I) $\Rightarrow a_0 \cdot f'' + a_1 \cdot f' + a_2 \cdot f = b$; $(\forall x \in D)$

$\diamond h$ sol. de (II) $\Rightarrow a_0 \cdot h'' + a_1 \cdot h' + a_2 \cdot h = 0$; $(\forall x \in D)$

A partir de estos datos, investigamos si $\Phi(x) = f(x) + h(x)$ cumple la Tesis:

$$a_0 \cdot \Phi'' + a_1 \cdot \Phi' + a_2 \cdot \Phi =$$

$$= a_0 \cdot [f'' + h''] + a_1 \cdot [f' + h'] + a_2 \cdot [f + h] =$$

$$= [a_0 f'' + a_1 \cdot f' + a_2 \cdot f] + [a_0 h'' + a_1 \cdot h' + a_2 \cdot h] = b + 0 = b \quad (\forall x \in D)$$

[q.e.d.]

Ejemplo: dada $y''' - 2y'' - y' + 2y = 8e^{3x}$.

Mostrar que: $h(x) = e^{2x}$ es solución de la “homogénea asociada”;

$f(x) = e^{3x}$ es solución de la “no homogénea” ;

$\Phi = f + h$ es solución de la “no homogénea” .

TEOREMA 5:

Si Φ es solución de la No Homogénea (I); entonces $\Phi = y_h + y_p$

con: y_h solución de la homogénea (II) ;

y_p solución particular de la No Homogénea (I).

Demostración: (demostramos para $n = 2$; queda como ejercicio para $n = 3$)

Sea (I) $a_0 \cdot y'' + a_1 \cdot y' + a_2 \cdot y = b$; ($\forall x \in D$) $\rightarrow y_p$ solución (I)

(II) $a_0 \cdot y'' + a_1 \cdot y' + a_2 \cdot y = 0$; ($\forall x \in D$) $\rightarrow y_h$ solución (II)

Debemos demostrar que: $\Phi = y_h + y_p$;

equivalentemente, que: $\Phi - y_p = y_h$; o sea, que $\Phi - y_p$ sea solución de (II)

Por Hip: $\diamond \Phi$ solución de (I) $\Rightarrow a_0 \cdot \Phi'' + a_1 \cdot \Phi' + a_2 \cdot \Phi = b$; ($\forall x \in D$)

$\diamond y_p$ solución de (I) $\Rightarrow a_0 \cdot y_p'' + a_1 \cdot y_p' + a_2 \cdot y_p = b$; ($\forall x \in D$)

Con estos datos, $y = \Phi - y_p$, ¿es solución de (II) ?:

$$\begin{aligned} a_0 \cdot y'' + a_1 \cdot y' + a_2 \cdot y &= a_0 \cdot [\Phi - y_p]'' + a_1 \cdot [\Phi - y_p]' + a_2 \cdot [\Phi - y_p] = \\ &= a_0 \cdot [\Phi'' - y_p''] + a_1 \cdot [\Phi' - y_p'] + a_2 \cdot [\Phi - y_p] = \\ &= [a_0 \Phi'' + a_1 \cdot \Phi' + a_2 \cdot \Phi] - [a_0 y_p'' + a_1 \cdot y_p' + a_2 \cdot y_p] = b - b = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

[q.e.d.]

DEF. 8: A Φ , la llamamos: **Solución General de la No Homogénea** ;

la indicamos: $y_g \rightarrow$

$$y_g = y_h + y_p$$

NOTA: la Solución de la Homogénea, y_h , por Teo. 3F es: $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$.

Finalmente entonces:

$$y_g = [c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n] +$$

Método General para resolver una EDOL- No Homogénea – Orden n

(1º) Hallar Base de Soluciones de la Homogénea. $\rightarrow B = \{y_1 ; y_2 ; \dots ; y_n\}$ (l.i.)

(2º) Hallar Solución de la Homogénea. $\rightarrow y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$.

(3º) Hallar Solución Particular de la No Homogénea $\rightarrow y_p$

(4º) Dar la Solución General $\rightarrow y_g = [c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n] + y_p$

Ejemplos:

12) Dada $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ ($\rightarrow$ EDOLH – 3 ; $B = \{y_1(x) ; y_2(x) ; y_3(x)\}$ (l.i.))

Fácilmente se puede demostrar que $B = \{e^x ; e^{-x} ; e^{2x}\}$ (ejercicio)

Luego, su solución general es: $y_g = y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3$.

$$y_g = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}$$

13) Dada $y''' - 2y'' - y' + 2y = 4x$ (*), dar su solución general.

⚡EDOL“NóH”-3 $\rightarrow b(x) = 4x$ (lineal); $B = \{y_1(x); y_2(x); y_3(x)\}$

(1°) $B = \{e^x; e^{-x}; e^{2x}\}$ (ejemplo 12)

(2°) $y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}$ (ejemplo 12)

(3°) ¿ y_p ? $\rightarrow$ por “prueba y error”

¿función de prueba?: $y \rightarrow$ lineal, función prototipo de la clase de b .
 $y(x) = A.x + B$ (¿A? ; ¿B?, ¿existen?)

$$\triangleright y(x) = A.x + B ; \quad y'(x) = A ; \quad y''(x) = 0 ; \quad y'''(x) = 0$$

Reemplazamos en (*) y hallamos (si existen) A y B :

$$\begin{aligned} y''' - 2y'' - y' + 2y &= -A + 2(Ax + B) = 2Ax + (2B - A) = 4x \\ 2Ax + (2B - A) &= 4x \Leftrightarrow \begin{cases} 2A = 4 \\ 2B - A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 1 \end{cases} \rightarrow y_p = 2x + 1 \end{aligned}$$

$$(4°) \quad \text{¿}y_g? \rightarrow \boxed{y_g = y_h + y_p \rightarrow y_g = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + 2x + 1}$$

14) Dada $y''' - 3y'' + 2y' = 12e^{3x}$ (*), dar su solución general.

⚡EDOL“NóH”-3 $\rightarrow b(x) = 12e^{3x}$ (exponencial); $B = \{y_1(x); y_2(x); y_3(x)\}$

(1°) $B = \{e^x; e^{2x}; 1\}$ (verificar)

(2°) $y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3$

(3°) ¿ y_p ? $\rightarrow$ por “prueba y error”

¿función de prueba?: $y \rightarrow$ exponencial, función prototipo de la clase de b .
 $y(x) = A \cdot e^{3x}$ (¿A? ; ¿existe?)

$$\triangleright y(x) = A \cdot e^{3x} ; \quad y'(x) = 3A \cdot e^{3x} ; \quad y''(x) = 9A \cdot e^{3x} ; \quad y'''(x) = 27A \cdot e^{3x}$$

Reemplazamos en (*) y hallamos A (si existe) :

$$\begin{aligned} y''' - 3y'' + 2y' &= [27A - 27A + 6A] \cdot e^{3x} = [6A] \cdot e^{3x} = 12e^{3x} \\ [6A] \cdot e^{3x} &= 12e^{3x} \Leftrightarrow \begin{cases} 6A = 12 \\ A = 2 \end{cases} \rightarrow y_p = 2e^{3x} \end{aligned}$$

$$(4°) \quad \text{¿}y_g? \rightarrow \boxed{\boxed{y_g = y_h + y_p \rightarrow y_g = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 + 2e^{3x}}}$$

15) Dada $y''' - 3y'' + 2y' = 12e^x$ (*), dar su solución general.

↯ EDOL “NoH”-3 $\rightarrow b(x) = e^x$ (exponencial) ; $B = \{y_1(x); y_2(x); y_3(x)\}$

(1°) $B = \{e^x; e^{2x}; 1\}$

(2°) $y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3$

(3°) ¿ y_p ? $\rightarrow$ por “prueba y error”

¿función de prueba?: $y \rightarrow$ exponencial, función prototipo de la clase de b .
 $y(x) = A \cdot e^x$ (¿ A ? ; ¿existe?)

► $y(x) = A \cdot e^x$; $y'(x) = A e^x$; $y''(x) = A \cdot e^x$; $y'''(x) = A \cdot e^x$

Reemplazamos en (*) y hallamos A (si existe) :

$$y''' - 3y'' + 2y' = [A - 3A + 2A] \cdot e^x = [0 \cdot A] e^x \neq 12e^x \quad (\forall A)$$

$\Rightarrow$ no existe A tal que $A \cdot e^x$ sea solución particular de la EDOL- NoH

► ¿Esto implica que no existe solución particular?? .

NO, esto sólo implica que la solución particular no es una “exponencial”.



¿Por qué ahora no lo es y en el ejemplo-14 (muy parecido), si lo era?;

¿A que “clase” de funciones pertenecerá la solución particular? ;

¿Habrá “algo” en la ecuación diferencial que de “pistas” al respecto?

16) Dada $x^2 y'' + x y' - 4y = 12$ (*), dar su solución general

↯ EDOL “NoH”-2 $\rightarrow b(x) = 12$ (constante); $B = \{y_1(x); y_2(x)\}$

(1°) ¿ B ?

(2°) ¿ y_h ?

(3°) ¿ y_p ? $\rightarrow$ ¿función de prueba?: $y \rightarrow$ cte, función prototipo de la clase de b .

► $y(x) = A$; $y'(x) = 0$; $y''(x) = 0$.

Reemplazamos en (*) y hallamos (si existe) A :

$$x^2 y'' + x y' - 4y = -4A = 12 \Leftrightarrow A = -3 \rightarrow y_p = -3$$

(4°) ¿ y_g ? $\rightarrow$ $y_g = y_h + y_p \rightarrow y_g = y_h - 3 \rightarrow$ ¿ y_h ? $\rightarrow$ ¿ B ?

NOTA: estos dos últimos ejemplos muestran que si bien el **Método General** da un camino para resolver las **EDOL**, en la práctica y en algunos casos, su aplicación se dificulta. El principal problema está en el **1er paso**; o sea, en la determinación de la Base de Soluciones (ej: 16)

Existe un caso donde las características que en particular presenta la **EDOL**, permiten salvar esta dificultad, encontrar un **Método para hallar B**. Es el caso de las **EDOL-CC**:

Ecuaciones Diferenciales Lineales a Coeficientes Constantes:

$$a_0 \cdot y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y = b$$

$$a_0 ; a_1 ; \dots ; a_{n-1} ; a_n \in \mathbb{R} ; a_0 \neq 0$$

Método General para una EDOLH - Coeficientes Constantes

$$a_0 \cdot y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y = 0 ; \forall x \in [a; b] \quad (\text{III})$$

$$a_0 ; a_1 ; \dots ; a_{n-1} ; a_n \in \mathbb{R} ; a_0 \neq 0.$$

$$\varphi a_i(x) = a_i, \forall x \in [a; b] \rightarrow \text{funciones constantes} \rightarrow \text{continuas en } [a; b].$$

(1º) $B = \text{Base de Soluciones de (III)} \rightarrow B = \{y_1 ; y_2 ; \dots ; y_n\}$

↳ ¿cómo procedemos para hallar B ? $\rightarrow$ por “Prueba y Error”.

(Paso-1) elegir una “función de prueba”, f .

(Paso-2) derivar f , reemplazar f y sus derivadas en (III):

f ; ¿verifica (III)? : φ SI $\Rightarrow f$ es solución

φ NO $\Rightarrow f$ no es solución $\Rightarrow$ (Paso-1)

(Paso-3) repetir (P-2) hasta obtener “ n ” soluciones de (III): $\{f_1 ; f_2 ; \dots ; f_n\}$

(Paso-4) analizar si $\{f_1 ; f_2 ; \dots ; f_n\}$ es BASE de SOLUCIONES:

¿es l.i.? : φ SI $\Rightarrow$ FIN del Proceso $\rightarrow B = \{f_1 ; f_2 ; \dots ; f_n\}$

φ NO $\Rightarrow$ (Paso-1), reiniciar el proceso hasta obtener B .

Ejecución del proceso de Prueba y Error:

► (Paso-1): Para elegir f (función de prueba): ¿por donde empezamos? .

Inspeccionamos la EDOL al efecto de “ver” si presenta alguna característica que nos remita a alguna función “conocida”. Al tal fin, lo primero que hacemos es “*simplificar*” el problema, plantear el “*caso simple*” ($n = 2$):

$$a \cdot y''_{(x)} + b \cdot y'_{(x)} + c \cdot y_{(x)} = 0 ; \forall x \in [a; b] \quad (\text{III-2})$$

$$a ; b ; c \in \mathbb{R} ; a \neq 0.$$

☑ ¿Que vemos?: Que $y = y(x)$ para ser solución de (III-2), debe verificar que y , y' e y'' al ser *multiplicadas* por un número real y luego *sumadas*, hagan “**cero**” la ecuación, para todo “ x ”. Que, para que esto pase, $y(x)$ debe verificar que sus derivadas sean “*múltiplos de sí misma*”; o sea: $y^{(k)}(x) = \alpha_k y(x)$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$.

☑ ¿Existe tal función?: si, la “exponencial” tiene esta propiedad.

$$y = e^{r \cdot x} \rightarrow y' = r \cdot e^{r \cdot x} ; y'' = r^2 \cdot e^{r \cdot x} ; \dots ; y^{(k)} = r^k \cdot e^{r \cdot x}$$

Conclusión 1: función de prueba $\rightarrow y = e^{r \cdot x}$.

► (Paso-2): La exponencial, ¿es solución?: $y = e^{r \cdot x} \rightarrow y' = r \cdot e^{r \cdot x} ; y'' = r^2 \cdot e^{r \cdot x}$

$$a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = a \cdot [r^2 \cdot e^{r \cdot x}] + b \cdot [r \cdot e^{r \cdot x}] + c \cdot [e^{r \cdot x}] = 0, \forall x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [a \cdot r^2 + b \cdot r + c] \cdot e^{r \cdot x} = 0, \forall x \Leftrightarrow \boxed{a \cdot r^2 + b \cdot r + c = 0}$$

Conclusión 2: $y = e^{r \cdot x}$ es solución de (III-2) $\Leftrightarrow r$ es solución de $a \cdot r^2 + b \cdot r + c = 0$.

NOTA: fácilmente vemos que la *conclusión* obtenida *no depende* del orden de la EDOL; que podemos generalizar la misma a **ecuaciones diferenciales lineales de orden “ n ”**.

DEF. 9: Ecuación Característica (EC).

Llamamos, **Ecuación Característica** a la ecuación:

$$a_0 \cdot r^n + a_1 \cdot r^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \cdot r + a_n = 0,$$

asociada a la EDOL (III): $a_0 \cdot y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y = 0$

Conclusión General / Paso-2

$y = e^{r \cdot x}$ es solución de (III) $\Leftrightarrow r$ es cero de $a_0 \cdot r^n + a_1 \cdot r^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \cdot r + a_n = 0$.

$y = e^{r \cdot x}$ solución de (III) $\Leftrightarrow r$ raíz de la “Ecuación Característica”.

► (Paso-3) Obtener “n” soluciones de (III): $\{y_1; y_2; \dots; y_n\}$

Por Algebra sabemos que una ecuación de grado “n” tiene “n” raíces; que estas pueden ser simples ó repetidas, reales ó complejas; que, si son complejas, aparecen de “*a pares*”.

Luego: $\left\{ \begin{array}{l} \blacklozenge \text{ Si } m = \text{cantidad de raíces reales (sin repetir) de la EC entonces } m \leq n; \\ \blacklozenge \text{ Si } r_j \text{ solución EC, } r_j \in \mathbb{R} \text{ entonces } y_j = e^{r_j \cdot x} \text{ solución de (III); } j=1, 2, \dots, m \end{array} \right.$

Conclusión 3: de la EC podemos obtener “m” soluciones distintas de (III) con $m \leq n$.

$\zeta m = n?$ $\left\{ \begin{array}{l} \curvearrowright \text{ SI} \Rightarrow \text{(Paso - 4)} \\ \curvearrowright \text{ NO} \Rightarrow \text{(Paso-1) (reiniciar el proceso, obtener las “n-m” sols. faltantes)} \end{array} \right.$

► (Paso-4) $\{y_1; y_2; \dots; y_n\}$; ¿ es BASE de SOLUCIONES ?

¿ es l.i. ? : $\curvearrowright \text{ SI} \Rightarrow \text{FIN del Proceso} \rightarrow B = \{y_1; y_2; \dots; y_n\}$

$\curvearrowright \text{ NO} \Rightarrow \text{(Paso-1), reiniciar el proceso hasta obtener B.}$

Ejemplo 17: $y'' - 4 \cdot y' + 3 \cdot y = 6 \cdot e^x$ ($\rightarrow$ EDOLH-2 $\rightarrow B = \{y_1; y_2\}$ (l.i.); $b(x) = 6 \cdot e^x$)

(1º) Hallar la Base de Soluciones de EDOLH-2 $\rightarrow B = \{y_1; y_2\}$ (l.i.)

► (Pasos 2; 3): EC $\rightarrow r^2 - 4 \cdot r + 3 = 0 \Leftrightarrow r_1 = 3; r_2 = 1$ (2 raíces, reales y distintas)

$$\begin{array}{l} r_1 = 3 \Rightarrow y_1 = e^{3 \cdot x} \\ r_2 = 1 \Rightarrow y_2 = e^x \end{array} \rightarrow 2 \text{ soluciones: ¿son l.i.?$$

► (Paso- 4): $\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{3x}}{e^x} = e^{2x} \neq cte \xRightarrow{\text{criterio 3 l.i.}} \Rightarrow \{y_1; y_2\} \text{ es l.i. ; es Base de Soluciones}$
 $\Rightarrow B = \{e^{3 \cdot x}; e^x\}$

(2º) Solución de la Homogénea: $y_h = c_1 e^{3 \cdot x} + c_2 e^x$.

(3º) Solución Particular: $y_p = A x e^x \rightarrow A = -3 \rightarrow y_p = -3 x e^x$
 (Verificar. Explorar porqué no es: $A \cdot e^x$)

(4º) Solución General: $y_g = c_1 e^{3 \cdot x} + c_2 e^x - 3 x e^x$

Construcción de la Base de Soluciones según las raíces de la EC.

Distintos Casos para la EDOLH-2 : $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 ; \forall x \in [a; b] \quad (\text{III-2})$
 $a_0 ; a_1 ; a_2 \in \mathbb{R}; \quad a_0 \neq 0$

Caso 1: Raíces Reales y Distintas:

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

$$\text{EC} \rightarrow a_0 r^2 + a_1 r + a_2 = 0 \Leftrightarrow r_1 ; r_2 \in \mathbb{R} \wedge r_1 \neq r_2 \quad (*)$$

(1º) Hallar la Base de Soluciones de EDOLH-2 $\rightarrow B = \{y_1 ; y_2\}$ (l.i.)

$$\begin{aligned} \text{▶ (Pasos 2; 3): } r_1 &\Rightarrow y_1 = e^{r_1 \cdot x} \\ r_2 &\Rightarrow y_2 = e^{r_2 \cdot x} \end{aligned} \rightarrow 2 \text{ soluciones distintas: ¿son l.i.?$$

$$\text{▶ (Paso- 4): } \frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{r_1 \cdot x}}{e^{r_2 \cdot x}} = e^{(r_1 - r_2) \cdot x} = e^{\alpha \cdot x} \neq \text{cte} \quad [\text{por } (*) \alpha = r_1 - r_2 \neq 0]$$

$$\Rightarrow \{y_1 ; y_2\} \text{ es l.i.} \Rightarrow \text{Base de Soluciones} \Rightarrow B = \{e^{r_1 \cdot x}; e^{r_2 \cdot x}\}$$

crit 3

(2º) Solución de la Homogénea – **Caso 1:** $y_h = c_1 e^{r_1 \cdot x} + c_2 e^{r_2 \cdot x}$

Caso 2: Raíces Reales e Iguales:

$$y'' - 2 \cdot \alpha \cdot y' + \alpha^2 y = 0$$

$$\text{EC} \rightarrow r^2 - 2 \alpha \cdot r + \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow (r - \alpha)^2 = 0 \Leftrightarrow r_1 ; r_2 \in \mathbb{R} \wedge r_1 = r_2 = \alpha \quad (*)$$

(1º) Hallar la Base de Soluciones de EDOLH-2 $\rightarrow B = \{y_1 ; y_2\}$ (l.i.)

$$\begin{aligned} \text{▶ (Pasos 2; 3): } r_1 &\Rightarrow y_1 = e^{r_1 \cdot x} \stackrel{(*)}{=} e^{\alpha \cdot x} \\ r_2 &\Rightarrow y_2 = e^{r_2 \cdot x} \stackrel{(*)}{=} e^{\alpha \cdot x} \end{aligned} \rightarrow y_1 = y_2 \rightarrow \underline{1 \text{ solución}} \rightarrow (\text{Paso -1})$$

▶ (Paso-1) Buscamos otra solución $\rightarrow$ función de prueba: $y = x \cdot e^{\alpha \cdot x}$

$$\begin{aligned} y &= e^{\alpha \cdot x} \cdot x & \xrightarrow{\cdot \alpha^2} & \alpha^2 \cdot y = e^{\alpha \cdot x} \cdot x \cdot \alpha^2 \\ y' &= e^{\alpha \cdot x} \cdot (1 + \alpha \cdot x) & \xrightarrow{\cdot -2\alpha} & -2 \cdot \alpha \cdot y' = e^{\alpha \cdot x} \cdot (-2\alpha - 2\alpha^2 \cdot x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' &= e^{\alpha \cdot x} (2\alpha + \alpha^2 \cdot x) & \xrightarrow{\dots\dots\dots} & y'' = e^{\alpha \cdot x} \cdot (2\alpha + \alpha^2 \cdot x) \\ & & & y'' - 2 \cdot \alpha \cdot y' + \alpha^2 y = e^{\alpha \cdot x} (2\alpha + \alpha^2 x - 2\alpha - 2\alpha^2 x + \alpha^2 x) \\ & & & y'' - 2 \cdot \alpha \cdot y' + \alpha^2 y = 0 \rightarrow \text{es solución!!} \end{aligned}$$

Conclusión: $y_2 = x \cdot e^{\alpha \cdot x}$ es solución de la EDOLH-2

$$\text{▶ (Paso-4): } \frac{y_2}{y_1} = \frac{x \cdot e^{\alpha \cdot x}}{e^{\alpha \cdot x}} = x \neq \text{cte} \Rightarrow \{y_1 ; y_2\} \text{ es l.i.} \Rightarrow B = \{e^{\alpha \cdot x}; x \cdot e^{\alpha \cdot x}\}$$

(2º) Solución de la Homogénea - **Caso 2:** $y_h = c_1 e^{\alpha \cdot x} + c_2 x \cdot e^{\alpha \cdot x}$

NOTA: La función de prueba: $y = x \cdot e^{\alpha \cdot x}$; se obtiene acudiendo al método de sustitución.

Se propone como solución la función: $y = e^{\alpha \cdot x} \cdot v(x)$; se busca v (nueva incógnita)

$$\begin{array}{ll}
 y = e^{\alpha \cdot x} \cdot v & \xrightarrow{\times \alpha^2} \quad \alpha^2 \cdot y = e^{\alpha \cdot x} \cdot \alpha^2 v \\
 y' = e^{\alpha \cdot x} \cdot (v' + \alpha \cdot v) & \xrightarrow{\times -2\alpha} \quad -2 \cdot \alpha \cdot y' = e^{\alpha \cdot x} \cdot (-2 \alpha v' - 2 \alpha^2 v) \\
 y'' = e^{\alpha \cdot x} (v'' + 2\alpha v' + \alpha^2 v) & \xrightarrow{\dots\dots\dots} \quad y'' = e^{\alpha \cdot x} \cdot (v'' + 2\alpha v' + \alpha^2 v) \\
 & y'' - 2 \cdot \alpha \cdot y' + \alpha^2 y = e^{\alpha \cdot x} (v'') = 0
 \end{array}$$

$$\boxed{\checkmark} \quad e^{\alpha \cdot x} (v'') = 0 \Leftrightarrow v'' = 0 \Leftrightarrow v(x) = c_1 x + c_2 \xrightarrow{\text{sol part.}} v(x) = x$$

Caso 3: Raíces Complejas :

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

$$EC \rightarrow a_0 r^2 + a_1 r + a_2 = 0 \Leftrightarrow r_1 ; r_2 \in \mathbb{C} \wedge \boxed{r_1 = a + bi ; r_2 = a - bi}$$

(1º) Hallar la Base de Soluciones de EDOLH-2 $\rightarrow B = \{y_1; y_2\}$ (l.i.)

$$\begin{array}{l}
 \blacktriangleright \text{(Pasos 2; 3): } r_1 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z_1 = e^{r_1 \cdot x} \\ z_2 = e^{r_2 \cdot x} \end{array} \right\} \underline{\underline{2 \text{ soluciones a variable compleja!!}}}
 \end{array}$$

Nuestro trabajo requiere funciones solución a variable real.

Para ello, acudimos a la “Fórmula de Euler”

$$\curvearrowright \text{“Fórmula de Euler”}: e^{ai} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$$

$$\begin{aligned}
 \curvearrowright z_1 = e^{r_1 x} &= e^{(a+bi)x} = e^{(ax + i b x)} = e^{(ax)} \cdot e^{(bx)i} = \boxed{\text{EULER } (\alpha = b \cdot x)} \\
 &= e^{(ax)} \cdot (\cos(bx) + i \cdot \sin(bx)) = [e^{(ax)} \cdot \cos(bx)] + i \cdot [e^{(ax)} \sin(bx)]
 \end{aligned}$$

$$\curvearrowright z_1 = [e^{(ax)} \cdot \cos(bx)] + i \cdot [e^{(ax)} \sin(bx)] = y_{11}(x) + i \cdot y_{12}(x)$$

con: $y_{11} = e^{(ax)} \cdot \cos(bx)$ (parte real de $z_1 \rightarrow$ *función real a variable real*)

$y_{12} = e^{(ax)} \cdot \sin(bx)$ (parte imaginaria de $z_1 \rightarrow$ *función real a variable real*)

Luego, obtenemos dos funciones escalares soluciones de la EDOLH.

$$\Rightarrow \{y_{11}; y_{12}\} \text{ l.i. } \Rightarrow B = \{e^{(ax)} \cdot \cos(bx); e^{(ax)} \cdot \sin(bx)\}$$

crit 3

(2º) Solución de la Homogénea – Caso 3: $y_h = c_1 e^{(ax)} \cdot \cos(bx) + c_2 e^{(ax)} \cdot \sin(bx)$
 $y_h = e^{(ax)} \cdot [c_1 \cos(bx) + c_2 \sin(bx)]$

Método General para una EDOL “NoH” - Coeficientes Constantes (CC)

$$a_0 \cdot y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y = b(x) ; \forall x \in [a; b] \quad (\text{IV})$$

$$a_0 ; a_1 ; \dots ; a_{n-1} ; a_n \in \mathbb{R} ; a_0 \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow a_i(x) = a_i, \forall x \in [a; b] \rightarrow \text{funciones constantes} \rightarrow \text{continuas en } [a; b].$$

Observación 1: este tipo de EDOL es un caso particular de Ecuación Diferencial Lineal. Luego, el Método General a aplicar para resolver (IV) es el ya visto; pero, con un problema resuelto. Para las EDOL-CC (y sólo para ellas!!) contamos con un Método para hallar **B**, la Base de Soluciones de la Homogénea.

Método General para resolver una EDOL- No Homogénea – Coefs Ctes o No

- (1°) Hallar Base de Soluciones de la Homogénea. $\rightarrow B = \{y_1 ; y_2 ; \dots ; y_n\}$ (l.i.)
 (2°) Hallar Solución de la Homogénea. $\rightarrow y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$.
 (3°) Hallar Solución Particular de la No Homogénea $\rightarrow y_p$
 (4°) Dar la Solución General $\rightarrow y_g = [c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n] + y_p$

Observación 2: si repasamos los pasos del Método General vemos que resta un problema por resolver; el de la Solución Particular (3°). Para hallar esta solución acudimos al método de “Prueba y Error”, detectamos ciertos problemas en el criterio usado para elegir la “función de prueba”. Recordamos que tal función era la “prototipo” de la clase de funciones a la que pertenece “b” (el “término independiente”) y que si bien en muchos casos este criterio sirvió (hallamos la solución particular) hubo otros en los que no; y esto aunque las ecuaciones diferenciales eran muy similares.

Resolvemos este último problema a través de “sistematizar” la búsqueda de soluciones particulares.

Para lograr este objetivo existen distintos métodos, vemos uno de ellos.

Solución Particular – MÉTODO DE LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS.

Este Método, en esencia, es el de “Prueba y Error” que usamos en los ejemplos.

Consiste en elegir como “función de prueba” la función prototipo correspondiente a la clase de funciones a la que pertenece “b” (o sea, una función similar a “b” pero con “coeficientes indeterminados”); reemplazarla en la ecuación diferencial y hallar, de ser posible, los *valores de los coeficientes* para que la función propuesta sea la solución particular buscada.

Ejemplos:

18) Dada $y''' - 2y'' - y' + 2y = 6x - 3$ (*), $b(x) = 6x - 3 \rightarrow$ “lineal”.

$\hookrightarrow y_p?$ $\rightarrow$ función de prueba: $y(x) = A \cdot x + B$ ($\hookrightarrow A?$; $\hookrightarrow B?$, $\hookrightarrow$ existen?)

$\blacktriangleright y(x) = A \cdot x + B$; $y'(x) = A$; $y''(x) = 0$; $y'''(x) = 0$ (Reemplazamos en (*))

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = -A + 2(Ax + B) = 2Ax + 2B - A = 6x - 3$$

$$2Ax + (2B - A) = 6x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2A = 6 \\ 2B - A = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = 0 \end{cases} \rightarrow y_p$$

$\blacktriangleright \boxed{y_p = 3x}$ (verificar)

19) Dada $y''' - 3y'' + 2y' = 3e^{3x}$ (*), $b(x) = 3e^{3x} \rightarrow$ “exponencial”.

¿ y_p ? $\rightarrow$ función de prueba: $y_p(x) = A \cdot e^{3x}$

$$\triangleright y_p(x) = A \cdot e^{3x}; \quad y_p'(x) = 3 \cdot A \cdot e^{3x}; \quad y_p''(x) = 9 \cdot A \cdot e^{3x}; \quad y_p'''(x) = 27 \cdot A \cdot e^{3x}$$

Reemplazamos en (*):

$$y''' - 3y'' + 2y' = [27A - 27A + 6A] \cdot e^{3x} = [6A] \cdot e^{3x} = 3e^{3x}$$

$$[6A] \cdot e^{3x} = 3e^{3x} \Leftrightarrow \begin{cases} 6A = 3 \\ A = 1/2 \end{cases} \rightarrow y_p$$

$$\triangleright y_p = 1/2 \cdot e^{3x} \quad (\text{verificar})$$

20) Dada $y''' - 3y'' + 2y' = e^x$ (*), $b(x) = e^x \rightarrow$ “exponencial”.

$$\hookrightarrow \text{EC: } r^3 - 3r^2 + 2r = 0 \Leftrightarrow r_1 = 1; r_2 = 2; r_3 = 0$$

$$(1^\circ) \quad B = \{e^x; e^{2x}; 1\}$$

$$(2^\circ) \quad y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3$$

(3°) ¿ y_p ? $\rightarrow$ función de prueba: $y_p(x) = A \cdot e^x$

$$\triangleright y_p(x) = A \cdot e^x; \quad y_p'(x) = A \cdot e^x; \quad y_p''(x) = A \cdot e^x; \quad y_p'''(x) = A \cdot e^x$$

Reemplazamos en (*):

$$y''' - 3y'' + 2y' = [A - 3A + 2A] \cdot e^x = [0 \cdot A] \cdot e^x = 0 \neq 12e^x$$

$\Rightarrow$ no existe A tal que $A \cdot e^x$ sea solución particular de la EDOL- NoH.



¿porqué y_p no es solución de (*) si en el ej-19 (muy parecido) si lo era?;

¿hay “algo” en la EDO o en su resolución que de “pistas” al respecto?.

SI !!! : $e^x = e^{1 \cdot x}$ y “1” es raíz de la EC ; luego,

e^x solución de la Homogénea $\Rightarrow A \cdot e^x$ también lo es $\forall A$!!

Para salvar este problema, y_p (la función de prueba fallida) se multiplica por “x”;

$\Rightarrow$ función de prueba : $f_p(x) = y_p(x) \cdot x \rightarrow f_p(x) = A \cdot e^x \cdot x$ (verificar que existe A).

Conclusión General: para $b(x) = k \cdot e^{\lambda \cdot x}$ ($k, \lambda \in \mathbb{R}$)

✓ Si λ no es raíz de la EC $\Rightarrow y_p(x) = A \cdot e^{\lambda \cdot x}$;

✓ Si λ es raíz de multiplicidad “m” de la EC entonces $f_p(x) = y_p(x) \cdot x^m$
 $\Rightarrow f_p(x) = A \cdot e^{\lambda \cdot x} \cdot x^m$

✓ Si $\lambda = 0$ entonces $b(x) = k \cdot e^{0 \cdot x} \rightarrow b(x) = k$; luego,
 si 0 es raíz de multiplicidad “m” de la EC entonces $f_p(x) = y_p(x) \cdot x^m$
 $\Rightarrow f_p(x) = A \cdot x^m$.

✓ en general, cualquiera sea “b(x)”, si “ y_p ” la función de prueba elegida no es solución particular de la no homogénea entonces: $f_p(x) = y_p(x) \cdot x^m$

- 21) Dada $y'' - 4y' + 4y = 4e^{2x}$ (*), $b(x) = 4e^{2x} \rightarrow$ “exponencial”.
- ↪ EC: $r^2 - 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow r_1 = r_2 = 2$ (multiplicidad de la raíz = 2)
- (1º) $B = \{e^{2x}; x \cdot e^{2x}\}$ (verificar)
- (2º) $y_h = c_1 e^{2x} + c_2 x \cdot e^{2x}$
- (3º) ¿ y_p ? $\rightarrow$ función de prueba: $y(x) = A \cdot e^{2x} \cdot x^2$ (probamos...)
- $y(x) = A \cdot x^2 \cdot e^{2x}$; $y'(x) = [2Ax + 2A \cdot x^2] \cdot e^{2x}$; $y''(x) = [2A + 8Ax + 4Ax^2] \cdot e^{2x}$
- Reemplazamos en (*):
- $$y'' - 4y' + 4y = [2A] \cdot e^{2x} = 4e^{2x} \Leftrightarrow A = 2$$
- $y_p = 2 \cdot x^2 \cdot e^{2x}$ (verificar que es solución de la no homogénea)

- 22) Dada $y''' - y'' = 10$ (*), $b(x) = 10 \rightarrow$ “constante”
- ↪ EC $\rightarrow r^3 - r^2 = r^2(r-1) = 0 \Leftrightarrow r_1 = 1$; $r_2 = r_3 = 0$ ($\rightarrow$ mult. = 2)
- (1º) $B = \{e^x; 1; x\}$ (verificar)
- (2º) $y_h = c_1 e^x + c_2 + c_3 \cdot x$
- (3º) ¿ y_p ? $\rightarrow$ función de prueba: $y_p = ?A?$; NO $\rightarrow y_p = A \cdot x^2$
- $y(x) = A \cdot x^2$; $y'(x) = 2Ax$; $y''(x) = 2A$; $y'''(x) = 0$
- Reemplazamos en (*): $y''' - y'' = -2A = 10 \Leftrightarrow A = -5$
- $y_p = -5 \cdot x^2$
- (4º) ¿ y_g ? $\rightarrow y_g = y_h + y_p \rightarrow y_g = c_1 e^x + c_2 + c_3 \cdot x - 5x^2$

- 23) Dada $y''' - y'' = 12x$ (*), $b(x) = 12x \rightarrow$ “lineal”
- ↪ EC $\rightarrow r^3 - r^2 = r^2(r-1) = 0 \Leftrightarrow r_1 = 1$; $r_2 = r_3 = 0$ ($\rightarrow$ mult. = 2)
- (1º) $B = \{e^x; 1; x\}$
- (2º) $y_h = c_1 e^x + c_2 + c_3 \cdot x$
- (3º) ¿ y_p ? función de prueba: $y_p = ?Ax + B?$ $\xrightarrow{\text{NO}} y_p = (Ax+B) \cdot x^2 = Ax^3 + Bx^2$
- $y(x) = Ax^3 + Bx^2$; $y'(x) = 3Ax^2 + 2Bx$; $y''(x) = 6Ax + 2B$; $y'''(x) = 6A$
- Reemplazamos en (*):
- $$y''' - y'' = 6A - 6Ax - 2B = -6Ax + (6A - 2B) = 12x$$
- $$-6Ax + (6A - 2B) = 12x \Leftrightarrow \begin{cases} -6A = 12 \\ 6A - 2B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = -6 \end{cases} \rightarrow y_p = -2x^3 - 6x^2$$
- (4º) ¿ y_g ? $\rightarrow y_g = y_h + y_p \rightarrow y_g = c_1 e^x + c_2 + c_3 \cdot x - 2x^3 - 6x^2$

Solución Particular – MÉTODO DE LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS.

$$a_0 \cdot y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y = b(x) ; \forall x \in [a; b]$$

$$a_0 ; a_1 ; \dots ; a_{n-1} ; a_n \in \mathbb{R} ; a_0 \neq 0.$$

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y λ no es raíz de la Ecuación Característica, entonces:

Si $b(x)$ es:	Seleccionar y_p :
$\alpha e^{\lambda \cdot x}$	$A e^{\lambda \cdot x}$
$\alpha \sin(\beta x)$	$A \sin(\beta x) + B \cos(\beta x)$
$\alpha \cos(\beta x)$	$A \sin(\beta x) + B \cos(\beta x)$
$\alpha \cdot x$	$A + B \cdot x$
$\alpha \cdot x^2$	$A + B \cdot x + C \cdot x^2$
$\alpha_0 + \alpha_1 \cdot x + \dots + \alpha_s \cdot x^s$	$A_0 + A_1 \cdot x + \dots + A_s \cdot x^s$
$\alpha \cdot x^2 \cdot e^{\lambda \cdot x}$	$(A + B \cdot x + C \cdot x^2) \cdot e^{\lambda \cdot x}$
$(\alpha_0 + \alpha_1 \cdot x + \dots + \alpha_s \cdot x^s) \cdot e^{\lambda \cdot x}$	$(A_0 + A_1 \cdot x + \dots + A_s \cdot x^s) \cdot e^{\lambda \cdot x}$
$\alpha \cdot x^2 \cdot \sin(\beta x)$	$(A_1 + B_1 \cdot x + C_1 \cdot x^2) \sin(\beta x) + (A_2 + B_2 \cdot x + C_2 \cdot x^2) \cos(\beta x)$
$\alpha \cdot x^2 \cdot \cos(\beta x)$	$(A_1 + B_1 \cdot x + C_1 \cdot x^2) \sin(\beta x) + (A_2 + B_2 \cdot x + C_2 \cdot x^2) \cos(\beta x)$
$\alpha \sin(\beta x) \cdot e^{\lambda \cdot x}$	$(A \sin(\beta x) + B \cos(\beta x)) \cdot e^{\lambda \cdot x}$
$\alpha \cos(\beta x) \cdot e^{\lambda \cdot x}$	$(A \sin(\beta x) + B \cos(\beta x)) \cdot e^{\lambda \cdot x}$
$P(x) \cdot \sin(\beta x) \cdot e^{\lambda \cdot x}$	$(Q(x) \sin(\beta x) + H(x) \cos(\beta x)) \cdot e^{\lambda \cdot x}$
$P(x) \cdot \cos(\beta x) \cdot e^{\lambda \cdot x}$	$(Q(x) \sin(\beta x) + H(x) \cos(\beta x)) \cdot e^{\lambda \cdot x}$
	Q y H polinomios del mismo grado que P

Recordar que:

- ☒ Si λ es raíz multiplicidad “m” de la EC, entonces las correspondientes soluciones de la homogénea son: $y_1(x) = e^{\lambda \cdot x}$; $y_2(x) = x \cdot e^{\lambda \cdot x}$;; $y_m(x) = x^m \cdot e^{\lambda \cdot x}$
- ☒ Si λ es raíz de multiplicidad “m” de la EC entonces $y_p^*(x) = y_p(x) \cdot x^m$ (con y_p la correspondiente de la tabla anterior)

Ejemplos:

24) Dada $y''' - 3y'' + 3y' - y = 4 \cdot e^x$, hallar su solución general

↳ EDOL "NoH"-3 $\rightarrow b(x) = 4 \cdot e^x$ (exponencial); $B = \{y_1(x); y_2(x); y_3\}$

1º) **Base de Soluciones**

▶ (Pasos 2; 3): EC $\rightarrow r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0 \Leftrightarrow r_1 = r_2 = r_3 = 1$

$$B = \{e^x; x \cdot e^x; x^2 \cdot e^x\} \text{ (verificar)}$$

2º) **Solución de la Homogénea**: $y_h = c_1 e^x + c_2 x \cdot e^x + c_3 x^2 \cdot e^x$.

3º) **Solución Particular**: $y_p = A x^3 e^x \rightarrow A = \frac{2}{3}$

4º) **Solución General**: $y_G = c_1 e^x + c_2 x \cdot e^x + c_3 x^2 \cdot e^x + \frac{2}{3} x^3 e^x$

25) $y''' - y'' = \sin x$ (*)

↳ EDOL "NoH"-3 $\rightarrow b(x) = \sin x$ (trig.); $B = \{y_1(x); y_2(x); y_3(x)\}$

1º) **Base de Soluciones**

▶ (Pasos 2 ; 3): EC $\rightarrow r^3 - r^2 = r^2(r-1) = 0 \Leftrightarrow r_1 = r_2 = 0 ; r_3 = 1$

$$B = \{1; x; e^x\} \text{ (verificar)}$$

2º) **Solución de la Homogénea**: $y_h = c_1 + c_2 \cdot x + c_3 e^x$.

3º) **Solución Particular**: $y_p = A \sin x + B \cos x$

$$\begin{aligned} \text{▶ } y(x) &= A \sin x + B \cos x ; y'(x) = A \cos x - B \sin x ; \\ y''(x) &= -A \sin x - B \cos x ; y'''(x) = -A \cos x + B \sin x . \end{aligned}$$

Reemplazamos en (*) y hallamos (si existe) A y B:

$$y''' - y'' = -A \cos x + B \sin x + A \sin x + B \cos x = (B-A) \cos x + (B+A) \sin x = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B - A = 0 \\ B + A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ 2A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow y_p = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x$$

4º) **Solución General**: $y_G = y_h = c_1 + c_2 \cdot x + c_3 e^x + \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x$

11.4 Actividades EDO

1) Para las ecuaciones planteadas a continuación:

i) Indicar cuál de ellas es una **ecuación diferencial ordinaria (EDO)**.

ii) Dar el orden de las **EDO** reconocidas en (i).

(a) $y'' + 2 \cdot y' + y = 0$;

(e) $y' - x \cdot y = 0$ (i) $y'' + \ln x \cdot y' = x^2$

(b) $y'' + 2 \cdot y' + y = \sin x$

(f) $\frac{dy}{dx} + y = 0$ (j) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx}$

(c) $x'' + x = t^2$;

(g) $3y + 2x = 4x$ (k) $y''' + 12y' = 0$

(d) $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{-2mE}{h^2} \cdot \psi$

(h) $\frac{d^2 \psi}{dx^2} = \frac{-2mE}{h^2} \cdot \psi$ (m) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y}$

2) Determinar cuál de las siguientes funciones es **solución** de la **EDO** que se indica en cada caso; cual no lo es. Justificar las respuestas.

a) $y'' = 4y \rightarrow f(x) = 5 \cdot e^{2x}; g(x) = 3; h(x) = 0$

b) $t \cdot y' - t y^2 = y \rightarrow f(t) = \frac{-2t}{t^2 - 2}; g(t) = \frac{-2t}{t^2 - 1}$

c) $y'' + y = 0 \rightarrow f(t) = C_1 \sin t; g(t) = C_2 \cos t$

d) $y'' + 2y' + y = 0 \rightarrow f(x) = e^x; g(x) = e^{-x}; h(x) = x e^{-x}$

e) $y' - x y = 0 \rightarrow f(x) = x \cdot e^x; g(x) = e^{x^2}; h(x) = e^{x^2/2};$

f) $y' + 3x^2 y = 6x^2 \rightarrow f(x) = e^{-x^3}; g(x) = 2; h(x) = 2 + c \cdot e^{-x^3}$

f₁) Identificar una solución de la “homogénea asociada”.

f₂) Identificar una solución “particular” de la EDO.

3) (A) Determinar las constantes C_1 y C_2 para que $y = C_1 \sin t + C_2 \cos t$, sea solución del Problema de Valores Iniciales (Pvi):

$$y'' + y = 0; y(0) = 1; y'(0) = 0$$

(B) Dada $y' - e^{x^2} = 0$ (I), $y(5) = 0$ (Pvi)

a) V ó F, justificar respuesta: (I) es una EDO.

b) V ó F, justificar respuesta: $\int e^{x^2} dx$ es solución de (I)

c) V ó F, justificar respuesta: $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$ es solución del (Pvi)

4) Dada $y' - \frac{1}{x} \cdot y = 1$;

el gráfico muestra curvas solución correspondientes a dicha EDO.

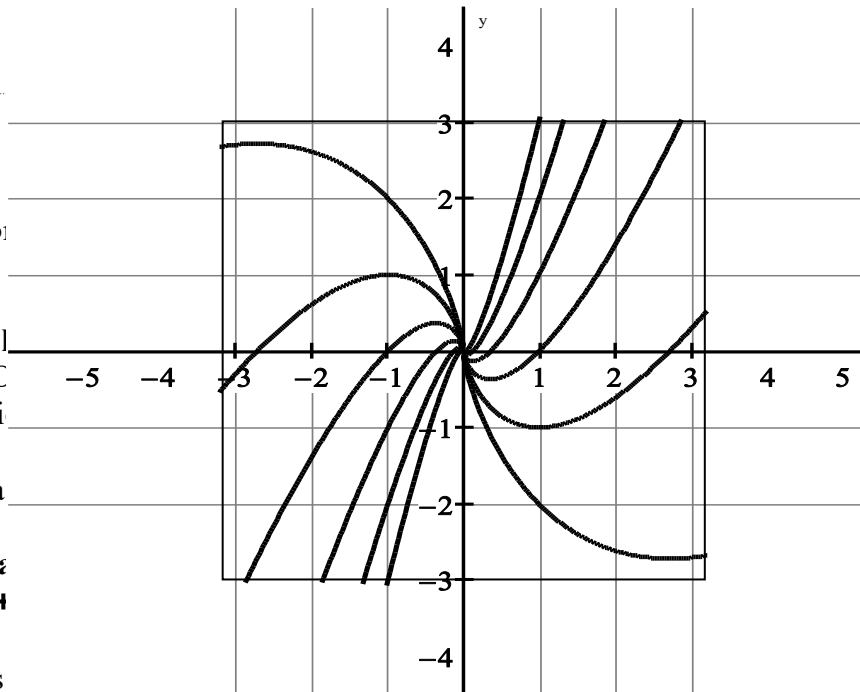
Se pide:

a) dadas $f(x) = x(x-1)$ y $g(x) = x$, analizar si son solución de la EDO. Si lo fueran, analizar si son solución de la EDO, $\forall x \in \mathbb{R}$

b) Identificar, entre todas las gráficas la que corresponde a la (o las) soluciones halladas en el ítem (a)

c) Verificar que $\forall k \in \mathbb{R}$, $h(x) = (k+1)$ es solución de la EDO.

Luego, hallar h si se sabe que h es



ECUACIONES DIFERENCIALES DE 1er ORDEN

(I) EDO - 1er Orden a “variables separables” (v.s.)

5) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales a variables separables:

a) $x' = \frac{t^3}{x^2}$

e) $(e^x + 1) \cos t \, dt + e^x \sin t \, dx = 0$

b) $x' \cdot x \sqrt{1-t^2} = t$

f) $y' + y = 0$

c) $x' = (x-1) \cdot (x-2)$

g) $y' - \cos x \cdot y = 0$

d) $\operatorname{tg} t \cdot \cos x \, dt + \operatorname{tg} x \, dx = 0$

h) $y = 2 + \int_1^x y(t) \, dt$

6)

a) Establecer cuáles de las siguientes EDO son a v.s. y cuáles no.

I) $y' = 3x^2(1+y^2)$

V) $y' - 2y = 5$

II) $y' = \frac{y}{x+y}$

VI) $y' - 2y = 5x$

III) $x \cdot y (y-1) \, dx - (1+x^2) \, dy = 0$

VII) $y' - 2xy = 0$

IV) $(\sin x + \sin y) \, dx + \cos y \cdot (x+1) \, dy = 0$

VIII) $y' - 2xy = 5$

b) Hallar la solución general para las EDO a v.s. detectadas en (a) y, de ser posible, dar la solución en forma explícita (con fórmula $y = f(x)$ ó $x = f(y)$ según el caso).

7) Resolver los siguientes PVI. Dar la función solución en su forma explícita (de ser posible) y graficar la curva solución:

a) $\begin{cases} x \cdot x' = -t \\ x(0) = -4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x \cdot x' = -t \\ x(0) = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (1+u) \cdot dv - (1+v) \cdot du = 0 \\ v(3) = -5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (1+u) \cdot dv - (1+v) \cdot du = 0 \\ v(3) = -1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} (1+u) \cdot dv - (1+v) \cdot du = 0 \\ u(-3) = 5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} y^2 \cdot y' - 2 = 0 \\ y(1) = 2 \end{cases}$

- 8) Todo PVI con EDO de 1er orden a v.s. y condición inicial de la forma $y(x_0) = y_0$; una vez separada las variables, tendrá el siguiente aspecto:

$$S(y) dy = R(x) dx; \quad y(x_0) = y_0 \quad (I)$$

Si R es continua y no nula en un intervalo I tal que $x_0 \in I$; la solución de (I) puede obtenerse a partir de aplicar Integrales Definidas (en lugar de Indefinidas) a ambos miembros de la igualdad, y como sigue:

$$\int_{y_0}^y S(y) dy = \int_{x_0}^x R(x) dx$$

Resueltas las integrales tenemos, directamente, la solución particular buscada; o sea, la que verifica la condición inicial: $y(x_0) = y_0$.

- a) Comprobar la afirmación anterior resolviendo el ejercicio 7f por el método de las “integrales definidas”:
- b) Resolver el siguiente PVI: $y' - e^{x^2} = 0$; $y(x_0) = y_0$
- 1) Aplicando el método de las “integrales definidas”
 - 2) Aplicando el método de las “integrales indefinidas”.
 - 3) ¿Qué método conviene? ¿Por qué?

9)

- a) Hallar C ; curva que pasa por $A(1; -e)$ y tal que la “pendiente de la recta tangente” a C en cualquier punto $P(x; y) \in C$, sea igual a la “ordenada” de P . Graficar C , verificar $B(0; -1) \in C$ y que en ese punto se cumple la condición que caracteriza a C .
- b) Dos curvas que al cortarse forman un “ángulo recto” se dice que son “ortogonales” (en el punto de “corte”). Para C y B del ítem (a), se pide hallar C^* tal que $C^* \cap C = \{B\}$; C^* y C ortogonales en B .
- * Equivalentemente, que si t y t^* son respectivamente las rectas tangentes (en B) a C y C^* , entonces $t \perp t^*$.
- * Sugerencia: recordar “ $m_t \cdot m_{t^*} = -1 \Rightarrow t \perp t^*$ ”.
- Graficar C^* y C ; comprobar que son *ortogonales*.

(II) EDO – Lineales de 1er Orden

- 10) Completar la siguiente oración: “una EDO Lineal de 1er Orden es una ecuación diferencial de la forma:”

- a) Lo que distingue a las EDO entre sí y permite su clasificación en “tipos” de EDO (variables separables, lineales,..) es el método que usado para resolverlas. Si no es a variables separables (v.s.), existe un método genérico que, con sus variantes, se puede aplicar una vez detectado que la EDO no es a “v.s.” Este método consiste en hacer un “cambio de variables” en la ecuación con el objeto de que, en las nuevas variables, esta pase a ser a “v.s.”
- Para resolver Lineales de 1er Orden y del tipo del ejercicio 6a-II, se acude a este método. (no así para las Lineales de Orden n , con $n > 1$ o de otro tipo).
- Lineales de 1er Orden (en $x; y; y'$) → cambio variables: “ $y = u_{(x)} \cdot v_{(x)}$ ”.
- Homogéneas (6a-II) → cambio variables: “ $y = x \cdot v_{(x)}$ ”.

b)

b₁) Establecer cual de las EDO del ejercicio 6 es **Lineal de 1er Orden**.b₂) Hallar la solución general de las Lineales de 1er Orden detectadas; hacer esto por medio del “cambio de variables” indicado.b₃) Hallar la solución general de la EDO del ej. 6a-II (homogénea); hacer esto por medio del “cambio de variables” apropiado al caso.c) Dado el PVI: $y' + P(x)y = 0$; $y(x_0) = y_0$ (P continua en $I / x_0 \in I$)demostrar que $y_{(x)} = y_0 e^{F(x)}$ con $F(x) = \int_{x_0}^x (-P(x)) dx$ es solución.

11) Resolver las siguientes EDO, con el método apropiado al caso.

a) $(1+x^2) dy - x y dx = 0$

b) $y' + 2 \cdot y/x = x^3$

c) $(1+u) \cdot v du + (1-v) u dv = 0$

d) $(y^2 - xy) dx + x^2 dy = 0$

e) $y' = \frac{x+y}{x}$

f) $x \cdot dy = y \cdot (1 - 3x \sin x) \cdot dx$

g) $x \cdot y' - y = x^2 \cdot \sin x$

h) $\tan x \cdot \cos y + y' \tan y = 0$

i) $(y^2 - 1) dx - (2y + x y) dy = 0$

j) $(1-y) \cdot y \cdot dx - x^2 dy = 0$

k) $y' - y = e^x$

l) $y - x \cdot y' = 1 + x^2 y'$

m) $y' - \frac{x \cdot y}{1+x^2} = x$

n) $x \cdot y \cdot y' = 1 - x^2$

o) $2y \cos y dy = y \sin y dx + \sin y dy$

PROBLEMAS Y APLICACIONES DE LAS EDO - 1er ORDEN1) Sabiendo que f y g son soluciones de $y' + P(x)y = b(x)$; indicar V ó F, justificar:a) “ $h = f - g$ es solución de $y' + P(x)y = 0$ ”b) “ $p = k \cdot f$, $k \in \mathbb{R}$ es solución de $y' + P(x)y = b(x)$ ”.2) Dada $g(x) = x \cdot f(x)$, indicar V ó F (*justificar*):a) si f es solución de $y' + P(x)y = 0$ entonces g es solución de $y' + P(x)y = f(x)$.b) si f es solución de $y' + P(x)y = 0$ entonces $h(x) = g(x) + 2$ es solución de $y' + P(x)y = f(x) + 2$.3) Dada $y' - x^2 y^2 + k x y = -\frac{2}{x^2}$; se pide:

a) V ó F, justificar: la EDO dada es una EDO Lineal de 1er Orden.

b) Hallar k de modo que $z(x) = \frac{2}{x}$ sea solución.

4) Sean “y” y “V”, altura y volumen de agua en un tanque al instante “t”. Si el agua se escapa por un orificio en el fondo de área “a”, entonces la **Ley de Torricelli** establece que: “la razón de cambio de V en el tanque que se vacía, es proporcional a la raíz cuadrada de y”. La ecuación que modeliza este proceso es:

$$\frac{dV}{dt} = k \sqrt{y} \quad \text{con } k = -a \sqrt{2g}; \quad g = \text{aceleración gravedad } (g = 32 \text{ pies/seg}^2)$$

Para un tanque cilíndrico de 9 pies de altura, 2 pies de radio y con el orificio de salida circular y radio de 1 pulgada, se pide:

a) demostrar que “y” satisface el siguiente Pvi:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-1}{72} \sqrt{y}; \quad y(0) = 9 \quad (\text{considerar que } 1 \text{ pulgada} = \frac{1}{12} \text{ pies})$$

b) Suponiendo que el tanque está lleno al instante en que comienza a perder agua, hallar $y = y(t)$, indicar el dominio natural de esta función y calcular el tiempo mínimo requerido para que quede completamente vacío.

5) La ecuación que describe la caída de un cuerpo de masa “m” en un medio resistente es: $m v' + k v = m g$; con v = velocidad de caída y g = aceleración gravedad

a) demostrar que si x = posición del cuerpo al instante t , $x(0) = 0$; $v(0) = 0$

$$\text{entonces } x(t) = \frac{m \cdot g}{k} t - \frac{m^2 \cdot g}{k^2} \left(1 - e^{\frac{-kt}{m}} \right)$$

b) La velocidad de caída tiende a uniformarse en un valor, ¿Cuál es?

6) La **Ley de Newton del calentamiento (enfriamiento)** establece que: “la razón a la que se calienta (enfía) un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo (T) y la del medio ambiente (M = cte)”.

a) Escribir la EDO que modeliza lo expresado por la Ley de Newton. Clasificar la ecuación obtenida. Analizar el signo de la constante de proporcionalidad según el cuerpo se esté calentando o enfriando.

b) Resolver la EDO en forma genérica y hacer un bosquejo de las curvas solución para los casos en que la temperatura inicial, T_0 , sea mayor, menor o igual M .

c) En un horno que se halla a 100°C se introduce un cuerpo cuya (T_0) es de 20°C. Si a la hora de haberlo puesto en el horno, su temperatura es de 60°C y si hay que sacarlo cuando alcance los 80°C, ¿Cuánto tiempo más hay que dejarlo en el horno?

7) Experimentalmente los psicólogos cognitivos han hallado la siguiente “ley del aprendizaje”:

“la tasa a la que una persona “promedio” puede memorizar un conjunto de N hechos es directamente proporcional al número de hechos que falten por memorizar”.

a) Si con “y” indicamos el nro de hechos memorizados en “t” minutos por una persona promedio, ¿cuál de las siguientes expresiones es la “traducción matemática” de la ley del aprendizaje?; ¿por qué?:

$$\frac{dy}{dt} = k y \quad (y(0) = 0); \quad \frac{dy}{dt} = k (N - y) \quad (y(0) = N); \quad \frac{dy}{dt} = k (N - y) \quad (y(0) = 0).$$

b) Pablo debe rendir el parcial de Física dentro de **3 hs** y todavía tiene que memorizar **60 fórmulas**. Para ver si llega, toma el tiempo que le lleva memorizar **10 fórmulas**, el cual es de **30 minutos**. Pablo (*que desconoce la ley del aprendizaje*) hace cuentas y concluye que llega (*justo, pero llega*). ¿Qué cuentas hace?; ¿Qué conocida “regla” usa?

c) Según la *ley del aprendizaje* calcular: (i) cuantas fórmulas memorizará en **3 hs.**; (ii) tiempo para que le falte **sólo una** por memorizar (¿te parece *razonable* esta ley (o *piensas como Pablo*)? ; ¿porqué?).

