



Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

MATEMÁTICA APLICADA

Ingeniería Eléctrica - Ingeniería Electrónica

José A. Semitiel - Luciano Ponzellini Marinelli

Departamento de Matemática - Escuela de Formación Básica

Material didáctico de uso interno

Rosario, Argentina - 2024

Presentación

Este texto contiene el material mínimo correspondiente a la asignatura *Matemática Aplicada* de las carreras de Ingeniería Electrónica e Ingeniería Eléctrica (Plan 2014) de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario. Fue escrito principalmente con el objetivo de ordenar, focalizar y hacer más accesible, en un mismo texto, los temas principales de esta disciplina correspondientes al programa vigente de la asignatura. Cabe aclarar que éste no es un trabajo finalizado y que se encuentra en proceso de revisión. Debe considerarse como borrador y material de uso interno para la cátedra.

Matemática Aplicada contribuye a completar la formación matemática del estudiante y utiliza un enfoque aplicado a ejemplos de interés directo en asignaturas correlativas posteriores de las carreras de Ingeniería Electrónica e Ingeniería Eléctrica. Dicho enfoque entiende a la Matemática como un lenguaje y una herramienta para el modelado preciso de señales, sistemas y fenómenos de interés en dichas carreras. Asimismo, la asignatura fomenta el empleo de los soportes informáticos de la tecnología actual, tanto como herramientas de cómputo como de visualización.

Este material de estudio está organizado en seis capítulos. Los capítulos 1, 2, 3 y 4 corresponden al estudio de la variable compleja que son temas fundamentales del Análisis Complejo. El capítulo 5 versa sobre la transformación de Laplace; un método importante para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias y sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes constantes. Por último, en el capítulo 6, se hace una introducción a los métodos numéricos para la resolución de ecuaciones no lineales, sistemas de ecuaciones lineales y no lineales y soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Cada capítulo de este texto se divide en diferentes secciones. Al final de cada capítulo se presenta la ejercitación correspondiente.

Agradecemos la colaboración de Alicia Kurdobrin en la lectura del material y de Melanie Barrios y María Gracia Cornet en la resolución de los ejercicios propuestos de cada capítulo.

José Semitiel y Luciano Ponzellini Marinelli

Índice General

1	El sistema de los números complejos	6
1.1	El cuerpo de los números complejos	6
1.1.1	Potenciación de números complejos	8
1.2	El plano complejo	8
1.2.1	Forma de par ordenado de un número complejo	8
1.2.2	Representación geométrica de los números complejos	9
1.3	Otras formas de representar números complejos	14
1.3.1	Formas trigonométrica y polar de un número complejo	14
1.3.2	Raíz n -ésima de un complejo	15
1.3.3	Forma exponencial de un número complejo	16
1.4	El plano complejo extendido	16
1.5	Ejercicios propuestos	18
2	Funciones complejas	24
2.1	Funciones complejas de variable compleja	24
2.2	Funciones analíticas	26
2.2.1	Límites y continuidad	26
2.2.2	Derivada	30
2.2.3	Ecuaciones de Cauchy-Riemann	32
2.3	Funciones elementales	34
2.3.1	La función exponencial	35
2.3.2	La función logaritmo	35
2.3.3	Las funciones trigonométricas seno y coseno	38
2.4	Transformaciones o mapeos en el plano complejo	39
2.4.1	Algunas transformaciones elementales	41
2.4.2	Transformación o mapeo lineal	41
2.4.3	Transformación de inversión	42
2.4.4	Transformación bilineal, racional o de Möebius	42
2.5	Ejercicios propuestos	44
3	Integración compleja	50
3.1	Funciones complejas de variable real	50
3.2	La integral compleja	55
3.2.1	El Teorema de Cauchy-Goursat	59
3.2.2	La fórmula integral de Cauchy	65

3.3	Ejercicios propuestos	72
4	Series complejas y residuos	76
4.1	Series de potencias	76
4.1.1	Series de Taylor	77
4.1.2	Integración y derivación de series de potencias	83
4.1.3	Series de Laurent	84
4.2	Singularidades aisladas y residuos	89
4.3	El teorema de los residuos	97
4.4	Ejercicios propuestos	99
5	La transformación de Laplace	105
5.1	La transformada de Laplace	106
5.1.1	Existencia de la transformada de Laplace	109
5.1.2	Linealidad del operador \mathcal{L}	110
5.2	Propiedades de la Transformada de Laplace	111
5.3	Transformada inversa de Laplace	113
5.4	Más propiedades de la transformada de Laplace	114
5.4.1	Transformada de Laplace de la derivada	115
5.4.2	Transformada de Laplace de integrales	118
5.5	El segundo teorema de traslación	118
5.5.1	La función escalón unitario	118
5.5.2	Transformada de Laplace de la función escalón unitario	121
5.5.3	El segundo teorema de traslación	122
5.6	Transformada de Laplace de funciones periódicas	124
5.7	La función impulso	125
5.8	Convolución	129
5.9	Ejercicios propuestos	132
6	Métodos numéricos	147
6.1	Introducción a los Métodos Numéricos	147
6.1.1	Introducción	147
6.1.2	Ejemplo de un problema y un método numérico	150
6.1.3	Software para programación de métodos numéricos	151
6.1.4	Aplicaciones en la Ingeniería	152
6.2	Introducción a MATLAB	153
6.2.1	Características	153
6.2.2	Entorno de MATLAB	154
6.2.3	Expresiones	155
6.2.4	Formatos numéricos	155
6.2.5	Entrada y salida por Ventana de Comandos	157
6.2.6	Operaciones	159
6.2.7	Operaciones con vectores y matrices	160
6.2.8	Funciones intrínsecas	165
6.2.9	Otras funciones de MATLAB: polinomios	168

6.2.10	Programación	168
6.2.11	Almacenamiento	171
6.2.12	Scripts	172
6.2.13	Funciones en MATLAB	172
6.2.14	Ploteos	175
6.3	Errores en los Métodos Numéricos	180
6.3.1	Introducción	180
6.3.2	Conceptos básicos	181
6.3.3	Errores numéricos	185
6.3.4	Aritmética de punto flotante	197
6.4	Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales	204
6.4.1	Introducción	204
6.4.2	Métodos Directos	205
6.4.3	Métodos Iterativos	217
6.5	Raíces y Sistemas de Ecuaciones No Lineales	228
6.5.1	Introducción	228
6.5.2	Método de Newton-Raphson	228
6.5.3	Métodos de Punto Fijo	237
6.6	Solución numérica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias	245
6.6.1	Introducción	245
6.6.2	Interpretación geométrica: el campo de direcciones	246
6.6.3	Existencia y unicidad de solución de un PVI	248
6.6.4	El método de Euler	249
6.6.5	Descripción geométrica	250
6.6.6	Error en el método de Euler	252
6.6.7	Otros métodos para resolver EDO	254
6.7	Ejercicios propuestos	254
6.7.1	Introducción a MATLAB	254
6.7.2	Errores en los Métodos Numéricos	256
6.7.3	Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales	258
6.7.4	Raíces y Sistemas de Ecuaciones No Lineales (SENL)	261
6.7.5	Solución numérica de EDO	263
Respuestas a los ejercicios propuestos		264
Bibliografía		284
Link de interés		285

Capítulo 1

El sistema de los números complejos

En este capítulo estudiaremos la estructura algebraica y geométrica de los números complejos, fundamental para el desarrollo de la teoría de la variable compleja.

1.1 El cuerpo de los números complejos

Un **número complejo** es toda expresión de la forma $z = x + iy$ donde $x, y \in \mathbb{R}$ e i se define por la relación $i^2 = -1$. El conjunto de todos los números complejos se representa por \mathbb{C} , es decir

$$\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Al número real x se lo llama **parte o componente real** de z y se denota por $x = \text{Re}(z)$; al número real y se lo llama **parte o componente imaginaria** de z y se denota por $y = \text{Im}(z)$.

Dos números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ se dicen **iguales** si tienen iguales las partes real e imaginaria, es decir $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

La **suma** y el **producto** de dos números complejos se definen respectivamente por

$$\begin{aligned}(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\ (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)\end{aligned}$$

Adoptamos las siguientes convenciones con el fin de simplificar el uso de los números complejos:

1. Los miembros de la derecha de la suma y el producto de números complejos recién definidos, se pueden obtener formalmente manipulando los términos de la izquierda como si sólo contuvieran números reales, y sustituyendo i^2 por -1 cuando aparezca.
2. El símbolo i recibe el nombre de *unidad imaginaria*. Es usual, en Electrónica, representar a la unidad imaginaria con el símbolo j .
3. Los números complejos de la forma $x + i0$ se representan simplemente por x . Es evidente que forman un subconjunto de \mathbb{C} algebraicamente idéntico a \mathbb{R} . Por lo tanto, tales números serán números reales.

4. Los números complejos de la forma $0 + iy$ se representan simplemente por iy y se llaman **imaginarios puros**. El número $0 + i0$, aunque también responde a esta descripción se representa por 0 , como en el primer caso.

El conjunto \mathbb{C} dotado de las operaciones suma y producto definidas anteriormente, tiene estructura de **cuerpo conmutativo** pues se verifican las siguientes propiedades:

Sean z, z_1, z_2 y $z_3 \in \mathbb{C}$ entonces,

- Clausuras: $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$; $z_1 z_2 \in \mathbb{C}$.
- Conmutativas: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$; $z_1 z_2 = z_2 z_1$.
- Asociativas: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$; $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$.
- Existencia de elementos neutros:
 1. Dado $z \in \mathbb{C}$, existe $0 = 0 + i0$ (elemento neutro de la suma) tal que $z + 0 = z$.
 2. Dado $z \in \mathbb{C}$, existe $1 = 1 + i0$ (elemento neutro del producto) tal que $z1 = z$.
- Existencia de elementos inversos:
 1. Dado $z = x + iy \in \mathbb{C}$, existe $-z = -x - iy$ (elemento inverso aditivo) tal que $z + (-z) = 0$.
 2. Dado $z = x + iy \neq 0$, existe $z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2}$ (elemento inverso multiplicativo) tal que $z z^{-1} = 1$.
 Observar que $z^{-1} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2}$.
- Distributiva del producto respecto de la suma: $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.

A partir de la existencia de elemento inverso aditivo y multiplicativo en \mathbb{C} , quedan definidas las operaciones de **resta** y **división** respectivamente de la siguiente manera:

Sean $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$, entonces

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Si $z_2 \neq 0$ entonces:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.1.1. Para obtener $\text{Im}(z)$ siendo $z = \frac{2 + 3i}{3 - i}$, calculemos

$$z = \frac{2 + 3i}{3 - i} = \frac{(2 + 3i)(3 + i)}{(3 - i)(3 + i)} = \frac{6 + 2i + 9i - 3}{10} = \frac{3}{10} + \frac{11}{10}i,$$

por lo que se tiene que $\text{Im}(z) = \frac{11}{10}$. ▲

1.1.1 Potenciación de números complejos

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $z \in \mathbb{C}$. Se define la **potencia** n -ésima de z como:

$$z^n = \underbrace{zz\dots z}_n, \quad (n \text{ veces}).$$

Si $z \neq 0$ entonces

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n}$$

y $z^0 = 1$.

Ejemplo 1.1.2. Para calcular $(1+i)^{-2}$, notemos primero que $(1+i)^{-2} = \frac{1}{(1+i)^2}$ y como

$$(1+i)^2 = (1+i)(1+i) = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$$

entonces se tiene que $(1+i)^{-2} = \frac{1}{2i} = \frac{-2i}{2i(-2i)} = \frac{-2i}{4} = -\frac{1}{2}i$.▲

Se puede comprobar fácilmente que las sucesivas potencias de la unidad imaginaria i se repiten periódicamente con período 4:

$$\begin{aligned} i^0 &= 1; & i^1 &= i; & i^2 &= -1; & i^3 &= i^2i = -i; & i^4 &= i^3i = -ii = 1; & i^5 &= i^4i = 1i = i \\ i^6 &= i^5i = ii = -1; & i^7 &= i^6i = -1i = -i; & i^8 &= i^7i = -ii = 1; & i^9 &= i^8i = 1i = i; & & \dots \end{aligned}$$

A partir de este reconocimiento es posible enunciar el siguiente teorema:

Teorema 1.1.1. Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. Entonces $i^n = i^r$ donde r es el resto de la división entera de n por 4 ($r = 0, 1, 2, 3$).

Demostración. Ejercicio. □

Ejemplo 1.1.3. Por el Teorema 1.1.1 se sigue que,

$$i^{21} = i^1 = i \quad \text{y} \quad i^{-121} = \frac{1}{i^{121}} = \frac{1}{i} = -i$$
.▲

1.2 El plano complejo

1.2.1 Forma de par ordenado de un número complejo

Los números complejos pueden ser identificados como el conjunto de pares ordenados $z = (x, y)$ de números reales donde $x = \operatorname{Re}(z)$ e $y = \operatorname{Im}(z)$. Con ellos se definen:

- Igualdad: $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2$

- Suma: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- Producto: $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$

Según esta definición se establece una correspondencia biunívoca entre los pares $(x, 0)$ y los números reales x . De esta manera el conjunto de los números reales \mathbb{R} se identifica con un subconjunto \mathbb{C}' de \mathbb{C} y esta correspondencia se establece también, entre sumas en \mathbb{R} y sumas en \mathbb{C}' y entre productos en \mathbb{R} y productos en \mathbb{C}' .

La unidad imaginaria se define por $i = (0, 1)$, que verifica

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Por otra parte $(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0)$ de lo que se tienen que:

$$(x, y) = x + iy.$$

Esta última igualdad muestra la equivalencia entre dos formas de expresión de un mismo número complejo, como *par ordenado* $z = (x, y)$ y en **forma binómica** $z = x + iy$.

Observación 1.2.1. *No es posible establecer una relación de orden en el conjunto de los números complejos, es decir el conjunto \mathbb{C} con las operaciones de suma y producto definidas anteriormente es un cuerpo conmutativo no ordenado.*

En efecto, supongamos que fuese posible definir una relación ' $<$ ' como en \mathbb{R} . Dado que $i \neq 0$ entonces se tiene que $i < 0$ ó bien $0 < i$. Supongamos que $0 < i$, entonces $0 \cdot i < i \cdot i$ es decir $0 < -1$ lo cual es un absurdo. Análogamente si suponemos que $i < 0$.

1.2.2 Representación geométrica de los números complejos

Sabemos que fijado un sistema de ejes cartesianos ortogonales en el plano, se establece una correspondencia biunívoca entre puntos del plano y pares ordenados de números reales.

Esta correspondencia es adecuada para representar los números complejos, atendiendo a que cada $z = x + iy$ es un par ordenado de números reales $z = (x, y)$. Entonces cada número complejo z se corresponde con un punto P del plano y recíprocamente:

$$P \leftrightarrow z = (x, y) = x + iy.$$

En virtud de esta correspondencia biunívoca entre puntos del plano y números complejos, se identifica a \mathbb{C} con el plano que por este motivo se llama **plano complejo**.

En este plano, el eje x de las abscisas se llama **eje real** y el eje y de las ordenadas, se llama **eje imaginario**.

A cada número complejo $z = (x, y) = x + iy$ le corresponde el vector \overrightarrow{OP} , denominado **vector asociado** a z , de origen O y extremo el punto P llamado **afijo** de z , como se observa en la Figura 1.1.

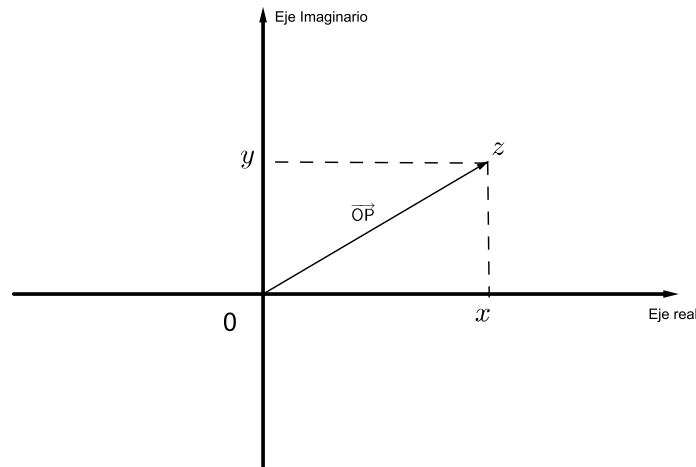


Figura 1.1: Plano complejo

Definición (Complejo conjugado). Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Se llama conjugado de z , y notamos \bar{z} , al número complejo $\bar{z} = x - iy$.

A partir de este concepto, se tienen las siguientes propiedades de números complejos conjugados:

Teorema 1.2.1 (Propiedades del complejo conjugado). Sean z, z_1 y $z_2 \in \mathbb{C}$. Entonces se verifican las siguientes propiedades:

- | | |
|---|--|
| 1. $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ | 5. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ |
| 2. $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$ | 6. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ |
| 3. $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$ | 7. $\overline{-z} = -\bar{z}$ |
| 4. $z\bar{z} = \operatorname{Re}^2(z) + \operatorname{Im}^2(z)$ | 8. $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ si $z \neq 0$ |

Demostración. Ejercicio. □

Corolario 1.2.1. Si z_1 y $z_2 \in \mathbb{C}$ entonces se verifica que:

1. $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$
2. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ si $z_2 \neq 0$

Demostración. Probaremos sólo (1) mientras que (2) queda como ejercicio.

Dados los complejos z_1 y z_2 , entonces

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1 + (-z_2)} = \overline{z_1} + \overline{-z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}.$$

□

Definición (Módulo). Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$, se llama módulo de z , y denotamos $|z|$, al número real no negativo

$$|z| = |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Geoméricamente, el módulo de z es la distancia del afijo P de z al punto 0.

Ejemplo 1.2.1. Si $z = -1 + 3i$ entonces $|z| = \sqrt{10}$. ▲

Ejemplo 1.2.2. Para determinar el conjunto de puntos z del plano complejo que verifican la ecuación $|z - i| = 2$, consideremos $z = x + iy$, luego

$$|z - i| = |x + (y - 1)i| = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} = 2$$

o equivalentemente

$$x^2 + (y - 1)^2 = 4. \tag{1.1}$$

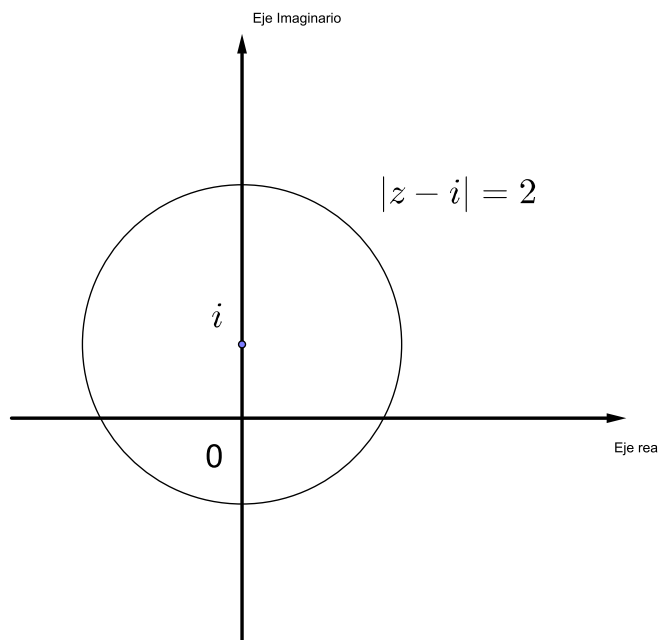


Figura 1.2: Representación de $|z - i| = 2$

La ecuación (1.1) es la ecuación cartesiana en el plano xy de una circunferencia de centro $(0, 1)$ y radio 2 como se observa en la Figura 1.2.

Por lo tanto, la ecuación $|z - i| = 2$ representa una circunferencia en el plano z de centro $w = i$ y radio 2. ▲

Teorema 1.2.2. Sean z, z_1 y $z_2 \in \mathbb{C}$. Entonces se verifican las siguientes propiedades:

1. $|z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}|$
2. $z\bar{z} = |z|^2$
3. $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
4. $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ si $z_2 \neq 0$
5. $\operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ y $\operatorname{Im}(z) \leq |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$
6. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Demostración. Probaremos aquí sólo la propiedad (6) conocida con el nombre de *desigualdad triangular*. Las demás quedan como ejercicio.

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \overline{z_1 + z_2} = z_1 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 = |z_1|^2 + \overline{z_1 z_2} + \bar{z}_1 z_2 + |z_2|^2 = \\ &= |z_1|^2 + 2 \operatorname{Re}(\bar{z}_1 z_2) + |z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2 |\bar{z}_1 z_2| + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2 |z_1| |z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

Luego, se tiene que $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. □

Definición (Argumento). Sea $z \in \mathbb{C} - \{0\}$. Se llama *argumento* de z a todo ángulo θ que forma el vector posición de z con el semieje real positivo.

Observación 1.2.2. El argumento de un número complejo $z \neq 0$ no está unívocamente determinado pues si θ y θ' son argumentos de z entonces $\theta - \theta' = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ como se observa en la Figura 1.3.

