

MINISTERIO DE JUSTICIA E INSTRUCCION PUBLICA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS, Etc.
DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

MATHEMATICÆ NOTÆ

BOLETIN

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA

DIRECTOR

BEPPPO LEVI

AÑO CUARTO - FASC. 4



ROSARIO
REPUBLICA ARGENTINA
1944

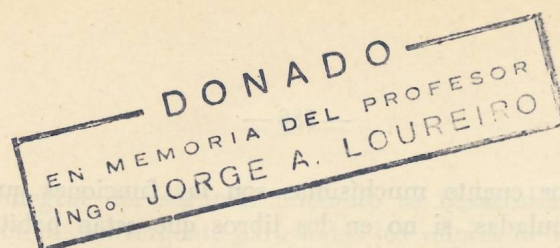
A U T O R I D A D E S D E L A F A C U L T A D

Delegado Interventor
Arquitecto ERMETE DE LORENZI

Secretario Interino
PEDRO GARAGUSO.

I N D I C E

	PÁG.
Un problema de cálculo numérico. Sobre la inversión de funciones definidas por integrales. Aplicación a una integral de la teoría de las radiaciones (B. LEVI)	185
Area limitada por la curva engendrada por el extremo de un segmento cuyo otro extremo recorre una curva fija y aplicación a la obtención de algunos teoremas sobre los óvalos (LUIS A. SANTALÓ) ...	213
Sobre un método gráfico de aproximación de funciones (LIVIO D. PORTA)	227
Ejercicios y problemas (Resueltos)	239
Rectificación aproximada de la circunferencia (JOSÉ RICAGNO)	246
Ejercicios y problemas (Propuestos)	247
Bibliografía	249



UN PROBLEMA DE CALCULO NUMERICO

SOBRE LA INVERSION DE FUNCIONES DEFINIDAS POR INTEGRALES

APLICACIÓN A UNA INTEGRAL DE LA TEORÍA DE LAS RADIACIONES

1. En las aplicaciones del análisis se presenta a menudo el problema de la inversión numérica de funciones definidas como el valor de cierta integral para valores variables de uno de sus extremos de integración. Desde luego que, en el concepto, ese problema no difiere de cualquier otro de inversión, por cuanto si, en vía de ejemplo, la integral se efectúa, como es generalmente posible, por un desarrollo de Taylor, se tratará, después de esto, de invertir la serie, lo que eventualmente podrá hacerse por un procedimiento de coeficientes indeterminados, que eventualmente puede pensarse completado por prolongación analítica. No es luego un problema conceptual el que queremos enfrentar, sino uno de cálculo efectivo.

Notamos también que el problema tiene sus antecedentes clásicos, siendo el aludido el modo de definición de muchas principales funciones habituales, tales como integrales elípticas, función de errores (de Gauss), logaritmo integral, y, si se quiere, también logaritmo y funciones trigonométricas inversas (decimos, *si se quiere*, porque en estos últimos casos son didácticamente e históricamente las funciones inversas las que se presentan primeras, de modo que el problema ya no existe). Estos casos clásicos indican para el problema propuesto una solución que diríamos banal, consistente en la tabulación; es evidente que ésta puede hacerse partiendo indiferentemente de una cualquiera de las dos funciones inversas entre sí y por tanto, cuando esto sea cómodo, por el cálculo numérico de la integral; bastando después leer la tabla en doble sentido, eventualmente con el auxilio de interpolaciones, como se hace en efecto corrientemente con las tablas de logaritmos y de funciones goniométricas. Podemos agregar que el método es efectivamente ampliamente aplicado en la actualidad también para funciones menos

comunes, por cuanto muchísimas son las funciones que se encuentran tabuladas, si no en los libros que están habitualmente en las manos de todos, por lo menos en una u otra memoria o publicación especializada. Pero, precisamente en estos casos puede a menudo considerarse menos práctico ir en busca de la tal publicación — además de que no siempre la aproximación de la tabla corresponderá a la deseada — que proponerse directamente el problema de efectuar la inversión numérica correspondiente a los valores que interesan de la variable, con la aproximación que interesa, y con el mínimo número posible de operaciones. Es natural que el problema así planteado podrá tener soluciones más o menos diferentes en cada caso especial. Vamos a tratar a continuación extensamente uno de estos casos que puede servir de ejemplo.

2. Se demuestra en la física teórica que un haz de partículas cargadas (electrones o protones) de velocidad determinada sufre una dispersión por la cual el radio de la sección del haz normal al eje crece con la distancia del origen, de manera que, indicando con $x=r:R$ la razón entre los radios en la distancia y y en el origen, vale la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dy} = A \sqrt{\log x}$$

donde A es una constante que depende de las condiciones experimentales ⁽¹⁾.

Se integra fácilmente esta ecuación por separación de las variables, obteniéndose por tanto

$$y(x) = \frac{1}{A} \int_1^x \frac{dx}{\sqrt{\log x}}. \quad (1)$$

⁽¹⁾ Se encuentra esta ecuación, por ej. en: M. KNOLL und E. RUSKA, *Beiträge zur geometrischen Elektronenoptik*, Annalen der Physik (5) 12, 1932, p. 607-661 y en R. D. FOWLER and G. E. GIBSON, *The production of intense Beams of positive Ions*, Physical Review (2) 46, 1934, p. 1075 y sigtes.

La integral del segundo miembro se desarrolla fácilmente en serie entera, convergente para todos los valores de la variable).

Supongamos para eso, como haremos en todo lo sucesivo, que sea $A=1$; el caso de A cualquiera se reduce a éste con el cambio de variable $Ay=y'$.

Pongamos entonces

$$\log x = z, \quad z = \zeta^2, \quad dx = 2\zeta e^{\zeta^2} d\zeta;$$

resulta

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{dx}{\sqrt{\log x}} &= 2 \int_0^{\zeta} e^{\zeta^2} d\zeta = 2 \int_0^{\zeta} \left(1 + \zeta^2 + \frac{1}{2!} \zeta^4 + \frac{1}{3!} \zeta^6 + \dots\right) d\zeta \\ &= 2\left(\zeta + \frac{1}{3} \zeta^3 + \frac{1}{5 \cdot 2!} \zeta^5 + \frac{1}{7 \cdot 3!} \zeta^7 + \dots\right) \quad (1) \end{aligned}$$

es decir

$$y(x) = 2\sqrt{z} \left(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{5 \cdot 2!} + \frac{z^3}{7 \cdot 3!} + \dots + \frac{z^n}{(2n+1)n!} + \dots\right). \quad (2)$$

Es evidente que puede a menudo interesar determinar el valor de x que corresponde a y dado; puede por ej. observarse que el experimentador puede variar arbitrariamente la distancia y , la cual por lo tanto funciona como variable principal, mientras x se sigue como resultado experimental. De cualquier manera, y sin preocuparnos de razones prácticas, nos proponemos, como problema matemático y de cálculo numérico, estudiar la inversión de la función $y(x)$ ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Este desarrollo se encuentra dado en una nota de la pág. 1084 de la memoria citada de Fowler y Gibson; independientemente nos ha sido indicado en una conversación por el Dr. Manuel Sadosky.

⁽²⁾ Por esta razón consideramos el caso de que se quiera determinar los valores de $y(x)$ con una aproximación asignada, que puede ser elevada. Para quien lea la nota con intención práctica debe por tanto estar sentado que muchas de las cuestiones tratadas se reducen enormemente por cuanto se pretenda tan solo una débil aproximación.

Como notamos en el párrafo anterior no existen dificultades para invertir, alrededor del origen, la serie (2) o, más generalmente escribir el desarrollo de Maclaurin de la función $x(y)$; en efecto, como mostraremos en detalle en el n. siguiente, podemos calcular de esta función las derivadas sucesivas; se obtienen entonces fácilmente los desarrollos (ver n. 3)

$$z(y) = \frac{1}{2}y - 0,33\left(\frac{y}{2}\right)^3 + 0,233\left(\frac{y}{2}\right)^5 - 0,263\left(\frac{y}{2}\right)^7 + \dots \quad (3)$$

$$x(y) = 1 + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4.4!}y^4 + \frac{7}{8.6!}y^6 - \frac{147}{16.8!}y^8 + \dots$$

pero se ve fácilmente por la simple inspección de los coeficientes, que estas series, para valores de y no muy pequeños, en caso de ser convergentes ⁽¹⁾, lo serán muy lentamente.

3. Para resolver esta dificultad conviene enfrentar directamente el problema de la inversión sin tampoco pasar, en un principio, por una integración como la (2).

Consideremos el problema en su forma inicial, es decir, (suponiendo siempre el coeficiente $A=1$): *calcular con determinada aproximación la función $x(y)$ definida por la ecuación diferencial*

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\log x} \quad (4)$$

con la condición inicial que para $y=0$ sea $x=1$; el desarrollo de Taylor de esta función alrededor de un punto (x, y) cualquiera (por ej. precisamente el $(1, 0)$) se puede escribir fácilmente calculando las derivadas sucesivas ⁽²⁾ mediante la relación

$$\frac{df(x)}{dy} = \frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} \quad (5)$$

⁽¹⁾ La determinación del radio de convergencia de estas series no tiene interés directo para el objeto de esta nota y es problema de naturaleza analítica más elevada que reservamos para otra sucesiva.

⁽²⁾ En el mismo modo, mejor que por inversión algebraica de la (2), se calculan en efecto las (3).

Poniendo por $f(x)$ la (4), se obtendrá así la derivada segunda y sucesivamente poniendo la derivada $n-1$ -ma se obtendrá por recurrencia la n -ma. Se obtienen de esta manera las derivadas siguientes que son las que vamos a utilizar:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dy^2} &= \frac{1}{2x\sqrt{\log x}}\sqrt{\log x} = \frac{1}{2x} \\ \frac{d^3x}{dy^3} &= -\frac{\sqrt{\log x}}{2x^2}, \quad \frac{d^4x}{dy^4} = \frac{4\log x - 1}{4x^3}, \\ \frac{d^5x}{dy^5} &= -\frac{12\log x - 7}{4x^4}\sqrt{\log x}, \quad \frac{d^6x}{dy^6} = \frac{96\log^2 x - 92\log x + 7}{8x^5} \\ \frac{d^7x}{dy^7} &= \frac{480\log^2 x - 652\log x + 127}{8x^6}\sqrt{\log x}.\end{aligned}\tag{6}$$

Se reconoce también fácilmente por inducción la forma general de estas derivadas, para $n \geq 3$:

$$\begin{aligned}\frac{d^nx}{dy^n} &= -\frac{P_v(\log x)}{2x^{n-1}}\sqrt{\log x}, \quad \text{para } n \text{ impar} = 2v + 3 \\ \frac{d^nx}{dy^n} &= \frac{P_v(\log x)}{2x^{n-1}}, \quad \text{para } n \text{ par} = 2v + 2\end{aligned}\tag{7}$$

donde P_v representa un polinomio de orden v de la forma

$$P_v(\log x) = (n-2)! \log^v x - c_1 \log^{v-1} x + c_2 \log^{v-2} x - \dots; \tag{8}$$

(basta, para la demostración, suponer ciertas las fórmulas para determinado n y efectuar la derivación sucesiva aplicando la (5)).

Como primera aplicación de estas fórmulas obtenemos el desarrollo de $x(y)$ alrededor de $y=0$

$$x(y) = 1 + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4.4!}y^4 + \frac{7}{8.6!}y^6 - \dots \tag{9}$$

Pero más útilmente que el desarrollo en serie va a servir la fórmula de Taylor con el resto de Lagrange, que nos permite calcular la aproximación prescindiendo de la convergencia; con la doble ventaja de que, no solamente se aparta el propio problema de esa convergencia, sino que, como será fácil notar, la fórmula dará resultados útiles para el cálculo, aun cuando la misma no se realice.

4. Para nuestro estudio nos conviene aplicar las consideraciones precedentes, poniéndonos en condiciones un poco más generales. Supongamos que, de una manera cualquiera, se haya determinado un par de valores correspondientes de x, y y sean $\bar{x}, \bar{y}$ (por ej. habrá podido fijarse el valor de $\bar{x}$, calculando luego $\bar{y}$ mediante (1), (2)). La fórmula de Taylor nos da que

$$x(\bar{y} + h) = \bar{x} + h \left(\frac{dx}{dy} \right) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{d^2x}{dy^2} \right) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} \left(\frac{d^{n-1}x}{dy^{n-1}} \right) + R_n \quad (10)$$

donde las derivadas en paréntesis se entienden calculadas en el punto $(\bar{x}, \bar{y})$ y

$$R_n = \frac{h^n}{n!} \left(\frac{d^n x}{dy^n} \right)_{y=\bar{y}+\vartheta h} \quad (0 < \vartheta < 1). \quad (11)$$

Los coeficientes $\left(\frac{d^r x}{dy^r} \right)$ se calcularán poniendo en las fórmulas (6) $x = \bar{x}$ y (10) podrá aplicarse para calcular $x(y) = x(\bar{y} + h)$ para todos los valores de $h = y - \bar{y}$ para los cuales (11) resulta inferior al error admitido. Para la discusión correspondiente será útil notar que de las expresiones (6), (7), (8) resulta en seguida que todas las derivadas consideradas decrecen rápidamente en valor absoluto a partir de cierto valor de x , porque el logaritmo crece mucho menos que el número. Será conveniente determinar el último máximo de ese valor absoluto; se encuentra

que para $n=4, 5, 6, 7$ este último máximo de $\frac{d^n x}{dy^n}$ se realiza respectivamente para ⁽¹⁾

$$\log x' = \frac{7}{12}, \quad \frac{7}{8}, \quad 1,12, \quad 1,34$$

$$x' = 1,792, \quad 2,399, \quad 3,065, \quad 3,84. \quad (12)$$

Se sigue que en la evaluación de R_n , para $h > 0$ y para valores de $\bar{x}$ respectivamente superiores a los x' (12), podrá siempre aceptarse como valor por exceso el que corresponde a $x = x'$; al contrario, para valores de $\bar{x}$ inferiores a los (12), podrá todavía aceptarse como valor prudencial aquel que corresponde a $x = x'$, siempre que dentro del intervalo $\bar{x} - x'$ el valor absoluto de la derivada no alcance valores mayores que dicho máximo.

• Esos máximos son respectivamente

$$\max \frac{d^4 x}{dy^4} = 0,058, \quad \max \frac{d^5 x}{dy^5} = 0,0243, \quad \max \frac{d^6 x}{dy^6} = 0,00825,$$

$$\max \frac{d^7 x}{dy^7} = 0,0046. \quad (13)$$

Se calcula fácilmente que la última condición se realiza para $\bar{x} \geq x''$ donde respectivamente

$$x'' = 1,094 \quad 1,6 \quad 2,27 \quad 2,92.$$

Para cada uno de estos valores de x'' se calcula fácilmente el valor de $y = y''$ por medio de la fórmula (2) u otra equivalente (cfr. n. 11); convendrá en todo caso aproximar por exceso poniendo, por ej.,

$$x'' = 1,1 \quad 1,6 \quad 2,3 \quad 3$$

$$y'' = 0,733 \quad 1,62 \quad 2,49 \quad 3,2 \quad (14)$$

⁽¹⁾ El cálculo de los máximos aludidos aquí y en las líneas siguientes requiere únicamente la vulgar aplicación de reglas elementales; se deja por tanto al lector la verificación.

5. El método de cálculo que vamos a exponer consiste en la idea siguiente: vamos a determinar una sucesión de pares de valores de $\bar{x}, \bar{y}$ que denominaremos

$$(x_0 y_0), (x_1 y_1), \dots, (x_r y_r), \dots \quad (15)$$

para $\bar{x} > x'', \bar{y} > y'',$ y

$$(x_{-1} y_{-1}), (x_{-2} y_{-2}), \dots \quad (16)$$

para $\bar{x} < x'', \bar{y} < y'',$ tales que los valores de la función $x(y)$ para valores de y comprendidos entre dos de estos valores de $\bar{y}$ se podrá calcular con la aproximación requerida por medio de la fórmula (10) cortada a un determinado $n-1$ y despreciando el correspondiente R_n ; y lo importante será que el número de los intervalos en que resultará dividido el dominio de los posibles valores de y será extraordinariamente reducido en comparación con cualquier forma de tabulación.

Pero los dos casos de $\bar{y} > y''$ y de $\bar{y} < y''$ deben tratarse en modo diferente.

Empezando por el primero ($\bar{y} > y''$; subíndices positivos), pongamos, para valores correspondientes de x, y , cuyo cálculo se supone depender de la fórmula (10) con $\bar{x} = x_r, \bar{y} = y_r$,

$$x - x_r = k, y - y_r = h; \quad (17)$$

por el teorema del valor medio es

$$h = \frac{k}{\sqrt{\log(x_r + \eta k)}} \quad (0 < \eta < 1)$$

Si se supone primero que $k > 0$, se sigue que

$$h \leq \frac{k}{\sqrt{\log x_r}}, \quad (18)$$

por lo cual el valor de R_n (11) será menor de lo que se obtiene sustituyendo en lugar de h el segundo miembro de (18); por la

hipótesis $y > y''$, se mayorará ulteriormente R_n al poner $\vartheta = 0$. Si por tanto ponemos por brevedad

$$H_{nr} = \frac{P_v(\log x_r)}{2 \cdot n! \log^{v+1} x_r}, \quad (19)$$

resulta

$$|R_n| < \frac{1}{x_r^{n-1}} H_{nr} k^n,$$

y será ciertamente

$$|R_n| < \varepsilon$$

cuando sea

$$k < x_r^{\frac{n-1}{n}} \sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{H_{nr}}} = k_{nr}. \quad (20)$$

Si ε es el límite superior de error admitido en el cálculo de $x(y)$, este valor de k_{nr} (u otro menor), podrá luego asumirse como anchura, a la derecha, de un intervalo $x_r - x_r + k_{nr}$ tal que, en cuanto el valor de $y = y_r + h$ sea contenido dentro del correspondiente intervalo $y_r - y_r + h_{nr}$, el valor de $x(y)$ será proporcionado con la exactitud requerida por la fórmula (10) cortada como se dijo.

Importa notar que el número $y_r + h_{nr}$ está determinado por $x_r + k_{nr}$ por medio de la integral (1) (u otra expresión equivalente); resulta por consecuencia determinado el número h_{nr} el cual, por el razonamiento anterior será tal de hacer, para cualquier $x > x_r$,

$$\frac{h_{nr}^n}{n!} \left| \frac{d^n x}{dy^n} \right| < \varepsilon;$$

se sigue que, poniendo en (10) $\bar{x} = x_r + k_{nr}$, $\bar{y} = y_r + h_{nr}$, podrá la fórmula aplicarse por valores negativos de h , en valor absoluto $\leq h_{nr}$, para calcular con la aproximación requerida el valor de $x(y)$ para y a la izquierda de $y_r + h_{nr}$.

Sigue de estas observaciones la construcción siguiente de la sucesión (15): Elegido convenientemente el valor $x_0 > x''$ (como

vamos a puntualizar después) se determina por la (20) k_{n0} ; pongamos luego $x'_0 = x_0 + k_{n0}$ y, por medio de la misma (20) donde se ponga x'_0 por x_r , calculemos una k'_{n0} ; pongamos $x_1 = x'_0 + k'_{n0} = x_0 + k_{n0} + k'_{n0}$; sobre x_1 se opera análogamente, poniendo siempre, en modo recurrente

$$x_{r+1} = x_r + k_{nr} + k'_{nr}$$

donde k_{nr} y k'_{nr} se obtienen respectivamente de (20) y de la fórmula análoga donde se ha cambiado x_r en $x'_r = x_r + k_{nr}$. Una vez determinada de esta manera la sucesión de los x_r , se calculan los correspondientes y_r según la integral (1) (ver más exactamente n. 11). Se pueden entonces calcular los valores de $x(y)$ aplicando la fórmula (10) por valores positivos y negativos de $h = y - y_r$, siendo el y_r determinado por cada y de manera que sea, por valores negativos de h , $|h| \leq h'_{nr-1}$ y por valores positivos de h , $h \leq h_{nr}$ (donde h_{nr}, h'_{nr} tienen significado evidente por lo que antecede).