8) Cierta rumor comenzó a extenderse un día por un pueblo de 1000 habitantes. Después de una semana 100 personas habían escuchado el rumor. Considerando que la razón de aumento del número de personas que han oído el rumor es *directamente* proporcional al de la que todavía no lo han oído y siendo $x(t)$ la cantidad de personas que oyó el rumor a la semana t ; se pide:

a) Indicar cuál de los siguientes **PVI** modeliza esta situación:

$$(I) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = kx \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (II) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = k(1000 - x) \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (III) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = k(x - 1000) \\ x(0) = 100 \end{cases}$$

b) Resolver el problema seleccionado.

c) hallar el tiempo que debe transcurrir para que la mitad de la población haya escuchado el rumor.

9) DECAIMIENTO RADIOACTIVO

Las sustancias radiactivas decaen por la emisión espontánea de radiación. Si con m se indica la **masa restante** al instante t a partir de una **masa inicial** m_0 de la sustancia, a nivel experimental se encuentra que la *rapidez relativa* de decaimiento, $-\frac{1}{m} \cdot \frac{dm}{dt}$, es constante.

Se tiene así que la ecuación que modeliza el “**decaimiento radiactivo**” es:

$$\frac{dm}{dt} = k \cdot m \quad (\text{¿Qué signo tiene “}k\text{”} ? ; \text{¿ porqué ? })$$

Dicho de otra forma, se tiene que: “la rapidez con la que se desintegra una sustancia radiactiva es *directamente* proporcional a la masa presente”.

a) Resolver el **Pvi** relativo al “**decaimiento radiactivo**”; graficar la función obtenida, verificar que la misma describe el proceso de decaimiento.

$$\begin{cases} \frac{dm}{dt} = k \cdot m \\ m(0) = m_0 \end{cases}$$

b) Los físicos expresan la rapidez de decaimiento en términos de “**vida media**”, o sea, del “*tiempo requerido para que decaiga la mitad de la cantidad de sustancia presente, cualquiera que esta sea*”. Se indica como $t_{1/2}$. Verifica: $m(t_{1/2}) = \frac{1}{2} m_0$. Indicar V ó F (justificar): en este caso se tiene que:

$$(i) \text{ el } t_{1/2} \text{ es independiente de } m_0; \quad (ii) \quad k = \frac{-\ln 2}{t_{1/2}}$$

- 10) Se sabe que la vida media del **radio 226** es de **1590 años**. Se quiere hallar:
- a) una fórmula para calcular la masa de **radio 226** que queda después de t años para una muestra de **100 mg** de **radio 226**.
 - b) la masa después de **1000 años**.
 - c) la cantidad de años requerida para que la masa inicial se reduzca a **30 mg**.
- 11) En **3 días**, una muestra de **radón 222** decayó hasta el **58%** de su masa original.
- a) ¿cuál es la vida media de este elemento?
 - b) ¿cuándo tiempo se requiere para que la masa decaiga hasta el **10%** de m_0 ?
 - c) **V ó F**: la rapidez de decaimiento es mayor el **1er** día que el **3ro**.
- 12) Sabiendo que ^{10}Sr se descompone a una velocidad proporcional a su masa en cada instante " t ", que la masa inicial es de m_0 grs. y que tarda **25 años** en descomponerse el **50%** de la misma, se pide:
- a) Plantear la EDO que modeliza el proceso, resolverla y hallar la función que da la masa remanente en cada instante " t ". Graficar dicha función.
 - b) Hallar el tiempo " t " requerido para que se descomponga el 75% de la masa inicial. Marcar este dato en el gráfico anterior
 - c) Indicar **V ó F** justificando:
 - i) *"la función $f(t) = m_0 (2^{-t/25})$ es solución de la ecuación diferencial"*
 - ii) *"la rapidez de descomposición aumenta al aumentar la masa inicial"*.
- 13) Se aisló **1 gr.** de un elemento desconocido y se observó que el mismo se desintegraba a una velocidad proporcional al cuadrado de la cantidad presente. Se pide:
- a) Analizar si este elemento verifica las generales de la ley para los elementos radiactivos. Luego, tomando " x = masa restante al instante t " (en años), plantear el **PVI** que modeliza el proceso de desintegración del mismo. Resolverlo y hallar la función que da $x = x(t)$.
 - b) Hallar la cte. de desintegración si se observa que al año, restan **0.5 gr.** Graficar la función. Analizar si el tiempo vida media es independiente de la masa inicial.

14) En una reacción química se define como "**velocidad de reacción**", v , a la variación (en este caso *disminución*) en la unidad de tiempo del reactivo del caso.

O sea, si C = concentración del reactivo al instante $t \rightarrow v = \frac{dC}{dt}$.

La EDO que modeliza la reacción depende del "**orden de la reacción**" (n).

Para reacciones de un solo componente el **PVI** es: $\frac{dC}{dt} = k \cdot C^n$; $C(0) = C_0$

- a) Discutir el signo de " k ".
- b) Resolver el **PVI** para $n = 0$; $n = 1$; $n = 2$.

En cada caso graficar las funciones solución; hallar una expresión para el cálculo del $t_{1/2}$ (tiempo de vida medio) y discutir su dependencia (o no) de C_0 .

15) Para una sustancia que sigue una cinética de 1er orden, si $C = \text{concentración}$ de la sustancia al instante t ($[t] = \text{min.}$), se pide:

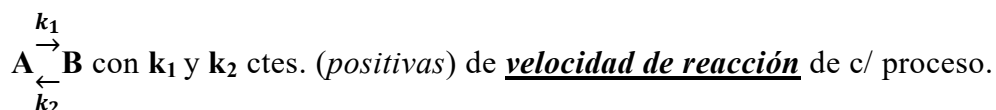
- obtener C en función del tiempo, si se sabe que la concentración inicial de la sustancia es de 10 mol/l y que a los 30 minutos se descompuso el 50 % de la cantidad inicial.
- responder (sin calcular): el 90 % de la cantidad inicial, ¿tarda más o menos de 30 min. en descomponerse? Luego, calcular el tiempo requerido para que se descomponga el 90% y contrastar el resultado con la respuesta previa.
- Graficar $C = C(t)$ según la ley obtenida; marcar los puntos obtenidos en los ítems anteriores; ¿existe “ t ” para el cual la sustancia se descompone toda?

16) Si una molécula del producto C se forma a partir de una molécula del reactivo A y una del reactivo B ; si las concentraciones de A y B son iguales, $[A] = [B] = a$ moles/l y indicamos con x a la concentración de C en función del tiempo ($x = [C]$) la siguiente ecuación modeliza el proceso de formación de C a partir de A y B .

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)^2 \quad ; \quad x(0) = 0 \quad (\text{con } k > 0)$$

- A partir de esta *ecuación* completar las siguientes afirmaciones:
 - x aumenta con el paso del tiempo pues
 - la velocidad de la reacción decrece pues.....
- Hallar $x = x(t)$; verificar que $x(t) = \frac{a^2 \cdot k \cdot t}{akt+1}$;
- Graficar la concentración en función del tiempo, establecer si se alcanza una concentración máxima (según el modelo). Hallar (si existe) el instante donde la velocidad de la reacción es máxima (dominio!!); calcular esta velocidad máxima.
- ¿Qué sucede con la velocidad de reacción cuando $t \rightarrow \infty$? ¿Qué indica este resultado en términos *prácticos*?

17) Si un compuesto A se transforma en B , a través de una reacción *reversible*, entonces



Si llamamos $\rightarrow a$: concentración del compuesto A en cada instante t ($a = a(t)$)
 b : concentración del compuesto B en cada instante t ($b = b(t)$)
 $a_0 = a(0)$; concentración inicial del compuesto A .

Experimentalmente se comprueba que $a' = k_2 b - k_1 a$ y que $a(t) + b(t) = a_0$; $\forall t$
 Se pide:

- Obtener una ecuación diferencial **con una única incógnita, por ejemplo “ a ”**.
 Indicar que tipo de ecuación es.
- obtener la ley de a si se sabe que $a_0 = 3$ mol/l. y $k_1 = 2 k_2$; luego, obtener la ley de b . Graficar ambas en un mismo sistema.
- ¿ En algún instante $a(t) = b(t)$?. Si, ¿Cuál?. No, ¿porqué?.
- ¿Qué pasa con las concentraciones de A y B para tiempos muy grandes? ;
 ¿es razonable que pase esto?;
 ¿con qué dato del problema tendría que ver el comportamiento observado en esta reacción respecto de las concentraciones de A y B ?

PROBLEMAS DE MEZCLA

Vamos a considerar ahora problemas relacionados con mezclas (o soluciones). En este tipo de problemas se considera una solución (S) que fluye hacia un recipiente con una cierta rapidez y manteniéndose uniforme la solución dentro del mismo mediante agitación. Simultáneamente, la solución uniforme estará saliendo del recipiente para pasar a otro donde se guarda o, según el proceso puede seguir fluyendo hacia un tercer recipiente. El objetivo de este tipo de problemas es determinar la cantidad de soluto (x) presente en la solución dentro del tanque al instante t .

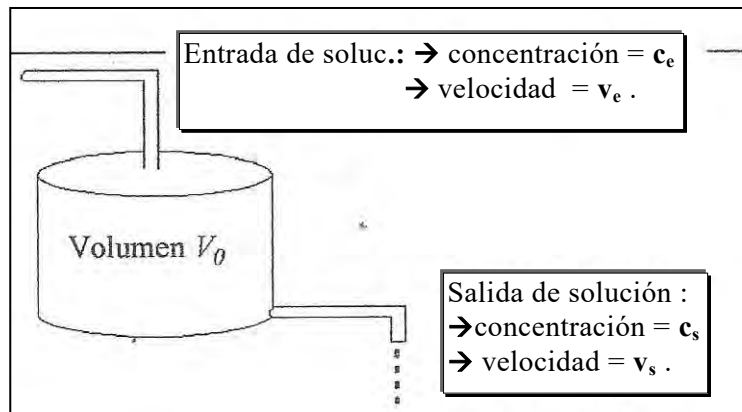
Si x = cantidad de soluto disuelta en una solución, al instante t ; $x = x(t)$; $[x]$ = gs; entonces la **Ecuación Básica** para una solución contenida en un tanque que inicialmente tiene V_0 ls. de solución es:

$$\frac{dx}{dt} = \text{ENTRADA} - \text{SALIDA}$$

Equivalentemente:

$$\frac{dx}{dt} = c_e \cdot v_e - c_s \cdot v_s$$

$$\text{con } c_s = \frac{x(t)}{V_0 + (v_e - v_s) \cdot t}$$



La solución que entra lo hace con una rapidez constante (v_e ls./min) y con una concentración de soluto cte (c_e g./ls). La que sale, también lo hace a rapidez cte (v_s ls./min).

18) En un tanque hay **100 ls.** de solución con **200 grs** de sal disueltos en ella. Como deseo **diluir** la solución comienzo a verter **agua** en el tanque a una rapidez de **5 ls./min** a la vez que, para apurar el proceso, dejo salir solución a una rapidez de **3 ls./min**.

- a)** Mi amigo Pablo cree que si no estoy atenta puedo llegar a quedarme con “solo agua”. Decide calcular el tiempo en que no quedaría sal en la solución y razona así: “como la concentración de la solución es de **2 grs/litro** y la solución sale a razón de **3 ls/min** esto implica que “la sal” sale a razón de **6 grs./min.** que, por lo tanto, en poco más de **30 min.** no hay más sal en la solución”. ¿Qué regla aplica Pablo para calcular el tiempo en que, según él, no queda sal en la solución?, ¿por qué?

- b)** Resolver la ecuación básica y dar $x = x(t)$.

Mostar que x tiende a cero con el tiempo (o sea, que la intuición de Pablo funcionó bastante bien); pero que a los **50 min.** todavía hay sal en la solución (o sea, que la “regla de tres” de la cual es fanático Pablo no es aplicable en este caso.)

19) Si $V =$ volumen de solución en el tanque; entonces $V = V(t)$ con $V(t) = V_0 + (v_e - v_s) \cdot t$.

Graficar en un mismo sistema “ $V-t$ ” la función $V = V(t)$ para:

- a1)** $v_e < v_s$; **a2)** $v_e = v_s$; **a3)** $v_e > v_s$

Explicar que pasa en cada caso con la cantidad de solución en el tanque.

20) Si $v_e = v_s = 3$; $V_o = 6$ y $x(0) = x_o = 60$.

- Hallar, resolviendo la ecuación básica, una expresión general para $x = x(t)$.
- Verificar que $x(t) = c_e \cdot V_o + [x_o - c_e V_o] \cdot e^{-(v/V_o) \cdot t}$.
- Obtener $c_s = \frac{x(t)}{V(t)}$ para $x(t)$ hallada en (b); graficar c_s para c_e igual, mayor o menor que $c_o = x_o/V_o$. Explicar que pasa con la concentración de salida en cada caso. ¿Si se desea que la solución que entra no modifique la concentración que existe en el tanque al momento de comenzar el proceso, quien debe ser c_e ?

21)

- Hallar y graficar $x = x(t)$ si $c_e = 2$ g/l ; $v_e = 2$ l/m ; $v_s = 4$ l/m ; $V_o = 12$ ls. y $x(0) = x_o = 60$ gs. Explicar acorde al gráfico, cómo se desarrolla el proceso en este caso.
- Hallar y graficar $x = x(t)$ si $c_e = 2$ g/l ; $v_e = 2$ l/m ; $v_s = 2$ l/m ; $V_o = 12$ ls. y $x(0) = x_o = 60$ gs. Explicar acorde al gráfico cómo se desarrolla el proceso en este caso.

CRECIMIENTO DE POBLACIONES

22) Un modelo de crecimiento de poblaciones propone que éstas crecen con una velocidad directamente proporcional a su tamaño. Se pide:

- Plantear una ecuación que describa esta hipótesis para una población P , de moscas de la fruta.
- Si se sabe que partiendo de **100** moscas, al cabo de **cuatro días** hay **900**; encontrar la ley de f , función que permite calcular la cantidad de moscas en el tiempo. Graficarla
- Calcular la cantidad de moscas al cabo de: **2, 4, 6, 8 días** ; indicar que caracteriza el crecimiento de esta población: “se (*duplica, triplica, cuadruplica*) cada (*uno, dos, tres, cuatro*....) días”.
- Comprobar que f se puede escribir como $f(t) = 100 (3^{t/2})$. Usando esta forma de la función, calcular $f(t+2)$, compararla con $f(t)$ y corroborar que la siguiente afirmación es **V ó F**: “*el número de moscas se triplica cada dos días*”.

23) Un cultivo de levaduras crece a una velocidad directamente proporcional al número de células presentes en cada instante “ t ”. Sabiendo que el cultivo se inicia con una población de 20 células y que al cabo de 12 horas hay 80 células, se pide:

- Plantear la ecuación correspondiente y hallar la función que determina el número de levaduras en cada instante “ t ”. Graficarla.
- Indicar V ó F , justificar:
 $f(t) = 20 \cdot 2^{t/6}$ permite calcular el número de levaduras en cada instante “ t ”.
“*el número de levadura se duplica cada 6 días*”.

24) Sea la ecuación diferencial logística: $\frac{dP}{dt} = kP(M - P)$ que modela el crecimiento de una población cerrada que tiene P individuos en el tiempo t ; k y M constantes positivas. Sin resolverla responda:

- ¿Para qué valores de P la población crece?
- ¿Para qué valores de P la población disminuye?
- ¿Cuáles son las soluciones de equilibrio? (Soluciones constantes).

25) La población de una ciudad que en el año 2000 tenía 100 mil habitantes responde la ecuación diferencial logística (vea problema anterior), con $k = 0.0001$ y $M = 200$ mil.

- a) ¿Qué puede decir acerca del tamaño de la población actual? (¿aumentó o disminuyó?). Justifique.
 b) ¿Llegará a triplicarse en algún momento? Justificar.

26) La razón de cambio de una población (P) en el tiempo (t) está dada por :

$$P' = \lambda P - m, \quad \text{con} \quad \lambda = \alpha - \beta$$

Siendo α la tasa de nacimientos, β la tasa de mortalidad y m el número de habitantes que emigran cada año. El tiempo (t) se mide en años.

Si se estudia una población y se determina que cada año emigran 10 habitantes, la tasa de nacimientos es 0.5 anual y la tasa de mortalidad es 0.25 anual.

- a) Obtener $P = P(t)$, si la población inicial es de 100 habitantes. Graficar
 b) Indicar V o F y justificar: (i) “La población estudiada tiende a extinguirse”
 (ii) “La población crece durante el primer año”

27) En un lago, una especie de peces poco comunes es atacada por una enfermedad. Para estudiar el fenómeno acuden al mismo un equipo de biólogos los cuales, al momento de su llegada, registran que la población de peces (P) es de 900 especímenes.

Registros posteriores les permiten concluir que la ecuación $\frac{dP}{dt} = -3\sqrt{P}$ es un buen modelo matemático del fenómeno (t en semanas). Se pide,

- a) expresar en el lenguaje coloquial que observan los biólogos que les permite concluir este modelo (hacer esto, *sin resolver la ecuación !!!!*).
 b) hallar la **función** que permite determinar la cantidad de peces en cada instante t .
 c) ¿hay peces sobrevivientes a las 10 semanas? ; ¿y a las 24? ¿Se extinguen en algún momento?

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES de ORDEN “n”

1)

a) Dada $a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y = 0$; con $a_i(x)$ continuas en $[a; b]$, $a_0(x) \neq 0$, $\forall x \in [a; b]$, clasificar esta ecuación y enunciar el Teorema que “fundamenta” el proceso a seguir para hallar la solución de la misma.

b) Determinar si los conjuntos de funciones que se dan a continuación constituyen **Base de Soluciones** de la ecuación homogénea que se indica en cada caso. En caso que lo sea dar la solución general de la ecuación correspondiente.

- | | |
|--|---|
| a) $B = \{x; e^x\};$ | EDOLH $\rightarrow (x-1)y'' - xy' + y = 0$ |
| b) $B = \{e^{-x}; e^{2x}; e^{3x}\};$ | EDOLH $\rightarrow y''' - y'' + y' + y = 0$ |
| c) $B = \{e^{2x}; e^{3x}\};$ | EDOLH $\rightarrow x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$ |
| d) $B = \{3x^3; 12x^3\};$ | EDOLH $\rightarrow x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$ |
| e) $B = \{x^2; x^3\};$ | EDOLH $\rightarrow x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$ |
| f) $B = \{e^x; \sin x; \cos x\};$ | EDOLH $\rightarrow y''' - y'' + y' - y = 0$ |
| g) $B = \{1; x; x^2; e^{2x}; e^{-2x}\};$ | EDOLH $\rightarrow y^{(5)} - 4y^{(3)} = 0$ |

c) Dada $x^2 y'' - xy' - 3y = 0$; hallar, si existe, $n \in \mathbf{R}$ tal que x^n sea solución. Si obtiene más de una solución, investigar si las mismas constituyen **Base de Soluciones**. Si así fuera dar la solución general de esta EDO.

- 2) Dada $y'' - \frac{2x+1}{x} y' + \frac{x+1}{x} y = -3x$ se pide:
- V ó F**, justificar: “la ecuación es una EDO Lineal- Orden 2- a Coeficientes Ctes”.
 - analizar si alguna de las siguientes funciones:
 $y_1 = e^x$; $y_2 = e^{2x}$; $y_3 = x^2 e^x$; es solución de la homogénea asociada.
 - dar la solución general de la EDOL *no homogénea*. (Justificar enunciando el o los teoremas que validan su respuesta.)
- 3) Dada $2x^2 y'' + 3x y' - y = 0$;
- clasificar esta ecuación diferencial.
 - V ó F**, justificar: “las soluciones de esta **EDOL** son de la forma $e^{r \cdot x}$ con $r \in \mathbb{R}$ ”
 - Analizar si $y_1 = x^{1/2}$; $y_2 = x^{-1}$ e $y_3 = 0$ son soluciones de la **EDOL**.
 - Dar la solución general y luego *dos* soluciones particulares. (justificar)
- 4) Dada la ecuación $y'' - \frac{x+1}{x} y' + \frac{1}{x} y = e^{2x} (1 - \frac{1}{x})$; indicar **V ó F**, justificar:
- e^x es solución de la homogénea asociada.
 - si $\{e^x; x\}$ es l. i. entonces $y = C_1 e^x + C_2 x$ es la solución general de la homogénea asociada.
 - $y = x+1$ es una solución particular de la no homogénea.
 - $y = -x^2 + x$ es una solución particular de la no homogénea.
 - $y = C_1 e^x + C_2 (x+1) + x - x^2$ es solución general de la no homogénea.
- 5) Si f y g son solución de $x^2 y'' + 2x y' - 6y = 0$;
- indicar **V ó F**, justificar (si usa un teorema o propiedad, enunciarlo):
- $h_1 = 3f$ es solución de $x^2 y'' + 2x y' - 6y = 0$;
 - $h_2 = f + g$ es solución de $x^2 y'' + 2x y' - 6y = 0$.
- 6) Indicar **V ó F**, justificar:
- $h_1(x) = 1$ y $h_2(x) = \sqrt{x}$ son solución de $y \cdot y'' + (y')^2 = 0$;
 - $h(x) = 1 + \sqrt{x}$ es solución de $y \cdot y'' + (y')^2 = 0$.
(en caso de ser **F**, analizar si este hecho contradice el teorema del ej. 5)
- 7) Dada $y'' + 3y' + 2y = b(x)$; se pide:
- dada $y = e^{r \cdot x}$ calcular su 1er y 2da derivada, reemplazar en la ecuación y hallar, si existe, $r \in \mathbb{R}$ tal que $e^{r \cdot x}$ sea solución de la homogénea asociada”
 - V ó F**, justificar: “si $b(x) = e^{2x}$; existe $A \in \mathbb{R}$ tal que Ae^{2x} es solución particular”
 - V ó F**, justificar: “si $b(x) = e^{-2x}$; existe $A \in \mathbb{R}$ tal que Ae^{-2x} es solución particular”
 - V ó F**, justificar: “si $b(x) = e^{kx}$ cualquiera sea $k \in \mathbb{R}$, siempre existe $A \in \mathbb{R}$ tal que Ae^{kx} es solución particular”.

8) Dada $y'' = b(x)$; se pide:

- a) V ó F, justificar: “existe $r \in \mathbb{R}$ tal que e^{rx} es solución de la homogénea asociada”.
- b) V ó F, justificar: “si $b(x) = 12x^2$; existe $A, B, C \in \mathbb{R}$ tal que $Ax^2 + Bx + C$ es solución particular”.
- c) V ó F, justificar: “si $b(x) = x^2$; existe $A, B, C \in \mathbb{R}$ tal que $Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$ es solución particular”.

9) Dada $y'' + by' + cy = p(x)$ ($b, c \in \mathbb{R}$), se pide:

- a) deducir condiciones sobre b y c para que la solución general de la homogénea asociada sea una combinación lineal de funciones exponenciales. (Justificar)
- b) con b y c del ítem (a), demostrar que el siguiente problema de valores iniciales:
 $y'' + by' + cy = 0$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$, tiene como única solución la función nula.
- c) V ó F “si r_1 y r_2 (soluciones ecuación característica) son reales distintas y negativas y f solución de la homogénea entonces $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ”. (Justificar)
- d) V ó F “si r_1 y r_2 (soluciones ecuación característica) son reales distintas y negativas, $p(x) = e^{r_1 \cdot x}$ e y_g la solución general entonces $\lim_{x \rightarrow +\infty} y_g(x) \neq 0$ ”. (Justificar.)

10)

- a) Escribir una **EDOL-homogénea- orden 2**, cuya solución general sea:
 $y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$ (verificar su respuesta)
- b) Escribir una **EDOL - orden 2**, cuya solución general sea:
 $y_g(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + 7e^x$
- c) Escribir una **EDOL - orden 2**, cuya solución general sea:
 $y_g(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} - 3xe^{2x}$ (verificar su respuesta)
- d) Escribir una **EDOL - orden 2**, cuya solución general sea:
 $y_g(x) = C_1 e^x + C_2 x \cdot e^x + 5x^2 e^x$ (verificar su respuesta)

11)

A) Si f y g son solución de $x^2 y'' + 2xy' - 6y = \text{sen } x$, y k es una solución de la homogénea asociada a esta EDO; indicar V ó F, justificar:

- a) $h_1 = 3f$ es solución de $x^2 y'' + 2xy' - 6y = \text{sen } x$;
- b) $h_2 = f - g$ es solución de $x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0$;
- c) $h_3 = f + g$ es solución de $x^2 y'' + 2xy' - 6y = \text{sen } x$
- d) $h_4 = 3k$ es solución particular de $x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0$
- e) $h_5 = f + k$ es solución particular de $x^2 y'' + 2xy' - 6y = \text{sen } x$

B) V ó F, justificar: “si p es solución de $x^2 y'' + 2xy' - 6y = \text{sen } x$ y q es solución de $x^2 y'' + 2xy' - 6y = \cos x$; entonces $p + q$ es solución de $x^2 y'' + 2xy' - 6y = \text{sen } x + \cos x$ ”.

C) V ó F, justificar: “el resultado anterior se puede “generalizar”; o sea, extender al caso de una EDOL de la forma: $a_0(x) y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = b_1(x) + b_2(x)$ ”.

D) V ó F, justificar: “si $u + v$ es solución de $x^2 y'' + 2x y' - 6y = \sen x + \cos x$ entonces, u es solución de $x^2 y'' + 2x y' - 6y = \sen x$; y v es solución de $x^2 y'' + 2x y' - 6y = \cos x$ ”.

12) Resolver las EDO – Homogéneas y los PVI que se indican a continuación:

a) $y'' - y' - 2y = 0$

b) $y'' - 2y' + 5y = 0$

c) $y'' + 4y' + 4y = 0$

d) $y'' + y = 0$

e) $y'' + y' = 0$

f) $x'' - 4x = 0$

g) $\begin{cases} y'' - 8y' - 16y = 0 \\ y(0) = \frac{1}{2}; y'(0) = -1/3 \end{cases}$

h) $\begin{cases} y'' + 2y = 0 \\ y(\sqrt{2}\pi) = 0; y'(\sqrt{2}\pi) = 1/2 \end{cases}$

13)

a) Sea y_p una solución particular de la ecuación no homogénea $y'' + b y' + c y = f(x)$ y sea y_h la solución general de su ecuación homogénea asociada. Demuestre que $y = y_h + y_p$ es solución de la ecuación no homogénea.

b) Dada una ecuación diferencial no homogénea y una solución particular de la misma, verifique esta última, halle la solución general de la ecuación homogénea asociada y escriba la solución general de la ecuación no homogénea.

b1) $y'' - 4y = -8 \sen(2x),$	$y_p = \sen(2x) + 5e^{2x}$
b2) $y'' + 6y' + 9y = 4e^{-3x},$	$y_p = 2x^2 e^{-3x}$
b3) $y'' - 2y' + 2y = 2x,$	$y_p = x + 1 - e^{3x} \cos(x)$
b4) $y'' + 3y' = 6x + 5,$	$y_p = x^2 + x$

14) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales no homogéneas de 2º orden:

a) $y'' + 4y' + 8y = x^2$

b) $y'' - 3y' + 2y = 3e^x$

c) $y'' + 4y' = 2 \sen(x) + \cos(2x)$

d) $y'' - 5y' + 6y = x^2 + 2x$

e) $y'' - 2y' - 2y = e^{3x} + x$

f) $y'' - y' - 2y = 5$

13) $y'' + y' = 3 + e^{4x}$

h) $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$

i) $y'' + 16y = x^2 + x$

j) $y'' + 2y' + y = (x^2 + 1)e^x$

k) $y'' + 2y' - 3y = 2e^x - 10\sen(x)$

l) $y'' - 2y' = e^t \sen(t)$

m) $\begin{cases} y'' + 2y' + y = x + 3 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

n) $\begin{cases} y'' - y' - 2y = e^x + \cos(x) \\ y(0) = 1; y'(0) = 2 \end{cases}$

15) Proponga una solución particular con coeficientes indeterminados, halle dichos coeficientes y encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $y'' + 4y' = 3x^3$

b) $y'' - y' - 6y = 2\text{sen}(3x)$

c) $y'' + y = \cos(x)$

d) $y'' - 7y' = -7 + 6x - 21x^2 + 7e^{7x}$

e) $y'' + 2y' - 3y = 1 + xe^x$

16)

a) Hallar los valores de α y β para los cuales $\mathbf{b(x) = x \cdot e^x}$ es solución de:

$$y'' + \alpha \cdot y' + 3y = \beta e^x$$

b) Con los valores de α y β hallados, obtener la solución general de la EDOL.

APLICACIONES DE LAS EDO – LINEALES- ORDEN “2” a CC

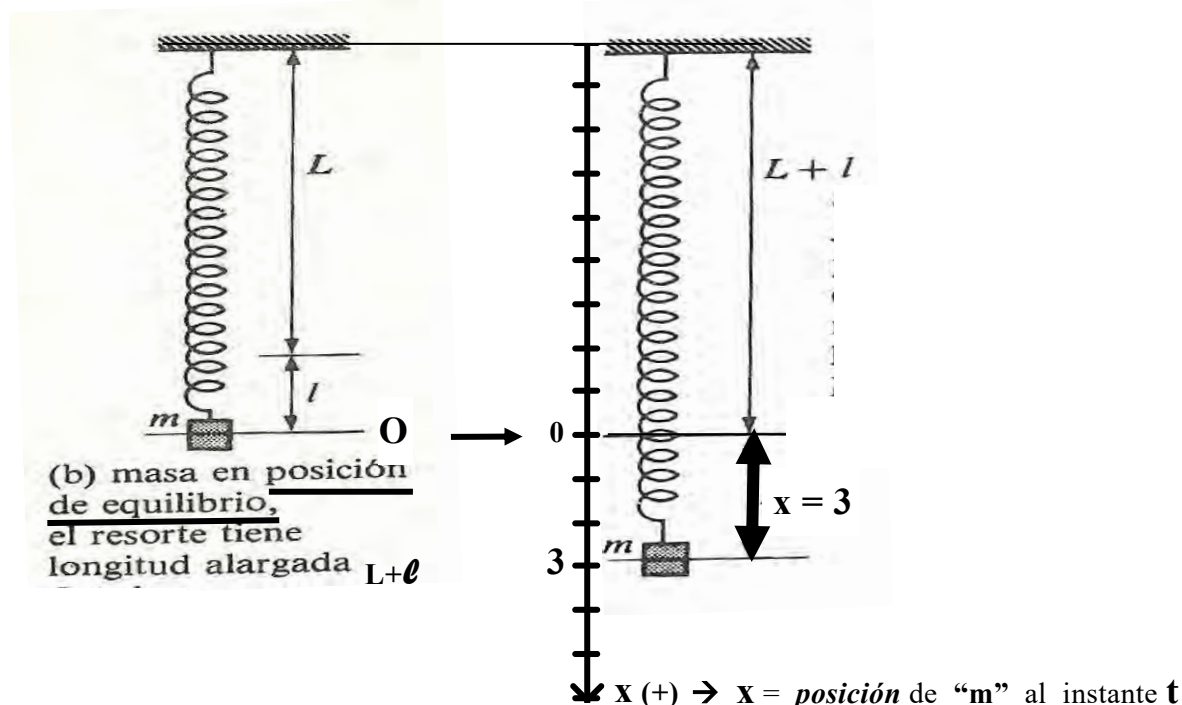
► VIBRACIONES DE UNA MASA EN UN RESORTE.

Problema Básico: Un resorte helicoidal está suspendido verticalmente de un punto fijo en el techo. Una masa (m) está unida a su extremo inferior. Se supone que el resorte tiene una longitud L (no estirado) y que al colgar la masa se estira una cantidad ℓ ; o sea, que la longitud del resorte, *en reposo*, es $L + \ell$. En estas condiciones, con la masa a $L + \ell$ (cm) del techo decimos que la misma se encuentra en su posición de equilibrio.

El sistema se pone en movimiento forzando la masa a abandonar dicha posición.

El objetivo es determinar el movimiento resultante, es decir las “vibraciones” que se introducen en el sistema al “perturbarlo” (amplitud, frecuencia, amortiguamiento...) A tal fin se introduce un sistema de referencia a lo largo de la línea del resorte, con el sentido positivo (+) hacia abajo y el origen, O, en la posición de equilibrio.

Con x se indica la posición de la masa a partir de O y a lo largo de ese eje. Así construido el sistema de referencia, x puede ser positiva, cero o negativa según la masa esté por debajo, en, o por arriba, de su posición de equilibrio ($x = 0$).



Finalmente, el problema es determinar la función de posición, $x = x(t)$

Considerando las fuerzas que actúan sobre el sistema y acudiendo a leyes de la Física: **2da de Newton** y **Ley de Hooke** se obtiene la **EDO** que permite hallar “ $x = x(t)$ ”:

$$m \cdot x'' + a x' + k x = F(t)$$

k = cte del resorte (Ley de Hooke). ($k > 0$)

a = cte de amortiguamiento debida a la fuerza resistiva

del medio (puede ser o no despreciable. ($a \geq 0$))

F = cualquier fuerza externa que actúe sobre el

Según a y F sean o no nulas, se tienen los siguientes casos:

(I) **Movimiento Libre, no Amortiguado:**

$$m \cdot x'' + k x = 0$$

$F(t) = 0$, $\forall t$ (no actúan fuerzas externas)
 $a = 0$ (resistividad despreciable)

(II) **Movimiento Libre, Amortiguado:**

$$m \cdot x'' + a x' + k x = 0$$

$F(t) = 0$, $\forall t$ (no actúan fuerzas externas)
 $a \neq 0$ (la resistividad no es despreciable)

(II) **Movimiento Forzado:**

$$m \cdot x'' + a x' + k x = F(t)$$

Actúan fuerzas externas.
 La resistividad puede o no ser despreciable.

1.- **Movimiento Libre no Amortiguado:** $m \cdot x'' + k x = 0$

Simplificamos la EDO para obtener la *ecuación característica* de este movimiento:

$$m \cdot x'' + k x = 0 \xrightarrow[\text{por "m"}]{\text{dividir}} x'' + \frac{k}{m} x = 0 \xrightarrow[k/m = \lambda^2]{[k/m] > 0} \boxed{x'' + \lambda^2 x = 0}$$

Luego, el correspondiente Pvi:
$$\begin{cases} x'' + \lambda^2 x = 0 \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0 \end{cases}$$

Se pide demostrar que:

a) la solución general es: $x(t) = A \sin(\lambda t) + B \cos(\lambda t)$

b) la solución del Pvi es: $x(t) = \left[\frac{v_0}{\lambda} \right] \sin(\lambda t) + [x_0] \cos(\lambda t)$ con $[\lambda = \sqrt{\frac{k}{m}}]$

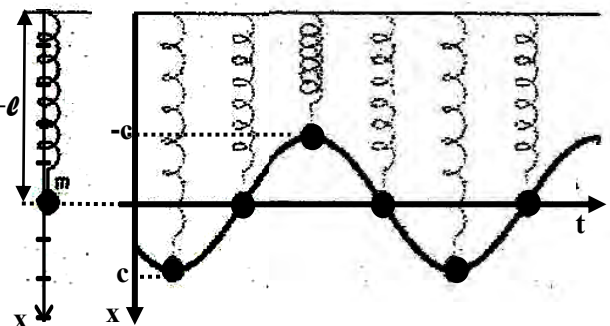
c) $\boxed{x(t) = c \cos(\lambda t + \alpha)}$ con $c = \sqrt{A^2 + B^2}$; $\text{tg } \alpha = -\frac{A}{B}$ (α áng. de fase)

Conclusión:

El movimiento libre no amortiguado es un **Movimiento Armónico Simple** (MAS).

Un movimiento periódico donde la masa oscila hacia arriba y abajo entre $-c$ y c .

$|c|$ (la amplitud de la senoide) da el **desplazamiento máximo** de la masa a partir de su posición de equilibrio.



d) V ó F, justificar: (i) El período $p = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$

(ii) El “desplazamiento máximo” se da para $t^* = \sqrt{\frac{m}{k}} (n\pi - \alpha)$ (marcar en el gráfico algunos t^* y el desplazamiento máximo).

2.- Sea el caso de un cuerpo de 0,2 kg de masa que pende de un resorte de *constante elástica* $k = 20 \frac{N}{m}$ y oscila armónicamente. En el instante $t = 0$ pasa por la posición de equilibrio con velocidad $v = 1$ m/seg.

- Plantear el Pvi. correspondiente a este movimiento.
- Hallar la ley de la posición de la masa en función del tiempo.
- Dar el período y el “desplazamiento máximo” del caso.
- Graficar el movimiento en un sistema “x-t”. (tomar x(+) hacia arriba)
Marcar t_1 instante donde pasa por la posición de equilibrio y t_2 instante donde la masa alcanza su desplazamiento máximo.
- Hallar velocidad y aceleración de la masa en t_1 y t_2 del ítem anterior.

3.- Sea el caso de un cuerpo que pende de un resorte de constante elástica $k = 16$.

y donde el Pvi correspondiente al movimiento es:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x'' + 16x = 0 \\ x(0) = 0.25 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$$

- V ó F, justificar:
- se trata de un movimiento armónico simple (MAS)
 - el cuerpo se empuja hacia abajo y luego se suelta.
 - la posición del cuerpo en cada instante t viene dada por:
$$x(t) = \frac{1}{8} \sin(8t) + \frac{1}{4} \cos(8t)$$
 - la posición del cuerpo en cada instante t viene dada por:
$$x(t) = c \cos(8t + \alpha)$$
 con $c = \sqrt{5}/8$; $\alpha = \arctan(-1/2)$.

4.- **Movimiento Libre Amortiguado:** $m \cdot x'' + a x' + k x = 0$ ($a > 0$; $k > 0$)

Consideramos el siguiente caso:

$$x'' + 2b x' + b^2 x = 0 ; \quad x(0) = A ; \quad x'(0) = B \quad (b > 0)$$

- Demostrar que el desplazamiento está dado por: $x(t) = [A + (B + bA)t] \cdot e^{-bt}$
- Para $b = 1$ y los valores de A y B que se dan en cada caso plantear y resolver el correspondiente Pvi. Luego de resuelto, graficar la función de posición e indicar:
 - si la masa pasa por su posición de equilibrio. Si pasa, en que instante(s) lo hace.
 - el instante en el cual alcanza su desplazamiento máximo.
 - que sucede con el paso del tiempo.

b1) $A = B = 5$

b2) $A = 10$; $B = -5$

b3) $A = 5$; $B = -10$

Rtas:

- | | | |
|---------------------|------------------------|---|
| b1) (i) NO | (ii) $t = \frac{1}{2}$ | (iii) la masa tiende a su posición de equilibrio. |
| b2) (i) NO | (ii) $t = 0$ | (iii) la masa tiende a su posición de equilibrio. |
| b3) (i) SI, $t = 1$ | (ii) $t = 2$ | (iii) la masa tiende a su posición de equilibrio. |

5.- Movimiento Libre Amortiguado: $m \cdot x'' + a x' + k x = 0 \quad (a > 0 ; k > 0)$

Simplificamos la EDO para obtener la *ecuación característica* de este movimiento.

Dividimos por “m” y hacemos $\frac{a}{m} = 2b \quad (b > 0)$; $\frac{k}{m} = \lambda^2 \rightarrow \boxed{x'' + 2b x' + \lambda^2 x = 0}$

La ecuación característica queda: $r^2 + 2b r + \lambda^2 = 0 \rightarrow r_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \lambda^2}$

Se presentan 3 casos distintos dependiendo de la naturaleza de estas raíces, las que dependen del valor del radicando ($b^2 - \lambda^2$), de si este es negativo, cero o positivo.

(I) Movimiento oscilatorio amortiguado: $b < \lambda$

$$x(t) = e^{-bt} \cdot [C_1 \sin(\sqrt{\lambda^2 - b^2} \cdot t) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda^2 - b^2} \cdot t)]$$

$$\text{ó } x(t) = c e^{-bt} \cdot \cos(\sqrt{\lambda^2 - b^2} \cdot t + \alpha)$$

$c e^{-bt} \rightarrow \text{factor de amortiguamiento}$
 $\cos(\sqrt{\lambda^2 - b^2} \cdot t + \alpha) \rightarrow \text{factor “osc.”}$

- ▶ En este caso tenemos un movimiento oscilatorio donde las oscilaciones son cada vez más pequeñas (*menor amplitud*) y la masa *tiende a su posición de equilibrio*.

(II) Amortiguamiento crítico: $b = \lambda \rightarrow x(t) = [C_1 + C_2 t] \cdot e^{-bt}$

- ▶ En este caso el movimiento ya no es oscilatorio, el amortiguamiento es lo suficientemente importante como para evitar las oscilaciones. Pero, en este caso, una pequeña disminución en la cantidad de amortiguamiento cambia la situación, y el sistema pasa al caso (I); o sea, se producen oscilaciones.
- ▶ Dependiendo de las condiciones iniciales se tienen 3 situaciones posibles, siendo las respectivas gráficas similares a las obtenidas en el ejercicio (4.b)

(III) Amortiguamiento sobrecrítico: $b > \lambda \rightarrow x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$

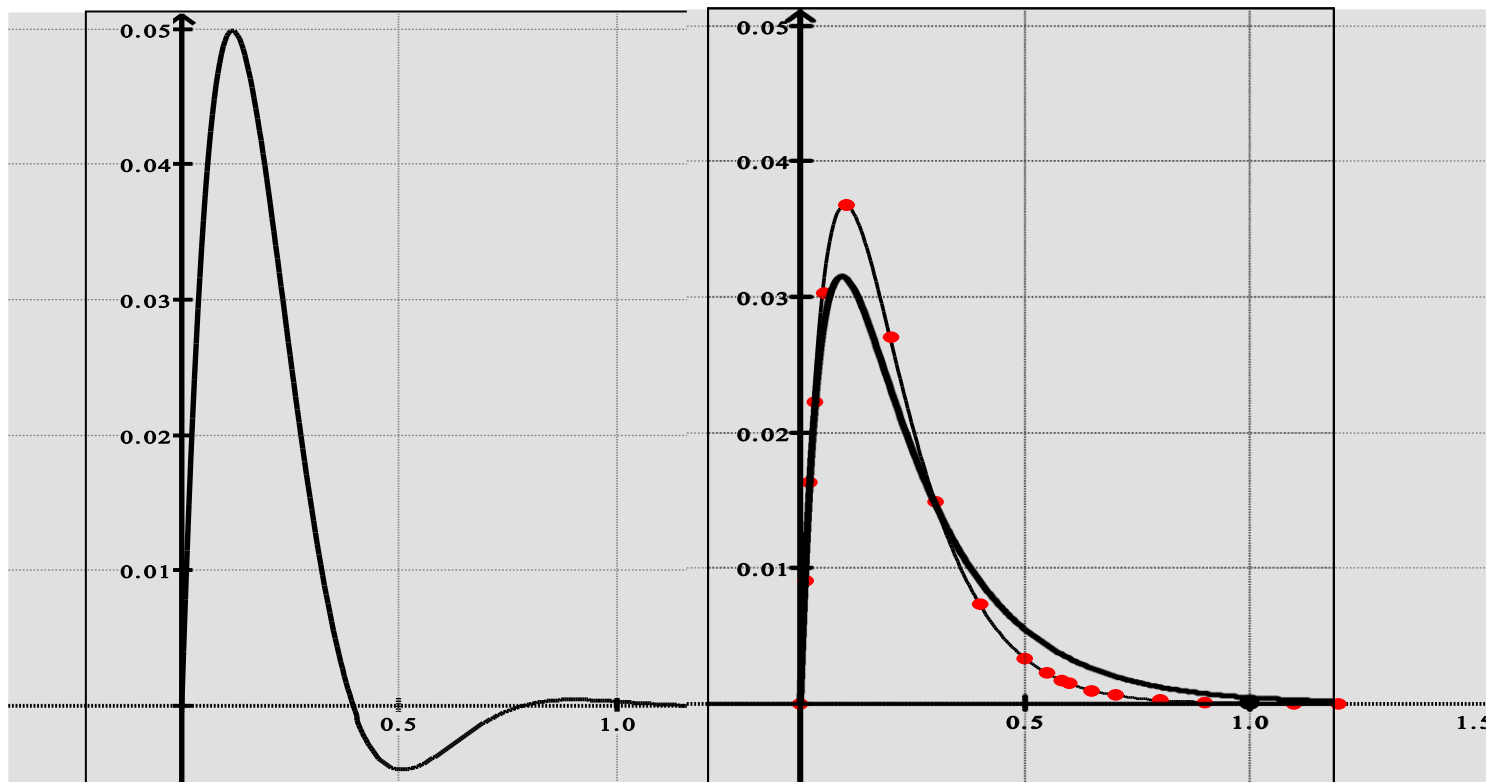
- ▶ En este caso el movimiento tampoco es oscilatorio, pero el amortiguamiento es tan grande que ya no cabe la posibilidad de que cualquier pequeña disminución del mismo se traduzca en oscilaciones (o sea, lleve al sistema al caso (I))
 - ▶ Dependiendo de las condiciones iniciales se tienen 3 situaciones posibles, siendo las respectivas gráficas similares a las obtenidas en el ejercicio (4.b) o en caso (II)
- En este caso, y debido al mayor amortiguamiento, la masa regresa a su posición de equilibrio más lentamente; o sea, con menor rapidez .

Sea el caso de un cuerpo de 0,2 kg de masa que pende de un resorte de *constante elástica* $k = 20 \frac{N}{m}$. En esta instancia el sistema es afectado por la resistencia del aire y otras fuerzas de fricción que amortiguan el movimiento. En el instante $t = 0$ pasa por la posición de equilibrio con velocidad $v = 1$ m/seg.

- a) Plantear el **Pvi** correspondiente a este movimiento con la ecuación característica.
- b) Para los valores de a (cte de amortiguación) que se dan a continuación, establecer (sin resolver el **Pvi**) que tipo de amortiguamiento se tiene en cada caso:

$$\text{b1) } a = 2,4 \quad ; \quad \text{b2) } a = 4 \quad ; \quad \text{b3) } a = 5$$

- c) Resolver el **Pvi** . Los gráficos que se dan a continuación se corresponden (uno a uno) con las soluciones halladas para los distintos “a” dados en (b). Establecer la correspondencia entre solución y gráfico de la misma.



Rtas: b1) $x(t) = \frac{1}{8} e^{-6t} \cdot \text{sen}(8t)$ b2) $x(t) = t \cdot e^{-10t}$ b3) $x(t) = \frac{1}{15} (e^{-5t} + e^{-20t})$

6.- En los problemas 1-5 se ha trabajado con sistemas masa-resorte con movimiento oscilatorio y amortiguado, respectivamente. Se tiene ahora un sistema similar apoyado sobre una superficie horizontal, como indica la figura, sobre el que actúa una fuerza externa F , la masa m tendrá un movimiento oscilatorio forzado y la ecuación diferencial que lo describe es:

$$m'' + b' + k = F(t), \quad k \neq 0.$$

Halle la solución de la ecuación con los valores m , b , k y F que se indican a continuación.



a) $m = 1, b = 0, k = 9, F(t) = 10 \cos(2t);$
 $x(0) = x'(0) = 0$

b) $m = 1, b = 2, k = 2, F(t) = 20 \cos(2t);$
 $x(0) = x'(0) = 0$

Rtas:

a) $x(t) = 2 \cdot \cos(2t) - 2 \cdot \cos(3t)$
b) $x(t) = e^{-t} (2 \cdot \cos(t) - 6 \cdot \text{sen}(t)) - 2 \cdot \cos(2t) + 4 \cdot \text{sen}(2t)$

7.- Si “ $x = x(t)$ ” es la función de posición de un cuerpo que se desliza por una rampa de 5° de pendiente ; entonces la **EDO** que modeliza el movimiento es;

$$20 x'' + x' = 30 ; \quad x(0) = 0 ; \quad x'(0) = 0$$

Se pide:

a) en el diagrama adjunto, graficar el cuerpo en el instante en que se coloca en posición para largarlo por la rampa ($t = 0$). Luego graficar donde estará (aprox.) unos segundos después de iniciado el movimiento. Según lo que se “observa” y lo se quiere medir, graficar el eje de referencia más apropiado al efecto de modelizar este proceso; o sea, aquel donde se “lea directamente del mismo” la posición del cuerpo en cada instante ($\Rightarrow$ el eje, en dirección y sentido, debe coincidir con la dirección del movimiento).

Recién entonces proceda a:

- b) hallar x ; la función de posición que describe la caída del cuerpo.
- c) hallar v ; la velocidad del cuerpo en su caída.
- d) hallar (aprox.) la longitud de la rampa si se sabe que la velocidad del cuerpo al llegar a TIERRA es: $v(t_T) = 20$ (m/seg.)



8.- La caída de un paracaidista viene descrita por la ecuación diferencial:

$\frac{w}{g} \frac{d^2y}{dt^2} - k \frac{dy}{dt} = w$, donde w es el peso del paracaidista, su altura en el instante t es y , g es la aceleración de la gravedad y k mide el efecto de freno del paracaídas. Supuesto $k = 8$, un paracaidista de 160 libras de peso y $g = 32$ pies/ s^2 , halle la solución de la ecuación diferencial considerando que el paracaídas se abre en el instante $t = 0$, hallándose el paracaidista a una altura de 2000 pies y cayendo a una velocidad de -100 pies/s.

► PROBLEMAS DE MEZCLAS

Vamos a considerar ahora los problemas relacionados con mezclas. Se permite que una sustancia ' S ' fluya hacia una cierta mezcla de un recipiente, con una cierta rapidez, y la mezcla se mantiene uniforme mediante agitación. Además, la mezcla uniforme deberá salir del recipiente y pasar a otro (en condiciones generalmente diferentes); en todo caso se busca determinar la cantidad de sustancia S presente en la mezcla al tiempo t .

Se representará por x la cantidad de S en el tiempo t , la derivada dx/dt representa la razón de cambio de x con respecto a t . Si ENTRADA representa la razón con la que S entra a la mezcla y SALIDA representa la razón con la que sale, de inmediato se tiene la ecuación básica:

$$dx/dt = \text{ENTRADA} - \text{SALIDA}$$

de la cual se determina la cantidad x de S en el tiempo t . Estudiaremos algunos ejemplos.

► x = cantidad de S en solución al instante t ;

$$x = x(t)$$

► V = volumen de solución, en el tanque al instante t ; $V = V(t)$

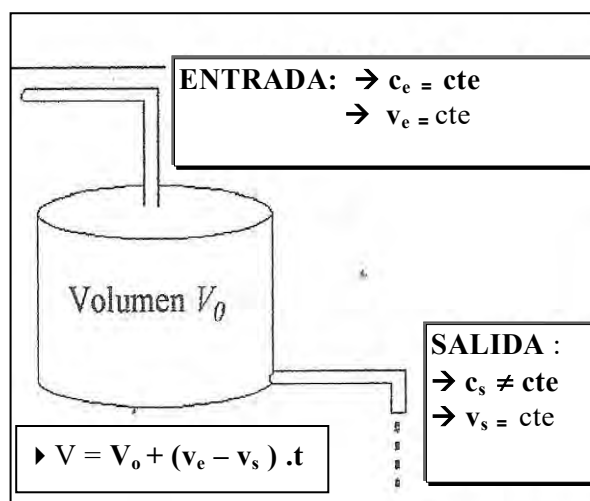
► V_0 = volumen inicial ($t=0$) en el tanque.

La ecuación "ecuación básica" queda:

ENTRADA: $c_e \cdot v_e \rightarrow v_e = \text{cte}; c_e = \text{cte}$

SALIDA: $c_s \cdot v_s \rightarrow v_s = \text{cte};$

$$\rightarrow c_s = c_s(t) = \frac{x(t)}{V(t)} \neq \text{cte}$$



Finalmente:

$$\frac{dx}{dt} = c_e \cdot v_e - \frac{x(t)}{V(t)} \cdot v_s$$

Ejemplo I:

Un tanque contiene inicialmente 50 galones de agua pura. En el tiempo $t = 0$, salmuera que contiene 2 libras de sal disuelta por galón entra al tanque a razón de 3 galones/minuto. La mezcla se mantiene uniforme agitándola y, después de estar bien agitada, sale simultáneamente del tanque con la misma rapidez.

- ¿Qué cantidad de sal se encuentra en el tanque en cualquier tiempo $t > 0$?
- ¿Qué cantidad de sal hay después de 25 minutos?
- ¿Qué cantidad de sal está presente después de un largo tiempo?

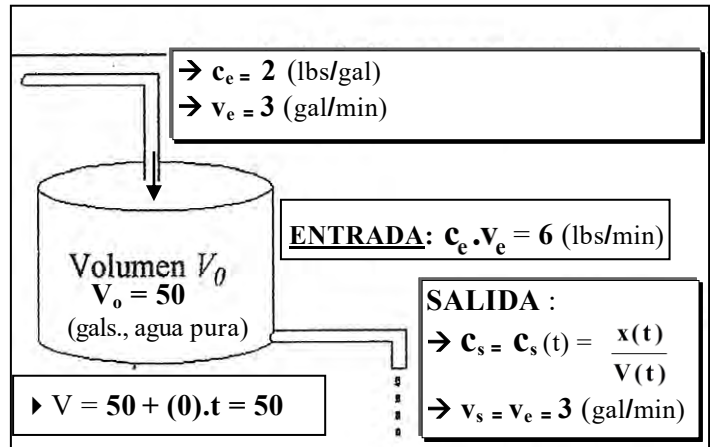
Formulación Matemática:

► **Incógnita principal:** $x = x(t)$
 ► **DATOS:** en el esquema de situación →

$$\text{EB} \rightarrow \frac{dx}{dt} = c_e \cdot v_e - \frac{x(t)}{V(t)} \cdot v_s$$

$$\text{EB} \rightarrow \frac{dx}{dt} = 2 \cdot 3 - \frac{x(t)}{50} \cdot 3$$

$$\text{EB} \rightarrow \frac{dx}{dt} = 6 - \frac{3}{50} \cdot x$$



Concluimos así el siguiente **PVI**: $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6 - \frac{3}{50}x \\ x(0) = 0 \end{cases}$

Rta 1: $x(t) = 100 - 100 e^{-\frac{3}{50}t}$

Rta 2: $x(25) = 100 - 100 \cdot e^{-1.5} \cong 78$ (lb)

Rta 3: $x \rightarrow 100$ (lb) cuando $t \rightarrow +\infty$

El problema “planteado” está terminado; pero, ¿no surgen interrogantes o cuestiones interesantes de investigar? Tendrían que surgir... “*naturalmente*” !!!, el ser humano es curioso e inquisitivo por naturaleza

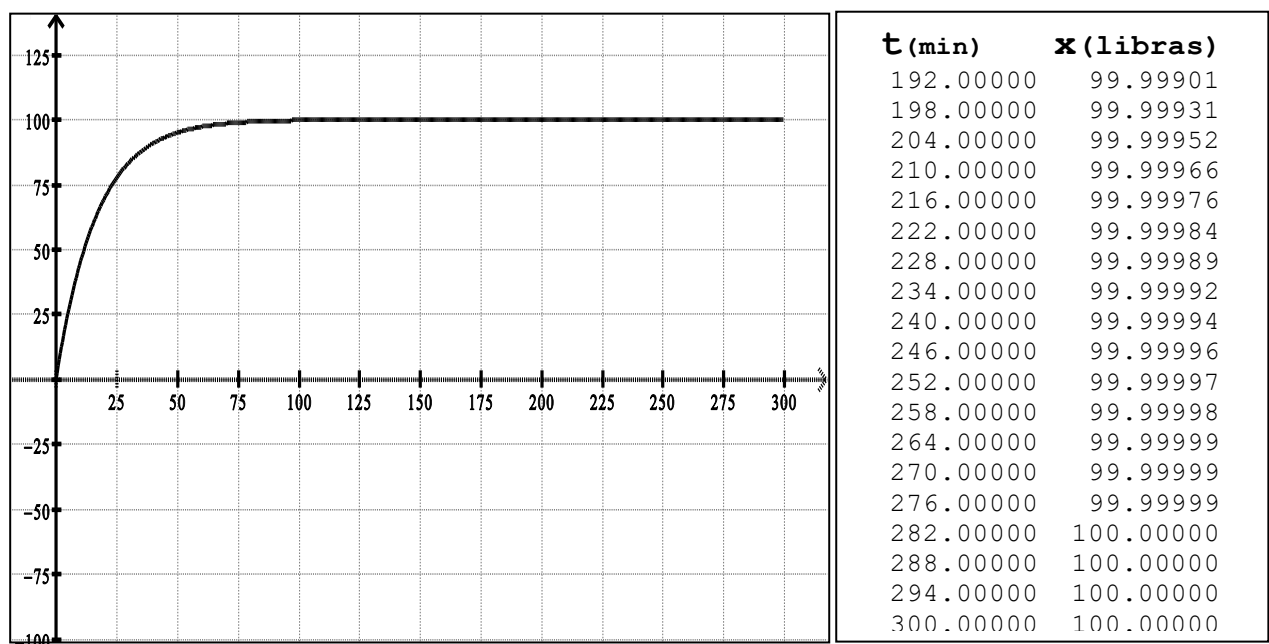
Por ejemplo:

a) ¿Por qué la cantidad de sal tiende a 100 (lbs)?, ¿hay alguna forma “*práctica*” de encontrarle “*sentido*” a este resultado que no sea diciendo que es así, porque “las cuentas dan así”?

b) En algún instante, ¿llega a haber 100 (lbs) de soluto en la solución? ¿SI? ; ¿NO? ; ¿NO SABE? ¿Desde que “lugar” entiende que debe buscar la respuesta a esta pregunta?

c) ¿Y la concentración de salida?; ¿ $c_s \rightarrow 50$ (lbs/gal) cuando $t \rightarrow +\infty$?

d) El gráfico y la tabla de valores que siguen corresponden a $x = x(t)$. ¿Podría decirse que a los 282 minutos (casi 5 horas) hay exactamente 100 libras de soluto en la solución?