Al conjunto de todos los argumentos de un complejo no nulo z lo indicamos $\operatorname{Arg}(z)$. El valor principal de $\operatorname{Arg}(z)$, denotado $\operatorname{arg}(z)$, se define como el único valor de $\operatorname{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$, llamado **argumento principal** de z . Luego,

$$-\pi < \operatorname{arg}(z) \leq \pi.$$

Notar además que,

$$\operatorname{Arg}(z) = \operatorname{arg}(z) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ejemplo 1.2.3. Sea $z = -3i$. Entonces $\operatorname{arg}(z) = -\frac{\pi}{2}$ y $\operatorname{Arg}(z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$. ▲

Observación 1.2.3. Sea $z = x + iy \neq 0$. Entonces

1. $x > 0, y = 0 \Rightarrow \operatorname{arg}(z) = 0$
2. $x < 0, y = 0 \Rightarrow \operatorname{arg}(z) = \pi$

3. $x = 0, y > 0 \Rightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2}$

4. $x = 0, y < 0 \Rightarrow \arg(z) = -\frac{\pi}{2}$

5. $x \neq 0, y \neq 0 \Rightarrow \arg(z) = \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{si } z \in I\text{c} \text{ ó } z \in IV\text{c} \\ \arctan(y/x) + \pi & \text{si } z \in II\text{c} \\ \arctan(y/x) - \pi & \text{si } z \in III\text{c} \end{cases}$

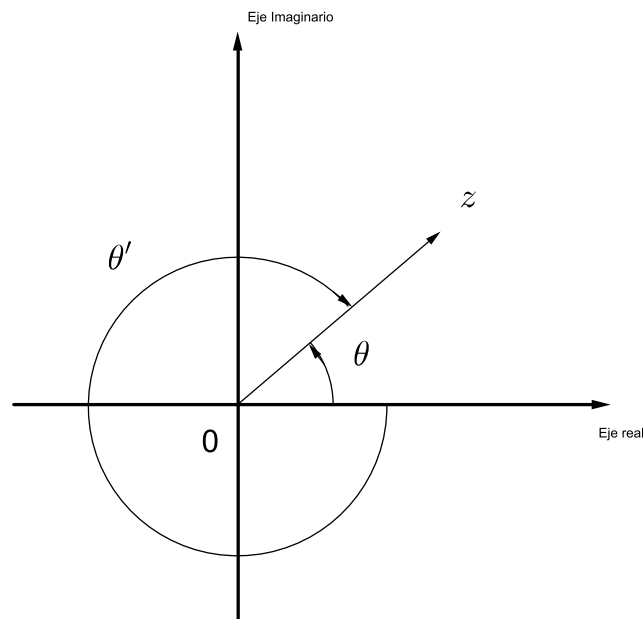


Figura 1.3: Argumento de un número complejo

Ejemplo 1.2.4. $\arg(-1 - i) = \arctan(1) - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3}{4}\pi$. ▲

Teorema 1.2.3. Sean z_1 y z_2 complejos no nulos. Entonces:

1. $\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2)$

2. $\text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2)$

Observación 1.2.4. Las fórmulas anteriores no son válidas para argumentos principales. En efecto, sean $z_1 = -1$ y $z_2 = i$. Se tiene que $\arg(z_1 z_2) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$ mientras que $\arg(z_1) + \arg(z_2) = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi$.

1.3 Otras formas de representar números complejos

1.3.1 Formas trigonométrica y polar de un número complejo

Sea $z = x + iy \in \mathbb{C} - \{0\}$. Sean (r, θ) las coordenadas polares del punto (x, y) que corresponde a la forma de par ordenado del complejo no nulo z .

Como la relación entre las coordenadas polares de un punto en el plano (r, θ) y sus coordenadas cartesianas (x, y) está dada por

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$

donde $r > 0$ entonces podemos expresar al complejo z de las formas:

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

denominada **forma trigonométrica de z** , y

$$z = r_{\theta}$$

llamada **forma polar de z** . Notar que $r = |z|$ y $\theta \in \operatorname{Arg}(z)$.

Ejemplo 1.3.1. Sea $z = 1 - i$. Se tiene que $|z| = \sqrt{2}$ y $\arg(z) = -\frac{\pi}{4}$. Entonces las formas trigonométrica y polar de z son:

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \operatorname{sen} \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$$

y

$$z = \sqrt{2}_{-\frac{\pi}{4}}$$

respectivamente. ▲

Observación 1.3.1 (Igualdad en forma polar). Sean $z_1 = r_{\theta_1}$ y $z_2 = r_{\theta_2}^*$. Entonces $z_1 = z_2$ si y sólo si $r = r^*$ y $\theta_1 - \theta_2 = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Teorema 1.3.1 (Producto y cociente en forma polar). Si $z_1 = r_{\theta_1}$ y $z_2 = r_{\theta_2}^*$, entonces:

1. $z_1 z_2 = (r r^*)_{\theta_1 + \theta_2}$
2. $\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r}{r^*} \right)_{\theta_1 - \theta_2}$

Demostración. Ejercicio. □

Teorema 1.3.2 (Fórmula de De Moivre). Sean el número complejo $z = r_{\theta}$ y $n \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$z^n = r_{n\theta}^n = r^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta).$$

1.3.2 Raíz n -ésima de un complejo

Sea $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, se llama **raíz n -ésima** de z , y notamos $\sqrt[n]{z}$ a todo complejo w tal que $w^n = z$.

El siguiente teorema nos brinda una fórmula que nos permite calcular las n raíces n -ésimas de un número complejo z . Previamente necesitaremos expresar al complejo z en forma polar.

Teorema 1.3.3. *El número complejo $z = r_\theta$ tiene exactamente n raíces n -ésimas complejas, y están dadas por:*

$$w_k = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}}$$

donde $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

Ejemplo 1.3.2. *Para obtener $\sqrt[3]{-8i}$, comencemos expresando $z = -8i$ en forma polar como $z = 8_{-\frac{\pi}{2}}$. Entonces las raíces cúbicas de z están dadas por*

$$w_k = \sqrt[3]{8} e^{-i \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}}$$

donde $k = 0, 1, 2$. Luego, se tiene que las raíces cúbicas de $z = -8i$ son:

$$w_0 = 2_{-\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} - i, \quad w_1 = 2_{\frac{\pi}{2}} = 2i \quad \text{y} \quad w_2 = 2_{\frac{7\pi}{6}} = -\sqrt{3} - i,$$

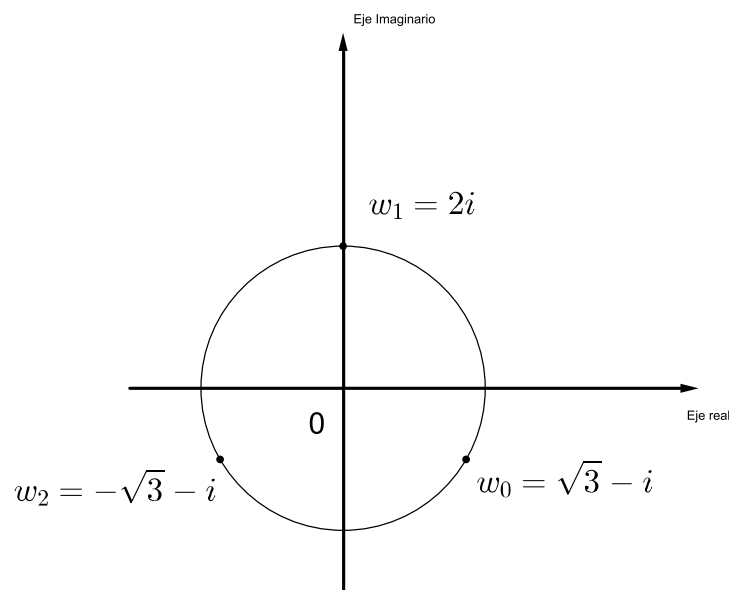


Figura 1.4: Representación de las raíces cúbicas de $-8i$

las cuales están representadas gráficamente en la Figura 1.4. ▲

1.3.3 Forma exponencial de un número complejo

La fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$$

para todo $\theta \in \mathbb{R}$ permite expresar un número complejo $z = r_\theta$ como

$$z = r e^{i\theta}$$

conocida como **forma exponencial** de z .

Por ejemplo, la forma exponencial del complejo $z = 1 + i$ es $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Teorema 1.3.4. Sean $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$. Entonces:

1. $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$
2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$
3. $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow z_1^n = r_1^n e^{in\theta_1}$
4. $\sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{r_1} e^{i\frac{\theta_1 + 2k\pi}{n}}$ con $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

1.4 El plano complejo extendido

Es conveniente incluir en el conjunto \mathbb{C} de los números complejos, el **punto del infinito**, denotado ∞ . El conjunto \mathbb{C} junto con ese punto se denota \mathbb{C}^* es decir

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

y se denomina **plano complejo extendido**. Las operaciones habituales de \mathbb{C} se extienden al plano ampliado según las siguientes fórmulas:

$$\infty \cdot z = z \cdot \infty = \infty \cdot \infty = \infty, \forall z \neq 0$$

$$\infty + z = z + \infty = \infty, \forall z \in \mathbb{C}^*$$

$$\infty - z = z - \infty = \infty, \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\frac{z}{\infty} = 0, \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\frac{\infty}{z} = \infty, \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\frac{z}{0} = \infty, \forall z \neq 0, z \in \mathbb{C}^*$$

El módulo del infinito se define como $|\infty| = +\infty$ pero carece de sentido hablar del argumento del punto del infinito, así como de las operaciones:

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}.$$

Fue Riemann quien dio una respuesta satisfactoria a la representación del punto del infinito, con la que se conoce como la **proyección estereográfica** y que no es otra cosa que uno de los métodos utilizados en la confección de mapas, es decir, en la representación de superficies esféricas.

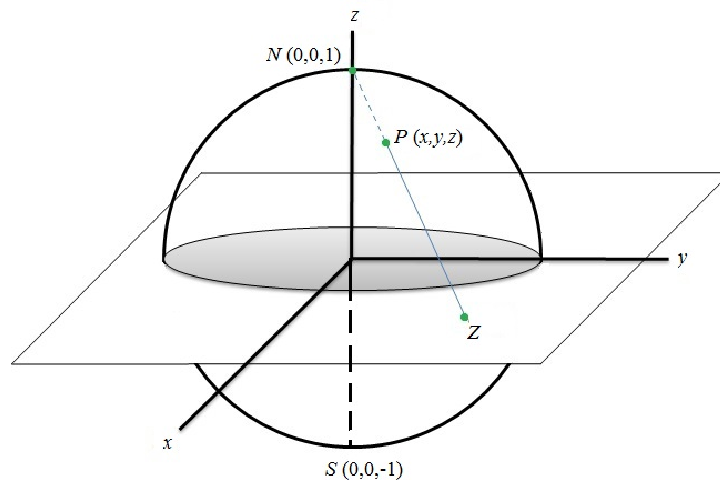


Figura 1.5: Proyección estereográfica

Para establecer cómo es esta representación en \mathbb{C}^* , consideremos en el espacio \mathbb{R}^3 un sistema rectangular de ejes coordenados e identifiquemos el plano xy con el plano complejo \mathbb{C} , de modo que el eje real sea el eje x y el imaginario el y como se observa en la Figura 1.5. Sea una esfera centrada en el origen de coordenadas y de radio unitario. La intersección de la superficie esférica con el plano xy (el ecuador de la esfera) es la circunferencia de ecuación $|z| = 1$. Los puntos $N(0, 0, 1)$ y $S(0, 0, -1)$ cooresponderían a los *polos norte* y *sur* respectivamente.

Si $P(x, y, z)$ es un punto genérico de la esfera, distinto de N , la recta NP corta al plano xy en un único punto Z y, recíprocamente, la recta NZ , donde Z es un punto del plano xy , corta a la esfera en un único punto P de la esfera distinto de N . Es decir, al asociar al punto P de la esfera, el punto Z del plano xy , establecemos una correspondencia biunívoca de la esfera sin el polo norte en el plano, a la que hemos llamado proyección estereográfica.

De esta forma podemos representar a todo punto del plano complejo sobre la esfera sin el punto correspondiente al polo norte, punto este último donde viene representado el punto del infinito ∞ . Nótese que los números complejos de módulo uno quedan representados en el ecuador, en el mismo punto sobre el que se encontraban. Los del interior de la circunferencia (de módulo menor que uno), quedan representados en el *hemisferio sur* y los de módulo mayor

que uno (los de fuera de la circunferencia) quedan representados en el *hemisferio norte*. Así pues, conforme nos alejamos del origen en el plano complejo, nos acercamos al polo norte en su representación en la esfera. Luego, hemos conseguido representar cada punto de \mathbb{C}^* por un único punto de la esfera, y recíprocamente. Así representado, el plano complejo ampliado suele llamarse **esfera de Riemann**.

1.5 Ejercicios propuestos

1. Expresé en forma binómica, trigonométrica, polar y exponencial, según corresponda, cada uno de los números complejos z dados:

(a) $z = 4$	(c) $z = 4 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right)$	(e) $z = -2 - 2i$
(b) $z = 3e^{\pi i}$	(d) $z = 2_{\frac{3}{2}\pi}$	(f) $z = -1 + i$

2. Dados los complejos $z_1 = 2 - 3i$ y $z_2 = 4 + 2i$, se pide:

- (a) Representélos geoméricamente, y determine sus módulos y argumentos.
- (b) Represente vectorialmente $z_1 + z_2$ y $z_1 - z_2$.
- (c) Calcule y grafique los complejos iz_1 y iz_2 . ¿Qué efectos produce geoméricamente cuando a un complejo z no nulo se lo multiplica por la unidad imaginaria?

3. Sean los números complejos $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 3 - 2i$ y $z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, calcule:

(a) $\operatorname{Re}(3z_1 - 2z_2)$	(c) $-3z_1^2 + 4z_1 - 8i$	(e) $(\overline{z_3})^4$
(b) $\operatorname{Im}(z_1 z_2 - iz_3)$	(d) $\frac{z_1 \overline{z_3}}{z_2}$	(f) $ z_1 z_3$

4. Halle los números reales x e y de modo que se verifique la igualdad:

(a) $-x + 5i - 2 + iy = 1 - i$	(b) $(x + iy)(1 + i) = 2 + i$
--------------------------------	-------------------------------

5. El producto de un fasor de tensión por el conjugado de un fasor de corriente se conoce con el nombre de *potencia compleja*. Sea \tilde{S} un número complejo que representa la potencia compleja de un circuito eléctrico. Los números reales $P = \operatorname{Re}(\tilde{S})$ y $Q = \operatorname{Im}(\tilde{S})$ se conocen como *potencia activa* y *potencia reactiva*, respectivamente. Si se sabe que $|\tilde{S}| = 10$ y que $P = 6$, encuentre todos los valores posibles de Q para este circuito. Represente gráficamente todos los valores posibles de \tilde{S} .

6. Siendo ρ , τ , α , β , A y B números reales y dados los siguientes números complejos $z_1 = Ae^{i\beta}$, $z_2 = Be^{i\beta}$, $z_3 = Ae^{\alpha+i\beta}$ y $z_4 = Be^{\alpha+i\beta}$, calcule:

- | | | |
|-------------|-----------------------|------------------------------|
| (a) $ z_1 $ | (c) $i^3 z_1 + i z_2$ | (e) $ \overline{z_3} + z_4 $ |
| (b) $ z_3 $ | (d) $ z_1 + z_2 $ | (f) $ z_2 - \rho z_2 $ |

7. La evolución en el tiempo de una tensión alterna senoidal de valor eficaz 220 V (Voltios) y frecuencia de 50 Hz (Hertz), como la que existe en la instalación eléctrica de nuestros hogares, puede representarse de la siguiente forma

$$v(t) = \sqrt{2} \underbrace{220}_{\text{valor eficaz}} \cos \left(2\pi \underbrace{50}_{\text{frecuencia}} t + \phi \right) \quad [V], \quad (1.2)$$

donde t representa el tiempo (medido en segundos) y ϕ recibe el nombre de *fase* (medida en radianes).

- (a) Demuestre que $v(t) = \text{Re} \left(\sqrt{2} 220 e^{i\phi} e^{i2\pi 50t} \right)$ para todo t real.
- (b) Halle el módulo y el argumento del número complejo $\dot{V} = 220e^{i\phi}$. Este número complejo recibe el nombre de *fasor de tensión*.
- (c) Represente el fasor \dot{V} en las formas binómica, polar, exponencial y trigonométrica.
- (d) Halle el número complejo \dot{V}_2 tal que $v(t) = \text{Im} \left(\sqrt{2} \dot{V}_2 e^{i2\pi 50t} \right)$ para todo t real.
- (e) Determine el módulo y el argumento de \dot{V}_2 y compárelos con los correspondientes a \dot{V} .
- (f) Al aplicarse la tensión $v(t)$ sobre un capacitor de capacidad 0,001 F (esto sucede si se conectan los bornes del capacitor a un enchufe en nuestro hogar), circulará por el mismo una corriente eléctrica $i(t)$ que satisface

$$i(t) = 0,001 \frac{dv(t)}{dt} \quad [A]. \quad (1.3)$$

Halle la expresión de $i(t)$ cuando $v(t)$ está dada por (1), muestre que $i(t)$ puede escribirse en la forma $i(t) = \text{Re} \left(\sqrt{2} \dot{I} e^{i2\pi 50t} \right)$ y halle el número complejo \dot{I} (fasor de corriente), representándolo en sus formas binómica y polar.

- (g) El número complejo Z , igual al cociente de los fasores de tensión y corriente, $Z = \frac{\dot{V}}{\dot{I}}$, recibe el nombre de *impedancia* (del capacitor en este caso). Halle Z , la impedancia del capacitor del ítem 1(f) y representéla en las formas binómica, polar y exponencial.
- (h) Si en otro enchufe de la misma instalación eléctrica hogareña se conecta una lámpara incandescente, su comportamiento es similar al de una resistencia de $R = 440\Omega$, por lo que la corriente eléctrica que circulará a través de ésta será igual a:

$$i_r(t) = \frac{v(t)}{440} \quad [A]. \quad (1.4)$$

Escriba $i_r(t)$ en la forma $i_r(t) = \text{Re} \left(\sqrt{2} \dot{I}_r e^{i2\pi 50t} \right)$ y represente el número complejo \dot{I}_r en las formas binómica y polar.

8. Calcule:

(a) $(1 + i)^{14}$	(c) $(3\frac{\pi}{3})^9$	(e) \sqrt{i}
(b) $(2e^{-\frac{\pi}{4}i})^{-25}$	(d) $\sqrt[4]{-1}$	(f) $(-1 + i)^{\frac{1}{3}}$

9. Halle el conjunto solución de cada una de las siguientes ecuaciones:

(a) $3iz - 4 + i = 2i$	(e) $5z^2 + 2z + 10 = 0$	(i) $e^z - 1 = 0$
(b) $3i\bar{z} - \frac{1+i}{(1-2i)^2} = 2$	(f) $z^6 + 1 = \sqrt{3}i$	(j) $e^z + 1 - i = 0$
(c) $z^2 + 2z + 5 = 0$	(g) $z^2 + (i-2)z + 3 - i = 0$	(k) $ie^z - 1 = 0$
(d) $z^5 + 32 = 0$	(h) $e^z + 1 = 0$	(l) $z^4 - 2z^2 - 2 = 0$

10. El movimiento de enfoque de la lente de un lector óptico de DVD puede representarse mediante la ecuación diferencial ordinaria

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} + b \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = F(t), \quad (1.5)$$

donde t representa el tiempo, $x(t)$ la posición de la lente en la dirección axial, m es la masa de la lente, b es un coeficiente de fricción, k el coeficiente de elasticidad y $F(t)$ la fuerza que se ejerce sobre la lente para acercarla o alejarla de la superficie del DVD (enfoque). La “estabilidad” del movimiento del enfoque se analiza hallando las raíces del polinomio

$$p(\lambda) = m\lambda^2 + b\lambda + k. \quad (1.6)$$

- (a) Halle las raíces de $p(\lambda)$ para los valores $m = 0,46 \cdot 10^{-3}$ kg, $b = 0,0075$ Ns/m y $k = 18,6$ N/m.
- (b) El movimiento analizado será estable si todas las raíces de $p(\lambda)$ poseen parte real negativa. Evalúe si para los valores de m , b y k dados se tiene estabilidad.
- (c) Demuestre que siempre que m , b y k sean positivos, se tendrá estabilidad.

11. Grafique el lugar geométrico determinado por los siguientes conjuntos:

- (a) $S_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 4\}$
- (b) $S_2 = \left\{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} < \arg(z) \leq \frac{\pi}{4}\right\}$
- (c) $S_3 = \left\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| \leq 3, -\pi < \arg(z) \leq \frac{\pi}{2}\right\}$
- (d) $S_4 = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re}(z)| \leq 3, -2 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 1\}$
- (e) $S_5 = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|\frac{z-3}{z+3}\right| < 2\right\}$
- (f) $S_6 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^2) = 1\}$
- (g) $S_7 = \{z \in \mathbb{C} : |z + 2 - 3i| + |z - 2 + 3i| \leq 10\}$

12. La topología del plano complejo \mathbb{C}

Entorno: Un entorno de $z_0 \in \mathbb{C}$ es un conjunto que consta de todos los puntos $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z - z_0| < r$ donde $r > 0$.