(Para determinar los h_{nr}, h'_{nr} será necesario calcular los números y'_r análogamente a los y_r ; pero, mientras los y_r deben calcularse con toda la exactitud para que la sustitución en (10) lleve a un error no superior a ϵ , este otro cálculo podrá evidentemente hacerse con aproximación grosera).

Para $r=0$ no tiene sentido h'_{-1} ; se pueden sin embargo repetir las anteriores observaciones relativas a la aplicación de los resultados obtenidos a valores negativos de h , teniendo en cuenta la definición de los números x'' (14), para concluir que vale lo dicho aún para $r=0$ con tal que se ponga

$$h'_{-1} = \min(h_0, y_0 - y'').$$

Esto proporciona el criterio para la elección del x_0 de partida, pues será conveniente que la diferencia $|h_0 - h'_{-1}|$ resulte posiblemente pequeña.

6. Para la aplicación numérica es útil observar que, lo mismo que la derivada n -ma, la función H_{nr} tiende a 0 al crecer x_r , con variación muy lenta (tendiendo asintóticamente a la forma $C \log^{-1} x_r$) y que, por otra parte, por presentarse en la fórmula (20) bajo $\sqrt{\quad}$, en denominador, pequeñas variaciones

en su valor influyen muy poco sobre el valor de k_{nr} ; por estas razones, y considerando que siempre está permitido sustituir a k_{nr} un valor minorante, con el único efecto de acortar un poco los intervalos de aplicación de (10) con determinados coeficientes, podrá mantenerse constante el valor de H_{nr} para amplios dominios de la variable y , en el máximo valor correspondiente al extremo inferior de ese dominio. La fórmula (20) toma entonces la forma simplificada

$$k_{nr} = c_{nr} x_r^{\frac{n-1}{n}} \quad (21)$$

Se calcula fácilmente que para $n=4, 5, 6, 7$ la función $H_n(x)$ alcanza su máximo valor respectivamente para los valores $x = \bar{x}$

$$\begin{array}{cccc} \bar{x} = 1,65 & 3,22 & 5,99 & 10,80 \\ \log \bar{x} = 0,5 & 1,166 & 1,79 & 2,38 \end{array} \quad (22)$$

y estos máximos son

$$H^*_4 = 0,042 \quad H^*_5 = 0,011 \quad H^*_6 = 0,0045 \quad H^*_7 = 0,0024. \quad (23)$$

Teniendo en cuenta los valores de $\sqrt[n]{\varepsilon}$ proporcionados por la tabla

ε	$n =$	4	5	6	7
0,1		0,563	0,631	0,681	0,720
0,01		0,317	0,398	0,464	0,518
0,001		0,178	0,252	0,317	0,372
0,0001		0,100	0,159	0,215	0,269

se obtiene luego que, para la aplicación práctica y para los valores de ε de la forma 10^{-v} ($v=1, 2, 3, 4$), pueden adoptarse, por valores de x no excesivamente grandes (unos cientos), los siguientes valores de las constantes c_{nr} en la fórmula (21)

ε	$n =$	4	5	6	7	
0,1		1,24				
0,01		0,7	0,99	1,14		(25)
0,001			0,62	0,78	0,88	
0,0001				0,53	0,638	

Para dar una idea de como efectivamente es reducida la variabilidad del coeficiente c_{nr} por efecto de un más riguroso cálculo de la función H_n basta notar que para $x=200$ se obtiene precisamente $H_5=0,0042$ en lugar del $H^*_5=0,011$; pero poniendo además, por ej. $\varepsilon=10^{-2}$ el coeficiente c_5 pasa por eso al valor 1,19 en lugar del 0,99 de la tabla. (Ver sin embargo en el n. 10 una aplicación de esta variabilidad).

7. Consideremos, para hacer un ejemplo concreto, el caso de poner

$$\varepsilon=10^{-2}, \quad n=5.$$

Elegiremos

$$x_0=4,$$

un poco superior a $\bar{x}=3,22$; resulta entonces (con los símbolos del n. 5)

$$k_0=0,99 \cdot 4^{0,8}=3,03, \quad x'_0=4+3=7$$

$$y_0=y(4)=3,96014^{(1)}$$

$$y'_0=y(7)=6,41176$$

$$h_0=6,41-3,96=2,45, \quad y_0-y''=3,96-1,62=2,34;$$

la elección de $x_0=4$ se demuestra por tanto apropiada por resultar muy próximos entre sí los números h_0 y y_0-y'' . Será

$$h_{-1}=2,34.$$

Para el cálculo de los sucesivos números x_r, x'_r pondremos

(¹) Para el cálculo de estos números ver n. 11.

en (21) $c_{5r}=1$ como valor aproximado de 0,99, lo que está justificado, además que por la aproximación efectiva, por el hecho de que c_{nr} es creciente con x_r ⁽¹⁾; tenemos por tanto

$$k_{5r} = x_r^{0.8}$$

y luego la sucesión

$$\begin{array}{cccc} x_0 = 4 & x_1 = 11,79 & x_2 = 29,53 & x_3 = 65,37 \\ x'_0 = 7, & x'_1 = 18,99 & x'_2 = 44,53 & x'_3 = 93,70 \\ x_4 = 131,49 & & x_5 = 245,05 & \\ x'_4 = 181,05 & & x'_5 = 326,59 & \end{array} \quad (26)$$

Si, llegando a x_5 estimáramos conveniente aprovechar el valor 1,19 del coeficiente c_5 según la observación final del n. 6, para ampliar el intervalo de confianza de la interpolación, obtendríamos

$$x'_5 = 342,08.$$

Para estos valores de x convendrá calcular, conforme a las ideas del n. 5, los valores correspondientes de y , problema éste del cual nos ocuparemos más adelante (n. 11).

8. Para los valores de (x, y) inferiores a (x'', y'') dejan de poderse aplicar las consideraciones precedentes por el hecho de que la función que define el resto R_n deja de ser monótona y también alcanza valores absolutos bastante elevados. Para los casos de $n=4$ y $n=5$ no se pone verdadero problema, porque esos valores están dentro del dominio de convergencia de la serie inversa (9).

Para cualquier caso basta observar que, tratándose de intervalos finitos, y también de anchura muy reducida, y siendo las derivadas acotadas, se podrá calcular, en función de una cota superior de las mismas, una anchura mínima de intervalos de

⁽¹⁾ Al final del n. 6 se vió que pasando x del valor 3,22 a 200 el valor de c_{5r} pasa de 0,99 a 1,19 es decir crece en la razón media de 1 %; pero sabemos también que el crecimiento es relativamente más rápido para los valores pequeños.

validez de la fórmula (10) (sin resto) y dividir dichos intervalos en partes con esa anchura.

Así, notando que, para cualquier $x \geq 1$

$$\left| \frac{d^4 x}{dy^4} \right| \leq \frac{1}{4},$$

se ve que será siempre $R_4 < 10^{-2}$ para $h \leq \sqrt[4]{0,96}$; se sigue que para $y \leq 0,99$ se tendrá el valor de $x(y)$ con error $< 0,01$ por la fórmula (ver (9))

$$x(y) = 1 + \frac{y^2}{4},$$

y que, siempre con error $< 10^{-2}$ podrá calcularse el valor de $x(y)$ para $y \leq 2$ por medio de la fórmula

$$x(0,99 + h) = 1,235 + 0,459 h + 0,202 h^2 - 0,0251 h^3.$$

Análogamente, considerando los máximos módulos de la derivada sexta, se obtiene que para $y \leq 0,97$ se calcula con error $< 10^{-3}$ con la fórmula

$$x(y) = 1 + \frac{y^2}{4} - \frac{y^4}{96}$$

y que el valor de x para cualquier valor de $y \leq 2,05$ está dado, con dicha aproximación por

$$x(0,99 + h) = 1,228 + 0,4532 h + 0,2041 h^2 - 0,0250 h^3 - 0,0010 h^4 + 0,0019 h^5.$$

9. Resumiendo estos resultados aplicándolos, para fijar las ideas, al caso tratado ya con más detalle en el n. 7, podemos concluir que, por medio de 7 fórmulas del tipo

$$x(y_r + h) = x_r + a_{1r} h + a_{2r} h^2 + a_{3r} h^3 + a_{4r} h^4$$

$$(r = -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5; y_{-1} = 0,99),$$

estamos en condición de calcular el valor de $x(y)$ con error $< 10^{-2}$ para todos los valores de y entre 0 y 200.

Los valores de los coeficientes están dados por la siguiente

Tabla A (1)

	a_{1r}	a_{2r}	a_{3r}	a_{4r}	a_{5r}	a_{6r}
$x_{-1} = 1,235$	0,45942	0,20243	$-0,25102 \cdot 10^{-1}$	$-0,86109 \cdot 10^{-3}$	$0,17740 \cdot 10^{-2}$	$-0,4963 \cdot 10^{-3}$
$x_0 = 4$	1,17741	$0,62500 \cdot 10^{-1}$	$-0,61323 \cdot 10^{-2}$	$0,73977 \cdot 10^{-3}$	$-0,92325 \cdot 10^{-4}$	$0,1084 \cdot 10^{-4}$
$x_1 = 11,79$	1,57075	$0,21204 \cdot 10^{-1}$	$-0,94167 \cdot 10^{-3}$	$0,56372 \cdot 10^{-4}$	$-0,38287 \cdot 10^{-5}$	$0,2774 \cdot 10^{-6}$
$x_2 = 29,53$	1,83995	$0,8466 \cdot 10^{-2}$	$-0,17583 \cdot 10^{-3}$	$0,50733 \cdot 10^{-5}$	$-0,16950 \cdot 10^{-6}$	$0,6153 \cdot 10^{-8}$
$x_3 = 65,37$	2,04452	$0,38244 \cdot 10^{-2}$	$-0,39871 \cdot 10^{-4}$	$0,58621 \cdot 10^{-6}$	$-0,10068 \cdot 10^{-7}$	$0,1890 \cdot 10^{-9}$
$x_4 = 131,49$	2,20883	$0,19013 \cdot 10^{-2}$	$-0,10646 \cdot 10^{-4}$	$0,84838 \cdot 10^{-7}$	$-0,79351 \cdot 10^{-9}$	$0,8142 \cdot 10^{-11}$
$x_5 = 245$	2,34552	$0,10202 \cdot 10^{-2}$	$-0,3255 \cdot 10^{-5}$	$0,1487 \cdot 10^{-7}$	$-0,79976 \cdot 10^{-10}$	$0,4728 \cdot 10^{-12}$

10. A propósito de los números que preceden es importante, en el orden práctico, la observación siguiente: hemos tratado en forma general el problema del cálculo de $x(y)$ con dada aproximación, suponiendo esta asignada a priori y suponiendo que de ella tuviera que depender la elección del valor de n y la determinación de una tabla de valores fundamentales como la (26). Débese notar sin embargo que tal tabla no está determinada por el problema en modo necesario, pudiéndose siempre sustituir por otra donde los intervalos, convenientemente elegidos, sean más cortos. Así, si se propusiera calcular únicamente con la aproximación de 0,1 podría ser conveniente utilizar fórmulas con 4 términos solamente y la tabla (25) con la fórmula (21) indica entonces poner

$$h_{4r} = 1,24 x_r^{0,75}. \quad (27)$$

lo que llevaría a empezar nuevamente todos los cálculos preparatorios.

Podemos sin embargo utilizar los mismos valores fundamentales proporcionados por la tabla (26) considerando que para $x \leq 73,17$

$$1,24 x^{0,75} < x^{0,80};$$

(1) Estos coeficientes fueron calculados con muchas más cifras de lo necesario para la aproximación indicada para tener en cuenta las observaciones del párrafo siguiente.

y que, por otra parte, calculando nuevamente H_4 para $x=73$ se encuentra que para $x>73$ puede ponerse ⁽¹⁾

$$k_{4r} = 2,6 x_r^{0,75},$$

y se tiene entonces

$$k_{4r} < x_r^{0,80}$$

para valores de x_r hasta el orden de 10^8 .

Una observación análoga puede hacerse en el caso de querer una aproximación mayor, por ej. en 10^{-3} . En este caso los coeficientes c_{nr} dados por la tabla (25) resultan sensiblemente <1 , pero, creciendo n , crece el exponente de x_r en la (21), lo que tiene por consecuencia que para $n=6$, o 7 podrá todavía aceptarse la limitación $k_{nr} \leq x_r^{0,80}$ salvo eventualmente para pequeños valores de x_r . Así, tomando $n=7$, tendremos

$$k_{7r} = 0,88 x_r^{0,85} < x_r^{0,80}$$

por

$$x_r \geq 9,4.$$

Comparando con la tabla (26) o A se ve que puede la misma todavía utilizarse con sólo adoptar por x_0 el valor

$$x_0 = 5$$

y calcular para los valores de $y \leq 5,5$ por medio de fórmulas como las del § 8.

Con estas consideraciones una tabla del tipo A adquiere carácter universal para la aplicación a diferentes órdenes de aproximación, desde luego a costa de una subdivisión, a veces, en intervalos menos anchos (y por tanto más numerosos) de lo estrictamente necesario.

11. Vengamos ahora al cálculo de los valores $y_r = y(x_r)$, $y'_r = y(x'_r)$. Como notamos varias veces, este cálculo puede hacerse por la fórmula (2), siendo el segundo miembro convergente para cualquier x ; pero el número de términos necesarios para obtener una dada aproximación se hace extraordinariamente

⁽²⁾ Se observó en el n. 6 que en general el coeficiente c_{nr} varía de poco cuando x_r crece; evidentemente, por las razones dichas, tal variabilidad resulta mayor cuando n se elige menor.

grande al crecer x ; para evaluar el resto que corresponde a cortar la serie al término de grado n , basta notar que de (2), es decir

$$y(x) = 2\sqrt{\log x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log^n x}{(2n+1)n!},$$

se sigue

$$2\sqrt{\log x} \sum_{n=0}^p \frac{\log^n x}{(2n+1)n!} < y(x) \\ < 2\sqrt{\log x} \left\{ \sum_{n=0}^p \frac{\log^n x}{(2n+1)n!} + \frac{\log^{p+1} x}{(2p+3)(p+1)!} \sum_0^{\infty} \left(\frac{\log x}{p+2} \right)^i \right\}.$$

Para $p+2 > \log x$ la diferencia de los miembros extremos

$$\frac{2 \log^{p+\frac{3}{2}} x}{(2p+3)(p+1)!} - \frac{1}{1 - \frac{\log x}{p+2}}$$

da una acotación del error (por defecto) que resulta al tomar como valor de $y(x)$ el primer miembro.

Mucho más rápidamente se aproxima el valor de nuestra integral con las consideraciones siguientes:

Cualesquiera sean $a > b > 1$ se tiene por una integración por partes

$$\int_b^a \frac{dx}{\sqrt{\log x}} = \left[\frac{x}{\sqrt{\log x}} \right]_b^a + \frac{1}{2} \int_b^a \frac{dx}{\log^{\frac{3}{2}} x}$$

y, repitiendo p veces análoga operación,

$$\int_b^a \frac{dx}{\sqrt{\log x}} = \left[\frac{x}{\sqrt{\log x}} \right]_b^a + \frac{1}{2} \left[\frac{x}{\log^{\frac{3}{2}} x} \right]_b^a + \dots \\ + \frac{1.3 \dots (2r-1)}{2^r} \left[\frac{x}{\log^{\frac{2r+1}{2}} x} \right]_b^a + \dots \quad (28) \\ + \frac{1.3 \dots (2p-1)}{2^p} \int_b^a \frac{dx}{\log^{\frac{2p+1}{2}} x}.$$

Se nota en esta fórmula que, si la diferencia $a-b$ es un poco grande, los primeros términos del segundo miembro son grandes de manera que, opuestamente a lo que ocurre con los primeros términos de las fórmulas (2), ellos proporcionan inmediatamente una parte importante del valor de la integral del primer miembro. Pero se nota también que, mientras el resto representado por la última integral es siempre positivo, los términos integrados, a partir de un cierto r , resultan negativos; precisamente la condición necesaria y suficiente para que

$$\left[\frac{x}{\log^{\frac{2r-1}{2}} x} \right]_b^a \geq 0$$

es que, poniendo

$$\log a = \alpha, \quad \log b = \beta,$$

sea

$$\frac{2r-1}{2} \leq \frac{\alpha-\beta}{\log \frac{\alpha}{\beta}}. \quad (29)$$

Se sigue que, para aplicar útilmente la fórmula (28), deberá suponerse

$$p \leq \frac{\alpha-\beta}{\log \frac{\alpha}{\beta}} + \frac{1}{2}$$

porque, para valores mayores, la parte integrada diverge del valor del primer miembro, creciendo por consiguiente el resto.

Se puede analizar más precisamente el fenómeno observando que, para r fijo, la función

$$x : \log^{\frac{2r-1}{2}} x$$

es mínima para

$$x = e^{\frac{2r-1}{2}};$$

se sigue que para sacar de la fórmula (28) el máximo provecho es conveniente que, no solamente los términos integrados sean positivos, sino que, en cuanto sea posible, los números $\exp \frac{2r-1}{2}$

no caigan dentro del intervalo $a-b$, porque sólo así los términos integrados darán su máxima contribución en el valor buscado.

Sobre la base de estas observaciones obtenemos la regla siguiente para el cálculo numérico de la función $y(x)$:

Para $x \leq \sqrt{e}$ se aplica con toda comodidad y conveniencia la fórmula (2); en particular resulta

$$y(\sqrt{e}) = \sqrt[3]{2} \left(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{40} + \frac{1}{336} + \frac{1}{3456} + \frac{1}{42240} + \frac{1}{599040} + \frac{1}{9676800} + \dots \right) = 1,689924 = Y_0$$

Para valores mayores de x , supongamos calculados una vez para siempre los números

$$Y_r = \int_{\frac{e^{\frac{2r-1}{2}}}{e^{\frac{2r+1}{2}}}}^{\frac{e^{\frac{2r+1}{2}}}{e^{\frac{2r-1}{2}}}} \frac{dx}{\log^{\frac{2r+1}{2}} x}$$

(sobre este cálculo volveremos más adelante); ponemos además

$$\log x = z \quad t = \text{parte entera de } \left(z + \frac{1}{2} \right).$$

Se tiene

$$y(x) = \int_1^x \frac{dx}{\sqrt{\log x}} = Y_0 + \frac{1}{2} Y_1 + \frac{3}{4} Y_2 + \dots + \frac{1.3 \dots (2t-1)}{2^t} Y_t +$$

$$+ \left[\frac{x}{\sqrt{\log x}} \right]_{\sqrt{e}}^x + \frac{1}{2} \left[\frac{x}{\log^{\frac{3}{2}} x} \right]_{e^{\frac{3}{2}}}^x + \frac{2}{3} \left[\frac{x}{\log^{\frac{5}{2}} x} \right]_{e^{\frac{5}{2}}}^x \quad (30)$$

$$+ \dots + \frac{1.3 \dots (2t-3)}{2^{t-1}} \left[\frac{x}{\log \frac{2t-1}{2} x} \right] e^{\frac{2t-1}{2}} + R$$

$$R = \frac{1.3 \dots (2t-1)}{2^t} \int_{e^{\frac{2t+1}{2}}}^x \frac{dx}{\log \frac{2t+1}{2} x}.$$

Para el cálculo de R , lo mismo como para el cálculo de los números Y_r que coinciden con los valores de la integral que figura en R cuando por x se pusiera su límite superior $\exp \frac{2t+3}{2}$, debe excluirse, salvo para los valores pequeños de t ($t \leq 2$), un desarrollo en serie análogo a (2) que daría lugar a las mismas dificultades señaladas anteriormente; pero podemos notar que, por la propiedad de mínimo que sirvió para determinar el extremo inferior de integración, se puede prever que, dentro de los límites de la integración, la función integrada se mantiene, además que pequeña, sensiblemente constante y por lo tanto se obtendrá rápidamente una buena aproximación con la simple aplicación de fórmulas de cuadratura como las de trapecios o de Simpson.