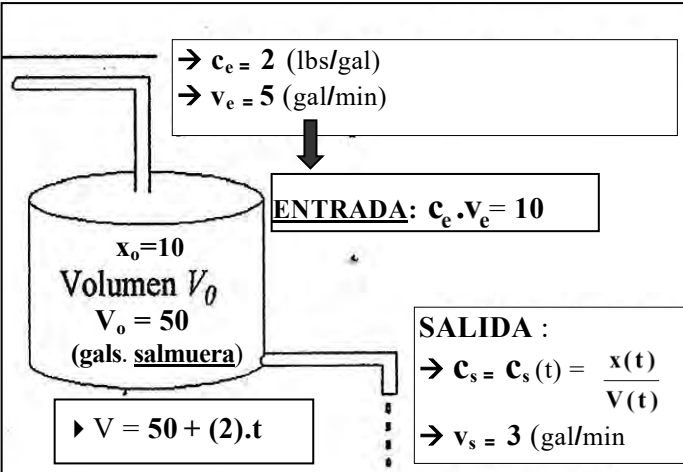


Ejemplo II:

Un tanque contiene inicialmente 50 galones de salmuera en donde se han disuelto 10 libra de sal. En el tiempo $t = 0$, salmuera que contiene 2 libras de sal disuelta por galón entra al tanque a razón de 5 galones/minuto. La mezcla se mantiene uniforme agitándola y, después de estar bien agitada, sale simultáneamente del tanque a razón de 3 galones/minuto. ¿Qué cantidad de sal hay en el tanque en cualquier tiempo $t > 0$?

Formulación matemática. Sea x = la cantidad de ale en el tiempo t , nuevamente usaremos la ecuación

$$dx/dt = \text{ENTRADA} - \text{SALIDA}$$

Formulación Matemática: ► Incógnita principal: $x = x(t)$ ► DATOS: en el esquema de situación → EB → $\frac{dx}{dt} = c_e \cdot v_e - \frac{x(t)}{V(t)} \cdot v_s$ EB → $\frac{dx}{dt} = 2 \cdot 5 - \frac{x(t)}{50+2t} \cdot 3$ EB → $\frac{dx}{dt} = 10 - \frac{3}{50 + 2t} \cdot x$	
---	---

Concluimos así el siguiente PVI:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 10 - \frac{3}{50+2t} \cdot x \\ x(0) = 10 \end{cases}$$

Rta: $x = 4 \cdot t + 100 - \frac{90 \cdot 50^{3/2}}{(2 \cdot t + 50)^{3/2}}$

Preguntas:

a) Para este resultado fácilmente verificamos que si a V y x las “pensamos” como variables abstractas entonces para $t \rightarrow +\infty$ tenemos que $V \rightarrow +\infty$ y $x \rightarrow +\infty$.

Si le preguntaran el comportamiento de V y x para $t \rightarrow +\infty$, ¿diría que ambas tienden a $+\infty$? ¿Sí?; ¿No?; ¿Por qué?

Recordar que las variables del problema son “concretas” (magnitudes) → x = cantidad de Solute en el tanque; V = volumen de solución, en el tanque.

b) El dominio “*natural*” de “ x ” es un intervalo de la forma $[0 ; t_f]$. ¿Quién es t_f ? En el problema, ¿tiene el dato necesario para hallarlo?

c) ¿Cual es $c_s(0)$?

d) Respecto a la c_s “final” (la c_s para $t \rightarrow +\infty$); ¿puede predecir cuál sería sin “hacer cuentas”, sólo con los datos del problema y acudiendo al “sentido común”? Proponga un valor y luego halle la misma haciendo los cálculos del caso.

➤ MODELIZACION MATEMÁTICA - SISTEMAS DINÁMICOS

Con el fin de ayudar a la toma de decisiones se ha desarrollado un interés creciente por el procesamiento de todo tipo de información. En particular una de las ramas que más se ha desarrollado en el tiempo es una cuyo objetivo básico es, “*estudiar cómo evoluciona a lo largo del tiempo, un grupo de datos observados o empíricos*”. En este contexto se ha formalizado el concepto de **Sistema Dinámico**, que ha sido objeto de estudio en una rama de la **Matemática Aplicada** a la que se ha denominado “**Teoría de los Sistemas Dinámicos**”.

A este respecto tenemos las siguientes definiciones:

✱ **SISTEMA**: conjunto de partes operativamente interrelacionadas; es decir, en el que las partes interactúan y lo que interesa es su comportamiento global.

Ejemplos: sistema nervioso, sistema ecológico, sistemas fisiológicos.

✱ **MODELO**: expresión formal de las relaciones existentes entre las partes de un sistema, definidas las mismas en términos matemáticos y/o físicos.

✱ **SISTEMA DINÁMICO**: cuando el objeto de estudio es “*la evolución del sistema en el tiempo*”; hablamos de **SISTEMA DINÁMICO**.

O sea, entendemos por tal todo sistema que desde un “*estado inicial*” evoluciona hacia un “*estado final*”, siendo el **tiempo** la variable esencial del proceso.

Un ejemplo clásico es el de la evolución de una especie en un ambiente determinado.

✱ **¿CÓMO SE “MODELIZA” UN SISTEMA DINÁMICO?**

Las *ecuaciones diferenciales* ó los sistemas de ecuaciones diferenciales son las herramientas matemáticas *naturales* para modelizar “**Sistemas Dinámicos**” ya que los mismos se ocupan de “*procesos en movimiento*”; procesos que (además del tiempo) involucran variables como “*posición*” (x) y “*velocidad*” (x').

En estos sistemas se distinguen dos cuestiones: el **ESTADO** y la **DINÁMICA**:

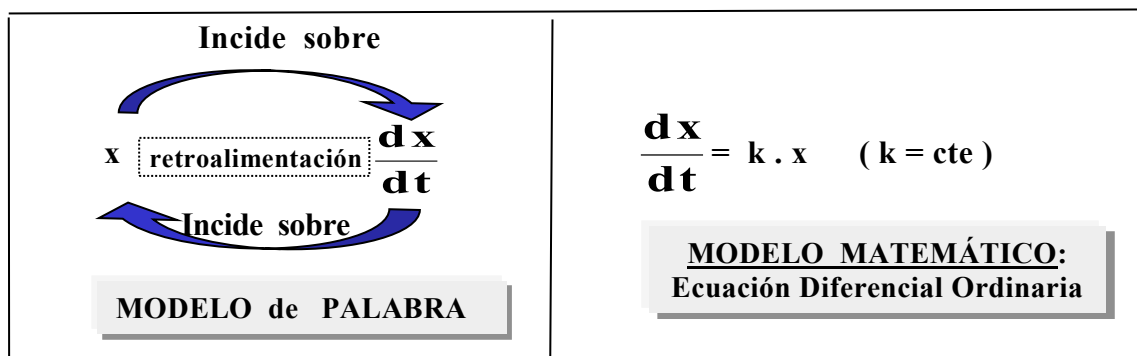
- El **ESTADO** del sistema es la información esencial sobre las componentes del mismo (posición, velocidades,.. etc) en un instante “**t**”.
- La **DINÁMICA** es la regla que describe como el sistema evoluciona en el tiempo.

➤ SOBRE MODELOS MATEMÁTICOS PARA LOS SISTEMAS DINÁMICOS

✱ **Un Caso Simple** : “*modelo lineal en una variable*”

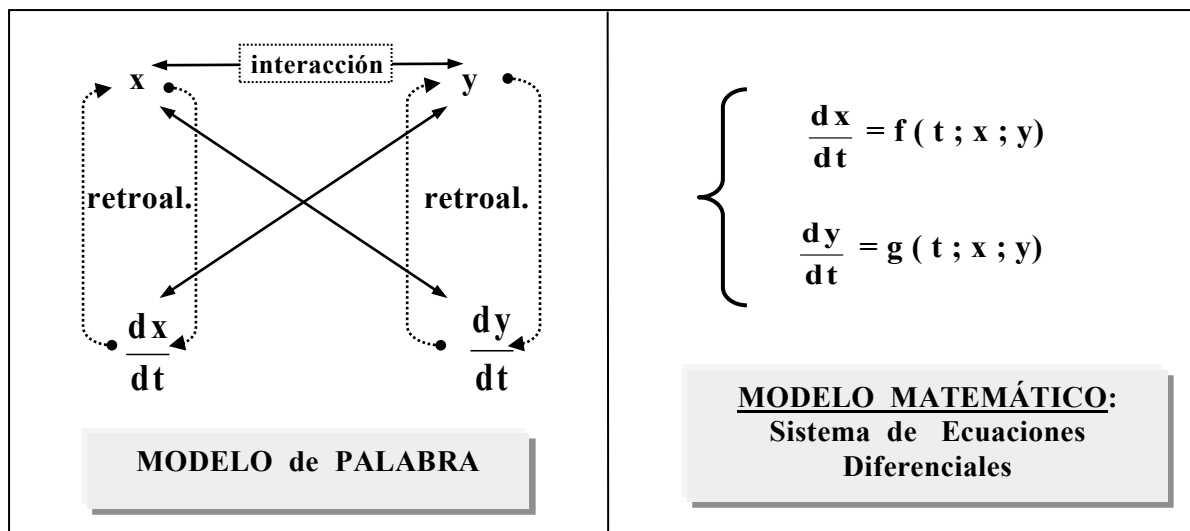
Si “**x**” representa una magnitud variable en el tiempo, la velocidad de cambio de x (dx/dt) también lo es y este hecho, a su vez, incide sobre la propia “**x**”.

Este proceso se llama “retroalimentación”.



✱ **Un caso complejo: “modelo de más de una variable”.**

Si “x” e “y” son **dos** magnitudes variables en el tiempo que a su vez **interactúan entre sí**, entonces las respectivas **velocidades de cambio**, $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$, además del tiempo, dependen también de “x” e “y”. El proceso puede esquematizarse como sigue:

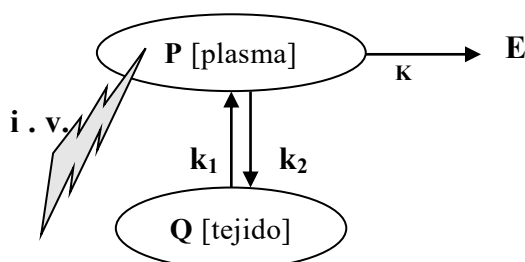


✱ **Objetivo del Modelo:** hallar $x = x(t)$ e $y = y(t)$ para predecir futuros valores de x e y.

➤ **APLICACIÓN:**

Distribución de fármaco para el caso de una inyección intravenosa rápida.

Uno de los **modelos** adaptable a la mayoría de los fármacos, es el de **dos compartimentos**. Cada **tejido** se considera como un **compartimento** (periférico) el cual tiene una **relación de intercambio** con un **compartimento central** (sangre). El modelo que ilustra la distribución de fármaco en este caso puede ser representado por el siguiente esquema:



$$q = \left(\begin{array}{l} \text{masa de fármaco} \\ \text{en } Q \text{ (tejido)} \end{array} \right) = q(t)$$

$$p = \left(\begin{array}{l} \text{masa de fármaco} \\ \text{en } P \text{ (plasma)} \end{array} \right) = p(t)$$

$k_1, k_2 \rightarrow$ constantes de velocidad (+) que caracterizan el paso del fármaco desde el compartimento central al periférico y viceversa.

$K \rightarrow$ constante de velocidad para el proceso de Eliminación.

$i.v. \rightarrow$ inyección intravenosa de un fármaco.

► La **razón de cambio** en “**cada compartimento**” (o sea, dq/dt y dp/dt) queda determinada por el **balance**, en cada instante “t”, entre la masa que **entra** y la que **sale**. O sea, para cada compartimento, estamos ante un “*problema tipo*” ya visto y resuelto: el que llamamos: “*problema de mezcla*”.

Según y acorde lo visto para los “problemas de mezcla”, buscamos las ecuaciones diferenciales correspondientes a cada compartimento.

→ Sean: $q(t)$ = cantidad de fármaco en Q (tejido) al instante “ t ”
 $p(t)$ = cantidad de fármaco en P (sangre) al instante “ t ”

→ q y p son las funciones incógnitas; o sea, las que queremos hallar. Son las funciones que permiten seguir la evolución en el tiempo del fármaco en el tejido y en el plasma.

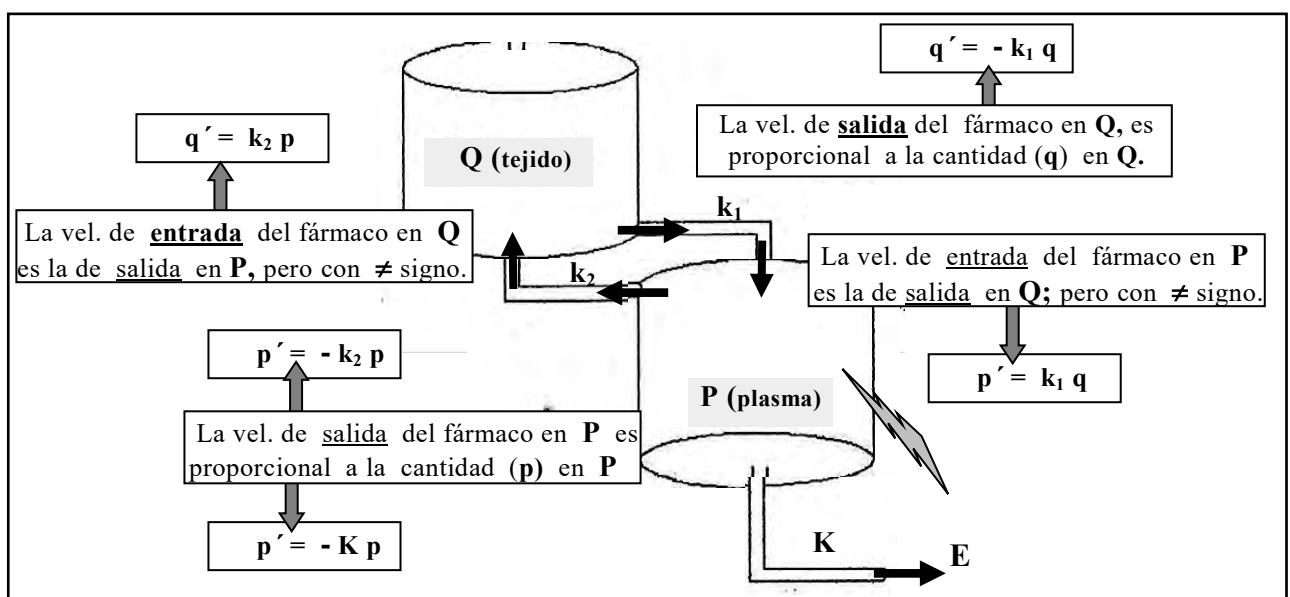
Por la Ecuación Básica (compartimento Q): $dq/dt = \text{ENTRADA}_{(Q)} - \text{SALIDA}_{(Q)}$

Por la Ecuación Básica (compartimento P): $dp/dt = \text{ENTRADA}_{(P)} - \text{SALIDA}_{(P)}$

Como ambas ecuaciones deben cumplirse simultáneamente, queda formado un **SISTEMA de ECUACIONES LINEALES**

$$\begin{cases} dq/dt = \text{ENTRADA}_{(Q)} - \text{SALIDA}_{(Q)} = k_2 p - k_1 q \\ dp/dt = \text{ENTRADA}_{(P)} - \text{SALIDA}_{(P)} = k_1 q - (k_2 + K) p. \end{cases}$$

El siguiente esquema explica cómo se llega cada una de las ecuaciones del sistema.



➤ **RESOLUCIÓN ?**, ¿Estamos en condiciones de resolver este problema con los conocimientos adquiridos hasta ahora? La respuesta es SI.

$$\begin{cases} dq/dt = -k_1 q + k_2 p \\ dp/dt = k_1 q - (k_2 + K) p \end{cases}$$

MODELO MATEMÁTICO para Dos Compartimentos

(SISTEMA LINEAL de ECUACIONES
DIFERENCIALES)

• Los SISTEMAS LINEALES de ECUACIONES DIFERENCIALES admiten distintos métodos para su resolución: eliminación, sustitución, transformada de Laplace, matriciales. Como siempre el método a usar está condicionado a muchas cuestiones; una de ellas, los conocimientos del resolutor.

• Este tema, su resolución matricial (la más conveniente) no está contemplado en la currícula; así, lo que pretendo mostrar aquí es que a veces, aunque no se conozca el método “óptimo” para el caso, igual se puede resolver el problema; hacer esto con lo que se conoce y ... un poco de “ingenio” (como con cualquier “problema”).

♦ ¿Qué sabemos??: EDOL- Orden ‘ n ’.

♦ ¿Qué no sabemos??: que nos la podemos “ingeniar” Para usar lo que sabemos y resolver !! El desafío es.... ¡animarse! Para animarlos les damos un poco de ayuda.

**MODELO MATEMÁTICO
para p y q**

(SISTEMA LINEAL de ECUACIONES
DIFERENCIALES)

$$\begin{cases} dq/dt = -k_1 q + k_2 p & (1) \\ dp/dt = k_1 q - (k_2 + K) p & (2) \end{cases}$$

- SISTEMA de ECUACIONES DIFS. LINEALES
- RESOLUCIÓN: “se desconoce” (Rta. no válida)
- RESOLUCIÓN: un desafío !!! ... pero, ¿qué hacer?
- Acudir al Método de Sustitución el cual permite, a partir de convenientes y apropiadas sustituciones, “reducir” el sistema a una... **EDOL - ORDEN 2.**

**MODELO
MATEMÁTICO para “p”
EDOL - ORDEN 2.**

(*) Método de sustitución: la técnica de sustitución usada en este método es similar a la usada para resolver sistemas de ecuaciones algebraicas: se despeja una de las variables dependientes en una de las ecuaciones (cuál de ellas depende de la configuración del sistema), se reemplaza en la otra y luego se resuelve la ecuación diferencial que resulta de este proceso:

(*) Instrucciones para obtener **p = p(t)**

- Derivar (2) ;
- obtener q' en función de p y p' :
- reemplazar q' en (❖) obtener una EDOLH en “p”
- Resolver la ecuación resultante:

$$p(t) = A \cdot e^{r_1 t} + B \cdot e^{r_2 t}$$

Resolver para q ; verificar que:

$$q(t) = C \cdot e^{r_1 t} + D \cdot e^{r_2 t}$$

- analizar la consistencia del modelo

Se observa que para $t \rightarrow \infty$ resulta $p(t) \rightarrow 0$, es decir se va eliminado el fármaco del plasma (y del tejido) (el modelo ajusta a la realidad) .

Resolución:

$$(a) \rightarrow p'' = k_1 q' - (k_2 + K) p' \quad (\diamond)$$

b) “despejar” q en (2) y “reemplazar” en (1) :

$$\text{en (2)} \rightarrow k_1 q = p' + (k_2 + K) p$$

$$\text{en (1)} \rightarrow q' = -[p' + (k_2 + K) p] + k_2 p$$

$$q' = -p' - K p$$

$$c) \rightarrow p'' = k_1 [-p' - K p] - (k_2 + K) p'$$

$$p'' + (k_1 + k_2 + K) p' + k_1 K p = 0$$

$$d) \quad r^2 + (k_1 + k_2 + K) \cdot r + k_1 K = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{-(k_1 + k_2 + K) \pm \sqrt{(k_1 + k_2 + K)^2 - 4k_1 K}}{2}$$

e) $r_1 < 0$ y $r_2 < 0$; (verificar)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = 0 \quad ; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = 0$$

12— Campos Escalares

Hasta el momento hemos trabajado con el cálculo de funciones de una sola variable. Sin embargo, en el mundo real las cantidades físicas suelen depender de dos o más variables. En esta unidad pondremos especial atención en las funciones de varias variables y extendaremos las ideas básicas del Cálculo Diferencial a tales funciones.

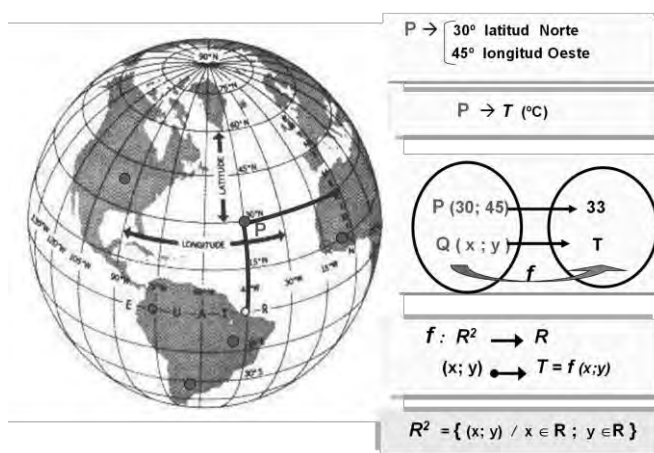
En matemáticas y física, un **campo escalar** representa la distribución espacial de una magnitud escalar, asociando un valor a cada punto del espacio. En matemáticas, el valor es un número; en física, una magnitud física.

Se define entonces al campo escalar como una función de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, donde $n > 1$. Habitualmente se emplea este término como sinónimo de función de varias variables.

12.1 Definición

La temperatura T en un punto de la superficie de la Tierra depende en todo momento de la longitud x y la latitud y del punto.

Podemos pensar en T como una función de dos variables x e y , o como una función del par (x, y) . Indicamos esta dependencia funcional indicando $T = f(x, y)$.

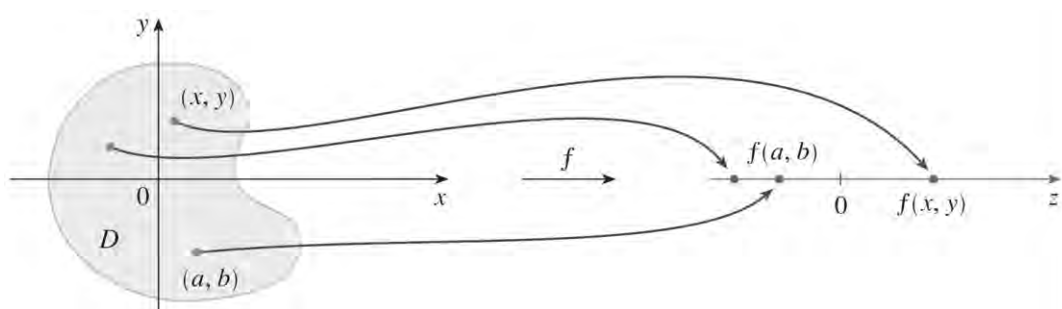


El volumen V de un cilindro circular depende de su radio r y de su altura h . De hecho, sabemos que $V = \pi r^2 h$. Decimos entonces que V es una función de r y h , y escribimos esto como $V(h, r) = \pi r^2 h$.

DEFINICIÓN Sea $D \subset \mathbb{R}^2$. Una función f de **dos variables** es una regla que asigna a cada par ordenado (x, y) en D un único número real $f(x, y)$. El conjunto D es el dominio de f y su Imagen es el conjunto de valores que toma f , es decir, $\{f(x, y) / (x, y) \in D\}$.

A menudo, escribimos $z = f(x, y)$ para hacer explícito el valor que toma f en el punto (x, y) . Las variables x e y son **variables independientes**, y z es la **variable dependiente**. (Compare lo anterior con la notación $y = f(x)$ para funciones de una variable)

Una función de dos variables es una función cuyo dominio es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ y cuya imagen es un subconjunto de $\mathbb{R}$. Una manera de representar tal función es mediante un diagrama de flechas (véase figura abajo), donde el dominio D se representa como un subconjunto del plano xy y la Imagen es un conjunto de números sobre una recta real, que se muestra como un eje z . Por ejemplo, si $f(x, y)$ representa la temperatura en un punto (x, y) en una placa metálica plana con la forma de D , podemos considerar al eje z como un termómetro que va mostrando el registro de temperaturas.



Si una función f está dada por una fórmula y no se especifica dominio alguno, entonces se entiende que el dominio de f será el conjunto de pares (x, y) para el cual la expresión dada es un número bien definido.

Ejemplo 1 Para las siguientes funciones evalúe $f(3, 2)$. Determine y grafique su Dominio.

a) $f_1(x, y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$

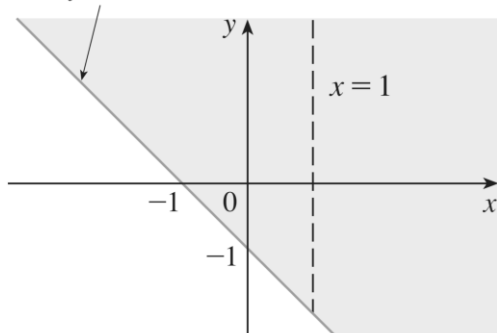
b) $f_2(x, y) = x \ln(y^2 - x)$

Solución

a) $f_1(3, 2) = \frac{\sqrt{2+3+1}}{3-1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

La expresión para f_1 tiene sentido si el denominador es distinto de 0 y la cantidad que está bajo el radical no es negativa. Por lo tanto, el dominio de f_1 es:

$$x + y + 1 = 0$$



$$D_1 = \{(x, y) / x + y + 1 \geq 0, x \neq 1\}$$

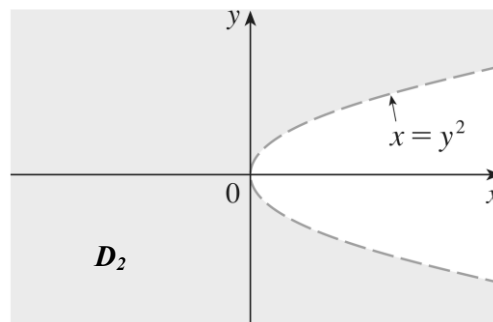
La desigualdad $x + y + 1 \geq 0$, o $y \geq -x - 1$, describe los puntos que quedan en la recta $y = -x - 1$, o por arriba de ella, y $x \neq 1$ significa que los puntos sobre la recta $x = 1$ tienen que ser excluidos del dominio (ver gráfico de D_1).

b) $f_2(3, 2) = 3 \ln(2^2 - 3) = 0$

La expresión para f_2 tiene sentido sólo si $y^2 - x > 0$, es decir, $x < y^2$, entonces el dominio de f_2 es:

$$D_2 = \{(x, y) / x < y^2\}.$$

Este es el conjunto de puntos a la izquierda de la parábola $x = y^2$ (ver gráfico de D_2).

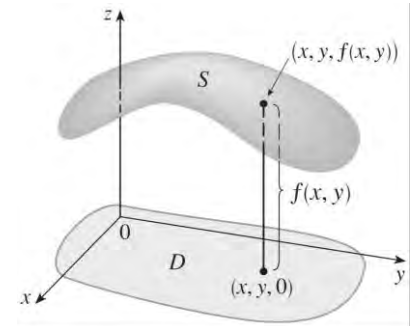


Otro modo de representar el comportamiento de una función de dos variables es considerar su gráfica.

DEFINICIÓN Si f es una función de dos variables con dominio D , entonces la gráfica de f es el conjunto de todos los puntos (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$ tal que $z = f(x, y)$ y (x, y) está en D .

- $\text{gráf. } f = \{(x, y, z) / z = f(x, y); (x, y) \in D\} \Rightarrow \text{Superficie.}$

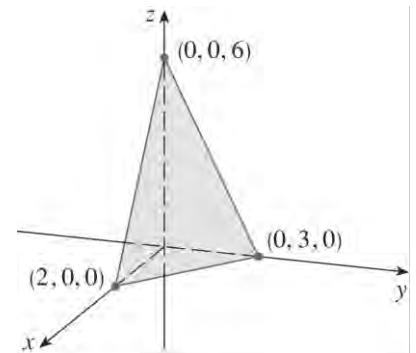
Así como la gráfica de una función f de una variable es una curva C con ecuación $y = f(x)$, la gráfica de una función f de dos variables es una superficie S cuya ecuación es $z = f(x, y)$. Puede representar la gráfica S de f directamente encima o abajo de su dominio D en el plano xy (véase figura a la derecha).



Ejemplo 2 Dibuje la gráfica de la función f , con ley $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$.

Solución

La gráfica de f tiene la ecuación $z = 6 - 3x - 2y$, o $3x + 2y + z = 6$, que es un plano. La porción de esta gráfica que está en el primer octante se ilustra a la derecha.



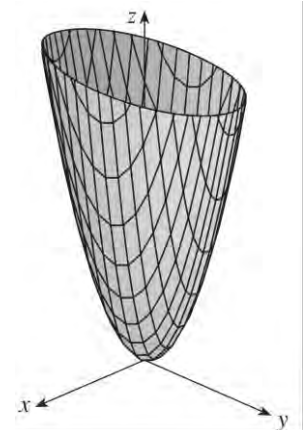
La función del ejemplo 2 es un caso especial de la función $f(x, y) = ax + by + c$ que se llama **función lineal**. La gráfica de dicha función tiene por ecuación $z = ax + by + c$, o $ax + by - z + c = 0$, por lo que es un plano. Así como las funciones lineales de una sola variable son importantes en el cálculo de una sola variable, verá que las funciones lineales de dos variables desempeñan un papel fundamental en el cálculo de varias variables.

Ejemplo 3 Determine el dominio, la imagen y grafique h , cuya ley es $h(x, y) = 4x^2 + y^2$.

Solución

Observe que h está definida para todos los pares ordenados posibles de números reales (x, y) de modo que el dominio es $\mathbb{R}^2$, o sea, todo el plano xy . El conjunto imagen de h es el conjunto de todos los números reales no negativos. (Observe que $x^2 \geq 0$ e $y^2 \geq 0$, de modo que $h(x, y) \geq 0$ para toda x e y .)

La gráfica de h tiene por ecuación a $z = 4x^2 + y^2$, que es un paraboloide elíptico. Las trazas horizontales son elipses y las trazas verticales son parábolas (ver figura a la derecha).



Hoy disponemos de programas para computadora con los que se pueden obtener las gráficas de funciones de dos variables. En la mayor parte de dichos programas las trazas en los planos verticales $x = k$ e $y = k$ se dibujan para valores de k separados regularmente, obteniéndose gráficos como el del paraboloide elíptico mostrado arriba.

12.2 Curvas de nivel

Hasta este momento se cuenta con dos métodos para representar funciones: diagramas de flechas y gráficas. Un tercer método, tomado prestado de los cartógrafos, es un mapa de curvas de nivel en el cual puntos de elevación igual se unen para formar curvas de contorno o curvas de nivel.

DEFINICIÓN La **traza** de una función f de dos variables es la curva C que se obtiene al intersectar la superficie S de f con algún plano coordenado o paralelo a él.

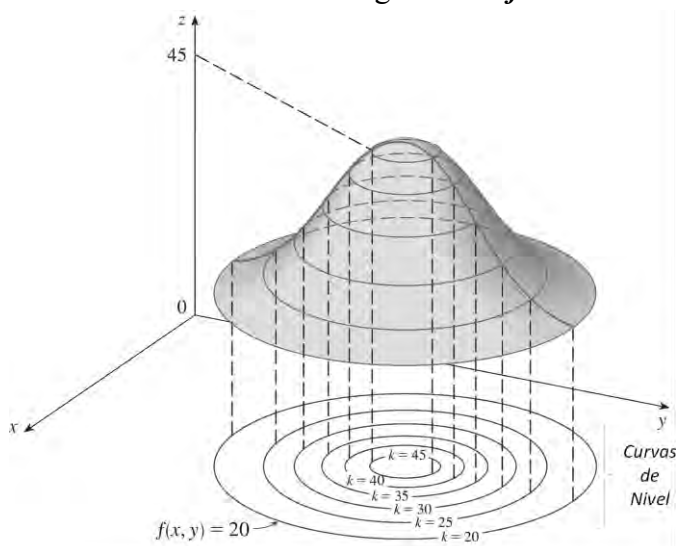
- $C / C = S \cap \pi$ (plano coordenado o paralelo a él).

DEFINICIÓN Las **curvas de nivel** de una función f de dos variables son las curvas cuyas ecuaciones son $f(x, y) = k$, donde k es una constante (en el conjunto imagen de f).

- Conjunto curva de nivel en el plano xy : $C_k = \{(x, y) \in Df / f(x, y) = k; k \in If\}$.

Una curva de nivel $f(x, y) = k$ es el conjunto de todos los puntos en el dominio de f en el cual f toma un valor dado k . En otras palabras, señala dónde tiene una altura k la gráfica de f .

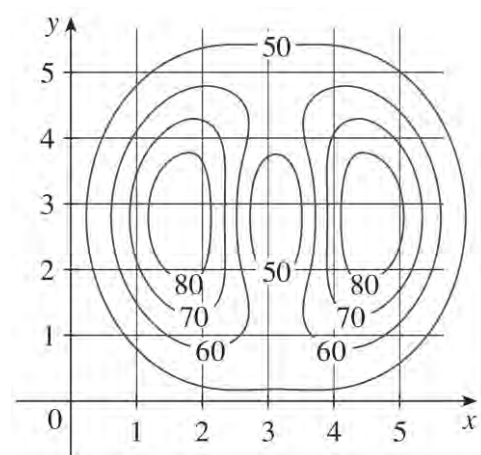
Puede verse en la figura de la derecha la relación entre curvas de nivel y trazas horizontales. Las curvas de nivel son justamente las trazas de la gráfica de f en el plano horizontal $z = k$ proyectadas en el plano xy . Entonces, si dibuja las curvas de nivel de una función y las representa como elevaciones de la superficie a la altura indicada, entonces puede formar mentalmente una imagen de la gráfica. La superficie tiene pendiente abrupta donde las curvas de nivel están muy cercanas entre sí. Es algo más plana donde las curvas se separan.



Ejemplo 4 Un mapa de curvas de nivel de una función f , se ilustra en la figura a la derecha. Úselo para dar los valores de $f(1, 2)$ y $f(5, 5)$.

Solución

El punto $(1, 2)$ está en la curva de nivel $z = 70$. Se puede decir entonces $f(1, 2) = 70$, y en forma similar, $f(5, 5) = 50$.

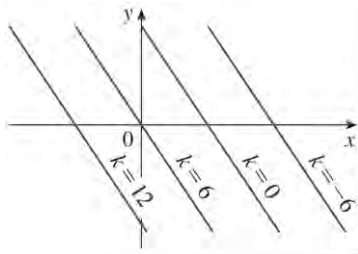


Ejemplo 5 Grafique las curvas de nivel de la función f , con ley $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$ para los valores $k = -6, 0, 6, 12$.

Solución

Las curvas de nivel son

$$6 - 3x - 2y = k \quad \text{o bien} \quad 3x + 2y + (k - 6) = 0$$



Es una familia de rectas cuya pendiente es $-3/2$. Las cuatro curvas de nivel particulares con $k = -6, 0, 6$ y 12 son $3x+2y-12=0$, $3x+2y-6=0$, $3x+2y=0$ y $3x+2y+6=0$. A la izquierda se muestran sus gráficas. Entre las curvas de nivel hay una separación igual, y dichas curvas son rectas paralelas porque la gráfica de f es un plano (véase **Ejemplo 2**).

Ejemplo 6 Grafique algunas curvas de nivel de la función h , con ley $h(x, y) = 4x^2 + y^2$.

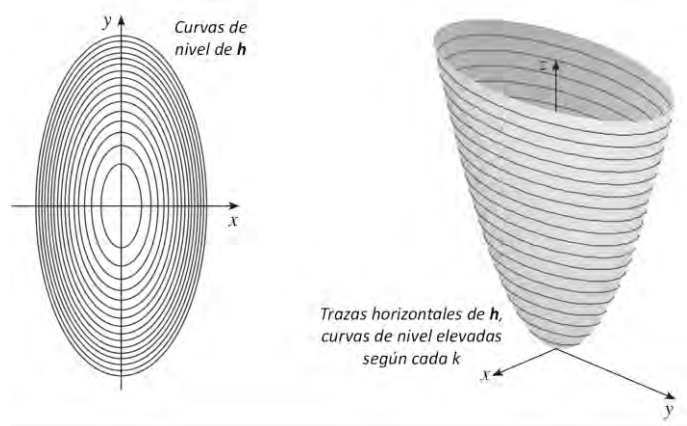
Solución

Las curvas de nivel son

$$4x^2 + y^2 = k \quad \text{o bien} \quad \frac{x^2}{k/4} + \frac{y^2}{k} = 1$$

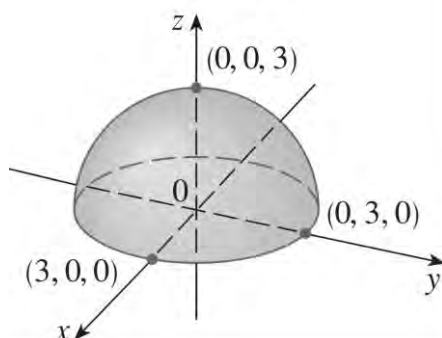
las cuales, para $k > 0$, describen una familia de elipses con semiejes $\sqrt{k/2}$ y $\sqrt{k}$. En la figura de la derecha se ilustra un mapa de curvas de nivel de h dibujado mediante una computadora, y las curvas de nivel corresponden a $k = 1/4, 1/2, 3/4, \dots, 4$.

También se muestran estas curvas de nivel elevadas para obtener la gráfica de h (un paraboloides elíptico), donde se transforman en trazas horizontales.



12.3 Límites y Continuidad

Considere la función f , con ley $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.



La gráfica de f tiene la ecuación $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Al elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación se obtiene $z^2 = 9 - x^2 - y^2$, es decir, $z^2 + x^2 + y^2 = 9$, que reconocemos como la ecuación de la esfera con centro en el origen y radio 3. Pero ya que $z \geq 0$, la gráfica de f es sólo la parte superior de esta esfera (ver gráfica a la izquierda).

Por lo tanto, el dominio de esta función es el disco cerrado $D = \{(x, y) / 9 \geq x^2 + y^2\}$.

Si un punto $P(x, y)$ está cerca del origen, entonces sus coordenadas están cercanas a 0, y por consiguiente $f(x, y)$ está cercana a 3. De hecho, si las coordenadas del punto P quedan dentro de un pequeño disco abierto $x^2 + y^2 < \delta^2$, entonces $-(x^2 + y^2) > -\delta^2 \Rightarrow \Rightarrow 9 - (x^2 + y^2) > 9 - \delta^2 \Rightarrow f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} > \sqrt{9 - \delta^2} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 3$.

Por tanto, podemos hacer que los valores de $f(x, y)$ se acerquen a 3 tanto como queramos, al tomar a (x, y) en un disco lo suficientemente pequeño, con centro en $(0, 0)$. Describiremos esta situación con la notación ya conocida:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{9 - x^2 - y^2} = 3$$

En general, la notación

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$$

significa que los valores de $f(x, y)$ pueden acercarse tanto como queremos al número L , siempre que se tome el punto $P(x, y)$ lo suficientemente cerca al punto (a, b) . A continuación, damos una definición más precisa.

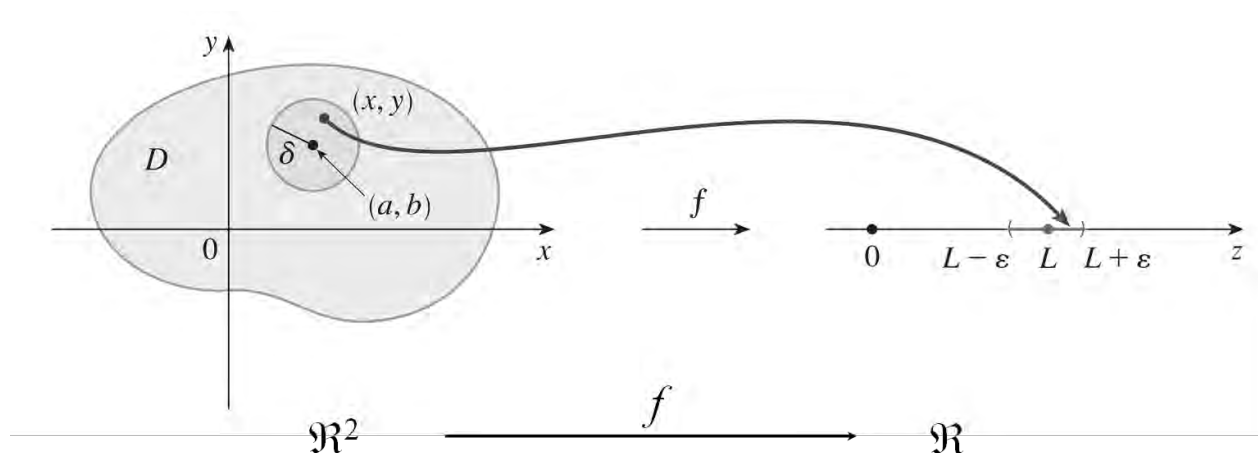
DEFINICIÓN Sea f una función de dos variables definida en un disco con centro en (a, b) , excepto quizás en (a, b) . Entonces, el **límite de $f(x, y)$ cuando (x, y) tiende a (a, b)** es L , y lo expresamos

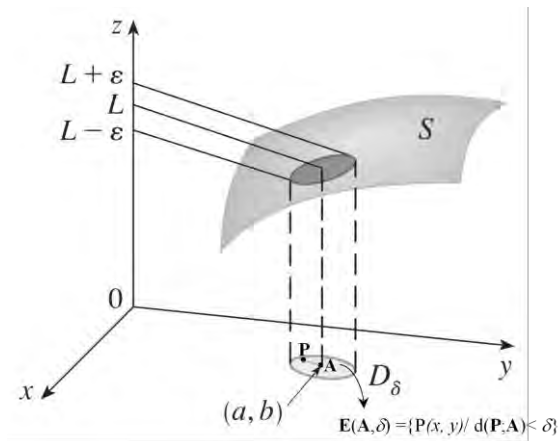
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$$

si para cualquier número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que $|f(x, y) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta$.

Como $|f(x, y) - L|$ es la distancia entre los números $f(x, y)$ y L , y $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$ es la distancia entre el punto (x, y) y el punto (a, b) . Por lo tanto, la definición establece que la distancia entre $f(x, y)$ y L se puede hacer arbitrariamente pequeña al hacer la distancia desde (x, y) a (a, b) suficientemente pequeña (pero no cero).

En la figura adjunta se ilustra la definición mediante un diagrama de flechas: si cualquier intervalo pequeño $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ se da alrededor de L , entonces puede encontrar un círculo D_δ con centro en (a, b) y radio $\delta > 0$ tal que f transforma todos los puntos en D_δ , excepto tal vez (a, b) , en el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.



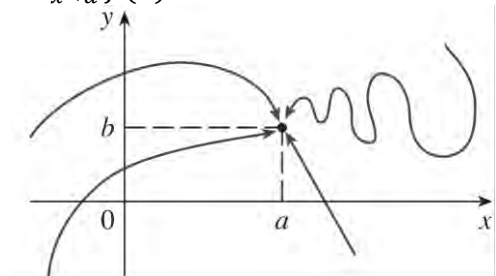


Otra forma de ilustrar la definición recién dada se muestra en la figura de la izquierda, en donde la superficie S es la gráfica de f .

Si se da que $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$, tal que si (x, y) se restringe a que esté en el disco D_δ y $(x, y) \neq (a, b)$, entonces la parte correspondiente de S está entre los planos horizontales $z = L + \varepsilon$ y $z = L - \varepsilon$.

En el caso de funciones de una sola variable, cuando dejamos que x tienda a a , hay sólo dos direcciones posibles de aproximación, desde la izquierda o desde la derecha. De acuerdo con la unidad 2, si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, entonces el $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ no existe.

En el caso de funciones de dos variables, la situación no es tan sencilla, porque podemos dejar que (x, y) tiendan a (a, b) desde un número infinito de direcciones y de cualquier forma (véase la figura a la derecha) siempre que (x, y) permanezca dentro del dominio de f .



La definición de la página anterior establece que la distancia entre $f(x, y)$ y L se puede hacer arbitrariamente pequeña, haciendo la distancia desde (x, y) a (a, b) suficientemente pequeña, pero no cero. La definición entonces se refiere sólo a la *distancia* entre (x, y) y (a, b) , pero no a la dirección de aproximación. Por consiguiente, si existe el límite, entonces $f(x, y)$ tiene que aproximarse al mismo límite sin que importe cómo (x, y) se aproxima a (a, b) . Por lo tanto, si podemos encontrar dos trayectorias distintas de aproximación a lo largo de las cuales la función $f(x, y)$ tiene diferentes límites, entonces se concluye que el $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$ no existe.

Decimos entonces que:

- Si $f(x, y) \rightarrow L_1$ conforme $(x, y) \rightarrow (a, b)$ a lo largo de una trayectoria C_1 y $f(x, y) \rightarrow L_2$ conforme $(x, y) \rightarrow (a, b)$ a lo largo de una trayectoria C_2 , donde $L_1 \neq L_2$, entonces $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$ no existe.

Ejemplo 1 Demuestre que no existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

Solución

Sea $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. Primero nos aproximamos a $(0, 0)$ por el eje x . Entonces, $y = 0$ da $f(x, 0) = x^2 / x^2 = 1$, para toda $x \neq 0$, de modo que $f(x, y) \rightarrow 1$ conforme $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ a lo largo del eje x .

Ahora nos aproximamos a lo largo del eje y al hacer $x = 0$. Entonces $f(0, y) = -y^2 / y^2 = -1$ para toda $y \neq 0$, de modo que $f(x, y) \rightarrow -1$ conforme $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ a lo largo del eje y . Puesto que f tiene dos límites diferentes a lo largo de dos rectas distintas, el límite dado no existe.

Ejemplo 2 Si $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, ¿existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$?

Solución

Si $y = 0$, entonces $f(x, 0) = 0/x^2 = 0$, para toda $x \neq 0$, de modo que $f(x, y) \rightarrow 0$ conforme $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ a lo largo del eje x .

Si $x = 0$, entonces $f(0, y) = 0/y^2 = 0$, para toda $y \neq 0$, de modo que $f(x, y) \rightarrow 0$ conforme $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ a lo largo del eje y .

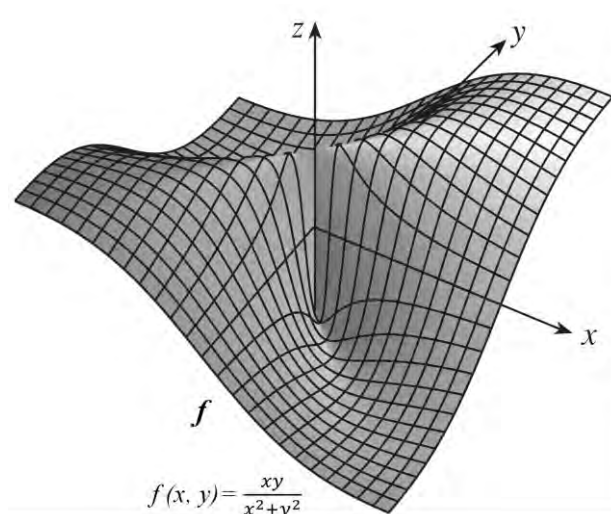
Aunque hemos obtenido límites idénticos a lo largo de los ejes, eso no prueba que el límite dado es 0. Ahora, si nos aproximamos a $(0, 0)$ a lo largo de otra recta, digamos $y = x$, para todo $x \neq 0$ tenemos,

$$f(x, x) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = 1/2$$

En consecuencia, $f(x, y) \rightarrow 1/2$ conforme $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ a lo largo de la recta $y = x$.

Como hemos encontrado distintos límites a lo largo de diversas trayectorias, el límite dado no existe.

La figura que se muestra a la derecha arroja algo de luz a este ejemplo. La cresta que se forma por arriba de la recta $y = x$ corresponde al hecho de que $f(x, y) = 1/2$ para todos los puntos (x, y) de esa recta, excepto en el origen.



Ejemplo 3 Si $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$, ¿existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$?

Solución

Teniendo en cuenta la solución del ejemplo anterior, ahorraremos tiempo permitiendo que $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ a lo largo de cualquier recta que pase por el origen. Por lo tanto si $y = mx$, en donde m es la pendiente, y si $m \neq 0$, tenemos

$$f(x, y) = f(x, mx) = \frac{x(mx)^2}{x^2+(mx)^4} = \frac{m^2x^3}{x^2+m^4x^4} = \frac{m^2x}{1+m^4x^2}$$

De modo que $f(x, y) \rightarrow 1/2$ conforme $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ a lo largo de la recta $y = mx$. Por lo tanto, f tiene el mismo valor límite a lo largo de cualquier recta que pase por el origen. Sin embargo, eso no demuestra que el límite dado sea 0, ya que si dejamos que $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ a lo largo de la parábola $x = y^2$, tenemos

$$f(x, y) = f(y^2, y) = \frac{y^2 y^2}{(y^2)^2 + y^4} = \frac{y^4}{2y^4} = 1/2$$

por lo que $f(x, y) \rightarrow 1/2$ conforme $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ a lo largo de la parábola $x = y^2$.

Otra vez, como para distintas trayectorias obtenemos distintos valores límites, el límite dado no existe.

Ejemplo 4 Si $f(x, y) = \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$, ¿existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$?

Solución

Como en el ejemplo anterior, uno puede mostrar que el límite a lo largo de cualquier recta que pase por el origen es 0. Eso no muestra que el límite dado sea 0, pero los límites a lo largo de las parábolas $x = y^2$ e $y = x^2$ también son 0, de modo que comenzamos a sospechar que exista el límite.

Sea $\varepsilon > 0$, queremos encontrar $\delta > 0$ tal que:

$$\left| \frac{3x^2y}{x^2+y^2} - 0 \right| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$$

O sea,

$$\frac{3x^2|y|}{x^2+y^2} < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$$

Pero $x^2 + y^2 \geq x^2$ ya que $y^2 \geq 0$, de modo que

$$\frac{3x^2|y|}{x^2 + y^2} \leq 3|y| = 3\sqrt{y^2} \leq 3\sqrt{x^2 + y^2}$$

Por lo tanto, si elegimos $\delta = \varepsilon/3$, con $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, tenemos

$$\frac{3x^2|y|}{x^2 + y^2} \leq 3\sqrt{x^2 + y^2} \leq 3\delta = 3\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) = \varepsilon$$

Finalmente, y de acuerdo a la definición de límite dada,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} = 0$$

Al igual que para las funciones de una sola variable, el cálculo de los límites puede simplificarse en gran medida mediante el empleo de las propiedades de los límites y por el uso de la definición de continuidad.

Las propiedades de los límites presentadas en la unidad 2 pueden ampliarse naturalmente a las funciones de dos variables: el límite de una suma es la suma de los límites, el límite de un producto es el producto de los límites, etc.

Recordemos que es fácil evaluar los límites de funciones *continuas* de una sola variable. Se realiza sustituyendo en forma directa porque la propiedad que define una función continua es $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Las funciones continuas de dos variables se definen también mediante la propiedad de la sustitución directa.

DEFINICIÓN Sea f una función de dos variables definida en un disco con centro en (a, b) . Entonces f es **continua en (a, b)** si

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

Este significado intuitivo de *continuidad* es que si el punto (x, y) cambia una pequeña cantidad, entonces el valor de $f(x, y)$ cambia una pequeña cantidad. Esto quiere decir que una superficie, que es la gráfica de una función continua, no tiene agujeros ni grietas.

Al aplicar las propiedades de los límites, puede ver que las sumas, diferencias, productos y cocientes de funciones continuas, son continuas en sus dominios. A continuación, se usa este hecho para dar ejemplos de funciones continuas.

Ejemplo 5 Una función polinómica de dos variables, es decir, un polinomio, es una suma de términos de la forma $c x^m y^n$, donde c es una constante y m y n son enteros no negativos. Una función racional es una razón de polinomios. Por ejemplo,

$$f(x, y) = x^4 + 5x^3y^2 + 6xy^4 - 7y + 6$$

es un polinomio, en tanto que

$$g(x, y) = \frac{2xy+1}{x^2+y^2}$$

es una función racional.

A partir de la definición de límite dada, se puede mostrar fácilmente que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} x = a \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} y = b \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} c = c$$

Estos límites prueban que las funciones $f(x, y) = x$, $g(x, y) = y$, y $h(x, y) = c$ son continuas. Puesto que cualquier polinomio se puede conformar con las funciones simples f , g y h mediante multiplicación o adición, se infiere que *todos los polinomios son continuos en $\mathbb{R}^2$* . De igual manera, cualquier función racional es continua en su dominio, porque es un cociente de funciones continuas.

Ejemplo 6 Sea

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Aquí h está definida en $(0, 0)$ pero h es discontinua en el origen porque $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x, y)$ no existe (ver Ejemplo 1 de esta sección).

Ejemplo 7 Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Sabemos que f es continua para $(x, y) \neq (0, 0)$, ya que ahí es igual a la función racional. Asimismo, vimos en el Ejemplo 4 que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0, \text{ que es igual a } f(0, 0)$$

Por lo tanto, f es continua en $(0, 0)$, y así es continua en todo $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 8: Sea

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 17 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

De acuerdo al ejemplo anterior, sabemos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0 \neq 17 = p(0, 0)$$

o sea, p es discontinua en $(0, 0)$. Sin embargo, p es continua en el conjunto $D = \{(x, y) / (x, y) \neq (0, 0)\}$, ya que en este conjunto se comporta como una función racional.

TEOREMA Si f es continua en (a, b) y g es una función de una sola variable que es continua en $f(a, b)$, entonces la función compuesta $h = g \circ f$, definida por $h(x, y) = g(f(x, y))$ es continua en (a, b) .

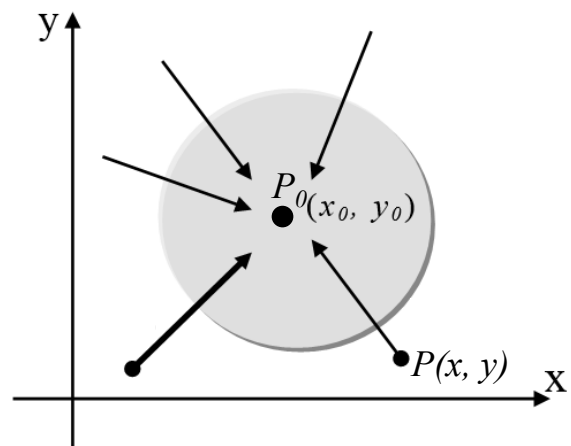
La composición es otra manera de combinar dos funciones continuas para obtener una tercera. La demostración del teorema anterior es similar a la demostración del teorema que garantiza la continuidad de la función compuesta de funciones continuas de una variable.

12.4 Derivadas Direccionales

Dada $y = f(x)$, la razón de cambio de y en x_0 , $f'(x_0)$, se obtiene de considerar el comportamiento del cociente de incrementos, $\Delta y / \Delta x$, cuando $\Delta x \rightarrow 0$ (equivalentemente, cuando $x \rightarrow x_0$). En este caso, x se puede acercar a x_0 desde una *única* dirección (el eje x).

Dada una función de dos variables f , $z = f(x, y)$; la *razón de cambio de z en un punto (x_0, y_0)* también resulta de considerar el comportamiento del cociente de incrementos obtenido para $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$.

En este caso se presenta un problema para la formulación del cociente: que (x, y) se puede acercar a (x_0, y_0) desde infinitas direcciones. Para posibilitar y dar sentido al cálculo, hacemos entonces que $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ según una dirección fija, la cual damos a través de un vector $\bar{u}$. Así, la razón de cambio de z en (x_0, y_0) en la dirección de $\bar{u}$, resulta de considerar el cociente entre el incremento en z y el incremento de x e y en la dirección de $\bar{u}$ ($\Delta z / \Delta xy$). Hablamos entonces de **derivada direccional** de la función f en el punto (x_0, y_0) .



Para hallar esta derivada consideramos la superficie S de ecuación $z = f(x, y)$. Tomamos (x_0, y_0) del dominio de f y obtenemos $Q_0(x_0, y_0, z_0)$ punto de S , $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Luego, dado $\bar{u}_0 = (u_x, u_y)$, trazamos π , plano vertical al plano xy en la dirección de $\bar{u}_0$ que pase por Q_0 , y obtenemos C , curva intersección del plano π con la superficie S ($C = S \cap \pi$).

• Sea $Q(x, y, z)$ otro punto sobre C y $P_0(x_0, y_0)$, $P(x, y)$ las proyecciones de Q_0 y Q sobre el plano xy ; entonces, el vector $\overline{P_0P} = (\Delta x, \Delta y)$ resulta paralelo a $\bar{u}_0$ y para algún real λ

$$\overline{P_0P} = \lambda \bar{u}_0$$

Luego, por igualdad de vectores:

$$\Delta x = \lambda u_x, \quad \Delta y = \lambda u_y$$

$$\text{ó ; } x = x_0 + \lambda u_x, \quad y = y_0 + \lambda u_y.$$

y, para $\Delta x, \Delta y$, incremento de x e y en la dirección de $\bar{u}$ resulta:

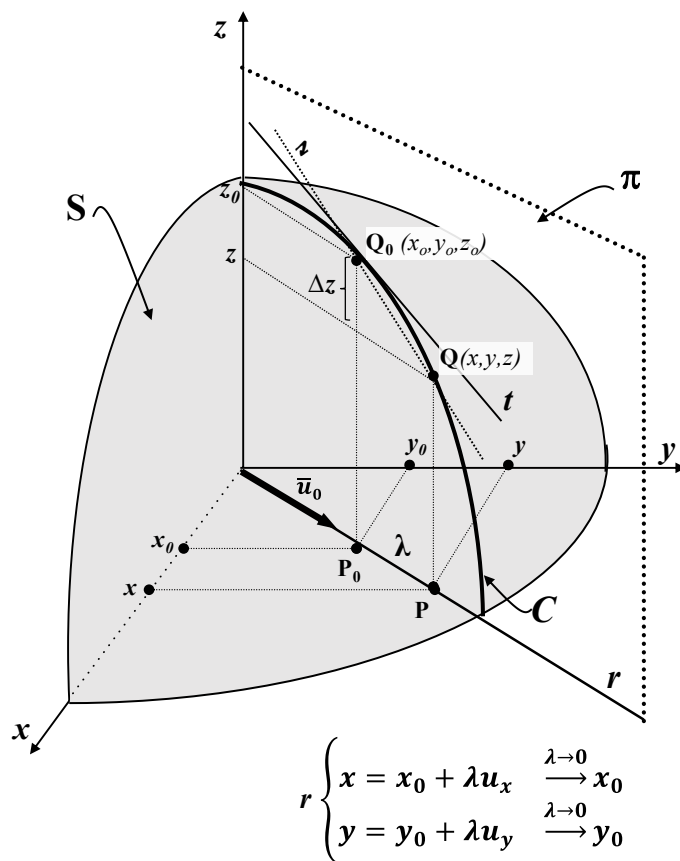
$$\Delta xy = \pm |\overline{P_0P}| = \pm |\lambda \bar{u}_0| = \pm |\lambda| \Rightarrow \Delta xy = \lambda \epsilon \Re$$

finalmente entonces, el cociente de incrementos queda :

$$\frac{\Delta z}{\Delta xy} = \frac{f(P) - f(P_0)}{\lambda} = \frac{z - z_0}{\lambda}$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta xy} = \frac{f(P) - f(P_0)}{\lambda} = \frac{f(x_0 + \lambda \cdot u_x; y_0 + \lambda \cdot u_y) - f(x_0; y_0)}{\lambda}$$

$$\begin{aligned} P(x; y) \in r, \text{ recta paralela a } \bar{u} \text{ que pasa por } P_0(x_0, y_0) \\ \Rightarrow x = x_0 + \lambda u_x, \quad y = y_0 + \lambda u_y. \end{aligned}$$



Si ahora tomamos límite para $\lambda \rightarrow 0$, obtenemos la razón de cambio de z para desplazamientos producidos en la dirección de $\bar{u}$; o sea, **la derivada direccional de f en la dirección de $\bar{u}$** .