Entorno reducido: Un entorno reducido de $z_0 \in \mathbb{C}$ es un conjunto que consta de todos los puntos $z \in \mathbb{C}$ tal que $0 < |z - z_0| < r$ donde $r > 0$.

Punto límite o de acumulación: Sea S un subconjunto de \mathbb{C} . Un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ se llama punto límite o punto de acumulación de S , si todo entorno reducido de z_0 contiene puntos de S .

Conjunto cerrado: Sea S un subconjunto de \mathbb{C} . Se dice que S es un conjunto cerrado si todos sus puntos límites pertenecen a S .

Punto interior: Un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ es un punto interior del subconjunto S de \mathbb{C} si existe un entorno de z_0 íntegramente contenido en S .

Punto frontera: Un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ es un punto frontera del subconjunto S de \mathbb{C} si todo entorno de z_0 contiene puntos de S y puntos que no están en S .

Frontera: Se llama frontera del subconjunto S de \mathbb{C} al conjunto formado por todos los puntos frontera de S .

Punto exterior: Un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ se llama punto exterior del subconjunto S de \mathbb{C} si no es punto interior ni punto frontera de S .

Conjunto acotado: Un subconjunto S de \mathbb{C} se dice acotado si existe $M > 0$ tal que $|z| < M$ para todo $z \in S$.

Conjunto abierto: Un subconjunto S de \mathbb{C} se dice abierto si sólo consiste de puntos interiores.

Conjunto conexo (conexo por caminos): Un subconjunto S de \mathbb{C} se dice conexo si todo par de puntos de S se pueden unir mediante una línea poligonal cuyos puntos pertenezcan todos al conjunto S .

Dominio: Un subconjunto S de \mathbb{C} se dice dominio si S es abierto y conexo.

Conjunto simplemente conexo: Un subconjunto S de \mathbb{C} se dice simplemente conexo si toda curva simple cerrada que pueda trazarse en su interior contiene solamente puntos de S .

Región anular o corona: Se llama corona, región anular o región circular, al conjunto de puntos del plano complejo comprendido entre dos circunferencias concéntricas.

Conjunto múltiplemente conexo: Un subconjunto S de \mathbb{C} en el que al menos se pueda trazar una curva simple cerrada cuyo interior contenga uno o más puntos que no pertenezcan a S , se dice múltiplemente conexo.

Determine si los conjuntos S_i dados en el ejercicio (11) son abierto, cerrado, acotado, conexo, simplemente conexo y/o un dominio.

13. Dados los números complejos z , z_1 y z_2 . Demuestre que:

(a) $\operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re}(z)$

(b) $\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im}(z)$

(c) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$

(d) z es imaginario puro $\Leftrightarrow \bar{z} = -z$

(e) $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

(f) $|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$

(g) $z \in \mathbb{C} \Rightarrow \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$

(h) $z \in \mathbb{C} \Rightarrow \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

Capítulo 2

Funciones complejas

En este capítulo estudiaremos funciones complejas de una variable compleja y desarrollaremos para ellas una teoría de derivación. El objetivo principal de este capítulo es introducir las funciones analíticas que juegan un papel fundamental en el Análisis Complejo.

2.1 Funciones complejas de variable compleja

Definición (Función compleja de variable compleja). Sea S un subconjunto no vacío de \mathbb{C} . Una función compleja de una variable compleja f es una correspondencia que asigna a cada número complejo $z \in S$, un número complejo w .

$$f : S \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad w = f(z)$$

El conjunto S recibe el nombre de dominio de definición de f , y se lo denota por $S = \text{Dom}(f)$, z es la variable independiente y w es la variable dependiente.

Ejemplo 2.1.1. Sea la función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z) = z^2$. Entonces $f(1 + 2i) = (1 + 2i)^2 = -3 + 4i$, por lo que se dice que $-3 + 4i$ es la imagen de $1 + 2i$ por la función f . ▲

Funciones univaluada y multivaluada

Sea f una función compleja de variable compleja. Si a cada valor de z le hace corresponder un único valor w , se dice que la función f es una **función unívoca** o **función univaluada**. Si por el contrario, a cada valor de z , le corresponde más de un valor w se dice que f es una **función multiforme** o **función multivaluada**.

Una función multivaluada puede considerarse como una colección de funciones unívocas, cada una será llamada **rama de la función**.

Se acostumbra considerar un miembro particular como una **rama principal** de la función multivaluada y el valor de la función correspondiente a esta rama como el **valor principal**.

Por ejemplo, la función del ejemplo anterior 2.1.1 es unívoca, mientras que la función

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} / f(z) = \sqrt{z}$$

es una función multivaluada o multiforme pues, por ejemplo $f(1) = \pm 1$.

Cuando hablemos de función (compleja de variable compleja), supondremos, a menos que se diga lo contrario que es una función unívoca.

Observación 2.1.1. Si una función f está dada sólo por su ley, sobreentenderemos que se toma por dominio el mayor subconjunto de \mathbb{C} donde $f(z)$ existe, es decir

$$\text{Dom}(f) = \{z \in \mathbb{C} : f(z) \text{ existe}\}$$

Por ejemplo, sea la función dada por $f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$ entonces su dominio es $\mathbb{C} - \{i, -i\}$ cuya representación se observa en la Figura 2.1.

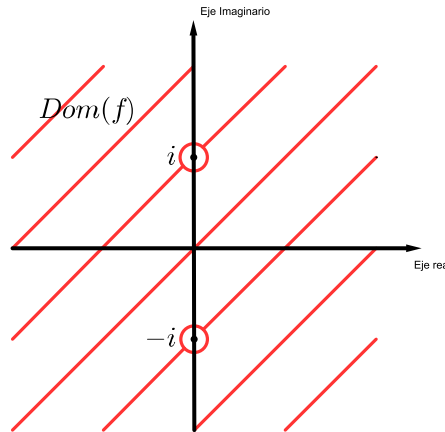


Figura 2.1: Representación del dominio de $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$

Funciones componentes de una función compleja

Supongamos que $w = u + iv$ es el valor de la función f en $z = x + iy$, es decir

$$f(x + iy) = u + iv.$$

Cada número real u y v depende de las variables reales x e y , luego $f(z)$ puede ser expresado en términos de un par de funciones reales de las variables reales x e y

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Por ejemplo, sea la función dada por $f(z) = z^2$, entonces

$$f(x + iy) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy,$$

luego $u(x, y) = x^2 - y^2$ y $v(x, y) = 2xy$.

Por el contrario, sea por ejemplo la función dada por $f(z) = 7x + 3iy$. Si queremos expresar a $f(z)$ en términos de la variable compleja z entonces dado que $\operatorname{Re}(z) = x$ y $\operatorname{Im}(z) = y$ tenemos que

$$f(z) = 7\operatorname{Re}(z) + 3i\operatorname{Im}(z).$$

Otra forma sería considerar:

$$\operatorname{Re}(z) = x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im}(z) = y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

por lo que se tiene que $f(z) = 7\frac{z + \bar{z}}{2} + 3i\frac{z - \bar{z}}{2i} = 5z + 2\bar{z}$.

Funciones polinómicas y racionales

Una **función polinómica** es una función de la forma:

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

donde $n \in \mathbb{N}_0$ y $a_i \in \mathbb{C}$ para toda $i = 0, 1, 2, \dots, n$. El dominio de tales funciones es \mathbb{C} .

Una **función racional** es una función de la forma:

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

donde p y q son polinomios. Este tipo de funciones tienen por dominio $\mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} : q(z) = 0\}$.

2.2 Funciones analíticas

En esta sección se desarrolla una de las nociones fundamentales de la teoría de análisis complejo que es la de función analítica. Previamente se estudiarán los conceptos de límite, continuidad y derivabilidad de una función compleja de variable compleja.

2.2.1 Límites y continuidad

Definición (Límite). Sea f una función definida en un entorno reducido de z_0 . Se dice que f tiene límite w_0 en z_0 y notamos $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ si dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon.$$

Ejemplo 2.2.1. Sea $f(z) = \frac{iz}{2}$. Probaremos que $\lim_{z \rightarrow i} f(z) = -\frac{1}{2}$.

Sea $\varepsilon > 0$. Nótese que:

$$\left| f(z) + \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{iz}{2} + \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} |i(z - i)| = \frac{1}{2} |z - i|.$$

Por consiguiente tenemos que:

$$\left| f(z) + \frac{1}{2} \right| < \varepsilon \quad \text{si} \quad 0 < |z - i| < 2\varepsilon,$$

y de esta forma se tiene que $\delta = 2\varepsilon$. ▲

Teorema 2.2.1. Sean la función dada por $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ y $z_0 = x_0 + iy_0$.

Entonces,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = u_0 + iv_0$$

si y sólo si

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0 \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0.$$

Ejemplo 2.2.2. Para calcular $\lim_{z \rightarrow i} z^2$, llamemos $z = x + iy$, entonces

$$f(z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

luego

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy.$$

Dado que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} u(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} x^2 - y^2 = -1$$

y

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} v(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} 2xy = 0,$$

entonces $\lim_{z \rightarrow i} z^2$ existe y se tiene que

$$\lim_{z \rightarrow i} z^2 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} u(x, y) + i \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} v(x, y) = -1. \blacktriangle$$

Teorema 2.2.2. Si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ y $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = w_1$, entonces

1. $\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) + g(z)] = w_0 + w_1$
2. $\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z)g(z)] = w_0w_1$
3. $\lim_{z \rightarrow z_0} \alpha f(z) = \alpha w_0$ donde $\alpha \in \mathbb{C}$
4. $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{w_0}{w_1}$ si $w_1 \neq 0$
5. $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = |w_0|$

Algunos límites importantes

- $\lim_{z \rightarrow z_0} \alpha = \alpha$ donde $\alpha \in \mathbb{C}$
- $\lim_{z \rightarrow z_0} z^n = z_0^n$ donde $n \in \mathbb{N}$
- Si $P(z)$ es una función polinómica entonces $\lim_{z \rightarrow z_0} P(z) = P(z_0)$
- Si $R(z)$ es una función racional y $z_0 \in \text{Dom}(R)$, entonces $\lim_{z \rightarrow z_0} R(z) = R(z_0)$

Límites infinitos y al infinito

A partir de lo visto en la Sección 1.4. ya se puede asignar un significado a la afirmación

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$$

en el caso en que alguno o ambos, z_0 ó w_0 , sean sustituidos por el punto del infinito ∞ .

Definición (Límite infinito). La afirmación $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ significa que para cada número positivo M , existe un número positivo δ tal que si $0 < |z - z_0| < \delta$ entonces $|f(z)| > M$.

Puesto que la definición anterior puede escribirse como $0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{f(z)} - 0 \right| < \frac{1}{M}$, entonces tenemos que:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0.$$

Definición (Límite al infinito). La afirmación $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = w_0$ significa que para cada número positivo ε , existe un número positivo N tal que si $|z| > N$ entonces $|f(z) - w_0| < \varepsilon$.

Como la definición anterior puede escribirse como $0 < \left| \frac{1}{z} - 0 \right| < \frac{1}{N} \Rightarrow \left| f\left(\frac{1}{z}\right) - w_0 \right| < \varepsilon$, entonces tenemos que:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = w_0.$$

Definición (Límite infinito al infinito). La afirmación $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ significa que para cada número positivo M , existe un número positivo N tal que si $|z| > N$ entonces $|f(z)| > M$.

Esta definición puede escribirse como $0 < \left| \frac{1}{z} - 0 \right| < \frac{1}{N} \Rightarrow \left| \frac{1}{f(1/z)} - 0 \right| < \frac{1}{M}$, entonces tenemos que:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{f(1/z)} = 0.$$

Ejemplo 2.2.3. Probemos que $\lim_{z \rightarrow -1} \frac{iz + 3}{z + 1} = \infty$.

Para ello, sea $f(z) = \frac{iz + 3}{z + 1}$. Entonces dado que $\lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{f(z)} = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{z + 1}{iz + 3} = 0$ se tiene por lo tanto que:

$$\lim_{z \rightarrow -1} \frac{iz + 3}{z + 1} = \infty. \blacktriangle$$

Definición (Continuidad en un punto). Se dice que la función f es continua en un punto z_0 si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$, es decir, si dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $|z - z_0| < \delta$ entonces $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Estudiar la continuidad de una función compleja de variable compleja en un punto, es equivalente a estudiar la continuidad en un punto de sus funciones reales componentes de dos variables:

Teorema 2.2.3. La función compleja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es continua en $z_0 = x_0 + iy_0$ si y sólo si las funciones reales $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$ son continuas en (x_0, y_0) .

Ejemplo 2.2.4. La función dada por $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ es continua en \mathbb{C} pues las funciones componentes de f , $u(x, y) = x^2 + y^2$ y $v(x, y) = 0$ son continuas en \mathbb{R}^2 . \blacktriangle

Teorema 2.2.4. Si f y g son funciones continuas en $z_0 \in \mathbb{C}$ y si $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces $f + g$, αf , fg , $\frac{f}{g}$ (si $g(z_0) \neq 0$) y $|f|$ son continuas en z_0 .

Teorema 2.2.5. Si g es una función continua en $z_0 \in \mathbb{C}$ y f es continua en $w_0 = g(z_0)$, entonces $f \circ g$ es continua en z_0 .

Definición (Continuidad en una región). Una función f es continua en una región $R \subseteq \mathbb{C}$ si lo es en todos los puntos de R .

Observación 2.2.1. Las funciones polinómicas y racionales son continuas en sus dominios.

Teorema 2.2.6. Si f es una función compleja continua en un conjunto cerrado y acotado $D \subset \mathbb{C}$, entonces su imagen $f(D)$ es cerrado y acotado en \mathbb{C} .

2.2.2 Derivada

Definición (Derivada en un punto). Sea f una función cuyo dominio contiene un entorno de z_0 . Se dice que f es derivable en z_0 si existe

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \quad (2.1)$$

En tal caso, al resultado del límite se lo denota por $f'(z_0)$ y se llama derivada de f en z_0 .

Expresando la variable z en la definición anterior en términos de la nueva variable compleja $\Delta z = z - z_0$ podemos escribir (2.1) como:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Al utilizar esta forma de la definición de derivada se suele omitir el subíndice de z_0 y se introduce el número:

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z),$$

que denota el cambio en el valor de f correspondiente a un cambio Δz en el punto en que evaluamos f . Entonces (2.1) se puede expresar como:

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}.$$

Definición (Función derivada). Una función f es derivable en un abierto Ω de \mathbb{C} si es derivable en cada punto de Ω . Si f es derivable en un abierto Ω de \mathbb{C} , entonces queda definida una nueva función

$$f' : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \quad / \quad w = f'(z)$$

llamada función derivada de f .

Ejemplo 2.2.5. Determinemos dónde es derivable la función definida por $f(z) = z^2$. Como

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{z^2 + 2z\Delta z + (\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z + \Delta z) = 2z$$

para cualquier $z \in \mathbb{C}$, entonces f es derivable en \mathbb{C} y se tiene que la función derivada de f es

$$f'(z) = 2z, \quad \forall z \in \mathbb{C}. \blacktriangle$$

Ejemplo 2.2.6. Estudiemos ahora dónde es derivable la función dada por $f(z) = \bar{z}$. Para ello, consideremos $z = x + iy \in \mathbb{C}$ y $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. Entonces,

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{(x + \Delta x) - i(y + \Delta y) - (x - iy)}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Si $\Delta z \rightarrow 0$ a lo largo del eje real ($\Delta y = 0$) entonces

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Por otro lado, si $\Delta z \rightarrow 0$ a lo largo del eje imaginario ($\Delta x = 0$) entonces

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-i\Delta y}{i\Delta y} = -1.$$

Luego, no existe $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ para ningún $z \in \mathbb{C}$ por lo que f no es derivable en todo \mathbb{C} .

Teorema 2.2.7. Si f es una función derivable en z_0 entonces f es continua en z_0 .

Demostración. Ejercicio. □

Algunas derivadas de funciones complejas

A partir de la definición de derivada de una función compleja, es sencillo probar que

- Si $c \in \mathbb{C}$ entonces $\frac{d}{dz}(c) = 0$ para toda $z \in \mathbb{C}$.
- Si $n \in \mathbb{N}$ entonces la función $f(z) = z^n$ es derivable en \mathbb{C} y se tiene que $f'(z) = nz^{n-1}$.

Teorema 2.2.8. Si f y g son funciones derivables en z_0 y c es una constante compleja, entonces las funciones $f + g$, $f - g$, cf , fg y $\frac{f}{g}$ (si $g(z_0) \neq 0$) son funciones derivables en z_0 . Además:

1. $(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$
2. $(f - g)'(z_0) = f'(z_0) - g'(z_0)$
3. $(cf)'(z_0) = cf'(z_0)$
4. $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$
5. $\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{[g(z_0)]^2}$

Demostración. La prueba de este teorema es similar al caso de funciones reales de una variable real. □

Ejemplo 2.2.7. Si $n \in \mathbb{Z}^-$, la función $f(z) = z^n$ es derivable para todo $z \neq 0$. En efecto, $f(z) = \frac{1}{z^{-n}}$ donde $-n \in \mathbb{N}$. Luego, aplicando la propiedad (5) del Teorema 2.2.8 se tiene que:

$$f'(z) = \frac{0z^{-n} - 1(-n)z^{-n-1}}{z^{-2n}} = nz^{n-1}, \quad z \neq 0. \blacktriangle$$

Teorema 2.2.9. Si g es derivable en z_0 y f es derivable en $w_0 = g(z_0)$, entonces $f \circ g$ es derivable en z_0 . Además

$$(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0))g'(z_0).$$

Ejemplo 2.2.8. La función dada por $f(z) = (z^2 + 2)^3$ es derivable en \mathbb{C} . Además,

$$f'(z) = 3(z^2 + 2)^2 2z = 6z(z^2 + 2)^2$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. \blacktriangle

2.2.3 Ecuaciones de Cauchy-Riemann

En esta sección obtendremos un par de ecuaciones que deben satisfacer las primeras derivadas parciales de las funciones componentes de una función compleja de variable compleja en un punto, para que exista en él la derivada de tal función.

Teorema 2.2.10 (Ecuaciones de Cauchy-Riemann: condiciones necesarias). Sea la función dada por $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ donde $z = x + iy$. Si f es derivable en $z_0 = x_0 + iy_0$ entonces se satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0).$$

Además,

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0).$$

Demostración. Por hipótesis, f es derivable en $z_0 = x_0 + iy_0$, luego:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \quad (2.2)$$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{[u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) + iv(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)] - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)]}{\Delta x + i\Delta y}. \quad (2.3)$$

El límite (2.2) ó (2.3) existe, independientemente de cómo $\Delta z \rightarrow 0$.

Si en particular, $\Delta z \rightarrow 0$ a lo largo del eje real ($\Delta y = 0$) entonces (2.3) se puede expresar como

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x_0 + \Delta x, y_0) + iv(x_0 + \Delta x, y_0)] - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)]}{\Delta x} = \quad (2.4)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} \right] = \quad (2.5)$$

$$= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0). \quad (2.6)$$

Si en cambio, $\Delta z \rightarrow 0$ a lo largo del eje imaginario ($\Delta x = 0$) entonces (2.3) se puede expresar como

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{[u(x_0, y_0 + \Delta y) + iv(x_0, y_0 + \Delta y)] - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)]}{i\Delta y} = \quad (2.7)$$

$$= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[\frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{i\Delta y} + i \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{i\Delta y} \right] = \quad (2.8)$$

$$= \frac{1}{i} u_y(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0). \quad (2.9)$$

Luego, de (2.6) y (2.9) se tienen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, es decir

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0).$$

Además, de (2.6) y (2.9) se tiene que

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0).$$

□

Con una hipótesis adicional, se obtiene el recíproco de este teorema, que enunciamos sin demostración:

Teorema 2.2.11 (Ecuaciones de Cauchy-Riemann: condiciones necesarias y suficientes). *Sea la función dada por $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ donde $z = x + iy$ tal que las funciones reales $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$ tienen derivadas parciales continuas de primer orden en (x_0, y_0) . Entonces, f es derivable en $z_0 = x_0 + iy_0$ si y sólo si las funciones $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$ satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann en (x_0, y_0) .*

Ejemplo 2.2.9. Usaremos las condiciones de Cauchy-Riemann para determinar dónde es derivable la función dada por $f(z) = z\bar{z}$.

Sean $z = x + iy$, entonces la función f puede expresarse como $f(z) = x^2 + y^2$ por lo que $u(x, y) = x^2 + y^2$ y $v(x, y) = 0$.

Las funciones $u_x = 2x$, $u_y = 2y$, $v_x = v_y = 0$ son continuas para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y como

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

se tiene que las ecuaciones de Cauchy-Riemann sólo se satisfacen en $(0, 0)$.

Luego, f es derivable únicamente en $z = 0$ y $f'(0) = 0$. ▲

Definición (Función analítica). Se dice que la función f es analítica en z_0 si es derivable en todo punto de algún entorno de z_0 , y en este caso se dice que z_0 es un punto regular de la función f . Una función f se dice analítica en un dominio D de \mathbb{C} si es analítica en todo punto de D .

Ejemplo 2.2.10. La función del ejemplo 2.2.9 es no analítica en todo \mathbb{C} . ▲

Definición (Función entera). Se dice que una función f es entera si es analítica en todo punto de \mathbb{C} .