En efecto, poniendo todavía $z = \log x$, resulta

$$\int_{e^{\frac{2t+1}{2}}}^x \frac{dx}{\log \frac{2t+1}{2} x} = \int_{\frac{2t+1}{2}}^z \frac{e^z dz}{z^{\frac{2t+1}{2}}};$$

las derivadas segunda y cuarta de la función integranda, en la segunda expresión, son respectivamente

$$\frac{e^z}{z^{\frac{2t+1}{2}}} \left(1 - \frac{2t+1}{z} + \frac{(2t+1)(2t+3)}{4z^2} \right)$$

y

$$\frac{e^z}{z^{\frac{2t+1}{2}}} \left(1 - \frac{2(2t+1)}{z} + \frac{3}{2} \frac{(2t+1)(2t+3)}{z^2} - \frac{(2t+1)(2t+3)(2t+5)}{2z^3} + \frac{(2t+1)(2t+3)(2t+5)(2t+7)}{16z^4} \right)$$

y se calcula fácilmente que ambas alcanzan su máximo valor para

$$\frac{2t+1}{2} \leq z \leq \frac{2t+3}{2}$$

en el extremo inferior del intervalo, siendo estos máximos respectivamente

$$\left(\frac{2t+1}{2e}\right)^{\frac{2t+1}{2}} \frac{2}{2t+1}, \quad \left(\frac{2e}{2t+1}\right)^{\frac{2t+1}{2}} \frac{12(2t+5)}{(2t+1)^3};$$

la anchura del intervalo de integración es

$$z - \frac{2t+1}{2} = I \leq 1$$

(=1 sólo en el caso extremo de los números Y_r). Por una regla conocida⁽¹⁾ se sigue que el error resultante en el cálculo de R (o del término en Y_t de (30)) por dividir el intervalo de integración en n partes iguales, será, en el caso de aplicar la regla de los trapecios:

$$\frac{(2t-1)!}{2^{2t} \cdot 3(t-1)!(2t+1)} \left(\frac{2e}{2t+1}\right)^{\frac{2t+1}{2}} \frac{I^3}{n^2} \quad (31)$$

y en el caso de aplicar la regla de Simpson:

$$\frac{(2t-1)!(2t+5)}{2^{2t+3} \cdot 75(t-1)!(2t+1)^3} \left(\frac{2e}{2t+1}\right)^{\frac{2t+1}{2}} \frac{I^5}{n^4} \quad (32)$$

Si cada una de estas expresiones se divide por la misma donde t se haya sustituido por $t+1$ se obtienen respectivamente las razones

$$\frac{1}{e} \left(\frac{2t+3}{2t+1}\right)^{\frac{2t+5}{2}}$$

(¹) Ver p. ej. LEVI - *Analisi algebrica e infinitésimale* p. 344 y 348 - DE LA VALLÉE - POUSSIN - *Cours d'analyse infinitésimale* 3me. édition. T. 1, p. 398.

y

$$\frac{1}{e} \left(\frac{2t+3}{2t+1} \right)^{\frac{2t+7}{2}} \frac{(2t+3)(2t+5)}{(2t+1)(2t+7)};$$

en la segunda hemos aislado el último factor, siempre > 1 , pero muy próximo a 1 apenas t crece; por ej. para $t=3$ vale 1,1; despreciando este factor y poniendo $\frac{2t+1}{2} = \eta$ esas dos razones se escriben

$$\frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{\eta} \right)^{\eta+2}, \quad \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{\eta} \right)^{\eta+3}$$

es decir

$$\begin{aligned} & \exp \left[-1 + (\eta+2) \log \left(1 + \frac{1}{\eta} \right) \right] \\ &= \exp \left[-1 + (\eta+2) \left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{2\eta^2} + \frac{1}{3\eta^3} - \dots \right) \right] \\ &> \exp \left[\frac{2\eta^2+3\eta-2}{2\eta^2} - 1 \right] = \exp \frac{3\eta-2}{2\eta^2} \end{aligned}$$

y

$$\exp \left[-1 + (\eta+3) \log \left(1 + \frac{1}{\eta} \right) \right] > \exp \frac{5\eta-2}{2\eta^2}.$$

Esta observación nos conduce a las conclusiones siguientes:

Sea al aplicar la fórmula de los trapecios, sea para la de Simpson, la exactitud crece al crecer t ; sin embargo la razón del crecimiento disminuye al crecer t , tendiendo a 1 cuando $t \rightarrow \infty$. Pero esta razón para el caso de la fórmula de Simpson es todavía sensible ($> \sqrt{e}$) para $t=4$.

Calculando (31) y (32) para $I=1$, $n=1$, $t \leq 4$, se obtiene para los límites superiores de los errores:

$t=1$	fórm. de trapecios	0,07	fórm. de Simpson	0,00026
$t=2$		0,05		0,000063
$t=3$		0,02		0,000021
$t=4$		0,013		0,00001;

en general la razón entre el error resultante de la aplicación de la fórmula de trapecios y el que corresponde a la fórmula de Simpson es del orden de $1 : 200 (2t - 3)$.

Si por tanto suponemos querer calcular los números de la forma $c_r Y_r$ que comparecen en la fórmula (30) con error $< 10^{-5}$, nos convendrá aplicar la fórmula de Simpson con $n=2$ hasta $r=4$ y con $n=1$ para valores mayores de r .

He aquí, por ej., los cálculos detallados de Y_1 y de Y_5 .

$$Y_1 = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{e^z dz}{z^{1/2}} ;$$

debe calcularse la función integrada para

$$z = \frac{1}{2} + k \cdot 0,25 \quad k = 0,1,2,3,4$$

$$2 \log_{10} \frac{e^z}{z^{1/2}} = \log_{10} e + k \frac{\log_{10} e}{2} - 3 \log_{10} (0,5 + k \cdot 0,25)$$

$$\begin{aligned} \log_{10} e &= 0,4342945 \\ 3 \log_{10} 0,5 &= \frac{1,0969100}{1,3373845} \quad \log_{10} \frac{e^{1/2}}{0,5^{1/2}} = 0,6686922 \quad \frac{e^{0,5}}{0,5^{1/2}} = 4,663288 \end{aligned}$$

Análogamente

$$\frac{e^{0,75}}{0,75^{3/2}} = 3,259334, \quad \frac{e}{1} = 2,718282, \quad \frac{e^{1,25}}{1,25^{3/2}} = 2,497486, \quad \frac{e^{1,50}}{1,50^{3/2}} = 2,439522$$

$$Y_1 = \frac{1}{12} \left(\frac{e^{0,5}}{0,5^{1/2}} + 4 \frac{e^{0,75}}{0,75^{3/2}} + 2 \frac{e}{1} + 4 \frac{e^{1,25}}{1,25^{3/2}} + \frac{e^{1,50}}{1,50^{3/2}} \right) = 2,963887$$

$$Y_5 = \int_{\frac{9}{2}}^{\frac{11}{2}} \frac{e^z dz}{z^{11/2}} ; \quad z = \frac{9}{2} + k \cdot 0,5 \quad (k = 0,1,2)$$

$$2 \log \frac{e^z}{z^{11/2}} = 9 \log e + k \log e - 11 \log (4,5 + k \cdot 0,5)$$

$$\frac{e^{4,5}}{2,5^{11/2}} = 0,022956, \quad \frac{e^5}{3^{11/2}} = 0,021239, \quad \frac{e^{5,5}}{3,5^{11/2}} = 0,020731$$

$$Y_5 = \frac{1}{6} (0,022956 + 4 \cdot 0,021239 + 0,020731) = 0,0214405$$

Se obtienen de esta manera los valores

$$\begin{aligned} Y_1 &= 2,963887 & Y_2 &= 1,345976 & Y_3 &= 0,437183 \\ Y_4 &= 0,107982 & Y_5 &= 0,214474 \cdot 10^{-1} & Y_6 &= 0,355820 \cdot 10^{-2} \\ Y_7 &= 0,506718 \cdot 10^{-3}, & \dots; \end{aligned}$$

se ve que las Y_r decrecen bastante rápidamente al crecer r , lo que debía preverse observando que

$$\begin{aligned} Y_r - Y_{r+1} &= \int_{\frac{2r-1}{2}}^{\frac{2r+1}{2}} \left(\frac{e^z}{z^{\frac{2r+1}{2}}} - \frac{e^{z+1}}{(z+1)^{\frac{2r+3}{2}}} \right) dz \\ &= \int_{\frac{2r-1}{2}}^{\frac{2r+1}{2}} \frac{e^z}{z^{\frac{2r+1}{2}}} \left[1 - \frac{e}{z+1} \left(1 - \frac{1}{z+1} \right)^{\frac{2r+1}{2}} \right] dz > 0; \end{aligned}$$

sin embargo debe tenerse en cuenta que, después de los primeros, los factores por los que se encuentran multiplicados en (30) van creciendo de manera tal de eliminar la ventaja de la aparente despreciabilidad.

Los términos iniciales de la fórmula (30) resultan en efecto

$$Y_0 = 1,68992 \quad Y_1^* = \frac{1}{2} Y_1 = 1,48194 \quad Y_2^* = \frac{3}{4} Y_2 = 1,00948$$

$$Y_3^* = \frac{3.5}{8} Y_3 = 0,81972, \quad Y_4^* = \frac{3.5.7}{16} Y_4 = 0,70863,$$

$$Y_5^* = \frac{3.5.7.9}{32} Y_5 = 0,63337, \quad Y_6^* = \frac{3.5.7.9.11}{64} Y_6 = 0,57793$$

$$Y_7^* = \frac{3.5.7.9.11.13}{128} Y_7 = 0,53496, \dots$$

La fórmula (30) permite ahora calcular los números $y(x_r)$, $y(x'_r)$ que habían quedado en suspenso en el n. 7 y esto con relativa facilidad y con toda la aproximación requerida dentro de los cinco decimales que hemos adoptado para nuestros

Y_r^* . Se obtiene:

$$\begin{aligned} y(4) &= Y_0 + \left[\frac{x}{\sqrt{\log x}} \right]_{\sqrt{e}}^4 + \frac{1}{2} \int_{\sqrt{e}}^4 \frac{dx}{\log^{3/2} x} \\ &= Y_0 + \left[\frac{x}{\sqrt{\log x}} \right]_{\sqrt{e}}^4 + Y_1^* - \frac{1}{2} \int_4^{e^{\frac{3}{2}}} \frac{dx}{\log^{3/2} x} \quad (1) \\ &= 3,96014 \\ y(7) &= Y_0 + Y_1^* + \left[\frac{x}{\sqrt{\log x}} \right]_{\sqrt{e}}^7 + \frac{1}{2} \left[\frac{x}{\log^{3/2} x} \right]_{e^{3/2}}^7 + \frac{3}{4} \int_{e^{3/2}}^7 \frac{dx}{\log^{5/2} x} \\ &= 6,41176 \end{aligned}$$

Como ejemplo he todavía aquí el cálculo de $y(245)$:

$$\log 245 = 5,501259, \quad t = 5$$

$$\begin{aligned} y(245) &= Y_0 + Y_1^* + Y_2^* + Y_3^* + Y_5^* + \\ &+ \left[\frac{245}{\sqrt{5,50126}} - \sqrt{2e} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{245}{5,50126^{3/2}} - \left(\frac{2e}{3} \right)^{3/2} \right] \\ &+ \frac{3}{4} \left[\frac{245}{5,501269^{5/2}} - \left(\frac{2e}{5} \right)^{5/2} \right] + \frac{15}{8} \left[\frac{245}{5,501269^{7/2}} - \left(\frac{2e}{7} \right)^{7/2} \right] \\ &+ \frac{105}{16} \left[\frac{245}{5,501269^{9/2}} - \left(\frac{2e}{9} \right)^{9/2} \right] + \\ &+ \frac{945}{32} \frac{245 - e^{11/2}}{2} \left[\frac{1}{5,501269^{11/2}} + \left(\frac{2}{11} \right)^{11/2} \right] \end{aligned}$$

(1) Nótese en este ejemplo el uso que puede hacerse de los números Y_r^* para reducir el intervalo de integración de la integral en R de la fórmula (30); precisamente, con los símbolos de esa fórmula convendrá calcular el término R_n por diferencia siempre que $\log x = z > t + 1$.

siendo en este caso el error debido a la integración aproximada del resto del orden de 10^{-6} . Efectuando los cálculos resulta

$$y(245) = 118,84149$$

donde las dos últimas cifras son inseguras.

12. Si en la parte integrada de la fórmula (30) se desechan todos los términos que aparecen no dependientes explícitamente de x , es decir los términos de la primera línea y los que dependen de los extremos inferiores de los corchetes, se obtiene la expresión

$$S_p(x) = \frac{x}{\sqrt{\log x}} \left(1 + \sum_{r=1}^p \frac{1.3 \dots (2r-1)}{2^r \log^r x} \right) \quad (33)$$

donde a p puede darse cualquier valor entero ≥ 0 y se entiende que la $\sum$ representa 0 para $p=0$. Es interesante notar que, para cualquier valor de p esta suma es valor asintótico de $y(x)$ en el sentido que *para cualquier valor fijado por p existe un número X_p tal que para $x > X_p$*

$$y(x) > S_p(x) \quad (34)$$

y

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{S_p(x)} = 1 \quad (35)$$

Resulta (34) observando que si en (28) se sustituye x en el lugar de a y se pone por b un número fijo cualquiera > 1 , se infiere, para $x > b$,

$$y(x) - \int_1^b \frac{dx}{\sqrt{\log x}} > S_p(x) - S_p(b);$$

pero, cambiando p en $p+1$ se tiene aún

$$y(x) - S_p(x) - \left(\int_1^b \frac{dx}{\sqrt{\log x}} - S_p(b) \right) > \frac{1.3 \dots (2p+1)}{2^{p+1}} \left[\frac{x}{\log^{\frac{2p+3}{2}} x} \right]_b^x \quad (36)$$

donde el segundo miembro, creciendo x , puede hacerse arbitrariamente grande y por tanto mayor del valor absoluto del término constante en paréntesis en el primer miembro. Luego

$$y(x) - S_p(x) > 0. \quad (37)$$

La (35) resulta por otra parte por la simple aplicación de la regla de L'Hospital siendo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\log x}}, \quad \frac{dS_p(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\log x}} (1 + \Sigma), \quad (38)$$

$$\Sigma > 0; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \Sigma = 0.$$

Más precisamente la (36) expresa que si la desigualdad (37) se realiza para $x=b$, se realizará también para cualquier valor de $x > b$, siendo la diferencia $y(x) - S_p(x)$ creciente con x .

Pero, por (38),

$$\frac{d(y-S)}{dy} < 0,$$

es decir que la razón incremental de $y-S$ es decreciente. Los resultados anteriores nos han dado que para $p=0$ la diferencia

$$y(4) - \frac{4}{\sqrt{\log 4}} = 3,96 - 3,40 = 0,56$$

ya es positiva; luego será para todos los $x > 4$

$$y(x) > \frac{x}{\sqrt{\log x}}.$$

Pero tenemos también

$$y(245) - \frac{245}{\sqrt{\log 245}} = 118,84 - 104,46 = 14,38;$$

se sigue que para cualquier $x > 4$ la razón $x : \sqrt{\log x}$ es una evaluación por defecto de $y(x)$ que, aplicada a una sucesión como la (29), es suficiente para que, dado un y , permita determinar los valores de x_r, x'_r para los cuales las correspondientes y_r, y'_r le están más próximas, antes que los propios valores de éstas estén determinados con exactitud.

Como aplicación de esta observación, poniendo

$$\frac{x}{\sqrt{\log x}} = y^*(x),$$

terminamos este estudio con la tabla de los $y^*(x)$ calculados para los valores de x de la tabla (26) aproximados en la unidad:

$x = 4$	7	12	19	30	44	65	94
$y^*(x) = 3,40$	5,02	7,61	11,07	16,27	22,62	31,81	44,10
$x = 130$	180	245	342				
$y^*(x) = 52,92$	79,02	104,46	141,51.				

B. Levi

ROSARIO, INSTITUTO DE MATEMÁTICA.

— 212 —

AREA LIMITADA POR LA CURVA ENGENDRADA
POR EL EXTREMO DE UN SEGMENTO CUYO
OTRO EXTREMO RECORRE UNA CURVA
FIJA Y APLICACION A LA OBTENCION
DE ALGUNOS TEOREMAS SOBRE
LOS OVALOS

1. Sea en el plano una curva cerrada C sin puntos dobles, definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = x(s), \quad y = y(s) \quad (1.1)$$

donde el parámetro s es el arco de la curva. Supondremos que la curva tiene longitud finita y que además tiene en cada punto curvatura determinada, es decir, que las funciones (1.1) admiten las dos primeras derivadas en todo punto. Entonces, si τ es el ángulo que forma la tangente a la curva con el eje x y ρ es el radio de curvatura, se verifican las igualdades

$$ds = \rho d\tau, \quad dx = \cos \tau ds, \quad dy = \sin \tau ds. \quad (1.2)$$

Supongamos un segmento de longitud $h = h(s)$ que se mueve recorriendo uno de sus extremos la curva C . Si este segmento en el punto x, y de C forma un ángulo ϑ con la tangente, las coordenadas del extremo opuesto serán

$$X = x + h \cos(\vartheta + \tau), \quad Y = y + h \sin(\vartheta + \tau). \quad (1.3)$$

Para situarnos en las condiciones más generales, supondremos que el ángulo ϑ es también una función de s . Si después de recorrer el extremo x, y toda la curva C , el segmento vuelve a su posición inicial, el extremo X, Y habrá descrito una curva cerrada que limitará una cierta área Φ cuyo valor queremos calcular.

Para ello aplicaremos la fórmula que da el valor de un área plana por una integral curvilínea extendida a su contorno, o sea,

$$\Phi = \int X dY. \quad (1.4)$$

Según (1.3) es

$$X dY = (x + h \cos(\vartheta + \tau)) (y' + h' \sin(\vartheta + \tau) + h \cos(\vartheta + \tau) (\vartheta' + \tau')) ds. \quad (1.5)$$

Observemos que llamando L a la longitud de C y teniendo en cuenta que suponemos que el segmento vuelve a su posición inicial, o sea $h(s+L) = h(s)$, $\vartheta(s+L) = \vartheta(s)$, por una integración por partes se verifica

$$\int_0^L h h' \sin(\vartheta + \tau) \cos(\vartheta + \tau) ds = - \int_0^L h (h' \sin(\vartheta + \tau) \cos(\vartheta + \tau) + h \cos^2(\vartheta + \tau) (\vartheta' + \tau') - h \sin^2(\vartheta + \tau) (\vartheta' + \tau')) ds,$$

de donde

$$\int_0^L h h' \sin(\vartheta + \tau) \cos(\vartheta + \tau) ds = - \frac{1}{2} \int_0^L h^2 (\cos^2(\vartheta + \tau) - \sin^2(\vartheta + \tau)) (\vartheta' + \tau') ds.$$

Además, integrando también por partes,

$$\int_0^L x h' \sin(\vartheta + \tau) ds = - \int_0^L h (x' \sin(\vartheta + \tau) + x \cos(\vartheta + \tau) (\vartheta' + \tau')) ds.$$

Sustituyendo estas últimas expresiones en (1.5) resulta

$$\int X dY = \int x dy + \int_0^L h (y' \cos(\vartheta + \tau) - x' \sin(\vartheta + \tau)) ds + \frac{1}{2} \int_0^L h^2 \vartheta' ds + \frac{1}{2} \int_0^L h^2 \tau' ds. \quad (1.6)$$

Según (1.2) es $\cos(\vartheta + \tau)dy - \sin(\vartheta + \tau)dx = -\sin\vartheta ds$ y por tanto, sustituyendo en (1.6), integrando y llamando F al área limitada por la curva C , se tiene

$$\phi = F - \int_0^L h \sin \vartheta ds + \frac{1}{2} \int_0^L h^2 \vartheta' ds + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h^2 d\tau. \quad (1.7)$$

Esta es la fórmula fundamental de la que vamos a hacer algunas aplicaciones.