DERIVADA DIRECCIONAL

La derivada direccional de f en (x_0, y_0) en la dirección del vector $\bar{u}_0 = (u_x, u_y)$ es:

$$D_{\bar{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda \cdot u_x; y_0 + \lambda \cdot u_y) - f(x_0; y_0)}{\lambda}$$

si este límite existe.

• Interpretación geométrica²:

De la figura de la página anterior, vemos que el plano π que pasa por P_0 y P es perpendicular al plano xy . Entonces la traza de π es r (o sea, $\pi \cap \pi_{xy} = r$). Al intersectar el plano π con la superficie S , obtenemos la curva C ($C = S \cap \pi$).

Como $P_0(x_0, y_0) \in D_f$, entonces $f(x_0, y_0) = z_0$ y el punto $Q_0(x_0, y_0, z_0)$ pertenece tanto al gráfico de f como al plano π , luego $Q_0 \in C$. Con un análisis similar, vemos que también $Q \in C$. Así, la recta secante λ a C que pasa por Q y Q_0 (indicada en líneas de puntos en la figura) está incluida en π .

Entonces, $\frac{\Delta z}{\Delta xy}$ es la pendiente de la recta secante λ . Luego, para $\lambda \rightarrow 0$, $P \rightarrow P_0$ sobre r ,

$Q \rightarrow Q_0$ sobre C y las rectas secantes tienden a t , recta tangente a C en Q_0 . Por lo tanto, t está contenida en π .

Luego, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta xy} = m_t$, pendiente de t . Como por definición $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta xy} = D_{\bar{u}} f(x_0, y_0)$

tenemos entonces que $D_{\bar{u}} f(x_0, y_0)$ es la pendiente de t , recta tangente a C en el punto $Q_0(x_0, y_0, z_0)$.

• Interpretación física:

$D_{\bar{u}} f(x_0, y_0)$ indica la velocidad de variación de z en la dirección de $\bar{u}$; o sea, la variación de z por unidad de desplazamiento en la dirección y sentido de $\bar{u}$, en el punto (x_0, y_0) .

Ejemplo 1

Si T es la temperatura en un punto del cual conocemos su altitud x y su latitud y ; entonces T es función de (x, y) .

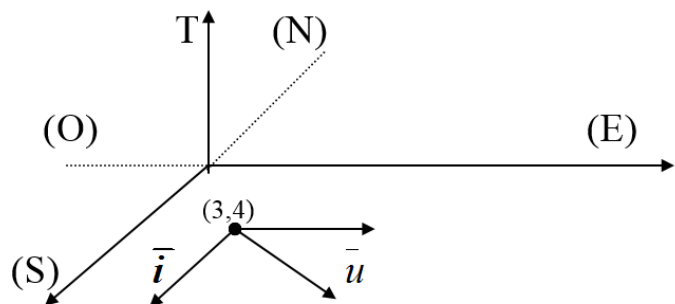
O sea, $T = f(x, y)$. Entonces, dado un punto de coordenadas $(3, 4)$:

- Para $\bar{u} = (1, 1)$;

$D_{\bar{u}} f(3, 4)$ es la razón a la cual varía la temperatura en el punto $(3, 4)$, al desplazarnos en dirección SE.

- Para $\bar{u} = (1, 0) = \bar{i}$

$D_{\bar{i}} f(3, 4)$ es la razón a la cual varía la temperatura en el punto $(3, 4)$, al desplazarnos en dirección Norte-Sur.



NOTA: en el caso particular en que $\bar{u} = \bar{i}$ ó $\bar{u} = \bar{j}$, el desplazamiento se produce en dirección de alguno de los ejes coordenados. En tal caso, a las derivadas direccionales las llamamos **derivadas parciales**.

² En todos los gráficos en el espacio que aparecen desde esta página hasta el final del capítulo, cuando se ubica un punto en el plano $x-y$, se omite la última coordenada de éste. Se hace un abuso de notación para estos casos por ser nula la última coordenada. Pero debe quedar claro que en el espacio los puntos tienen tres coordenadas.

12.4.1 Derivadas Parciales

Son casos particulares de derivadas direccionales, los correspondientes a desplazamientos en la dirección de los ejes coordenados; o sea, para $\bar{u} = \bar{i}$ ó $\bar{u} = \bar{j}$

➤ Derivada parcial de f con respecto a x .

Sea $z = f(x, y)$, $(x_0, y_0) \in Df$ y $\bar{u} = \bar{i}$

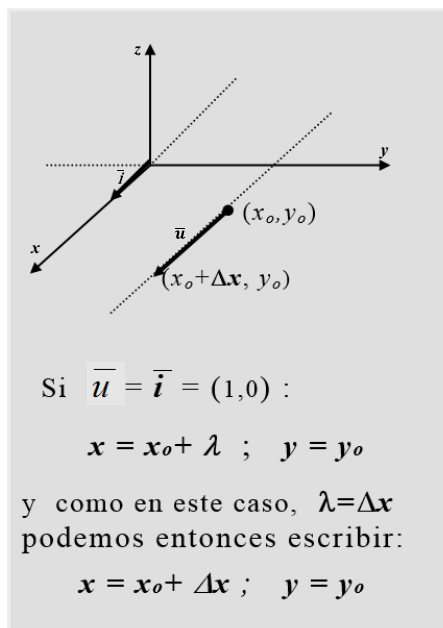
Si $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ según la dirección del eje x ;

o sea, si varía *sólo* x mientras y permanece constante e igual a y_0 ; entonces, a la derivada direccional correspondiente la llamamos '**derivada parcial de f con respecto a x** '.

La indicamos: $f_x(x_0, y_0)$.

La definimos: $f_x(x_0, y_0) = D_{\bar{i}} f(x_0, y_0)$.

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)}{\Delta x}$$



➤ Derivada parcial de f con respecto a y .

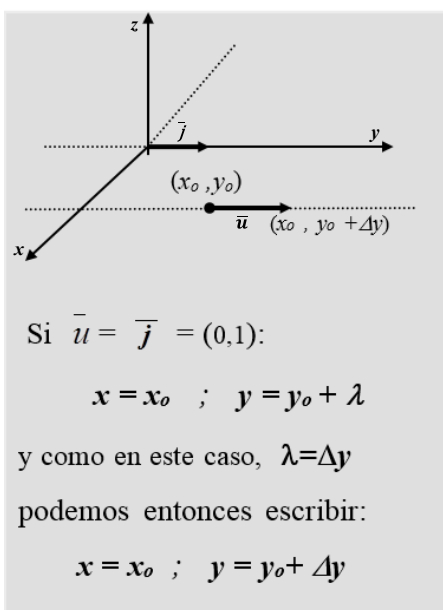
Sea $z = f(x, y)$, $(x_0, y_0) \in Df$ y $\bar{u} = \bar{j}$

Si $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ según la dirección del eje y ; o sea, si varía *sólo* y mientras x permanece constante e igual a x_0 ; entonces, a la derivada direccional correspondiente la llamamos '**derivada parcial de f con respecto a y** '.

La indicamos: $f_y(x_0, y_0)$.

La definimos: $f_y(x_0, y_0) = D_{\bar{j}} f(x_0, y_0)$.

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)}{\Delta y}$$

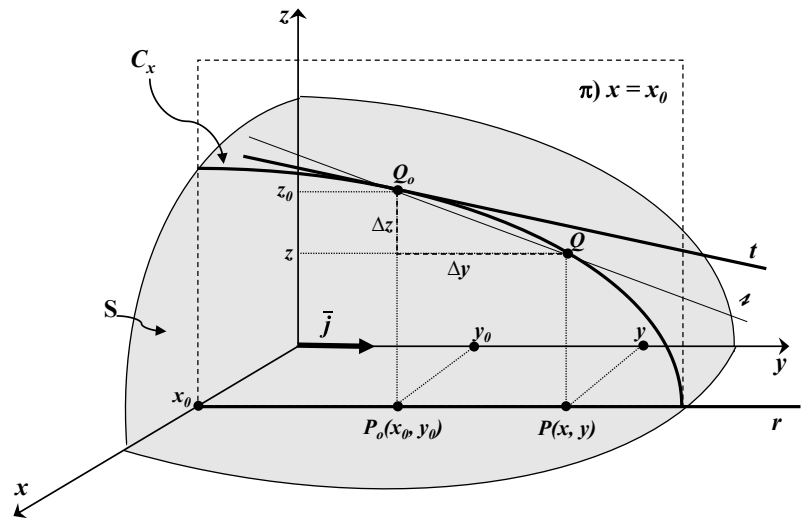


NOTACIONES PARA DERIVADAS PARCIALES: si $z = f(x, y)$, entonces:

- $f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = D_1 f$
- $f_y(x, y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = D_2 f$

- Interpretación geométrica

$f_y(x_0, y_0)$ es la pendiente de t , recta tangente a C_x en $Q_0(x_0, y_0, z_0)$; con C_x (x -curva) intersección de la superficie S con el plano vertical $\pi: x = x_0$. O sea, la curva C_x , y por lo tanto la recta t , están contenida en un plano donde $x = \text{cte}$.



Por definición $f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta y}$ ($\lambda = \Delta y$). Por otro lado, $\frac{\Delta z}{\Delta y} = m_s$ (pendiente de la recta secante λ por que pasa por Q_0 y Q); luego, $f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} m_s = m_t$.

En forma análoga, demostramos que $f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} m_s = m_t$, con t recta tangente a C_y en

$P(x_0, y_0, z_0)$; con C_y (y -curva) intersección de la superficie S con el plano vertical $y = y_0$.

- Interpretación física

$f_y(x_0, y_0)$ es velocidad de variación de z , en la dirección y sentido del eje y , a la altura de $x = x_0$.

$f_x(x_0, y_0)$ es velocidad de variación de z , en la dirección y sentido del eje x , a la altura de $y = y_0$.

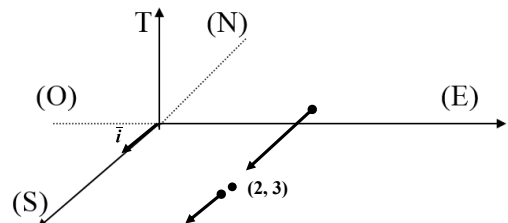
Ejemplo 2

Si T es la temperatura en un punto del cual conocemos su altitud x y su latitud y , en Km; entonces T es función de (x, y) . Sea, $T = f(x, y)$ con $f(x, y) = xy + 2y^2$.

Entonces, dado un punto de coordenadas $(2, 3)$:

- $f_x(2, 3) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2+\Delta x; 3) - f(2; 3)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2+\Delta x) \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 - (2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2)}{\Delta x} = 3$

- $f_x(2, 3) = 3 \Rightarrow$ en el punto $(2, 3)$ la temperatura varía, aproximadamente, a razón de $3^\circ\text{C} / \text{Km}$; al desplazarnos en dirección Norte-Sur.



- $f_y(2, 3) =$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(2; 3+\Delta y) - f(2; 3)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{2 \cdot (3+\Delta y) + 2(3+\Delta y)^2 - (2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2)}{\Delta y} = 14$$

- $f_y(2, 3) = 14 \Rightarrow$ en el punto $(2, 3)$ la temperatura varía, aproximadamente, a razón de $14^\circ\text{C} / \text{Km}$; al desplazarnos en dirección O-E.

Ejemplo 3 El volumen V (en cm^3) de 1 mol de un gas ideal está dado por

$$V = \frac{82,06 T}{P}$$

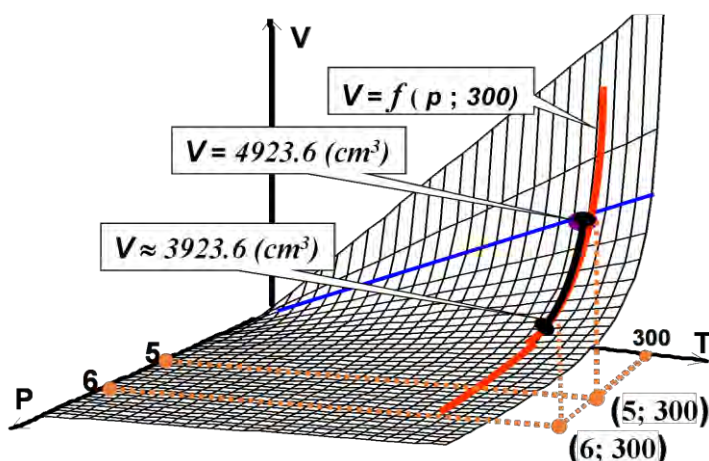
donde P es la presión (en atmósferas) y T es la temperatura absoluta (en grados Kelvin). Determine las razones de cambio del volumen de 1 mol de un gas ideal con respecto a la presión y la temperatura cuando $T = 300$ K y $P = 5$ atmósferas.

- Las derivadas parciales de V con respecto de sus dos variables son

$$\frac{\partial V}{\partial P} = \frac{-82,06 T}{P^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{82,06}{P}$$

Con $T = 300$ y $P = 5$, tenemos los dos valores $\frac{\partial V}{\partial P} = -984,72$ (cm^3/atm) y $\frac{\partial V}{\partial T} = 16,41$ (cm^3/K). Estas derivadas parciales nos permiten estimar el efecto de un cambio en la temperatura o en la presión sobre el volumen V del gas, como sigue (véase asimismo la figura debajo):

Tenemos que $T = 300$ y $P = 5$, de modo que el volumen de gas con el que tratamos es $V = (82,06) (300) / 5 = 4923,6$ (cm^3)



Esperaríamos que un aumento en la presión de 1 atm (manteniendo T constante) disminuiría el volumen del gas en aproximadamente 1 L (1000 cm^3), pues $-984,72 \approx 1000$.

Un aumento en la temperatura de 1 K, con P constante, aumentaría el volumen en aproximadamente 16 cm^3 , pues $16,41 \approx 16$.

Observación:

Según observáramos, $f_x(x_0, y_0)$, se obtiene variando *sólo* x mientras y permanece constante e igual a y_0 . En tal caso, f pasa en verdad a ser función de una sola variable, la x . Luego, podemos definir la siguiente función: $g(x) = f(x, y_0)$ y tenemos que:

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)}{\Delta x} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + \lambda) - g(x_0)}{\lambda} = g'(x_0)$$

Vemos entonces que $f_x(x_0, y_0)$ no es mas que la derivada 'ordinaria' de la función g , función de la sola variable x que obtenemos al fijar la y ; o sea, al hacer $y = \text{cte}$. En consecuencia tenemos la siguiente 'regla':

REGLA PARA CALCULAR DERIVADAS PARCIALES: si $z = f(x, y)$

- Para calcular f_x , considerar ' y ' como una constante y derivar $f(x, y)$ con respecto a x .
- Para calcular f_y , considerar ' x ' como una constante y derivar $f(x, y)$ con respecto a y .

Ejemplo 4 Dada $f(x,y) = xy + 2y^2$, calcular $f_x(2, 3)$ y $f_y(2, 3)$.

- Para calcular $f_x(2, 3)$, primero hallamos $f_x(x, y)$ manteniendo $y = \text{cte}$, y luego calculamos en el punto:

$$f_x(x, y) = y \quad \rightarrow \quad f_x(2, 3) = 3$$

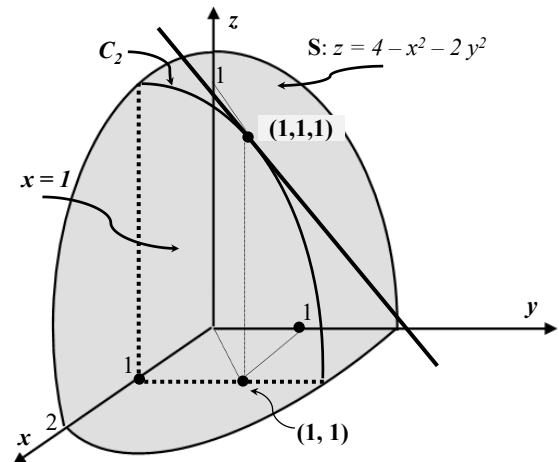
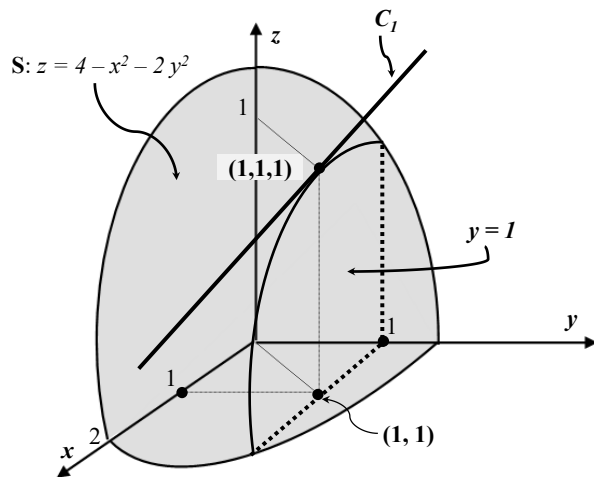
- Para calcular $f_y(2, 3)$, primero hallamos $f_y(x, y)$ manteniendo $x = \text{cte}$, y luego calculamos en el punto:

$$f_y(x, y) = x + 4y \quad \rightarrow \quad f_y(2, 3) = 14.$$

Ejemplo 5 Dada $f(x,y) = 4 - x^2 - 2y^2$, calcular $f_x(1, 1)$ y $f_y(1, 1)$ e interpretar estos números como pendientes.

$$f_x(x, y) = -2x \quad \rightarrow \quad f_x(1, 1) = -2$$

$$f_y(x, y) = -4y \quad \rightarrow \quad f_y(1, 1) = -4$$



La superficie S de f es el paraboloide $z = 4 - x^2 - 2y^2$ que se muestra arriba. Cuando el plano vertical $y = 1$ intersecta a S , se obtiene la parábola C_1 ,

$$C_1 \begin{cases} z = 2 - x^2 \\ y = 1 \end{cases} \quad (\text{ver la parte izquierda del gráfico});$$

mientras que cuando el plano vertical $x = 1$ intersecta a S , se obtiene la parábola C_2 ,

$$C_2 \begin{cases} z = 3 - 2y^2 \\ x = 1 \end{cases} \quad (\text{ver la parte derecha del gráfico});$$

cuya ley es $z = 3 - 2y^2$ (ver la parte izquierda del gráfico)

De acuerdo a la interpretación geométrica que hemos dado, $f_x(1, 1) = -2$ es la pendiente de la recta tangente a la curva C_1 en $(1, 1, 1)$, mientras $f_y(1, 1) = -4$ es la pendiente de la recta tangente a la curva C_2 en $(1, 1, 1)$.

12.4.2 Derivadas de Orden Superior

Si f es una función de dos variables, entonces sus derivadas parciales f_x y f_y son también funciones de dos variables, de modo que podemos considerar sus derivadas parciales $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_y$ y $(f_y)_x$, que se llaman segundas derivadas parciales de f . Si $z = f(x, y)$, usaremos la siguiente notación:

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Por lo tanto, la notación $(f_x)_y$ (o $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$) significa que primero derivamos con respecto a x y luego respecto a y , en tanto que al calcular $(f_y)_x$ el orden se invierte.

Ejemplo 6 Calcule las segundas derivadas parciales de f , cuya ley es $f(x, y) = x^3 + x^2 y^3 - 2 y^2$.

- Primero calculamos las derivadas parciales primeras:

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3 \quad f_y(x, y) = 3x^2 y^2 - 4y$$

Luego,

$$(f_x)_x = \frac{\partial}{\partial x} (3x^2 + 2xy^3) = 6x + y^3$$

$$(f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y} (3x^2 + 2xy^3) = 6xy^2$$

$$(f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x} (3x^2 y^2 - 4y) = 6xy^2$$

$$(f_y)_y = \frac{\partial}{\partial y} (3x^2 y^2 - 4y) = 6x^2 y - 4$$

Observe que $f_{xy} = f_{yx}$ en el ejemplo 5. Esto no es una coincidencia. Resulta que las derivadas parciales mixtas f_{xy} y f_{yx} son iguales para la mayor parte de las funciones que uno encuentra en la práctica. El teorema siguiente, el cual fue descubierto por el matemático francés Alexis Clairaut (1713-1765), presenta las condiciones en las cuales es posible afirmar que $f_{xy} = f_{yx}$.

TEOREMA Sea f continua en un disco D que contiene la punto (a, b) . Si f_{xy} y f_{yx} son continuas en D , entonces

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

Demostración

Para valores pequeños de h , $h \neq 0$, considere la diferencia

$$\Delta(h) = [f(a+h, b+h) - f(a+h, b)] - [f(a, b+h) - f(a, b)]$$

Note que si hace $g(x) = f(x, b+h) - f(x, b)$, entonces

$$\Delta(h) = g(a+h) - g(a)$$

Por el teorema del valor medio, hay un número c entre a y $a+h$ tal que

$$g(a+h) - g(a) = g'(c)h = h[f_x(c, b+h) - f_x(c, b)]$$

Aplicando de nuevo el teorema del valor medio, esta vez a f_x , se obtiene un número d entre b y $b+h$ tal que

$$f_x(c, b+h) - f_x(c, b) = f_{xy}(c, d)h$$

Combinando las dos últimas ecuaciones, se obtiene

$$\Delta(h) = h^2 f_{xy}(c, d)$$

Si $h \rightarrow 0$, entonces $(c, d) \rightarrow (a, b)$, de modo que la continuidad de $f_{xy}(a, b)$ da

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta h}{h^2} = \lim_{(c,d) \rightarrow (a,b)} f_{xy}(c, d) = f_{xy}(a, b)$$

Del mismo modo, empezando por

$$\Delta(h) = [f(a+h, b+h) - f(a, b+h)] - [f(a+h, b) - f(a, b)]$$

y usando el teorema del valor medio dos veces y la continuidad de f_{yx} en (a, b) , se obtiene

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta h}{h^2} = f_{yx}(a, b)$$

Por lo tanto, se deduce que $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$

12.5 Plano Tangente y Aproximación Lineal

Una de las ideas más significativas del cálculo en una variable es que la gráfica de una función escalar derivable, a medida que nos acercamos a un punto determinado de la misma, se vuelve indistinguible desde su tangente y, por lo tanto, podemos “aproximarnos” a ella a través de una función lineal, como se ha discutido oportunamente. Es posible desarrollar ideas similares en tres dimensiones. A medida que nos acercamos a un punto sobre una superficie (gráfica de una función derivable de dos variables), la superficie se parece más y más a un plano, su plano tangente, y es posible entonces aproximarse a la función mediante una función lineal de dos variables.

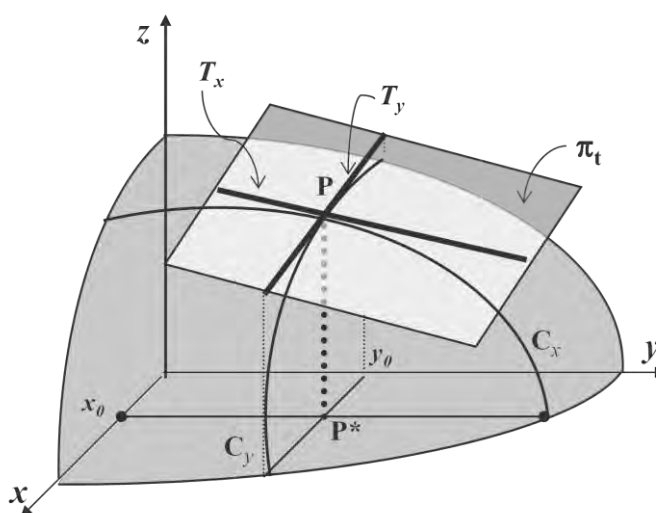
12.5.1 Plano Tangente

Sea S una superficie de ecuación $z=f(x,y)$, donde f tiene derivadas parciales continuas. Sea $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto de S .

Sean C_x y C_y la x -curva y la y -curva determinadas respectivamente por los planos $x = x_0$ e $y = y_0$, al cortar a la superficie S .

Luego P está en ambas curvas y quedan determinadas las rectas T_x y T_y , tangentes en P a C_x y C_y respectivamente.

Las rectas T_x y T_y determinan un único plano. Se puede demostrar que si C es cualquier otra curva que está sobre S y pasa por P , entonces su recta tangente en P se encuentra en el plano determinado por T_x y T_y . Luego este plano es tangente a S en P .



DEFINICIÓN: plano tangente

Dada $z = f(x, y)$ con derivadas primeras continuas en (x_0, y_0) , entonces el **plano tangente** a la superficie de $z = f(x, y)$ en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ es el plano determinado por las rectas T_x y T_y , rectas tangentes a las curvas:

$$C_x: z = f(x_0, y), x = x_0 \quad (x\text{-curva})$$

$$C_y: z = f(x, y_0), y = y_0 \quad (y\text{-curva})$$

Para hallar la ecuación de este plano partimos de la ecuación general de un plano que pasa por (x_0, y_0, z_0) ; así, si $\vec{n} = (a, b, c)$ es un vector normal al plano:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Si $c \neq 0$, dividimos por c y hacemos $-a/c = m$, $-b/c = n$; y la ecuación queda:

$$z - z_0 = m(x - x_0) + n(y - y_0) \quad (\pi_t)$$

Luego, si la ecuación anterior es efectivamente la ecuación del plano tangente a S en P , entonces su intersección con el plano $y = y_0$, debe ser la recta tangente T_y

$$T_y = \pi_t \cap \pi_{y=y_0}: \begin{cases} \mathcal{Z} - z_0 = m (x - x_0) + n (y - y_0) \\ y = y_0 \end{cases} \Rightarrow T_y: \mathcal{Z} - z_0 = m (x - x_0) \quad (\text{en } \pi_{y=y_0})$$

Conclusión: de la ecuación obtenida para T_y , concluimos que m es la pendiente de T_y . Como de la sección anterior sabemos que $f_x(x_0, y_0)$ es la pendiente de T_y , tenemos entonces que: $m = f_x(x_0, y_0)$. Ídem, concluimos que: $n = f_y(x_0, y_0)$.

Ecuación del plano tangente, a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto P (x_0, y_0, z_0) :

$$\mathcal{Z} - z_0 = f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \quad (\pi_t)$$

12.5.2 Incrementos y Diferenciales

En una variable hemos probado que *derivable* en un punto implica *continua* en dicho punto. En el caso de dos variables esto no se verifica; por ejemplo, pueden existir las derivadas parciales en un punto y la función no ser continua en dicho punto.

Ejemplo 1 Consideremos la función f cuyo límite en $(0,0)$ ya vimos en la sección anterior que no existe. Luego f no es continua en $(0,0)$.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2} ; & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

Sin embargo existen las derivadas parciales de f . Efectivamente:

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x; 0) - f(0;0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(0) - (0)}{\Delta x} = 0$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0; \Delta y) - f(0;0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{(0) - (0)}{\Delta y} = 0$$

En una variable también hemos definido el concepto de diferenciable y visto que *derivable* implica *diferenciable*; así, si $y = f(x)$ y existe $f'(x_0)$, entonces $df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx$. En tal caso probamos que el diferencial (df ó dy) permite dar una aproximación del *incremento* ó *cambio real en y*, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. O sea que

$$\Delta y \approx dy, \text{ o equivalentemente; } \Delta y = dy + \varepsilon \Delta x, \text{ donde } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ conforme } \Delta x \rightarrow 0.$$

En el caso de dos variables, $z = f(x, y)$, la existencia de derivadas parciales tampoco garantiza la diferenciable de la función.

Si indicamos con Δz al incremento de f cuando x e y varían en forma simultánea; $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$, veremos que aquello que posibilita la aproximación de Δz por una función lineal es la *diferenciabilidad de f* . Definimos entonces este concepto.

DEFINICIÓN: *función diferenciable en un punto.*

Sea $z = f(x, y)$ con derivadas parciales f_x y f_y , entonces f es diferenciable en (x_0, y_0) si y sólo si existen ε_1 y ε_2 de modo que Δz , incremento de f cuando x e y varían en forma simultánea, puede expresarse como:

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

con ε_1 y $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ conforme $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$

TEOREMA 1: si f es diferenciable en (x_0, y_0) entonces f es continua en (x_0, y_0)

Este teorema se demuestra fácilmente teniendo en cuenta que

f es continua en $(x_0, y_0) \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = 0$; o sea, si $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta z = 0$

Demostración:

ε_1 y $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ conforme $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$

f diferenciable en $(x_0; y_0) \Rightarrow \Delta z = f_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$

Luego:

$$\lim_{(\Delta x; \Delta y) \rightarrow (0; 0)} \Delta z = \lim_{(\Delta x; \Delta y) \rightarrow (0; 0)} (f_x(x_0, y_0) \underbrace{\Delta x}_{0} + f_y(x_0, y_0) \underbrace{\Delta y}_{0} + \underbrace{\varepsilon_1 \Delta x}_{0} + \underbrace{\varepsilon_2 \Delta y}_{0}) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(\Delta x; \Delta y) \rightarrow (0; 0)} \Delta z = 0 \Rightarrow \lim_{(\Delta x; \Delta y) \rightarrow (0; 0)} [f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)] = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(\Delta x; \Delta y) \rightarrow (0; 0)} [f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)] = f(x_0; y_0)$$

$$\Rightarrow f \text{ continua en } (x_0; y_0)$$

q.e.d

Observaciones:

- 1) La existencia de derivadas parciales es condición necesaria para que f sea diferenciable.
- 2) La existencia de derivadas parciales no es condición suficiente para que f sea diferenciable. Efectivamente, si razonamos por el absurdo tenemos que:

Existencia de f_x y $f_y \Rightarrow$ diferenciabilidad de $f \xrightarrow{\text{TEOREMA 1}} \text{continuidad de } f$;
o sea, concluimos que: existencia de f_x y $f_y \Rightarrow$ continuidad de f ;

lo cual es un ABSURDO, pues la existencia de derivadas parciales no implica continuidad como vimos en el ejemplo anterior.

TEOREMA2: (Condición suficiente de Diferenciabilidad)

Si f_x y f_y son continuas en (x_o, y_o) entonces f es diferenciable en (x_o, y_o)
(Sin demostración).

Observación:

Luego, si f_x y f_y son continuas en (x_o, y_o) entonces existen infinitésimos ε_1 y ε_2 (ε_1 y $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ conforme $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$), de modo que:

$$\Delta z = f_x(x_o, y_o) \cdot \Delta x + f_y(x_o, y_o) \cdot \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

Incremento total de z
parte principal del incremento
 $\rightarrow 0$; para $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$

Para incrementos pequeños, el término $(\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y)$ es un valor infinitesimal, luego es prácticamente despreciable frente al otro sumando, el cual se constituye entonces en la parte principal del incremento de z para cambios pequeños en x e y . Damos nombre a la parte principal.

Definición: dz ó df ; *diferencial total de z (variable dependiente).*

Llamamos diferencial total de f a la parte principal del incremento de f :

$$dz = f_x(x_o, y_o) \cdot dx + f_y(x_o, y_o) \cdot dy$$

NOTAS:

- 1) Los símbolos dz ó df se usan indistintamente para representar el *diferencial total de z* .
- 2) Al igual que para una variable, los diferenciales de las variables independientes se definen directamente como el incremento de la variable; o sea, $dx = \Delta x$ y $dy = \Delta y$; y tenemos otra forma de escribir el diferencial total: $dz = f_x(x_o, y_o) \cdot dx + f_y(x_o, y_o) \cdot dy$.
- 3) Con la nueva definición, si f_x y f_y son continuas en (x_o, y_o) entonces existen infinitésimos ε_1 y ε_2 (ε_1 y $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ conforme $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$), de modo que:

$$\Delta z = dz + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

Como $(\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y) \rightarrow 0$ para $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$, podemos entonces despreciar este término y tenemos así que, en las proximidades de (x_o, y_o) : $\Delta z \approx dz$ o sea, que el cambio real en z es aproximadamente igual al diferencial total.

- 4) Si ahora tomamos: $dx = \Delta x = x - x_o$ y $dy = \Delta y = y - y_o$; tenemos otra forma de expresar el *diferencial total de z* :

$$dz = f_x(x_o, y_o) \cdot (x - x_o) + f_y(x_o, y_o) \cdot (y - y_o)$$

Si observamos el segundo término de esta expresión vemos que el mismo coincide con el segundo término en la expresión de la ecuación del plano tangente a la superficie.

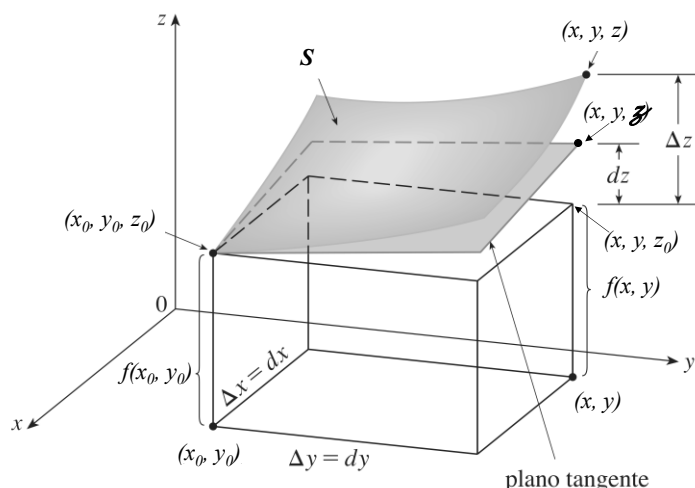
$$(\pi_t) \quad z - z_o = f_x(x_o, y_o) \cdot (x - x_o) + f_y(x_o, y_o) \cdot (y - y_o)$$

Podemos entonces decir que dz representa el cambio de altura en el plano tangente, $(z - z_0)$, cuando pasamos de (x_0, y_0) a $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. El cambio real de altura en z cuando pasamos de (x_0, y_0) a $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ está dado por,

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

y como según vimos, $\Delta z \approx dz$, tenemos entonces que,

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) &\approx dz \\ f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &\approx f(x_0, y_0) + dz \\ f(x, y) &\approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \\ z &\approx z \end{aligned}$$



O sea que para (x, y) cercanos a (x_0, y_0) podemos emplear el plano tangente en $P(x_0, y_0, z_0)$ como una aproximación de la superficie $z = f(x, y)$.

Conclusiones:

1) si f_x y f_y son continuas en (x_0, y_0) , entonces f es diferenciable en (x_0, y_0) y el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en $P(x_0, y_0, z_0)$ es una buena aproximación a la gráfica de f (superficie) cerca de $P(x_0, y_0, z_0)$.

2) si f_x y f_y son continuas en (x_0, y_0) , entonces f es diferenciable en (x_0, y_0) y $f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$.

En otras palabras, la función lineal $z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$ es una buena aproximación de $z = f(x, y)$ cerca de (x_0, y_0) .

Ejemplo 2 Encuentre la ecuación del plano tangente al paraboloide $z = 2x^2 + y^2$, en el punto $(1, 1, z_0)$. Compare Δz y dz si se pasa de $(1, 1)$ a $(1.1, 0.8)$.

SOLUCIÓN

$$\left. \begin{aligned} f_x(x, y) &= 4x \rightarrow f_x(1, 1) = 4 \\ f_y(x, y) &= 2y \rightarrow f_y(1, 1) = 2 \\ z_0 &= f(1, 1) = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} z - 3 &= f_x(1, 1) \cdot (x - 1) + f_y(1, 1) \cdot (y - 1) \\ z &= 3 + 4 \cdot (x - 1) + 2 \cdot (y - 1) \\ z &= 4x + 2y - 3 \quad (\pi_1) \end{aligned}$$

- $\Delta z = f(1.1, 0.8) - f(1, 1) = 3.06 - 3 = 0.06$
- $dz = f_x(1, 1) \cdot (x - 1) + f_y(1, 1) \cdot (y - 1) = 4(1.1 - 1) + 2(0.8 - 1) = 4 \cdot 0.1 + 2(-0.2) = 0.2$

Ejemplo 3

(a) Si $z = f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$, determine el diferencial dz .

(b) Si x cambia de 2 a 2,05 e y pasa de 3 a 2,96; compare los valores de Δz y dz .

SOLUCIÓN

(a) La definición que se ha dado establece que

$$dz = f_x(x_o, y_o).dx + f_y(x_o, y_o).dy = (2x + 3y) dx + (3x - 2y) dy.$$

(b) Al hacer que $x = 2$, $dx = \Delta x = 0,05$, $y = 3$, y $dy = \Delta y = -0,04$, obtenemos

$$dz = [2(2) + 3(3)] 0,05 + [3(2) - 2(3)] (-0,04) = 0,65$$

El incremento z es

$$\Delta z = f(2,05; 2,96) - f(2; 3) = [(2,05)^2 + 3(2,05)(2,96) - (2,96)^2] - [2^2 + 3(2)(3) - 3^2] = 0,6449.$$

Observe que $\Delta z \cong dz$, pero dz es más fácil de calcular.

Ejemplo 4 El radio de la base y la altura de un cono circular recto miden 10 cm y 25 cm, respectivamente, pero hay un error posible en la medición de 0,1 cm como máximo en cada uno. Mediante diferenciales estime el error máximo en el volumen calculado del cono.

SOLUCIÓN

El volumen V de un cono de radio en la base r y altura h es $V = \pi r^2 h / 3$. De modo que el diferencial de V es

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial h} dh = \frac{2\pi r h}{3} dr + \frac{\pi r^2}{3} dh$$

Puesto que cada error es de 0,1 cm como máximo, tenemos que $|\Delta r| \leq 0,1$ y $|\Delta h| \leq 0,1$. Para determinar el error más grande en el volumen, tomamos el error más grande en la medición de r y de h , entonces $dr = 0,1$ y $dh = 0,1$, junto con $r = 10$ y $h = 25$. Esto da

$$dV = \frac{500\pi}{3}(0,1) + \frac{100\pi}{3}(0,1) = 20\pi$$

Por lo tanto, el máximo error cometido al calcular el volumen del cono es de aproximadamente $63 \text{ cm}^3 (\cong 20 \pi \text{ cm}^3)$.

12.6 Cálculo de Derivadas Direccionales: Vector Gradiente

TEOREMA 3:

Si f es diferenciable en (x_o, y_o) entonces f tiene derivada direccional en la dirección de cualquier versor $\bar{u}_o = (u_x; u_y)$ y $D_u f(x_o, y_o) = f_x(x_o, y_o) \cdot u_x + f_y(x_o, y_o) \cdot u_y$

Demostración:

Por definición $D_u f(x_o, y_o) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x_o + \lambda \cdot u_x; y_o + \lambda \cdot u_y) - f(x_o; y_o)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\lambda}$

Si f es diferenciable en (x_o, y_o) entonces existen ε_1 y ε_2 de modo que Δz se puede expresar como:

$$\Delta z = f_x(x_o, y_o) \cdot \Delta x + f_y(x_o, y_o) \cdot \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y, \\ \text{con } \varepsilon_1 \text{ y } \varepsilon_2 \rightarrow 0 \text{ conforme } (\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0).$$

Si $\bar{u}_o = (u_x; u_y)$ es el versor dirección, entonces: $\Delta x = \lambda u_x$, $\Delta y = \lambda u_y$; luego:

$$\Delta z = f_x(x_o, y_o) \cdot \lambda u_x + f_y(x_o, y_o) \cdot \lambda u_y + \varepsilon_1 \lambda u_x + \varepsilon_2 \lambda u_y, \\ \text{con } \varepsilon_1 \text{ y } \varepsilon_2 \rightarrow 0 \text{ conforme } \lambda \rightarrow 0$$

Finalmente reemplazando esta expresión en el límite que da la derivada direccional:

$$D_u f(x_o, y_o) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f_x(x_o; y_o) \cdot \lambda \cdot u_x + f_y(x_o; y_o) \cdot \lambda \cdot u_y + \varepsilon_1 \cdot \lambda u_x + \varepsilon_2 \cdot \lambda u_y}{\lambda}$$

$$D_u f(x_o, y_o) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f_x(x_o; y_o) \cdot u_x + f_y(x_o; y_o) \cdot u_y + \varepsilon_1 \cdot u_x + \varepsilon_2 \cdot u_y}{1}$$

$$D_u f(x_o, y_o) = f_x(x_o, y_o) \cdot u_x + f_y(x_o, y_o) \cdot u_y$$

Luego, hemos demostrado que la derivada direccional existe $\forall \bar{u}_o$ y más aún, hemos encontrado una expresión simple para calcularla conociendo las derivadas parciales.

Observación: el segundo miembro de la fórmula hallada puede pensarse como el producto escalar de dos vectores: $\bar{u}_o$ (versor dato) y el vector $(f_x(x_o, y_o); f_y(x_o, y_o))$.

$$D_u f(x_o, y_o) = (f_x(x_o, y_o); f_y(x_o, y_o)) \cdot (u_x; u_y)$$

El vector $(f_x; f_y)$, se presenta no sólo al calcular derivadas direccionales sino también en muchos otros contextos. Luego, damos un nombre y una notación especial para identificarlo.

DEFINICIÓN: vector gradiente

Si f es una función de dos variables entonces el **gradiente de f** (∇f), es una función definida como

$$\nabla f(x, y) = (f_x(x, y); f_y(x, y))$$

Derivada direccional, su cálculo:

$$D_u f(x_o, y_o) = \nabla f(x_o, y_o) \cdot \bar{u}_o$$

Observación: si el vector $\bar{u}$ forma un ángulo θ con el eje x positivo, entonces sabemos que el versor asociado es $\bar{u}_o = (\cos\theta, \sin\theta)$. Luego en este caso,

$$D_u f(x_o, y_o) = \nabla f(x_o, y_o) \cdot (\cos\theta, \sin\theta)$$

Nótese que en la definición anterior hemos introducido un nuevo tipo de función, que llamamos *campo vectorial*. En general, un campo vectorial es una función cuyo dominio es un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$ (en forma genérica, en $\mathbb{R}^n$ con $n > 1$), y cuya imagen es un conjunto de vectores en $\mathbb{V}^2$ o en $\mathbb{V}^3$ (en forma genérica, en $\mathbb{V}^m$ con $m > 1$).

DEFINICIÓN: Campo Vectorial $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{V}^2$

Sea D un conjunto en $\mathbb{R}^2$. Un **campo vectorial** sobre $\mathbb{R}^2$ es una función $\bar{F}$ que asigna a cada punto (x, y) en D un vector bidimensional $\bar{F}(x, y)$

Obviamente, esta definición puede generalizarse para $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{V}^m$.

Ejemplo 1 Calcular la derivada direccional de $f(x, y) = x^2 y^3 - 4y$ en el punto $(2, -1)$ en la dirección: a) $\bar{u} = (3; 4)$, b) $\bar{u} = \bar{i}$, c) $\bar{u} = \bar{j}$

a) $\bar{u} = (3; 4) \rightarrow D_u f(2, -1) = \nabla f(2, -1) \cdot \bar{u}_o$

- Primero calculamos el vector gradiente en $(2, -1)$:

$$f_x(x, y) = 2x y^3 ; f_y(x, y) = 3x^2 y^2 - 4 \Rightarrow \nabla f(x, y) = (2x y^3, 3x^2 y^2 - 4)$$

$$f_x(2, -1) = -4 ; f_y(2, -1) = 8 \Rightarrow \nabla f(2, -1) = (-4, 8)$$

- Luego comprobamos si $\bar{u}$, vector dirección, es un versor.

Para ello calculamos el módulo de $\bar{u}$; $|\bar{u}| = 5 \neq 1$. Concluimos que $\bar{u}$ no es versor.

Como necesitamos un versor, obtenemos el versor asociado a $\bar{u}$;

$$\bar{u}_o = \frac{1}{|\bar{u}|} \cdot \bar{u} \Rightarrow \bar{u}_o = (3/5; 4/5)$$

- Finalmente, estamos en condiciones de calcular la derivada direccional.

$$D_u f(2, -1) = \nabla f(2, -1) \cdot (3/5; 4/5) = (-4, 8) \cdot (3/5; 4/5) = 4.$$

b) $\bar{u} = \bar{i}$, ya sabemos que en este caso la derivada direccional es la derivada parcial en x . Este resultado, obviamente, también se obtiene de aplicar la fórmula de cálculo. Efectivamente:

$$D_i f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot (1; 0) = (f_x(x, y); f_y(x, y)) \cdot (1; 0) = f_x(x, y)$$

Luego: $D_i f(2, -1) = f_x(2, -1) = -4$

c) $\bar{u} = \bar{j}$. En este caso: $D_j f(2, -1) = f_y(2, -1) = 8$

Observación: dada una función f consideramos todas las posibles derivadas direccionales de f en un punto dado, tenemos todas las razones de cambio de f en todas las direcciones posibles. Luego cabe preguntarse ¿en qué dirección f cambia con mayor velocidad?; ¿cuál es esa máxima velocidad de cambio? El siguiente teorema contesta esto.

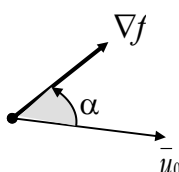
TEOREMA 4:

Sea f una función diferenciable en (x, y) , entonces:

- el valor máximo de la derivada direccional, $D_{\max} f(x, y)$, se produce en la dirección y sentido del vector gradiente y su valor es: $D_{\max} f(x, y) = |\nabla f(x, y)|$.
- el valor mínimo de la derivada direccional, $D_{\min} f(x, y)$, se produce en la dirección y sentido opuesto del vector gradiente y su valor es: $D_{\min} f(x, y) = -|\nabla f(x, y)|$.

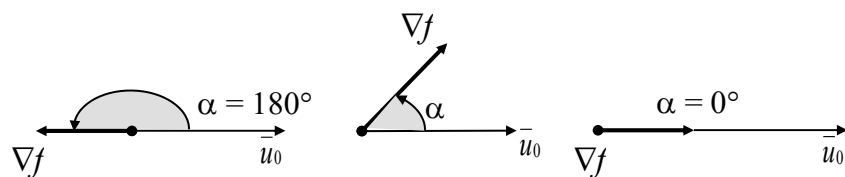
Demostración:

Dado que f es diferenciable, de la fórmula de cálculo para la derivada direccional tenemos que:



$$\begin{aligned}
 D_{\mathbf{u}} f &= \nabla f \cdot \bar{\mathbf{u}}_0 \quad (\text{por definición de producto escalar}) \\
 &= |\nabla f| \cdot |\bar{\mathbf{u}}_0| \cdot \cos \alpha \quad (\text{por ser } \bar{\mathbf{u}}_0 \text{ un versor}) \\
 &= |\nabla f| \cdot \cos \alpha
 \end{aligned}$$

donde α es el ángulo entre ∇f y $\bar{\mathbf{u}}_0$. Este ángulo puede variar de 0° a 180° :



$$\begin{aligned}
 \cos 180^\circ &\leq \cos \alpha \leq \cos 0^\circ \quad (\text{multiplicamos por } |\nabla f|) \\
 |\nabla f| \cdot \cos 180^\circ &\leq |\nabla f| \cdot \cos \alpha \leq |\nabla f| \cdot \cos 0^\circ \quad (\text{calculamos los cosenos}) \\
 -|\nabla f| &\leq |\nabla f| \cdot \cos \alpha \leq |\nabla f| \\
 -|\nabla f| &\leq D_{\mathbf{u}} f \leq |\nabla f| \quad (\text{máx. valor de la derivada direccional})
 \end{aligned}$$

Tenemos entonces que:

- para $\alpha = 0^\circ$ se produce el máximo valor de la derivada direccional, luego:
 - $\alpha = 0^\circ$ implica ∇f y $\bar{\mathbf{u}}_0$ paralelos y de igual sentido,
 - y el máximo valor es $|\nabla f|$; o sea: $D_{\max} f = |\nabla f|$
- para $\alpha = 180^\circ$ se produce el mínimo valor de la derivada direccional, luego:
 - $\alpha = 180^\circ$ implica ∇f y $\bar{\mathbf{u}}_0$ paralelos y de distinto sentido,
 - y el mínimo valor es $-|\nabla f|$; o sea: $D_{\min} f = -|\nabla f|$

Observación vemos entonces una importante aplicación del vector gradiente, este apunta en la dirección en la que f crece más rápido y su módulo, $|\nabla f|$, da la razón máxima de crecimiento posible para f al considerar desplazamientos simultáneos en x e y .

Ejemplo 2 Si la temperatura w (en grados Celsius) en un punto (x, y) de una plancha de metal está dada por $w = f(x, y) = 10 + 0.003x^2 - 0.004y^2$, ¿en qué dirección debe desplazarse una partícula 'buscadora de calor' si inicialmente está en el punto $(40, 30)$? Halle la rapidez con que se mueve en tal dirección.

SOLUCIÓN

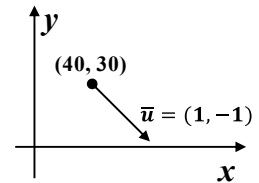
Evidentemente la partícula debe desplazarse en la dirección en que la temperatura aumenta más rápido, o sea en la dirección del vector gradiente:

$$f_x(x, y) = 0,006x; \quad f_y(x, y) = -0,008y \Rightarrow \nabla f(x, y) = (0,006x, -0,008y)$$

$$f_x(40, 30) = 0,24; \quad f_y(40, 30) = -0,24 \Rightarrow \nabla f(40, 30) = (0,24; -0,24) = 0,24(1, -1)$$

En esta dirección la rapidez es máxima; luego:

$$D_{\max} f = |\nabla f(40, 30)| = 0,24\sqrt{2} \approx 0,34 \text{ (}^\circ\text{C por unidad de distancia)}$$



Ejemplo 3

- (a) Si $f(x, y) = x e^y$, calcule la razón de cambio de f en el punto $P(2, 0)$ en la dirección de P a $Q(1/2, 2)$.
 (b) ¿En qué dirección f tiene la máxima razón de cambio? ¿Cuál es la máxima razón de cambio?

SOLUCIÓN

(a) Primero calculamos el vector gradiente:

$$\nabla f(x, y) = (e^y, x e^y)$$

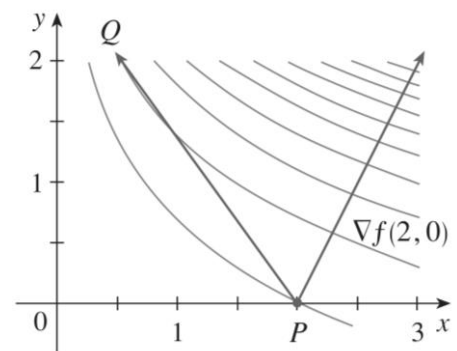
$$\nabla f(2, 0) = (1, 2)$$

El vector unitario en la dirección $\overline{PQ} = (-3/2, 2)$ es $\bar{u} = (-3/5, 4/5)$, de modo que la razón de cambio de f en la dirección de P a Q es

$$D_{\bar{u}} f(2, 0) = \nabla f(2, 0) \cdot (-3/5, 4/5) = 1.$$

(b) De acuerdo con lo anteriormente discutido, f se incrementa de la forma más rápida en la dirección del vector gradiente $\nabla f(2, 0) = (1, 2)$. La razón máxima de cambio es

$$|\nabla f(2, 0)| = |(1, 2)| = \sqrt{5}$$



La situación discutida se muestra en la gráfica a la derecha.

Ejemplo 4 El volumen V (en cm^3) de 1 mol de un gas ideal está dado por: $V = \frac{82.06 \cdot T}{p}$

donde p es la presión (en atmósferas) y T la temperatura (en K).

Hallar la dirección de máxima variación del volumen de 1 mol del gas y la máxima tasa de variación posible, cuando $T = 300 \text{ K}$ y $p = 5 \text{ atmósferas}$.

SOLUCIÓN

Calculamos el gradiente de V en el punto $(p, T) = (5, 300)$:

$$\frac{\partial V}{\partial p}(p, T) = \frac{-82.06 \cdot T}{p^2}; \quad \frac{\partial V}{\partial T}(p, T) = \frac{82.06}{p} \Rightarrow \nabla V(p, T) = \left(\frac{-82.06 \cdot T}{p^2}; \frac{82.06}{p} \right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial p}(5, 300) = -984.72; \quad \frac{\partial V}{\partial T}(5, 300) = 16.41 \Rightarrow \nabla V(5, 300) = (-984.72; 16.41)$$

El volumen inicial de gas es, $V(5, 300) = (82.06; 300) / 5 = 4923.60 \text{ (cm}^3\text{)}$

Que $\frac{\partial V}{\partial p}(5, 300) = -984.72 \text{ (cm}^3\text{/atm)}$ indicaría que un aumento de presión de 1 atmósfera (manteniendo T constante) disminuiría el volumen en *aproximadamente* 1000 cm³ (1 litro); mientras que $\frac{\partial V}{\partial T}(5, 300) = 16.41 \text{ (cm}^3\text{/K)}$ indicaría que un aumento en la temperatura de 1K (manteniendo p constante) aumentaría el volumen en *aproximadamente* 16 cm³.

Vemos así que para obtener mayor variación de volumen conviene variar la presión. Luego la dirección de máximo incremento de V es:

$\nabla V = (-984.72; 16.41) = 16.41 \cdot (-60, 1)$; o equivalentemente, $(-60, 1)$, o sea, disminuyendo p en 60 atm y aumentando T en 1K.

La tasa máxima de incremento es, $|\nabla V(5, 300)| = 16.41 \cdot |(-60, 1)|$

$$= 16.41 \cdot \sqrt{3601} \approx 984.60 \text{ (cm}^3\text{ por variación simultánea de } p \text{ y } T\text{)}.$$

12.7 La Regla de la Cadena

Recordemos que la regla de la cadena para funciones de una sola variable, da la regla para derivar una función compuesta. Si $y = f(x)$ y $x = g(t)$, donde f y g son funciones diferenciables, entonces y es indirectamente una función diferenciable de t y se verifica que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$$

Recuerdos:

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ x &= g(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= f(g(t)) \\ y'(t) &= f'(x) \cdot g'(t) \end{aligned}$$

En el caso de funciones de más de una variable, la regla de la cadena tiene varias versiones, cada una de ellas da una regla para derivar una función compuesta.

La primera versión (**Caso 1**) se relaciona con el caso donde $z = f(x, y)$ y cada variable x e y es a su vez una función de la variable t . Esto significa que f es indirectamente una función de t , y la regla de la cadena da una fórmula para obtener la derivada de f como una función de t . Suponemos que f es diferenciable, esto sucede cuando f_x y f_y son continuas, como hemos visto con anterioridad.

TEOREMA (Caso 1): LA REGLA DE LA CADENA

Sea z una función diferenciable con ley $z=f(x, y)$, donde $x = g(t)$ e $y = h(t)$ son funciones derivables en t . Entonces, z es una función derivable en t y

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Demostración

Un cambio Δt en t provoca cambios Δx en x y Δy en y . Esto, a su vez, produce un cambio Δz en z , y de la definición de diferenciabilidad de f , tenemos

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

donde $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ y $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ conforme $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$. Al dividir ambos miembros de esta última ecuación por Δt , tenemos

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Si ahora hacemos $\Delta t \rightarrow 0$, entonces $\Delta x = g(t+\Delta t) - g(t) \rightarrow 0$, debido a que g es derivable y, por consiguiente, continua. De manera semejante, $\Delta y \rightarrow 0$. Esto a su vez significa que $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ y $\varepsilon_2 \rightarrow 0$, de modo que

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_1 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_2 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + 0 \frac{dx}{dt} + 0 \frac{dy}{dt} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \end{aligned}$$

o equivalentemente,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

(q.e.d)

Ejemplo 1 Si $z = x^2 y + 3x y^4$, donde $x = \sin(2t)$ e $y = \cos t$, calcule dz/dt

SOLUCIÓN

Por la regla de la cadena

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \\ &= (2xy + 3y^4) 2 \cos 2t + (x^2 + 12xy^3) (-\sin t) = \\ &= (2 \sin 2t \cos t + 3 \cos^4 t) 2 \cos 2t + (\sin^2(2t) + 12 \sin(2t) \cos^3 t) (-\sin t) \end{aligned}$$

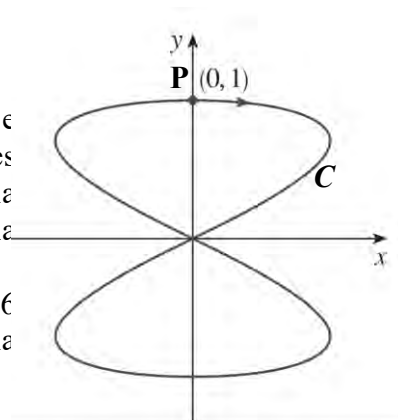
Nota 1: Aunque hemos expresado la respuesta en términos de t , a veces resulta adecuado dar la respuesta en términos de x , y y t . Por ejemplo, si se nos pide encontrar el valor de dz/dt cuando $t = 0$, podemos observar simplemente que $x = 0$ e $y = 1$ donde $t = 0$, por lo tanto

$$dz/dt(0) = (0 + 3) 2 \cos 0 + (0 + 0) (-\sin 0) = 6$$

Nota 2:

Si $T(x, y)$ representa la temperatura en un punto (x, y) y $x = f(t)$ e $y = g(t)$ son las ecuaciones paramétricas de una curva C , entonces la composición de funciones $z = T(f(t), g(t))$ representa la temperatura en los puntos de C , y la derivada dz/dt representa la razón de cambio de la temperatura a lo largo de la curva.