Analiticidad de las funciones polinómicas y racionales

- Las funciones polinómicas $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ son enteras. Además

$$f'(z) = a_n n z^{n-1} + a_{n-1} (n-1) z^{n-2} + \dots + a_1.$$

Por ejemplo, si $f(z) = 3iz^3 - (1+i)z - 4i$ entonces $f'(z) = 9iz^2 - 1 - i$.

- Las funciones racionales son analíticas en su dominio.

Por ejemplo, la función dada por $f(z) = \frac{iz}{z^2 + 1}$ es analítica en $\mathbb{C} - \{i, -i\}$. Además se

tiene que $f'(z) = \frac{-iz^2 + i}{(z^2 + 1)^2}$ si $z \neq \pm i$.

2.3 Funciones elementales

En esta sección, se presentan las funciones elementales complejas. Ellas son: la exponencial, las trigonométricas, las hiperbólicas y la logarítmica.

2.3.1 La función exponencial

La **función exponencial** compleja está definida por

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad / \quad f(z) = e^z.$$

Si $z = x + iy$ entonces $f(z) = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y$, por lo que $u(x, y) = e^x \cos y$ y $v(x, y) = e^x \sin y$. Como las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y = e^x \cos y \quad , \quad u_y = -v_x = -e^x \sin y$$

se satisfacen para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, y las derivadas parciales de primer orden de las funciones u y v son continuas en \mathbb{R}^2 , entonces se tiene que f es una función entera. Además,

$$f'(z) = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Para cualquier $z \in \mathbb{C}$ se tiene que $|e^z| = |e^x (\cos y + i \sin y)| = e^x \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = e^x > 0$ por lo que se tiene que el módulo de e^z es e^x y $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Si escribimos la expresión $e^z = e^x e^{iy}$ como $e^z = r e^{i\theta}$ observamos que $r = e^x$ y $\theta = y$ por lo que un argumento de e^z es y . Se tiene así que

$$\text{Arg}(e^z) = y + 2k\pi$$

donde $k \in \mathbb{Z}$.

También, se tiene que para cualesquiera z_1 y $z_2 \in \mathbb{C}$,

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \quad , \quad \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}.$$

Por otro lado, como $e^{2\pi i} = 1$ entonces para cualquier $z \in \mathbb{C}$ se tiene que $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z$, por lo que la función f es periódica de período fundamental $2\pi i$.

2.3.2 La función logaritmo

Sea la función exponencial $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z) = e^z$. Como en el caso real, nuestra intención es definir una función $g = f^{-1}$ que resulte ser la inversa de la función exponencial compleja, a la que llamaremos función logaritmo compleja.

Sabemos que $e^z \neq 0$ para cualquier $z \in \mathbb{C}$. Sea entonces $w \neq 0$ tal que

$$f(z) = e^z = w \tag{2.10}$$

Si expresamos los complejos z y w de la forma $z = x + iy$ y $w = r e^{i\theta}$, $-\pi < \theta \leq \pi$, entonces la ecuación (2.10) se puede escribir en la forma

$$e^x e^{iy} = r e^{i\theta}.$$

Luego, por la igualdad de números complejos se tiene que $e^x = r$ y $e^{iy} = e^{i\theta}$ o equivalentemente

$$x = \ln r \quad , \quad y = \theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Por lo tanto, la ecuación (2.10) se cumple si

$$z = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$$

donde $k \in \mathbb{Z}$. Luego, si escribimos

$$\text{Log } w = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$$

vemos que $e^{\text{Log } w} = w$; esto motiva a la definición de la **función logaritmo** (multivaluada) de variable compleja.

Se llama **función logaritmo** a la función dada por

$$g : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \quad / \quad g(z) = \text{Log } z = \ln |z| + i\text{Arg}(z)$$

Ejemplo 2.3.1. $\text{Log } i = \ln |i| + i\text{Arg}(i) = \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i, \quad k \in \mathbb{Z}. \blacktriangle$

Ejemplo 2.3.2. *A las soluciones de las ecuación $e^{iz} = 1 + i$, las obtenemos de la siguiente manera*

$$\begin{aligned} iz &= \text{Log}(1 + i) \\ iz &= \ln |1 + i| + i\text{Arg}(1 + i) \\ iz &= \ln \sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z} \\ z &= \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) - i \ln \sqrt{2}, \quad k \in \mathbb{Z}. \blacktriangle \end{aligned}$$

La función logaritmo principal

La rama principal del $\text{Log } z$ se obtiene considerando $k = 0$, es decir el argumento principal de z . De esta manera queda definida una función univaluada llamada **logaritmo principal** y notamos por $\log z$. Es decir,

$$h : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \quad / \quad h(z) = \log z = \ln |z| + i \arg(z).$$

Nótese que para todo $z \neq 0$, $\text{Log } z = \log z + 2k\pi i$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Veamos dónde es continua y derivable $h(z) = \ln r + i\theta$ con $z \neq 0$. Para ello consideremos las funciones componentes partes real y compleja de h en coordenadas polares,

$$u(r, \theta) = \ln r \quad , \quad v(r, \theta) = \theta$$

donde $r > 0$ y $-\pi < \theta \leq \pi$.

Es claro que h no es continua en $z = 0$ pues no está definida allí. También es fácil ver que u y v son continuas en todo punto (r, θ) tal que $r > 0$ y $-\pi < \theta < \pi$. Ahora bien, estudiemos qué ocurre en el semieje real negativo, es decir, en los puntos de la forma (r, π) con $r > 0$.

Si (r, θ) es arbitrariamente cercano al punto (r, π) , entonces existirán valores de v próximos a π y también otros en los que los valores de v están próximos a $-\pi$, por lo que se puede concluir que h no es continua en el semieje real negativo.

Podemos concluir hasta el momento que como la función h no es continua en $z = 0$ y en los puntos de la forma (r, π) con $r \geq 0$ y $\theta = \pi$, entonces tampoco será derivable allí.

Dado que las primeras derivadas parciales de u y v son $u_r = \frac{1}{r}$, $v_\theta = 1$ y $v_r = u_\theta = 0$, son continuas en (r, θ) con $r > 0$ y $-\pi < \theta < \pi$ y se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en polares (ver ejercicio 3 de la Sección 2.5)

$$u_r = \frac{1}{r}v_\theta \quad , \quad \frac{1}{r}u_\theta = -v_r$$

entonces podemos concluir que h es continua y analítica en:

$$\Omega = \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \leq 0, \operatorname{Im}(z) = 0\}$$

el cual está representado en la Figura 2.2.

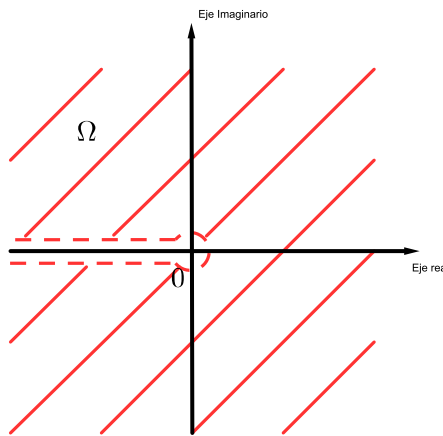


Figura 2.2: Representación de Ω

Además, en el ejercicio 3 de la Sección 2.5, se prueba que la derivada de f en coordenadas polares está dada por $f'(z) = e^{-i\theta} (u_r(r, \theta) + iv_r(r, \theta))$. Entonces

$$f'(z) = e^{-i\theta} \left(\frac{1}{r} + i0 \right) = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{z}$$

para todo $z \in \Omega$.

Ejemplo 2.3.3. La función dada por $f(z) = \log(z - i + 1)$ es analítica en el conjunto:

$$\Omega = \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z - i + 1) \leq 0, \operatorname{Im}(z - i + 1) = 0\}.$$

Es decir, si $z = x + iy$ luego $z - i + 1 = (x + 1) + (y - 1)i$. Entonces se debe verificar que

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z - i + 1) = x + 1 \leq 0 \\ \operatorname{Im}(z - i + 1) = y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -1, \quad y = 1.$$

Por lo tanto, f es analítica en:

$$\Omega = \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \leq -1, \operatorname{Im}(z) = 1\}$$

y su función derivada viene dada por:

$$f'(z) = \frac{1}{z - i + 1} \cdot \blacktriangle$$

Teorema 2.3.1. Sean los complejos z , z_1 y z_2 donde z_1 y z_2 son no nulos. Entonces se verifican las siguientes propiedades:

1. $\operatorname{Log}(e^z) = z + 2k\pi i$ donde $k \in \mathbb{Z}$
2. $e^{\operatorname{Log} z_1} = z_1$
3. $\operatorname{Log}(z_1 z_2) = \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2$
4. $\operatorname{Log} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Log} z_1 - \operatorname{Log} z_2$

Observación 2.3.1. Las propiedades enunciadas en el Teorema 2.3.1 no son válidas para logaritmos principales. Por ejemplo, observemos que:

$$\log(-3i) = \ln|-3i| + i \arg(-3i) = \ln 3 - \frac{\pi}{2}i$$

mientras que

$$\log(-3) + \log(i) = \ln 3 + i \arg(-3) + \ln 1 + i \arg(i) = \ln 3 + \frac{3}{2}\pi i.$$

2.3.3 Las funciones trigonométricas seno y coseno

Sea $z \in \mathbb{C}$, se define la función trigonométrica **seno** de z como:

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

y la función trigonométrica **coseno** de z como

$$\operatorname{cos} z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Las funciones $\operatorname{sen} z$ y $\operatorname{cos} z$ son enteras pues son suma y composición de funciones enteras. Además,

$$\frac{d}{dz}(\operatorname{sen} z) = \frac{1}{2i} \frac{d}{dz}(e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{1}{2i}(ie^{iz} + ie^{-iz}) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \operatorname{cos} z$$

para cualquier $z \in \mathbb{C}$. Análogamente se prueba que para todo complejo z se tiene que:

$$\frac{d}{dz}(\operatorname{cos} z) = -\operatorname{sen} z.$$

Teorema 2.3.2. *Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Entonces se tienen las siguientes propiedades:*

1. $\operatorname{sen} z$ y $\operatorname{cos} z$ son periódicas de período fundamental 2π .
2. $\operatorname{cos}^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$, $\operatorname{cos}(-z) = \operatorname{cos} z$, $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$ para cualquier $z \in \mathbb{C}$.
3. $\operatorname{sen} z = 0 \Leftrightarrow z = n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$
4. $\operatorname{cos} z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$
5. $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i \operatorname{cos} x \operatorname{sen} hy$
6. $\operatorname{cos} z = \operatorname{cos} x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{sen} hy$

Demostración. Ejercicio. □

2.4 Transformaciones o mapeos en el plano complejo

Las propiedades de una función real de una variable real se suelen reflejar en el gráfico de dicha función. No obstante para funciones complejas de variable compleja $w = f(z)$, donde z y w son números complejos, no disponemos de tal gráfica pues ambos números, z y w están sobre un plano en lugar de sobre una recta. Sin embargo, se puede exhibir cierta información de la función indicando pares de puntos correspondientes $z = (x, y)$ y $w = (u, v)$, para lo cual es, en general, más sencillo dibujar los planos xy (plano z) y el plano uv (plano w) separadamente.

Al pensar en una función f de esta manera, nos referimos a ella como una **aplicación**, **transformación** o **mapeo**. La imagen de un punto z del dominio de definición de la función f , es el punto $w = f(z)$, y el conjunto de imágenes de los puntos de un conjunto S del dominio se llama imagen de S por la función f .

Es decir, sean $z = x + iy$ y la función compleja $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Las ecuaciones

$$\begin{cases} u(x, y) = u \\ v(x, y) = v \end{cases}$$

definen una *transformación*, *aplicación* o *mapeo* de puntos del plano z (plano xy) en el plano w (plano uv). Véase Figura 2.3.

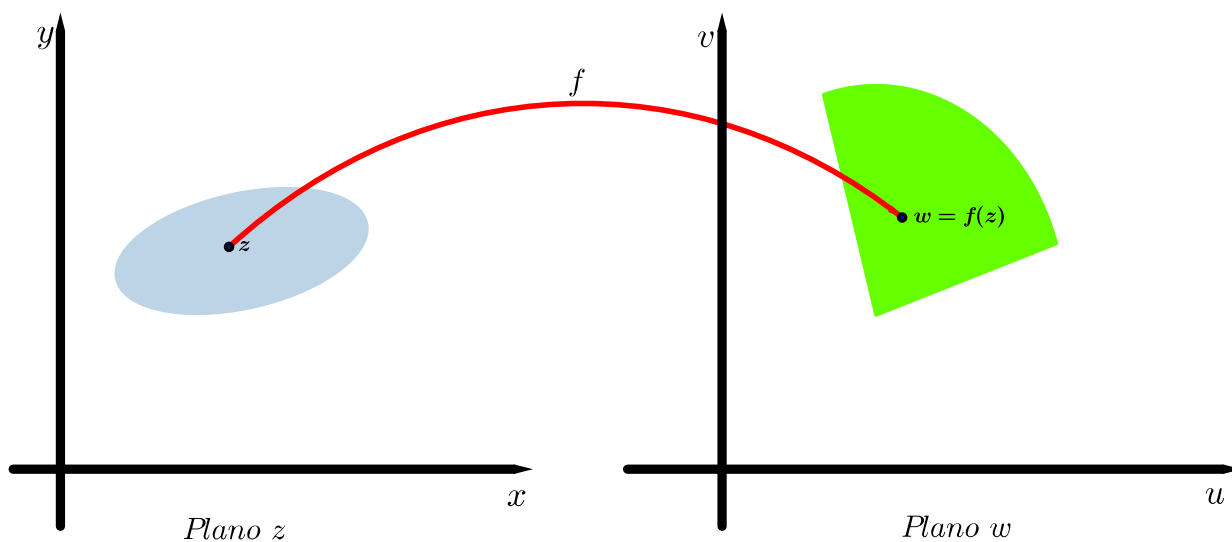


Figura 2.3: Transformación, mapeo o aplicación

Ejemplo 2.4.1. Sea la transformación $w = (1 + i)z$. Para determinar la imagen en el plano w de la curva de ecuación $\text{Im}(z) = 1$ del plano z por la función dada, consideremos $z = x + iy$ y $w = u + iv$.

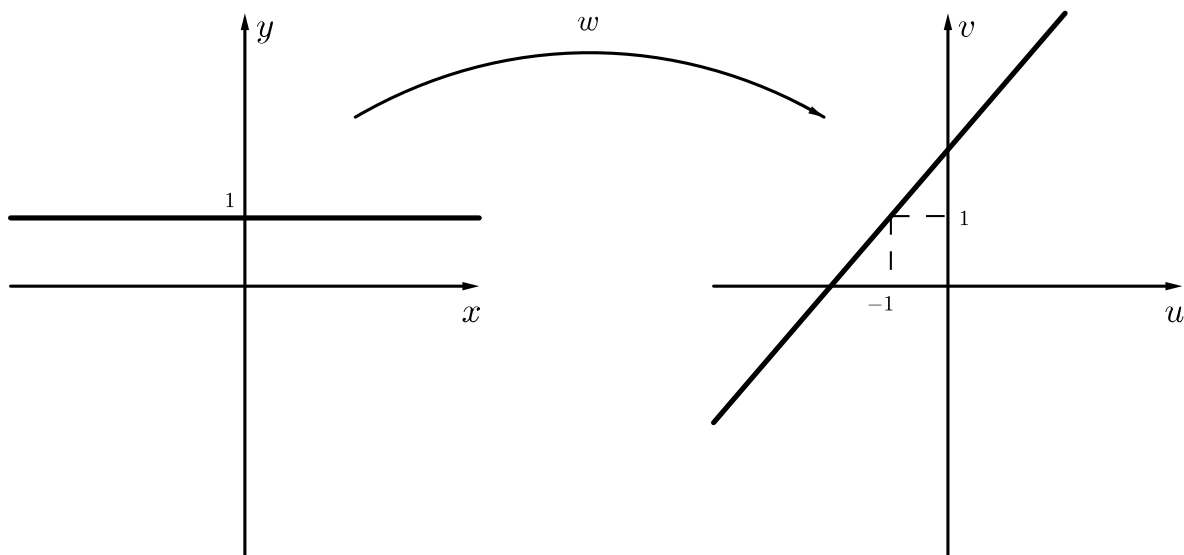


Figura 2.4: Transformación en el plano complejo

Entonces,

$$w = (1 + i)(x + iy) = (x - y) + i(x + y)$$

y como $\text{Im}(z) = y = 1$ se tienen las ecuaciones

$$\begin{cases} u = -1 + x \\ v = 1 + x \end{cases}$$

para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

Estas últimas son las ecuaciones paramétricas de una recta en el plano uv que contiene al punto $(-1, 1)$ y tiene la dirección del vector $(1, 1)$ como se muestra en la Figura 2.4. ▲

2.4.1 Algunas transformaciones elementales

A continuación se presentan algunas transformaciones o mapeos elementales del plano z (o plano xy) en el plano w (o plano uv) mediante la ley $w = f(z)$.

Traslación

Sea $w = z + \beta$ con $\beta \in \mathbb{C}$. Entonces los puntos del plano z se trasladan en la dirección del vector asociado al número complejo β en el plano w .

Rotación

Sea $w = e^{i\theta_0}z$ con $\theta_0 \in \mathbb{R}$. Entonces los puntos del plano z rotan un ángulo θ_0 respecto al origen en el plano w .

Si $\theta_0 > 0$, la rotación es en sentido positivo (en contra de las agujas del reloj), mientras que si $\theta_0 < 0$, la rotación es en sentido negativo (a favor de las agujas del reloj).

Dilatación-contracción

Sea $w = az$ con $a > 0$. Entonces si $a > 1$, puntos del plano z se dilatan un factor a en el plano w en la dirección del vector asociado a z . Si por el contrario, $0 < a < 1$, puntos del plano z se contraen un factor $\frac{1}{a}$ en el plano w en la dirección del vector asociado a z .

Ejemplo 2.4.2. La transformación del ejemplo 2.4.1, $w = (1 + i)z$ se puede expresar como:

$$w = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}z$$

por lo que transforma a la recta en el plano xy de ecuación $\text{Im}(z) = 1$ en una recta en el plano uv que se obtiene de dilatar la recta un factor $\sqrt{2}$ en la dirección de z y de rotar en sentido positivo un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ respecto al origen. ▲

2.4.2 Transformación o mapeo lineal

Una transformación o mapeo **lineal** es de la forma

$$w = \alpha z + \beta$$

donde α y $\beta \in \mathbb{C}$. Esta transformación se puede expresar como una composición de transformaciones elementales. Sea entonces,

$$w_1 = \alpha z = a e^{i\theta_0} z$$

con $a \in \mathbb{R}^+$, $\theta_0 \in \mathbb{R}$ es decir se trata de una dilatación/contracción y rotación.

Luego, la transformación

$$w = w_1 + \beta$$

es una traslación en la dirección del vector asociado al complejo β .

2.4.3 Transformación de inversión

Una **inversión** es una transformación del tipo

$$w = \frac{1}{z}.$$

En el ejercicio 12 de la Sección 2.5, se estudian las imágenes de w cuando se consideran valores de z con parte real constante, con parte imaginaria constante, y con módulo y argumento constantes. Puede verse el estudio de esta transformación en [James2002].

2.4.4 Transformación bilineal, racional o de Möebius

Una transformación **bilineal, racional** o de **Möebius** es un mapeo del tipo

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

donde a, b, c y d son constantes complejas con $ad - bc \neq 0$.

Cuando $c = 0$, la condición $ad - bc \neq 0$ se convierte en $ad \neq 0$, y vemos que la transformación racional se reduce a un mapeo lineal. Cuando, $c \neq 0$, la transformación de Möebius se puede expresar como

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \frac{1}{cz + d}.$$

Luego, la transformación bilineal puede considerarse, como una composición de transformaciones lineal e inversión:

$$Z = cz + d, \quad W = \frac{1}{Z}, \quad w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} W.$$

Se puede demostrar entonces que este tipo de transformación tiene la propiedad de mapear circunferencias y rectas en circunferencias y rectas.

Podemos ampliar el dominio de definición de la transformación bilineal con el fin de definir una transformación racional T sobre el plano complejo extendido \mathbb{C}^* de manera que el punto $w = \frac{a}{c}$ sea la imagen de $z = \infty$ cuando $c \neq 0$. Consideremos entonces,

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Si pedimos que,

$$T(\infty) = \infty \text{ si } c = 0$$

y

$$T(\infty) = \frac{a}{c} \text{ y } T\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty \text{ si } c \neq 0$$

esto hace entonces que T sea continua en todo el plano complejo extendido \mathbb{C}^* .