2. *Caso $\vartheta = cte$.* Si el ángulo ϑ que forma el segmento h con la tangente a la curva es constante, la fórmula (1.7) se reduce a

$$\phi = F - \sin \vartheta \int_0^L h ds + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h^2 d\tau. \quad (2.1)$$

En particular, si tomamos la longitud h igual a la cuerda de la curva C determinada por la recta inclinada un ángulo ϑ respecto la tangente en cada punto, los dos extremos del segmento h describen la misma curva C y por tanto en (2.1) debe ser $\phi = F$, de donde

$$\sin \vartheta \int_0^L h ds = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h^2 d\tau. \quad (2.2)$$

Tomemos, en particular, un óvalo, o sea una curva cerrada convexa con radio de curvatura ρ continuo en cada punto. Poniendo $ds = \rho d\tau$, la fórmula (2.2) se puede escribir

$$\int_0^{2\pi} h \left(\rho \sin \vartheta - \frac{1}{2} h \right) d\tau = 0. \quad (2.3)$$

De aquí se deduce que en el intervalo $0, 2\pi$ hay, por lo menos, dos puntos para los cuales $h = 2\rho \sin \vartheta$. Observando que

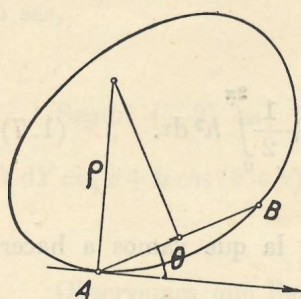


Fig. 1

en el punto A, en el centro de curvatura correspondiente al mismo punto.

Este resultado puede puntualizarse más, pudiéndose demostrar que no solamente hay dos, sino que existen por lo menos cuatro posiciones de la cuerda AB en las que tiene lugar la proposición enunciada. Para ello utilizaremos un conocido teorema debido a Bose⁽¹⁾ según el cual todo óvalo C contiene por lo menos dos de sus círculos de curvatura completamente en su interior y está contenido completamente en el interior de por lo menos dos de sus círculos de curvatura; los puntos de contacto de los círculos de curvatura contenidos en C separan a los de los círculos que contienen a C.

Admitido el teorema de Bose, supongamos que A_1, A_3 sean dos puntos de contacto de dos círculos osculadores contenidos en C y A_2, A_4 (separados por los anteriores) dos puntos de contacto de dos círculos osculadores que contienen a C. La cuerda $A_1B_1 = h_1$ que forma un ángulo ϑ con la tangente en A_1 corta primero al círculo osculador en A_1 que al óvalo, y por tanto si ρ_1 es el radio de curvatura en A_1 es

$$\rho_1 < \frac{h_1}{2 \sin \vartheta}. \quad (2.4)$$

En cambio, si ρ_2 es el radio del círculo osculador en A_2 , el

⁽¹⁾ R. C. BOSE, *On the number of circles of curvature perfectly enclosing or perfectly enclosed by a closed convex oval*, Mathematische Zeitschrift, vol. 35, 1932, pág. 23.

cual contiene a C , la cuerda A_2B_2 del óvalo será menor que la cuerda correspondiente del círculo y por tanto

$$\rho_2 > \frac{h_2}{2 \operatorname{sen} \vartheta}. \quad (2.5)$$

De (2.4) y (2.5) se deduce que entre A_1 y A_2 hay por lo menos un punto en el cual $h = 2\rho \operatorname{sen} \vartheta$. Análogamente hay por lo menos un punto con la misma propiedad entre A_2, A_3 , entre A_3, A_4 y entre A_4, A_5 . Se tiene por tanto el teorema:

Sobre cualquier óvalo, considerando todas las cuerdas AB inclinadas un ángulo constante ϑ respecto la tangente en su punto inicial A , existen por lo menos cuatro posiciones en las cuales la normal en el punto medio de la cuerda corta a la normal al óvalo en el punto A en el centro de curvatura correspondiente al mismo punto.

3. Si para $\vartheta = \text{const.}$ resulta también $h = \text{const.}$ (2.2) nos da

$$L = \pi \frac{h}{\operatorname{sen} \vartheta} \quad (3.1)$$

es decir: si una curva cerrada es tal que las cuerdas inclinadas de un determinado ángulo constante ϑ respecto de la tangente en su extremo inicial tienen la longitud constante h , la longitud de la curva está dada por (3.1).

Un caso particular muy conocido es el de las curvas convexas de anchura constante⁽²⁾. Ellas corresponden al caso de ser $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ y la longitud h es igual a la anchura de la curva; para ellas resulta entonces $L = \pi h$, como es bien sabido.

4. *Caso $h = \text{const.}$* Si a partir de cada punto de la curva cerrada C llevamos una cuerda de longitud constante h que sea menor que el mínimo de los máximos de las distancias de cada punto de la curva a otro cualquiera de la misma (condición para que cualquier punto A de C pueda ser origen de una

(²) Ver, por ej. T. BONNESEN, W. FENCHEL, *Theorie der konvexen Körper*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Berlin 1934, pág. 127.

uerda de longitud h), en la fórmula (1.7) deberá ser $\phi = F$. Además, como el ángulo ϑ al describir s toda la curva vuelve a su valor inicial y no puede describir toda una circunferencia por ser siempre $< \pi$, será $\int_0^L \vartheta' ds = 0$. Por tanto se tiene

$$\int_0^L \sin \vartheta ds = \pi h \quad (4.1)$$

que se puede escribir

$$\int_0^{2\pi} \left(\rho \sin \vartheta - \frac{1}{2} h \right) d\tau = 0. \quad (4.2)$$

Si C es un óvalo, de esta igualdad se deduce que hay por lo menos dos cuerdas de longitud h para las cuales es $h = 2\rho \sin \vartheta$, siendo ρ el radio de curvatura en un extremo de la cuerda y ϑ el ángulo que forma en este mismo extremo la cuerda con la tangente al óvalo.

Este resultado se puede mejorar. En efecto, de la misma manera como se procedió anteriormente, aplicando el teorema de Bose, se demuestra que no sólo hay *dos* cuerdas con la propiedad mencionada, sino que hay por lo menos *cuatro*. Se puede, por tanto, enunciar:

Sobre cualquier óvalo, considerando todas las cuerdas de longitud constante $AB = h$, existen por lo menos cuatro de ellas tales que la perpendicular en su punto medio corta a la normal al óvalo en su extremo A , en el centro de curvatura del óvalo correspondiente al mismo punto.

Sobre cada cuerda AB de longitud constante h tomemos un segmento $AX = \lambda h$, siendo λ un factor constante. Según (1.7) y (4.1) el área limitada por la curva descrita por el punto X valdrá

$$\phi = F - \pi h^2 \lambda (1 - \lambda). \quad (4.3)$$

Si llamamos $AX = a$, $XB = b$ a los segmentos en que queda dividida la cuerda AB por el punto X , será $\lambda = a/h$, $h - a = b$ y por tanto, según (4.3),

$$|\phi - F| = \pi ab. \quad (4.4)$$

Esta igualdad es la expresión del llamado teorema de Holditch⁽³⁾ que se enuncia: *si todas las cuerdas de longitud constante $AB=h$ de una curva cerrada C se dividen por un punto X en dos partes tales que $AX=a$, $XB=b$, el área comprendida entre la curva C y la curva descrita por el punto X vale πab , cualquiera que sea la curva C .*

5. *Curvas paralelas interiores de un óvalo.* Consideremos ahora el caso de ser C un óvalo, o sea, una curva convexa cerrada y con radio de curvatura continuo en cada punto. Si $\vartheta = \pi/2$ y $h = \text{cte.}$ el lugar geométrico descrito por el extremo del segmento h que no se apoya en C es la curva paralela interior a C a distancia h .

Para estudiar la forma de estas curvas paralelas interiores, busquemos su radio de curvatura R . Las ecuaciones (1.3), para $\vartheta = \pi/2$ se escriben

$$X = x - h \sin \tau, \quad Y = y + h \cos \tau \quad (5.1)$$

y aplicando la fórmula

$$R = \frac{(X'^2 + Y'^2)^{3/2}}{X'Y'' - Y'X''}$$

que da el radio de curvatura de una curva plana dada por sus ecuaciones paramétricas y teniendo en cuenta (1.2), resulta después de simples transformaciones

$$R = \rho - h. \quad (5.2)$$

Sean ρ_m y ρ_M los valores mínimo y máximo respectivamente de ρ . La expresión (5.2) nos dice que si h es menor que ρ_m o mayor que ρ_M , el radio de curvatura R tiene signo constante y por tanto la curva paralela, siendo una curva ce-

(3) Ver por ej. CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Cours d'Analyse Infinitésimale*, Tomo I, 3ª ed., pág. 366.

El teorema fué publicado como cuestión propuesta por Holditch, utilizando el pseudónimo de *Petrarch*, en la publicación inglesa *Lady's and Gentleman's Diary* correspondiente al año 1858. La primera solución fué dada por Woolhouse y una generalización del problema al caso en que la longitud h fuera variable fué dada por E. B. ELLIOT en el *Messenger of Mathematics*, 1878.

rrada con radio de curvatura de signo constante y tal que el ángulo de la tangente con una dirección fija varía de 0 a 2π , es también una curva convéxa.

En cambio si h está comprendido entre ρ_m y ρ_M , o sea $\rho_m \leq \rho \leq \rho_M$, la curva paralela tendrá puntos de retroceso ($R=0$) y además puede tener puntos dobles. La fig. 2 representa un

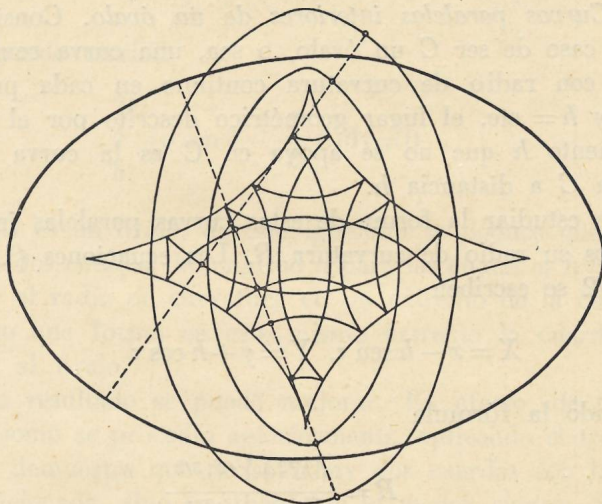


Fig 2

ejemplo de cómo van variando las curvas paralelas interiores de un óvalo C , al variar la distancia h .

Mientras $h < \rho_m$, la curva paralela interior a C es otro óvalo tal que en puntos correspondientes tiene la convexidad del mismo sentido que C , pues R y ρ son del mismo signo. En cambio, para $h > \rho_M$, los radios de curvatura R y ρ son de signos opuestos y por tanto el óvalo C y su paralelo interior a distancia h tienen, en puntos homólogos, las convexidades de sentidos opuestos. En todos los casos, según (5.2) es $\rho - R = h$; cuando $h > \rho_M$, como R es de signo opuesto a ρ , resulta que el óvalo C y su paralelo se corresponden de manera que la distancia entre puntos homólogos es igual a h y la suma de los radios de curvatura en los mismos es también igual a h .

6. *Desigualdades isoperimétricas.* Aún en los casos en que h está comprendido entre ρ_m y ρ_M y por tanto la curva para-

lela puede cruzarse a sí misma, el área limitada por la misma sigue definiéndose por la fórmula (1.7), que siendo $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ y $h = \text{cte.}$ se escribe

$$\phi = F - Lh + \pi h^2. \quad (6.1)$$

Evidentemente, tanto para h suficientemente pequeño, como para h suficientemente grande es $\phi > 0$. Ya no es tan inmediato y en cambio es muy interesante observar que para valores de h comprendidos entre ciertos límites, cualquiera que sea el óvalo C , es $\phi \leq 0$.

Para verlo tomemos un sistema de ejes coordenados x, y tales que las dos tangentes al óvalo C paralelas al eje y corten al eje x en dos puntos simétricos de abscisas $\pm D$. La anchura de C en la dirección del eje y , o sea, la distancia entre las dos tangentes paralelas a la misma dirección, será $2D$. Con esto se ha logrado que en las ecuaciones (1.1) de C sea siempre

$$|x| \leq D. \quad (6.2)$$

Entonces según (1.6) y (1.2), tomando $h = D$, $\vartheta = \pi/2$, es

$$\phi(D) = \int_0^L (x \sin \tau - D) ds + \pi D^2. \quad (6.3)$$

Siendo $|x| \leq D$, de la identidad

$$(D - x \sin \tau)^2 = (D^2 - x^2) \cos^2 \tau + (D \sin \tau - x)^2 \quad (6.4)$$

se deduce

$$D - x \sin \tau \geq \sqrt{D^2 - x^2} \cos \tau, \quad (6.5)$$

y por tanto, siendo $\cos \tau ds = dx$, y teniendo en cuenta que al recorrer s todo el óvalo C , la abscisa x recorre dos veces el intervalo $-D, +D$, de (6.5) y (6.3) se deduce

$$\phi(D) \leq \pi D^2 - 2 \int_{-D}^{+D} \sqrt{D^2 - x^2} dx = 0. \quad (6.6)$$

Como la anchura $2D$, eligiendo convenientemente los ejes coordenados, es cualquier anchura de C , resulta: *siendo $2D$ una anchura cualquiera de C , según (6.1) y (6.6), se verifica*

$$F - LD + \pi D^2 \leq 0. \quad (6.7)$$

Esta es una desigualdad muy conocida y notable debida a T. Bonnesen⁽⁴⁾.

Observando la identidad

$$F - LD + \pi D^2 = \left(F - \frac{L^2}{4\pi}\right) + \pi \left(\frac{L}{2\pi} - D\right)^2$$

la desigualdad (6.7) nos dice

$$L^2 - 4\pi F \geq 4\pi^2 \left(\frac{L}{2\pi} - D\right)^2.$$

Escribiendo esta desigualdad para la semianchura máxima D_M de C y para su semianchura mínima D_m , se tiene

$$L^2 - 4\pi F \geq 4\pi^2 \left(D_M - \frac{L}{2\pi}\right)^2, \quad L^2 - 4\pi F \geq 4\pi^2 \left(\frac{L}{2\pi} - D_m\right)^2.$$

Sumando miembro a miembro estas desigualdades y observando que cualesquiera que sean los números m, n es siempre

$$\frac{m^2 + n^2}{2} \geq \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 \quad (6.8)$$

resulta

$$L^2 - 4\pi F \geq \pi^2 (D_M - D_m)^2; \quad (6.9)$$

que es una clásica desigualdad isoperimétrica debida también a Bonnesen⁽⁵⁾.

Ella expresa que dada el área F de un óvalo, la mínima longitud es $L = 2\sqrt{\pi F}$. Además, para que sea $L = 2\sqrt{\pi F}$, debe

(4) Ver T. BONNESEN, *Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes*, Gauthier-Villars, Paris, 1929, pág. 61.

(5) Loc. cit. pág. 79.

valer el signo igual en (6.5) y por tanto, según (6.4) debe ser $x = D \sin \tau$. Los únicos óvalos para los cuales esta condición se cumple son las circunferencias. En efecto, siendo $\tau = \arctg y'$, la condición $x = D \sin \tau$ se escribe

$$x = \frac{Dy'}{\sqrt{1+y'^2}}, \text{ o sea, } y' = \frac{x}{\pm \sqrt{D^2 - x^2}}.$$

Integrando resulta $x^2 + (y - \beta)^2 = D^2$, que representa todos los círculos de radio D con el centro en el eje y .

Otras desigualdades isoperimétricas se obtienen observando que se puede escribir también la identidad

$$F - LD + \pi D^2 = \frac{D^2}{4F} \left[\left(L - \frac{2F}{D} \right)^2 - (L^2 - 4\pi F) \right]$$

y por tanto, según (6.7), debe ser

$$L^2 - 4\pi F \geq \left(L - \frac{2F}{D} \right)^2 \quad (6.10)$$

que es otra desigualdad isoperimétrica, válida para cualquier D comprendido entre D_m y D_M . En particular escribiendo la desigualdad anterior para D_m y D_M , se tiene

$$L^2 - 4\pi F \geq \left(L - \frac{2F}{D_M} \right)^2, \quad L^2 - 4\pi F \geq \left(\frac{2F}{D_m} - L \right)^2.$$

Sumando estas desigualdades miembro a miembro y aplicando (6.8) al segundo miembro, resulta

$$L^2 - 4\pi F \geq F^2 \left(\frac{1}{D_m} - \frac{1}{D_M} \right)^2 \quad (6.11)$$

Por las mismas razones que para (6.9) el signo de igualdad en (6.10) o en (6.11) vale únicamente para el caso de ser C un círculo.

7. Lugar geométrico de los puntos que son centros de círculos de radio dado que contienen un óvalo C . Sean, como antes,

ρ_m y ρ_M los valores mínimo y máximo respectivamente del radio de curvatura ρ de C . En la hipótesis de ser $h > \rho_M$, queremos hallar *el área llenada por los puntos que son centros de círculos de radio h que contienen a C en su interior.*

Por cada punto A de C tracemos la normal y tomemos hacia el interior de C un segmento AO de longitud h . El círculo de centro O y radio h será tangente a C en A y siendo $h > \rho_M$, es sabido y es fácil demostrar que contiene a C en su interior. Al variar A sobre C , el punto O describe la curva paralela interior de C a distancia h , curva que siendo $h > \rho_M$ hemos visto que es convexa y cuya área, según (1.7), vale

$$\phi = F - Lh + \pi h^2. \quad (7.1)$$

Vamos a demostrar que esta área es precisamente la buscada. En primer lugar se observa que si dos puntos son centros de círculos de radio h que contienen a una curva convexa C , cualquier punto del segmento que une los dos puntos es también centro de un círculo del mismo radio h que contiene a C . Por tanto, siendo la curva de área ϕ convexa y siendo todos sus puntos centros de círculos de radio h que contienen a C , todos sus puntos interiores gozarán de la misma propiedad. Falta demostrar que cualquier punto O_1 que sea centro de un círculo de radio h que contiene a C , está contenido en ϕ . En efecto, si este círculo de radio h y centro O_1 es tangente a C , uniendo O_1 con el punto de contacto A_1 se tiene que $O_1A_1 = h$ es normal a C y por tanto O_1 forma parte de la curva que limita ϕ . Si el círculo de radio h y centro O_1 no es tangente a C , tracemos por O_1 una recta cualquiera; moviendo O_1 sobre esta recta en uno y otro sentido, a ambos lados se encontrará un punto que será centro de un círculo de radio h tangente a C . Estos dos puntos pertenecen a la curva paralela a C a distancia h y por ser esta curva convexa, el punto O_1 será interior a ella.

Se tiene por tanto demostrado que: *el lugar geométrico de los puntos del plano que son centros de círculos de radio $h > \rho_M$ que contienen al óvalo C , está limitado por la curva convexa paralela interior de C a distancia h y su área vale $F - Lh + \pi h^2$.*

8. *Unas acotaciones superiores del déficit isoperimétrico.*
Siendo L la longitud de una curva convexa cerrada C y F el

área que ella limita, a la diferencia $L^2 - 4\pi F$, que hemos visto es siempre ≥ 0 , se le llama «déficit isoperimétrico» de la curva C . Vamos a obtener algunas expresiones que acotan superiormente este «déficit».

Para $h \leq \rho_m$, la curva paralela interior a C a distancia h , es convexa y su área está dada por la expresión (7.1). Como para $h=0$, es $\phi=F \geq 0$, por continuidad y siempre con la condición $h \leq \rho_m$, será también $\phi \geq 0$ y por tanto

$$F - L\rho_m + \pi\rho_m^2 \geq 0. \quad (8.1)$$

Análogamente, para $h \geq \rho_M$, el área (7.1) que acabamos de ver es igual al área cubierta por los puntos que son centros de círculos de radio h que contienen a C , es también ≥ 0 . Por tanto

$$F - L\rho_M + \pi\rho_M^2 \geq 0. \quad (8.2)$$

Observando la identidad

$$F - L\rho + \pi\rho^2 = \frac{\rho^2}{4F} \left[\left(L - \frac{2F}{\rho} \right)^2 - (L^2 - 4\pi F) \right],$$

las desigualdades (8.2) y (8.1) se pueden escribir

$$L^2 - 4\pi F \leq \left(L - \frac{2F}{\rho_M} \right)^2, \quad L^2 - 4\pi F \leq \left(\frac{2F}{\rho_m} - L \right)^2 \quad (8.3)$$

que son dos acotaciones superiores del déficit isoperimétrico.