En particular, cuando $t = 0$, el punto (x, y) es $P(0, 1)$ y $dz/dt = 6$ es la razón de cambio de la temperatura en P (véase figura a la derecha).



Ejemplo 2 La presión P , en kilopascales, el volumen V , en litros y la temperatura T , en kelvin, de un mol de un gas ideal, están relacionados mediante la ecuación $PV = 8,31T$. Determine la razón a la cual la presión cambia cuando la temperatura es de 300 K y se incrementa a razón de 0,1 K/s, y el volumen es de 100 L y se incrementa a razón de 0,2 L/s.

SOLUCIÓN

Si t representa el tiempo que transcurre en segundos, entonces en el instante dado $T = 300$; $dT/dt = 0,1$; $V = 100$; $dV/dt = 0,2$. Puesto que $P = 8,31 T/V$ la regla de la cadena establece que

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \frac{\partial P}{\partial T} \frac{dT}{dt} + \frac{\partial P}{\partial V} \frac{dV}{dt} = \frac{8,31}{V} \frac{dT}{dt} - \frac{8,31T}{V^2} \frac{dV}{dt} = \frac{8,31}{100} (0,1) - \frac{8,31(300)}{100^2} (0,2) = \\ &= -0,0415 \end{aligned}$$

La presión decrece a una tasa de aproximadamente 0,042 kPa/s.

Ahora consideremos la situación en donde $z = f(x, y)$ pero x e y son funciones de dos variables s y t : $x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$. Entonces z es indirectamente una función de s y de t y queremos calcular $\partial z / \partial s$ y $\partial z / \partial t$. De acuerdo a lo visto, podemos determinar $\partial z / \partial t$ manteniendo fija a s y calculando la derivada ordinaria de z con respecto a t . Por lo tanto, aplicar el teorema del comienzo de esta sección para obtener

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

Un argumento similar puede plantearse para el cálculo de $\partial z / \partial s$, por lo que hemos probado la siguiente versión de la Regla de la Cadena:

TEOREMA (Caso 2): LA REGLA DE LA CADENA

Sea z una función diferenciable con ley $z=f(x, y)$, donde $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$ son funciones diferenciables en s y t . Entonces, z es una función derivable en t y

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

Ejemplo 3 Si $z = e^x \operatorname{sen} y$, donde $x = st^2$ e $y = s^2t$, calcule $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$.

SOLUCIÓN

Aplicando el Caso 2 de la regla de la cadena, obtenemos

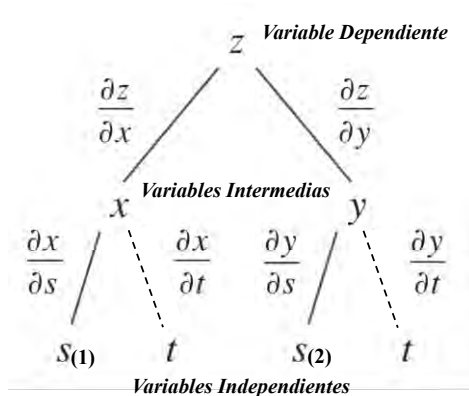
$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = (e^x \operatorname{sen} y)t^2 + (e^x \cos y)2st =$$

$$= t^2 e^{st^2} \operatorname{sen}(s^2t) + 2st e^{st^2} \cos(s^2t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = (e^x \operatorname{sen} y) 2st + (e^x \cos y)s^2 =$$

$$= 2st e^{st^2} \operatorname{sen}(s^2t) + 2s^2 e^{st^2} \cos(s^2t)$$

El caso 2 de la Regla de la Cadena contiene **tres tipos de variables**: s y t son variables **independientes**, x e y se llaman variables **intermedias** y z es la variable **dependiente**. Observe que el teorema (Caso 2) tiene un término para cada variable intermedia, y cada uno de estos términos es similar a la regla de la cadena unidimensional (ver “Recuerdos”).



Para recordar la regla de la cadena, es útil dibujar el **diagrama de árbol** de la figura de la izquierda. Dibujamos ramas desde la variable dependiente z a las variables intermedias x e y para indicar que z es una función de x e y . Luego, dibujamos ramas desde x e y a las variables independientes s y t . En cada rama, escribimos la derivada parcial correspondiente. Para determinar $\partial z/\partial s$ calculamos el producto de las derivadas parciales a lo largo de cada trayectoria que va de z hasta s y luego sumamos los productos:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \underbrace{\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s}}_1 + \underbrace{\frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}}_2$$

De manera semejante, calculamos $\partial z/\partial t$ usando las trayectorias de z a t .

Enseguida consideremos la situación general en la cual una variable dependiente u es una función de n variables intermedias $x_1, x_2, \dots, x_n$, cada una de las cuales, a su vez, es una función de m variables independientes $t_1, t_2, \dots, t_m$. Observe que hay n términos, uno para cada variable intermedia. Podemos proponer entonces una versión general para la Regla de la Cadena.

TEOREMA (Versión General): LA REGLA DE LA CADENA

Sea u una función diferenciable en las n variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ donde cada x_j (con j de 1 a n) es una función diferenciable de las m variables $t_1, t_2, \dots, t_m$. Entonces, u es una función $t_1, t_2, \dots, t_m$ y

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

para cada $i = 1, 2, \dots, m$.

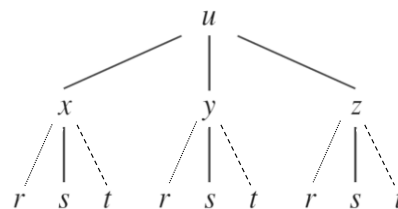
La demostración es similar a la del caso 1.

Ejemplo 4 Si $u = x^4 y + y^2 z^3$, donde $x = rse^t$, $y = rs^2 e^{-t}$ y $z = r^2 s \sen t$, calcule el valor de $\partial u / \partial s$ cuando $r = 2$, $s = 1$ y $t = 0$.

SOLUCIÓN

Con la ayuda del diagrama de la derecha, obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} =$$



$$= (4x^3 y)(re^t) + (x^4 + 2yz^3)(2rse^{-t}) + (3y^2 z^2)(r^2 sent)$$

Cuando $r = 2$, $s = 1$ y $t = 0$, se tiene $x = 2$, $y = 2$ y $z = 0$, de este modo

$$\frac{\partial u}{\partial s} = (64)(2) + (16)(4) + (0)(0) = 192$$

12.7.1 Interpretación geométrica del vector gradiente

La Regla de la Cadena nos permite dar una interpretación geométrica del vector gradiente. Ahora nos ocuparemos de tal asunto.

Sea S una superficie de ecuación $z = f(x, y)$. Si hacemos $z = k$, obtenemos C_k , curva de nivel de f ; de ecuación $f(x, y) = k$. Sea $P^*(x_o, y_o)$ un punto de C_k .

C_k es una *curva plana*, luego existirá alguna función vectorial continua que la describa:

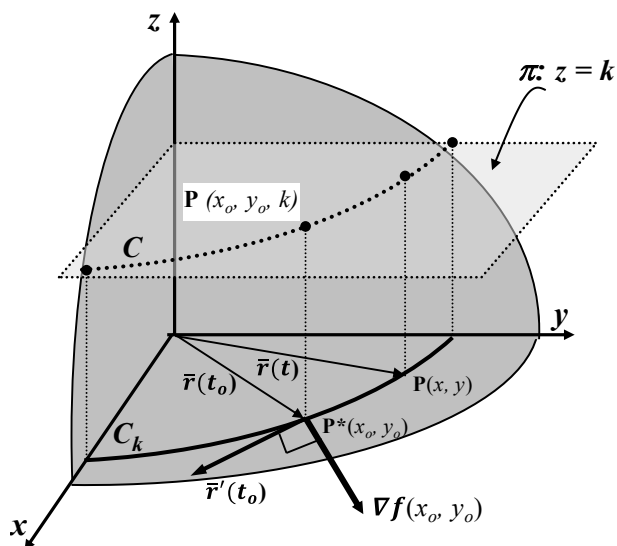
$$\bar{r}(t) = (x(t); y(t)) = \overline{OP}$$

y, en particular, existirá t_o tal que :

$$\bar{r}(t_o) = (x_o; y_o) = \overline{OP^*}$$

Sea $P(x(t), y(t))$ cualquier punto de C_k ; luego, debe satisfacer la ecuación de C_k :

$$f(x(t), y(t)) = k$$



Si x e y son funciones derivables de t y f es diferenciable en (x, y) , entonces podemos utilizar la regla de la cadena para diferenciar ambos miembros y obtenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y'(t) = 0$$

Como $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ y $\vec{r}'(t) = (x'(t); y'(t))$; tenemos entonces que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y'(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot (x'(t); y'(t)) = \nabla f \cdot \vec{r}'(t)$$

En conclusión, tenemos que el vector gradiente calculado en un punto P de la curva, verifica:

$$\nabla f \cdot \vec{r}'(t) = 0$$

En particular cuando $t = t_0$, tenemos que $\vec{r}(t_0) = (x_0; y_0)$, así que:

$$\nabla f(x_0; y_0) \cdot \vec{r}'(t_0) = 0$$

La ecuación obtenida dice que:

"El vector gradiente en $(x_0; y_0)$, $\nabla f(x_0; y_0)$, es perpendicular a $\vec{r}'(t_0)$, vector tangente en $(x_0; y_0)$ a la curva de nivel de f que pasa por $(x_0; y_0)$ ".

O, equivalentemente:

"El vector gradiente en $(x_0; y_0)$, $\nabla f(x_0; y_0)$, es perpendicular a la curva de nivel $f(x, y) = k$, que pasa por $(x_0; y_0)$ ".

12.7.2 Derivada a lo largo de una curva de nivel

Llamamos derivada "*a lo largo de una curva de nivel*" a la "derivada direccional en un punto de la curva de nivel y en la *dirección del vector tangente* a la curva en ese punto".

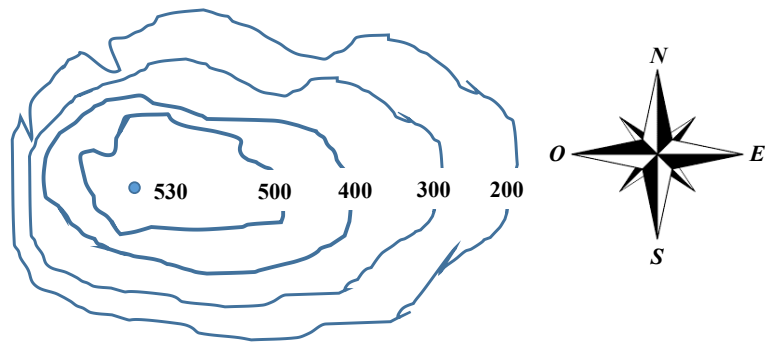
$$D_u f(x_0; y_0) = \nabla f(x_0; y_0) \cdot \vec{u}_0 = \nabla f(x_0; y_0) \cdot \vec{r}'_0(t_0) = 0.$$

$\vec{r}'(t_0) = \vec{u}$

Finalmente tenemos el interesante resultado que la derivada "*a lo largo de una curva de nivel*" es cero.

Ejemplo 5 Si $f(x, y)$ representa la altura de la tierra sobre el nivel del mar en el punto (x, y) , las curvas de nivel se llaman contornos. El dibujo muestra algunos contornos de una montaña de 530 m de altura.

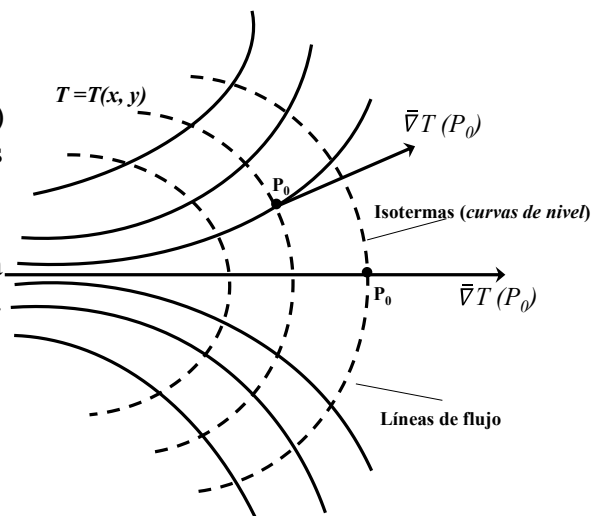
El descenso es más suave hacia el este. Un andinista que camine a lo largo de una curva de nivel no asciende ni desciende. Si desea ascender en la forma más inclinada a partir del punto en que está parado deberá escalar en una dirección que en su mapa sea perpendicular al contorno en el cual se encuentra parado.



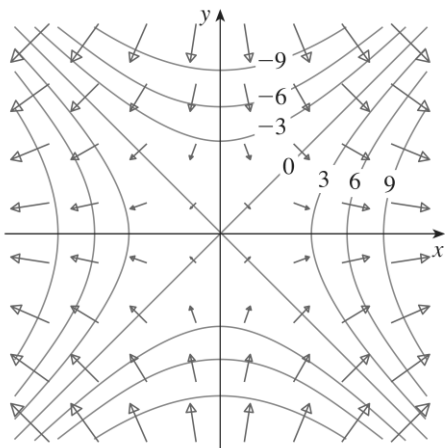
Ejemplo 6

Si $T(x, y)$ representa la temperatura en el punto (x, y) de una lámina plana, la dirección del cambio más rápido de temperatura la da $\vec{\nabla}T(x, y)$.

Es decir, el flujo de calor tiene lugar a lo largo de una familia de curvas perpendiculares a las isotermas. Éstas se denominan **líneas de flujo**.



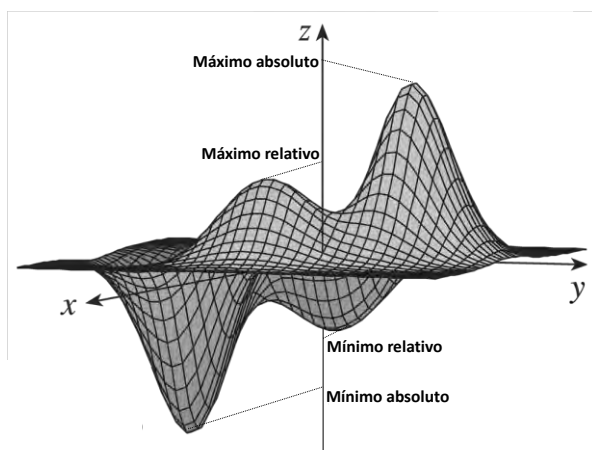
Ejemplo 7



Hoy en día existe una diversidad de programas computacionales para dibujar vectores gradiente. Cada vector gradiente $\vec{\nabla}f(x, y)$ se grafica de tal manera que inicie en el punto (x, y) . En la figura de la izquierda se ilustra una gráfica de éstas (que se denominan *campo del vector gradiente*) hecha en MATLAB para la función $f(x, y) = x^2 - y^2$ superpuesta sobre un mapa de curvas de nivel de f . Como era de esperarse, los vectores gradiente señalan “pendiente arriba” y son perpendiculares a las curvas de nivel.

12.8 Valores mínimos y máximos

Como se estableció en la unidad 4, una de las principales aplicaciones de las derivadas ordinarias es hallar los valores máximos y mínimos. En esta sección veremos cómo usar las derivadas parciales para localizar los máximos y mínimos de funciones de dos variables.



Observe las montañas y los valles en la gráfica de f mostrada en la figura. Hay dos puntos (a, b) donde f tiene máximo, es decir, donde es mayor $f(a, b)$ que los valores cercanos de $f(x, y)$. El mayor de estos valores es al máximo absoluto. Asimismo, f tiene dos mínimos, donde es más pequeña $f(a, b)$ que los valores cercanos. El menor de estos dos valores es el mínimo absoluto.

DEFINICIÓN Una función de dos variables tiene un máximo relativo en (a, b) si $f(x, y) \leq f(a, b)$ cuando (x, y) está cerca de (a, b) [esto quiere decir que $f(x, y) \leq f(a, b)$ para todos los puntos (x, y) en algún disco con centro (a, b)]. El número $f(a, b)$ recibe el nombre de **valor máximo relativo**. Si $f(x, y) \geq f(a, b)$ cuando (x, y) está cerca de (a, b) , entonces $f(a, b)$ es un mínimo relativo en (a, b) y $f(a, b)$ es un **valor mínimo relativo**.

Si las desigualdades de la definición se cumplen para todos los puntos (x, y) en el dominio de f , entonces f tiene un máximo absoluto, o un mínimo absoluto, en (a, b) .

TEOREMA Si f tiene un máximo relativo o un mínimo relativo en (a, b) y las derivadas parciales de primer orden existen allí, entonces $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b) = 0$.

Demostración

Sea $g(x) = f(x, b)$. Si f tiene un máximo relativo o un mínimo relativo en (a, b) , entonces g tiene un máximo relativo o un mínimo relativo en a , entonces $g'(a) = 0$, como hemos visto en el teorema que relaciona la derivada primera con el valor extremo de una función de una variable. Pero $g'(a) = f_x(a, b)$, de modo que $f_x(a, b) = 0$. De igual manera, a partir de $h(y) = f(a, y)$ se obtiene $f_y(a, b) = 0$.

Corolario

• Si hacemos que $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b) = 0$ en la ecuación del plano tangente, se obtiene $z = z_0$. Por lo tanto, la interpretación geométrica del teorema es que si la gráfica de f tiene un plano tangente en un máximo relativo o en un mínimo relativo, entonces el plano tangente debe ser horizontal.

• Un punto (a, b) se llama **punto crítico** (o punto estacionario) de f si $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b) = 0$, o si una de estas derivadas parciales no existe. El teorema dice que si f tiene un máximo relativo o un mínimo relativo en (a, b) , entonces (a, b) es un punto crítico de f . Sin embargo, como en el cálculo de una variable, no todos los puntos críticos generan un máximo o un mínimo. En un punto crítico, una función podría tener un máximo o un mínimo relativo, o ninguno de los dos.

Ejemplo 1 Sea $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$. Entonces,

$$f_x(x, y) = 2x - 2 \quad f_y(x, y) = 2y - 6.$$

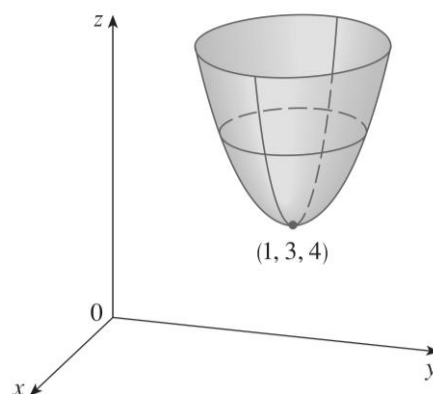
Estas derivadas parciales son iguales a 0 cuando $x = 1$ e $y = 3$, de modo que el único punto crítico es $(1, 3)$.

Si completamos los cuadrados de $f(x, y)$, se encuentra que

$$f(x, y) = 4 + (x-1)^2 + (y-3)^2$$

Puesto que $(x-1)^2 \geq 0$ y $(y-3)^2 \geq 0$, tenemos que $f(x, y) \geq 0$ para todos los valores de x e y . Por lo tanto, $f(1, 3) = 4$ es un mínimo relativo, y, en efecto, es el mínimo absoluto de f .

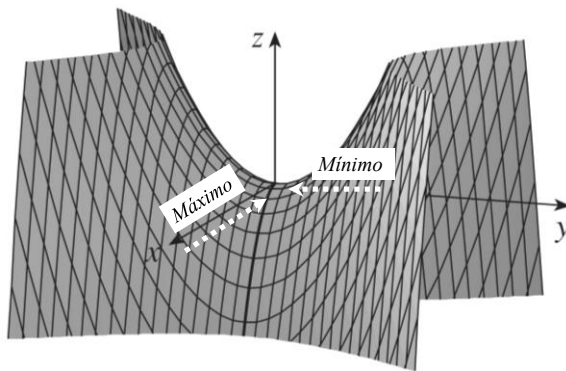
Esto se puede confirmar de manera geométrica a partir de la gráfica de f , la cual es el paraboloide elíptico con vértice $(1, 3, 4)$ que se ilustra en la figura de la derecha.



Ejemplo 2 Calcule los valores extremos de $f(x, y) = y^2 - x^2$.

Puesto que $f_x = 2x$ y $f_y = 2y$, el único punto crítico es $(0, 0)$. Observe que para los puntos en el eje x , $y = 0$, de modo que $f(x, y) = -x^2 < 0$ (si $x \neq 0$). No obstante, para puntos en el eje y , $x = 0$, de modo que $f(x, y) = y^2 > 0$ (si $y \neq 0$). Por lo tanto, todo disco con centro en $(0, 0)$ contiene puntos donde f toma valores positivos, así como puntos donde f toma valores negativos. Por lo tanto, $f(0, 0) = 0$ no puede ser un valor extremo de f , de modo que f no tiene valor extremo.

Este ejemplo ilustra el hecho de que una función puede no tener valor máximo o mínimo en un punto crítico. En la figura de la derecha se ilustra la manera como esto es posible. La gráfica de f es el paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ que tiene un plano tangente horizontal ($z = 0$) en el origen. Puede verse que $f(0, 0) = 0$ es un máximo en la dirección del eje x pero un mínimo es la dirección del eje y . Cerca del origen, la gráfica tiene la forma de una silla de montar y por eso $(0, 0)$ se llama **punto silla** (o de ensilladura) de f .



Tiene que ser posible determinar si la función tiene o no un valor extremo en un punto crítico. El siguiente teorema es análogo al teorema de la segunda derivada para funciones de una variable.

TEOREMA Sean las segundas derivadas parciales de f continuas en un disco de centro (a, b) , $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$, es decir, (a, b) es un punto crítico de f . Sea

$$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

entonces:

- (a) si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0 \Rightarrow f(a, b)$ es un mínimo relativo.
- (b) si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0 \Rightarrow f(a, b)$ es un máximo relativo.
- (c) si $D < 0 \Rightarrow f(a, b)$ no es un máximo ni un mínimo relativo.

Notas:

- En el caso (c), el punto (a, b) se llama **punto silla** de f y la gráfica de f cruza el plano tangente en (a, b) .
- Si $D = 0$, el teorema no proporciona información: f podría tener un máximo relativo o un mínimo relativo en (a, b) , o bien, (a, b) podría ser un punto silla de f .

Ejemplo 3 Determine los extremos relativos y los puntos silla de $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

Primero localizamos los puntos críticos. Para eso, calculamos las derivadas parciales:

$$f_x = 4x^3 - 4y \quad \text{y} \quad f_y = 4y^3 - 4x.$$

Al igualar a estas derivadas parciales con 0, se obtienen las ecuaciones

$$x^3 - y = 0 \quad \text{y} \quad y^3 - x = 0$$

Para resolver estas ecuaciones, sustituimos $y = x^3$ de la primera ecuación en la segunda, y se obtiene:

$$0 = x^9 - x = x(x^8 - 1) = x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$$

de modo que hay tres raíces reales: $x = 0, 1, -1$. Los tres puntos críticos son $(0, 0)$; $(1, 1)$ y $(-1, -1)$.

Luego calculamos las segundas derivadas parciales y $D(x, y)$:

$$f_{xx} = 12x^2, \quad f_{yy} = 12y^2 \quad \text{y} \quad f_{xy} = -4$$

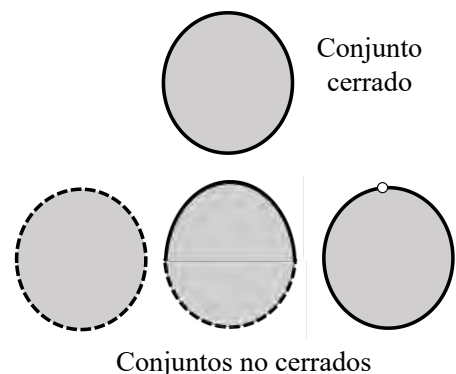
$$D(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2 = 144x^2y^2 - 16$$

Puesto que $D(0, 0) = -16 < 0$ se infiere del caso (c) del teorema de la segunda derivada que el origen es un punto silla; es decir, f no tiene máximo relativo, ni mínimo relativo en $(0, 0)$. Como $D(1, 1) = 128 > 0$ y $f_{xx}(1, 1) = 12 > 0$, se ve que, según el caso (a) del teorema, $f(1, 1) = -1$ es un mínimo relativo. De igual manera, $D(-1, -1) = 128 > 0$ y $f_{xx}(-1, -1) = 12 > 0$, de modo que $f(-1, -1) = 1$ es también un mínimo relativo.

En el caso de una función f de una variable, el teorema de Weierstrass establece que si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f tiene un valor mínimo absoluto y un valor máximo absoluto en ese intervalo. En el caso de las funciones de dos variables ocurre una situación similar. Al igual que un intervalo cerrado contiene sus extremos, un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^2$ es uno que contiene todos los puntos frontera (un punto frontera de D es un punto (a, b) tal que todo disco con centro (a, b) contiene puntos en D y también puntos que no están en D). Por ejemplo, el disco

$$D = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 1\}$$

que consiste en todos los puntos en la circunferencia y dentro del círculo $x^2 + y^2 = 1$, es un conjunto cerrado porque contiene todos sus puntos límite, que son los puntos en la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Pero si aún un punto en la curva límite se omitiera, el conjunto no sería cerrado (véase la figura de la izquierda).



Un **conjunto acotado** en $\mathbb{R}^2$ es uno que está contenido dentro de algún disco. En otras palabras, su extensión es finita. Entonces, en términos de conjuntos cerrados y acotados, puede establecerse la siguiente equivalencia del teorema del valor extremo en dos dimensiones:

TEOREMA [Del **valor extremo** para funciones de dos variables] Si f es continua en un conjunto D cerrado y acotado en $\mathbb{R}^2$, entonces f alcanza un valor máximo absoluto $f(x_1, y_1)$ y un valor mínimo absoluto $f(x_2, y_2)$ en algunos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en D .

Para determinar los valores extremos que garantiza este teorema, notemos que si f tiene un valor extremo en (x_1, y_1) , entonces (x_1, y_1) es un punto crítico de f , o bien, un punto límite o frontera de D . Por lo tanto, obtenemos la siguiente generalización para calcular los extremos absolutos de una función continua f en un conjunto cerrado y acotado D (**método del intervalo cerrado**):

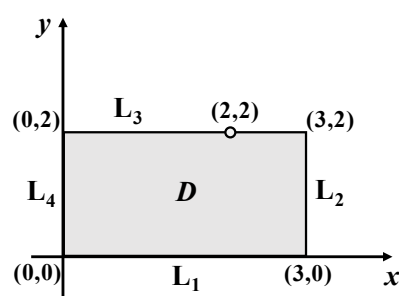
- (a) Calculamos los valores de f en los puntos críticos de f en D .
- (b) Determinamos los valores extremos de f en la frontera de D .
- (c) El más grande de los valores de los pasos (a) y (b) es el valor máximo absoluto; el más pequeño de estos valores es el valor mínimo absoluto.

Ejemplo 4 Determine los extremos absolutos de la función

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y \text{ en el rectángulo } D = \{ (x, y) / 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2 \}$$

Como f es un polinomio, es continuo en el rectángulo cerrado y acotado D , de modo que, de acuerdo al último teorema presentado, tiene que haber tanto un máximo como un mínimo absoluto. Según el paso (a) del **método del intervalo cerrado**, primero calculamos los puntos críticos. Estos puntos ocurren cuando

$$f_x = 2x - 2y = 0 \quad y \quad f_y = -2x + 2 = 0$$



de modo que el único punto crítico es $(1, 1)$, y el valor de f ahí es $f(1, 1) = 1$. De acuerdo al paso (b) del **método del intervalo cerrado**, calculamos los valores de f en la frontera de D (que consiste en los cuatro segmentos rectilíneos L_1 , L_2 , L_3 y L_4 mostrados en la figura de la derecha). En L_1 se tiene $y = 0$ y

$$f(x, 0) = x^2, \quad 0 \leq x \leq 3.$$

Ésta es una función creciente de x , de modo que su valor mínimo es $f(x, 0) = 0$ y su valor máximo es $f(3, 0) = 9$.

En L_2 tiene $x = 3$ y $f(3, y) = 9 - 4y$ ($0 \leq y \leq 2$). Ésta es una función decreciente de y , de modo que su valor máximo es $f(3, 0) = 9$ y su valor mínimo es $f(3, 2) = 1$.

En L_3 tiene $y = 2$ y $f(x, 2) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$, con $0 \leq x \leq 3$. Por simple inspección, vemos que el valor máximo de f es $f(0, 2) = 4$ y su valor mínimo es $f(2, 2) = 0$.

Para finalizar, en L_4 tiene $x = 0$ y $f(0, y) = 2y$ ($0 \leq y \leq 2$) con valor máximo $f(0, 2) = 4$ y valor mínimo $f(0, 0) = 0$. Por lo tanto, en el límite, el valor mínimo de f es 0 y el máximo es 9.

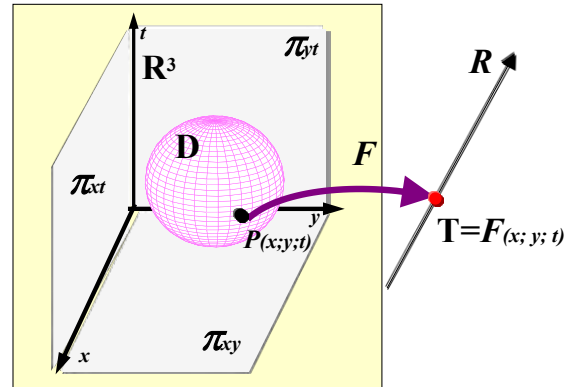
Finalmente, el paso (c) del **método del intervalo cerrado** pide comparar estos valores con el valor $f(1, 1) = 1$, o sea, el valor de f en su punto crítico. Se concluye entonces que el máximo absoluto de f en D es $f(3, 0) = 9$, y el mínimo absoluto es $f(0, 0) = f(2, 2) = 0$.

12.9 Funciones de tres o más variables

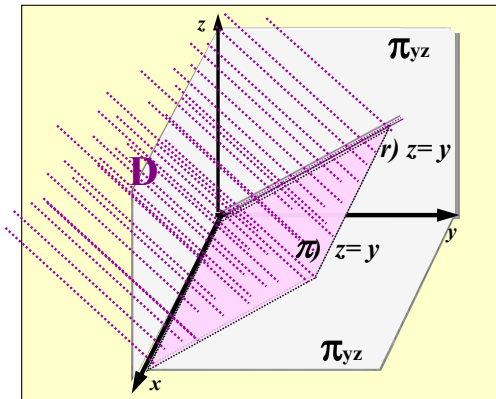
12.9.1 Definición

Una **función de tres variables** F es una regla que asigna a cada terna ordenada (x, y, z) en un dominio $D \subset \mathbb{R}^3$ un único número real $F(x, y, z)$.

Por ejemplo, la temperatura T en un punto P de la superficie de la Tierra depende de su longitud x , y latitud y , así como del tiempo t , de modo que puede escribir $T = F(x, y, t)$.



Ejemplo 1 Encuentre el dominio de F si $F(x, y, z) = \ln(z-y) + xy \operatorname{sen} z$



SOLUCIÓN

La expresión para $F(x, y, z)$ está definida siempre que $z-y > 0$, de modo que el dominio de F es

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z > y\}$$

Éste es el semiespacio que consiste en todos los puntos que se ubican por arriba del plano $z = y$ (véase la figura de la izquierda).

Es muy difícil imaginar una función F de tres variables mediante su gráfica, ya que se localizaría en un espacio de cuatro dimensiones. No obstante, podemos definir el gráfico de F en forma de conjunto. Sea

$$\begin{aligned} F: D &\rightarrow \mathbb{R} / D \subset \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\rightarrow w = F(x, y, z) \end{aligned}$$

entonces

$$\text{graf. } F = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 / (x, y, z) \in D; F(x, y, z) = w\}$$

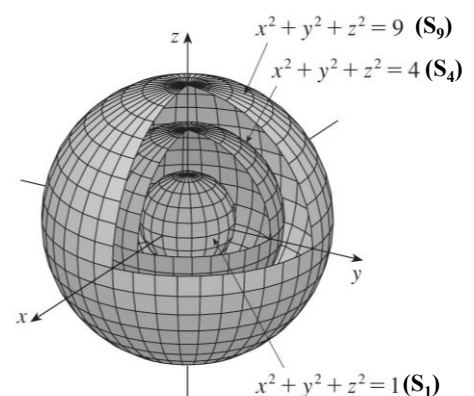
Es posible saber más de F examinando sus **superficies de nivel**, que son las superficies cuyas ecuaciones son $F(x, y, z) = k$, donde k es una constante. Si el punto (x, y, z) se desplaza por una superficie de nivel, el valor de $F(x, y, z)$ es siempre el mismo.

Ejemplo 2 Determine las superficies de nivel de la función $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

SOLUCIÓN Las superficies de nivel son

$$\begin{aligned} S_k &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / F(x, y, z) = k\} = \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = k, k \geq 0\} \end{aligned}$$

El conjunto S_k forma una familia de esferas concéntricas con radio $\sqrt{k}$ (véase la figura de la derecha). Por lo tanto, cuando (x, y, z) varía sobre cualquier esfera con centro en O , el valor de $F(x, y, z)$ es siempre el mismo.



También se pueden considerar funciones de cualquier número de variables. Una función de n variables es una regla que asigna un número $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a una cantidad n -ada $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de números reales. Denotamos como $\mathfrak{R}^n$ al conjunto de las n -adas.

Por ejemplo, si una compañía utiliza n ingredientes distintos al elaborar un producto alimenticio, c_i es el costo por unidad del i -ésimo ingrediente, y si se usan x_i unidades del i -ésimo ingrediente, entonces el costo total C de los ingredientes es una función de las n variables $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$C = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

La función f es una función real cuyo dominio D es un subconjunto de $\mathfrak{R}^n$. Algunas veces usamos una notación vectorial para expresar las funciones de una manera más compacta:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \times \mathbf{x}$$

donde $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ y $\mathbf{c} \times \mathbf{x}$ denota el producto escalar de los vectores $\mathbf{c}$ y $\mathbf{x}$ en V^n .

En vista de la correspondencia uno a uno entre los puntos $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ en $\mathfrak{R}^n$ y sus vectores de posición $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ en V^n , hay tres formas de ver una función f definida en un subconjunto de $\mathfrak{R}^n$:

1. Como una función de n variables reales $x_1, x_2, \dots, x_n$.
2. Como una función de una sola variable puntual $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
3. Como una función de una variable vectorial única $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Los tres puntos de vista son útiles.

12.9.2 Derivada direccional

La definición de derivada direccional dada anteriormente es posible generalizarla para funciones de tres o más variables. Por ejemplo, si F es una función de tres variables x, y y z definida en $D \supset \mathfrak{R}^3$ entonces su derivada direccional en $P_0(x_0, y_0, z_0) \in D$ en la dirección del vector $\bar{u}$ se define como:

$$\mathbf{D}_{\bar{u}} F(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + \lambda \cdot u_x; y_0 + \lambda \cdot u_y; z_0 + \lambda \cdot u_z) - F(x_0; y_0; z_0)}{\lambda}$$

donde $\bar{u}$ es el vector dirección, $\bar{u}_0 = (u_x, u_y, u_z)$ su versor asociado, con $P_0 \in r$, tal que $r = \{(x, y, z) / x = x_0 + \lambda u_x; y = y_0 + \lambda u_y; z = z_0 + \lambda u_z\}$.

Es posible entonces también definir las siguientes **derivadas parciales** en $P_0(x_0, y_0, z_0) \in D$:

$$\bar{u} = \bar{i} \rightarrow F_x = D_{\bar{i}} F(P_0) = \frac{\partial F}{\partial x}(P_0)$$

$$\bar{u} = \bar{j} \rightarrow F_y = D_{\bar{j}} F(P_0) = \frac{\partial F}{\partial y}(P_0)$$

$$\bar{u} = \bar{k} \rightarrow F_z = D_{\bar{k}} F(P_0) = \frac{\partial F}{\partial z}(P_0)$$

Finalmente, podemos definir el vector gradiente asociado a F en $P_0(x_0, y_0, z_0) \in D \supset \mathfrak{R}^3$ como:

$$\nabla \bar{F}(P_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(P_0), \frac{\partial F}{\partial y}(P_0), \frac{\partial F}{\partial z}(P_0) \right)$$

Para el cálculo de la derivada direccional de F en $P_0(x_0, y_0, z_0) \in D \subset \mathbb{R}^3$, también es válido el desarrollo hecho para el caso de los campos escalares de dos variables, o sea,

$$D_u F(P_0) = \nabla \bar{F}(P_0) \bar{u}_0$$

De la misma manera, se define la **derivada direccional máxima** como $|\nabla \bar{F}(P_0) \bar{u}_0|$ y la derivada **direccional mínima** como $-|\nabla \bar{F}(P_0) \bar{u}_0|$.

Es posible dar una interpretación física inmediata de la derivadas direccional de campos escalares de tres o más variables, pero su interpretación geométrica es más limitada. Por ejemplo, si $w = f(x, y, z)$, entonces F_x se puede interpretar como la razón de cambio de w con respecto a x cuando y y z se mantienen constantes. Pero no podemos hacer una interpretación geométrica convencional porque la gráfica de F se encuentra en un espacio de cuatro dimensiones.

Finalmente, generalizamos la notación de las derivadas parciales para campos escalares de n variables. Si u es una función de n variables, $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, su derivada parcial con respecto a la i -ésima variable x_i es

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i} = F_{x_i} = F_i = D_i F$$

12.9.3 Diferenciabilidad y aproximación lineal

Así como para los campos escalares de dos variables, es posible definir los diferenciales, la diferenciabilidad y la aproximación lineal para funciones de tres o más variables.

Una función de tres variables diferenciable se define con una expresión similar a la que hemos dado oportunamente para funciones reales de dos variables. Para tales funciones la aproximación lineal es

$$F(x, y, z) \approx F(a, b, c) + F_x(a, b, c)(x - a) + F_y(a, b, c)(y - b) + F_z(a, b, c)(z - c)$$

y la linealización $L(x, y, z)$ es el segundo miembro de esta expresión.

Si $w = F(x, y, z)$, entonces el **incremento de w** es

$$\Delta w = F(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - F(x, y, z)$$

El diferencial de w , dw , se define en función de los diferenciales de dx , dy y dz de las variables independientes

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz$$

Ejemplo 3 Las dimensiones de una caja rectangular son 75, 60 y 40 cm, y cada medida no difiere 0,2 cm del valor real. Mediante diferenciales estime el error más grande posible cuando el volumen de la caja se calcula a partir de esas medidas.

SOLUCIÓN

Si las dimensiones de la caja son x , y y z , entonces su volumen es $V = x y z$ por lo que

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = yz dx + xz dy + xy dz$$

Se sabe que $|\Delta x| \leq 0,2$; $|\Delta y| \leq 0,2$ y $|\Delta z| \leq 0,2$. Por lo tanto, para determinar el error más grande que cometemos al calcular el volumen, usamos $dx = 0,2$; $dy = 0,2$ y $dz = 0,2$ junto con $x = 75$, $y = 60$ y $z = 40$:

$$dV = 60 \cdot 40 \cdot 0,2 + 75 \cdot 40 \cdot 0,2 + 75 \cdot 60 \cdot 0,2 = 1980$$

Por consiguiente, un error de sólo 0,2 cm al medir cada una de las dimensiones podría llevar a un error de ¡tanto como 1980 cm³ en el volumen calculado! Esto parecería un gran error, pero sólo es alrededor de 1% del volumen de la caja.

12.9.4 Planos tangentes a superficies de nivel

Suponga que S_k es una superficie cuya ecuación es $F(x, y, z) = k$, es decir, es una superficie de nivel de una función F de tres variables, y sea $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto en S_k . Sea C una curva que queda en la superficie S_k y pasa por el punto P_0 . De acuerdo a lo visto en secciones anteriores, la curva C se describe mediante una función vectorial continua $\vec{r}$, con ley $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Sea t_0 el valor del parámetro que corresponde a P_0 ; es decir, $\vec{r}(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$. Puesto que C está contenida en S_k , cualquier punto $(x(t), y(t), z(t))$ debe cumplir con la ecuación de S_k , es decir,

$$F(x(t), y(t), z(t)) = k$$

Si x , y y z son funciones diferenciables de t , y F es también diferenciable, entonces podemos aplicar la regla de la cadena para derivar ambos miembros de la ecuación anterior para obtener:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0$$

Pero como $\nabla \bar{F} = (F_x, F_y, F_z)$ y $\vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$, la ecuación de arriba puede escribirse como el producto escalar:

$$\nabla \bar{F} \cdot \vec{r}'(t) = 0$$

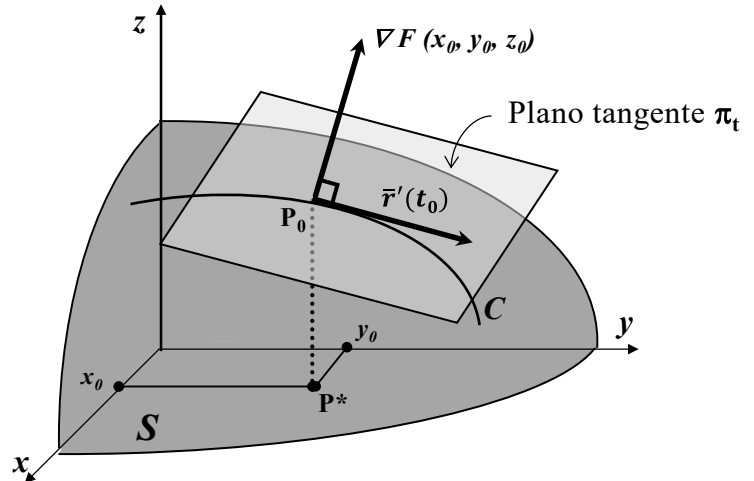
En particular, cuando $t = t_0$ tenemos:

$$\nabla \bar{F}(x_0, y_0, z_0) \cdot \vec{r}'(t_0) = 0$$

Este último resultado establece que el *vector gradiente* en P_0 , $\nabla \bar{F}(P_0)$, es *perpendicular al vector tangente* $\vec{r}'(t_0)$ de cualquier curva C que pasa por P_0 y está contenida en S_k . O sea, decimos que “ $\nabla \bar{F}(P_0)$ es perpendicular a la superficie de nivel S_k en el punto P_0 ” ($\nabla \bar{F}(P_0) \perp S_k$ en P_0).

- **Interpretación geométrica del $\nabla \bar{F}(\mathbf{P}_0)$:** $\nabla \bar{F}(\mathbf{P}_0) \perp S_k$ en $\mathbf{P}_0$.

Si $\nabla \bar{F}(\mathbf{P}_0) \neq \bar{0}$, de acuerdo a lo discutido en otras secciones (ver ecuación general del plano), es fácil definir el **plano tangente π_t a la superficie de nivel $F(x, y, z) = k$** en $\mathbf{P}_0 (x_0, y_0, z_0)$, a partir del vector normal a π_t ($\nabla \bar{F}(\mathbf{P}_0)$) y el punto de paso $\mathbf{P}_0$ (ver la gráfica de la derecha):



$$\pi_t) F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

La recta normal a S_k en $\mathbf{P}_0$ es la recta que pasa por $\mathbf{P}_0$ y es perpendicular al plano tangente. La dirección de la recta normal está definida por lo tanto por el vector gradiente $\nabla \bar{F}(\mathbf{P}_0)$, y, de este modo, sus ecuaciones simétricas son

$$\frac{(x - x_0)}{F_x(P_0)} = \frac{(y - y_0)}{F_y(P_0)} = \frac{(z - z_0)}{F_z(P_0)}$$

En el caso especial donde la ecuación de una superficie S_k es de la forma $z = f(x, y)$; (es decir, S_k es la gráfica de una función f de dos variables), puede volverse a escribir la ecuación como

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$$

y considerar S_k como una superficie de nivel de F con $k = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} F_x(x_0, y_0, z_0) &= f_x(x_0, y_0) \\ F_y(x_0, y_0, z_0) &= f_y(x_0, y_0) \\ F_z(x_0, y_0, z_0) &= -1 \end{aligned}$$

de modo que la ecuación del plano tangente π_t se vuelve

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

que equivale a la ecuación del plano tangente para campos escalares de dos variables. Por lo tanto, la nueva definición más general de un plano tangente es congruente con la definición que se dio para el caso de funciones de dos variables.

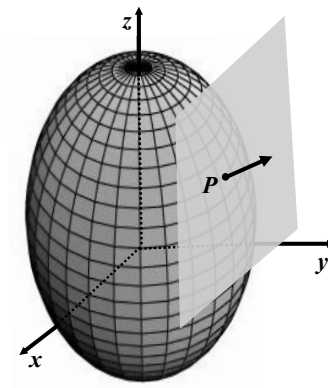
Ejemplo 4 Determine las ecuaciones del plano tangente y la recta normal en el punto $P(-2, 1, 3)$ al elipsoide

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$$

SOLUCIÓN

El elipsoide es la superficie de nivel con $k = 3$ de la función F , con ley

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9}$$



Por lo tanto,

$$F_x(x, y, z) = x/2 \Rightarrow F_x(-2, 1, 3) = -1$$

$$F_y(x, y, z) = 2y \Rightarrow F_y(-2, 1, 3) = 2$$

$$F_z(x, y, z) = 2z/9 \Rightarrow F_z(-2, 1, 3) = 2/3$$

Entonces obtenemos la siguiente ecuación del plano tangente en $P(-2, 1, 3)$

$$-(x + 2) + 2(y - 1) + 2/3(z - 3) = -x + 2y + 2/3z - 6 = 0$$

Finalmente, las ecuaciones simétricas de la recta normal son:

$$\frac{(x + 2)}{-1} = \frac{(y - 1)}{2} = \frac{(z - 3)}{2/3}$$

12.10 Actividades

I - Funciones de varias variables. Curvas y superficies de nivel

1) Unir según corresponda:

e^{xy}	función escalar
$\sqrt{z^2 + 1}$	campo escalar
$(t \sin t, \cos(t+1))$	función vectorial
$(x+y, x-y)$	campo vectorial

2) Determinar y graficar el dominio de definición de cada una de las siguientes funciones. Calcular la imagen, si existe, de los puntos indicados en cada caso.

a) $f(x,y) = \cos(x+y)$	$(0,0) ; (0,\pi)$
b) $f(u,v) = e^{u/v}$	$(0,0) ; (1,5)$
c) $f(x,y) = 1/(x^2+y^2)$	$(1,1) ; (0,1)$
d) $f(a,b) = 1/(1-a^2-b^2)$	$(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$
e) $f(x,y) = \ln [(x+y)/(x-y)]$	$(3,2) ; (e,1)$
f) $f(s,t) = \sqrt{3s^2 + 2t^2 - 6}$	$(0,1) ; (10,0)$
g) $f(x,y) = 1/\ln(x+y)$	$(1,1) ; (0,1)$
h) $f(u,v,t) = \ln(u+v+t-1)$	$(-5,0,0) ; (1,1,1)$

3) Para cada uno de los siguientes pares de leyes, analizar si es posible componerlas. En caso de serlo, hallar de la función compuesta, su dominio y graficarlo.

- a) $f(t) = \ln(t) ; g(x,y) = x^2 + y$.
- b) $F(x) = 1/x ; G(u,v) = u^2 + v^2 - v$.
- c) $F(t) = \sin t \, \bar{i} + \cos t \, \bar{j} ; G(x,y) = x^2 y^2 + xy$.
- d) $R(u,v) = \ln(u^2 + v^2) \bar{i} + e^{u-v} \bar{j} ; g(x,y) = x/y$.

4) En cada uno de los siguientes casos:

- i) Determinar el dominio
- ii) Dar los conjuntos que definen las curvas o superficies de nivel que se piden.
- iii) Graficarlas.

- a) $z = x y$ para $z=1$ y $z=3$
- b) $z = \ln(4 + y/x)$ que pasa por el punto $(1,1)$
- c) $z = e^{xy}$ para $z=e^{-2}$ y $z=1$
- d) $w = x+y+z$ que pasa por el punto $(-1, 0, 1)$; que pasa por el punto $(0, 0, 0)$
- e) $z = 8-x^2-2y$ para $z=0, z=-2$ y $z=2$
- f) $z + x \sin z - y = 0$ para $z=0$ y $z=\pi/2$
- g) $\Omega = e^{-\sqrt{V^2 + R^2 + I^2}}$ para $\Omega=0$ y $\Omega=1/2$

5) Esbozar la gráfica de las siguientes funciones estudiando sus curvas de nivel.

a) $z = 2 - x^2 - y^2$

b) $z = x^2 + y^2$

c) $z = 1/(x^2 + y^2)$

10) El potencial eléctrico en un punto (x, y) del plano es V volts siendo

$$V(x, y) = \frac{4}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$$

Graficar las curvas equipotenciales para $V = 16, 8, 4, 1/2$.

7) La temperatura T en un punto (x, y) de una placa de metal es $T(x, y) = 4x^2 + 2y^2$. Graficar las isotermas para $T = 12, 8, 4, 1, 0$.

8) Representar las curvas correspondientes a $T = \text{cte.}$ y $P = \text{cte.}$ para la ecuación de un gas ideal $V(P, T) = 2T/P$.

II- Derivadas parciales

1)

i) Hallar las derivadas parciales primeras de las siguientes funciones. Analizar previamente el dominio de definición de cada función.

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 \operatorname{sen}(xy)$

b) $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

c) $h(x, y) = x^{y^2}$

d) $t(a, b, c) = \operatorname{sen}(a) e^{(b+2c)}$

e) $k(s, t, v) = (\ln s \ln t)/\ln v$

f) $m(x, y) = \operatorname{tg}(x^2/y)$

g) $p(a, b) = \arctg[(a-b)/(1-ab)]$

ii) Usando las derivadas obtenidas en i), calcular:

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

b) $\frac{\partial k}{\partial v}(-1,1,e)$ y $\frac{\partial k}{\partial t}(e,e,e)$

c) $\frac{\partial p}{\partial a}(0,0)$ y $\frac{\partial p}{\partial b}(1,1)$

2) Calcular las derivadas parciales segundas de las siguientes funciones:

$$a) f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2 y^2$$

$$b) f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$

$$c) f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

3) Verificar que las siguientes funciones satisfacen las ecuaciones diferenciales planteadas.

$$a) f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + \operatorname{arctg}(x/y) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{ecuación de Laplace})$$

$$b) u(t, x) = e^{-t} \operatorname{sen} x \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{ecuación del calor})$$

$$c) u(t, x) = 5 \operatorname{sen} t \cos x \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{ecuación de ondas})$$

4) Sea $H(x, y) = (\cos xy, e^{x^2+2y})$, calcular los vectores: $\frac{\partial H}{\partial x}$ y $\frac{\partial H}{\partial y}$

III- Plano tangente. Recta normal

1) Hallar las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a las siguientes superficies en los puntos dados.

$$a) z = x^2 + y^2 \quad P(3, 4, z_0) \text{ y } Q(x_0, 0, 0)$$

$$b) z = \ln(x/y) \quad P(1, e, z_0)$$

$$c) z = xy - x/y \quad P(3, y_0, 0)$$

$$d) z = 2x^2 - y^2 - 12 \quad P(1, 1, z_0)$$

2) Determinar la ecuación del plano tangente al paraboloide $z = 5x^2 + 3y^2 - 2xy$ en el punto $(1, 4, 45)$.

IV- DIFERENCIAL TOTAL.

1) Hallar los diferenciales totales de las siguientes funciones:

$$a) f(x, y) = y e^{x^2} + \ln y$$

$$b) g(t, w) = \operatorname{arctg}(w/t) - \operatorname{arctg}(t/w)$$

$$c) h(x, y, z) = z^4 + x^2 - yxz$$

$$d) l(T, P) = T \operatorname{sen} P + P \cos T$$

2) Se sabe que el volumen de un cono de altura h y radio r se puede calcular como $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$. Si se comete un error del 0,3% al medir h y del 0,5% al medir r , encontrar (usando diferenciales) el error porcentual que se comete al calcular V .

3) Sea $V(T, P) = 0,84 T/P$.

a) Expresar P en función de T a V constante y graficar para tres valores de V ($V_1 < V_2 < V_3$).

b) Calcular dV .

c) Usando b), dar el valor aproximado del cambio de volumen cuando la temperatura aumenta de 129°K a 130°K y la presión disminuye de 1,2 atm a 1,12 atm.

V – Regla de la cadena

1) Dada la función $\bar{z} = f(x, y)$ y $v(t) = (x(t), y(t))$, llamamos $F(t) = f(v(t))$. Expresar $F'(t)$.

2) Aplicar el ejercicio anterior a los siguientes casos:

$$a) z(x, y) = xy \quad v(t) = (1+t^2, t^3)$$

$$b) z(a, b, c) = e^{a(b-c)} \quad u(t) = (\ln t, t+1, t^2/e)$$

$$c) z(u, v) = \sin u \cos v \quad w(t) = (s, s^2)$$

$$d) z(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} \quad a(t) = (\cos t, \sin t)$$

3) Dadas $f(x, y)$ y $F(u, v) = (x(u, v); y(u, v))$ llamamos $g(u, v) = (f \circ F)(u, v)$. Expresar $\frac{\partial g}{\partial u}$ y $\frac{\partial g}{\partial v}$

4) Calcular $\frac{\partial g}{\partial u}$, $\frac{\partial g}{\partial v}$ y $\frac{\partial g}{\partial w}$ siendo g la composición de:

$$a) f(x, y) = \sin(xy) \quad v(u, v) = (u/v, uv)$$

$$b) f(a, b, c) = a - b^3 + c \quad t(u, v) = (u^2 v, u-v, uv)$$

$$c) f(x, y, z) = x^2 + y^2 + e^z \quad h(u, v, w) = (uvw, uv, vw)$$

VI – Derivada direccional. Vector gradiente

1) Hallar el vector gradiente de cada una de las siguientes funciones en los puntos indicados.

$$a) f(x, y) = 3x^2 - 6y^2 \quad (1, 2) ; (0, 0)$$

$$b) g(x, y, z) = e^{(x^2 + y^2 + z^2)} \quad (1, 1, 1)$$

$$c) H(t, w) = \text{sent.} \cos w \quad (\pi/2, \pi/2), (\pi, 2\pi)$$

$$d) f(a, b, c) = \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \quad (2, 2, 2)$$

$$e) P(x, y) = \ln(x + 1/y) \quad (1, -2)$$

2)

a) Hallar el o los puntos en los cuales el módulo del gradiente de $z = (x^2 + y^2)^{3/2}$ es igual a 2.

b) Hallar el o los puntos en los cuales el gradiente de $z = \arctg(y/x)$ es igual al vector $-j$.

3) Dada una función $f(x, y)$, expresar las siguientes derivadas direccionales en un punto (x_0, y_0) , usando en cada caso: i) el versor; ii) el ángulo.

a) en la dirección del semieje negativo de las abscisas.

b) en la dirección de la bisectriz del primer cuadrante.

c) en la dirección del semieje positivo de las ordenadas.

4) Calcular las derivadas direccionales de cada una de las siguientes funciones en los puntos y direcciones indicados.

$$a) f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad (1, 1, 1) ; \vec{v} = (1, 1, -3)$$

$$b) T(u, v) = \text{sen}(uv) \quad (1, \pi/2) ; \theta = 30^\circ$$

$$c) g(s, t) = s^2 / (s^2 - t^2) \quad (-1, 2) ; \theta = 45^\circ$$

$$d) h(u, v, w) = (\text{senu} + \overline{\cos v})w \quad (0, 0, 1) ; v = (-1, 1, 0)$$

5)

a) Hallar la derivada direccional de la función $f(x, y)$ en el punto $(-1, 2)$ según la dirección de la recta que une dicho punto con el punto $(2, 2)$, siendo $f(x, y) = 3x^3 + 5xy - y^2 - 1$

b) Hallar la derivada direccional de la función $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ en el punto

$$(1, 0, 0), \text{ en la dirección de la recta } \begin{cases} x = 5 - 3t \\ y = 3 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

6) Demostrar que la derivada direccional de $f(x, y) = x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2$ en el punto $(2/3, -4/3)$, en cualquier dirección es igual a cero.

7) Calcular la derivada direccional máxima de cada una de las siguientes funciones en los puntos indicados y determinar en qué dirección se produce.

a) $f(x, y) = 2xy^2 - x/y$ $(0, 1)$

b) $T(u, v) = u \cos v$ (π, π)

c) $g(a, b, c) = a^2 + b^2 - 2c$ $(1, 3, -1)$

d) $f(x, y, z) = x^2 y z^2$ $(2, 1, -1)$

Recordar las siguientes definiciones:

Sea una función $f(x, y, z)$ y una dirección dada por el vector $\mathbf{v}$, se llama:

Coefficiente de variación: $D_{\mathbf{v}}f(x, y, z)$

Razón de cambio: $D_{\mathbf{v}}f(x, y, z)$

Rapidez de cambio: $|D_{\mathbf{v}}f(x, y, z)|$

8) La temperatura en cualquier punto del plano está determinada por $T(x, y) = x \sin(xy)$.

- Encontrar la rapidez de cambio de T en el punto $(1, \pi)$, en la dirección del vector $(1, 2)$.
- Encontrar la velocidad de cambio máxima de T en el punto $(1, \pi)$. Indicar en qué dirección y sentido se produce.

9) La densidad δ en cualquier punto (x, y) de una placa rectangular en el plano xy es:

$$\delta(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 3}}$$

- Encontrar la rapidez de cambio de densidad en el punto $(3, 2)$ en la dirección del vector $\mathbf{v} = (\cos 2\pi/3, \sin 2\pi/3)$.
- Encontrar la dirección, sentido y la magnitud de la máxima rapidez de cambio de δ en $(3, 2)$.