Ejemplo 2.4.3. *Obtengamos la imagen en el plano w del círculo de ecuación $|z| \leq 2$ en el plano z bajo el mapeo bilineal $w = \frac{z-i}{z+i}$.*

Para ello, veamos primero cómo se transforma la circunferencia de ecuación $|z| = 2$. Despejando z de $w = \frac{z-i}{z+i}$ se tiene que

$$z = \frac{i+iw}{1-w}.$$

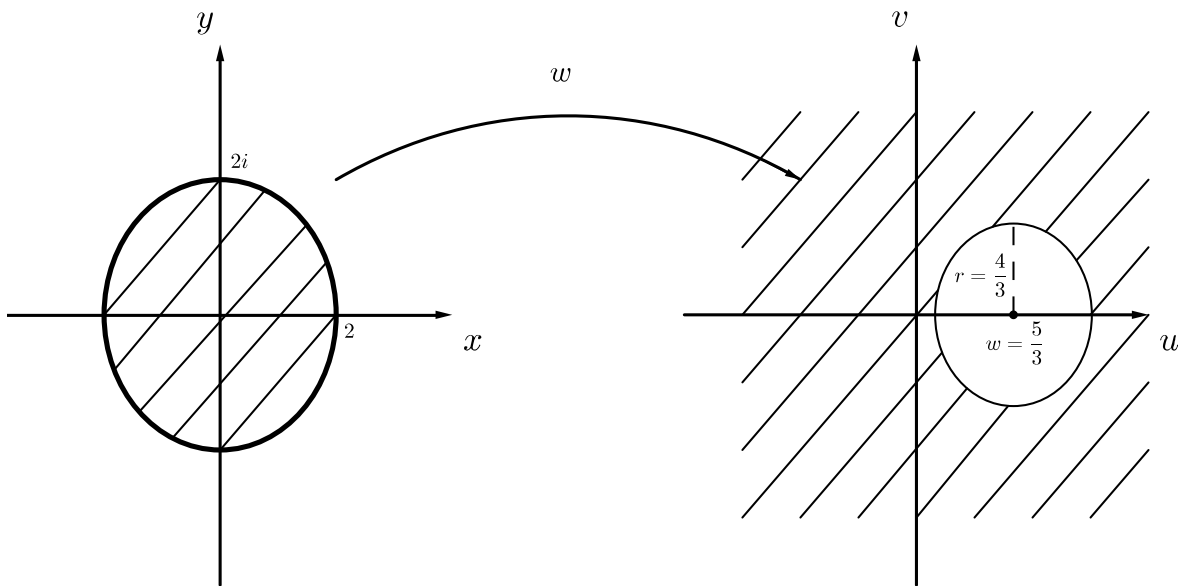


Figura 2.5: Transformación bilineal

Entonces, $|z| = \left| \frac{i+iw}{1-w} \right| = 2$ ó equivalentemente $|i+iw| = 2|1-w|$. Llamando $w = u+iv$ tenemos que

$$|-v+i(u+1)| = 2|(1-u)-iv|$$

de la que se obtiene que

$$u^2 + v^2 - \frac{10}{3}u + 1 = 0$$

o equivalentemente

$$\left(u - \frac{5}{3}\right)^2 + v^2 = \frac{16}{9}.$$

Por lo tanto, la transformación w mapea la circunferencia de ecuación $|z| = 2$ del plano z , de centro $z = 0$ y radio 2, en la circunferencia de ecuación $\left(u - \frac{5}{3}\right)^2 + v^2 = \frac{16}{9}$ del plano w , de centro $w = \frac{5}{3}$ y radio $\frac{4}{3}$.

Para determinar dónde mapea w el interior de la circunferencia, tomamos un punto interior de la circunferencia y buscamos su imagen por w .

Por ejemplo, el punto $z = 0$ tiene por imagen $T(0) = -1$ por lo que la transformación T mapea a la región que contiene a dicho punto imagen, en este caso exterior a la circunferencia del plano w de centro $w = \frac{5}{3}$ y radio $\frac{4}{3}$, como se observa en la Figura 2.5. ▲

2.5 Ejercicios propuestos

- Para cada una de las siguientes funciones f , determine su dominio de definición, las funciones parte real y parte imaginaria de $f(z)$ y obtenga, si existen, la imágenes de z_1 y z_2 .

$$(a) f(z) = z^3 - 3iz^2 + z + 1; z_1 = -3i, z_2 = -1 \quad (d) f(z) = \frac{1-z}{1+z}; z_1 = i, z_2 = 1 - 2i$$

$$(b) f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}; z_1 = -1, z_2 = 0 \quad (e) f(z) = z + \frac{1}{z}; z_1 = 1 + i, z_2 = 0$$

$$(c) f(z) = \frac{z}{\bar{z}}; z_1 = 0, z_2 = 1 + i \quad (f) f(z) = z\operatorname{Re}(z) + |z|^2; z_1 = 1 + i, z_2 = 10i$$

- Utilice las condiciones de Cauchy-Riemann para estudiar la región de derivabilidad de las siguientes funciones. Obtenga, si es posible, una expresión de la derivada.

$$(a) f(z) = z - \bar{z}$$

$$(d) f(z) = e^{|z|}$$

$$(b) f(z) = \cos |z|^2$$

$$(e) f(z) = \operatorname{Re}(z)$$

$$(c) f(z) = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

$$(f) f(z) = e^{\bar{z}}$$

3. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares

Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ una función para la cual las funciones componentes $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, es decir

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Si $x = x(r, \theta) = r \cos \theta$, $y = y(r, \theta) = r \operatorname{sen} \theta$ con $r > 0$, entonces:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = u_x \cos \theta + u_y \operatorname{sen} \theta \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = v_x \cos \theta + v_y \operatorname{sen} \theta \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -u_x r \operatorname{sen} \theta + u_y r \cos \theta \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -v_x r \operatorname{sen} \theta + v_y r \cos \theta. \quad (2.14)$$

Entonces, usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann y las ecuaciones (2.11) y (2.14) se tiene que:

$$r \frac{\partial u}{\partial r} = u_x r \cos \theta + u_y r \operatorname{sen} \theta = v_y r \cos \theta - v_x r \operatorname{sen} \theta = \frac{\partial v}{\partial \theta},$$

de donde se tiene que:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}.$$

Por otro lado, usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann y las ecuaciones (2.12) y (2.13) tenemos que:

$$-r \frac{\partial v}{\partial r} = -v_x r \cos \theta - v_y r \operatorname{sen} \theta = u_y r \cos \theta - u_x r \operatorname{sen} \theta = \frac{\partial u}{\partial \theta},$$

de donde se tiene que:

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Hemos encontrado de esta manera, las condiciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \text{ y } \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares:

(a) Demuestre que si $z = re^{i\theta}$ y $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ entonces

$$f'(z) = e^{-i\theta} (u_r(r, \theta) + iv_r(r, \theta)).$$

(b) Si $z = re^{i\theta}$, estudie la región de analiticidad de las siguientes funciones y obtenga, si es posible, una expresión para la derivada:

i. $f(z) = r^2$

ii. $g(z) = e^{-\theta} (\cos(\ln r) + i \operatorname{sen}(\ln r))$

4. Funciones armónicas

Una función real de dos variables reales $\phi = \phi(x, y)$ se dice *armónica* en un dominio D del plano real si tiene derivadas parciales continuas de primer y segundo orden en dicho dominio y si satisface la ecuación de Laplace

$$\phi_{xx}(x, y) + \phi_{yy}(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in D.$$

Consideremos una función compleja de variable compleja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analítica en el dominio D del plano complejo.

Luego, las funciones componentes de f cumplen con las ecuaciones de Cauchy-Riemann sobre D :

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

Derivando a ambos miembros de estas ecuaciones respecto de x , se tiene:

$$u_{xx} = v_{yx}, \quad u_{yx} = -v_{xx}.$$

Del mismo modo, derivando respecto de y :

$$u_{xy} = v_{yy}, \quad u_{yy} = -v_{xy}.$$

Como f es analítica en D , las derivadas parciales de segundo orden de u y v son continuas en D (esto se tratará en el Capítulo 4 Series y Residuos) por lo que se tiene que $u_{xy} = u_{yx}$ y $v_{xy} = v_{yx}$. Luego se tiene que:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0,$$

es decir u y v son armónicas en D .

Hemos demostrado el siguiente teorema: *Si una función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en un dominio D del plano complejo, entonces sus funciones componentes u y v son armónicas en D .*

Si dos funciones reales de dos variables reales $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$ son armónicas en un dominio del plano real D y sus derivadas parciales de primer orden satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en D , se dice que v es *armónica conjugada de u* .

Es evidente que si una función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en un dominio del plano complejo D , entonces v es armónica conjugada de u . Recíprocamente, si v es una armónica conjugada de u en un dominio D , la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en D .

De esto último se tiene el siguiente teorema: *Una función compleja de variable compleja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en un dominio D del plano complejo si y sólo si es una armónica conjugada de u .*

- (a) Verifique que la función dada es armónica en su dominio. Halle una función u o v , según corresponda, de manera que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ resulte analítica. Expresé a $f(z)$ en términos de la variable compleja z .
- i. $v(x, y) = 2x - 2xy$ con la condición $u(0, 0) = 0$
 - ii. $u(x, y) = e^{-x}(x \operatorname{sen} y - y \operatorname{cos} y)$ con la condición $v(0, 0) = 0$
- (b) Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ una función analítica en un dominio D . Demuestre que las familias de curvas de ecuaciones $u(x, y) = c$ y $v(x, y) = k$, donde c y k son constantes reales arbitrarias, son ortogonales (es decir, cada miembro de una familia tienen tangentes perpendiculares en su punto de intersección con cada miembro de la otra familia).
- (c) Para cada una de las familias de curvas de ecuaciones dadas, halle las trayectorias ortogonales:
- i. $x^3y - xy^3 = c$
 - ii. $e^{-x}(x \operatorname{sen} y - y \operatorname{cos} y) = c$

5. Halle todos los valores de $z \in \mathbb{C}$ tales que:

- | | |
|---------------------------|-------------------------------|
| (a) $e^z + 2 = 0$ | (c) $e^{2z-1} = 1$ |
| (b) $e^z = 1 + \sqrt{3}i$ | (d) $\log z = \frac{\pi}{2}i$ |

6. Pruebe que:

- | | |
|--|--|
| (a) $\log(-ei) = 1 - \frac{\pi}{2}i$ | (c) $\operatorname{Log}(e) = 1 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$ |
| (b) $\log(1 - i) = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4}i$ | (d) $\operatorname{Log}(-1 + \sqrt{3}i) = \ln 2 + 2(n + \frac{1}{3})\pi i, k \in \mathbb{Z}$ |

7. Sea la función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} / f(z) = \sqrt{z}$. Pruebe que f es analítica en:

$$\mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \leq 0, \operatorname{Im}(z) = 0\}.$$

Demuestre además que la derivada está dada por $f'(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}}$.

8. Demuestre el Teorema 2.3.2.

9. Las funciones seno y coseno hiperbólicos

Sea $z \in \mathbb{C}$, se definen la función seno hiperbólico como:

$$\operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

y la función coseno hiperbólico como

$$\operatorname{cosh} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

(a) Explique por qué las funciones $\operatorname{senh} z$ y $\operatorname{cosh} z$ son enteras. Pruebe que:

$$\frac{d}{dz} (\operatorname{senh} z) = \operatorname{cosh} z \text{ y } \frac{d}{dz} (\operatorname{cosh} z) = \operatorname{senh} z.$$

(b) Demuestre las siguientes proposiciones:

- i. $\operatorname{senh} z$ y $\operatorname{cosh} z$ son periódicas de período fundamental $2\pi i$.
- ii. $\operatorname{cosh}^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$, $\operatorname{cosh}(-z) = \operatorname{cosh} z$, $\operatorname{senh}(-z) = -\operatorname{senh} z$ para cualquier $z \in \mathbb{C}$.
- iii. $\operatorname{senh} z = 0 \Leftrightarrow z = n\pi i$ con $n \in \mathbb{Z}$
- iv. $\operatorname{cosh} z = 0 \Leftrightarrow z = \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) i$ con $n \in \mathbb{Z}$
- v. $\operatorname{senh} z = -i \operatorname{sen}(iz)$, $\operatorname{cosh} z = \cos(iz)$ para cualquier $z \in \mathbb{C}$.

10. Determine la región de analiticidad de las siguientes funciones. Obtenga una expresión para f' .

- | | | |
|------------------------------|-------------------------------------|--|
| (a) $f(z) = z^3 - 2iz^2 + i$ | (c) $f(z) = \frac{3z + i}{z^3 - 1}$ | (e) $f(z) = \sqrt{z - 1 + 3i}$ |
| (b) $f(z) = (z^2 + iz)^3$ | (d) $f(z) = 3e^{\frac{1}{z}} - i$ | (f) $f(z) = \frac{\log(z + 4)}{z^2 + 1}$ |

11. La Regla de L'Hopital

Sean f y g funciones analíticas en z_0 tal que $f(z_0) = g(z_0) = 0$. Si existe $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$, entonces

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Calcule, si es posible:

- | | | |
|--|--|---|
| (a) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{\operatorname{sen} z}$ | (b) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - e^z}{z^2}$ | (c) $\lim_{z \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{sen} z}{z - \pi}$ |
|--|--|---|

12. Halle las imágenes por la función f de las curvas de ecuaciones $\operatorname{Re}(z) = k$, $\operatorname{Im}(z) = c$, $|z| = r$ y $\arg(z) = \alpha$, donde k, c, r y α son constantes reales, siendo:

- | | | |
|------------------|------------------|--------------------------|
| (a) $f(z) = 2iz$ | (b) $f(z) = z^2$ | (c) $f(z) = \frac{1}{z}$ |
|------------------|------------------|--------------------------|

13. Sea el mapeo lineal $w = \alpha z + \beta$ donde α y β son constantes complejas, el cual transforma el punto $z = 1 + i$ en el punto $w = i$, y el punto $z = 1 - i$ en el punto $w = -1$.

- (a) Halle los valores de α y β .
Con los valores de α y β obtenidos en (a):
- (b) Encuentre la región del plano w correspondiente al semiplano derecho $\operatorname{Re}(z) \geq 0$ en el plano z .
- (c) Encuentre la región en el plano w correspondiente al círculo unitario $|z| < 1$ en el plano z .

14. Halle la imagen de la transformación $w = \sqrt{z}$ de las curvas de ecuaciones $\arg(z) = c$ y $|z| = k$ con $c, k \in \mathbb{R}$.
15. Determine las imágenes de las curvas de ecuaciones $\operatorname{Re}(z) = k$ y $\operatorname{Im}(z) = c$, por la transformación $w = e^z$.
16. En cada uno de los siguientes casos, determine la imagen de la región S por la transformación w dada. Represente geoméricamente la región S y su imagen.
- (a) $w = (1 + i)z + 2 + 3i$, $S = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 1, 1 < \operatorname{Im}(z) < 3\}$.
- (b) $w = z^2$, $S = \left\{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{4} < \arg(z) \leq \frac{\pi}{2}\right\}$
- (c) $w = \frac{1}{z}$, $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im}(z) \leq 2\}$
- (d) $w = e^z$, $S = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re}(z)| \leq 1, 0 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 2\}$
- (e) $w = \log(z)$, $S = \left\{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < 4, \frac{\pi}{4} < \arg(z) < \frac{\pi}{2}\right\}$
17. Halle una transformación bilineal la cual aplica los puntos $z_1 = 0$, $z_2 = -i$ y $z_3 = -1$ en los puntos $w_1 = i$, $w_2 = 1$ y $w_3 = 0$, respectivamente.
18. Sea la transformación bilineal $w = \frac{z-1}{z+1}$. Halle las imágenes en el plano uv de las rectas de ecuaciones $\operatorname{Re}(z) = c$ y $\operatorname{Im}(z) = k$ del plano xy .
19. Halle la imagen de la región $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\}$ por la transformación $w = \frac{z-i}{z+i}$.

Capítulo 3

Integración compleja

3.1 Funciones complejas de variable real

En esta sección estamos interesados en estudiar algunas propiedades de funciones a valores complejos pero de una variable real, es decir funciones del tipo

$$w : A \rightarrow \mathbb{C}$$

tal que

$$w(t) = x(t) + iy(t)$$

llamada **función compleja de variable real**, donde A es un subconjunto no vacío de \mathbb{R} y $x = x(t)$ e $y = y(t)$ son funciones reales de una variable real t .

Por ejemplo, la función dada por $w(t) = \ln t + it^2$ tiene por dominio \mathbb{R}^+ . En este caso, $x(t) = \ln t$ e $y(t) = t^2$. La imagen de $t = 1$ por la función w es $w(1) = i$.

Límite, continuidad y derivada de una función compleja de variable real

Se dice que la función compleja de variable real $w(t) = x(t) + iy(t)$,

- tiene **límite** en t_0 si $x(t)$ e $y(t)$ tienen límite en t_0 . Además,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} w(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) + i \lim_{t \rightarrow t_0} y(t)$$

- es **continua** en t_0 si $x(t)$ e $y(t)$ son continuas en t_0 .
- es **continua en un intervalo cerrado** si $x(t)$ e $y(t)$ son continuas en dicho intervalo cerrado.
- es **derivable** en t_0 si $x(t)$ e $y(t)$ son derivables en t_0 . Además,

$$w'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0).$$

Observación 3.1.1. *Algunos resultados que serán de utilidad son las siguientes fórmulas de derivación y se deja su demostración como ejercicio:*

- Si $w_1 = w_1(t)$ y $w_2 = w_2(t)$ son funciones complejas derivables en la variable real t , y c es una constante compleja, entonces

$$\begin{aligned}
 - (w_1 + w_2)'(t) &= w_1'(t) + w_2'(t) & - \left(\frac{w_1}{w_2}\right)'(t) &= \frac{w_1'(t)w_2(t) - w_1(t)w_2'(t)}{w_2^2(t)} \\
 - (w_1w_2)'(t) &= w_1'(t)w_2(t) + w_1(t)w_2'(t) & - (cw_1)'(t) &= cw_1'(t)
 \end{aligned}$$

- Si c es una constante compleja entonces, $\frac{d}{dt}[e^{ct}] = ce^{ct}$.

Definición (Función compleja de variable real integrable). Se dice que la función $w(t) = x(t) + iy(t)$ es integrable en el intervalo $[a, b]$ si $x = x(t)$ e $y = y(t)$ son funciones seccionalmente continuas en $[a, b]$. Además,

$$\int_a^b w(t) dt = \int_a^b x(t) dt + i \int_a^b y(t) dt.$$

Ejemplo 3.1.1. $\int_0^1 (1 + it)^2 dt = \int_0^1 (1 - t^2) dt + i \int_0^1 2t dt = \frac{2}{3} + i. \blacktriangle$

Teorema 3.1.1. Sean w, w_1 y w_2 funciones integrables en $[a, b]$ y α una constante compleja. Entonces se verifican las siguientes propiedades:

1. $\int_a^b [w_1(t) + w_2(t)] dt = \int_a^b w_1(t) dt + \int_a^b w_2(t) dt$

2. $\int_a^b \alpha w(t) dt = \alpha \int_a^b w(t) dt$

3. $\int_a^b w(t) dt = - \int_b^a w(t) dt$

4. $\int_a^b w(t) dt = \int_a^c w(t) dt + \int_c^b w(t) dt$

5. $\left| \int_a^b w(t) dt \right| \leq \int_a^b |w(t)| dt$

6. (Regla de Barrow) Si $W'(t) = w(t)$ en $[a, b]$, es decir W es una primitiva de w en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b w(t) dt = W(b) - W(a).$$

Demostración. Sólo probaremos aquí la propiedad (6). Supongamos que $w(t) = x(t) + iy(t)$ y $W(t) = X(t) + iY(t)$ son continuas en $[a, b]$.

Si $W'(t) = w(t)$ para $t \in [a, b]$, entonces $X'(t) = x(t)$ y $Y'(t) = y(t)$. Luego,

$$\begin{aligned} \int_a^b w(t) dt &= \int_a^b x(t) dt + i \int_a^b y(t) dt = [X(b) - X(a)] + i[Y(b) - Y(a)] = \\ &= [X(b) + iY(b)] - [X(a) + iY(a)] = W(b) - W(a). \end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.1.2. $\int_0^\pi e^{2it} dt = -\frac{1}{2}ie^{2it} \Big|_0^\pi = -\frac{1}{2}i(e^{2\pi i} - 1) = 0. \blacktriangle$

Curvas en el plano complejo

Sea la función compleja de variable real continua

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in [a, b].$$

El lugar geométrico de los puntos del plano complejo

$$\{z = (x, y) : x = x(t), y = y(t), t \in [a, b]\}$$

es la gráfica de $z = z(t)$ y constituye un **arco** o **curva** C en el plano complejo.

La curva C tiene una orientación natural, que es la dirección en la que cada punto $z(t)$ se mueve a lo largo de la curva cuando t crece desde $t = a$ hasta $t = b$. En este sentido $z(a) = (x(a), y(a))$ es el punto inicial de C y $z(b) = (x(b), y(b))$ es el punto final como se observa en la Figura 3.1.