Colocando un círculo de radio ρ_M tangente a C en cualquier punto, de un mismo lado de la tangente, el círculo contendrá a C y por tanto $2\pi\rho_M \geq L$, de donde

$$L - \frac{2F}{\rho_M} \geq L - \frac{4\pi F}{L}$$

expresión que, según la desigualdad isoperimétrica, es ≥ 0 .

Análogamente, colocando tangente a C en cualquier punto un círculo de radio ρ_m de un mismo lado de la tangente, el círculo queda totalmente interior a C y por tanto $L \geq 2\pi\rho_m$, lo

cual, teniendo en cuenta la desigualdad isoperimétrica, nos dice que

$$\frac{2F}{\rho_m} - L \geq 0.$$

Según esto, multiplicando las desigualdades (8.3) y teniendo en cuenta que la media geométrica es siempre igual o menor que la media aritmética, resulta

$$L^2 - 4\pi F \leq F^2 \left(\frac{1}{\rho_m} - \frac{1}{\rho_M} \right)^2$$

que es otra desigualdad que limita superiormente el déficit isoperimétrico.

Todavía se pueden obtener otras acotaciones, observando la identidad

$$F - L\rho + \pi\rho^2 = \frac{1}{4\pi}[(L - 2\pi\rho)^2 - (L^2 - 4\pi F)].$$

De aquí se deduce, según (8.1) y (8.2)

$$L^2 - 4\pi F \leq (L - 2\pi\rho_m)^2, \quad L^2 - 4\pi F \leq (2\pi\rho_M - L)^2.$$

Multiplicando miembro a miembro estas desigualdades y aplicando al segundo miembro que la media geométrica es igual o menor que la media aritmética resulta

$$L^2 - 4\pi F \leq \pi^2 (\rho_M - \rho_m)^2$$

lo cual es una conocida desigualdad de O. Bottema⁽⁶⁾.

Luis A. Santaló

ROSARIO, INSTITUTO DE MATEMÁTICA.

(6) O. BOTTEMA, *Eine obere Grenze für das isoperimetrische Defizit ebenen Kurve*, Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. Tomo 36, 1933, pág. 442-446.

Ver también BONNESEN-FENCHEL, loc. cit., pág. 83.

SOBRE UN METODO GRAFICO DE APROXIMACION DE FUNCIONES

En problemas de aplicación se presenta a menudo la necesidad de aproximar una función de naturaleza experimental o aún resultante de un cálculo, pero de expresión relativamente complicada, por otra cuya forma, salvo la presencia de algunos coeficientes arbitrarios, está dada a priori por la naturaleza misma del problema. Para estimar la aproximación y, por consiguiente hacer mínimo el error, queda siempre una cierta arbitrariedad de juicio. Las condiciones de hacer mínimo el máximo valor absoluto de la diferencia de ordenadas correspondientes o de hacer mínima la integral del cuadrado de esa diferencia (método de mínimos cuadrados) son las que más cómodamente se prestan al cálculo analítico. Un criterio que en muchos casos se presentaría conveniente, o necesario, dada la naturaleza del problema, es el de hacer mínima el área total (en valor absoluto) comprendida entre las gráficas de las dos funciones.

1. Si $V(x)$ es la función dada y $F(x; \lambda, \mu, \dots)$ la función aproximante, dependiente de los parámetros $\lambda, \mu, \dots$, el problema se expresa entonces analíticamente por la condición

$$\int_a^b |V(x) - F(x; \lambda, \mu, \dots)| dx = \text{mínimo}. \quad (1)$$

Para tratar analíticamente tal problema se encuentran dificultades e veces prácticamente insuperables por el hecho de que, para tener en cuenta los cambios de signo de la diferencia $V(x) - F(x; \lambda, \mu, \dots)$ es necesario determinar los puntos de intersección de las curvas $y = V(x)$, $y = F(x; \lambda, \mu, \dots)$, y este cálculo generalmente tampoco puede hacerse por aproximación numérica en caso de dejar indeterminados los parámetros, como es necesario. Resulta, sin embargo, evidente que, regulando convenientemente una serie de tanteos sucesivos, podrá igualmente conseguirse la determinación de la aproximación, pero siempre con cálculos numéricos que deben preverse largos. En lo que sigue va-

mos a exponer un método gráfico que creemos nuevo, interesante y de práctica aplicación en casos bastante extendidos como vamos a explicar.

El concepto es el mismo que dirige ordinariamente todas las determinaciones de máximos y mínimos, es decir, el de hacer nula la variación de la integral considerada. Supongamos por un momento que la posición de mínimo haya sido determinada y supongamos que, para esta posición, hayan sido determinados los valores de x en el intervalo $a-b$ para los cuales

$$V(x) - F(x; \lambda_0, \mu_0, \dots) = 0$$

donde $\lambda_0, \mu_0, \dots$ son los valores de los parámetros que corresponden a ese mínimo; sea $x_0 = a$ y sean $x_1, x_2, \dots$ dichos valores, de manera que el valor total de la integral (1) será la suma de los valores absolutos de las integrales

$$\left| \int_{x_0}^{x_1} (V(x) - F(x, \lambda_0, \mu_0, \dots)) dx \right|, \left| \int_{x_1}^{x_2} (V(x) - F(x, \lambda_0, \dots)) dx \right|, \\ \left| \int_{x_2}^{x_3} (\dots) dx \right|, \dots \quad (2)$$

Si a uno cualquiera de los parámetros se aplica una pequeña variación, las abscisas de los puntos de intersección de las curvas $y = V(x)$, $y = F(x, \lambda, \mu, \dots)$ sufrirán pequeñas variaciones y la condición de mínimo se traduce en que, cualquiera sea el el parámetro variado, la suma de las correspondientes variaciones de las integrales (2) sea un infinitésimo de orden superior.

Sea, para fijar las ideas, λ el parámetro al cual se aplica la variación, y supongamos aún, para simplificar la escritura, que éste sea el único parámetro; supongamos luego que, al pasar de $\lambda = \lambda_0$ a $\lambda = \lambda_0 + \delta\lambda$, las abscisas x_i, x_{i+1} se cambien en $x_i + \delta x_i, x_{i+1} + \delta x_{i+1}$. Se tiene

$$\int_{x_i + \delta x_i}^{x_{i+1} + \delta x_{i+1}} (V(x) - F(x, \lambda_0 + \delta\lambda)) dx = \\ \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_i + \delta x_i} + \int_{x_{i+1}}^{x_{i+1} + \delta x_{i+1}} \right) (V(x) - F(x, \lambda_0 + \delta\lambda)) dx.$$

Se nota entonces que en el segundo miembro la segunda y tercera integral son infinitésimas de segundo orden, porque dentro de los intervalos infinitésimos $x_i - x_i + \delta x_i$, $x_{i+1} - x_{i+1} + \delta x_{i+1}$, la diferencia $V(x) - F(x, \lambda_0 + \delta \lambda)$ se mantiene próxima a cero; pueden luego despreciarse estos términos en el cálculo de la variación de la integral

$$\pm \int_{x_i}^{x_{i+1}} (V(x) - F(x, \lambda)) dx \quad (3)$$

la cual resulta por tanto igual a

$$\begin{aligned} & \pm \int_{x_i}^{x_{i+1}} [(V(x) - F(x, \lambda_0 + \delta \lambda)) - (V(x) - F(x, \lambda_0))] dx \\ & = \pm \int_{x_i}^{x_{i+1}} (F(x, \lambda_0) - F(x, \lambda_0 + \delta \lambda)) dx. \end{aligned} \quad (4)$$

En (3) y (4) el signo $\pm$ antepuesto a las integrales es el mismo de la diferencia $V(x) - F(x, \lambda_0)$ en el intervalo $x_i - x_{i+1}$, que para lo que sigue conviene poner en evidencia más precisamente que con el signo de valor absoluto. En el último miembro de (4) se nota que el mismo no depende de la función $V(x)$ sino para la determinación de este signo, y de los extremos de integración x_i, x_{i+1} .

Indicando con X un origen arbitrariamente fijado, consideremos la función

$$H(x, \lambda) = \int_x^x \frac{d}{d\lambda} F(x, \lambda) dx \quad (5)$$

el último miembro de (4) puede escribirse (salvo el factor $\delta \lambda$)

$$\mp (H(x_{i+1}, \lambda_0) - H(x_i, \lambda_0)) \quad (6)$$

y la variación total de la integral (1) para $\lambda = \lambda_0$ y para el incremento $\delta \lambda$ del parámetro será

$$[\sum_i \mp (H(x_{i+1}, \lambda_0) - H(x_i, \lambda_0))] \delta \lambda = D(\lambda_0) \delta \lambda$$

y la condición de mínimo se expresará por ser 0 el coeficiente D representado por la suma entre corchetes del primer miembro. En los casos normales la diferencia $V(x) - F(x, \lambda_0)$ cambia signo al pasar por cada uno de los puntos x_i , por lo cual la condición se expresa entonces también diciendo que la suma de los términos (6) de orden impar debe ser igual a la suma de los términos de orden par.

Por cuanto el valor de λ_0 (y en general $\lambda_0, \mu_0, \dots$, cuando los parámetros sean varios) es esencialmente desconocido, siendo su determinación el problema que nos interesa, se procederá por falsa posición. Eligiendo una posición de la curva aproximante correspondiente a un valor λ_1 del parámetro, y que se estima bastante cercana a la solución, se formará la diferencia $D(\lambda_1)$ entre las dos sumas de términos (6), la que, en general no resultará 0, pero dará indicio sobre la distancia de la falsa posición elegida a la solución buscada y sobre la dirección en la cual hay que dirigir los tanteos para encontrar el mínimo. Podrá, por otra parte, regularizarse todavía estos tanteos con procedimientos conocidos. Si, por ej., sobre las indicaciones obtenidas de la primera operación, se elige una nueva posición de la curva aproximante que dé lugar a una diferencia $D(\lambda_2)$ de signo contrario de la anterior, se obtendrá luego, en general, una nueva mejor aproximación tomando como valor de λ la media entre los dos anteriores (método dicotómico) o dividiendo el intervalo entre esos dos en partes proporcionales a las diferencias obtenidas (método de las partes proporcionales). Gráficamente, llevando los valores de λ correspondientes a los diferentes tanteos sobre una recta r , y sobre las perpendiculares a esta recta en esos puntos las correspondientes diferencias (de un lado o del otro de r según sus signos respectivos) se obtendrá una serie de puntos que constituyen una curva de errores, cuya intersección con r es el valor de λ_0 buscado.

El interés esencial del método consiste en que la función $H(x, \lambda)$ depende únicamente de la función $F(x, \lambda)$, la cual a su vez es un dato a priori independiente de la particular $V(x)$ que se quiere aproximar. En el caso de querer operar gráficamente, convendrá en general tener representada, como operación preparatoria, esta función H con método nomográfico que permita medir directamente los segmentos que representan las diferencias (6).

2. Vamos a explicarnos con mayor precisión sobre algunos ejemplos.

Ejemplo 1º. Pongamos primero

$$F(x, \lambda) = f(x) + \lambda; \quad (7)$$

es el caso en que se tuviera que aproximar la curva $y = V(x)$ por una curva de forma dada y sólo desplazable en la dirección de las y ; en particular, suponiendo $f(x) = 0$ se tiene el caso en que se quisiera aproximar la función $V(x)$ por una constante (representada por el valor de λ).

Resulta entonces

$$H(x, \lambda) = \int_0^x dx = x;$$

la representación gráfica de H es en tal caso simplemente el eje x o una paralela a ese eje; trazando las ordenadas por los puntos de intersección de la curva $V(x)$ con una posición elegida de la curva $f(x) + \lambda$, ellas encuentran al eje x en puntos que son extremos sucesivos de los segmentos (6).

Para realizar la operación podemos suponer trazada sobre una hoja de papel transparente la curva $y = f(x)$, con una recta de guía vertical que se hará correr sobre el eje y del dibujo donde está trazada la curva $y = V(x)$ y con una recia horizontal (que podrá ser el borde de la hoja) la cual sirve de referencia para la determinación de λ . Para cada posición del papel transparente se fija sobre el eje y el punto de encuentro con esta horizontal, sobre la cual se leen, al mismo tiempo, las abscisas de los puntos de intersección de las dos curvas; estas abscisas determinan los intervalos (6) y por tanto la diferencia $D(\lambda)$ entre la suma de los intervalos positivos y los negativos; llevando un segmento igual (en magnitud y en signo) a $D(\lambda)$ a partir del eje y sobre la paralela al eje x por el punto $(0, \lambda)$ se determina sobre el plano del dibujo un punto $(D(\lambda), \lambda)$; la curva lugar de estos puntos encuentra el eje y en el punto $(0, \lambda_0)$.

En la fig. 1 se representa la aplicación del método para el caso que la curva $y = f(x)$ sea una parábola que por claridad está dibujada en la parte inferior de la figura; más arriba están dibujadas las posiciones de la parábola correspondiente a tres valores de λ (sustituyendo el trazado efectivo a la traslación del

papel transparente) y las construcciones para la determinación de λ_0 .

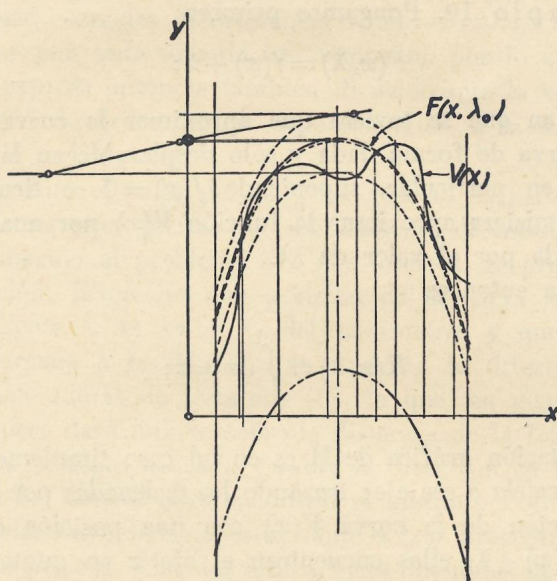


Fig. 1

Ejemplo 2º. Pongamos ahora

$$F(x, \lambda) = \lambda f(x); \quad (8)$$

es éste el caso en que la curva aproximante esté dada salvo una homología afín con centro el punto de infinito del eje y ; suponemos que el eje de homología sea el eje de las x . Se tiene

$$H(x, \lambda) = \int_0^x f(x) dx;$$

por tanto, aún en este caso $H(x, \lambda)$ es independiente de λ y su representación gráfica se reduce a una curva. En el modo más simple se obtiene esta curva por integración gráfica; si sobre un papel transparente están dibujadas las curvas $y = \lambda f(x)$ correspondientes a varios valores de λ , conjuntamente con esta curva integral, se formarán las diferencias (6) como diferencias de las ordenadas de esta curva correspondientes a los puntos de inter-

sección de la curva $y=V(x)$ con las varias curvas $y=\lambda f(x)$. Llevando sobre el eje y los valores de λ la construcción se completa como en el caso anterior.

En la fig. 2 está representado el caso en que la función $f(x)$ fuese de 2º. grado (haz de parábolas afines).

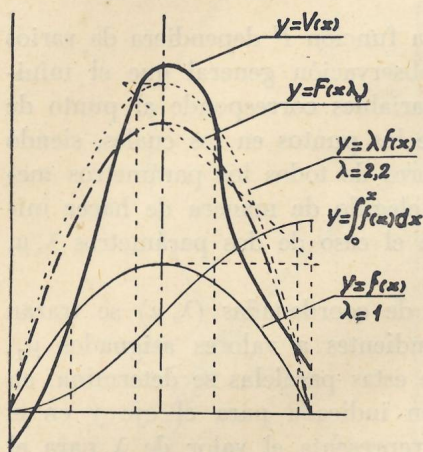


Fig. 2

Un ejemplo típico con respecto a las aplicaciones es el caso de querer aproximar una función periódica, de período conocido, por una senoide cuya amplitud queda arbitraria; este caso se presentará en el ejemplo 4º.

Ejemplo 3º. Pongamos

$$F(x, \lambda) = f(x + \lambda); \quad (9)$$

es el caso en que la curva aproximante esté determinada salva una traslación paralela al eje x . Se obtiene, aplicando la fórmula (5),

$$H(x, \lambda) = f(x + \lambda) - f(X + \lambda); \quad (10)$$

prácticamente se nota que, si la curva $y=f(x)$ se transporta paralelamente al eje x en un segmento λ , a cada punto $x+\lambda$ del eje x corresponderá para $f(x+\lambda)$ el valor de $f(x)$ en la posición inicial. Se sigue que los valores de $H(x, \lambda)$ expresados por (10) que corresponden a los puntos de intersección de la curva $y=V(x)$ con la curva $y=f(x+\lambda)$, para un determinado valor de λ , coinciden con la diferencia entre las ordenadas de los mismos puntos y la ordenada fija $Y=f(X)$; por lo tanto los segmentos (6) se miden, en este caso, directamente sobre el eje y .

Esta conclusión puede considerarse contenida en lo que dijimos en ejemplo 1º. si se observa que, indicando con $\Phi(y)$ la función inversa de $f(x)$, la ecuación $y=f(x+\lambda)$ equivale a $x+\lambda=\Phi(y)$, $x=-\lambda+\Phi(y)$, y por tanto el caso 3º. se reduce al 1º. cambiando entre sí x y y . Por otra parte este ejemplo nos presenta un caso extremadamente simple en el cual la fun-

ción $H(x, \lambda)$ depende efectivamente de x y de λ ; en hipótesis generales este hecho tendría por consecuencia que la representación nomográfica de la función tendría que ser bidimensional y la reducción a una curva única depende aquí del hecho que las dos variables se reúnen efectivamente en una sola (su suma).

3. En el caso general que la función F dependiera de varios parámetros bastará aplicar la observación general que el mínimo de una función de varias variables corresponde al punto de intersección de las variedades de los puntos en los cuales, siendo elegidos arbitrariamente los valores de todos los parámetros menos uno determinado, éste está elegido de manera de hacer mínima la función. Se sigue, para el caso de dos parámetros λ, μ , la construcción siguiente:

Sobre un plano cartesiano de coordenadas (λ, μ) se trazan las paralelas al eje λ correspondientes a valores asignados $\mu_1, \mu_2, \dots$ de μ ; sobre cada una de estas paralelas se determina, en modo análogo a la construcción indicada para el eje y en el número anterior, el punto que representa el valor de λ para el cual se alcanza el mínimo correspondiente al valor de μ elegido. Se obtiene así una sucesión de puntos $(\lambda_{10} \mu_1), (\lambda_{20} \mu_2), \dots$ que se unen por una curva. Se repite la construcción cambiando las partes de λ y μ y determinando luego una sucesión de puntos $(\lambda_1 \mu_{10}), (\lambda_2 \mu_{20}), \dots$ y una curva que los une. Las coordenadas $(\lambda_0 \mu_0)$ del punto de intersección de las dos curvas son los valores de los parámetros para los cuales se obtiene el mínimo buscado.