10) El potencial eléctrico V , en volts, en cualquier punto (x, y) en el plano xy es:

$$V(x, y) = e^{-2x} \cos(2y)$$

- Encontrar la rapidez de cambio de potencial en el punto $(0, \pi/4)$ en la dirección del vector $\mathbf{v} = (\cos \pi/6, \sin \pi/6)$.
- Encontrar la dirección y la magnitud de la máxima rapidez de cambio de V en $(0, \pi/4)$.
- Encontrar la dirección y la magnitud de la mínima rapidez de cambio de V en $(0, \pi/4)$.

7) Sabiendo que la superficie S es el gráfico de una cierta función f y que $P \in S$, se pide:

a) indicar dónde están contenidos dominio e imagen de f ; dar las coordenadas de P . Graficar S y P .

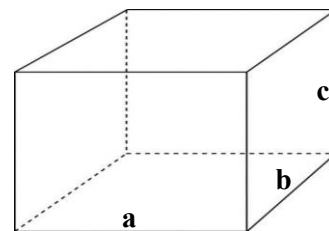
b) dar la ecuación del plano tangente a S , en el punto $P \in S$.

c) Si $V = f(p, T)$ da el volumen de 1 mol de un gas ideal en función de presión (p) y temperatura (T), $\frac{\partial f}{\partial p}(10; 300) = -60$ y $\frac{\partial f}{\partial T}(10; 300) = 20$ y $V_0 = f(10; 300)$.

i) escribir la ecuación del plano tangente S , superficie determinada por f en el punto $P(10; 300; V_0)$.

ii) Si los valores iniciales ($p_0 = 10$ atm.; $T_0 = 300$ K) se aumentan en 5 atm. y 10 K respectivamente, el plano tangente ¿te permite estimar si el volumen aumenta o disminuye? Si tu respuesta es sí, explica porqué e indica qué pasa con el volumen en este caso.

8) Las dimensiones de una caja con tapa, con forma de prisma recto y base rectangular, están creciendo a los ritmos siguientes: la longitud 3 cm/min, el ancho 2 cm/min y la altura $\frac{1}{2}$ cm/min. Halla la razón de cambio del volumen cuando la longitud, el ancho y la altura son, respectivamente, 10, 5 y 4 cm.



9) Suponga que en cierta región del espacio la expresión: $V(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz$ proporciona el potencial eléctrico V .

a) Determine la razón de cambio del potencial en $P(3; 4; 5)$ en dirección del vector $\vec{v} = (1; 1; -1)$

b) ¿En qué dirección cambia con mayor rapidez V en P ? ¿Cuál es la razón máxima de cambio?

10) Para estudiar el poder antiparasitario de un fármaco se ha llenado con medio sólido una placa de petri (cilindro de 10 cm de diámetro y 1 cm de altura). Luego, se colocó en el centro sobre el soporte sólido una gota de fármaco, permitiendo que éste difundiera sobre toda la superficie.

Una vez estabilizada la distribución y considerando un sistema de referencia cartesiano ortogonal con centro de coordenadas en el centro de la placa, se encuentra que en cada punto de la superficie la concentración del fármaco (medida en mg/l) viene dada por la siguiente ley:

$C(x; y) = \frac{4}{1 + x^2 + y^2}$ donde x e y (medidas en cm) son las coordenadas

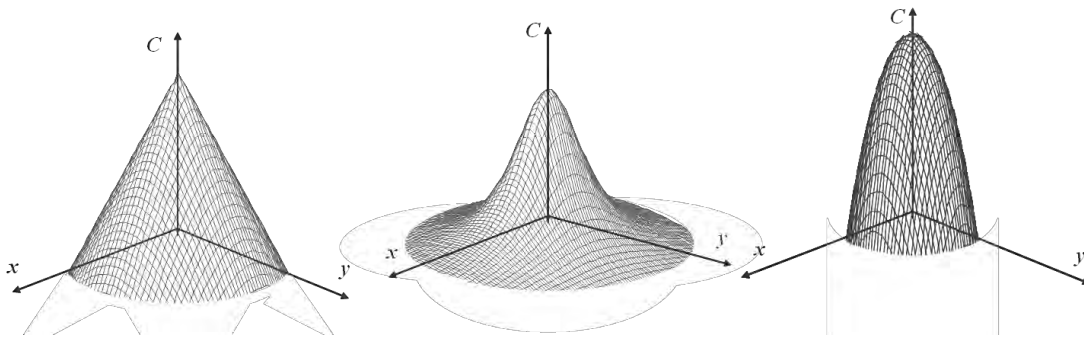
de un punto sobre el soporte sólido.

a) Define y grafica el Dominio de C .

b) Halla y grafica, si es posible, las curvas sobre la superficie sólida donde la concentración del fármaco es 0,4 mg/l; $\frac{4}{3}$ mg/l; 4 mg/l; 8 mg/l. Si no es posible explica por qué.

c) Si el parásito sobre el cual se quiere estudiar el efecto del fármaco tolera hasta una concentración de 0,4 mg/l, indica en el gráfico del ítem a la zona donde éste podría crecer.

- d) Halla la rapidez máxima a la que cambia la concentración del fármaco a partir del punto $A(1; 1)$. Indica en qué dirección y sentido se produce.
- e) Si sobre la superficie del sólido se colocara un parásito en el punto $A(1; 1)$ con capacidad para desplazarse:
- i) Indica hacia dónde comenzaría a desplazarse en busca de supervivencia. Justifica analíticamente la respuesta.
 - ii) y si el mismo comenzara a moverse según $\bar{r}(t) = (1+t; (1+t)^2)$ con $t \in [0; 1]$ medido en segundos, indica la concentración en cada instante en cada punto de su trayectoria. Decide si la siguiente proposición es verdadera o falsa justificando la respuesta: al comenzar a moverse sus órganos sensoriales percibirían que la concentración disminuye a aprox. a razón de **2,6 mg/l.seg.**



- f) Explica un criterio que ayude a definir cuál de las siguientes correspondería a la gráfica de C .

11) Para estudiar la temperatura sobre el piso de una habitación cuadrada de 8 m de lado se considera un sistema de referencia cartesiano ortogonal con centro de coordenadas en el centro de la misma y los ejes paralelos a los lados del piso de la habitación.

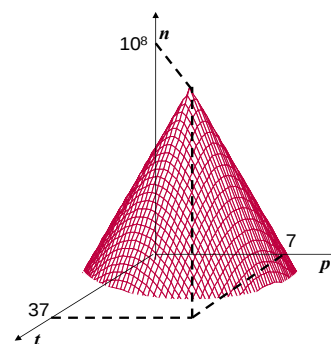
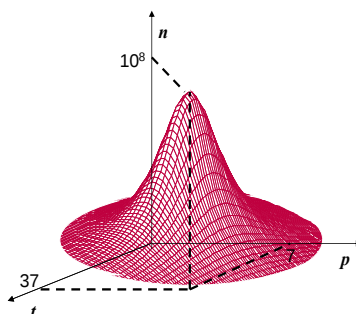
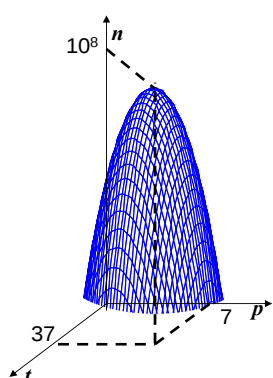
Se obtiene que la ley $T(x; y) = 40 - \frac{x^2}{4} - y^2$ modeliza adecuadamente la temperatura T (en °C) en cada punto $(x; y)$ del piso de la habitación (x e y medidos en m).

- a) Define y grafica el Dominio de T .
- b) Halla, si es posible, y grafica las isotermas para las siguientes temperaturas: **40 °C**; **39 °C**; **36°C**, **24 °C**. Si no es posible explica por qué.
- c) Marca en el gráfico la región donde la temperatura no supera los **36 °C**.
- d) Con lo realizado en los ítems anteriores, efectúa un bosquejo del gráfico de T , indicando en su representación los elementos (puntos, curvas, trazas, etc.) que consideres indispensables para desarrollar la tarea pedida.
- e) Halla $\vec{v}$, vector tangente a la isoterma que pasa por $B(0; 2)$. Graficalo anclado en B .
- f) Verifica que $\vec{v} \perp \nabla T(0, 2)$; enuncia la propiedad que justifica esta afirmación.
- g) Explica por qué las siguientes afirmaciones son verdaderas:
 - i) “si $\vec{w}$ es el vector tangente a una isoterma, en un punto P , entonces la variación de T por unidad de desplazamiento a partir de P y en la dirección de $\vec{w}$ es **CERO**”.
 - ii) “la variación de temperatura por unidad de desplazamiento a partir de B y en dirección de $\vec{u} = \frac{1}{4} \nabla T(B)$ es máxima e igual a **4 (°C /cm)**”.

12) Para optimizar las condiciones de producción de yogur se estudió previamente, en un fermentador bajo distintas condiciones controladas, el crecimiento de una cepa bacteriana del género *Lactobacillus*. El número final de bacterias por mililitro de medio de cultivo varió según las condiciones en que fue realizado el crecimiento.

Luego de realizar muchas pruebas se concluyó que $n(t; p) = 10^8 \cdot 10^{-[(t-37)^2 + (p-7)^2]}$ permite modelizar con un error aceptable la cantidad final de bacterias (n) según haya sido la temperatura (t , en °C) y el ph del medio de cultivo (p). Considerando la situación planteada:

- Define y grafica el Dominio natural de n si se busca que como mínimo el número de bacterias por mililitro al final del experimento sea 10^4 .
- Indica analítica y gráficamente, si existen, las condiciones necesarias bajo las cuales se alcanzaría una cantidad final por mililitro de medio de 10^{10} ; 10^8 ; 10^6 ; 10^4 y 10^2 bacterias.
- Con lo realizado en los ítems anteriores, la información dada y explicitando todo procedimiento que consideres necesario, decide cual de las siguientes superficies podría corresponderse con el gráfico de n , y cuales no, indicando los elementos (puntos, curvas, trazas, etc.) indispensables para desarrollar la tarea pedida.



- Ley físico seleccionado, indica la máxima cantidad posible de bacterias por mililitro al final del experimento y usando la ley determina las condiciones en que esta se alcanza.
- Fundamenta por qué la siguiente proposición es verdadera: " n es acotada".

13) Para una dada reacción química, se sabe que cuando x moles de moléculas de un compuesto A se mezclan con y moles de moléculas de un compuesto B , se desprende cierta cantidad de calor.

A fin de caracterizar mejor la reacción, se lleva a cabo la misma en un recipiente adiabático (que no permite intercambio de calor con el medio exterior). Bajo estas condiciones se determina que la cantidad de calor Q desprendida viene dada por

$$Q(x; y) = \frac{x \cdot y}{x + y + 1}.$$

Considerando la situación planteada:

- Define y grafica el Dominio natural de Q si el recipiente puede contener a lo sumo 10 moles de moléculas totales de reactivos.
- ¿Cuál es la cantidad de calor desprendida cuando 3 moles de A reaccionan con 2 moles de B ? Indica analítica y gráficamente todas las otras posibles combinaciones de cantidades de A y B desprendería la misma cantidad de calor.

c) i) ¿Cuál es el significado de $h(y)=Q(3,y)$? Grafica esta función y describe su comportamiento.

ii) ¿Cuál es el significado de $g(y)=Q(x,2)$? Grafica esta función y describe su comportamiento.

d) Indica analítica y gráficamente, si existen, las condiciones bajo las cuales se liberaría una cantidad de calor de 3 unidades.

e) Con lo realizado en los ítems anteriores, la información dada y explicitando todo procedimiento que consideres necesario, decide cual de las siguientes superficies podría corresponderse con el gráfico de Q , indicando los elementos (puntos, curvas, trazas, etc.) indispensables para desarrollar la tarea pedida.

f) Fundamenta por qué la siguiente proposición es verdadera: “ Q es acotada”.

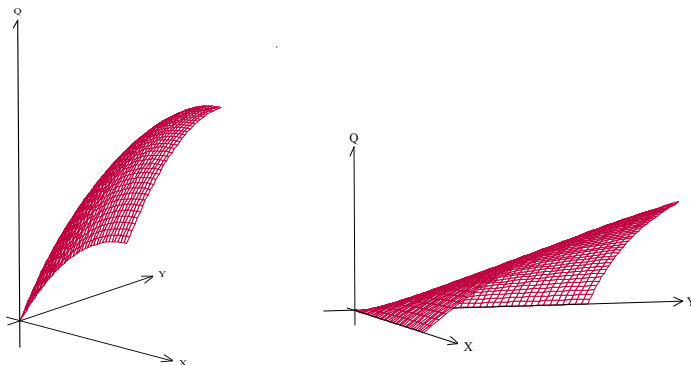
g) Si se sabe que la cantidad de uno de los compuestos es constante en determinado momento:

i) ¿Podés hallar el incremento de calor por mol de B añadido si la cantidad de A es constante?

ii) ¿Podés hallar el incremento de calor por mol de A añadido si la cantidad de B es constante?

Justifica sólo con algun resultado teórico.

h) Encuentra un valor aproximado del calor desprendido cuando mezclamos 3,001 moles de A y 1,999 moles de B . Justifica e interpreta gráficamente el resultado.



14) La reacción de descomposición del agua oxigenada (H_2O_2) en agua (H_2O) y oxígeno molecular (O_2) [$2. H_2O_2 \rightleftharpoons 2. H_2O + O_2$], se ve afectada entre otros factores, por la temperatura de reacción y la presencia de catalizadores (tener en cuenta que los catalizadores son sustancias químicas que aceleran la velocidad de las reacciones químicas pero no sufren modificación química). De estudios empíricos se concluyó que manteniendo constante la cantidad de agua oxigenada, un aumento en la temperatura (T , en $^{\circ}C$) afecta desfavorablemente la producción de oxígeno molecular mientras que un aumento en la concentración de catalizador (C , en micromolar) impacta de manera favorable en el mismo proceso.

a) Considerando lo anteriormente presentado, justificando tu elección, decide cual de las siguientes expresiones podría describir la generación de oxígeno molecular (N , número de moles de O_2) según la temperatura y concentración de catalizador presentes durante el desarrollo de la reacción.

$$N(T;C)=5.\frac{T}{C}$$

$$N(T;C)=20.\frac{C}{T}$$

$$N(T;C)=-10T.C$$

b) Con tu elección del ítem a, partiendo de $25^{\circ}C$ y una concentración de catalizador de 50 micromolar, calcula la máxima rapidez de generación de oxígeno molecular e indica cómo deberían variar estas condiciones de modo de lograrla.

15) Según la siguiente reacción química: $a.A + b.B \rightarrow c.C$, cuando a moles del compuesto **A** se combinan con b moles del compuesto **B**, se generan c moles del compuesto **C**. De análisis empíricos se concluye que $c(a, b) = \ln(a \cdot b + 1)$. Teniendo en cuenta esta información:

- Determina el conjunto donde tiene sentido aplicar la ley. Grafica dicho conjunto.
- Si en un reactor bajo condiciones controladas se mantiene la cantidad de **A** en 1 mol, realiza un gráfico que permita estudiar bajo estas condiciones la producción de **C** según varíe los moles de **B**.
- Calcula la velocidad de producción de **C** bajo las condiciones presentadas en el ítem anterior si se inicia la reacción con 2 moles de **B**. Interpreta tu respuesta en términos del problema.

12.12 Miscelánea de problemas (II)

1) Unir según corresponda:

- | | |
|-------------------------------------|------------------------------|
| a) $f(x; y) = 4 - (x^2 + y^2)$ | i) <i>Campo Escalar</i> |
| b) $g(z) = z - 4$ | ii) <i>Función Escalar</i> |
| c) $r(t) = (2 \cos t; \sin t)$ | iii) <i>Campo Vectorial</i> |
| d) $(u; v) = (u + v; u - v)$ | iv) <i>Función Vectorial</i> |
| e) $h(x; y; z) = 9x^2 + 4y^2 + z^2$ | |
| f) $(x; y; z) = (xy; xz; 2yz)$ | |
| g) $s(t) = (2 \cos t; 3 \sin t; 2)$ | |

2) Para las funciones del ítem (1), analizar cuales de las composiciones que se indican son posibles; es decir qué tipo de función son (i, ii, iii ó iv), cuál es su dominio y cuál su codominio.

- | | |
|----------------|----------------|
| a) $g \circ f$ | f) $h \circ s$ |
| b) $r \circ g$ | g) $f \circ$ |
| c) $g \circ r$ | h) or |
| d) os | i) $s \circ g$ |
| e) so | |

3) Para las funciones del ítem (1) indicar verdadero ó falso, justificar.

- $\text{graf}(g \circ f) = \text{"Paraboloide Invertido"}$.
- $r \circ g(z)$ es la ecuación vectorial de una curva plana.
- $os(t)$ es la ecuación vectorial de una curva en el espacio
- Si Γ es la curva cuya ecuación vectorial es $s(t)$ entonces Γ está contenida en una superficie de nivel correspondiente a la función h .

Nota: Superficies (distintas formas de dar S)

- $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} / z = f(x; y) \Rightarrow \text{graf}(f) = S$
 $P_0(x_0; y_0) \in D_f; Q_0(x_0; y_0; z_0) \in S \Rightarrow z_0 = f(x_0; y_0) = f(P_0)$
- $z - z_0 = f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0)$
- $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} / w = f(x; y; z); P_0(x_0; y_0; z_0) \in D_f$
 $S_k = \{P(x; y; z) / f(P)\} \rightarrow \text{Superficie de Nivel de } F$
 $\nabla F(P_0) \perp \Pi_{t(P_0)} \rightarrow \Pi_t) F_x(P_0)(x - x_0) + F_y(P_0)(y - y_0) + F_z(P_0)(z - z_0) = 0$

4) Sean $S: x^2+y^2+z=1$ y $C: r(t)=(\sin t; \sin t; \cos 2t)$, además $A \in C/\overline{OA} = r(0)$ y $B \in C/\overline{OB} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \dots\right)$

- a) Mostrar que $A \in S$, $B \in S$ y que C está contenida en S .
- b) Hallar Π , plano tangente a C en A , mostrar que $T \subset \Pi$.
- c) Hallar T , recta tangente a C en A , mostrar que $T \subset \Pi$.
- d) Graficar S , C , Π y T en un mismo sistema (1^{er} octante).

Ayuda: $\cos(2t)=1-\sin^2(t)$ y $C=S \cap \Pi$

e) Repetir (b), (c) y (d) para el punto B. Sugerencia: Trabajar con $\sqrt{2}$

Derivadas Parciales – Regla de la Cadena – Derivadas Direccionales

1) Dada $T(x,y)=x^2+cxy^2$

- a) Calcular, por definición $\frac{\partial T}{\partial x}$ en $P(2;1)$.
- b) Verificar el resultado de (a) por cálculo directo.
- c) Repetir (a) y (b) pero para $\frac{\partial T}{\partial y}$.
- d) Hallar $c/\nabla T(P) \parallel \vec{i}$.

2) Dada $T(x,y)=x^3+cxy^2$, hallar el valor de c tal que $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$

3) Dada la ecuación de van der Waals $\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$ (a , b , R ctes.), calcular: $\frac{\partial P}{\partial V}$ y $\frac{\partial P}{\partial T}$.

4) Comprobar que $f(x,y) = e^{\frac{-\pi^2}{4}y} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ satisface la ecuación del calor: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

5) Dada $w = \arctg\left(\frac{x}{y^2+z^2}\right)$, hallar:

- a) La derivada direccional de w en el punto $A(1;1;1)$ y en la dirección del vector $\overline{AB}$ donde $B(2;3;3)$
- b) Hallar el valor de la $D_{\max}(A)$

6) Dada la función definida por $f(x,y) = \log(x^2 + y^2) + \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$ mostrar que $\forall (x,y)/x \neq 0$ verifica que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

7) Para $f(x,y) = \frac{1}{x^2-y^2}$ indicar verdadero o falso y justificar (calcular f_{xy} y f_{yx}):

- a) $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) \quad \forall (x,y) \in E(P_0;1) \quad P_0(1;3)$
- b) $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) \quad \forall (x,y) \in E(P_0;2) \quad P_0(1;3)$

8) Hallar la derivada de $f(x,y,z)=x+y+z^2$ en la dirección de la recta tangente a la curva $C: r(t)=(t+1;t^2;t^3+2)$ en $P(2;1;3)$.

Regla de la cadena:**Caso 1:**

$$z=f(x;y)$$

$$r(t)=(x(t);y(t))$$

$$g(t)=f \circ r(t)$$

$$r(t_0)=(x_0;y_0)$$

$$g(t_0)=f(r(t_0))=f(x_0;y_0)=z_0$$

$$\text{I) } g'(t_0)=f_x(r(t_0)) \cdot x'(t_0)+f_y(r(t_0)) \cdot y'(t_0) \quad \text{ó} \quad g'(t_0)=\nabla f(r(t_0)) \cdot r'(t_0)$$

Caso 2:

$$z=f(x;y)$$

$$r(u;v)=(x(u;v);y(u;v))$$

$$h(u;v)=f \circ r(u;v)$$

$$r(u_0;v_0)=(x_0;y_0)$$

$$h(u_0;v_0)=f(r(u_0;v_0))=f(x_0;y_0)=z_0$$

$$\therefore g'(t_0)=f_x(r(t_0)) \cdot x'(t_0)+f_y(r(t_0)) \cdot y'(t_0) \quad \text{ó} \quad g'(t_0)=\nabla f(r(t_0)) \cdot r'(t_0)$$

$$\text{I) } \frac{\partial h}{\partial u}(u_0;v_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0) \frac{\partial x}{\partial u}(u_0;v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0) \frac{\partial y}{\partial u}(u_0;v_0)$$

$$\text{II) } \frac{\partial h}{\partial v}(u_0;v_0) = \dots\dots\dots$$

9)

a) Hallar $g'(t_0)$ para $f(x;y)=xy$, $r(t)=(t+1;t^2)$ y $t_0=1$.b) Verificar el resultado hallando una "fórmula" para $g(t)=f \circ r(t)$ y luego derivando la misma. Con el mismo método hallar $g''(1)$.c) Verificar que la fórmula de cálculo de g'' es:

$$g''(t_0)=f_{xx}(x_0;y_0)(x'(t_0))^2+2f_{xy}(x_0;y_0)x'(t_0)y'(t_0)+f_{yy}(x_0;y_0)(y'(t_0))^2+\nabla f(x_0;y_0) \cdot r''(t_0)$$

Calcular $g''(1)$ con esta fórmula.

10)

a) Hallar $\frac{\partial h}{\partial u}(u_0;v_0)$ para $f(x;y)=x^2+y^2$, $r(u;v)=(u \cos(v);u \sin(v))$ y $(u_0;v_0)=(\sqrt{2};\pi/4)$.b) Verificar el resultado hallando una "fórmula" para $h(u;v)=f \circ r(u;v)$ y luego derivando la misma respecto a u .c) Repetir (a) y (b) para $\frac{\partial h}{\partial v}(u_0;v_0)$.

11) El campo escalar con ley $f(x;y)$ tiene derivadas continuas en un entorno de $P_0(1;4)$, además $f_x(P_0)=3$ y $f_y(P_0)=0$. Si $h(u;v)=f \circ r(u;v)$ y $r(u;v)=(v^3;u^2)$, calcular la derivada direccional máxima de h en $Q_0(u_0;v_0) / r(Q_0)=P_0$.

12) Si $f(x;y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\vec{r}(\theta) = (2\cos\theta; 2\sin\theta)$ y $g=f \circ r$, se pide:

a) Calcular $g'(\theta)$ aplicando la regla de la cadena.b) Verificar el resultado expresando g como función de la única variable θ , luego derivar.c) Si C es la curva asociada a la función vectorial r : ¿Qué puedo decir de C teniendo en cuenta el resultado anterior?d) Grafique: $S=\text{graf}(f)$, C y $C^*=S \cap \Pi(z=2)$.

Diagrama de árbol para la regla de la cadena

Caso 2:

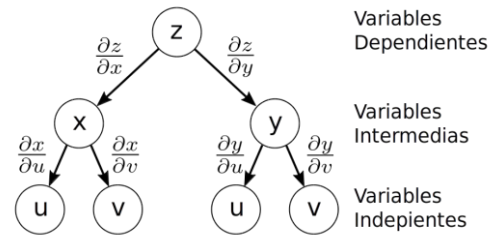
$$z=f(x;y)$$

$$r(u;v)=(x(u;v);y(u;v))$$

$$z=for(u;v)=f(r(u;v))$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} \right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \right)$$

2 sumando $\rightarrow$ 2 variables intermedias



Caso general:

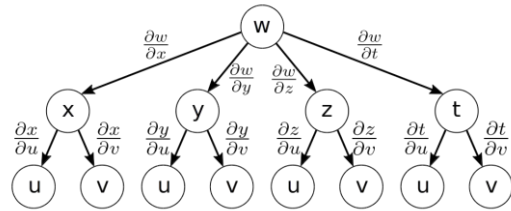
$$w=f(x;y;z;t)$$

$$r(u;v)=(x(u;v);y(u;v);z(u;v);t(u;v))$$

$$=for(u;v)=f(r(u;v))$$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \right)$$

4 sumando $\rightarrow$ 4 variables intermedias



13) Dada $T=f(x;y;z;t)=xy+zt$ y $r(u;v)=(uv;u+v;u-v;v^2)$. Hallar $\frac{\partial T}{\partial u}$.

14) Hallar la(s) ecuación(es) de los planos tangentes al elipsoide $x^2+2y^2+3z^2=21$, que además sea paralelo(s) al plano $x+4y+6z=42$.

15) Sea $P_0(x_0;y_0;z_0)$ un punto común a dos superficies $S_1) g(x;y;z)=0$ y $S_2) G(x;y;z)=0$, si existen todas las derivadas parciales en P_0 demuestre que $\nabla g(P_0) \wedge \nabla G(P_0)$ es tangente en P_0 a la curva $C/ C=S_1 \cap S_2$. Nota: Si $r=\Pi_1 \cap \Pi_2 \Rightarrow r$ tangente a C en P_0 .

16) C es la curva que surge de la intersección de dos cilindros $S_1) z=4-y^2$ y $S_2) z=4-x^2$ ($C=S_1 \cap S_2$). Trabajando en el primer octante:

a) Halle Π_1 , el plano tangente a S_1 en $P(1;1;3)$.

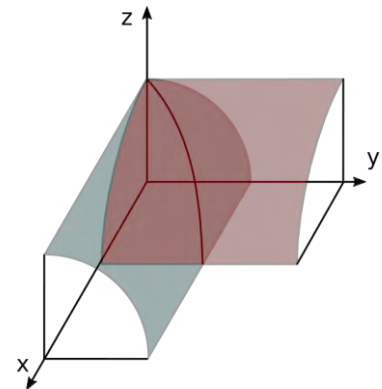
b) Halle Π_2 , el plano tangente a S_2 en $P(1;1;3)$.

c) Halle T , la recta tangente a C en $P(1;1;3)$.

d) Verdadero o Falso: $T=\Pi_1 \cap \Pi_2$

e) Grafique Π_1 , Π_2 y T en el siguiente gráfico.

Previamente identifique S_1 , S_2 y C .



17) Dos superficies S_1 y S_2 son "tangentes" en $P_0 \in S_1 \cap S_2 \Leftrightarrow \Pi_1 \equiv \Pi_2$ (planos tangentes en P_0). Demuestre que $S_1) x^2+z^2+4y=0$ y $S_2) x^2+y^2+z^2-6z+7=0$ son "tangentes" en $P_0(0;-1;z_0)$. Hallar z_0 .

18) Conteste con Verdadero o Falso y justifique:

a) Si la superficie S es un plano entonces el plano tangente a S en cualquier punto es el mismo plano.

b) Si $S_1) z=f(x;y)$, $S_2) y=2$ y $C=S_1 \cap S_2$, entonces la pendiente de T , recta tangente a C en $Q_0(x_0;2;z_0) \in S_1 \cap S_2$ (y en $\Pi(y=2)$) es: $m_T=f'_x(x_0;2)$.

19) Usando el ejercicio 19, indique la pendiente de la tangente a la curva $C/C=S_1 \cap S_2$ en el punto Q_0 indicado ($Q_0 \in C$). Ilustre con un gráfico siempre que sea posible.

- | | | |
|--|------------|---------------------------|
| a) $S_1) 3z = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$ | $S_2) x=1$ | $Q_0(1; -2; \sqrt{11}/3)$ |
| b) $S_1) 2z = \sqrt{9x^2 + 9y^2 - 36}$ | $S_2) y=1$ | $Q_0(2; 1; 3/2)$ |
| c) $S_1) z = x^2 + \frac{1}{4}y^2$ | $S_2) y=2$ | $Q_0(2; 2; 5)$ |
| d) $S_1) 5z = 4\sqrt{25 - x^2}$ | $S_2) y=3$ | $Q_0(4; y_0; z_0)$ |

Gradiente

20) Sea $f(x,y)=6-2x-y$. Graficar $S=\text{graf}(f)$.

- Dibujar las curvas de nivel que pasan por los puntos $A(1;4)$, $B(1;2)$ y $C(1;0)$.
- Calcular $\nabla f(A)$, $\nabla f(B)$ y $\nabla f(C)$. Graficar estos vectores anclados al punto donde se calculan.
- Verificar que el vector gradiente en A es perpendicular a la curva de nivel que pasa por A en A. Hacer lo mismo para B y C.

21) Sea $f(x,y)=xy$.

- Dibujar las curvas de nivel que pasan por los puntos $A(1;1)$, $B(1;2)$ y $C(2;3)$.
- Calcular $\nabla f(A)$, $\nabla f(B)$ y $\nabla f(C)$. Graficar estos vectores anclados al punto donde se calculan.
- Dar las ecuaciones paramétricas de cada curva de nivel.
- Hallar el vector tangente a la curva en el punto que la genera.
- Verificar que el vector gradiente en A es perpendicular a la curva de nivel que pasa por A en A. Hacer lo mismo para B y C.

22) El potencial de un campo gravitacional debido a una masa puntual es (salvo constantes): $P(x; y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\forall (x; y) \neq (0; 0)$. Si $r(x;y)=(x;y)$ (vector posición $P(x;y)$).

- Demostrar que $\nabla p = \frac{-\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$.
- Demostrar que $|\nabla p| = \frac{1}{|\vec{r}|^2}$.

23)

- Dibujar la superficie de nivel S_k de $F(x;y;z)=2x+3y+6z$ que pasa por $A(0;0;1)$.
- Calcular $\nabla F(A)$. Graficarlo anclado a A.
- Hallar B y C, dos puntos de la superficie S_k .
- Calcular $\nabla F(A) \cdot \overline{BC}$. ¿Es razonable el resultado obtenido? ¿Por qué?

24)

- Dibujar la curva de nivel de $f(x;y)=xy$ que pasa por el punto $P(5;3) \rightarrow C_{15}$
- Dibujar la curva de nivel de $g(x;y)=x^2-y^2$ que pasa por el punto $P(5;3) \rightarrow C_{16}$ (hipérbola).
- Verdadero o Falso: C_{15} corta a C_{16} en "ángulo recto".
(Dos curvas se cortan en ángulo recto si sus vectores tangentes lo hacen)

26) La temperatura T en un río en el instante t y en el punto $P(x;y;z)$ es $T=f(t;x;y;z)$. Para un hombre rana que nada sumergido en el río en el punto $P(x;y;z)$ también va cambiando en el tiempo.

Así, el hombre rana registra la temperatura del agua según la siguiente ley: $T=f(s(t))=g(t)$, donde $s=(t;x(t);y(t);z(t))$. En tal caso $r(t)=(x(t);y(t);z(t))$ da la posición del hombre rana en función del tiempo. Se pide demostrar la siguiente ley de los fluidos:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla f \cdot \bar{V}$$

donde V es la velocidad del hombre rana.

13— Cálculo Integral para Campos Escalares y Vectoriales

En capítulos anteriores hemos estudiado la integral de funciones escalares (f) definidas en intervalos cerrados y acotados $[a, b]$: $\int_a^b f(x)dx$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

En este capítulo extendemos la noción de integral en otras direcciones. Esto se puede hacer de distintas maneras, ya sea modificando el dominio de integración o la función a integrar. El intervalo $[a, b]$ de integración lo podemos reemplazar por una región ó curva del plano (o del espacio) y la función a integrar puede ser tanto un campo escalar como un campo vectorial.

Básicamente y según el dominio de integración podemos dividir las integrales en tres grandes grupos:

(I) Integrales sobre regiones del plano (o del espacio) $\rightarrow$ **INTEGRALES MÚLTIPLES**

(II) Integrales sobre 'superficies' $\rightarrow$ **INTEGRALES DE SUPERFICIE**

(III) Integrales sobre 'curvas' (del plano o del espacio) $\rightarrow$ **INTEGRALES CURVILÍNEAS.**

A continuación presentamos en forma resumida cada una de estas integrales para luego pasar a considerar dos de ellas en forma particular: las múltiples (particularmente, las "dobles") y las curvilíneas.

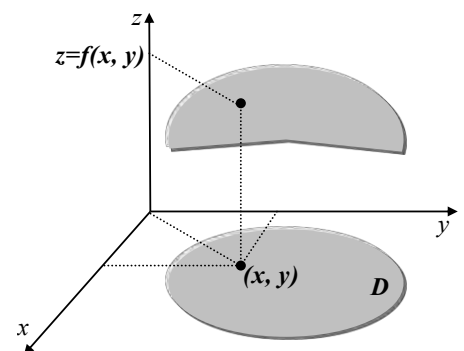
(I) INTEGRALES MÚLTIPLES

Se integran campos escalares, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, sobre regiones del plano ($n=2$) ó del espacio ($n=3$). Tenemos así integrales *dobles* y *triples*, respectivamente.

I-A₂) INTEGRALES DOBLES: $\iint_D f(x, y) dx dy$

Se integra un campo escalar de $\mathbb{R}^2$ (ó *función de dos variables*), sobre D , región cerrada y acotada del plano ($D \subset \mathbb{R}^2$).

$$\begin{aligned} f: D &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\rightarrow z = f(x, y) \end{aligned}$$

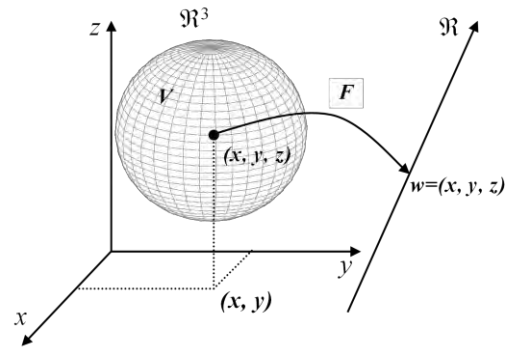


- Se aplican al cálculo de áreas de regiones planas, volúmenes de sólidos, masa total, centro de masa, momentos de inercias de una lámina, etc.
- Se usan en la resolución de las integrales de superficie.

I-A₃) INTEGRALES TRIPLES: $\iiint_V F(x, y, z) dx dy dz$

Se integra un campo escalar de $\mathbb{R}^3$ (o *función de tres variables*), sobre V , región cerrada y acotada del espacio ($V \subset \mathbb{R}^3$).

$$\begin{aligned} F: V &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\rightarrow w = F(x, y, z) \end{aligned}$$



(II) INTEGRALES de SUPERFICIE: $\iint_S \bar{F} \cdot \bar{n} dS$

Se integran *campos vectoriales* sobre S , *superficie* de ecuación $z = g(x, y)$, $S \subset \mathbb{R}^3$, siendo $\bar{n}$ un versor normal a la superficie S .

- Como la ecuación del plano tangente en $P(x_o, y_o, z_o)$ es:

$$z - z_o = g_x(x_o, y_o) \cdot (x - x_o) + g_y(x_o, y_o) \cdot (y - y_o), \text{ ó}$$

$$-g_x(x_o, y_o) \cdot (x - x_o) - g_y(x_o, y_o) \cdot (y - y_o) + (z - z_o) = 0$$

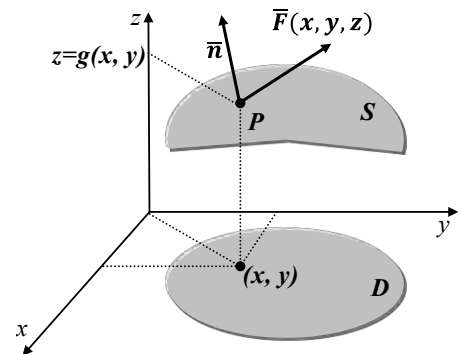
entonces $\bar{n} = (-g_x(x_o, y_o), -g_y(x_o, y_o), 1)$ es un vector normal a la superficie en $P(x_o, y_o, z_o)$.

- $\bar{F}: S \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y, z) \rightarrow \bar{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$; campo vectorial.

- dS = diferencial de superficie: $|\bar{n}| dx dy$

- Luego, por definición: $\iint_S \bar{F} \cdot \bar{n} dS = \iint_D (\bar{F}(x, y, g(x, y))) \cdot (-g_x, -g_y, 1) dx dy$

Si $\bar{F}$ es un campo de velocidades (por ejemplo de un fluido) la integral de superficie se usa para calcular *el flujo del fluido a través de la superficie S*.



(III) INTEGRALES CURVILÍNEAS.

Se integran *campos vectoriales* ó *campos escalares* sobre curvas del plano ($n=2$) ó del espacio ($n=3$). La curva se da por su ecuación vectorial: $\bar{r}(t) = (x(t); y(t))$, ($n=2$).

III-A) sobre un campo vectorial $\bar{F}$, definido y acotado sobre la curva ($\bar{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$).

La integral que resulta en este caso se llama *integral de línea* ó *integral curvilínea*. Una de las notaciones usadas para indicarla es: $\int_C \bar{F} \cdot d\bar{r}$; donde el punto se usa para indicar el producto escalar de los vectores $\bar{F}$ y $d\bar{r}$.

III-B) sobre un campo escalar ϕ , definido y acotado sobre la curva ($\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$).

La integral que resulta en este caso se llama *integral de línea con respecto a la longitud de arco*. La notación usada para indicarla es: $\int_C \phi ds$. (ds = diferencial de arco).

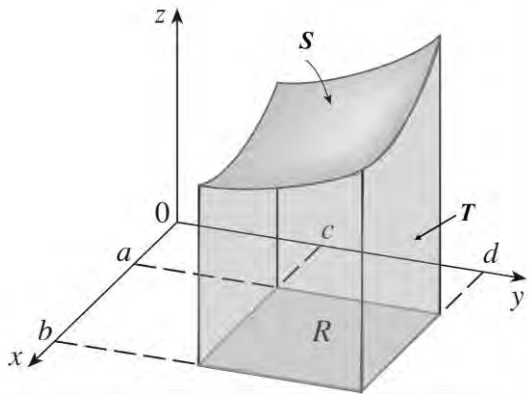
13.1 Integrales Múltiples

En este capítulo extenderemos el concepto de integral definida $\int_a^b f(x)dx$ para integrales dobles de funciones de dos variables. Lo que discutiremos, sobre todo las fórmulas de cálculo, se puede extender naturalmente para campos de tres o más variables, no así las interpretaciones físicas y geométricas que daremos.

Casi de la misma forma que el intento para resolver el problema de área condujo a la definición de la integral definida, ahora buscaremos determinar el volumen de un sólido, y en el proceso llegaremos a la definición de integral doble.

13.1.1 Integrales Dobles

Consideremos un campo escalar f de dos variables definida sobre un recinto R del plano xy , limitado por la recta $x = a$ y $x = b$, con $a < b$, y por las rectas $y = c$ y $y = d$, con $c < d$:



$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

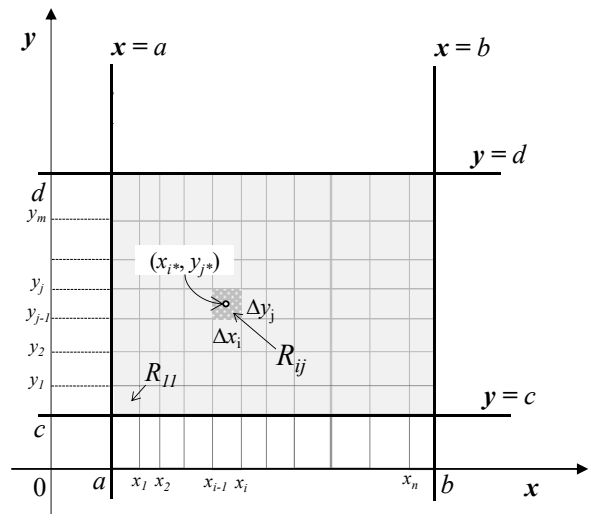
Supongamos que $f(x, y) \geq 0$, $\forall (x, y) \in R$; e indiquemos con S al gráfico de f sobre R . Puede pensarse en la gráfica de f como la “tapa” del sólido T que yace arriba de R , y queda debajo de S , es decir,

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in R\}$$

Si trazamos rectas paralelas a los ejes coordenados, el recinto R quedará cubierto por una red finita de rectángulos. Esto se hace dividiendo el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, y dividiendo el intervalo $[c, d]$ en m subintervalos $[y_{j-1}, y_j]$:

$$R_{ij} = \{(x, y) / x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

Representaremos el área del ij -ésimo de tales rectángulos por $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$. Si se elige el punto muestral (x_{i*}, y_{j*}) en cada R_{ij} , entonces se puede aproximar la parte de T que yace arriba de cada R_{ij} mediante una caja rectangular (o “columna”) con base R_{ij} y altura $f(x_{i*}, y_{j*})$. El volumen de la caja es la altura de ésta multiplicada por el área de la base del rectángulo correspondiente:



$$V_{ij} = f(x_{i*}, y_{j*}) \cdot \Delta A_{ij}$$

Si se sigue este procedimiento para todos los rectángulos y se suman los volúmenes de las cajas correspondientes, se obtiene una aproximación del volumen total del cuerpo T definido por S sobre R :

$$V \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_{i*}, y_{j*}) \cdot \Delta A_{ij}$$

Intuitivamente, la aproximación mejorará cuando n y m crezcan y, por lo tanto, se espera que

$$V = \lim_{n,m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_{i*}, y_{j*}) \cdot \Delta A_{ij}$$

Se acepta que la expresión anterior permite calcular el volumen del sólido T (véase asimismo la figura de más abajo). Por lo tanto, daremos la siguiente definición:

DEFINICIÓN La integral doble de f sobre el rectángulo R es

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{n, m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i, y_j) \cdot \Delta A_{ij}$$

si existe el límite.

En la definición, hemos simplificado la expresión eligiendo como punto muestral (x_i^*, y_j^*) de cada rectángulo R_{ij} su esquina superior derecha, o sea, (x_i, y_j) .

Podemos generalizar luego el resultado obtenido antes, es decir, si $f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in R$ entonces el volumen V del sólido que yace arriba del rectángulo R y debajo de la superficie $z=f(x, y)$ puede calcularse como

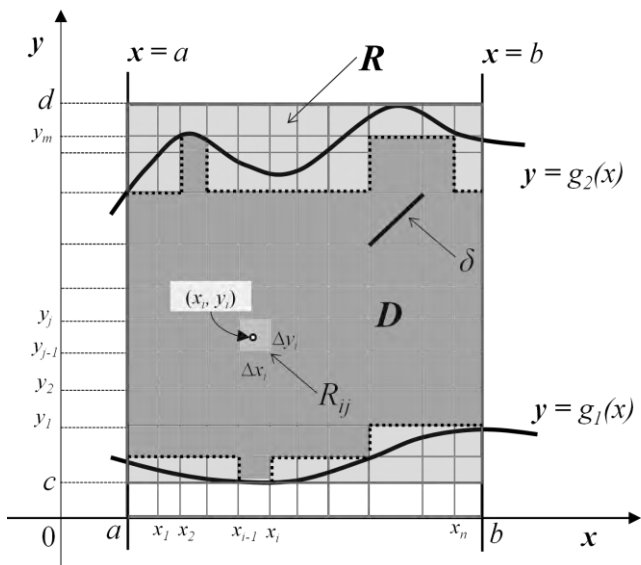
$$V = \iint_R f(x, y) dA$$

Ahora, pensemos en un recinto D del plano xy más general, limitado por la recta $x = a$ y $x = b$, con $a < b$, y por las curvas $y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$, siendo g_1 y g_2 funciones continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ y $g_1(x) < g_2(x)$ para $a < x < b$ (ver figura de la derecha).

Como $c = \text{mínimo de } g_1 \text{ en } [a, b]$ y $d = \text{máximo de } g_2 \text{ en } [a, b]$, entonces las rectas $y=c$ e $y=d$ determinan el rectángulo R , tal que $D \subset R$.

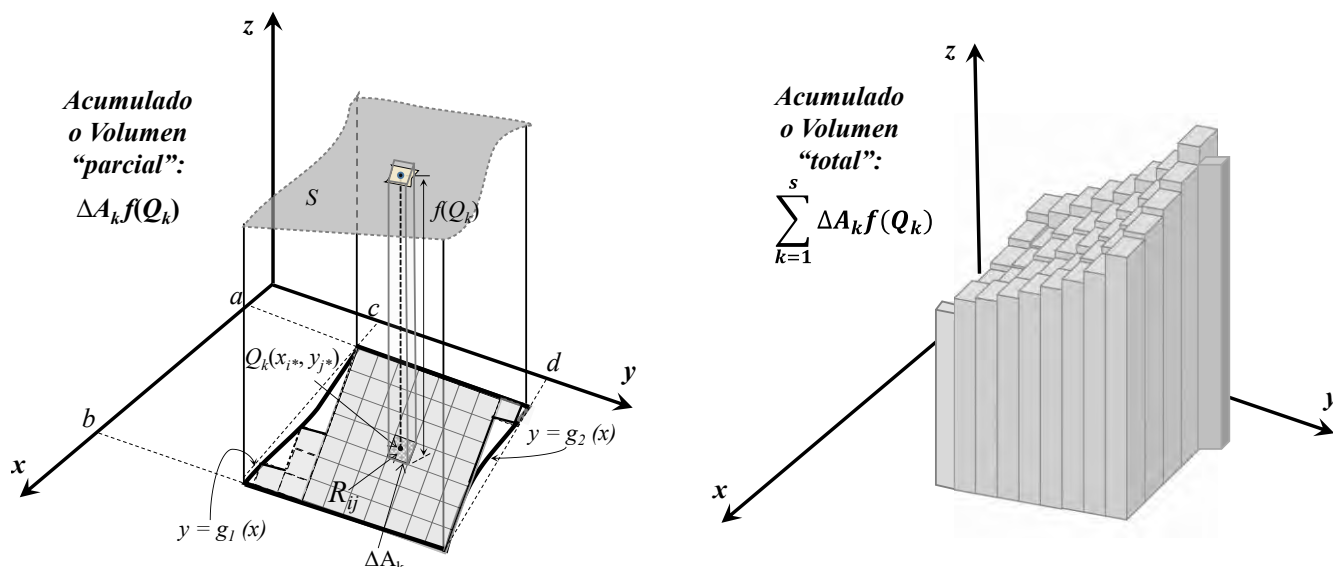
Otra vez, si trazamos rectas paralelas a los ejes coordenados, el recinto D quedará cubierto por una red finita de rectángulos R_{ij} totalmente interiores a D . Estos rectángulos constituyen una partición de D .

Los rectángulos que forman parte de la partición aparecen sombreados en la figura de la derecha así como en el gráfico de más abajo.



Representemos el área del ij -ésimo de tales rectángulos por $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$, con $i=1, 2, \dots, n$ y $j=1, 2, \dots, m$. Para simplificar la notación, vamos a numerar la red de rectángulos contenidos en D de 1 a s , donde $s = (n+1)(m+1)$. Entonces $\Delta A_k = \Delta A_{ij}$, con $k=1, 2, \dots, s$.

Vamos a definir a la norma δ de la partición de D como la longitud de la diagonal mayor de cualquier rectángulo perteneciente a la partición. La figura que mostramos debajo ayuda a entender el desarrollo que hacemos aquí, así como el cálculo inicial del volumen propuesto para regiones más sencillas (rectangulares) hecho más arriba.



Con la toda esta información, podemos proponer un proceso de integración para un campo escalar f de dos variables continuo en el interior de D :

⊗ **PROCESO DE INTEGRACIÓN:** $f: D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^2$.

1. **Subdivisión del problema** (o construcción de la *función escalera*, f_{esc}).

* Dar P , partición de D :

$$P = \{A_1, A_2, \dots, A_s\}$$

$\Delta A_k = \Delta x_i \Delta y_j$, es el área del rectángulo A_k , con $k = 1, 2, \dots, s$.

$|P| \rightarrow$ Norma de $P = \delta$, mayor diagonal entre todas las diagonales de los A_k .

* Dar Q , selección de puntos compabiles con P :

$$Q = \{Q_1; Q_2; \dots; Q_s\}; Q_k(x_i; y_j) \in A_k.$$

2. **Cálculo de las aproximaciones parciales.**

* Cálculo de los “s” productos: $f(x_i; y_j) \cdot \Delta x_i \Delta y_j = f(Q_k) \cdot \Delta A_k$.

3. **Cálculo de la aproximación TOTAL.**

* Suma de las aproximaciones parciales: SUMAS de RIEMANN

$$S(f, P, Q) = \sum_{k=1}^s f(Q_k) \Delta A_k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i; y_j) \Delta x_i \Delta y_j$$

4. **Cálculo del límite de las Sumas de Riemann (‘dobles’):** para $\delta \rightarrow 0$.

Este límite puede existir o no existir.

Si el límite existe, se lo denomina integral doble de f sobre D y se lo simboliza

$$\iint_D f(x, y) dA$$

Observación:

- Si $f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in D$, entonces la integral doble sobre D se interpreta como el volumen de un sólido, tal cual hemos dicho atrás. Asimismo, véase la figura de más arriba para una mejor interpretación del proceso.
- En otros libros más avanzados se demuestra que cuando crece indefinidamente el número de rectángulos de la partición y $\delta \rightarrow 0$, si existe el límite de las sumas de Riemann, éste es independiente de la elección de las rectas de subdivisión y del punto (x_i, y_j) de cada rectángulo.

Proponemos ahora las siguientes definiciones:

DEFINICIÓN: Función integrable (en $\mathbb{R}^2$)

Dada $f: D \rightarrow \mathbb{R}; D \subseteq \mathbb{R}^2$; decimos que f es integrable en D si y sólo si existe un “L” tal que para $|P| = \delta \rightarrow 0$, las Sumas de Riemann, $S(f; P; Q)$, se acercan tanto como se quiera al número L, cualquiera sea la selección Q considerada.

Si esto último sucede decimos que: $\lim_{\delta \rightarrow 0} S(f, P, Q) = L$

DEFINICIÓN: Integral doble (en $\mathbb{R}^2$)

Si existe $L = \lim_{\delta \rightarrow 0} S(f, P, Q)$ a este número:

- lo llamamos **Integral Doble** de f sobre D .
- lo indicamos $\iint_D f(x, y) dA = \iint_D f(x, y) dx dy$

O sea, $\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^s f(Q_k) \Delta A_k = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j$

Notemos las notables similitudes que hay con las definiciones dadas cuando trabajamos el concepto de integral de funciones de una variable.

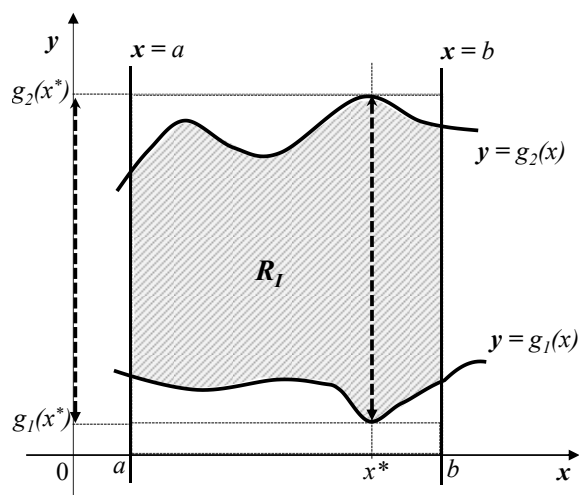
Estas definiciones se aplican con igual validez a los diferentes recintos, que pasaremos a describir ahora, sobre los que se plantea el cálculo de la integral doble. Para distinguirlos, los llamaremos de Tipo I y de Tipo II, y los representaremos por R_I y R_{II} .

DEFINICIÓN: Recinto de Tipo I (R_I), en el plano xy , es la porción de este plano limitada por las rectas $x=a$ y $x=b$, y las curvas $y = g_1(x)$ e $y=g_2(x)$, siendo $a < b$ y g_1 y g_2 funciones continuas en $[a, b]$, con $g_1(x) \leq g_2(x), \forall x \in [a, b]$. Es decir,

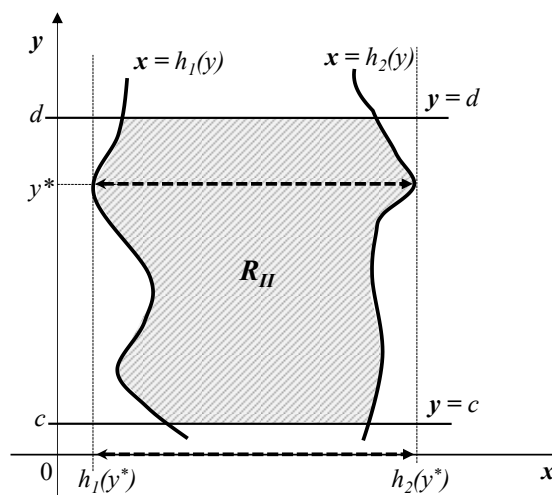
$$R_I = \{(x; y) / a \leq x \leq b; g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

DEFINICIÓN: Recinto de Tipo II (R_{II}), en el plano xy , es la porción de este plano limitada por las rectas $y=c$ e $y=d$, y las curvas $x = h_1(y)$ y $x=h_2(y)$, siendo h_1 y h_2 funciones continuas en $[c, d]$, con $h_1(y) \leq h_2(y), \forall y \in [c, d]$. Es decir,

$$R_{II} = \{(x; y) / h_1(y) \leq x \leq h_2(y); c \leq y \leq d\}$$



Recinto de Tipo I



Recinto de Tipo II

Nota:

El símbolo R , sin especificación, lo utilizaremos cuando las consideraciones del caso se apliquen tanto a R_I como a R_{II} .

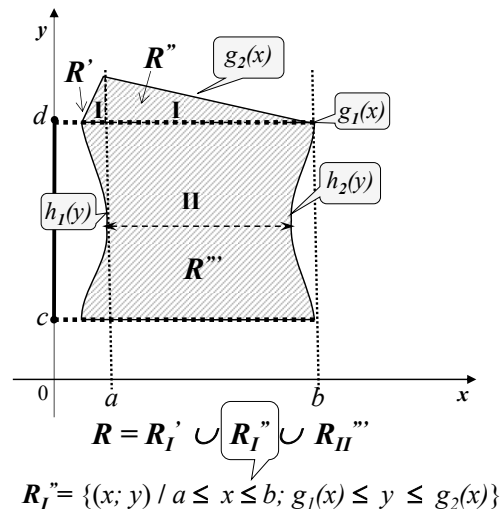
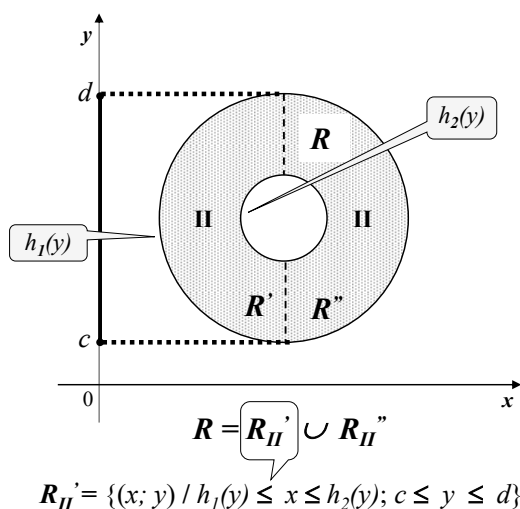
Se puede demostrar que la integral doble posee la **propiedad aditiva**. Esto significa que si el recinto R se compone de dos recintos parciales, R' y R'' , de modo que $R = R' \cup R''$, siendo simultáneamente R' y R'' del tipo R_I o R_{II} , o bien, uno de Tipo I y el otro Tipo II, entonces

$$\iint_R f(x,y) dx dy = \iint_{R'} f(x,y) dx dy + \iint_{R''} f(x,y) dx dy$$

Se concluye que si R es una combinación de cualquier número finito de subrecintos de Tipo I o Tipo II, la integral doble de f sobre R es igual a la suma de las integrales dobles de f sobre cada subrecinto.

Observación:

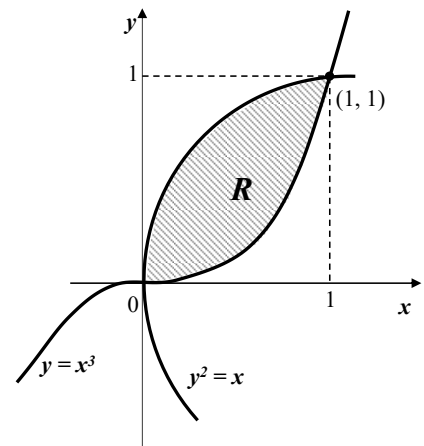
Las condiciones establecidas para el recinto R , esto es, que sea de Tipo I o de Tipo II, o una combinación de estos, son *suficientes* para asegurar la existencia de la integral doble de una función de dos variables, continua en R ; *pero no son necesarias*. En otros libros en donde se trata en forma más minuciosa el cálculo integral múltiple, se presentan restricciones mucho menos estrictas para R . No obstante, los recintos que nosotros usaremos son los del tipo definido anteriormente o una combinación de ellos.



En la figura se muestran ejemplos de los recintos con los cuales trabajamos en este libro, así como algunas de las fronteras y/o conjuntos que los definen.

Ejemplo El recinto R que se muestra a la derecha está encerrado por la parábola $y^2 = x$, y la parábola cúbica $y = x^3$. Este tipo de recinto tiene la particularidad de que puede considerarse de Tipo I o de Tipo II.