La curva C se puede representar mediante sus ecuaciones paramétricas,

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b].$$

Ejemplo 3.1.3. Consideremos la función definida por

$$z(t) = \begin{cases} t + it & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ t + i & \text{si } 1 < t \leq 2 \end{cases}.$$

La gráfica de esta función representa una curva C en el plano complejo formada por dos segmentos de rectas de ecuaciones paramétricas

$$C_1 : \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad \text{si } t \in [0, 1] \quad \text{y} \quad C_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{si } t \in (1, 2]$$

como se observa en la Figura 3.2.▲

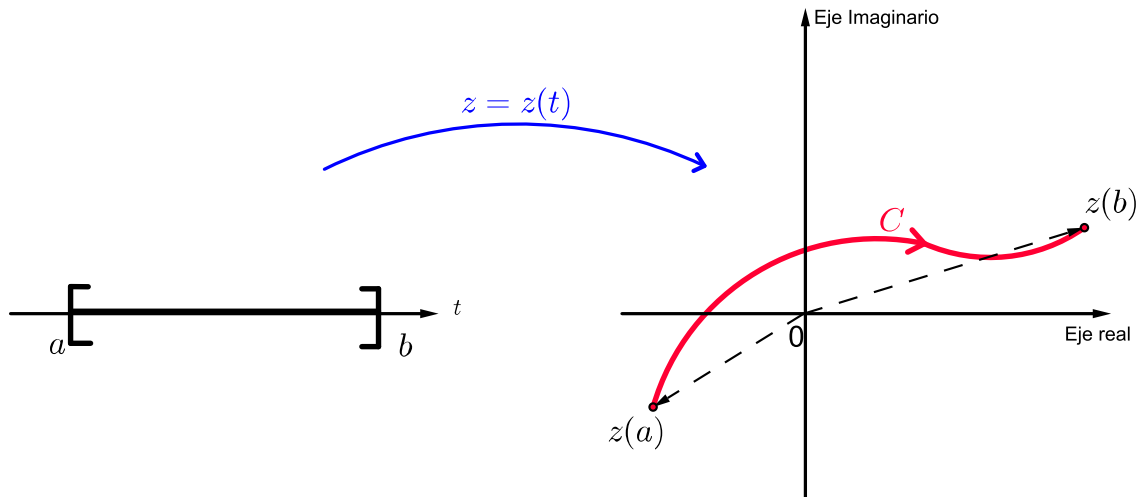


Figura 3.1: Curva en el plano complejo

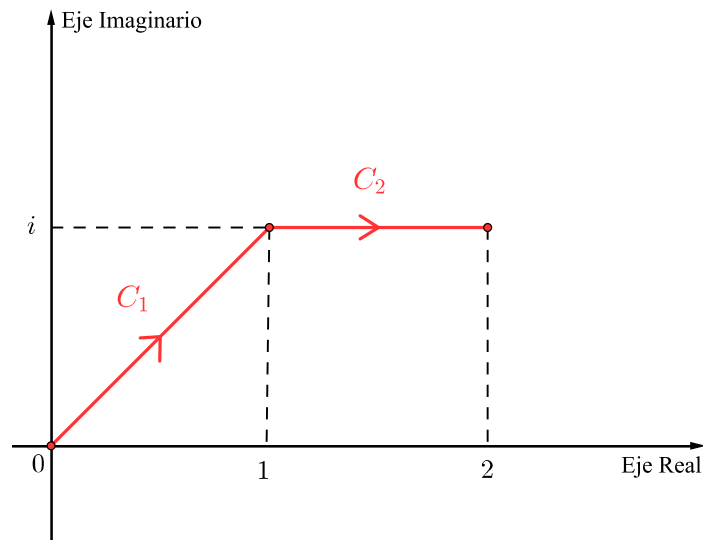


Figura 3.2: Curva $C = C_1 \cup C_2$

Ejemplo 3.1.4. Para representar gráficamente la curva C de ecuación $z(\theta) = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi)$, expresémosla en la forma $z(\theta) = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$ donde $\theta \in [0, 2\pi)$ por lo que la curva C tiene por ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \operatorname{sen} \theta \end{cases}, \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

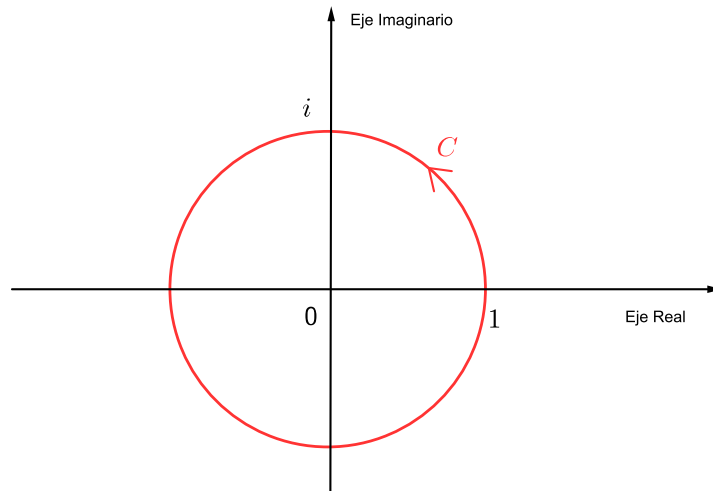


Figura 3.3: Circunferencia C de centro $z = 0$ y radio 1

y representan una circunferencia de centro $z = 0$ y radio 1 como se ve en la Figura 3.3. ▲

Definición (Curvas simple, cerrada, suave y seccionalmente suave). Sea C una curva en el plano complejo de ecuación $z(t) = x(t) + iy(t)$ con $t \in [a, b]$. Se dice que

1. C es una curva o arco simple o de Jordan si no se corta a sí misma, es decir si para todo t_1 y t_2 en $[a, b]$ tal que $t_1 \neq t_2$ entonces $z(t_1) \neq z(t_2)$.
2. C es una curva cerrada simple si C es un arco simple excepto por el hecho de que $z(a) = z(b)$.
3. C es una curva suave si z' es continua en $[a, b]$ y $z'(t) \neq 0$ para todo $t \in (a, b)$.
4. C es una curva suave a trozos o seccionalmente suave si es una curva que consiste en un número finito de arcos suaves unidos por sus extremos.

Ejemplo 3.1.5. La curva C del Ejemplo 3.1.4 es suave, cerrada y simple. ▲

Ejemplo 3.1.6. La curva C del Ejemplo 3.1.3 es seccionalmente suave y simple. ▲

Definición (Curvas orientadas). Una curva cerrada C se dice orientada positivamente o en sentido positivo si su orientación es contraria a la de las agujas de reloj. En caso contrario, se dice que la curva cerrada C es orientada negativamente o en sentido negativo.

Ejemplo 3.1.7. La curva del Ejemplo 3.1.4 es orientada positivamente. ▲

Observación 3.1.2. Sea la función continua $z(t) = x(t) + iy(t)$ con $t \in [a, b]$ cuya representación gráfica es una curva C en el plano complejo. Se puede probar que:

1. La representación paramétrica usada para la curva C no es única.
2. Si C es seccionalmente suave, entonces $|z'(t)| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$ es integrable en $[a, b]$. Luego,

$$\int_a^b |z'(t)| dt = \int_a^b ds = \text{long}(C).$$

3. La $\text{long}(C)$ dada por la integral del ítem (2) es invariante bajo ciertos cambios de representación de dicha curva C .

3.2 La integral compleja

Definición (Integral de una función compleja de variable compleja). Sean C una curva seccionalmente suave de ecuación $z = z(t)$ con $t \in [a, b]$, que se extiende de $z_1 = z(a)$ hasta $z_2 = z(b)$, y f una función compleja de variable compleja continua sobre C . Se llama integral de línea o de contorno de f a lo largo de C a

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt.$$

Ejemplo 3.2.1. Calculemos $\int_C \bar{z} dz$ siendo C la semicircunferencia de ecuación $|z| = 2$, desde el punto $-2i$ al punto $2i$, recorrida en sentido positivo. Para ello, expresemos a C como $z(t) = 2e^{it}$ donde $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Luego, $z'(t) = 2ie^{it}$. Si $f(z) = \bar{z}$ entonces $f(z(t)) = f(2e^{it}) = 2e^{-it}$, luego

$$\int_C \bar{z} dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2e^{-it} 2ie^{it} dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4i dt = 4\pi i. \blacktriangle$$

Teorema 3.2.1. Sean C una curva seccionalmente suave de ecuación $z = z(t)$ con $t \in [a, b]$ y f, g funciones complejas de variable compleja continuas sobre C . Entonces se verifican las siguientes propiedades:

1. $k \in \mathbb{C} \Rightarrow \int_C kf(z) dz = k \int_C f(z) dz.$
2. $\int_C [f(z) + g(z)] dz = \int_C f(z) dz + \int_C g(z) dz.$
3. $\int_{-C} f(z) dz = - \int_C f(z) dz$ donde $-C$ es una curva con el mismo conjunto de puntos de C pero recorrido en sentido contrario al de C .

4. Si C consta de una curva C_1 seguida de una curva C_2 siendo el punto inicial de C_2 , el punto final de C_1 entonces $\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz$.
5. Si $|f(z)| \leq M$ entonces $\left| \int_C f(z) dz \right| \leq M \text{ long}(C)$, donde $M > 0$.

Demostración. 1. y 2. son inmediatas a partir de la definición del integral de una función compleja de variable real y del Teorema 3.1.1.

3. Sea C la curva de ecuación $z = z(t)$ con $t \in [a, b]$. Luego,

$$-C : z = z(-t) \quad \text{con } -b \leq t \leq -a.$$

Entonces mediante la transformación $\tau = -t$ se tiene,

$$\int_{-C} f(z) dz = \int_{-b}^{-a} f(z(-t)) [-z'(-t)] dt = - \int_a^b f(z(\tau)) z'(\tau) d\tau = - \int_C f(z) dz.$$

4. Supongamos que C consta de un contorno C_1 desde z_1 hasta z_3 , seguido de un contorno C_2 desde z_3 hasta z_2 , siendo el punto inicial de C_2 el punto final de C_1 . Entonces existe un número real c , con $z_3 = z(c)$ tal que C_1 viene representada por $z = z(t)$ con $a \leq t \leq c$ y C_2 por $z = z(t)$ con $c \leq t \leq b$. Como

$$\int_C f(z) dz = \int_a^c f(z(t)) z'(t) dt + \int_c^b f(z(t)) z'(t) dt,$$

es evidente que

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz.$$

5. Como por hipótesis f es continua sobre C y dado que C es una curva seccionalmente suave, entonces $z(t)$ es continua y su derivada $z'(t)$ es seccionalmente continua. Luego, se tiene que la función real $|f(z(t))|$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, por lo que existe $M > 0$ tal que $|f(z(t))| \leq M$ para cualquier $t \in [a, b]$. Entonces,

$$\begin{aligned} \left| \int_C f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(z(t))| |z'(t)| dt \\ &\leq M \int_a^b |z'(t)| dt = M \text{ long}(C). \end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.2.2. Calculemos $\int_C f(z) dz$ donde $f(z) = y - x - i3x^2$ con $z = x + iy$ siendo

1. C el segmento de recta que va desde $z_1 = 0$ hasta $z_2 = i$ seguido del segmento de recta desde z_2 hasta $z_3 = 1 + i$.

A la curva C la podemos descomponer en dos curvas C_1 y C_2 de ecuaciones,

$$z = ti, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \text{y} \quad z = t + i, \quad 0 \leq t \leq 1$$

respectivamente como se observa en la Figura 3.4.

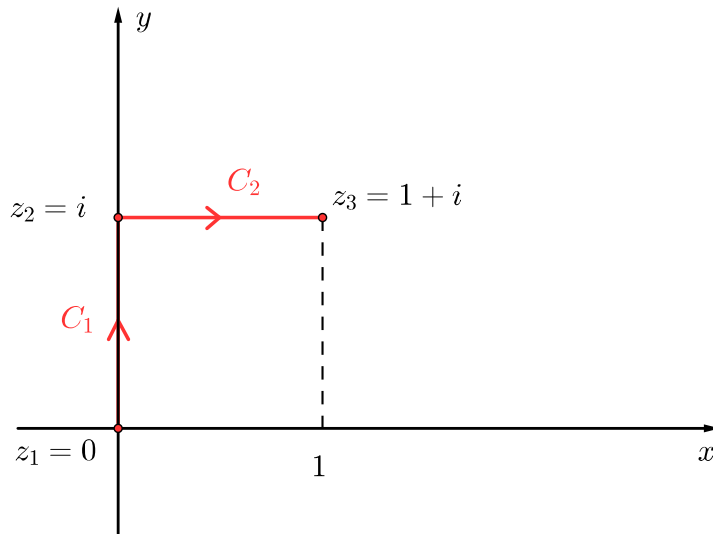


Figura 3.4: Curva $C = C_1 \cup C_2$

Entonces,

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz = I_1 + I_2.$$

Para calcular I_1 , se tiene que $f(z(t)) = t$ y $z'(t) = i$ con $t \in [0, 1]$, entonces

$$I_1 = \int_{C_1} f(z) dz = \int_0^1 ti dt = \frac{1}{2}i.$$

Para obtener I_2 , $f(z(t)) = 1 - t - 3it^2$ y $z'(t) = 1$ con $t \in [0, 1]$. Luego,

$$I_2 = \int_{C_2} f(z) dz = \int_0^1 (1 - t - 3it^2) dt = \frac{1}{2} - i.$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\int_C f(z) dz = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i. \blacktriangle$$

2. C el segmento que va desde $z_1 = 0$ hasta $z_2 = 1 + i$.

La curva C , representada en la Figura 3.5, se puede expresar como $z(t) = t + ti$ con $t \in [0, 1]$.

Luego $f(z(t)) = -3it^2$ y $z'(t) = 1 + i$. Entonces,

$$\int_C f(z) dz = \int_0^1 -3it^2(1 + i) dt = 1 - i. \blacktriangle$$

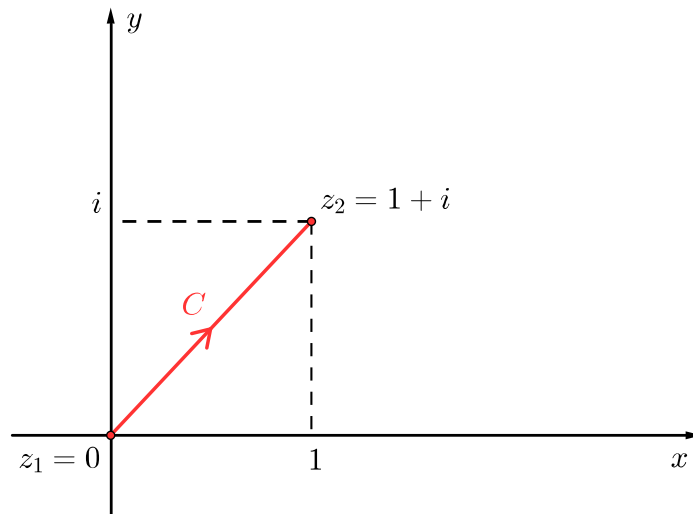


Figura 3.5: Curva C

Observación 3.2.1. Aunque el valor de una integral de contorno de una función $w = f(z)$ desde un punto z_1 hasta un punto z_2 depende, por lo general, del camino elegido (véase Ejemplo 3.2.2), hay ciertas funciones cuyas integrales son independientes del camino. El siguiente teorema es útil para determinar si la integración es independiente del camino, pero para ello, veamos primeramente la siguiente definición.

Definición (Primitiva). Sea f una función compleja de variable compleja continua en un dominio Ω . Se dice que la función F es una primitiva de f en Ω si $F'(z) = f(z)$ para cualquier $z \in \Omega$.

Observación 3.2.2. Nótese que una primitiva es, necesariamente, una función analítica.

Teorema 3.2.2. Sea f una función compleja de variable compleja continua en un dominio Ω . Entonces las siguientes proposiciones son todas equivalentes:

1. f tiene una primitiva F en Ω .
2. las integrales de f a lo largo de contornos seccionalmente suaves contenidos en Ω que unen dos puntos fijos z_1 y z_2 tienen todas el mismo valor.
3. las integrales de f a lo largo de cualquier contorno cerrado seccionalmente suave contenido en Ω valen 0.

Demostración. Sólo demostraremos que 1) implica 2) en este teorema. La importancia de ello es que descubriremos una extensión del teorema fundamental del cálculo (la regla de Barrow) que simplifica la evaluación de muchas integrales de contorno. Esta extensión incorpora la noción de primitiva de una función continua en un dominio.

Supongamos entonces que la función continua f admite una primitiva F en el dominio Ω , la cual es analítica en Ω . Supongamos además que C es un arco suave desde z_1 hasta z_2 , contenido en Ω de representación paramétrica $z = z(t)$ con $t \in [a, b]$. Luego, la función

$$w(t) = F(z(t))$$

es derivable en t . Además, sean $F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ y $z(t) = x(t) + iy(t)$. Entonces,

$$w'(t) = u_x x'(t) + u_y y'(t) + iv_x x'(t) + iv_y y'(t),$$

y usando las condiciones de Cauchy-Riemann se obtiene,

$$w'(t) = (u_x - iu_y)(x'(t) + iy'(t))$$

o equivalentemente,

$$w'(t) = F'(z(t))z'(t) = f(z(t))z'(t)$$

donde $a \leq t \leq b$. Por la propiedad 6 del Teorema 3.1.1, se tiene que

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t))z'(t) dt = F(z(t))\Big|_a^b = F(z(b)) - F(z(a)).$$

Como $z(b) = z_2$ y $z(a) = z_1$, el valor de esta integral de contorno es $F(z_2) - F(z_1)$; y este valor es ciertamente independiente del contorno C , en tanto esté contenido en Ω y una z_1 con z_2 . Es decir,

$$\int_C f(z) dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z)\Big|_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1).$$

□

Ejemplo 3.2.3. Si queremos calcular $\int_C z^2 dz$ para toda curva seccionalmente suave C desde el punto $z = 0$ hasta el punto $z = 1 + i$, observemos que la función $f(z) = z^2$ admite como primitiva a $F(z) = \frac{1}{3}z^3$ (que es continua), entonces la integral $\int_C z^2 dz$ es independiente de la trayectoria. Luego,

$$\int_C z^2 dz = \int_0^{1+i} z^2 dz = \frac{1}{3}z^3\Big|_0^{1+i} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i. \blacktriangle$$

3.2.1 El Teorema de Cauchy-Goursat

En el Teorema 3.2.2 de la Sección 3.2. vimos que si una función f continua admite primitiva en un dominio Ω , la integral de f a lo largo de cualquier curva cerrada simple seccionalmente suave contenida en Ω vale 0. Ahora presentaremos otro teorema que da condiciones sobre f

que garantizan que el valor de la integral de f a lo largo de cualquier contorno cerrado simple seccionalmente suave es cero.

Antes de demostrar este teorema, recordemos lo que establece el **Teorema de Green**:

Sea C una curva simple cerrada seccionalmente suave orientada positivamente del plano, y sea D la región interior a C . Si las funciones reales de dos variables reales $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$, P_y y Q_x son continuas en D y sobre la frontera C , entonces

$$\oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D (Q_x - P_y) dA.$$

Ahora estamos en condiciones de enunciar y probar uno de los teoremas más importantes en la teoría de funciones de variable compleja.

Teorema 3.2.3 (Teorema de Cauchy). *Si f es una función compleja de variable compleja analítica con derivada f' continua en todos los puntos dentro y sobre una curva C cerrada simple seccionalmente suave y positivamente orientada, entonces*

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

Demostración. Sea C una curva simple cerrada seccionalmente suave y orientada positivamente de ecuación,

$$z = z(t) = x(t) + iy(t)$$

donde $t \in [a, b]$. Sea además, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ una función analítica dentro y sobre C con derivada f' continua dentro y sobre C donde al interior de C lo denotamos por D .

Entonces dado que

$$\begin{aligned} f(z)dz &= (u + iv)z'(t)dt = (u + iv)(x'dt + iy'dt) = (u + iv)(dx + idy) = \\ &= (udx - vdy) + i(vdx + udy), \end{aligned}$$

se tiene que

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C (u dx - v dy) + i \oint_C (v dx + u dy) = J_1 + iJ_2.$$

Además, dado que f' es continua, las funciones reales $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, u_x y v_x son continuas dentro y sobre C por lo que aplicando el Teorema de Green y las condiciones de Cauchy-Riemman se tiene que,

$$J_1 = \iint_D (-v_x - u_y) dA = \iint_D 0 dA = 0,$$

y

$$J_2 = \iint_D (u_x - v_y) dA = \iint_D 0 dA = 0.$$

Luego, se tiene que

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

□

Observación 3.2.3. *Nótese que una vez establecido que el valor de la integral es cero, la orientación de C es irrelevante. Es decir, el Teorema 3.2.3 es válido también si se toma a C con orientación negativa pues*

$$\oint_C f(z) dz = - \oint_{-C} f(z) dz = 0$$

lo que implica que

$$\oint_{-C} f(z) dz = 0.$$

Goursat fue el primero en demostrar que la condición de continuidad sobre f' se puede omitir. Se tiene entonces, la versión modificada del Teorema de Cauchy, conocida como el Teorema de Cauchy-Goursat.

Teorema 3.2.4 (Teorema de Cauchy-Goursat). *Si f es una función analítica en un conjunto abierto y simplemente conexo Ω y C es una curva simple cerrada y seccionalmente suave contenida en Ω , entonces*

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

Una consecuencia inmediata del Teorema de Cauchy-Goursat y del Teorema 3.2.2. es el siguiente resultado:

Corolario 3.2.1. *Si f es una función analítica en un dominio simplemente conexo Ω entonces f tiene primitiva en Ω .*

Demostración. Si f es una función analítica en un dominio simplemente conexo Ω , entonces por el teorema de Cauchy-Goursat

$$\oint_C f(z) dz = 0,$$

para cualquier curva C simple cerrada y seccionalmente suave contenida en Ω . Por el Teorema 3.2.2 de equivalencias se tiene que (3) \Rightarrow (1) de lo que resulta que f tiene una primitiva en Ω . □

Ejemplo 3.2.4. *Dado que $f(z) = \operatorname{sen} z$ es entera, entonces tiene primitiva en \mathbb{C} . Luego, $F(z) = -\cos z$ es una primitiva de f en \mathbb{C} . ▲*

El teorema de Cauchy-Goursat se puede extender de modo que admita integrales a lo largo de curvas en un dominio múltiplemente conexo.