En la ejecución práctica conviene observar que, puesto que la determinación de los puntos $\lambda_{10}, \lambda_{20}, \dots$ se obtiene por tanteos de falsas posiciones de valores para λ (y así los puntos $\mu_{10}, \mu_{20}, \dots$ por tanteos sobre μ) convendrá, por sencillez, utilizar en lo posible los mismos valores de λ y μ para las distintas operaciones, es decir que, fijado un sistema conveniente de valores $\lambda_1 \lambda_2 \dots$ y otro de valores $\mu_1 \mu_2 \dots$ se determinará para cada μ_i las diferencias $D(\lambda_1), D(\lambda_2), \dots$ y para cada λ_i las diferencias $D(\mu_1), D(\mu_2), \dots$

La generalización del procedimiento a un mayor número de parámetros es evidente; podrán eventualmente utilizarse los procedimientos acostumbrados en la nomografía para representar en un plano sistemas de puntos dependientes de varias variables;

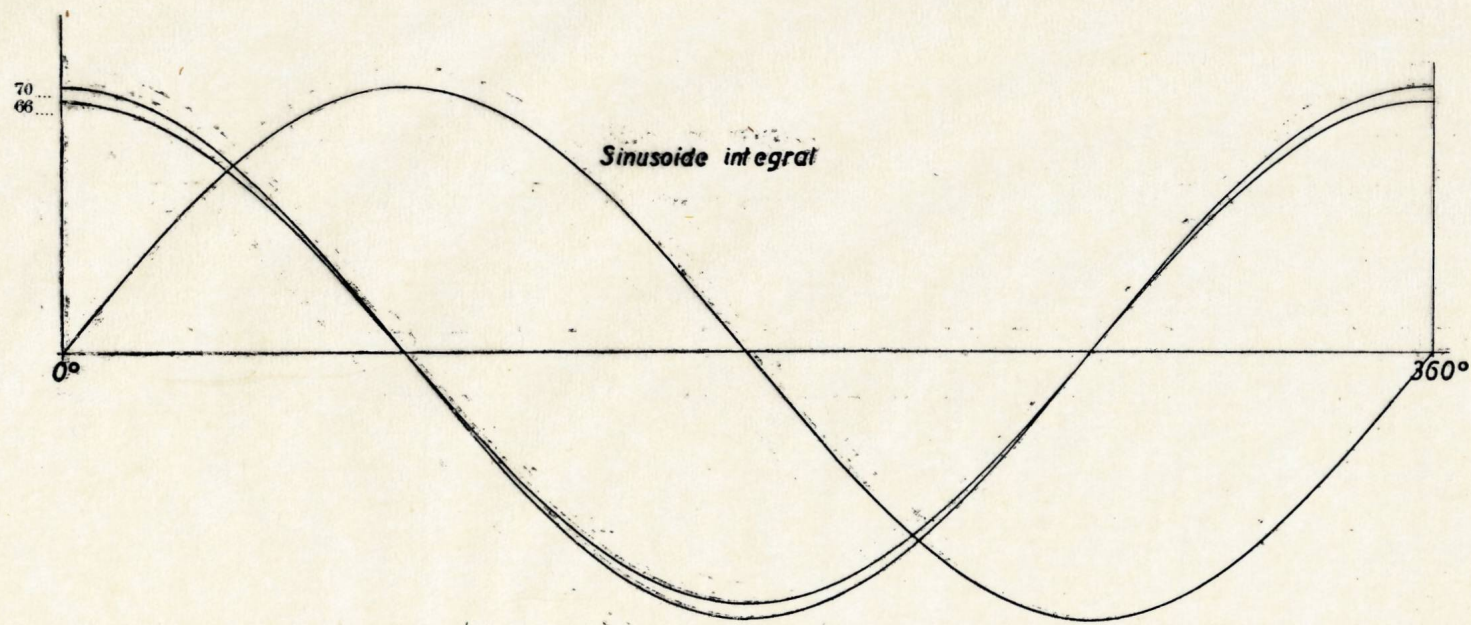


Fig. 4

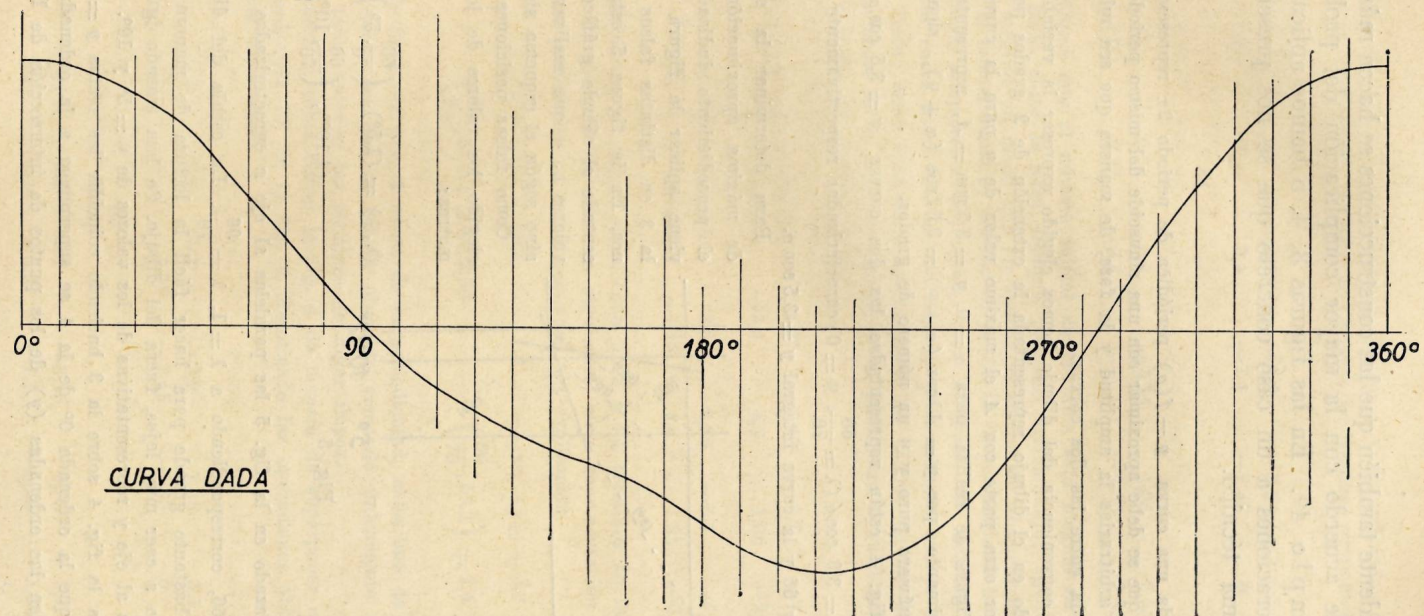


Fig. 3

pero es evidente también que las construcciones se hacen más complicadas de acuerdo con la mayor complicación del problema.

Ejemplo 4º. En las figuras 3, 4, 5 hemos aplicado estas consideraciones a un caso concreto que se nos presentó en un problema técnico.

Está dada una curva $y = f(\alpha)$ periódica de período 2π representada en la fig. 3, la que se debe aproximar con una senoide del mismo período, en la cual quedan arbitrarias la amplitud y la fase, de manera que sea mínima el área encerrada entre las dos curvas.

Para la conveniencia del dibujo hemos elegido expresar la variable α en grados, siendo en el dibujo representada la extensión de 2 grados por 1mm. Indicando por otra parte con A el máximo valor de y para la curva dada, que en la figura se realiza para $\alpha = 0$, $y_0 = 3,5 \text{ mm} = A$, representamos la curva aproximante por $y = A \lambda \cos(\alpha + \mu) = 3,5 \lambda \cos(\alpha + \mu)$, siendo por tanto λ un número puro y μ un número de grados.

En la fig. 4 están representadas las dos curvas $y = 3,5 \cos \alpha$ ($\lambda = 1$, $\mu = 0$) e $y = 3,3 \cos \alpha$ ($\lambda = \frac{66}{70}$, $\mu = 0$) caracterizadas respectivamente por los números 70 y 66 y la curva integral $y = 3,5 \sin \alpha$.

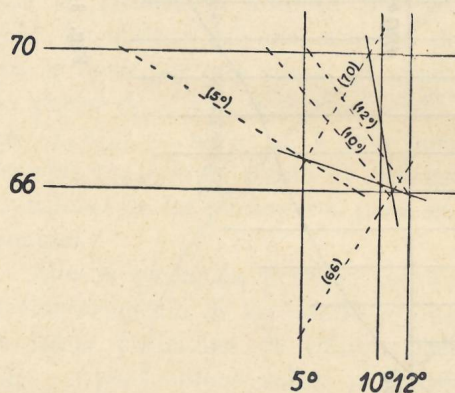


Fig. 5

Para determinar la senoide de máxima aproximación según el procedimiento indicado conviene aplicar la figura 4 sobre la 3 en distintas falsas posiciones. En la figura 5 está representado el cálculo gráfico de los valores λ , μ que realizan el mínimo según el esquema siguiente:

Como falsas posiciones se han elegido los valores de los parámetros:

$$(\lambda, \mu) = (1, 5^\circ), \left(\frac{66}{70}, 5^\circ\right) \\ (1, 10^\circ), \left(\frac{66}{70}, 10^\circ\right)$$

y se han trazado en la fig. 5 las paralelas al eje x caracterizadas por los números 70, 66, correspondiendo a $\lambda = 1$, $\lambda = \frac{66}{70}$. La escala del dibujo se ha tomado bastante grande para hacer fácil la lectura de manera que el eje $\lambda = 0$ va a caer muy lejos, fuera del dibujo. Se han trazado igualmente las paralelas al eje y representativas de los valores de $\mu = 5^\circ$ y 10° .

Aplicada la fig. 4 sobre la 3 haciendo coincidir las rectas $y = 0$, pero de manera que la ordenada 0° de la 4 se superponga a la ordenada 5° de la 3 se miden las ordenadas (y) de los puntos de intersección de la curva

dada (fig. 3) con las cosinusoides de la fig. 4 y las ordenadas correspondientes (H) de la senoide integral; se obtienen los números siguientes (en cm.):

$$\mu = 5^\circ \quad \lambda = 1$$

(y)	3,5	—0,77	—3,2	2,5	3,5
(H)	0	3,4	—1,4	—2,45	0

$$\mu = 5^\circ \quad \lambda = \frac{66}{70}$$

(y)	2,55	—0,8	—3,15	1,95	2,55
(H)	2,25	3,4	—1	—2,85	2,25

(Nótese que el número inicial de la tabla está elegido en modo que la curva dada corte la otra siempre pasando arriba-abajo; igualmente habría podido elegirse en modo que las curvas se corten de abajo-arriba; pero siempre de la misma manera; además en razón de la periodicidad las ordenadas de la primera intersección se repiten como últimas). Se escriben luego las diferencias entre cada uno de los números y el número que le sigue sobre la misma línea; estas diferencias representan los valores de las diferencias (6) respectivamente en el caso de considerar el parámetro μ variable o el parámetro λ variable. Se obtiene luego:

$$\mu = 5^\circ \quad \lambda = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu \text{ variable} \quad 4,27 \quad 2,43 \quad -5,7 \quad -1 \\ \lambda \text{ variable} \quad -3,4 \quad 4,8 \quad 1,05 \quad -2,45 \end{array} \right.$$

$$\mu = 5^\circ \quad \lambda = \frac{66}{70} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu \text{ variable} \quad 3,35 \quad 2,25 \quad -5,1 \quad -0,60 \\ \lambda \text{ variable} \quad -1,15 \quad 4,4 \quad 1,85 \quad -5,1 \end{array} \right.$$

Cambiando los signos sobre cada línea a los términos de lugar par y sumando se obtienen los números siguientes, cuya representación simbólica, escrita en paréntesis, no tiene necesidad de explicación

$$(1, 5^\circ, \mu) = -2,86 \quad (1, 5^\circ, \lambda) = -4,7$$

$$\left(\frac{66}{70}, 5^\circ, \mu\right) = -3,50 \quad \left(\frac{66}{70}, 5^\circ, \lambda\right) = 1,4$$

Es fácil ver que, á causa de la periodicidad, cada uno de estos números es el doble del que se habría obtenido sumando únicamente en cada línea de la tabla anterior los términos de lugar impar.

Hacemos ahora correr la fig. 4 de manera de superponer su ordenada 0° a la ordenada 10° de la fig. 3. Repitiendo las operaciones anteriormente explicadas obtenemos:

$$\mu = 10^\circ, \quad \lambda = 1$$

(y)	3,5	—1	—3,2	1,05	3,5
(H)	0	3,35	—1,45	—3,35	0

$$\mu = 10^\circ, \quad \lambda = \frac{66}{70}$$

(y)	3,1	—1	—3,15	0,85	3,1
(H)	1,15	3,3	—1,1	—3,35	1,15

$$(1, 10^\circ, \mu) = 0,5$$

$$(7, 10^\circ, \lambda) = 2,9$$

$$\left(\frac{66}{70}, 10^\circ, \mu\right) = 0,2$$

$$\left(\frac{66}{70}, 10^\circ, \lambda\right) = 0,2$$

Después de esta preparación, se ha llevado, en la fig. 5, sobre las rectas indicadas por 70 y 66, a partir de la ordenada $\mu = 5^\circ$ y en la dirección que corresponde a sus respectivos signos, segmentos proporcionales a $(1, 5^\circ, \mu)$ y $\left(\frac{66}{70}, 5^\circ, \mu\right)$; la recta que une estos puntos está indicada en la figura por el número (59); ella corta la ordenada 5° en un punto que representa aproximadamente el valor de λ que engendra el mínimo con $\mu = 5$. Considerando la ordenada 10° se repiten las mismas operaciones con los números $(1, 10^\circ, \mu)$, $\left(\frac{70}{66}, 10^\circ, \mu\right)$. Se unen los dos puntos obtenidos con una recta (entera en el dibujo) que deberá pasar aproximadamente por el punto que representa el mínimo respecto a las dos variables.

Con los números $(1, 5^\circ, \lambda)$, $(1, 10^\circ, \lambda)$ se repiten análogas operaciones llevando los segmentos respectivamente sobre las ordenadas 5° y 10° a partir de la recta horizontal 70 que corresponde a $\lambda = 1$; la recta que une los extremos de estos segmentos (señalada (70) en el dibujo) corta esa misma horizontal en un punto que aproximadamente define la posición de mínimo para la curva $\lambda = 1$. Al mismo modo, utilizando los números $\left(\frac{66}{70}, 5^\circ, \lambda\right)$, $\left(\frac{66}{70}, 10^\circ, \lambda\right)$ se determina, por medio de la recta señalada (66), la posición mínimo para la curva $\lambda = \frac{66}{70}$. La recta (entera sobre el dibujo) que une a estos últimos puntos corta a la anterior en el punto que nos da la solución buscada. Midiendo las coordenadas de este punto se obtienen los valores

$$\lambda = 66,16/70 \quad \mu = 10^\circ 37'$$

que definen la sinusoide de máxima aproximación la cual será luego

$$y = 3,30 \cos(\alpha + 10^\circ 37')$$

Para confirmar el resultado por observarse que, respecto al parámetro μ , las falsas posiciones consideradas resultan todas a la izquierda de la solución, y está por tanto extrapolada, hemos repetido las operaciones con $\mu = 12$. Se ve en la figura que la confirmación es muy satisfactoria.

El presente trabajo ha nacido precisamente del problema técnico aludido, que me reservo publicar en otra parte, y ha sido hecho en el Instituto de Matemática bajo la guía de su director, el Dr. Beppo Levi, a cuyas enseñanzas debo el haberlo podido desarrollar en la forma teórica general que precede.

Livio Dante Porta

ROSARIO, INSTITUTO DE MATEMÁTICA.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

RESUELTOS

N.º 73. — Sea una elipse de semiejes a y b . Por cada punto P de la elipse se traza la normal y se considera el segmento h de la misma que es interior a la elipse. Siendo ds el elemento de arco correspondiente al punto P , demostrar que

$$\int h \, ds = 2F \left(1 + \frac{4a^2b^2}{(a^2+b)^2} \right)$$

donde la integración está extendida a toda la elipse y F es el área de la misma.

SOLUCIÓN. Vamos a establecer ante todo el valor de h en función de las coordenadas de los puntos P y P' , siendo P' el punto en que la normal en P vuelve a encontrar a la elipse. Conociendo dichas coordenadas será

$$h = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}. \quad (1)$$

Necesitamos los valores de $x-x'$ e $y-y'$. Para encontrarlos observamos que las coordenadas (x, y) , (x', y') realizan, cada par, las ecuaciones de la elipse y de la normal a la misma, o sea,

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

$$Y - y = \frac{a^2 y}{b^2 x} (X - x). \quad (3)$$

Si tanto (x, y) como (x', y') satisfacen a la ecuación (2), sustituyendo y restando se tiene

$$\frac{x^2 - x'^2}{a^2} + \frac{y^2 - y'^2}{b^2} = 0$$

o sea,

$$\frac{(x'-x)}{a^2} [x'-x+2x+\frac{a^2}{b^2} \frac{y'-y}{x'-x} (y'-y+2y)] = 0.$$

Teniendo en cuenta que $x'-x \neq 0$, debe ser nulo el segundo factor y como de (3), escribiendo que se satisface para (x', y') , se deduce

$$\frac{y'-y}{x'-x} = \frac{a^2 y}{b^2 x} \quad (4)$$

se tiene

$$b^4 x (x-x') + a^4 y (y-y') = 2(b^4 x^2 + a^4 y^2). \quad (5)$$

El sistema formado por las ecuaciones (4), (5), da

$$x-x' = \frac{2b^2 x (b^4 x^2 + a^4 y^2)}{b^6 x^2 + a^6 y^2}, \quad y-y' = \frac{2a^2 y (b^4 x^2 + a^4 y^2)}{b^6 x^2 + a^6 y^2}$$

de donde, según (1),

$$h = \frac{2(b^4 x^2 + a^4 y^2)^{3/2}}{b^6 x^2 + a^6 y^2}.$$

Recordando la representación paramétrica de la elipse

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi$$

podrá escribirse

$$h = \frac{2ab(b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}{b^4 \cos^2 \varphi + a^4 \sin^2 \varphi}.$$

Por otra parte se tiene

$$dx = -a \sin \varphi d\varphi, \quad dy = b \cos \varphi d\varphi,$$

de donde

$$ds = \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} d\varphi$$

por tanto la integral a calcular es

$$\int h \, ds = 2ab \int_0^{2\pi} \frac{(a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^2}{a^4 \operatorname{sen}^2 \varphi + b^4 \cos^2 \varphi} \, d\varphi. \quad (6)$$

Para calcular esta integral vamos a proceder por descomposición. Para ello efectuamos el cuadrado del numerador, expresamos los cosenos en función del seno y dividimos el numerador por el denominador. Resulta así

$$\begin{aligned} \frac{(a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^2}{a^4 \operatorname{sen}^2 \varphi + b^4 \cos^2 \varphi} &= \frac{(a^2 - b^2)^2 \operatorname{sen}^4 \varphi + 2(a^2 - b^2)b^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + b^4}{(a^4 - b^4) \operatorname{sen}^2 \varphi + b^4} \\ &= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \operatorname{sen}^2 \varphi + \frac{2a^2 + b^2}{(a^2 + b^2)^2} b^2 + \frac{b^4 a^4}{(a^2 + b^2)^2 (a^4 \operatorname{sen}^2 \varphi + b^4 \cos^2 \varphi)}. \end{aligned}$$

Resulta por tanto que debemos calcular las integrales

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 \varphi \, d\varphi = \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2\varphi \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{a^4 \operatorname{sen}^2 \varphi + b^4 \cos^2 \varphi} = \left[\frac{1}{a^2 b^2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a^2 \operatorname{tg} \varphi}{b^2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{a^2 b^2} \frac{\pi}{2}$$

y llevar estos resultados a (6), multiplicando por 4 para extender la integración a toda la elipse.

Resulta así

$$\int h \, ds = 2ab \left[\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \pi + \frac{2a^2 + b^2}{(a^2 + b^2)^2} b^2 2\pi + \frac{a^2 b^2}{(a^2 + b^2)^2} 2\pi \right]$$

y recordando que el área de la elipse vale $F = \pi ab$, se obtiene finalmente

$$\int h \, ds = 2F \left(1 + \frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2} \right)$$

de acuerdo con el enunciado del problema.

Esta solución ha sido enviada por la Srta. DORI MARÍA DRAGONE, alumna de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Córdoba. Otra solución análoga ha sido enviada por el Sr. EDISON FARAH del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Filosofía, Ciencias y Letras de la Universidad de Sao Paulo (Brasil) y una tercera por el Sr. ADOLFO DAGHETTO, alumno de la Escuela Industrial de Rosario.