Es de Tipo I porque $R = \{ (x; y) / 0 \leq x \leq 1; x^3 \leq y \leq \sqrt{x} \}$, y es de Tipo II porque R también puede escribirse de la forma $R = \{ (x; y) / y^2 \leq x \leq y^{1/3}; 0 \leq y \leq 1 \}$.



13.1.2 Integrales Iteradas

Tal como ocurre en el caso de las funciones de una variable, resulta difícil o imposible calcular el valor de una integral doble basándonos únicamente en su definición. En las funciones de una variable el Teorema Fundamental del Cálculo nos permite hacer el cálculo de una integral definida una función primitiva del integrando. En el caso de las integrales dobles, éstas podrán calcularse mediante un recurso llamado *integración iterada*, que no es otra cosa que calcular dos integrales simples en forma consecutiva.

Supongamos que f es un campo escalar de dos variables que es integrable en el rectángulo

$$R = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \}$$

Es razonable usar la notación $\int_c^d f(x, y) dy$ para indicar que x se mantiene fija y $f(x, y)$ se integra con respecto a y de $y = c$ a $y = d$. Este procedimiento se llama *integración parcial con respecto a y* (observemos su similitud con la derivación parcial). Ahora es un número que depende del valor de x , así que define una función de x :

$$A(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

Si ahora integramos la función A con respecto a x de $x = a$ a $x = b$, se obtiene

$$\int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

La integral del lado derecho de la ecuación se llama **integral iterada**. En el último miembro de la expresión se han quitado los corchetes, ya que es la forma habitual en la que se presenta la integral iterada. Esta expresión indica que primero se integra con respecto a y de c a d , y luego con respecto a x de a a b .

De manera similar, la integral iterada

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

indica que primero se integra con respecto a x (manteniendo y constante) de a a b , y luego la función resultante en y con respecto a y de c a d .

Observación:

En general resulta que las dos integrales iteradas de *un mismo campo escalar sobre igual recinto son siempre iguales*; es decir, no importa el orden de integración. (Esto es similar al teorema de Clairaut en la igualdad de las derivadas parciales mixtas.)

En el siguiente teorema se da un método práctico para evaluar una integral doble expresándola como una integral iterada (en cualquier orden).

TEOREMA de Fubini:

Si f es continua en el rectángulo $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, entonces

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

En términos generales, esto es cierto si se supone que f está acotada en R , f es discontinua sólo en un número finito de curvas uniformes y existen integrales iteradas.

El teorema de Fubini es muy difícil de demostrar, por lo tanto no lo demostraremos aquí. No obstante, es muy útil para justificar la validez del cálculo de integrales dobles sobre recintos más generales (de Tipo I o II) mediante integrales iteradas.

A fin de evaluar $\iint_D f(x, y) dA$ cuando D es una región de tipo I, se elige un rectángulo $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, que contiene a D , tal como ya hemos discutido. Definimos ahora una función F con ley

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in D \\ 0 & \text{si } (x, y) \in R \text{ pero no a } D \end{cases}$$

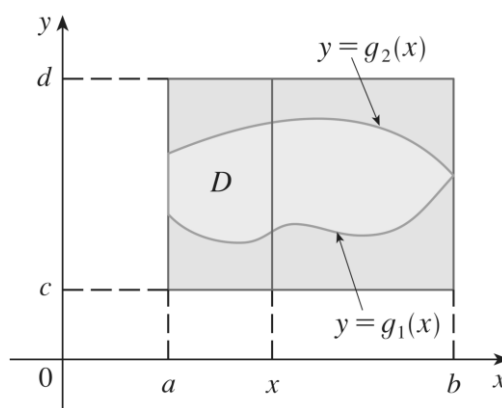
es decir, F concuerda con f en D y es 0 fuera de D . Entonces, por el teorema de Fubini,

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_R F(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d F(x, y) dy dx$$

Como $F(x, y) = 0$ si $y < g_1(x)$ o $y > g_2(x)$ porque (x, y) está fuera de D , entonces

$$\begin{aligned} \int_c^d F(x, y) dy &= \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x, y) dy \\ &= \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \end{aligned}$$

porque $F(x, y) = f(x, y)$, cuando $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$.



No lo demostramos, pero este razonamiento es válido también para recintos de Tipo II, por lo tanto, enunciaremos un teorema básico que permite calcular integrales dobles a través de integrales iteradas para recintos de Tipo I o II.

TEOREMA. Sea f continua en el interior y sobre el contorno de un recinto R del plano xy .

- Si R es de Tipo I, entonces $\iint_{R_I} f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$.
- Si R es de Tipo II, entonces $\iint_{R_{II}} f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$.

Ejemplo 1 Calcular la integral iterada $\int_3^5 \int_{-x}^{x^2} (4x + 10y) dy dx$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} \int_3^5 \int_{-x}^{x^2} (4x + 10y) dy dx &= \int_3^5 \left(\int_{-x}^{x^2} \left(4 \overset{cte}{x} + 10y \right) dy \right) dx = \\ &\stackrel{\text{Barrow en } y}{=} \int_3^5 \left[(4xy + 5y^2) \Big|_{y=-x}^{y=x^2} \right] dx = \int_3^5 (4x^3 + 5x^4 - x^2) dx = \\ &\stackrel{\text{Barrow en } x}{=} \left(x^5 + x^4 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_3^5 = 3393 \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Ejemplo 2 Calcular la integral iterada $\int_1^{\ln 2} \int_0^{3y} e^{x+y} dx dy$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} \int_1^{\ln 2} \int_0^{3y} (e^{x+y}) dx dy &= \int_1^{\ln 2} \left(\int_0^{3y} \left(e^{x+\overset{cte}{y}} \right) dx \right) dy = \\ &\stackrel{\text{Barrow en } x}{=} \int_1^{\ln 2} \left[e^{x+y} \Big|_{x=0}^{x=3y} \right] dy = \int_1^{\ln 2} \left(e^{3y+y} - e^y \right) dy = \frac{1}{4} \int_1^{\ln 2} (4e^{4y}) dy - \int_1^{\ln 2} (e^y) dy = \\ &\stackrel{\text{Barrow en } y}{=} \frac{1}{4} (e^{4y}) \Big|_1^{\ln 2} - (e^y) \Big|_1^{\ln 2} = 2 + e - \frac{1}{4} e^4 \end{aligned}$$

Interpretación geométrica de la integral iterada

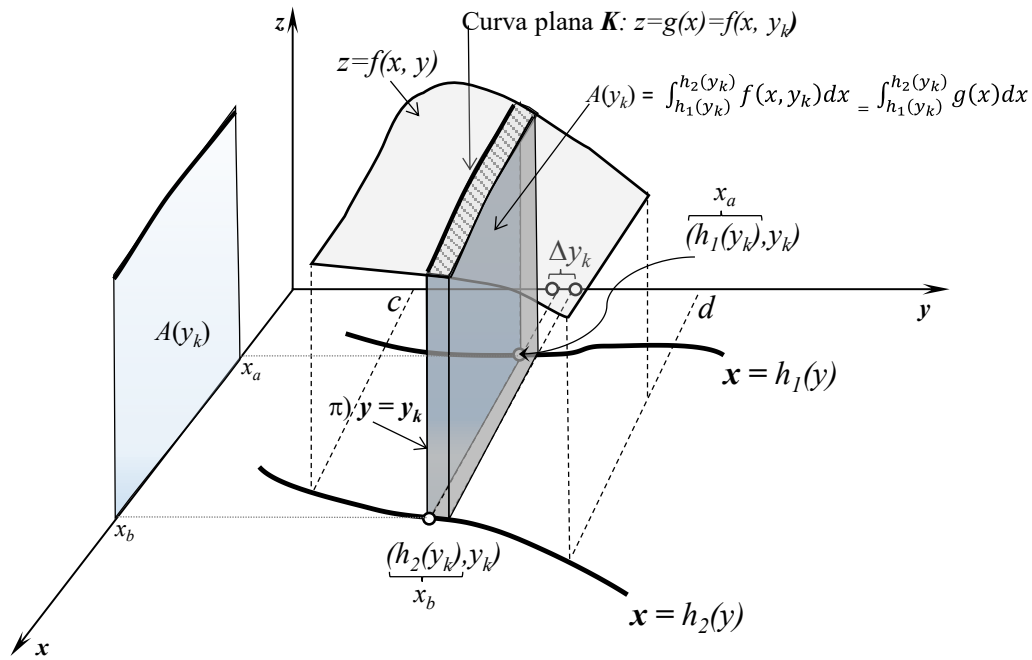
Resulta muy ilustrativo interpretar geométricamente la integral iterada. La intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con un plano $y = y_k$, siendo $c \leq y_k \leq d$, es una curva K . El área de la superficie plana, que se halla por debajo del segmento de curva y por encima del plano xy , está dada por

$$A(y_k) = \int_{h_1(y_k)}^{h_2(y_k)} f(x, y_k) dx$$

De este modo, integral iterada

$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy = \int_c^d A(y) dy = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^s A(y_k) \Delta y_k$$

Pero “ $A(y_k) \Delta y_k$ ” es el volumen del sólido de caras paralelas, cuya área es $A(y_k) = \int_{h_1(y_k)}^{h_2(y_k)} f(x, y_k) dx$, y de espesor Δy_k ; y la suma de los volúmenes de estos sólidos (de $k = 1, 2, \dots, s$) es aproximadamente lo que, por intuición, sabemos que es el volumen del sólido por debajo de la superficie $z = f(x, y)$, por encima del plano xy , entre los plano $y = c$ e $y = d$, y entre las superficies cilíndricas $x = h_1(y)$ y $x = h_2(y)$ (ver la figura de la debajo).



Por otra parte, esta aproximación puede hacerse tan buena como se quiera con sólo tomar δ suficientemente pequeño. Entonces, es apenas sorprendente el hecho de que la integral doble, que es igual al volumen de este sólido, pueda calcularse mediante esta integración iterada.

13.1.3 Aplicaciones de las Integrales Dobles

Supondremos aquí que f es un campo escalar de dos variables continuo en un recinto R de Tipo I o II, o una combinación de ambos.

Propiedad Si f es la función constante cuyo valor es 1, tal que $f(x, y) = 1$ para todo (x, y) de R , entonces la integral doble se convierte en $\iint_R dx dy$. Para calcularla mediante una integración iterada, tenemos que

$$\iint_R dy dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy dx = \int_a^b (g_2(x) - g_1(x)) dx$$

cuando R es de Tipo I, y

$$\iint_R dx dy = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx dy = \int_c^d (h_2(y) - h_1(y)) dy$$

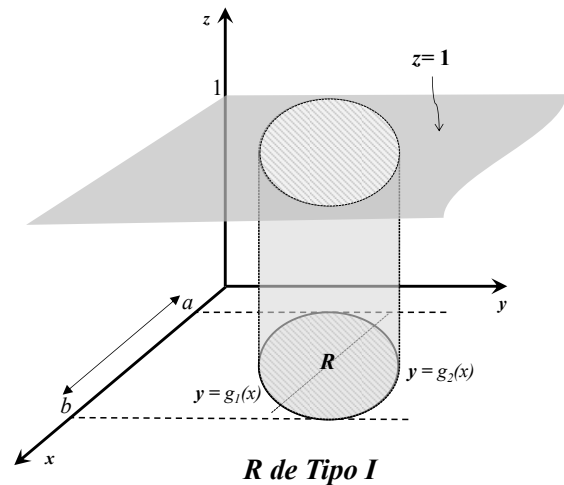
si R es de Tipo II. Pero como ya hemos visto, las integrales de los segundos miembros expresan el área de R . Así, pues

$$\text{Área de } R = \iint_R dx dy$$

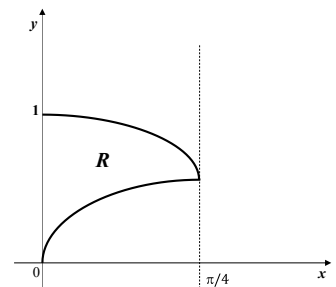
Observación:

Cuidado: este tipo de resultados puede generar alguna confusión, como veremos también más adelante cuando discutamos las integrales de línea. En realidad, al resolver la integral doble de un campo constante (y positivo), estamos calculando el volumen de un sólido. Como en la discusión el campo es constante e igual a 1, su valor numérico va a coincidir con el área de la base (o sea, el área del recinto R), pero claramente son magnitudes diferentes.

En definitiva, el cálculo de la integral propuesta permite obtener el volumen de un cilindro recto de base R . El número de unidades cúbicas que mide este volumen es igual al número de unidades cuadradas que mide la base de R .



Ejemplo Averiguar el área de la superficie que, en el plano xy , está comprendida a izquierda y a derecha entre el eje y y la recta $x = \frac{1}{4}\pi$, y se encuentra por debajo de $y = \cos x$ y por encima de $y = \sin x$.

**SOLUCIÓN**

$$\begin{aligned} \text{Área de } R &= \int \int_R dx dy = \int_0^{\pi/4} \int_{\sin x}^{\cos x} dy dx = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx = \\ &= (\sin x + \cos x) \Big|_0^{\pi/4} = \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

Consideremos ahora una lámina (plancha delgada de control uniforme) con una cara R . Si la lámina es homogénea, su *densidad* se define como la masa por unidad de área de R . Queda de tarea proponer una definición para la densidad de una lámina no homogénea como una función f , con ley $f(x, y)$, en un punto arbitrario (x, y) de R mediante el límite de una densidad media

Definición La **masa total de una lámina** con base R es

$$M = \iint_R f(x, y) dx dy$$

donde $f(x, y)$ es su densidad en el punto (x, y) de R .

Definición Se llama **primer momento** de la masa M de la lámina con base R respecto del eje x a la expresión

$$M_x = \iint_R y f(x, y) dx dy$$

y **primer momento** de M con respecto al eje y a

$$M_y = \iint_R x f(x, y) dx dy$$

Definición Se llama **centro de masa** de la lámina, o **centroide** de la región R , al punto $(\bar{x}, \bar{y})$, tal que

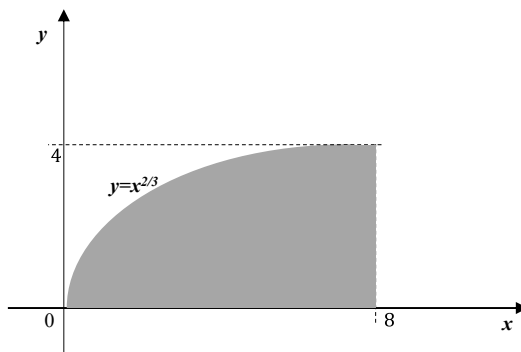
$$\bar{x} = \frac{\iint_R x f(x, y) dx dy}{\iint_R f(x, y) dx dy}$$

$$\bar{y} = \frac{\iint_R y f(x, y) dx dy}{\iint_R f(x, y) dx dy}$$

De este modo, $M_y = M \bar{x}$ y $M_x = M \bar{y}$, lo cual puede interpretarse en el sentido de que el primer momento de la lámina respecto de uno de los ejes coordenados es igual a la masa de la lámina multiplicada por un “brazo de palanca” que es la distancia (segmento de perpendicular) del centroide al eje correspondiente. De esta manera, al exponer lo relativo a los primeros momentos de una lámina, la masa de ésta puede considerarse concentrada en el centroide.

Por otra parte, al multiplicar la densidad en cada punto (x, y) de R por las variables cuadradas (y^2 y x^2) y realizar las integrales dobles correspondientes, obtenemos los **segundos momentos** o **momentos de inercia** I_x e I_y , de la lámina respecto de los ejes x e y , respectivamente.

Ejemplo Una lámina, cuya densidad variable está dada por $f(x, y) = xy$, está limitada por el eje x , la recta $x = 8$ y la curva $y = x^{2/3}$. Averiguar su masa M , su centro de masa y sus momentos de inercia con respecto a los ejes coordenados.



SOLUCIÓN

Mediante el empleo de las fórmulas de las definiciones recién dadas, tenemos

$$M = \iint_R f(x, y) dy dx = \int_0^8 \int_0^{x^{2/3}} xy dy dx = \frac{1}{2} \int_0^8 x^{7/3} dx = \frac{768}{5}$$

$$M_x = \int_0^8 \int_0^{x^{2/3}} xy^2 dy dx = \frac{1}{3} \int_0^8 x^3 dx = \frac{1024}{3}$$

$$M_y = \int_0^8 \int_0^{x^{2/3}} x^2 y dy dx = \frac{1}{3} \int_0^8 x^{10/3} dx = \frac{12288}{13}$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = 6 \frac{2}{13}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = 2 \frac{2}{9}$$

$$I_x = \int_0^8 \int_0^{x^{2/3}} xy^3 dy dx = \frac{1}{4} \int_0^8 x^{11/3} dx = \frac{6144}{7}$$

$$I_y = \int_0^8 \int_0^{x^{2/3}} x^3 y dy dx = \frac{1}{2} \int_0^8 x^{13/3} dx = 6144$$

RESUMEN: Propiedades de la INTEGRAL DOBLE.

$$1) \iint_D [f(x, y) + g(x, y)] dA = \iint_D f(x, y) dA + \iint_D g(x, y) dA$$

$$2) \iint_D c f(x, y) dA = c \iint_D f(x, y) dA$$

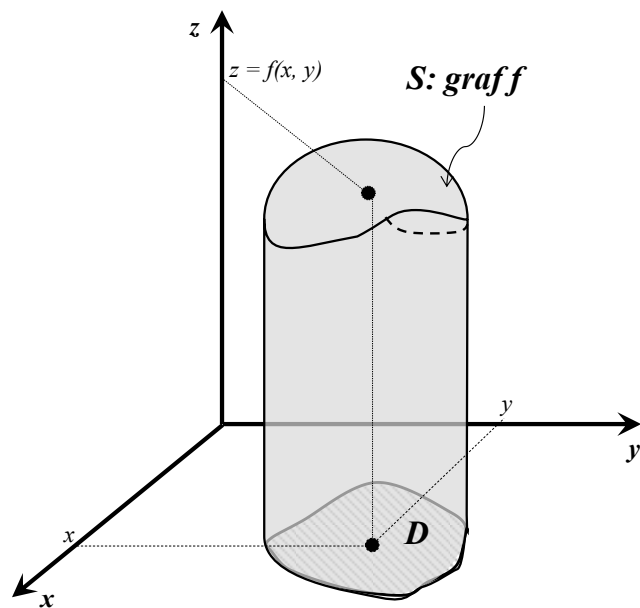
$$3) \text{ Si } f(x, y) \leq g(x, y); \text{ para todo } (x, y) \text{ en } D \Rightarrow \iint_D f(x, y) dA \leq \iint_D g(x, y) dA$$

$$4) \text{ Si } D = D_1 \cup D_2 \Rightarrow \iint_D f(x, y) dA = \iint_{D_1} f(x, y) dA + \iint_{D_2} f(x, y) dA$$

$$5) \text{ Si } f(x, y) = 1 \text{ para todo } (x, y) \text{ en } D \Rightarrow \iint_D dA = \text{Área de } D$$

$$6) \text{ Si } f(x, y) \geq 0 \text{ para todo } (x, y) \text{ en } D \Rightarrow \iint_D f(x, y) dA = \text{Volumen de Sólido, con base } D \text{ y altura "variable" } z = f(x, y).$$

$$\text{Sólido} = \{(x, y, z) / (x, y) \in D; 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$



13.2 Integrales Curvilíneas

13.2.1 Integrales de línea (ó curvilíneas) sobre campos vectoriales

Hemos visto que dada la función vectorial $\bar{r}$, con ley $\bar{r}(t) = (f(t); g(t))$ definida en el intervalo cerrado $[a, b]$, cuando t va tomando todos los valores en $[a, b]$, $\bar{r}(t)$ describe un conjunto de puntos en el plano al que llamamos *gráfica* de la función.

Hemos dicho que si $\bar{r}$ es continua en $[a, b]$, a esta gráfica la llamamos *curva*.

En nuestro estudio de las curvas vimos que funciones distintas pueden originar el trazado de la misma curva en formas distintas, por ejemplo, en sentidos distintos o con velocidades distintas. Esto resulta importante a la hora de estudiar las integrales de línea; o sea, no interesa sólo el *conjunto de puntos de la curva* sino también la manera que la curva se origina y se recorre; o sea, la función que define $\bar{r}$.

En particular para garantizar la existencia de la integral a lo largo de una curva, esta debe cumplir ciertas condiciones; por ejemplo, ser una *curva regular*.

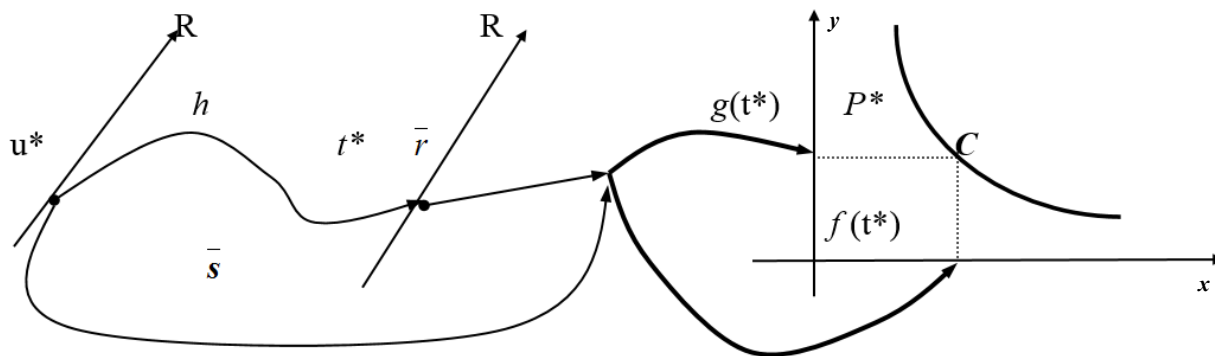
DEFINICIÓN: 'CURVA REGULAR'

Una función vectorial $\bar{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\bar{r}(t) = (f(t); g(t))$ se llama curva regular si:

- f y g son continuas en $[a, b]$;
- existe $\bar{r}'(t) = (f'(t); g'(t))$ y es continua para todo t en (a, b) ;
- $\bar{r}'(t) \neq \bar{0}$ para todo t en (a, b) . (no presenta puntos angulosos).

DEFINICIÓN: 'CURVAS EQUIVALENTES'

Sea $\bar{r}(t) = (f(t); g(t))$ una curva regular definida en $[a, b]$; sea $t = h(u)$ una función escalar definida en $[c, d]$ con derivada no nula y cuya imagen sea $[a, b]$; entonces la función vectorial definida por $\bar{s}(u) = \bar{r}(h(u))$ es una curva regular que tiene la misma gráfica que $\bar{r}$.



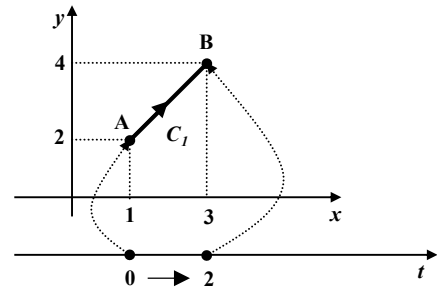
- Dos curvas $\bar{r}$ y $\bar{s}$ así relacionadas se llaman *equivalentes*. Dos curvas equivalentes proporcionan *distintas* representaciones paramétricas de la misma curva C . Se dice que h define un 'cambio de parámetro'.

- Si h' es positiva entonces las dos funciones $\bar{r}$ y $\bar{s}$ originan C en el mismo sentido. Si h' es negativa entonces las dos funciones $\bar{r}$ y $\bar{s}$ originan C en sentidos opuestos.

Ejemplo 1: $\bar{r}_1(t) = (1+t; 2+t); t \in [0, 2]$ es una curva regular:

$$C_1 \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \end{cases}$$

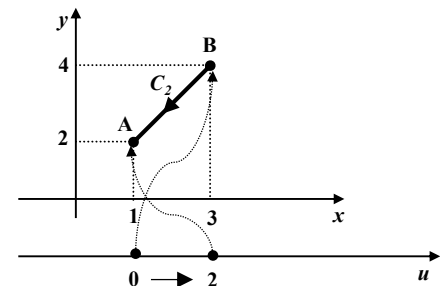
con punto inicial en $A = \bar{r}_1(0) = (1; 2)$, y, punto final en $B = \bar{r}_1(2) = (3; 4)$.



Ejemplo 2: $\bar{r}_2(u) = (3-u; 4-u); u \in [0, 2]$ es una curva regular;

$$C_2 \begin{cases} x = 3-u \\ y = 4-u \end{cases}$$

con punto inicial en $B = \bar{r}_2(0) = (3; 4)$, y, punto final en $A = \bar{r}_2(2) = (1; 2)$.



(*) $\bar{r}_1$ y $\bar{r}_2$ tienen la misma gráfica.

Observamos $\bar{r}_2(u) = \bar{r}_1(h(u))$, con $h(u) = 2-u$ y $h'(u) = -1$.

Luego $\bar{r}_1$ y $\bar{r}_2$ son equivalentes y originan C en sentidos opuestos.

⊗ Estamos ahora en condiciones de definir la **INTEGRAL DE LÍNEA**.

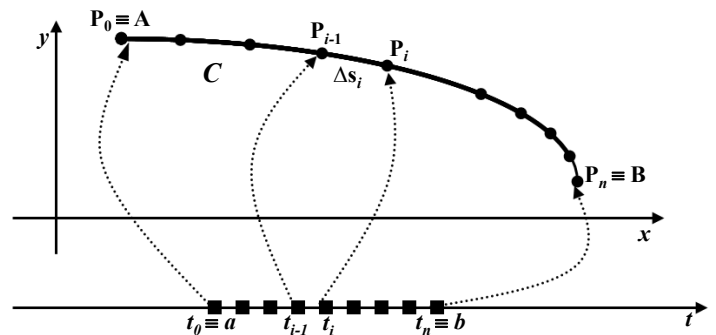
Dada la curva plana regular C a través de su ecuación vectorial $\bar{r}(t) = (x(t); y(t))$, con $t \in [a, b]$, la integral a lo largo de C se define en forma semejante a la integral sencilla ya vista excepto que en vez de integrar sobre un intervalo se integra sobre la curva C . Luego, el proceso de integración a lo largo de C comprende los siguientes pasos:

1) Partición del dominio de integración; o sea, de la curva C .

Esto se logra a través de una partición del intervalo $[a, b]$, intervalo en el cual está definida la ecuación de la curva.

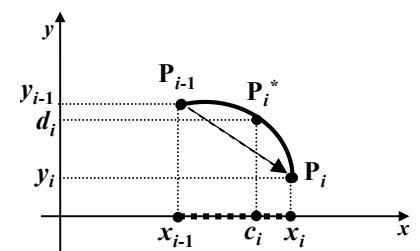
Efectivamente, dada $P = \{a=t_0, t_1, t_2, \dots, t_n=b\}$, partición de $[a, b]$, a cada t_i le corresponde un punto $P_i(x(t_i); y(t_i))$ de C . Estos puntos determinan entonces una *partición de la curva C* :

$$P = \{A = P_0, P_1, P_2, \dots, P_n = B\}$$



Los puntos P_i dividen la curva C en ' n ' subarcos de longitud ΔS_i .

Aproximamos cada subarco por el segmento determinado por sus puntos extremos: $\overline{P_{i-1}P_i}$. Así $\Delta S_i \approx |\overline{P_{i-1}P_i}|$ y la norma $|P|$ de la partición la definimos como la mayor de estas longitudes, $|P| = \max. |\overline{P_{i-1}P_i}|$; $i = 1, \dots, n$.



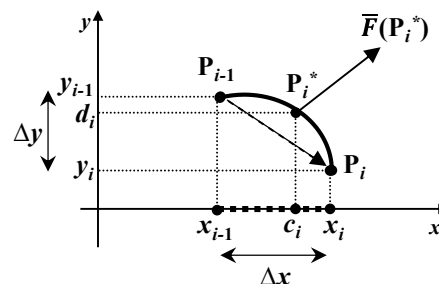
Se elige un punto $P_i^*(c_i; d_i)$ en cada subarco y se obtiene una selección de puntos

P_i^* compatibles con la partición. Cada P_i^* proviene de un t_i^* de $[a, b]$.

2) Cálculo de las aproximaciones PARCIALES

Se calcula $\overline{F}(P_i^*)$, o sea el campo vectorial en cada uno de los puntos $P_i^*(c_i; d_i)$ de la selección de puntos considerada y se realiza el *producto escalar* de este vector por el vector que *aproxima* el desplazamiento sobre C , $\overline{P_{i-1}P_i} = (\Delta x_i; \Delta y_i)$:

$$\overline{F}(c_i; d_i) \cdot (\Delta x_i; \Delta y_i); i = 1, \dots, n.$$



3) Cálculo de la aproximación TOTAL

Se suman todas las aproximaciones *parciales*:

$$\sum_{i=1}^n \overline{F}(c_i; d_i) \cdot (\Delta x_i; \Delta y_i)$$

4) Cálculo del límite de las sumas para $|P| \rightarrow 0$.

Se estudia el comportamiento de estas sumas a medida que se “afina” la partición.

Esto es, se calcula: $\lim_{|P| \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^n \overline{F}(c_i; d_i) \cdot (\Delta x_i; \Delta y_i) \right]$

Este límite puede existir o no. Si existe, lo llamamos integral de línea del campo vectorial $\overline{F}$ a lo largo de C .

DEFINICIÓN: ‘INTEGRAL de LÍNEA’

Sea $\overline{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $\overline{r}(t) = (x(t); y(t))$, una curva plana regular C y sea $\overline{F}$ un campo vectorial ($\overline{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$) definido y acotado sobre la gráfica de $\overline{r}$; luego, la integral de línea de $\overline{F}$ a lo largo de $\overline{r}$ se representa con el símbolo $\int_C \overline{F} \cdot d\overline{r}$ y se define por:

$$\int_C \overline{F} \cdot d\overline{r} = \lim_{|P| \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n \overline{F}(c_i; d_i) \cdot (\Delta x_i; \Delta y_i) \right)$$

siempre que el límite del segundo miembro exista.

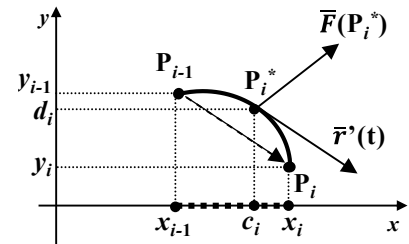
(*) CÁLCULO de la INTEGRAL de LÍNEA:

Se puede demostrar que si $\overline{F}$ es continuo sobre C curva regular plana, el límite anterior siempre existe. En tal caso y como hicimos para funciones de una variable buscamos una *fórmula para el cálculo de la integral de línea*.

Obtenemos así la siguiente fórmula para evaluar integrales de línea de campos vectoriales:

$$\int \bar{\mathbf{F}} \cdot d\bar{\mathbf{r}} = \int_a^b \bar{\mathbf{F}}(\bar{\mathbf{r}}(t)) \cdot \bar{\mathbf{r}}'(t) dt = \int_a^b \bar{\mathbf{F}}(x(t), y(t)) \cdot (x'(t); y'(t)) dt$$

o sea que una vez realizado el producto escalar que comprende la integral de línea, el cálculo de la misma remite al cálculo de una integral definida de una función escalar de la variable t ; función obtenida al calcular el campo sobre la curva y multiplicarlo por el vector $\bar{\mathbf{r}}'(t)$, vector que da la velocidad en cada punto de la curva.



(Observación: $d\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}'(t) dt$ y $\bar{\mathbf{r}}'(t) = (x'(t); y'(t))$.)

(*) Otras notaciones:

- Si la gráfica de $\bar{\mathbf{r}}$ la llamamos C entonces $\int \bar{\mathbf{F}} \cdot d\bar{\mathbf{r}}$ también se representa por

$$\int_C \bar{\mathbf{F}} \cdot d\bar{\mathbf{r}}$$

- Si $\mathbf{A} = \bar{\mathbf{r}}(a)$ y $\mathbf{B} = \bar{\mathbf{r}}(b)$ representan los puntos extremos de C (inicial y final respectivamente) la integral de línea suele también representarse por $\int_A^B \bar{\mathbf{F}} \cdot d\bar{\mathbf{r}}$.

Cuando se usa esta notación debe tenerse en cuenta que la integral no sólo depende de A y B sino también de la curva $\bar{\mathbf{r}}$ que une estos puntos.

- Si $\bar{\mathbf{r}}(a) = \bar{\mathbf{r}}(b)$ (equivalentemente, $A=B$) entonces la curva se llama cerrada. En este caso suele usarse el símbolo $\oint$.

Ejemplo Calcular $\int_C \bar{\mathbf{F}} \cdot d\bar{\mathbf{r}}$ para $\bar{\mathbf{F}}(x, y) = (\sqrt{y}; x+y)$ y C una curva de extremos $A(1, 2)$ y $B(3, 4)$, cuya ecuación vectorial se indica a continuación:

$$a) \bar{\mathbf{r}}(t) = (t; t^2 - 3t + 4); t \in [1, 3] \rightarrow \bar{\mathbf{r}}'(t) = (1; 2t - 3); t \in [1, 3]$$

$$b) \bar{\mathbf{r}}_1(t) = (1+t; 2+t); t \in [0, 2] \rightarrow \bar{\mathbf{r}}'_1(t) = (1; 1); t \in [0, 2]$$

$$c) \bar{\mathbf{r}}_2(t) = (3-t; 4-t); t \in [0, 2] \rightarrow \bar{\mathbf{r}}'_2(t) = (-1; -1); t \in [0, 2]$$

$$\begin{aligned} a) \int_C \bar{\mathbf{F}} \cdot d\bar{\mathbf{r}} &= \int_1^3 \bar{\mathbf{F}}(\bar{\mathbf{r}}(t)) \cdot \bar{\mathbf{r}}'(t) dt = \int_1^3 \bar{\mathbf{F}}(t, t^2 - 3t + 4) \cdot (1; 2t - 3) dt \\ &= \int_1^3 (\sqrt{t^2 - 3t + 4}, (t + t^2 - 3t + 4)) \cdot (1; 2t - 3) dt = \\ &= \int_1^3 \sqrt{t^2 - 3t + 4} + (t^2 - 2t + 4) \cdot (2t - 3) dt = \\ &= \int_1^3 \sqrt{t^2 - 3t + 4} dt + \int_1^3 (2t^3 - 7t^2 + 14t - 12) dt = \\ &= 3.02820 + 11.3333 = 14.3615 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \int_C \bar{\mathbf{F}} \cdot d\bar{\mathbf{r}} &= \int_0^2 \bar{\mathbf{F}}(\bar{\mathbf{r}}_1(t)) \cdot \bar{\mathbf{r}}'_1(t) dt = \int_0^2 \bar{\mathbf{F}}(1+t, 2+t) \cdot (1; 1) dt \\ &= \int_0^2 (\sqrt{2+t}, (1+t + 2+t)) \cdot (1; 1) dt = \\ &= \int_0^2 (\sqrt{2+t} + 3 + 2t) \cdot dt = \left(\frac{(2+t)^{3/2}}{3/2} + 3t + t^2 \right) \Big|_0^2 = 13.4477 \end{aligned}$$

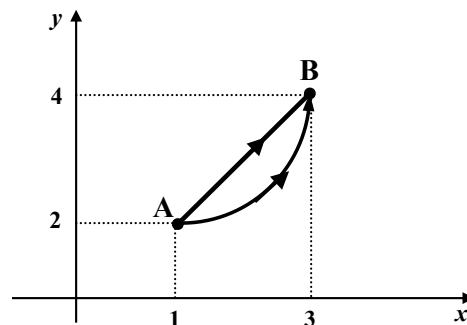
$$\begin{aligned}
 c) \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^2 \vec{F}(\vec{r}_2(t)) \cdot \vec{r}'_2(t) dt = \int_0^2 \vec{F}(3-t, 4-t) \cdot (-1; -1) dt \\
 &= \int_0^2 (\sqrt{4-t}, (3-t + 4-t)) \cdot (-1; -1) dt = \\
 &= \int_0^2 (-\sqrt{4-t} - 7 + 2t) dt = \left(-\frac{(4-t)^{3/2}}{3/2} - 7t + t^2 \right) \Big|_0^2 = -13.4477
 \end{aligned}$$

Observaciones:

- 1) En el ejemplo visto se calcula la integral de línea de un campo $\vec{F}$ sobre distintos caminos que unen los puntos A (1,2) y B (3,4).

Los resultados son distintos en cada caso.

Esto demuestra que la integral de línea depende del camino que une los puntos extremos.



- 2) Las ecuaciones en (b) y (c) son las de los ejemplos 1 y 2. Vimos allí que estas ecuaciones son *equivalentes*; o sea, definen la misma curva; en particular, el segmento de extremos A (1; 2) y B (3; 4). Vimos también que lo originan en sentidos opuestos: $\vec{r}_1(t)$ de A a B y $\vec{r}_2(t)$ de B a A.

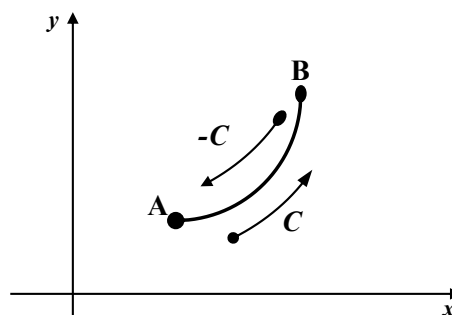
Las respectivas integrales de línea son distinta también en este caso, aún cuando se calculen sobre un mismo segmento. Finalmente concluimos que la integral de línea no depende sólo del camino sino también del sentido en que se recorre el camino.

En el ejemplo observamos que cuando la curva se recorre en sentidos opuestos, los resultados difieren sólo en el signo; o sea que:

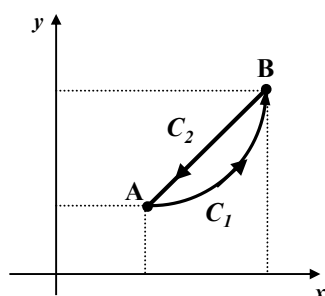
- si C es una curva recorrida de A hacia B
- y, $-C$ la misma curva recorrida de B hacia A, entonces una propiedad de las integrales es:

$$\int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



Ejemplo Calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ para $\vec{F}(x,y) = (\sqrt{y}; x+y)$ y la curva cerrada C recorrida en *sentido antihorario* y formada por el segmento de parábola dado por, $\vec{r}(t) = (t; t^2 - 3t + 4)$; $t \in [1, 3]$ y el segmento de recta que une sus extremos.



La curva C resulta ser la unión de dos curvas: $C = C_1 \cup C_2$

- $C_1 \rightarrow$ seg. de parábola de ecuación $\vec{r}(t) = (t; t^2 - 3t + 4)$
- $C_2 \rightarrow$ seg. de recta de extremos A(1,2) y B(3,4).

$$C = C_1 \cup C_2 \Rightarrow \mathbf{J}_C = \mathbf{J}_{C_1} + \mathbf{J}_{C_2}$$

Para calcular las integrales del 2^{do} miembro debemos contar con las respectivas parametrizaciones de C_1 y C_2 . En este caso no tenemos la del segmento de recta, C_2 . Para hallar una parametrización de C_2 debemos tener en cuenta que C_1 y C_2 deben ser recorridas de manera que determinen la curva C en el sentido pedido.

Así, C_1 debe recorrerse de A hacia B mientras que C_2 debe hacerse de **B hacia A**.

- Parametrización de C_2 (segmento de recta de extremos A, B)

Para parametrizar C_2 debemos:

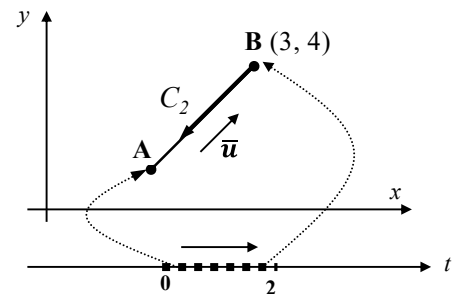
- hallar las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por A(1,2) y B(3,4) y,
- ajustar el parámetro para referirnos sólo al segmento buscado.

Sabemos que la parametrización no es única, que hay distintas formas de tomar los elementos necesarios para ello; o sea, el punto de paso y el vector paralelo a r .

Así, si calculamos $\overrightarrow{AB} = (2,2) \parallel r$ y tomamos, $A(1,2) \in r$ y $\vec{u} = (1,1) \parallel r$, tenemos el siguiente par de ecuaciones paramétricas:

$$x = 1 + t \quad ; \quad y = 2 + t.$$

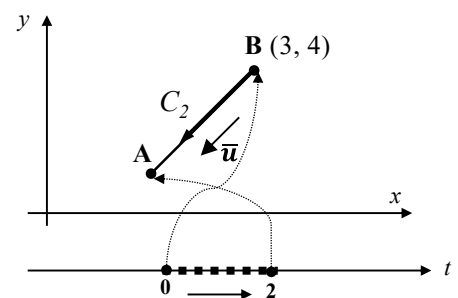
que, para t en $[0, 2]$, determinan el segmento $\overline{AB}$ pero, ¡recorrido de A hacia B!, que no es lo que necesitamos.



Aquí tenemos dos opciones:

- 1) Recordar que para un mismo camino, $\int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$, con lo cual una forma de resolver el cálculo de la integral para el segmento recorrido de B a A es, calcular de A a B, $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$, y luego cambiar el signo al resultado.

- 2) Elegir otra parametrización, una que *directamente* recorra la curva de **B a A**. Para ello el vector paralelo a la recta lo elegimos de modo que, del vamos, apunte en la dirección deseada, en este caso de **B hacia A**; por ejemplo el vector $\overrightarrow{BA}$ o cualquiera otro paralelo a él.



Así, si calculamos $\overrightarrow{BA} = (-2, -2)$ y tomamos, $B(3,4) \in r$ y $\vec{u} = (-1, -1) \parallel r$, tenemos el siguiente par de ecuaciones paramétricas:

$$x = 3 - t \quad ; \quad y = 4 - t$$

que, para t en $[0, 2]$, determinan el segmento $\overline{BA}$ pero, ¡¡ recorrido de B hacia A !!

(*) Observar que las curvas dadas son las del ejemplo anterior, luego:

Para C_2

Por (1), $x = 1 + t$; $y = 2 + t \rightarrow \bar{r}_1(t) = (1 + t; 2 + t)$; $t \in [0, 2]$ y,

$$\int_{C_2} = - \left(\int_A^B \bar{F} \cdot d\bar{r}_1 \right) = - \left(\int_0^2 \bar{F}(\bar{r}_1(t)) \cdot \bar{r}'_1(t) dt \right) = \left(\int_2^0 \bar{F}(\bar{r}_1(t)) \cdot \bar{r}'_1(t) dt \right) = -9.78867$$

Por (2), $x = 3 - t$; $y = 4 - t \rightarrow \bar{r}_2(t) = (3 - t; 4 - t)$; $t \in [0, 2]$ y,

$$\int_{C_2} = \int_B^A \bar{F} \cdot d\bar{r}_2 = \int_0^2 \bar{F}(\bar{r}_2(t)) \cdot \bar{r}'_2(t) dt = -9.7886$$

Para C_1 $\rightarrow$ segmento de parábola de ecuación $\bar{r}(t) = (t; t^2 - 3t + 4)$; $t \in [1, 3]$

$$\int_{C_1} = \int_1^3 \bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t) dt = 14.3615$$

Finalmente para C :

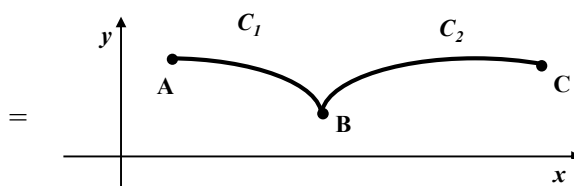
$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} = 14.3615 - 9.78867 = 4.57283$$

13.2.2 Propiedades de la Integral de Línea

IL-1) Linealidad: $\int_C (\alpha \bar{F} + \beta \bar{G}) \cdot d\bar{r} = \alpha \int_C \bar{F} \cdot d\bar{r} + \beta \int_C \bar{G} \cdot d\bar{r}$

IL-2) Aditividad del camino: $C = C_1 \cup C_2$

$$\begin{aligned} \int_C \bar{F} \cdot d\bar{r} &= \int_{C_1} \bar{F} \cdot d\bar{r} + \int_{C_2} \bar{F} \cdot d\bar{r} = \\ &= \int_A^B \bar{F} \cdot d\bar{r} + \int_B^C \bar{F} \cdot d\bar{r} \end{aligned}$$



IL-3) Integral de Línea, frente al cambio de parametrización (parámetro).

Si $\bar{r}$ y $\bar{s}$ son *equivalentes*; o sea, definen la misma curva C , entonces si con $-C$ indicamos la curva C recorrida en sentido opuesto al original, tenemos:

➤ Si $\bar{r}$ y $\bar{s}$ originan C en el mismo sentido; o sea, si $\text{graf } \bar{r} = \text{graf } \bar{s} = C$, entonces la integral de línea permanece invariable frente al cambio de parametrización

$$\int_C \bar{F} \cdot d\bar{s} = \int_C \bar{F} \cdot d\bar{r}$$

- Si $\bar{r}$ y $\bar{s}$ originan C en *sentidos opuestos*; o sea, si $\text{graf } \bar{r} = C$ y $\text{graf } \bar{s} = -C$ entonces la integral de línea cambia de signo frente al cambio de parametrización;

$$\int_{-C} \bar{F} \cdot d\bar{s} = - \int_C \bar{F} \cdot d\bar{r}$$

13.2.3 Aplicaciones de la Integral de Línea

La integral de línea se presentan al estudiar *trabajo*, *energía potencial* y otras cuestiones físicas que establecen el comportamiento de un campo vectorial *a lo largo de una curva*.

Una de las aplicaciones más importantes es la de hallar el trabajo W realizado sobre un objeto que se mueve en un *campo de fuerzas* a lo largo de una curva C .

Sea $\bar{F}$ una fuerza variable cuyo valor en cada punto del plano está dado por el campo vectorial $\bar{F}(x, y) = (P(x, y); Q(x, y))$ definido en una región D del plano, con P y Q funciones de dos variables con derivadas primeras continuas en D .

$$\begin{aligned} \bar{F}: D &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\rightarrow \bar{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) \end{aligned}$$

Ej: $\bar{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

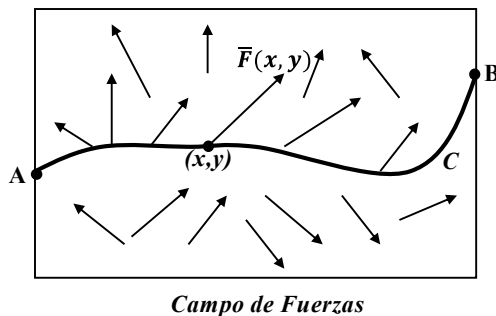
$$\begin{aligned} (x, y) &\rightarrow \bar{F}(x, y) = (x \cdot y, x + y) \\ (2, 5) &\rightarrow \bar{F}(2, 5) = (10, 7) \end{aligned}$$

P y Q funciones de dos variables:

➤ $P: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \rightarrow u = P(x, y)$

➤ $Q: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \rightarrow v = Q(x, y)$

Si ahora convenimos que *el origen* de cada uno de los vectores-fuerza que determina $\bar{F}$ sea (x, y) , punto donde se *calcula* $\bar{F}$, tenemos entonces un *campo de fuerzas en D*.



Este campo de fuerzas, para mover desde **A** hasta **B** y sobre la curva C , cualquier partícula que entre al mismo en un momento dado, realiza un cierto '*trabajo*'.

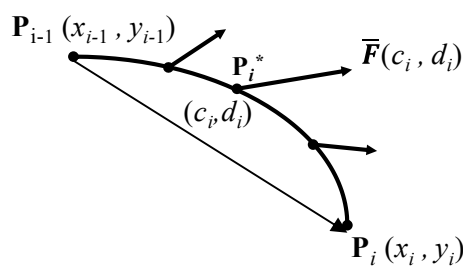
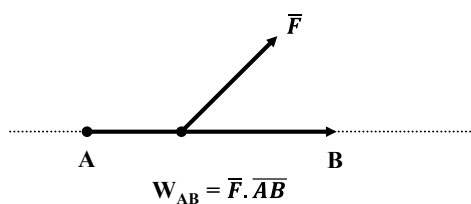
Si $\bar{r}(t) = (x(t), y(t))$ es la ecuación vectorial de la curva, ese trabajo se calcula como:

$$W_{AB} = \int_C \bar{F} \cdot d\bar{r}$$

Observación:

(I) El problema referido al cálculo del *trabajo* requerido para mover una partícula P desde **A** hasta **B**, es un problema ya resuelto para el caso de fuerza constante, $\bar{F}$, y camino rectilíneo: $W_{AB} = \bar{F} \cdot \bar{d}$; con $\bar{d} = \overline{AB}$.

(II) En este caso el problema se extiende al caso de fuerza variable, $\vec{F}$, y camino curvo.



$$W_{P_{i-1}P_i} \approx \vec{F}(c_i, d_i) \cdot \overline{P_{i-1}P_i} \quad (**)$$

$$W_{AB} \approx \sum_{i=1}^n \vec{F}(c_i, d_i) \cdot \overline{P_{i-1}P_i}$$

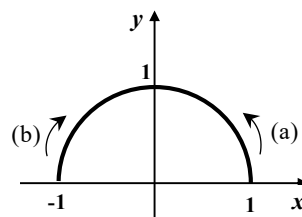
$$W_{AB} = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^n \vec{F}(c_i, d_i) \cdot \overline{P_{i-1}P_i} \right]$$

(**) Aquí consideramos el valor de *una* de entre todas las fuerzas aplicadas en un cierto tramo de la curva. Luego aproximamos el trabajo realizado por el campo de fuerzas para desplazar la partícula a lo largo de un subarco de la curva, por el trabajo realizado por la fuerza constante $\vec{F}(c_i, d_i)$ para desplazar la partícula a lo largo del tramo recto $\overline{P_{i-1}P_i}$. Sumamos todas las aproximaciones parciales y pasamos al límite. Como ya vimos, si el límite del segundo miembro existe, este no es otra cosa que la integral de línea sobre la curva; en este caso, la trayectoria de la partícula.

Ejemplo Hallar el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\vec{F}(x, y) = (-y^2, x y)$ para mover una partícula a lo largo de la semicircunferencia $\vec{r}(t) = (\cos(t); \sin(t))$ obtenida: a) al variar t entre 0 y π ; b) al variar t entre $-\pi$ y 0

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^\pi \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt ; \text{ luego,}$$

- $\vec{F}(\vec{r}(t)) = \vec{F}(\cos(t), \sin(t)) = (-\sin^2 t, \cos t \sin t)$
- $\vec{r}'(t) = (-\sin(t); \cos(t))$
- $\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = (\sin^2 t, \cos t \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) = -\sin^3 t + \cos^2 t \sin t = \sin t$



$$\text{a) } W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^\pi \sin t dt = -\cos t \Big|_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) + 1 = 2$$

$$\text{b) } W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-\pi}^0 \sin t dt = -\cos t \Big|_{-\pi}^0 = -\cos 0 - (-\cos(-\pi)) = -1 - 1 = -2$$

Nota: observar que la trayectoria es la misma pero recorrida en sentidos opuestos. De allí, y de acuerdo con las propiedades vistas, los resultados opuestos obtenidos.

13.2.4 Forma diferencial de la Integral de Línea: $\int_C P \cdot dx + Q \cdot dy$

En este párrafo proponemos otra forma de *simbolizar* la integral de línea. En ella la función integrando se presenta como *forma diferencial*: " $P \, dx + Q \, dy$ ".

En lo que sigue trabajamos en el plano, pero lo hecho se extiende fácilmente al espacio.

Recordemos entonces que en el caso de $\mathbb{R}^2$ partimos de una curva plana regular dada por su ecuación vectorial $\bar{r}(t) = (x(t); y(t))$ y que el campo a integrar es un campo vectorial,

$$\bar{F}: D \rightarrow \mathbb{R}^2, \text{ con } D \subset \mathbb{R}^2.$$

- Recordemos como se define un campo vectorial:

$$\begin{aligned} \bar{F}: D &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\rightarrow \bar{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ej: } \bar{F}: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\rightarrow \bar{F}(x,y) = (x \, y, x + y) \\ (2,5) &\rightarrow \bar{F}(2,5) = (10, 7) \end{aligned}$$

P y Q funciones de dos variables:

$$\begin{aligned} \triangleright P: D \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\rightarrow u = P(x,y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangleright Q: D \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\rightarrow v = Q(x,y) \end{aligned}$$

- Por otro lado, dada $\bar{r}(t) = (x(t); y(t))$ tenemos que,

$$\bar{r}'(t) = (x'(t); y'(t))$$

$$\text{luego, } d\bar{r} = \bar{r}' \cdot dt = (x' dt; y' dt) = (dx, dy)$$

Repasados estos conceptos estamos entonces en condiciones de justificar la notación diferencial.

⊗ **FORMA DIFERENCIAL de la INTEGRAL DE LÍNEA**

Dada C por $\bar{r}(t) = (x(t); y(t))$ y el campo vectorial $\bar{F}$ por sus componentes P y Q , $\bar{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$, tenemos entonces que:

$$\int_C \bar{F} \cdot d\bar{r} \stackrel{d\bar{r}=(dx,dy)}{=} \int_C (P; Q) \cdot (dx; dy) = \int_C P \cdot dx + Q \cdot dy$$

⊗ **Fórmula de calculo para la forma diferencial de la integral de línea**

Dada $\bar{r}(t) = (x(t); y(t))$ con $t \in [a, b]$, $\bar{r}'(t) = (x'(t); y'(t))$; luego,

$$\int_C P \cdot dx + Q \cdot dy = \int_a^b P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) \, dt + Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t) \, dt$$

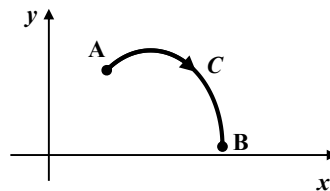
$$\int_C P \cdot dx + Q \cdot dy = \int_a^b (P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t)) \, dt$$

Ejemplo Calcular $\int_C y \cdot dx + x^2 \cdot dy$ siendo C el arco de parábola $y = 4x - x^2$ recorrido desde $A(1,3)$ a $B(4,0)$.

1º) Parametrizamos la curva y hallamos el intervalo de variación del parámetro:

$$C: \begin{cases} x = t & \rightarrow dx = 1 \cdot dt \\ y = 4t - t^2 & \rightarrow dy = (4 - 2t) \cdot dt \end{cases}$$

$$t \in [1, 4]$$



2º) Calculamos la integral usando la fórmula de cálculo:

$$\begin{aligned} \int_C y \cdot dx + x^2 \cdot dy &= \int_1^4 (4t - t^2) \cdot 1 \cdot dt + t^2 \cdot (4 - 2t) \cdot dt \\ &= \int_1^4 (4t + 3t^2 - 2t^3) \cdot dt = \frac{69}{2} \end{aligned}$$

Observación: ya vimos que W , trabajo a lo largo de una curva, se calcula con una integral de línea; luego con la nueva notación:

$$W_{AB} = \int_C P \cdot dx + Q \cdot dy = \int_C \underbrace{P}_{\substack{F_x : \text{componente} \\ \text{en } x \text{ de } \vec{F}}} dx + \int_C \underbrace{Q}_{\substack{F_y : \text{componente} \\ \text{en } y \text{ de } \vec{F}}} dy$$

W realizado por F_x
componente en x
de $\vec{F}$

W realizado por F_y
componente en y
de $\vec{F}$

Aplicación: vimos que $W_{AB} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Vemos ahora, acudiendo a la **Ley de Newton**, como esta expresión se relaciona con la variación de energía cinética. Sean:

- m = masa de una partícula P .
- $\vec{F}$ = campo de fuerza dado por un campo vectorial.
- $\vec{r}(t)$ = posición de $P_{(x,y)}$ en el instante t ; $t \in [a, b]$; $\vec{r}(a) = A$ y $\vec{r}(b) = B$
- $\vec{r}'(t)$ = velocidad de la partícula en el instante t ; $\vec{r}'(t) = \vec{v}(t)$
- E_C = energía cinética $\rightarrow E_C(P) = \frac{1}{2} m \cdot v^2$, con $v = |\vec{v}|$
- Ley de Newton: $\vec{F}(P_{(x,y)}) = m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{v}'$

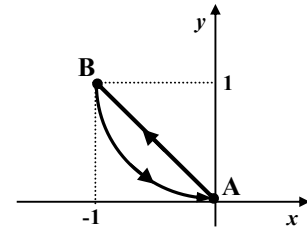
$$\begin{aligned}
\text{Luego, } W_{AB} &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \\
&= \int_a^b m \cdot \vec{v}'(t) \cdot \vec{v}(t) dt = m \cdot \int_a^b \vec{v}'(t) \cdot \vec{v}(t) dt \\
&= m \cdot \int_a^b \frac{1}{2} (\vec{v} \cdot \vec{v})' dt = \frac{1}{2} \cdot m \int_a^b (|\vec{v}|^2)' dt = \\
&= \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot |\vec{v}|^2 \right) \Big|_a^b = \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2(t) \right) \Big|_a^b = \\
&= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2(b) - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2(a) = E_C(B) - E_C(A)
\end{aligned}$$

Conclusión: $W_{AB} = E_C(B) - E_C(A) \Rightarrow W_{AB}$ es la variación de energía cinética entre A y B.