Teorema 3.2.5. Sean C_1 una curva simple cerrada seccionalmente suave orientada positivamente y C_2 otra curva simple cerrada seccionalmente suave orientada negativamente interior a C_1 . Si f es una función analítica en la región limitada entre y sobre ambas curvas, entonces

$$\oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz = 0.$$

Demostración. Sea C la curva cerrada simple seccionalmente suave constituida por C_1 , seguida de Γ_1 , luego de C_2 y por último de Γ_2 , como se observa en la Figura 3.6.

Dado que f es analítica sobre C y en la región delimitada por C , entonces por el Teorema de Cauchy-Goursat se tiene que $\oint_C f(z) dz = 0$. Pero además,

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{\Gamma_1} f(z) dz + \oint_{\Gamma_2} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz = 0. \quad (3.1)$$

Como $\Gamma_1 = -\Gamma_2$, entonces se tiene de (3.1) que

$$\oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz = 0.$$

□

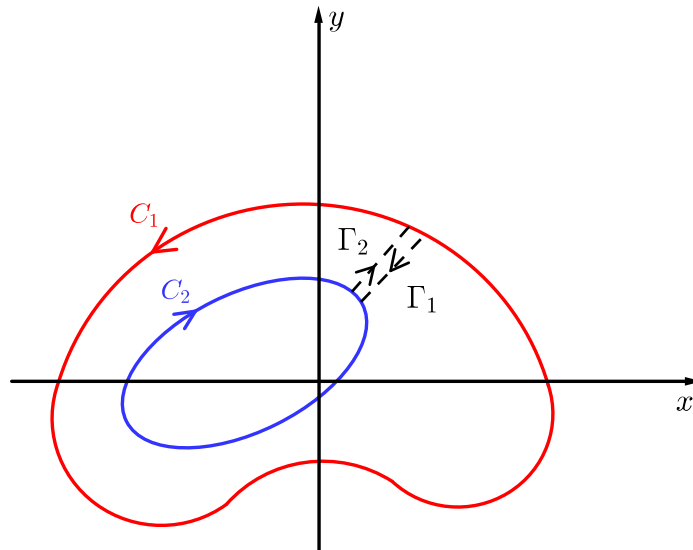


Figura 3.6: Curva C constituida por C_1 , seguida de Γ_1 , luego de C_2 y por Γ_2

Ejemplo 3.2.5. Para obtener el valor de la integral

$$\oint_C \frac{dz}{z(z+3)}$$

donde C , como se observa en la Figura 3.7 consta de la circunferencia C_1 de ecuación $|z| = 2$ con orientación positiva, junto con la circunferencia C_2 de ecuación $|z| = 1$ recorrida en sentido negativo, observemos que la función dada por

$$f(z) = \frac{1}{z(z+3)}$$

es analítica en la región limitada por ambas curvas y sobre dichas curvas, entonces

$$\oint_C \frac{dz}{z(z+3)} = 0. \blacktriangle$$

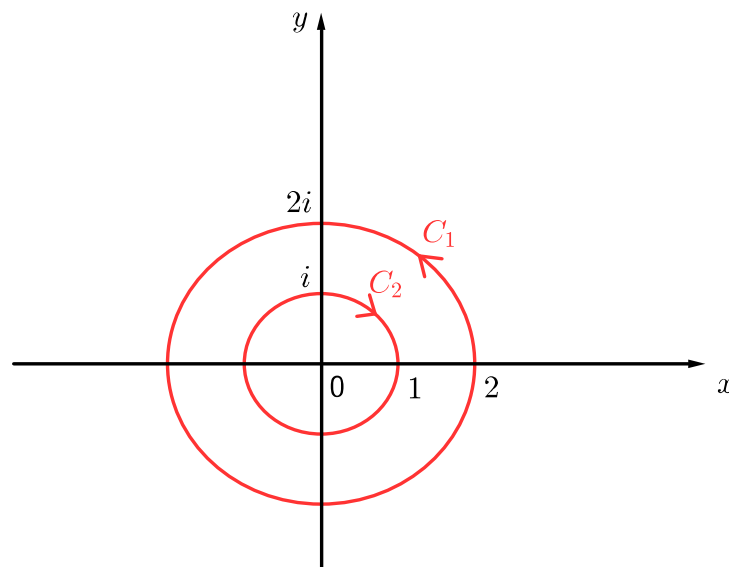


Figura 3.7: Curva C constituida por $C_1 : |z| = 1$ y $C_2 : |z| = 2$

Una consecuencia importante del Teorema 3.2.5 es el siguiente corolario:

Corolario 3.2.2 (Principio de deformación de caminos). Sean C_1 y C_2 dos curvas simples cerradas seccionalmente suaves recorridas positivamente donde C_2 es interior a C_1 . Si la función f es analítica en la región delimitada por las curvas C_1 y C_2 y sobre las mismas, entonces

$$\oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz.$$

Demostración. Sean C_1 y C_2 curvas cerradas simples seccionalmente suaves con orientación positiva donde C_2 es interior a C_1 , como se observa en la Figura 3.8.

Entonces, por el Teorema 3.2.5 se tiene que

$$\oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{-C_2} f(z) dz = 0$$

o equivalentemente

$$\oint_{C_1} f(z) dz = - \oint_{-C_2} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz.$$

□

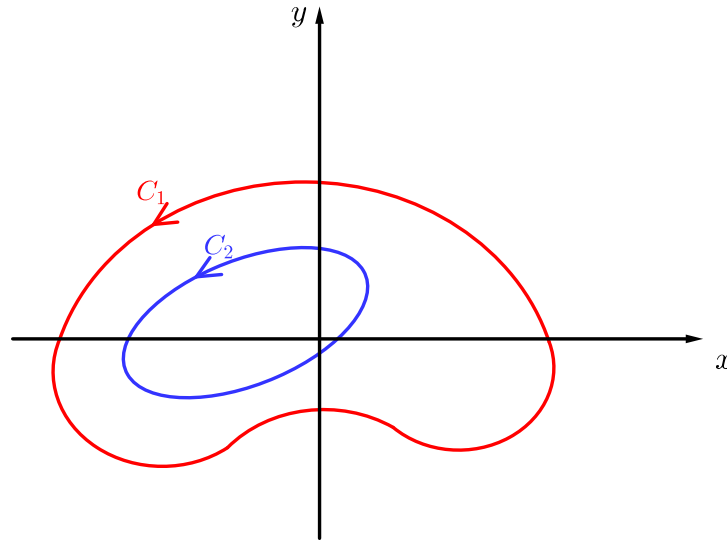


Figura 3.8: Curvas C_1 y C_2 orientadas positivamente

Observación 3.2.4. *El principio de deformación de caminos puede ser enunciado de la siguiente manera:*

“Si C_1 se deforma continuamente en C_2 pasando siempre por puntos en los que f es analítica, el valor de la integral de f sobre C_1 es igual al valor de la integral de f sobre C_2 ”

Ejemplo 3.2.6. *Calculemos $\oint_C \frac{dz}{z}$ siendo C cualquier curva simple cerrada seccionalmente suave orientada en forma positiva y que contenga a $z_0 = 0$ en su interior.*

Para ello, consideremos la circunferencia Γ de ecuación $z = Re^{i\theta}$ con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $R > 0$ de tal forma que contenga en su interior a la curva C como se puede observar en la Figura 3.9. Entonces, por el principio de deformación de caminos se tiene

$$\oint_C \frac{dz}{z} = \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{i\theta}} Rie^{i\theta} d\theta = 2\pi i. \blacktriangle$$

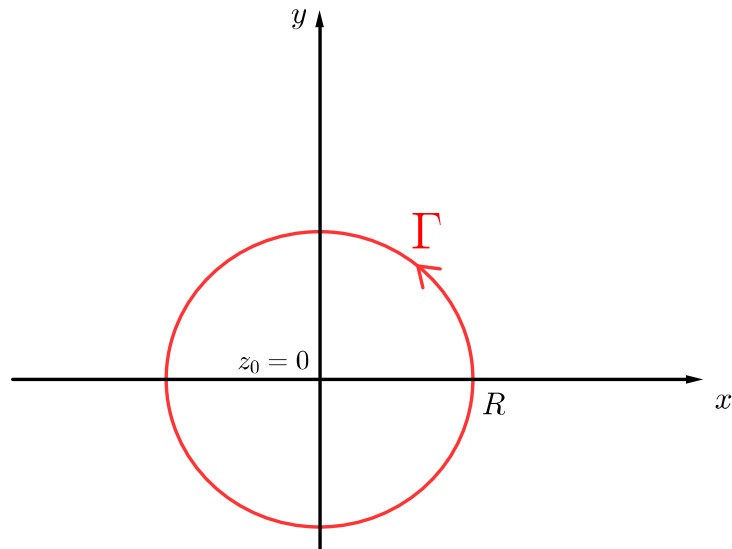


Figura 3.9: Circunferencia Γ de centro $z_0 = 0$ y radio R recorrida positivamente

Observación 3.2.5. *En general se puede probar que*

$$\oint_C \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$$

para cualquier curva simple cerrada orientada positivamente C que contiene en su interior al punto z_0 . Queda como ejercicio para el lector probar este resultado.

3.2.2 La fórmula integral de Cauchy

En esta sección, presentaremos una de las fórmulas más importantes de la teoría de funciones de variable compleja llamada fórmula integral de Cauchy. Asimismo presentaremos uno de los resultados más asombrosos de dicha teoría.

Teorema 3.2.6 (Fórmula integral de Cauchy). *Sea f una función analítica dentro y sobre una curva C simple cerrada seccionalmente suave orientada positivamente. Si z_0 es un punto interior a C entonces,*

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0). \quad (3.2)$$

Demostración. Dado que f es analítica en z_0 entonces resulta continua en dicho punto, por lo que dado $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon.$$

Sea $0 < \rho < \delta$. Consideremos una circunferencia C_0 de centro z_0 y radio ρ recorrida en sentido positivo íntegramente contenida en C como se observa en la Figura 3.10. Entonces se tiene que

$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon \quad \text{si} \quad |z - z_0| = \rho < \delta. \quad (3.3)$$

Como la función dada por $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ es analítica en la región delimitada por las curvas C y C_0 y sobre ellas, entonces por el principio de deformación de caminos,

$$\oint_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = \oint_{C_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz. \quad (3.4)$$

Por un lado de (3.4) y mediante la Observación 3.2.5 se tiene que

$$\oint_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \oint_C \frac{1}{z - z_0} dz = \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0). \quad (3.5)$$

Por otro lado y usando (3.3) se tiene que

$$\left| \oint_{C_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq \oint_{C_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} |dz| < \frac{\epsilon}{\rho} \text{long}(C_0) = 2\pi\epsilon. \quad (3.6)$$

Entonces de (3.4) y usando (3.5) y (3.6) se tiene que

$$0 \leq \left| \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right| < 2\pi\epsilon \quad (3.7)$$

es decir,

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) = 0,$$

como queríamos demostrar. □

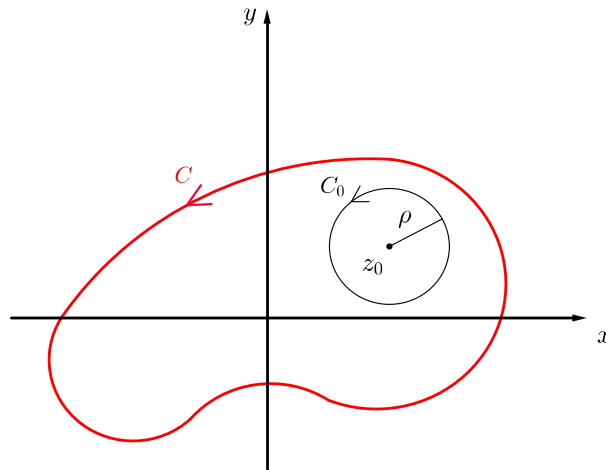


Figura 3.10: Curva C y circunferencia C_0

Ejemplo 3.2.7. Calculemos $\oint_C \frac{e^z}{z - \pi i} dz$ siendo C la circunferencia de ecuación $|z| = 4$ recorrida en sentido antihorario.

La función definida por $f(z) = e^z$ es entera y además $z_0 = \pi i$ es un punto interior a C , entonces se tiene que:

$$\oint_C \frac{e^z}{z - \pi i} dz = 2\pi i f(\pi i) = 2\pi i e^{\pi i} = -2\pi i. \blacktriangle$$

Ejemplo 3.2.8. Para obtener el valor de la integral $\oint_C \frac{z}{4 + z^2} dz$ siendo C la elipse de ecuación cartesiana $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$ recorrida en sentido positivo, consideremos la función dada por

$$f(z) = \frac{z}{4 + z^2} = \frac{z}{(z + 2i)(z - 2i)}.$$

Como f es analítica en $\mathbb{C} - \{2i, -2i\}$, consideremos las curvas simples cerradas seccionalmente suaves recorridas positivamente C_1 y C_2 tal que $C = C_1 \cup C_2$, como se indica en la Figura 3.11.

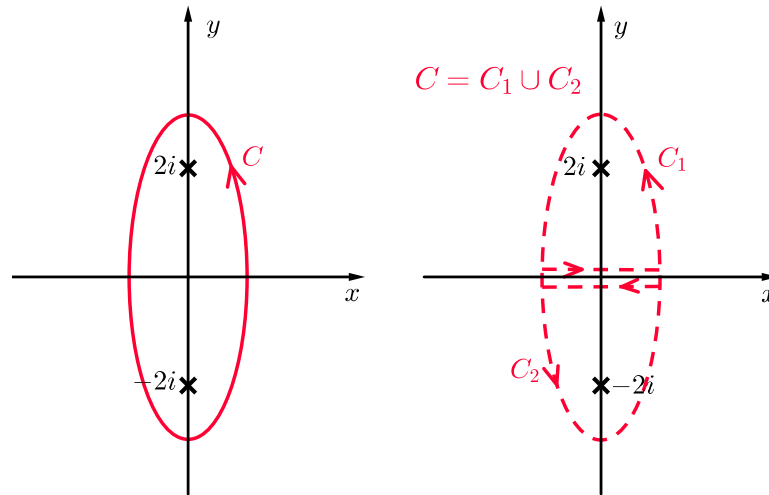


Figura 3.11: Curvas C , C_1 y C_2

Luego,

$$\oint_C \frac{z}{4 + z^2} dz = \oint_{C_1} \frac{\frac{z}{z+2i}}{z - 2i} dz + \oint_{C_2} \frac{\frac{z}{z-2i}}{z + 2i} dz = J_1 + J_2.$$

Dado que $f_1(z) = \frac{z}{z + 2i}$ es analítica dentro y sobre C_1 , entonces se tiene que

$$J_1 = 2\pi i f_1(2i) = \pi i.$$

De igual forma, llamando $f_2(z) = \frac{z}{z-2i}$ se tiene que es analítica dentro y sobre C_2 , por lo que obtenemos que

$$J_2 = 2\pi i f_2(-2i) = \pi i.$$

Por lo tanto,

$$\oint_C \frac{z}{4+z^2} dz = 2\pi i. \blacktriangle$$

Estableceremos ahora un resultado fundamental que indica que si una función es analítica en un punto, admite derivada de todos los órdenes en ese punto, es decir, es infinitamente derivable en dicho punto, y todas las derivadas son analíticas en él. Tal resultado se conoce como la Fórmula integral de Cauchy para derivadas.

Teorema 3.2.7 (Fórmula integral de Cauchy para derivadas). *Si f es una función analítica en z_0 entonces sus derivadas de todos los órdenes son también funciones analíticas en z_0 y vienen dadas por*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \quad (3.8)$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$ donde z_0 es un punto interior a la curva C simple cerrada seccionalmente suave y orientada positivamente.

Observación 3.2.6. *Notemos que si en la fórmula integral de Cauchy para derivadas (3.8) se toma $n = 0$ se tiene la fórmula integral de Cauchy (3.2).*

Ejemplo 3.2.9. *Para calcular $\oint_C \frac{ze^z}{(z-1)^2} dz$ siendo C cualquier curva simple cerrada orientada positivamente y seccionalmente suave que contiene en su interior al punto $z_0 = 1$, consideremos $f(z) = ze^z$ la cual es entera, entonces*

$$\oint_C \frac{ze^z}{(z-1)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(1) = 4\pi ei. \blacktriangle$$

A continuación enunciaremos un resultado el cual puede ser considerado como el “recíproco” del Teorema de Cauchy-Goursat:

Teorema 3.2.8 (de Morera). *Si una función f es continua en un dominio Ω y si*

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

para cualquier curva simple cerrada seccionalmente suave contenida en Ω , entonces f es analítica en Ω .

Algunas consecuencias de la derivada de una función analítica son las siguientes:

Teorema 3.2.9 (Teorema del módulo máximo). *Si f es una función no constante y analítica dentro y sobre una curva C simple cerrada y seccionalmente suave, entonces el máximo de $|f(z)|$ se obtiene sobre la curva C , no en su interior.*

Ejemplo 3.2.10. *Obtengamos el máximo del módulo de $f(z) = \operatorname{sen} z$ sobre la región*

$$R = \{z = x + iy : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Como f es una función entera y no constante se sigue del teorema del módulo máximo que

$$\max_{z \in R} |f(z)| = \max_{z \in C} |f(z)|$$

siendo C la curva simple cerrada seccionalmente suave frontera de la región R como se observa en la Figura 3.12.

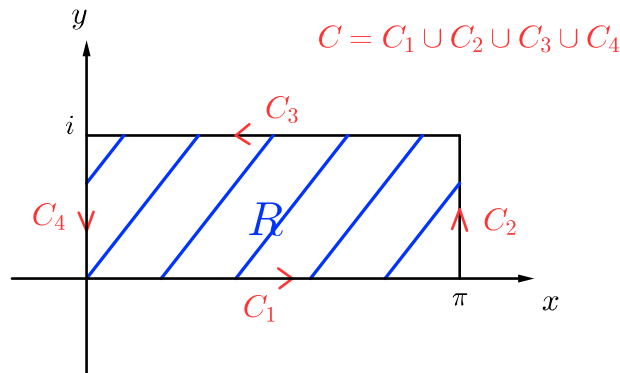


Figura 3.12: Región R y su frontera C

Además si escribimos,

$$f(z) = \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \cos x \frac{e^y - e^{-y}}{2} i + \operatorname{sen} x \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \operatorname{sen} x \cosh y + i \operatorname{sen} y \cos x$$

se tiene

$$|f(z)| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y},$$

por lo que para determinar el valor máximo de $|f(z)|$ sobre C , descompongamos C en cuatro curvas C_1, C_2, C_3 y C_4 de tal forma que $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ como se ve en la Figura 3.12.

Calculemos primero el máximo valor que asume $|f(z)|$ para los z sobre la curva C_1 . Para ello, consideremos la parametrización,

$$C_1 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0 \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Entonces,

$$|f(z)| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t} = |\operatorname{sen} t| = \operatorname{sen} t \text{ con } 0 \leq t \leq \pi$$

asume su máximo en $t = \frac{\pi}{2}$ y es $M_1 = 1$ por lo que $|f(z)|$ toma su valor máximo sobre C_1 en $z = \frac{\pi}{2}$ y es $M_1 = 1$.

Busquemos ahora el máximo de $|f(z)|$ para los z sobre la curva C_2 . Sea la parametrización,

$$C_2 : \begin{cases} x(t) = \pi \\ y(t) = t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Entonces,

$$|f(z)| = \sqrt{\operatorname{senh}^2 t} = |\operatorname{senh} t| = \operatorname{senh} t \text{ con } 0 \leq t \leq 1$$

asume su máximo en $t = 1$ y es $M_2 = \operatorname{senh} 1 = \frac{e - e^{-1}}{2}$ por lo que $|f(z)|$ toma su valor máximo sobre C_2 en $z = \pi + i$ y es $M_2 = \frac{e - e^{-1}}{2}$.

Hallemos ahora el máximo valor que asume $|f(z)|$ para los z sobre la curva C_3 . Consideremos la parametrización,

$$-C_3 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 1 \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Entonces,

$$|f(z)| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \operatorname{senh}^2 1} \text{ con } 0 \leq t \leq \pi.$$

Consideremos la función,

$$g(t) = |f(z)|^2 = \operatorname{senh}^2 1 + \operatorname{sen}^2 t \text{ donde } 0 \leq t \leq \pi.$$

Como $g'(t) = 0$ si y sólo si $t = \frac{\pi}{2}$; $\sqrt{g(0)} = \operatorname{senh} 1$, $\sqrt{g(\pi)} = \operatorname{senh} 1$ y $\sqrt{g\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{\operatorname{senh}^2 1 + 1}$, entonces $\sqrt{g(t)}$ asume su máximo en $t = \frac{\pi}{2}$ y es $M_3 = \sqrt{\operatorname{senh}^2 1 + 1}$ por lo que $|f(z)|$ toma su valor máximo sobre C_3 en $z = \frac{\pi}{2} + i$ y es $M_3 = \sqrt{\operatorname{senh}^2 1 + 1}$.