N.º 61. — Se da un triángulo ABC . Desde un punto cualquiera P tomado sobre el lado AB se traza la perpendicular PQ a AC ; se trazan las rectas BQ y CP que se cortan en el punto M . Se pide el lugar geométrico del punto M cuando P recorre la recta indefinida AB .

Caracterizar esta curva por alguna propiedad; por ejemplo, determinar los puntos del infinito. Considerar eventuales casos excepcionales.

SOLUCIÓN. Las series de puntos P y Q , por ser secciones por dos rectas distintas de un mismo haz de rectas paralelas, son proyectivas. Por tanto, los haces de vértices B y C que proyectan dichas series, serán también proyectivos y el lugar geométrico de los puntos M de intersección de rayos homólogos será una cónica.

Esta cónica se sabe que pasa por los vértices B y C de los haces y además pasará por A , puesto que los rayos BA y CA son homólogos en la proyectividad. La tangente a la cónica en el punto B será el rayo homólogo al CB , o sea, será la perpendicular trazada por B a AC . Análogamente, la tangente en C será la perpendicular por C al mismo lado AC . Siendo las dos tangentes en B y C paralelas, se sigue que la cónica no puede ser una parábola y será hipérbola o elipse según que el punto A sea externo o interno a la banda comprendida entre estas dos paralelas, es decir según que el ángulo $\hat{A}$ sea agudo o bien obtuso.

En el caso de ser la cónica una hipérbola puede observarse que las paralelas a las asíntotas desde el vértice B cortan a la recta AC en los puntos dobles de la involución que tiene por

centro A y en la cual son conjugados C y el pie de la altura trazada desde B .

En el caso de ser $\hat{A} < 90^\circ$ y $\hat{C} = 90^\circ$ la hipérbola degenera en un par de rectas; en efecto, en esta caso el rayo BC se corresponde a sí mismo en los dos haces, los cuales serán por tanto perspectivas. El lugar geométrico pedido se compone de la recta BC y del eje de perspectiva que coincide con la mediana por A .

Si $\hat{A} = 90^\circ$ el lugar geométrico se reduce a la recta AB y a la paralela a ésta por C ; esta última recta se obtiene como lugar de los puntos de intersección de la recta que une C con el punto del infinito de AB con las rectas que proyectan desde B los puntos de CA , considerados como la proyección ortogonal indeterminada de dicho punto sobre AC .

Esta solución, salvo detalles, es debida al agrimensor GUIDO O. G. LISERRE, de Rosario.

N.º 74. — Dada la parábola $y^2 = 2px$, sea $2h$ la longitud de la cuerda MM' perpendicular al eje x a distancia k del origen. Se pide:

1º Determinar el centro y el radio r del círculo inscrito en el segmento parabólico MOM' y encontrar las coordenadas de los puntos P, P' de contacto con la parábola.

2º Determinar el radio ρ y el centro del círculo circunscrito al segmento parabólico.

3º Demostrar que r y ρ están ligados por la relación

$$r + \rho = \frac{2h + k}{2}.$$

4º Determinar el área del segmento parabólico comprendido entre las cuerdas PP' y MM' .

SOLUCIÓN. 1º. Siendo la parábola simétrica respecto al eje x , el círculo inscrito que pide el enunciado deberá tener su centro sobre el mismo eje y por tanto su ecuación debe ser de la forma

$$(x - a)^2 + y^2 - r^2 = 0, \quad (1)$$

siendo a la abscisa de su centro y r el radio. Para satisfacer las condiciones del problema, este círculo debe ser tangente a la pa-

rábola y tangente además a la recta $x=k$, estando el centro de la misma parte del origen. Esta condición se expresa por

$$a+r=k. \quad (2)$$

Para satisfacer a la primera condición observamos que las abscisas de los puntos de intersección de la circunferencia (1) con la parábola son las raíces de la ecuación

$$(x-a)^2 + 2px - r^2 = 0 \quad (3)$$

A cada una de estas raíces corresponden dos valores $y = \pm\sqrt{2px}$; obteniéndose de esta manera los 4 puntos de intersección. Para que el círculo sea tangente a la parábola dos de estos puntos deben coincidir, lo cual puede ocurrir, o bien porque la ecuación (3) tenga dos raíces coincidentes $\neq 0$, y entonces el círculo será tangente a la parábola en dos puntos simétricos respecto el eje x , siempre que la raíz doble sea positiva; o bien porque la ecuación (2) admita la solución $x=0$, en cuyo caso el círculo será tangente a la parábola en el vértice y, para ser inscrito al segmento, no deberá intersecar ulteriormente la parábola en puntos reales, por lo cual la otra solución de (3) deberá ser ≤ 0 .

Desarrollando el primer miembro de (30) se ve que se realizará el primer caso cuando

$$a-p > 0, \quad p^2 + r^2 - 2ap = 0 \quad (4)$$

y se realizará el segundo caso cuando

$$a=r, \quad a-p \leq 0. \quad (5)$$

a) De (4), conjuntamente a (2), se obtiene

$$r = -p + \sqrt{2pk} = -p + h, \quad a = k - h + p \quad (6)$$

con la condición

$$k > 2p.$$

b) De (5) con (2) se obtiene

$$a=r=\frac{1}{2}k, \quad (7)$$

con la condición

$$k \leq 2p.$$

Por tanto el problema tiene siempre solución, la cual caerá en el caso a) o en el caso b) según sea $k > 2p$ o $k \leq 2p$.

2) El centro del círculo circunscrito al segmento parabólico debe ser el punto situado sobre el eje x y equidistante de O y de M . Por tanto el radio ρ de dicho círculo debe cumplir la condición

$$\rho^2 = h^2 + (k - \rho)^2,$$

de donde

$$\rho = \frac{h^2 + k^2}{2k}.$$

Observando que h es la ordenada del punto de la parábola correspondiente a la abscisa k , es $h^2 = 2pk$ y por tanto se tiene también, más simplemente

$$\rho = p + \frac{k}{2}. \quad (8)$$

3º. Comparando este valor (8) con los valores de r en (6) y (7) se ve que sólo en el caso a) se verifica la relación

$$\rho + r = h + \frac{k}{2},$$

mientras en el caso b) debe sustituirse por

$$\rho + r = p + k.$$

4º. El área del sector parabólico comprendido entre el vértice y la ordenada correspondiente al punto x vale

$$F(x) = 2 \int_0^x \sqrt{2px} \, dx = \frac{2}{3p} (2px)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3p} y^3.$$

Por tanto el área pedida por el problema valdrá:

a) En el caso de ser $k \leq 2p$, el área es toda la del segmento, o sea

$$F(k) = \frac{2}{3p} k^3.$$

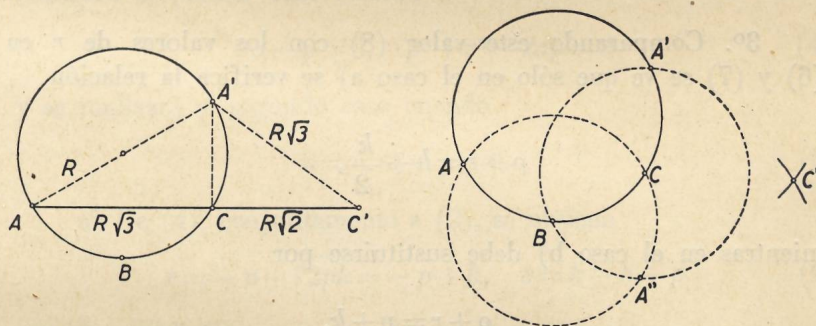
b) En el caso $k > 2p$, será

$$F(k) - F(k-h) = \frac{2}{3p} [h^3 - (2p(k-h))^{\frac{3}{2}}].$$

Esta solución ha sido enviada, salvo algunos detalles en la redacción, por el Sr. MOISÉS GRILL, alumno de la Facultad de Ciencias Matemáticas, etc. de Rosario.

RECTIFICACION APROXIMADA DE LA CIRCUNFERENCIA

Son conocidos muchísimos métodos para la rectificación aproximada de la circunferencia. Los más simples se basan en la observación de que $\sqrt{3} + \sqrt{2} = 3,1462\dots$ es un número que por ser suma de dos raíces cuadradas se puede construir con regla y compás y difiere de π en menos de 0,005. Basada en esta misma observación, proponemos la siguiente construcción:



Dada la circunferencia de radio R que queremos rectificar, tomemos sobre ella con la abertura de compás igual al radio los puntos sucesivos A, B, C, A' . Tracemos la recta AC y con centro en A' y radio AC tomemos el segmento $A'C'$. Se tiene, por aplicación sucesiva del teorema de Pitágoras

$$AC = R\sqrt{3}, \quad CC' = R\sqrt{2}$$

y por tanto la longitud $AC' = R(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 3,1462 \dots R$ es, aproximadamente, la mitad de la longitud de la circunferencia dada.

Este método no es tan aproximado como muchos otros conocidos, por ejemplo los de Mascheroni o Kochanski, pero tiene la ventaja de su rapidez y simplicidad, puesto que sólo requiere el trazado de una sola recta y dos aberturas de compás.

Todavía puede la construcción reducirse en el marco de la *Geometría del Compás* de Mascheroni evitando el trazado de la única recta AC , y llevando a cabo la construcción con sólo el trazado de arcos de circunferencia. En efecto, trazando con centros B y C las circunferencias completas de radio R , su punto de encuentro distinto del centro de la circunferencia dada será el punto A'' , simétrico de A' respecto de C . Con centro A'' y radio AC se traza la circunferencia que cortará a la del mismo radio y centro A' en el punto C' tal que AC' es aproximadamente la semicircunferencia.

En cuanto a la aproximación obtenida, hay que observar que toda aproximación mayor tiene únicamente interés como curiosidad, puesto que los errores inevitables del dibujo no permiten mayor aproximación.

José Ricagno

Alumno de la Facultad de Ciencias
Matemáticas, etc., de Rosario.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

PROPUESTOS

86. — Calcular el determinante

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & 1 & 1 & \dots\dots\dots & 1 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & \dots\dots\dots & 0 & x_1 \\
 x_2 & 1 & 0 & \dots\dots\dots & 0 & x_2 \\
 x_3 & x_3 & 1 & \dots\dots\dots & 0 & x_3 \\
 \dots\dots\dots & & & & & \\
 \dots\dots\dots & & & & & \\
 x_{n-1} & x_{n-1} & x_{n-1} & \dots\dots & 1 & x_{n-1}
 \end{array}$$

87. — Los lados de un triángulo ABC están divididos por los puntos C_1, A_1, B_1 según las razones $\frac{m_1}{m_2}, \frac{n_1}{n_2}, \frac{p_1}{p_2}$. Calcular las razones entre las áreas del triángulo ABC y cada uno de los $AC_1B_1, BA_1C_1, CA_1B_1, A_1B_1C_1$.

88. — De un rombo variable está fijado un vértice O y la recta r que pasa por O sobre la cual debe estar uno de los lados, mientras el lado opuesto recorre una recta s también dada, paralela a r . Se pide:

- La envolvente del lado opuesto al vértice fijo O .
- El lugar geométrico de los ortocentros de los triángulos en los cuales el rombo queda dividido por la diagonal que pasa por O .
- La envolvente de la diagonal opuesta al vértice O .

89. — Sea una familia de rectas

$$ux + vy + w = 0 \quad (1)$$

donde u, v, w son funciones de un parámetro t periódicas y de período T . Cuando t recorre el intervalo $0, T$ la recta (1) envolverá una curva cerrada C . Supongamos que C no tenga puntos dobles. Demostrar que el área F y la longitud L de C están dadas por las fórmulas

$$F = \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\Delta w}{(uv' - vu')} dt, \quad L = \int_0^T \frac{\Delta \sqrt{u^2 + v^2}}{(uv' - vu')} dt$$

donde los acentos indican derivadas y se ha puesto

$$\Delta = \begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix}.$$

90. — Determinar el volumen de penetración de un cilindro elíptico y de un elipsoide cuyo centro está sobre el eje del cilindro. Casos en que este volumen se expresa por funciones elementales. Cálculo aproximado cuando esto no se realiza. El cilindro se supone definido por su sección recta y el elipsoide por sus tres ejes.

BIBLIOGRAFIA

JORDAN, PASCUAL, *Physics of the 20th Century*, versión inglesa de Eleanor Oshry, Philosophical Library, New York, 1944, 185 páginas, 4 \$, U. S. A.

El autor, prestigioso físico alemán, expone en el primer párrafo del prefacio el objeto de la obra: "Este libro trata de presentar una exposición completa y sistemática de los conceptos de la física moderna, sin que el lector se vea cargado con los detalles de experimentos técnicos ni con formulaciones matemáticas teóricas. Sin llegar a ser excesivamente absorbidos por detalles abundantes y notables, dirigiremos la atención hacia los hechos decisivos, hacia los puntos de vista directores de la investigación y hacia la ordenación del espíritu, que es lo que da a la física moderna su particular carácter filosófico, y lo que constituye la proeza de su revolucionaria concepción. Primeramente, pasaremos revista a la mecánica clásica de Galileo y Newton, prerequisite indispensable para la comprensión de los revolucionarios desarrollos de la física moderna. Después, a través de la electrodinámica de Maxwell llegaremos a los modernos puntos de vista de la macro y microfísica de los átomos, electrones y cuantos."

Después del prefacio, en que el autor justifica el título del libro por considerar que la física moderna puede considerarse que empieza con el descubrimiento de los cuanta por Planck en 1900, entra en el capítulo I, titulado "Mecánica clásica". En este capítulo trata el autor de los puntos fundamentales (ley gravitacional, concepto de fuerza y movimiento relativo, ley de inercia) que constituyen las bases, creadas por Galileo y Newton, a partir de las cuales se edifica toda la mecánica clásica.

El capítulo II se titula: "Electrodinámica moderna". De la "acción a distancia" se pasa al "campo de fuerzas" y con este concepto, Maxwell dedujo las fórmulas matemáticas que contienen una descripción cuantitativa de las leyes de Faraday; de estas fórmulas matemáticas nacieron las ondas electromagnéticas, encontradas más tarde experimentalmente por Hertz. La propagación ondulatoria de la electricidad y de la luz llevan consigo el problema de la existencia del éter, con las experiencias que se hicieron para probar o contradecir su existencia. Relacionada con estos problemas nace la teoría de la relatividad, que contiene excelentes ejemplos a favor del nuevo positivismo que debe presidir el pensamiento físico y según el cual éste debe consistir en "la exclusiva búsqueda de un sumario descriptivo de hechos experimentales sin pretender explicación alguna de la esencia de las cosas."

El capítulo III se titula "La realidad de los átomos". Trata de los límites de divisibilidad de la materia: movimiento browniano, interferencia en los cristales, naturaleza atomística de la electricidad, constitución del átomo y experiencias y mediciones a ello referentes.

Los capítulos IV y V se titulan respectivamente: "Las paradojas de los fenómenos cuánticos" y "La descripción de la naturaleza según la teoría de los cuanta". Se trata en ellos de las discrepancias y paradojas famosas entre las teorías ondulatoria y corpuscular de la luz; teoría de los cuantos y sus consecuencias sobre la idea de causalidad; mecánica ondulatoria y cuántica; principio de indeterminación que el autor lleva a su valoración extrema: "la imposibilidad de la precalculación de la conducta futura de los átomos, electrones o cuantos de luz no solamente depende de la imperfección técnica de nuestros instrumentos, sino que depende de la naturaleza misma".

Si bien en todos los capítulos el autor ha mantenido e insistido sobre su posición filosófica del positivismo, que considera inherente a los avances experimentales de la física moderna, en el capítulo VI, último del libro, que se titula "Física y observación del mundo" se desarrolla abiertamente esta idea. Según el autor, las experiencias irrefutables de la física moderna, al significar la desaparición del principio de causalidad y la sustitución de la idea de "existencia real" por "un sistema de fórmulas" (framework of formulas), han llevado a la liquidación del materialismo y, además, de acuerdo con Bavinck "el moderno desarrollo de la física está presionando hacia un renacimiento de la imagen religiosa del mundo".

Termina el libro con dos apéndices. El primero trata de los rayos cósmicos: su origen, experiencias con ellos e importancia de los mismos en física atómica. En el segundo se exponen los estudios hechos para poder deducir la edad del mundo y el origen y dimensiones del universo a partir de la desintegración de los materiales que lo constituyen.

En resumen, el libro constituye una clara exposición de los fenómenos y experiencias fundamentales a partir de las cuales se ha edificado la física moderna, insistiendo cada vez en la imposibilidad de explicar estas experiencias mediante el hábito clásico de pensar, siendo por tanto necesaria una revolución profunda en la manera de concebir la física y la ciencia en general. El autor, con la autoridad que le da el ser uno de los creadores, expone su criterio de que la nueva física significa un salto brusco en la historia del pensamiento y el punto de partida de una nueva era que pronostica fecunda en descubrimientos y de importancia trascendental en la evolución del pensamiento filosófico.

L. A. SANTALÓ

UBERTONE, ELVIO F. L., *Ecuaciones diferenciales de primer orden, con algunas aplicaciones a la Geometría, Matemáticas Actuariales y Probabilidades*, Buenos Aires, 1943, 85 páginas.

Dice el autor como prólogo: "Este es un trabajo de síntesis, dedicado especialmente al estudiante de Ciencias Económicas. Se trata en estas modes-

tas líneas, de coronar el esfuerzo que realizan profesores y alumnos de la respectiva Facultad, para explicar unos y dominar los otros, aquellos elementos de análisis indispensables para la interpretación científica y correcta de las asignaturas especiales como las Matemáticas Actuariales, la Biometría, la Estadística, la Economía Matemática y otras. Se comentan y resuelven algunos ejercicios típicos citados o propuestos por los más serios tratadistas, cuyos nombres se citan. Se supone al lector familiarizado con aquellos conceptos de Geometría Analítica y Cálculo, que figuran en el programa oficial, y de los cuales, el capítulo de ecuaciones diferenciales es el obligado complemento.”

De acuerdo con estas directrices el librito contiene una recopilación de problemas y ejercicios, todos resueltos, referentes principalmente a la determinación de la envolvente de familias de curvas y sus relaciones con las ecuaciones diferenciales de primer orden, exponiendo los diversos tipos de estas últimas y varias aplicaciones.

El detalle minucioso de los cálculos y las 36 claras figuras del texto, hacen que el trabajo pueda leerse sin dificultad y pueda, en consecuencia, ser de efectiva utilidad tanto a los estudiantes que se inician en estas disciplinas como a quienes precisan de ellas únicamente como instrumento para sus fines de aplicación. De las 85 páginas del libro, 73 están dedicadas a las ecuaciones diferenciales en general y sus aplicaciones geométricas y únicamente las 10 restantes a las aplicaciones a las matemáticas actuariales y a la estadística. Creemos que hubiera sido, tal vez, interesante, aumentar las aplicaciones en este último sentido, máxime teniendo en cuenta la intención del autor de que el trabajo sea principalmente útil a los estudiantes de Ciencias Económicas, pero esto es solo una cuestión de proporción que no disminuye la utilidad didáctica del trabajo.

L. A. SANTALÓ

GUILLERMO KNIE, *Nuevas Teorías Físicas*. Buenos Aires, 1944 (182 pág., In 8°).

La teoría física encuentra sus fundamentos en parte en las manifestaciones experimentales, en parte en elementos intelectuales del hombre pensante, entre los cuales no es última en importancia la simplicidad y la analogía de las expresiones matemáticas con las que se intenta representar aquellas manifestaciones. Es sabido que este elemento simbólico ha ido prevaleciendo en las teorías electromagnéticas y corpusculares más recientes. Como dice francamente el autor en las pocas palabras de introducción: “El estudio de estas tentativas... es deseable, aunque posiblemente ellas no significan una formulación definitiva de su objeto. Pues de un lado representan indudablemente un progreso con respecto de formulaciones anteriores y por otro lado algunas ofrecen el espectáculo interesante de la introducción de nuevos métodos en la física, conocidos desde hace tiempo por los matemáti-

cos, pero que no hace mucho nadie sospechaba pudieran encontrar aplicación a la investigación de la naturaleza''. Este es por tanto el fin y el interés de este libro que en 4 capítulos relativamente independientes, pero extructuralmente homogéneos, nos pone en conocimiento de un grupo de teorías que con esta dirección se han desarrollado en los últimos 10 años.