Ejemplo Calcular el trabajo realizado por $\vec{F}(x, y) = (x y^2; x^2 y)$ para mover una partícula en *sentido antihorario* a lo largo de la curva cerrada C determinada por:

a) C_1 : arco de parábola $y = x^2$ con $x \in [-1, 0]$ y,

b) C_2 : el segmento de recta entre A (0,0) y B(-1,1)



$$W_{AB} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow W_{AB} = \int_C x \cdot y^2 \cdot dx + x^2 \cdot y \cdot dy = \int_{C_1} + \int_{C_2}$$

$$\begin{aligned}
\text{a) } \int_{C_1} x \cdot y^2 dx + x^2 \cdot y dy &= \\
&= \int_{-1}^0 t \cdot t^4 \cdot dt + t^2 \cdot t^2 \cdot 2t \cdot dt = \\
&= \int_{-1}^0 (t^5 + 2 \cdot t^5) \cdot dt = \int_{-1}^0 3 \cdot t^5 \cdot dt = \\
&= 3 \cdot \frac{t^6}{6} \Big|_{-1}^0 = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1 \rightarrow \begin{cases} x = t \rightarrow dx = dt \\ y = t^2 \rightarrow dy = 2t dt \end{cases} \\
\bullet \quad t \in [-1, 0]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } \int_{C_2} x \cdot y^2 dx + x^2 \cdot y dy &= \\
&= \int_0^1 -t \cdot t^2 \cdot (-dt) + t^2 \cdot t \cdot dt = \\
&= \int_0^1 (t^3 + t^3) \cdot dt = \frac{t^4}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(0;0) \in C_2 = r; \text{ « seg. de recta »} \\
\overline{AB} = (-1;1) \rightarrow \overline{AB} = \vec{u} // \vec{r} \\
C_2 \rightarrow \begin{cases} x = -t \rightarrow dx = (-1) dt \\ y = t \rightarrow dy = dt \end{cases} \\
\bullet \quad t \in [0,1]
\end{aligned}$$

Finalmente: $W_{AB} = \int_{C_1} + \int_{C_2} = \frac{1}{2} + (-\frac{1}{2}) = 0$

Observaciones: $\vec{F}(x, y) = (x y^2; x^2 y) \Rightarrow P(x, y) = x y^2; Q(x, y) = x^2 y; D = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2xy; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy \Rightarrow \boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} !!}$$

Este último resultado no es una casualidad. En la próxima sección trataremos de entender porqué ocurre.

13.2.5 Teorema fundamental de las Integrales de Línea

Estudiaremos ahora una clase particular de campos vectoriales, que tienen importancia en aplicaciones físicas: los llamados campos vectoriales conservativos. Daremos ahora su definición para poder luego enunciar y demostrar el teorema fundamental de la integral de línea.

DEFINICIÓN: Campo de gradientes ó Campo Conservativo.

El campo vectorial $\vec{F}(x; y) = (P(x; y); Q(x; y))$ se dice que es un campo de gradientes ó campo conservativo, si existe un campo escalar $f(x; y)$ tal que $\nabla f = \vec{F}$. O sea, si

existe f tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(x; y) = P(x; y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x; y) = Q(x; y)$.

En tal caso f se dice que es una **función potencial** para $\vec{F}$. (Observar que f vendría a ser una “primitiva” de $\vec{F}$ ya que su “derivada”, su *gradiente*, es $\vec{F}$.)

De acuerdo con lo desarrollado para el cálculo integral de funciones escalares, el segundo teorema fundamental del cálculo integral se puede expresar como

$$\int_a^b f'(x) = f(b) - f(a)$$

donde f es continua en $[a, b]$. A este resultado también se le conoce con el nombre de “Teorema del cambio total”, o sea, la integral de la razón de cambio es el cambio neto.

Si ahora pensamos en el vector gradiente de un campo escalar ∇f de dos o tres variables como un tipo de derivada de f , entonces se puede considerar el teorema siguiente como una versión del teorema fundamental del cálculo integral para las integrales de línea:

TEOREMA Fundamental de las Integrales de Línea

Sea C una curva suave definida por la función vectorial $\vec{r}: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ y

$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en C , entonces $\int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a))$.

Demostración:

$$\int_C \nabla f \cdot d\vec{r} \stackrel{1}{=} \int_a^b \nabla f(\vec{r}(t)) \vec{r}'(t) dt \stackrel{2}{=} \int_a^b [f(\vec{r}(t))]' dt \stackrel{3}{=} f(\vec{r}(t)) \Big|_a^b \stackrel{4}{=} f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a))$$

1- Por la fórmula de cálculo de la integral de línea

2- Por regla de la cadena $(f \circ \vec{r})'(t) = [f(\vec{r}(t))]' = \nabla f(\vec{r}(t)) \vec{r}'(t)$

3- Por definición de primitiva

4- Por regla de Barrow

NOTAS:

1- Este teorema es una herramienta para evaluar una integral de línea de un campo vectorial conservativo (campo vectorial gradiente de la función potencial f) tan sólo conociendo el valor de f en los puntos extremos de C (del punto inicial P_i y del punto final P_f). Es decir que la integral de línea de un campo de gradiente es **independiente de la trayectoria**.

2- Al mismo tiempo nos está diciendo que la integral de línea de ∇f es el cambio total de f : $\int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f(P_f) - f(P_i)$

Como hemos visto que la integral de línea de cualquier campo vectorial conservativo ∇f es independiente de la trayectoria, se infiere que $\int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = 0$ para cualquier trayectoria cerrada.

La interpretación física es que el trabajo hecho por un campo de fuerza conservativo, como el campo gravitacional o eléctrico, cuando se desplaza un objeto alrededor de una trayectoria cerrada es 0.

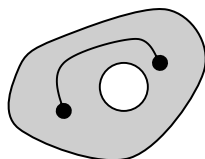
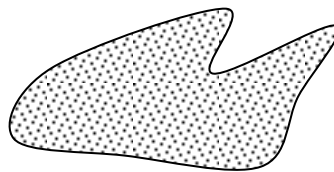
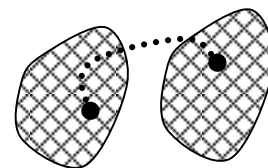
El teorema que presentamos más adelante establece que los *únicos campos vectoriales que son independientes de la trayectoria son conservativos*. Está planteado y demostrado para curvas en $\mathbb{R}^2$, no obstante hay una versión similar para las curvas en $\mathbb{R}^3$. Pero antes, para poder demostrarlo, necesitamos dar nuevas definiciones sobre el conjunto D donde se define el campo vectorial.

DEFINICIÓN: Conjunto abierto (en $\mathbb{R}^2$):

D es un conjunto abierto si para todo punto P en D hay un disco con centro P que está totalmente en D (de esta manera, D no contiene ninguno de sus puntos límite o frontera).

DEFINICIÓN: Conjuntos conexos y simplemente conexos (en $\mathbb{R}^2$):

- **Conjunto conexo**: el conjunto D se dice conexo si todo par de puntos en D se puede unir mediante una curva regular a trozos íntegramente contenida en D .
- **Conjunto simplemente conexo**: D es simplemente conexo si es conexo y no tiene “agujeros”.

**Conexo****Simplemente Conexos**
(también Conexos)**No Conexos**

Ahora podemos enunciar y demostrar el teorema:

TEOREMA (Sobre la independencia de la trayectoria)

Sea $\vec{F}$ un campo vectorial que es continuo en una región **conexa abierta** D .

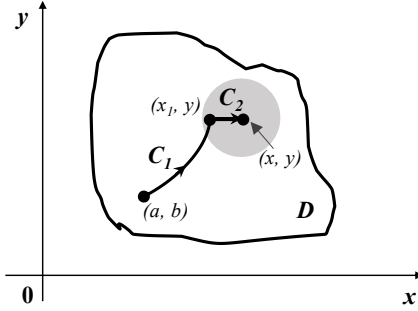
Si $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ es **independiente de la trayectoria** en D , entonces $\vec{F}$ es un campo vectorial conservativo en D , es decir, existe una función f tal que $\nabla f = \vec{F}$.

Demostración

Sea $A(a, b)$ un punto fijo en D . Podemos obtener la siguiente función potencial

$$f(x, y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} \bar{F} d\bar{r}$$

para cualquier punto (x, y) en D . Puesto que $\int_C \bar{F} d\bar{r}$ es independiente de la trayectoria, no importa qué trayectoria C desde (a, b) hasta (x, y) se recorra para evaluar $f(x, y)$.



Como D es abierto, existe un disco que está contenido en D cuyo centro es (x, y) . Elijamos cualquier punto (x_1, y) en el disco con $x_1 < x$, y dejemos que C sea cualquier trayectoria C_1 desde (a, b) hasta (x_1, y) seguida por el segmento rectilíneo horizontal C_2 desde (x_1, y) a (x, y) . Entonces,

$$f(x, y) = \int_{C_1} \bar{F} d\bar{r} + \int_{C_2} \bar{F} d\bar{r} = \int_{(a,b)}^{(x_1,y)} \bar{F} d\bar{r} + \int_{C_2} \bar{F} d\bar{r}$$

Observe que la primera de estas integrales no depende de x , de modo que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 + \frac{\partial}{\partial x} \int_{C_2} \bar{F} d\bar{r} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{C_2} P dx + Q dy$$

si expresamos a $\bar{F}$ en su forma diferencial $\bar{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$.

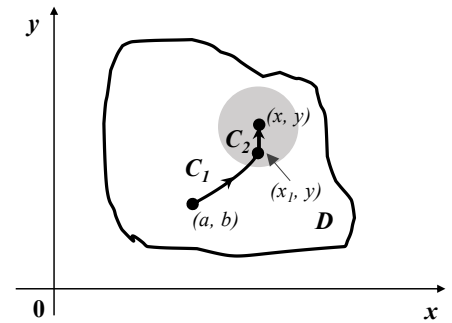
Luego, en C_2 , y es constante, de manera $dy = 0$. Usando t como parámetro, donde $x_1 \leq t \leq x$ tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{C_2} P dx + \underbrace{Q dy}_0 = \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_1}^x P(t, y) dt = P(x, y)$$

de acuerdo con el primer teorema fundamental del cálculo integral.

Si ahora realizamos un razonamiento similar, pero utilizando un segmento vertical, se demuestra con facilidad que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{C_2} \overbrace{P}^0 dx + Q dy = \frac{\partial}{\partial y} \int_{y_1}^y Q(x, t) dt \\ &= Q(x, y) \end{aligned}$$



Por lo tanto, $\bar{F}(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = \nabla f$,
entonces $\bar{F}$ es conservativo (q.e.d)

Queda pendiente dar respuesta a la siguiente pregunta: ¿cómo determinamos si un campo $\bar{F}$ es conservativo o no? O sea, ¿es posible establecer condiciones suficientes sobre $\bar{F}$ para que éste sea conservativo? Para tratar de dar respuesta, veremos el siguiente teorema:

TEOREMA Sea $\bar{F}$ un campo vectorial conservativo en D , con ley $\bar{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, donde P y Q tienen derivadas parciales de primer orden continuas en un dominio D , entonces en la totalidad de D

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

El recíproco de este teorema es válido sólo para un tipo especial de región, una *región simplemente conexa*. En términos de regiones simplemente conexas, es posible enunciar un recíproco parcial de este teorema proponiendo una condición más rigurosa sobre la región D donde se define el campo $\bar{F}$.

TEOREMA Sea $\bar{F}$ un campo vectorial, con ley $\bar{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, en una región D simplemente conexa y abierta, donde P y Q tienen derivadas parciales de primer orden continuas y $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ en toda la región D , entonces $\bar{F}$ es conservativo.

Este teorema (que no demostraremos) proporciona un método aceptable para comprobar que un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$ es conservativo.

Ejemplo (a) Determine si el campo vectorial $\bar{F}$, cuya ley damos a continuación, es conservativo o no lo es:

$$\bar{F}(x, y) = (3 + 2xy, x^2 - 3y^2)$$

(b) Si su respuesta es afirmativa, encuentre una función f tal que $\bar{F} = \nabla f$.

(c) Evalúe la integral de línea $\int_C \bar{F} \cdot d\bar{r}$, donde C es la curva definida por $\bar{r}$:

$$\bar{r}(t) = (e^t \sin t, e^t \cos t), 0 \leq t \leq \pi$$

SOLUCION

(a) Si $P(x, y) = 3 + 2xy$, y $Q(x, y) = x^2 - 3y^2$, entonces

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$$

Además, el dominio de $\bar{F}$ es todo el plano ($D = \mathbb{R}^2$), que es abierto y simplemente conexo. Por lo tanto, aplicando el último teorema, podemos afirmar que $\bar{F}$ es conservativo.

(b) Como $\bar{F}$ es conservativo existe una función f tal que $\nabla f = \bar{F}$, es decir,

$$f_x(x, y) = 3 + 2xy \qquad f_y(x, y) = x^2 - 3y^2$$

Al integrar a f_x con respecto a x , obtenemos

$$f(x, y) = 3x + x^2y + g(y)$$

Notemos que la constante de integración es una constante con respecto a x , es decir, una función de y , que llamamos $g(y)$. Si luego derivamos ambos miembros de esta última expresión con respecto a y tenemos

$$f_y(x, y) = x^2 + g'(y)$$

Pero como $f_y(x, y) = x^2 - 3y^3$ entonces $g'(y) = -3y^3$. Ahora, integrando g' con respecto a y obtenemos

$$g(y) = -y^3 + K$$

donde K es una constante. Sustituyendo esta expresión en la ecuación de $f(x, y)$ hallada más arriba, finalmente podemos dar un conjunto de funciones potenciales f tal que $\nabla f = \vec{F}$:

$$f(x, y) = 3x + x^2y - y^3 + K$$

(c) Como $\vec{F}$ es conservativo, para evaluar la integral de línea $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ podemos usar el

Teorema Fundamental de las Integrales de Línea. Para ello, basta con saber cuál es el punto inicial y el punto final de la curva C , es decir, $\vec{r}(0) = (0, 1)$ y $\vec{r}(1) = (0, -e^\pi)$. Obviamente, en la expresión para $f(x, y)$ hallada en el ítem (b), cualquier valor de constante K servirá, por lo tanto, $K = 0$. Con todo, tenemos

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f(0, -e^\pi) - f(0, 0) = e^{3\pi} - (-1) = e^{3\pi} + 1$$

Como se ve, este método es más sencillo que el método directo para evaluar las integrales de línea.

Los resultados que hemos obtenido en esta última sección nos permiten dar las siguientes propiedades de los campos conservativos.

Propiedades de los campos conservativos

1.- Si $\vec{F}$ es un campo vectorial continuo en un conjunto conexo abierto D de $\mathbb{R}^2$ entonces $\vec{F}$ es conservativo si y sólo si la integral de línea de $\vec{F}$ sobre cualquier curva cerrada C , es cero.

2.- Si $\vec{F}$ es un campo vectorial continuo en un conjunto conexo abierto D de $\mathbb{R}^2$ entonces $\vec{F}$ es conservativo si y sólo si la integral de línea de $\vec{F}$ es independiente del camino (sólo depende de los extremos de la curva C).

* En este caso la notación, $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$, resulta la más conveniente.

* Si $\vec{F}$ es conservativo y f es una **función potencial** para $\vec{F}$, entonces para dos puntos cualesquiera $A(x_1; y_1)$ y $B(x_2; y_2)$ en D , se tiene que $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(B) - f(A)$ cualquiera sea la curva C regular a trozos que una A con B .

(Observar que esta propiedad es la análoga de la Regla de Barrow: la integral de línea desde A hasta B es igual a la "primitiva" en el extremo menos la "primitiva" en el origen.)

3.- Si $\vec{F}(x; y) = (P(x; y); Q(x; y))$ es un campo vectorial derivable con continuidad en un conjunto abierto D de $\mathbb{R}^2$ entonces

a) $\vec{F}$ conservativo en D conexo $\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}(x; y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x; y); \forall (x; y) \in D$.

b) D simplemente conexo y $\frac{\partial P}{\partial y}(x; y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x; y); \forall (x; y) \in D \Rightarrow \vec{F}$ conservativo

4.- Si $\vec{F}$ es un campo de fuerzas conservativo en un conjunto abierto y conexo D entonces el trabajo a lo largo de cualquier curva cerrada es cero; o equivalentemente, es independiente del camino. Así:

$$W_{AX} = \int_A^X \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(X) - f(A)$$

- La energía potencial, U , se define como menos la función potencial: $U = -f$. Luego:

$$W_{AX} = \int_A^X \vec{F} \cdot d\vec{r} = -U(X) + U(A)$$

- Por otro lado vimos que: $W_{AX} = \int_A^X \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_C(X) - E_C(A)$

Luego hemos obtenido un conocido resultado de la Física:

$$E_C(X) + U(X) = E_C(A) + U(A) \text{ (cte)}$$

que establece que si un objeto se mueve desde un punto A hacia otro punto X bajo la influencia de un campo de fuerzas conservativo, entonces la suma de su energía potencial y de su energía cinética es constante. Este enunciado recibe el nombre de **ley de la conservación de la energía**, y es la razón de que el campo vectorial se llame *conservativo*.

13.2.6 Integral de línea con respecto a la longitud de arco

Se refiere a la integración sobre una curva C de un campo escalar f , ($f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 2$ ó 3), definido y acotado sobre la curva C .

La curva se da por su ecuación vectorial: $\vec{r}(t) = (x(t); y(t))$, ($n=2$).

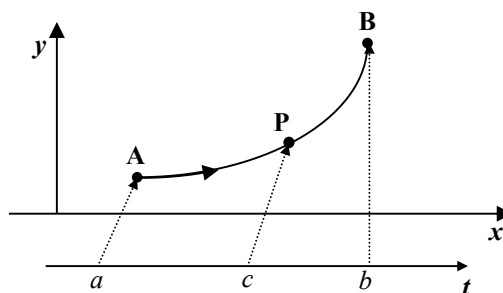
La notación usada para indicarla es: $\int_C f(x, y) ds$, ds = diferencial de arco.

⊠ Si $\vec{r}$ define una curva regular entonces esta curva es, según vimos en capítulos anteriores, una curva 'rectificable' y su longitud "s", para $t \in [a, b]$, está dada por :

$$s = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \cdot dt \Rightarrow s = \int_a^b |\vec{r}'(t)| \cdot dt$$

Si el extremo superior de la integral varía en $[a; b]$ queda definida una función (la *función integral*). Esta función, en este caso y para cada $c \in [a; b]$, da la longitud de la curva determinada al variar t en el intervalo $[a; c]$, o sea del arco **AP**.

Esta función se llama *función longitud de arco*.



$$s(c) = \int_a^c \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_a^c |\vec{r}'(t)| dt$$

Acorde al Primer Teorema Fundamental del Cálculo Integral tenemos que la derivada de esta función es la función integrando calculada en el extremo superior. Así: $s'(\tau) = |\vec{r}'(\tau)|$.

Como $ds = s'(t) dt$, tenemos finalmente que el diferencial de arco es: $ds = |\vec{r}'(t)| dt$.

DEFINICIÓN: integral de línea con respecto a la longitud de arco

Sea f un campo escalar definido sobre una curva regular C , dada por la función vectorial $\vec{r}$ con ley $\vec{r}(t) = (x(t); y(t))$, entonces la integral de línea con respecto a la longitud de arco es

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) s'(t) dt \quad \text{ó} \quad \int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

donde ds es el diferencial de arco definido más arriba.

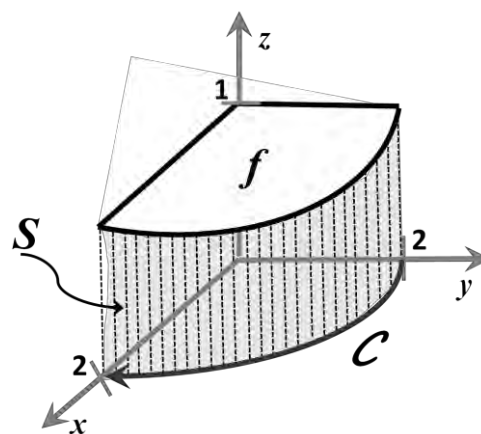
Las integrales de línea con respecto a la longitud de arco se presentan en problemas relativos a la distribución de masa a lo largo de una curva, determinación del centro de gravedad, momento de inercia de un alambre con respecto a un eje, y otras cuestiones en las que se estudia el comportamiento de un campo escalar *a lo largo de una curva*.

Ejemplo

(a) Demostrar *porqué* puede calcular el área de la superficie S definida por el campo escalar f y la curva plana C que se muestran en la figura adjunta (en líneas punteadas), utilizando la siguiente expresión:

$$P = \int_0^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4 - x^2}} dx$$

La ley de f es $f(x; y) = 1$ y la curva C corresponde a un arco de circunferencia de radio 2.



(b) Encuentre el valor del área solicitada utilizando la expresión que le resulte más conveniente. El resultado hallado utilizando la expresión del ítem (a); ¿es el área solicitada?

SOLUCION

(a) La curva C se puede definir a partir de la función escalar h , de ley $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$, con $x \in [0, 2]$.

De acuerdo a lo visto en la sección 10.4.1, un problema geométrico notable que resuelve la integral de una función escalar es el cálculo de la longitud L de una curva C . Para ello, se propone la siguiente expresión:

$$L = \int_0^2 \sqrt{1 + (h'(x))^2} dx$$

En nuestro caso, como $h'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$, la expresión anterior se transforma en

$$L = \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{x^2}{4-x^2}} dx = P$$

que es igual a la ecuación del ejemplo.

Al resolver la integral, obtenemos la longitud de C

$$L = \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{x^2}{4-x^2}} dx = \arcsen\left(\frac{1}{2}x\right) \Big|_0^2 = \pi - 0 = \pi$$

que no es otra cosa que un cuarto de una circunferencia de radio 2.

Sin embargo, el ejemplo nos pide demostrar porqué π es también el área de la superficie S . Desde una perspectiva geométrica, podríamos proponer la siguiente ecuación para el cálculo del área de S :

$$\text{área}(S) = \text{base} \cdot \text{altura} = L \cdot 1 = L = \pi$$

Este resultado no es una casualidad, sino que está íntimamente ligado a una propiedad de las integrales de línea de los campos escalares:

“la integral de línea de un campo escalar f con respecto a la longitud de arco admite una interpretación geométrica cuando el campo escalar f se define positivo sobre la curva C . En ese caso, como para una integral simple ordinaria, se interpreta la integral de línea de una función positiva como un área”.

En el ejemplo, como $f(x, y) \geq 0$, $\int_C f(x, y) ds$ representa el área de la “cerca” o de la “cortina” (S en la figura), cuya base es C y su altura es $f(x, y)=1$.

Si ahora calculamos la integral de línea del campo f sobre C , dada por su forma vectorial $\vec{r}(t) = (2\text{sen}t, 2\text{cost})$, $t \in [0, \pi/2]$,

$$\begin{aligned} \int_C h(x, y) ds &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\text{sen}t, 2\text{cost}) \cdot \sqrt{(2\text{sen}'t)^2 + (2\text{cos}'t)^2} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot \sqrt{(2\text{cost})^2 + (-2\text{sent})^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot \sqrt{4} dt = 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi \end{aligned}$$

Notemos que en este caso debemos prestar atención al sentido de recorrido de la curva C para poder definir correctamente los extremos de integración.

(b) Observemos que los resultados obtenidos para las integrales de la función escalar y del campo escalar son iguales, pero en el caso de la última expresión hemos calculado el área de una superficie, mientras que el resultado de la primera corresponde a la longitud de una curva. Sus valores son iguales, pero conciernen a magnitudes diferentes. Finalmente, en el ejemplo es mucho más sencillo el cálculo de la integral del campo escalar f definido sobre C , por lo tanto, podemos usar esta estrategia para calcular longitudes de arcos de curva, siempre y cuando tengamos muy presente lo recién discutido.

13.3 Actividades

13.3.1 Integrales Dobles

1) A) Calcular las siguientes integrales iteradas y graficar en cada caso el rectángulo sobre el que se integra.

$$a) \int_0^2 \int_0^4 x\sqrt{y} \, dx \, dy$$

$$b) \int_{-1}^1 \int_0^1 (x^3 y^3 + 3xy^2) \, dx \, dy$$

$$c) \int_1^2 \int_0^1 (x+y)^2 \, dx \, dy$$

$$d) \int_0^{\ln 2} \int_0^{\ln 5} e^{2x-y} \, dx \, dy$$

B) Calcular nuevamente las integrales dobles de los ítems a) y d) cambiando el orden de iteración. Concluir.

Ayuda:

$$a) *) \int_0^4 \left(\int_0^2 \underbrace{x}_{cte} \cdot \sqrt{y} \, dy \right) dx = \int_0^4 \left(\frac{2}{3} x \cdot y^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 \right) dx =$$

$$\int_0^4 \left(\frac{2}{3} \cdot x \cdot 2^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \cdot x \cdot 0 \right) dx = \int_0^4 \left(\frac{2}{3} \sqrt{8} \cdot x \right) dx = \frac{2}{3} \sqrt{8} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 = \frac{\sqrt{8}}{3} 16 = \frac{32}{3} \sqrt{2}$$

$$**) \iint_D x\sqrt{y} \, dx \, dy = \int_0^2 \left(\int_0^4 x\sqrt{y} \, dx \right) dy = \int_0^2 \left(\int_0^4 \underbrace{x}_{cte} \cdot \sqrt{y} \, dx \right) dy = \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} \cdot \sqrt{y} \Big|_0^4 \right) dy =$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{16}{2} \cdot \sqrt{y} - \frac{0}{2} \cdot \sqrt{y} \right) dy = \int_0^2 (8\sqrt{y}) dy =$$

$$8 \cdot \frac{2}{3} \cdot y^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = 8 \cdot \frac{2}{3} \sqrt{8} - 8 \cdot \frac{2}{3} 0 = \frac{16}{3} \sqrt{8} = \frac{16}{3} 2\sqrt{2} = \frac{32}{3} \sqrt{2}$$

2) Calcular las siguientes integrales dobles sobre las regiones que se indican.

$$a) \iint_R (xy^2 + \frac{y}{x}) \, dA \quad R = \{ (x,y) / 2 \leq x \leq 3; -1 \leq y \leq 0 \}$$

$$b) \iint_T x \operatorname{sen} y \, dA \quad T = \{ (x,y) / 1 \leq x \leq 4 \quad -\pi/2 \leq y \leq 0 \}$$

$$c) \iint_S \frac{1+x}{1+y} \, dA \quad S = \{ (x,y) / -1 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 1 \}$$

3) Hallar el volumen del sólido que está bajo el plano $z = 2x + 5y + 1$ y por encima del rectángulo $R = \{ (x; y) / -1 \leq x \leq 0; 1 \leq y \leq 4 \}$.

4) Encontrar el volumen del sólido que está bajo el paraboloide circular $z = x^2 + y^2$ y encima del rectángulo $R = [-2; 2] \times [-3; 3]$.

5) Determinar el volumen del sólido acotado por la superficie $z = x\sqrt{x^2 + y}$, y los planos $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$ y $z=0$.

6) Encontrar el valor promedio de $f(x, y)$ sobre el rectángulo de vértices $(-1,0)$, $(-1,5)$, $(1,5)$ y $(1,0)$, siendo $f(x,y) = x^2y$.

7) Graficar en cada caso la región sobre la que están planteadas las integrales. Calcular las integrales:

$$a) \int_0^1 \int_0^y x \, dx \, dy$$

$$b) \int_0^1 \int_{1-x}^{1+x} (2x-3y^2) \, dx \, dy$$

8) Dibujar la región de integración y cambiar el orden de integración.

$$a) \int_0^1 \int_0^x f(x,y) \, dx \, dy$$

$$b) \int_0^1 \int_{y^2}^{2-y} f(x,y) \, dx \, dy$$

$$c) \int_0^1 \int_{2x-1}^{-x^2+2} f(x,y) \, dx \, dy$$

$$d) \int_0^4 \int_{y/2}^2 f(x,y) \, dx \, dy$$

9) Evaluar las siguientes integrales dobles.

$$a) \iint_D (x-2y) \, dA \quad D = \{ (x,y) / 1 \leq x \leq 3; 1+x \leq y \leq 2x \}$$

$$b) \iint_D \frac{x}{y} \, dA \quad D = \{ (x,y) / 1 \leq y \leq 2; y \leq x \leq y^3 \}$$

$$c) \iint_D x \cos y \, dA \quad D \text{ región acotada por } y=0, y=x^2, x=1$$

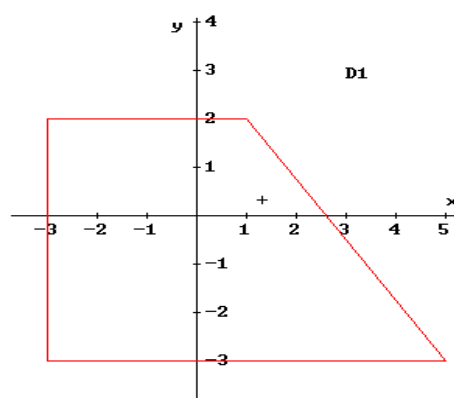
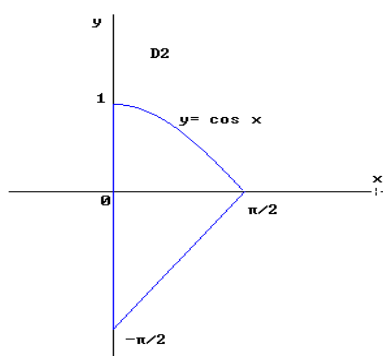
$$d) \iint_D 4y^3 \, dA \quad D \text{ región acotada por } y=x-6, y^2=x$$

$$e) \iint_D xy \, dA \quad D \text{ parte del disco que se encuentra en el } 1^{\text{er}} \text{ cuadrante, con centro en } (0,0) \text{ y radio } 1$$

$$f) \iint_D e^x \, dA \quad D \text{ triángulo de vértices } (0,0), (1,4) \text{ y } (6,0)$$

$$g) \iint_{D_1} (x+y) \, dA \quad D_1 \text{ la región de la figura}$$

$$h) \iint_{D_2} dA \quad D_2 \text{ la región de la figura}$$



10) a) Calcular $\iint_R f(x,y) dx dy$ siendo $f(x,y)=1$ y R la región limitada por las curvas $y=2-x^2$ e $y=x$

Calcular el área de la región R y comparar los resultados

b) Calcular $\iint_R f(x,y) dx dy$ siendo $f(x,y)=1$ y $R=\{(x,y)/a \leq x \leq b; f(x) \leq y \leq g(x)\}$; ¿qué se obtiene?

c) Calcular $\iint_R f(x,y) dx dy$ siendo $f(x,y)=5$ y $R=\{(x,y)/ 0 \leq x \leq 3; 0 \leq y \leq \sqrt{9-x^2}\}$; ¿qué se obtiene?

11) Determinar el volumen del sólido determinado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$, los planos, $x = -2$; $x = 2$; $y = -3$; $y = 3$ y el plano $z = 10$.

12) Determinar el volumen del sólido bajo la superficie $z = xy$ y encima del triángulo de vértices $(1,1)$, $(4,1)$ y $(1,2)$.

13) La integral doble de f , $\iint_D f(x,y) dx dy$, se reduce a la integral reiterada

$$\int_0^1 \left[\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y) dx \right] dy ; \text{ se pide:}$$

a) determinar y graficar la región D .

b) plantear la integral invirtiendo el orden de integración.

c) resolver si $f(x,y) = x+y$.

14) La integral doble de f , $\iint_D f(x,y) dx dy$, se reduce a la integral reiterada

$$\int_0^1 \left[\int_{\frac{4y}{3}}^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y) dx \right] dy ; \text{ se pide:}$$

a) determinar y graficar la región D .

b) plantear la integral invirtiendo el orden de integración.

15) Calcular la siguiente integral si $f(x; y) = \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{y}\right)$,

$$\int_1^2 \left[\int_{\sqrt{x}}^x f(x,y) dy \right] dx + \int_2^4 \left[\int_{\sqrt{x}}^2 f(x,y) dy \right] dx$$

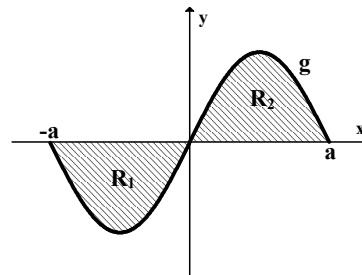
16)

a) Grafique la región D , del plano xy , cuya frontera está formada por el segmento de recta que une los puntos $A(2,0)$ y $B(0,3)$ y la curva de ecuación $\begin{cases} x = 2 \cdot \sin(t) \\ y = 3 \cdot \cos(t) \end{cases}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

b) Evalúe $\iint_D 2xy dA$

c) Sea $A(D) = \iint_D f(x,y) dA$ el área de la región D , proponga f y calcule dicha área.

17) Dado el gráfico de la función impar g y marcadas las regiones R_1 y R_2 tales que $R_1 \cup R_2 = R$, indique si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifique cada respuesta.



a) $\iint_{R_1} dA + \iint_{R_2} dA = 0$

b) $\int_{-a}^0 g(x) dx + \int_0^a g(x) dx = 0$

c) $\iint_R dA = 2 \int_0^a g(x) dx$

d) Si $f(x, y) = k$, $k \in \mathbb{R}$ entonces $\iint_R f(x, y) dA = 2 \iint_{R_2} f(x, y) dA$

e) Si f es continua en R entonces $\iint_R f(x, y) dA = 2 \iint_{R_2} f(x, y) dA$

18) Se emplea un material de densidad variable para construir una placa delgada que ocupa una región triangular T del plano xy ($[x] = [y] = \text{cm}$) con vértices en $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(0, 3)$.

a) Calcule la masa m de la placa siendo $m = \iint_T \rho(x, y) dA$ y $\rho(x, y) = x + y$ la función

densidad ($[\rho] = \text{mg/cm}^2$)

b) Dado que la densidad ρ es la masa de la placa por unidad de superficie, calcule la

densidad promedio $\rho_p = \frac{m}{\text{Área}(T)}$

c) Escriba una expresión que le permita calcular el valor promedio de cualquier campo escalar continuo f definido en una región D del plano.

d) Halle el valor promedio de f sobre el rectángulo de vértices $(-1, 0)$, $(-1, 5)$, $(1, 5)$ y $(1, 0)$, siendo $f(x, y) = x^2 y$.

13.3.2 Integrales de Línea

Integrales de línea con respecto a la longitud de arco.

1) Calcular las siguientes integrales respecto a la longitud de arco:

$$\text{a) } \int_C \sqrt{x} \, ds \quad C: \begin{cases} x = t^2 \\ y = t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \text{b) } \int_C ds \quad C: \begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\text{c) } \int_C x y^4 \, ds \quad C: \text{mitad derecha de la circunferencia } x^2 + y^2 = 16$$

$$\text{d) } \int_C x(1+4y) \, ds \quad C: \text{arco de la parábola } y = x^2 \text{ desde } (-2,4) \text{ a } (1,1)$$

$$\text{e) } \int_C (x-y) \, ds \quad C: \text{segmentos de recta de } (0,0) \text{ a } (2,0) \text{ y de } (2,0) \text{ a } (3,2)$$

Campos vectoriales.

2) Indicar el dominio de los siguientes campos vectoriales y determinar si es
a) abierto, b) conexo, c) simplemente conexo

$$1- \vec{F}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$4- \vec{F}(x,y) = \cos(x/y)\vec{i} + y\vec{j}$$

$$2- \vec{F}(x,y) = \ln(x)\vec{i} + \ln(y)\vec{j}$$

$$5- \vec{F}(x,y) = (\sqrt{x^2 + y^2 - 1}; \sqrt{4 - x^2 - y^2})$$

$$3- \vec{F}(x,y) = \frac{y\vec{i} + x\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$6- \vec{F}(x,y) = (\ln(x-y); xy)$$

3) Hallar el campo vectorial gradiente de $f: \nabla f(x,y)$.

$$\text{a) } f(x,y) = e^{3x} \cos y$$

$$\text{b) } f(x,y) = \sin(2x-3y)$$

$$\text{c) } f(x,y) = x \ln(y-x)$$

$$\text{d) } f(x,y) = x.y^3 / (x+y)$$

Integrales de línea de campos vectoriales.

$$4) \text{ Siendo } \vec{F}(x,y) = (x^2 y)\vec{i} - (xy)\vec{j} \text{ y } \vec{r}(t) = t^3\vec{i} + t^4\vec{j} \text{ calcular } \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$5) \text{ Calcular } \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \text{ a lo largo de las curvas a) } y = 2.x^2 \text{ y b) } y = 4x$$

desde el punto (0,0) hasta el punto (2;8) para cada uno de los siguientes campos vectoriales

$$\text{i) } \vec{F}(x,y) = (y; x^2)$$

$$\text{ii) } \vec{F}(x,y) = (3x; 2x-y)$$

6)

a) Para $\vec{F}(x,y)=(x+y; y)$; $A(1;2)$; $B(3;5)$ calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ primero a lo largo del segmento que une A con B y luego, sobre el mismo segmento, pero desde B hacia A. ¿Qué observa?

b) Para $\vec{F}(x,y)=(P(x,y); Q(x,y))$; $A(x_1; y_1)$; $B(x_1; y_1)$ demostrar que

$$\int_{C_{BA}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{C_{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{siendo } C \text{ el segmento de recta que une A con B.}$$

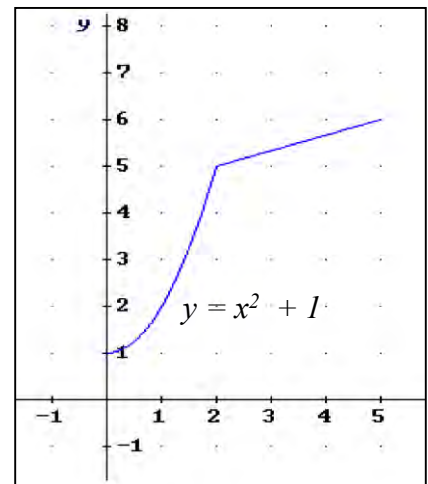
Sugerencia: para $\vec{r}_1$ tomar el punto A y el vector $\overrightarrow{AB}$; para $\vec{r}_2$ tomar B y $\overrightarrow{BA}$

7) En cada caso calcular la integral de línea del campo vectorial dado a lo largo del camino que se indica:

a) $\vec{F}(x,y)=(x^2-y; y^2-x)$; $\vec{r}(t)=(t^2; t)$ $0 \leq t \leq 1$

b) $\vec{F}(x,y)=(x+y; x-y)$ a lo largo de la elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$, recorrida en sentido antihorario.

8) Calcular $\int_C (2x-y).dx + (x+y).dy$ siendo C la curva:



9) Calcular $\int_C (x-y)dx + (2-x+3y)dy$ siendo C el triángulo de vértices (1;1), (2;4) y (3;3) recorrido en sentido horario.

10) Siendo $\vec{F}(x,y)=(x^2, y)$ calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ desde el punto A(0,0) hasta el punto B(1,1)

a lo largo de:

a) el segmento que une dichos puntos

b) el camino que consisten dos segmentos consecutivos de extremos A, C(1,0) y B.

c) la curva $y = x^3$

11) Determinar si $\vec{F}$ es un campo conservativo. Si lo es, encontrar φ tal que $\nabla\varphi = \vec{F}$

a) $\vec{F}(x,y) = (2x-3y)\vec{i} + (2y-3x)\vec{j}$

b) $\vec{F}(x,y) = (3x^2-4y)\vec{i} + (4y^2-2x)\vec{j}$

c) $\vec{F}(x,y) = (2x\operatorname{sen}y; x^2\cos y - 3y^2)$

d) $\vec{F}(x,y) = (ye^x + \operatorname{sen}y; e^x + x\cos y)$

e) $\vec{F}(x,y) = (2y^2 - 12x^3y^3)\vec{i} + (4xy - 9x^4y^2)\vec{j}$

f) $\vec{F}(x,y) = (x^2 + y; x^4)$

12) Calcular

a) $\int_C 2x\operatorname{sen}y dx + (x^2\cos y - 3y^2) dy$ siendo C cualquier trayectoria desde (-1,0) hasta (5,1)

b) $\int_C (2y^2 - 12x^3y^3) dx + (4xy - 9x^4y^2) dy$ siendo C cualquier trayectoria desde (1,1) hasta (3,2)

c) $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ siendo $\vec{F}(x,y) = 2x.y^3\vec{i} + 3x^2.y^2\vec{j}$ y $\vec{r}(t) = \operatorname{sen} t\vec{i} + (t^2+1)\vec{j}$ $0 \leq t \leq \pi/2$

13) Sea $\vec{F}(x,y) = \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2 + y^2} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ a) Probar que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

b) Calcular $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ y $\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ para C_1 y C_2 mitad superior e inferior respectivamente de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y para ambos casos desde (1;0) a (-1;0).

c) La integral $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ¿es independiente de la trayectoria?

14) Determinar el trabajo realizado por el campo de fuerza $\vec{F}(x,y) = (x; y+2)$ al mover un objeto a lo largo de la cicloide $\vec{r}(t) = (t - \operatorname{sen} t)\vec{i} + (1 - \cos t)\vec{j}$; $0 \leq t \leq \pi$

15) Hallar el trabajo que efectúa el campo de fuerza $\vec{F}(x,y) = x\operatorname{sen}y\vec{i} + y\vec{j}$ sobre una partícula que se mueve a lo largo de la parábola $y = x^2$ desde (-1;1) hasta (2;4).

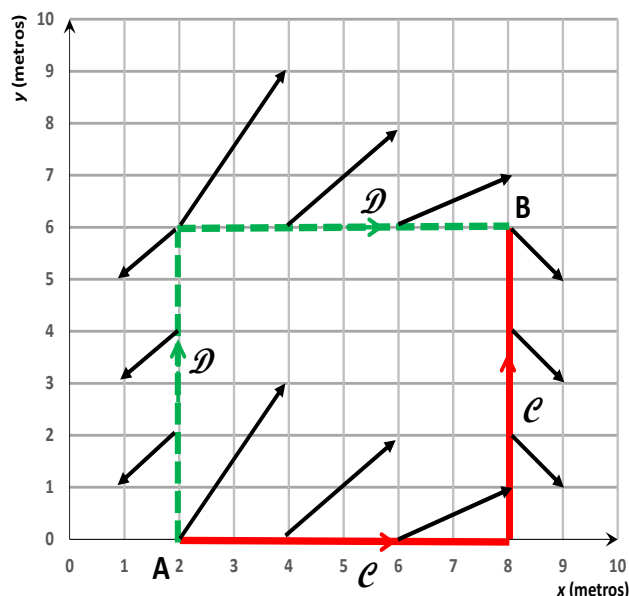
16) Principio de trabajo y energía. Si con $E_c(t)$ indicamos la energía cinética de una partícula de masa "m", en el instante t, la cual se mueve bajo la acción de una fuerza $\vec{F}$, con función de posición $\vec{r}(t)$ y rapidez $v(t) = |\vec{r}'(t)|$, tenemos que: $E_c(t) = \frac{1}{2}m.v^2(t)$. Teniendo en cuenta que por la 2da ley de Newton, la fuerza aplicada sobre la partícula es igual a "masa por aceleración" ($\vec{F}(\vec{r}(t)) = m.\vec{r}''(t) = m\vec{v}'(t)$) demostrar que el trabajo realizado por $\vec{F}$ durante un intervalo de tiempo es igual a la variación de energía cinética en el mismo intervalo de tiempo.

Considerar que: $\frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = 2.\vec{v}' \cdot \vec{v}$ y que $\vec{v} \cdot \vec{v} = v^2$

17) Calcular la masa M de un muelle que tiene forma de hélice cuya ecuación vectorial es $\vec{r}(t) = (a \cos t; a \operatorname{sen} t; b.t)$ si la densidad en cada punto es $\delta(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ y se sabe que $M = \int_C \delta \cdot ds$

13.3.3 Miscelánea

1) Un objeto se desplaza a lo largo de la curva C que se muestra en la figura (línea continua), desde $A(2; 0)$ hasta $B(8; 6)$ por acción de un campo de fuerzas $\vec{F}$. Las intensidades de los vectores en el campo de fuerza $\vec{F}$ se miden en Newton según las escalas en los ejes. Considerando la situación presentada, indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando tu respuesta:



a) El trabajo realizado por el campo $\vec{F}$ al mover el objeto a lo largo de la curva C es siempre positivo

b) El trabajo que realiza $\vec{F}$ sobre el objeto a lo largo de la curva C es aproximadamente 6 Newton por metro. (*Ayuda: divide la curva en 6 segmentos de longitud 2 y utiliza la definición de integral de línea para aproximar el resultado*).

c) Indica si la siguiente proposición resulta verdadera y justifica tu respuesta:

$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 = \int_D \vec{F} \cdot d\vec{r}_2 \Rightarrow \vec{F}$ es conservativo en $\mathbb{R}^2$ (D es la curva que se muestra en el gráfico en líneas punteadas).

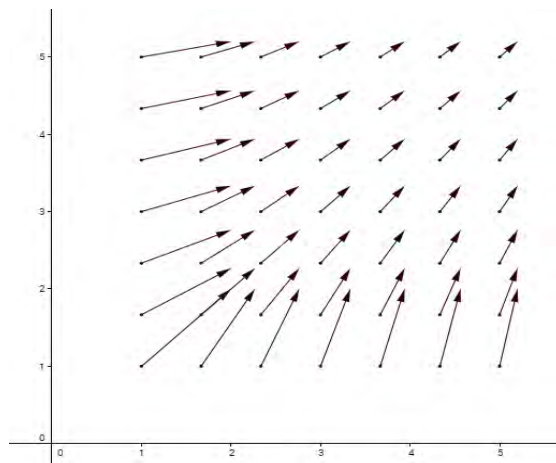
d) Muestra que el trabajo realizado por el campo $\vec{E}(x; y) = \left(-\frac{1}{y-x-2}; \frac{1}{y-x-2}\right)$ para mover una partícula de A a B , a lo largo de la curva C es menor que el realizado por el campo de fuerza $\vec{F}$.

e) Define un conjunto que contenga a los puntos A y B , donde $\vec{E}$ sea conservativo.

2) En el gráfico adjunto se muestra un campo de fuerzas $\vec{F}$ para algunos puntos de su dominio. Si $\vec{r}(t) = \left(-t; \frac{-4}{t}\right)$ con $t \in [-4; -1]$, $\vec{s}(\alpha) = (\alpha; \alpha)$

con $\alpha \in [1; 4]$ y $\vec{q}(\lambda) = (\lambda; 5-\lambda)$ con $\lambda \in [1; 4]$:

a) Grafica las curvas asociadas a las funciones vectoriales anteriores en el gráfico dado indicando el sentido de recorrido de las mismas.



b) Decide si el trabajo realizado por el campo de fuerzas para mover una partícula según las trayectorias definidas por las funciones vectoriales dadas es positivo, negativo, cero o no se puede asegurar. **Justifica teóricamente** tu respuesta.

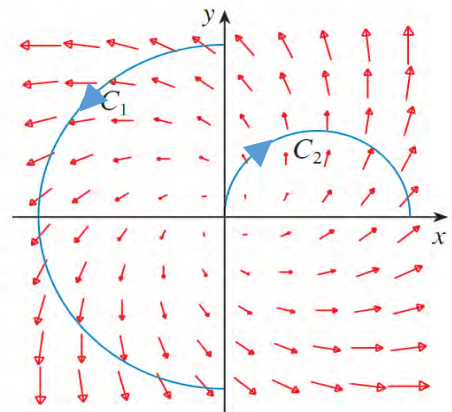
c) Si la ley del campo de fuerzas $\vec{F}$ es $\vec{F}(x; y) = \left(\frac{1}{x}; \frac{1}{y}\right)$, calcula el trabajo realizado por dicho campo a lo largo de la trayectoria definida por $\vec{s}$.

d) Decide si la siguiente proposición es verdadera o falsa **justificando** tu respuesta:

$$\int_C \vec{F}(x; y) d\vec{r} = \int_D \vec{F}(x; y) d\vec{q} \text{ siendo } C \text{ la curva definida por } \vec{r} \text{ y } D \text{ la curva definida por } \vec{q}.$$

3) Sea $\vec{F}$ el campo vectorial del problema anterior, y C_1 y C_2 las curvas asociadas a las funciones $\vec{s}(\alpha) = (\alpha; \alpha^2)$ $\alpha \in [1; 2]$ y $\vec{r}(t) = (-t; 2)$ con $t \in [-5; -1]$, respectivamente. A partir de la definición de integral de línea de un campo vectorial sobre una curva regular, explica por qué $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} > 0$ mientras que $\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} < 0$

4) La figura muestra un campo vectorial $\vec{H}$ y dos curvas C_1 y C_2 (ambos ejes están en la misma escala). Las integrales de línea de $\vec{H}$ sobre C_1 y C_2 , ¿son positivas, negativas o nulas? Justifica.



5) Teniendo en cuenta la fórmula de cálculo de la integral de línea:

a) Muestra que $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C P dx + Q dy$, siendo $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$

b) Evalúa las siguientes integrales curvilíneas:

b₁) $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, siendo $\vec{F}(x, y) = (\cos(x), \sin(y))$ y $\vec{r}(t) = (t^3, t^2)$, $t \in [0, 1]$

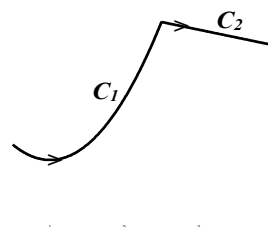
b₂) $\int_C x y dx + y^2 dy$, siendo C la curva definida por

$$\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j}, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

b₃) $\int_C (x-y)dx + x y dy$ siendo C el arco de circunferencia de ecuación: $x^2 + y^2 = 4$

desde $(-2,0)$ hasta $(2,0)$ recorrido en sentido horario.

6) Siendo C_1 y C_2 las curvas esquematizadas, $C = C_1 \cup C_2$, C_3 la curva C_2 con orientación opuesta y $\vec{F}$ y $\vec{G}$ definidos y acotados sobre cada curva, calcula las siguientes integrales, justificando tu respuesta con los conceptos teóricos correspondientes:



a) $\int_{C_1} \vec{G} \cdot d\vec{r}$, si se sabe que $\int_{C_1} (5\vec{F} + 4\vec{G}) \cdot d\vec{r} = 7$ y $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 3$.

b) $\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, si se sabe que $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 3$ y $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 10$.

c) $\int_{C_3} \vec{G} \cdot d\vec{r}$, si se sabe que $\int_{C_2} \vec{G} \cdot d\vec{r} = -9$.

d) $\int_C \vec{G} \cdot d\vec{r}$, si se sabe que $\int_{C_1} 6\vec{G} \cdot d\vec{r} = -12$ y $\int_{C_3} \frac{1}{2}\vec{G} \cdot d\vec{r} = \frac{9}{2}$.

7)

a) Evalúa $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ siendo $\vec{F}(x,y) = (2xy, x^2)$ y C la curva:

a₁) de ecuación $y = x^2 - 1$ desde el punto $P(-1,0)$ hasta el punto $Q(2,3)$

a₂) formada por dos segmentos consecutivos que unen los puntos P , $M(0,3)$, Q en ese orden.

b) Evalúa $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ siendo $\vec{F}(x,y) = (y-x, e^y)$ y C cada curva definida en el ítem anterior.

c) Explica por qué la integral de línea del ítem a) tiene el mismo valor para las dos curvas.

8)

a) Evalúa la integral del ejercicio anterior (ítem a) aplicando el teorema que da la condición suficiente para que $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ sea independiente de la trayectoria.

b) Demuestra, utilizando el teorema mencionado en el ítem anterior, que la integral de línea de un campo vectorial conservativo $\vec{F}$ a lo largo de una curva suave cerrada C contenida en el dominio de $\vec{F}$ es cero.

9) Muestra que las siguientes integrales de línea son independientes de la trayectoria y evalúalas:

a) $\int_C -2e^{y-2x} dx + e^{y-2x} dy$, C es cualquier trayectoria desde $(0,0)$ hasta $(1,3)$

b) $\int_C (3x^2 + y^2) dx + 2xy dy$, C es cualquier trayectoria desde $(1,2)$ hasta $(-1,1)$

10) Determina el trabajo realizado por el campo de fuerza $\vec{F}$ para mover una partícula a lo largo de la curva C : $y = \text{sen}(x)$, desde $A(0,0)$ hasta $B(\pi,0)$ siendo:

a) $\vec{F}(x,y) = xy\vec{i} + (1-y)\vec{j}$ b) $\vec{F}(x,y) = \left(\sqrt{y+4}, \frac{x}{2\sqrt{y+4}} \right)$

11) Determina el trabajo que efectúa el campo de fuerza $\vec{F}$ al mover un objeto de P a Q siendo:

a) $\vec{F}(x,y) = \left(-\frac{y^2}{x^2}, \frac{2y}{x} \right)$, $P(1,1)$, $Q(2,-2)$

b) $\vec{F}(x,y) = (y \cdot \cos(x) + 2x, \text{sen}(x) - 2)$, P y Q son los extremos de la curva definida por $\vec{r}(t) = (t - \text{sen}(t))\vec{i} + (1 - \cos(t))\vec{j}$, $\forall t \in [0, \pi]$

c) $\vec{F}(x,y) = (x+3, 1-y)$, P y Q son los extremos de la curva definida por $\vec{r}(t) = (2 + 3\cos(4t))\vec{i} + (1 + 2\text{sen}(4t))\vec{j}$, $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

12) Sea la región $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y-2 \leq x \leq 4-y^2, -3 \leq y \leq 2\}$ y el campo vectorial $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$.

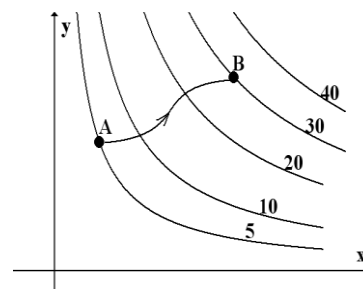
a) Grafica la región D

b) Verifica que: $\oint_D P(x,y) dx + Q(x,y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$, siendo ∂D la frontera de la

región D recorrida en sentido antihorario y:

b₁) $\vec{F}(x,y) = (1-y, x+y^2)$ b₂) $\vec{F}(x,y) = (ye^{xy}, xe^{xy})$

13) La gráfica muestra una curva S que une los puntos $A(1,3)$ y $B(4,5)$ y las curvas de nivel de un campo escalar f cuyo gradiente es continuo. Los números indican los valores que toma f en cada curva.



Evalúa la integral: $\int_S \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}$

14) Sea $\vec{\nabla} f = \vec{F}$, donde $f(x; y) = \text{sen}(x - 2y)$, encuentra dos curvas C_1 y C_2 que NO sean cerradas y satisfagan: a) $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ b) $\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 1$

15) Siendo $\vec{F}(x, y) = \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2 + y^2} = P(x; y)\vec{i} + Q(x; y)\vec{j}$

a) Indica el conjunto más amplio donde esté definido $\vec{F}$ ($D_{\vec{F}}$).

b) Prueba que:

$$b_1) \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \forall (x; y) \in D_{\vec{F}}$$

$$b_2) \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{siendo } C_1 \text{ y } C_2 \text{ las mitades superior e inferior de la}$$

circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ recorridas desde $A(1, 0)$ hasta $B(-1, 0)$

c) ¿Contradice lo probado en el ítem anterior alguna propiedad o teorema? Justifica tu respuesta.

16) Siendo $\vec{F}(x; y) = \left(\frac{y}{x \cdot y + 1}; \frac{x}{x \cdot y + 1} \right)$

a) Indica en cuál de los siguientes conjuntos el campo vectorial $\vec{F}$ es conservativo:

I. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \cdot y < 0 \wedge y > 0\}$

II. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 \wedge y < 0\}$

III. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 \wedge y > 0\}$

b) Encuentra g , una función potencial del campo $\vec{F}$, definida en el conjunto elegido en el ítem anterior (Dom_g).

c) Siendo $C_1 = \{(x, y) \in Dom_g / g(x, y) = 1 \wedge 1 \leq x \leq e\}$, explica por qué $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

d) Calcula $\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}$, si C_2 está definida por $\vec{s}(t) = (t, t^2)$, $t \in [1, 2]$

17) Las partículas cargadas, en reposo o en movimiento respecto a un sistema de referencia, con su sola presencia modifican las propiedades del espacio que las rodea generando un campo electromagnético que queda representado por dos campos vectoriales: $\vec{E}$ denominado campo eléctrico y $\vec{B}$ denominado campo magnético. Cuando las cargas están en reposo con respecto a cierto sistema de referencia, el campo eléctrico no depende del tiempo y recibe el nombre de Campo Electrostático. En esta situación, en cada punto $P(x, y, z)$ del espacio, el campo electrostático $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$ solo depende de $\vec{r}$, vector posición del punto P donde se mide el campo.

En el caso de un campo electrostático producido por una carga puntual Q en reposo con respecto a cierto sistema de referencia en el **plano xy** cuyo centro de coordenadas coincide con Q , y siendo $P(x, y)$ un punto de dicho plano donde se ubica una carga de prueba q , el campo eléctrico generado por la carga Q y medido en P viene dado por: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{k}{r^2} \cdot \vec{r}$ (k

constante y $r = |\vec{r}|$).

A partir de la información dada:

- a) Expresa la ley de $\vec{E}$ en función de las coordenadas del punto P .
- b) Indica y grafica una región del plano xy que contenga a los puntos $A(1, 1)$ y $B(2, 4)$ donde el campo $\vec{E}$ sea conservativo. Justifica tu elección.
- c) Encuentra una función potencial para $\vec{E}$ justificando tu planteo.
- d) Calcula el trabajo realizado por $\vec{E}$ al mover una carga puntual q desde:
 - d₁) A hasta B a lo largo del arco de parábola de ecuación $y = x^2$.
 - d₂) B hasta A a lo largo de un segmento de recta.

Bibliografía

CÁLCULO. CONCEPTOS Y CONTEXTOS, Stewart J., International Thompson Editores, México (1999)

CÁLCULO CON GEOMETRÍA ANALÍTICA, Purcell E. y Valberg D, Prentice-Hall Hispanoamericana, México (1992)

CÁLCULO Y GEOMETRÍA ANALÍTICA, Edwards C. H. y Penney D E, Prentice-Hall Hispanoamericana, México (1987)

CALCULUS (Vol. I y II), Apóstol T., Ed. Reverte, España (1973)

ECUACIONES DIFERENCIALES ELEMENTALES@, Edwards C. H. y Penney D.F. Prentice-Hall Hispanoamericana, México (1993)



Edición: Marzo de 2014.

2º Edición: Marzo de 2018 (Revisión: Marzo de 2022).

Este texto forma parte de la Iniciativa Latinoamericana de Libros de Texto abiertos (LATIn), proyecto financiado por la Unión Europea en el marco de su [Programa ALFA III EuropeAid](#).



Los textos de este libro se distribuyen bajo una Licencia Reconocimiento-CompartirIgual 3.0 Unported (CC BY-SA 3.0) [http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.es_](http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.es_ES)
[ES](#)