En 1934, Max Born propuso una modificación de las ecuaciones de Maxwell teniendo por objeto que el campo eléctrico no resultara infinito en la inmediata proximidad de un punto cargado, sin que, desde luego, cambiara sensiblemente a distancias sensible de éste, lo que es necesario para intentar de evitar muchas dificultades de la teoría del electrón. El primer capítulo —*Electrodinámica no lineal*— desarrolla esta teoría bajo la guía de los trabajos de Born, Infeld, Schroedinger con aplicación a algunos problemas sobre la propagación y dispersión de ondas, la alteración resultante en la ley de Coulomb, la polarización del foton. El segundo capítulo —*El electrón relativista*— contiene la teoría de la ecuación de Dirac con los desarrollos sucesivos principalmente debidos a Sommerfeld (1926-1939). El tercer capítulo —*El meson*— recuerda como ocurrió a Yukawa de imaginar esta partícula como equivalente de un proceso ondulatorio invirtiendo de cierta manera la concepción de Schroedinger es decir intentando escribir a priori una ecuación diferencial que pudiera representar un campo de muy corto alcance, del orden del de las fuerzas interatómicas y dándole a posteriori la interpretación corpuscular; imitando el procedimiento de linearización de Dirac se está conducido, para esta ecuación, a una teoría formal análoga, pero más complicada; el autor no deja de observar que la coincidencia de la partícula hipotética de Yukawa con la partícula pesada encontrada experimentalmente en la radiación cósmica no estriba hasta la fecha sino sobre una muy aproximativa identidad de las masas. El cuarto y último capítulo —*El foton*— se funda sobre la teoría emitida en 1934-36 por Luis De Broglie considerando el foton como la reunión de dos partículas obedeciendo cada una a un sistema de ecuaciones análogas a las de Dirac.

Como decíamos empezando los cuatro capítulos son virtualmente independientes y presentan sin embargo analogías y unidad de método que hacen su reunión sumamente instructiva; el párrafo final del último capítulo (*La masa del foton-Teoría neutrínica de la luz*) puede ser leído de por sí como expresión de esta vinculación conceptual y por las sugerencias que contiene sobre otras ideas y sobre problemas pendientes. Por todas estas razones el libro tiene un interés no dudoso también para quien no pueda conformarse con ver en el puro símbolo una explicación suficiente de las maravillas que la naturaleza física va paulatinamente revelando.

El lector debe estar avisado contra algunos errores de imprenta que los desarrollos algebraicos a menudo muy resumidos, no denuncian inmediatamente.

B. LEVI

ACADEMIA BRASILEIRA DE CIENCIAS, *Symposium sobre raios cósmicos*. Río de Janeiro, 1943.

Con los auspicios de la Academia Brasileira de Ciencias se realizó en Río de Janeiro, en los días 4 a 8 de agosto de 1941, un congreso sobre rayos cósmicos en ocasión de la visita de la misión científica norteamericana dirigida por el profesor A. H. Compton y constituida por los profesores Jesse, Wollan, N. y A. Hilberry, Hughes y Pompeia en viaje a América del Sud para realizar mediciones de radiación cósmica como parte del programa de investigaciones del "Ryerson Physical Laboratory" de la Universidad de Chicago. Las mediciones habían sido realizadas en Perú y en Brasil, estas últimas en el Estado de San Pablo con la colaboración del Departamento de Física de la Facultad de Filosofía, Ciencias y Letras de la Universidad de San Pablo.

Con una demora de dos años, que se atribuye a la actual situación internacional, aparece esta publicación que consta de dos partes. La primera contiene los discursos de apertura del Congreso, con uno de Compton exponiendo el estado actual de la cuestión, además del resumen oficial de cada reunión. La segunda parte contiene los textos de las comunicaciones presentadas aunque faltan los debates a que ellas dieron lugar.

Transcribimos a continuación el índice de esta segunda parte:

1. A. H. COMPTON. *Sobre las fluctuaciones de los rayos cósmicos.*
2. D. HUGHES. *Fotografías en cámaras de Wilson a grandes altitudes.*
3. Y. MONTEUX, G. OCCHIALINI, M. D. DE SOUZA SANTOS. *La influencia de un eclipse solar en la intensidad de la radiación cósmica.*
4. A. M. DE OLIVEIRA. *La propagación de ondas radiotelefónicas y los rayos cósmicos.*
5. N. y A. H. HILBERRY. *Estudios de la radiación cósmica en los Andes al sur del Perú.*
6. G. OCCHIALINI y M. SCHÖNBERG. *Sobre el componente ultra-blando de la radiación cósmica.*
7. F. X. ROSER. *Sobre el efecto de temperatura en la radiación cósmica.*
8. W. P. JESSE. *El efecto de latitud para el componente duro de los rayos cósmicos y manifestaciones de la naturaleza de la radiación primaria.*
9. E. O. WOLLAN. *Sobre la producción de mesotrones a grandes altitudes.*
10. G. WATAGHIN. *Sobre la producción de grupos de mesotrones por colisiones de gran energía.*
11. J. COSTA RIBEIRO. *Sobre un método de puente para la medición de rayos cósmicos con cámaras de ionización.*
12. B. GROOS. *Sobre el efecto de latitud de los rayos cósmicos.*
13. Y. MONTEUX. *Sobre la penetración de los electrones en la materia.*
14. J. A. R. SABOYA. *Un multivibrador generador de alta tensión.*
15. P. A. POMPEIA, M. D. S. SANTOS y G. WATAGHIN. *Lluvias de partículas penetrantes bajo 30 metros de arcilla.*
16. N. HILBERRY y P. A. POMPEIA. *Un amplificador de cátodo para la*

transmisión de vibraciones en circuitos de coincidencias de alto poder de resolución.

17. P. A. POMPEIA y E. O. WOLLAN. *Un circuito eléctrico de tiempo para controlar una cámara de Wilson.*
18. P. A. POMPEIA y E. O. WOLLAN. *Cálculo de la resistencia de placa de un sistema "Rossi" de válvulas electrónicas.*
19. G. OCCHIALINI y M. D. S. SANTOS. *Dos dispositivos útiles para cámaras de Wilson controladas.*
20. R. WURMSER. *Sobre un método de investigación de la influencia eventual de los rayos cósmicos sobre la materia viva.*
21. B. GROSS. *Sobre la teoría de las cámara de ionización.*

En general las observaciones y mediciones realizadas en esta ocasión vienen en unos casos a completar otras realizadas en distintas latitudes o bien a verificar resultados ya obtenidos anteriormente.

Resultan especialmente interesantes las investigaciones sobre la naturaleza de la radiación primaria que incide en las capas atmosféricas más altas, habiendo evolucionado mucho en corto tiempo las ideas a este respecto.

Todavía en 1939 podía Millikan (Cosmic Rays - MacMillan) resumir esas ideas en la forma siguiente:

"La Tierra es bombardeada continuamente por partículas, *fonones*, *electrones* (+ y —) o *ambos*, la energía de los cuales asciende a valores de $20 \cdot 10^6$ e-volts, es decir, por lo menos mil veces la energía de cualquier partícula existente en la Tierra."

"A pesar de ello estas partículas no pueden penetrar a través de las primeras capas atmosféricas a causa de la poderosa barrera que ellas oponen por las leyes de la absorción nuclear. Los rayos que se manifiestan al nivel del mar deben referirse a efectos secundarios. El carácter de las fotografías tomadas presta apoyo a la teoría Bethe-Heitler según la cual un *electrón* incidente de gran energía transforma primero esta energía en un *fotón-impulso* el cual a su vez produce un par de partículas (*electrón* y *positrón*) cada una de las cuales comienza de nuevo el proceso hasta que la energía es totalmente degradada en un gran número de *fonones* y *electrones* de energía cada vez menor."

Ahora bien, experiencias realizadas en 1939-40 en EE. UU. mediante globos-sonda, cuyos resultados se encuentran resumidos en la comunicación nº 8, parecen excluir al *electrón* como componente principal de la radiación primaria. En efecto, se comprobó que en las capas superiores de la atmósfera los rayos cósmicos tienen un gran poder de penetración y no producen las características lluvias de partículas (*showers*) al atravesar láminas delgadas de plomo. Ninguna de estas dos propiedades es característica de los *electrones* de energía comprendida entre 10^9 e.v. y 10^{12} e.v. que se suponía constituyesen la mayor parte de la radiación primaria.

En cambio gozan de tales propiedades el *mesotron*, la partícula α y el *protón*. En 1940 se descubrió la rápida desintegración radioactiva que sufre el primero lo cual lleva a optar por las otras dos partículas. Estas experiencias así como otras realizadas anteriormente parecen indicar que la radiación cósmica primaria se compone principalmente de *protones*.

Se ha señalado que la radiación cósmica general en capas atmosféricas más bajas consta de dos componentes principales:

El componente *blando* (electrones, positrones y fotones) que es prácticamente absorbido por completo al nivel del mar en 10 cm. de plomo y el componente *duro* (mesotrones + y —) de gran poder penetrante.

Se han hecho investigaciones con cámaras de Wilson en grandes altitudes, referentes a la naturaleza del proceso en que se originan los mesotrones y del estudio de fotografías obtenidas en los Andes al sur del Perú (Comunicaciones 2 y 9) se concluye que es probable que ese proceso sea de tipo explosivo originándose súbitamente un cierto número de mesotrones a partir de un potrón.

Respecto al componente blando, la hipótesis de que provenga de la desintegración radioactiva del mesotróp tropieza por ahora con la dificultad de no concordar con resultados experimentales anteriores.

También con referencia al proceso de degradación de la energía incidente, citado más arriba, como origen posible del componente blando, se realizaron experiencias en los Andes cuyos detalles se encuentran en la comunicación 5.

Además de las ya mencionadas se encuentran otras comunicaciones de carácter teórico así como también algunas describiendo dispositivos interesantes utilizados algunos de ellos en las experiencias citadas.

Las fotografías y figuras que acompañan a éstas así como a las restantes comunicaciones contribuyen a realzar el interés de esta publicación; el texto de la misma es casi exclusivamente inglés, salvo un breve resumen en portugués que precede a cada comunicación mientras que la primera parte conteniendo los discursos se halla vertida en ambos idiomas.

PEDRO E. ZADUNAISKY

FE DE ERRATA

Agradecemos al señor profesor Pedro Pi Calleja la atención de comunicarnos la siguiente lista de errores que se han deslizado en la impresión de la Monografía: *Sistemas de ecuaciones analíticas*, etc. de la cual ofrecimos una *Presentación* en el fascículo 1º del presente año:

pág.	línea	errata	corrige
16	—2	$ \lambda < 1$	$ \lambda > 1$
18	12	(5.1)	(6.1)
47		en la figura el punto x debería llamarse z	
48	8	x	z
53	13	$ax_1^{s_1-1} x_2^{s_2-1} \dots x_n^{s_n-1}$	$ax_1^{s_1-1} x_2^{s_2-1} \dots x_n^{s_n-1}$
76	—4	$\frac{\partial f}{\partial z} = -y(1+2x)$	$\frac{\partial f}{\partial z} = -z(1+2x)$

pág.	línea	errata	corrige
77	14	$= (1 - \frac{y_1}{\beta} - \text{etc.})$	$= \gamma (1 - \frac{y_1}{\beta} + \frac{2(1+\alpha)x_1}{\alpha(1+2\alpha)} + \frac{y_1^2}{\beta^2} - \frac{2(1+\alpha)x_1y_1}{\alpha\beta(1+2\alpha)} + \frac{x_1^2}{\alpha(1+2\alpha)^2} + \dots$
88	13	$y_1'' = \frac{(2c-1)z+3}{c-2}$	$y_1'' = \frac{(2c-1)z-3}{c-2}$
»	18	$y_1 = \frac{(2c-1)(z^2+\gamma)+6z}{2(c-2)}$	$y_1 = \frac{(2c-1)(z^2+\gamma)-6z}{2(c-2)}$
102	—10	x_1x_2	$x_1x_5^2$
114	—12	$y'_i = \sum_j \eta_j \xi_j$	$y'_i = \sum_j \eta_j \xi_{ji}$
120	—13, —12		los últimos miembros deben leerse respectivamente c_1+6c_3 , $3c_1+6c_3$ haciendo la correspondiente corrección en la sucesiva expresión de $y(x_1x_2x_3)$, de acuerdo a las observaciones que siguen.
125	—9	$\frac{\partial^3 y}{\partial x_1^2 \partial x_2^2 \partial x_3 \partial x_3^4}$	$\frac{\partial^3 y}{\partial x_1^2 \partial x_2^2 \partial x_3 \partial x_4^2}$
		$\frac{\partial^3 y}{\partial x_1^2 \partial x_2 \partial x_4^3 \partial x_4}$	$\frac{\partial^3 y}{\partial x_1^2 \partial x_2 \partial x_3^4 \partial x_4}$
141	—4	c_{31}	c_{30}
149	—8	$\leq n-1$	$\leq 2n$
»	—5	3 constantes	4 constantes
150	última	$y_{n-2}^{(n-1)}$	$y_{1n-2}^{(n-1)}$
160	—3	(52.1)	(53.1)
182	6	(61.1)	(63.1)
187	última	(62.5)	(64.5)
189	9	(62.7)	(65.1)
195-199		la fracción $2-\alpha/2+\alpha$ debe leerse siempre invertida	
196	—9 y —8		cambiar entre las dos fórmulas los términos $z_0(\xi, h\xi)$, $z_0(\xi, -h\xi)$
198	—7	m o par	m impar o par
203	11	$x \pm y = \xi$, $x \mp y = \eta$	$x \mp y = \xi$, $x \pm y = \eta$
	—8	cambiar análogamente los signos $\pm, \mp$	
205	—6	$\left[\frac{p+1}{2} \right]$	$\left[\frac{p+2}{2} \right]$
212	5 y —9	ζ	ζ_1

Las « Mathematicae Notae » publican artículos, cuestiones, ejercicios, soluciones y correspondencia. La resolución de las cuestiones propuestas será publicada en números sucesivos de la revista al cabo de un tiempo razonable, a juicio del Director del Instituto, para obtener contestaciones de los lectores; de las cuestiones publicadas bajo el título de ejercicios la dirección se reserva la decisión, en cada caso, de publicar o no las respuestas.

A fin de año se adjudicarán dos premios:

1º Por concurso entre alumnos de la Facultad que contesten satisfactoriamente a cuestiones, problemas o ejercicios.

2º Por concurso entre todos los demás lectores del país o del extranjero que contesten en modo acertado a los mismos.

Los premios consistirán en tratados de extensión cultural o libros de especialización.

Las soluciones deben ser entregadas al Instituto en redacción clara y en hojas distintas para cada cuestión, problema o ejercicio. En cada hoja deberá señalarse el nombre del autor; los alumnos de la Facultad indicarán el año de estudios que cursan en la misma, y, los de primer año, además, la escuela media de la cual provienen. Estos elementos serán tenidos en cuenta para el juicio, conjuntamente con el valor intrínseco de las soluciones y la forma expositiva de las mismas, dándose por la Dirección la máxima importancia a la disposición por la cual se compararán sólo alumnos de igual preparación.

En la sección de Bibliografía se publicarán los análisis críticos de libros recientes que sean enviados al Instituto de Matemática.

—El precio de suscripción a « Mathematicae Notae » es de 8 \$ (m/n) anuales.

—El Instituto de Matemática publica también una colección de Notas y Memorias bajo el título « Publicaciones del Instituto de Matemática de la Facultad de Ciencias etc. », cuyo precio de suscripción es de 10 \$ (m/n) por volumen. Se pueden adquirir los fascículos sueltos de las publicaciones al precio señalado en la pág. 4 de esta misma tapa.

—Para todo lo relacionado al Instituto, a las Publicaciones y a « Mathematicae Notae » dirigirse al Director del Instituto de Matemática — Avenida Pellegrini 250 — Rosario (R. Argentina).

—Para suscripciones y adquisición de los fascículos sueltos dirigirse al Director del Instituto o bien al Bibliotecario de la Facultad de Ciencias Matemáticas, etc., Avenida Pellegrini 250, Rosario (Rep. Argentina). Los importes deberán remitirse en efectivo o bien por giros postales o bancarios pagaderos en la ciudad de Rosario, con preferencia sobre el Banco de la Nación Argentina.

—Los suscriptores en la República Oriental del Uruguay pueden dirigirse al señor Prof. Rodolfo F. Sayagués, Constituyente 1863, Montevideo.

Fascículos aparecidos en las "PUBLICACIONES" del Instituto de Matemáticas

		m\$.n.
Vol. I.	1 - B. LEVI — Sobre el sistema $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xy)dx = p(y); \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xy)dy = q(x)$	1.00
	2 - L. A. SANTALÓ — Geometría integral de figuras ilimitadas	1.80
	3 - F. AMODEO — Origen y desarrollo de la Geometría proyectiva. Trad. de Nicolás y José Babini	8.00
	4 - B. LEVI — Una teoría intuicionista de las funciones racionales enteras de una variable	1.00
Vol. II.	1 - P. MONTEL — Funciones armónicas y subarmónicas	1.00
	2 - G. FUBINI — La ley de la media para funciones no derivables. B. LEVI — Sobre un teorema de Weierstrass, el teorema de Rolle y el anterior teorema de Fubini	1.00
	3 - L. A. SANTALÓ — Una demostración de la propiedad isoperimétrica del círculo	1.20
	4 - L. A. SANTALÓ — Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas	1.50
	5 - I. Antecedentes de la creación del Instituto. II. Acto de inauguración oficial del Instituto. C. PLÁ — Origen y propósitos del Instituto. J. REY PASTOR — La matemática italiana en el último medio siglo y la posición del Dr. Beppo Levi en ella. B. LEVI — Evolución del pensamiento matemático	1.50
	6 - E. GASPAR — Fórmulas integrales referentes a intersección de una figura plana con bandas variables	1.50
	7 - A. ROSENBLATT — Sobre el teorema de los grandes números en la teoría de la probabilidad	1.00
	8 - M. COTLAR — Sobre conjuntos no medibles y generalización de la integral de Lebesgue - Prólogo por B. Levi	1.50
	9 - B. LEVI — La noción de "dominio deductivo" como elemento de orientación en las cuestiones de fundamentos de las teorías matemáticas	1.50
Vol. III.	1 - Homenaje a la memoria de V. Volterra y J. J. Thomson. C. PLÁ — Semblanza de Sir Joseph J. Thomson. B. LEVI — La personalidad de Vito Volterra	1.00
	2 - G. FUBINI — Algunas propiedades de los grupos discontinuos finitos	2.50
	3 - B. LEVI — Teoría de la integral de Lebesgue independiente de la noción de medida	3.00
	4 - B. LEVI — Sobre la inversión de una integral definida	1.20
	5 - L. A. SANTALÓ — Curvas extremales de la torsión total y curvas-D.	2.00
	6 - A. TERRACINI — Orígenes de algunos conceptos geométricos	2.00
	7 - L. A. SANTALÓ — Complemento a la Nota "Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas"	1.00
Vol. IV.	1 - L. A. SANTALÓ. — Sobre ciertas variedades con carácter de desarrollable en el espacio euclidiano de cuatro dimensiones	3.00
	2 - M. COTLAR — Funciones univalentes sobre un conjunto de puntos del contorno de un dominio de holomorfismo	2.00
	3 - JOSÉ L. MASSERA. — Fórmulas en diferencias finitas con aplicación a la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales de primer orden	3.50
	4 - A. KOMISCHKE. — Sobre las relaciones entre la luz y la gravitación	2.50
	5 - R. LAGUARDIA y B. LEVI. — Sobre la representación por integrales de algunas funciones definidas por desarrollos de Taylor y aplicación a las soluciones de ecuaciones en derivadas parciales	2.00
Vol. V y VI.	(En preparación). Memorias ofrecidas por varios amigos, alumnos y admiradores en homenaje al Dr. Julio Rey Pastor	
Vol. VII.	1 - J. C. VIGNAUX y M. COTLAR. — Las familias totalmente normales de funciones analíticas	6.00