Por último, busquemos el máximo de $|f(z)|$ para los z sobre la curva C_4 la cual la podemos parametrizar por,

$$-C_4 : \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Entonces,

$$|f(z)| = \sqrt{\operatorname{senh}^2 t} = |\operatorname{senh} t| = \operatorname{senh} t \text{ con } 0 \leq t \leq 1$$

asume su máximo en $t = 1$ y es $M_4 = \operatorname{senh}1 = \frac{e - e^{-1}}{2}$ por lo que $|f(z)|$ toma su valor máximo sobre C_4 en $z = i$ y es $M_4 = \frac{e - e^{-1}}{2}$.

Por lo tanto,

$$\max_{z \in R} |f(z)| = \max_{z \in C} |f(z)| = \max \{M_1, M_2, M_3, M_4\} = \sqrt{\operatorname{senh}^2 1 + 1}$$

y se obtiene en el punto $z = \frac{\pi}{2} + i$. \blacktriangle

Teorema 3.2.10 (Desigualdad de Cauchy). *Si f es analítica dentro y sobre la circunferencia C de centro z_0 y radio r entonces*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n! M}{r^n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$, donde M es el máximo de $|f(z)|$.

Demostración. De la fórmula integral de Cauchy para las derivadas (3.8) se tiene que,

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z_0)| &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \oint_C \frac{|f(z)|}{|z - z_0|^{n+1}} |dz| \leq \\ &\leq \frac{n! M}{2\pi r^{n+1}} \oint_C |dz| = \frac{n! M}{2\pi r^{n+1}} 2\pi r = \frac{n! M}{r^n} \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$. □

Como consecuencia de la desigualdad de Cauchy, se tiene el siguiente corolario:

Corolario 3.2.3. *Si f es una función entera y acotada en \mathbb{C} , entonces f es constante en \mathbb{C} . Es decir, ninguna función entera excepto las constantes, son acotadas en todo el plano complejo.*

Demostración. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$, por la desigualdad de Cauchy para $n = 1$ se tiene que

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{r}.$$

Si consideramos valores de r cada vez más grandes, se tiene que $f'(z_0) = 0$ y como z_0 es arbitrario podemos concluir que

$$f'(z) = 0$$

para cualquier $z \in \mathbb{C}$ es decir, f es constante en \mathbb{C} . □

3.3 Ejercicios propuestos

1. Halle el valor de las integrales siguientes:

$$(a) \int_1^2 \left(\frac{1}{t} - i \right)^2 dt \qquad (b) \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{2it} dt$$

2. Calcule las siguientes integrales de línea:

- (a) $\int_C (z - 1) dz$, siendo:
- i. C el segmento de recta de origen $z_0 = 0$ y extremo $z_1 = 1 + i$.
 - ii. C el arco de parábola de ecuación cartesiana $y = x^2$ con el mismo origen y el mismo extremo que el segmento del apartado (i).
- (b) $\int_C \bar{z} dz$, siendo:
- i. C el arco de parábola de ecuación $x = y^2$ de origen $z_0 = 4 + 2i$ y extremo $z_1 = 25 + 5i$.
 - ii. C la poligonal cuyo primer lado es paralelo al eje real y segundo lado paralelo al eje imaginario, con el mismo origen y el mismo extremo que el arco del apartado (i).

3. Sea C la poligonal cerrada cuyos vértices son los puntos $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = 1 + i$ y $z_4 = i$, recorrida en sentido positivo. Calcule las siguientes integrales:

$$(a) \oint_C e^z dz \qquad (b) \oint_C z \bar{z} dz \qquad (c) \oint_C z^3 \operatorname{sen}(2z) dz$$

Interprete los resultados obtenidos en cada uno de los casos.

4. Utilizando las consecuencias del Teorema de Cauchy, evalúe las siguientes integrales:

- (a) $\int_C \operatorname{sen} z dz$, siendo C la poligonal abierta cuyo origen es el punto $z_1 = \frac{\pi}{2}$, vértices $z_2 = \frac{\pi}{2} + i$, $z_3 = -\frac{\pi}{2} + i$, y extremo $z_4 = -\frac{\pi}{2}$.
- (b) $\int_C (z^3 - iz^2 - 5z + 2i) dz$, siendo C el arco de elipse de ecuación $|z - 3i| + |z + 3i| = 10$, $\operatorname{Re}(z) \geq 0$, recorrido en el sentido en el cual $\operatorname{Im}(z)$ es creciente.
- (c) $\int_0^{\pi i} \operatorname{sen}(3z) \cos(3z) dz$
- (d) $\int_0^{\pi+i} (z + 2) e^{iz} dz$

5. Utilice la fórmula integral de Cauchy para calcular:

- (a) $\oint_C \frac{e^z}{z-2} dz$, siendo C la circunferencia de centro 2 y radio 1, recorrida en sentido antihorario.
- (b) $\oint_C \frac{1}{z^4-16} dz$, siendo C el rectángulo de vértices $z_1 = 4+i$, $z_2 = -4+i$, $z_3 = -4-i$ y $z_4 = 4-i$, recorrida en sentido horario.
- (c) $\oint_C \frac{5z}{(z+1)(z-2)(z+4i)} dz$, siendo C la curva de ecuación $|z| = 5$, recorrida en sentido antihorario.

6. Sea la función definida por $g(z) = \frac{1}{z^2+9}$. Determine los valores de las integrales de la función g para todas las posibles curvas simples cerradas seccionalmente suaves que no contengan puntos de singularidad de g .

7. Utilice la fórmula integral de Cauchy para calcular:

- (a) $\oint_C \frac{e^z}{(z+1)^4} dz$, siendo C la circunferencia de centro 0 y radio 2, recorrida en sentido antihorario.
- (b) $\oint_C \frac{\operatorname{sen}^6 z}{(z-\pi)^3} dz$, siendo C la frontera del anillo A de centro 0, radio interior 2 y radio exterior 5, recorrida en sentido positivo respecto del interior de A .
- (c) $\oint_C \frac{\operatorname{sen}(3z)}{(z+\pi)^2} dz$, siendo C el cuadrado de vértices $z_1 = 4$, $z_2 = 4i$, $z_3 = -4$ y $z_4 = -4i$, recorrido en sentido horario.
- (d) $\oint_C \frac{4z}{(z-1)(z+2)^2} dz$, siendo C la curva de ecuación $|z| = 3$, recorrida en sentido horario.

8. Determine el módulo máximo de:

- (a) $f(z) = (z+1)^2$, en el triángulo cerrado R de vértices 0, 2 e i .
- (b) $f(z) = z^2 - 3z + 2$, en el círculo cerrado R de centro 0 y radio 1.

Evaluación de los Capítulos 1, 2 y 3

1. Calcule los valores de z que satisfacen las ecuaciones:

$$(a) \ z = \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{2016} \quad (b) \ z^3 = \sqrt{-i} \quad (c) \ e^z - 1 = i$$

y representélos gráficamente.

2. El *diagrama de Smith* es un método gráfico que se usa en ingeniería eléctrica para analizar líneas de transmisión de alta frecuencia. Establece la relación entre dos variables complejas: la *impedancia normalizada* $z = r + ix$, ($r \geq 0, x \in \mathbb{R}$) y el *coeficiente de reflexión* $\Gamma = a + ib$, ($a, b \in \mathbb{R}$).

La transformación

$$\Gamma(z) = \frac{z-1}{z+1},$$

se aplica a una malla formada por rectas verticales infinitas y rectas horizontales semiinfinitas en el semiplano derecho. La imagen de esta malla en el plano Γ es el diagrama de Smith.

- Pruebe que el diagrama de Smith cuando se aplica la malla $\text{Re}(z) \geq 0$ bajo la transformación dada es $|\Gamma| \leq 1$. Grafique ambas regiones e indique si se tratan de conjuntos abiertos, cerrados, conexos, simplemente conexos y acotados.
- Calcule, si es posible, $\Gamma(3e^{-\pi i})$.
- Demuestre que $z(\Gamma) = \frac{1}{z(-\Gamma)}$, es decir, que los valores de z correspondientes a valores de Γ que se encuentran en posiciones diametralmente opuestas respecto al origen son recíprocos uno del otro.

3. Determine la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones. Justifique sus respuestas:

- Si $f(z) = e^z$ y $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z-1-i| \leq 1\}$, entonces $\max_{z \in \Omega} |f(z)| = e^2$.
- La función dada por $f(z) = \log(iz-1)$ es analítica en $\mathbb{C} - \{z = it : t \geq -1\}$.
- $z \in \mathbb{C} \Rightarrow \sin(i\bar{z}) = i \sinh(\bar{z})$.
- Si $f(z) = u + iv$ y $\overline{f(z)}$ son funciones enteras entonces f es una función constante en \mathbb{C} .
- Sea f una función analítica en el dominio D y $\phi(x, y) = |f(z)|^2$ donde $z = x + iy$. Entonces $\phi_{xx} + \phi_{yy} = 4|f'(z)|^2$.
- El conjunto solución de la ecuación $e^{2iz} - 1 + i = 0$ es $\left\{ \left(k - \frac{1}{8} \right) \pi - \frac{i}{4} \ln 2 : k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- $z, w \in \mathbb{C} \Rightarrow |z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$.

(h) La función dada por $f(z) = az^2 + bz\bar{z} + c\bar{z}^2$ donde a, b y $c \in \mathbb{C}$ es entera si y sólo si $b = c = 0$ y a es cualquier constante compleja.

(i) $\cos(2z) = \cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z$ para todo $z \in \mathbb{C}$

4. Sea la función definida por $u(x, y) = e^{-2y} \cos(2x)$.

(a) Halle la función entera $f = f(z)$ sabiendo que $\operatorname{Re}\{f(z)\} = u(x, y)$ y $f(0) = 1$.

(b) Pruebe que la función f obtenida se puede expresar como $f(z) = e^{2iz}$.

(c) Halle **todas** las soluciones de la ecuación $f(z) = i$.

(d) Obtenga las trayectorias ortogonales de la curva de ecuación $u(x, y) = c$ donde c una constante real.

5. Obtenga el valor de la integral

$$\int_C (2\bar{z} - z \operatorname{sen}(z^2)) dz,$$

siendo C la semi-elipse en el plano xy de ecuación cartesiana $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ con $x \geq 0$, recorrida en sentido positivo.

6. Calcule

$$\oint_C \left(4z^3 - \frac{2}{z^2(z+i)} \right) f(z) dz$$

siendo C la curva de ecuación $z = 2e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ orientada positivamente y f es una función analítica en $|z| < 3$ tal que $f'(0) = f(-i) = 1$ y $f(0) = i$.

7. Sea Γ el arco de elipse de ecuación $|z - i| + |z + i| = 4$ recorrida en sentido negativo con origen en $z_1 = 2i$ y extremo en $z_2 = \sqrt{3}$. Obtenga el valor de la integral:

$$\int_{\Gamma} (z \operatorname{sen}(z^2) + \bar{z} \operatorname{Re}(z)) dz.$$

Capítulo 4

Series complejas y residuos

4.1 Series de potencias

En Cálculo IV se estudiaron que existen ventajas al expresar una función de una variable real $f = f(x)$ en términos de su desarrollo en series de potencias

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_r x^r + \dots$$

Las series de potencias también son de gran importancia en el comportamiento de las funciones complejas. En esta sección consideramos algunas de las propiedades de la expansión en serie de potencias de funciones complejas haciendo, siempre que sea posible, una analogía con la expansión en serie de potencias de las funciones reales correspondientes.

Definición (Serie de potencias). *Una serie de la forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots + a_n (z - z_0)^n + \dots \quad (4.1)$$

en la cual los coeficientes $a_n \in \mathbb{C}$ para todo $n = 0, 1, 2, \dots$ y z_0 es un punto fijo en el plano complejo, es llamada serie de potencias alrededor de z_0 o serie de potencias centrada en z_0 .

El primer problema es el de determinar para qué valores de $z \in \mathbb{C}$ la serie de potencias (4.1) es convergente. Es claro que, sean cuales sean los coeficientes, una serie de potencias siempre es convergente en $z = z_0$. Además, el **teorema de Abel** establece que dada la serie de potencias (4.1) entonces existe $R \geq 0$ tal que (4.1) es convergente si $|z - z_0| < R$ y (4.1) es divergente si $|z - z_0| > R$.

La constante positiva R del teorema recibe el nombre de **radio de convergencia** de la serie de potencia y $|z - z_0| < R$ se llama **círculo de convergencia** de la serie de potencia. Si $R = 0$, la serie sólo converge en $z = z_0$ y si $R = +\infty$, la serie converge para todo $z \in \mathbb{C}$.

Notar que el teorema de Abel no establece nada acerca de lo que sucede en $|z - z_0| = R$, por lo que normalmente es investigado como un caso especial.

Para determinar el radio de convergencia R de una serie de potencias, pueden emplearse varios de los criterios de convergencia que fueron introducidos en Cálculo IV para series reales a términos positivos. Por ejemplo, consideremos la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} az^n = a + az + az^2 + az^3 + \dots,$$

llamada **serie geométrica** de razón z y primer término a . Por el criterio del cociente o de D'Alembert vemos que la serie geométrica es convergente si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{az^{n+1}}{az^n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |z| = |z| < 1.$$

por lo que el radio de convergencia es $R = 1$ y el círculo de convergencia es $|z| < 1$. Además, la serie geométrica es divergente si $|z| \geq 1$.

4.1.1 Series de Taylor

Estudiaremos a continuación uno de los teoremas fundamentales del capítulo conocido como teorema de Taylor.

Teorema 4.1.1 (Series de Taylor). *Sea f una función analítica en el disco abierto $|z - z_0| < R$. Entonces la función f admite una representación en serie de potencias, llamada serie de Taylor de f centrada en z_0 ,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

si $|z - z_0| < R$ donde $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ para $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Demostración. Por una cuestión de simplicidad, presentamos la prueba del teorema sólo para el caso especial donde $z_0 = 0$. Dado que z_0 es arbitrario, la generalización del mismo es consecuencia inmediata de considerar $z_0 = 0$.

Sea f una función analítica en el disco abierto $|z| < R$. Consideremos una circunferencia C orientada positivamente de ecuación $|z| = r$ tal que $r < R$ de modo tal que esté íntegramente contenida en el disco $|z| < R$ como se observa en la Figura 4.1.

Entonces por las fórmulas integrales de Cauchy se tiene que para cualquier z interior a C ,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{w - z} dw, \tag{4.2}$$

y

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw \quad (4.3)$$

para todo $n = 0, 1, 2, \dots$

Usando el hecho de que para cualquier número complejo $a \neq 1$ se verifica la identidad

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + \dots + a^{m-1} + \frac{a^m}{1-a}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (4.4)$$

entonces

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w} \frac{1}{1-\frac{z}{w}} = \frac{1}{w} \left\{ 1 + \frac{z}{w} + \left(\frac{z}{w}\right)^2 + \dots + \left(\frac{z}{w}\right)^{n-1} + \frac{(z/w)^m}{1-\frac{z}{w}} \right\}, \quad (4.5)$$

o equivalentemente

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w} + \frac{1}{w^2}z + \frac{1}{w^3}z^2 + \dots + \frac{1}{w^m}z^{m-1} + \frac{1}{(w-z)w^m}z^m. \quad (4.6)$$

Sustituyendo (4.6) en (4.2) se tiene entonces que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \left\{ \frac{1}{w} + \frac{1}{w^2}z + \frac{1}{w^3}z^2 + \dots + \frac{1}{w^m}z^{m-1} + \frac{1}{(w-z)w^m}z^m \right\} f(w) dw. \quad (4.7)$$

Usando (4.3) cuando $z = 0$ entonces (4.7) se puede expresar como

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \dots + \frac{f^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}z^{m-1} + \varphi_m(z), \quad (4.8)$$

donde

$$\varphi_m(z) = \frac{z^m}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z)w^m} dw. \quad (4.9)$$

Supongamos que $|z| = r_0$. Dado que z es un punto interior de la curva C entonces $r_0 < r$, y además como $w \in C$ entonces

$$|w-z| \geq ||w| - |z|| = r - r_0. \quad (4.10)$$

Además, sabemos que existe $M > 0$ tal que

$$M = \max_{w \in C} |f(w)|. \quad (4.11)$$

Entonces, usando (4.10) y (4.11) en (4.9) se sigue que

$$|\varphi_m(z)| \leq \frac{r_0^m}{2\pi} \frac{M}{(r-r_0)r^m} 2\pi r = \frac{Mr}{r-r_0} \left(\frac{r_0}{r}\right)^m. \quad (4.12)$$

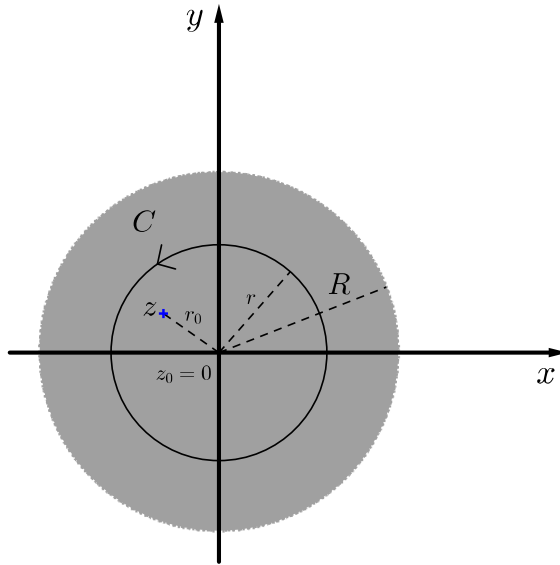


Figura 4.1: Disco abierto $|z| < R$ y circunferencia $C : |z| = r$ positivamente orientada

Dado que $\frac{r_0}{r} < 1$ entonces $\varphi_m(z) \rightarrow 0$ si $m \rightarrow +\infty$, por lo que de (4.8) se sigue

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \dots + \frac{f^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}z^{m-1} + \dots \quad (4.13)$$

en el disco abierto $|z| < R$. □

Observación 4.1.1. De acuerdo con el Teorema 4.1.1, la serie de Taylor de f centrada en z_0 ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

converge a $f(z)$, y no es necesario ningún criterio de convergencia, dentro del círculo centrado en z_0 cuyo radio R es la distancia de z_0 al punto z_1 más próximo en el que f deje de ser analítica.

Ejemplo 4.1.1. El radio de convergencia de la serie de Taylor centrada en $z_0 = i$ de la función dada por $f(z) = \frac{e^z}{z-1}$ es $R = \sqrt{2}$ y su círculo de convergencia es $|z - i| < \sqrt{2}$. ▲

Definición (Serie de Maclaurin). Si la serie de Taylor de una función f está centrada en $z_0 = 0$, se dice que es la serie de Maclaurin de la función f .

Algunos ejemplos del desarrollo en series de Taylor

1. Consideremos la función dada por

$$f(z) = e^z.$$

Como f es entera, tiene un desarrollo en serie de Maclaurin es válido para cualquier $z \in \mathbb{C}$. Entonces dado que $f^{(n)}(0) = 1$ para todo $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ se tiene que

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{si } |z| < +\infty. \quad (4.14)$$

2. La función definida por

$$f(z) = \text{sen } z$$

es entera, por lo que su desarrollo en serie de Maclaurin es válido para cualquier punto del plano complejo. Notemos además que

$$f^{(2n)}(0) = 0 \quad \text{y} \quad f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$$

para todo $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ por lo que se tiene que

$$\text{sen } z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad \text{si } |z| < +\infty. \quad (4.15)$$

3. De manera similar al ejemplo anterior se tiene que

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \quad \text{si } |z| < +\infty. \quad (4.16)$$

4. Sea la función dada por $f(z) = \frac{1}{1-z}$. El desarrollo en serie de Maclaurin será válido para $|z| < 1$. Además, las derivadas de f vienen dadas por

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}}$$

para todo $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ por lo que se tiene que

$$f^{(n)}(0) = n! \quad \text{para todo } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Luego, obtenemos que

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{si } |z| < 1. \quad (4.17)$$

Teorema 4.1.2 (Unicidad de la representación en serie de Taylor de una función).
 Si la serie de potencias (4.1) converge a una función $f(z)$ en todo punto del círculo $|z - z_0| < R$, entonces

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

es decir, se trata de la serie de Taylor de f centrada en $z = z_0$.

El teorema anterior nos permite obtener el desarrollo en serie de Taylor de una función de un modo más eficiente, haciendo uso de los desarrollos por serie de Taylor ya conocidos para algunas funciones elementales. Veamos algunos ejemplos:

1. Para obtener el desarrollo en serie de Maclaurin de la función entera dada por

$$f(z) = z^2 e^{3z}$$

notemos que sustituyendo z por $3z$ en (4.14) se tiene que

$$e^{3z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3z)^n}{n!} \quad \text{si } |3z| < +\infty,$$

y multiplicando la igualdad anterior por z^2 se obtiene entonces que

$$f(z) = z^2 e^{3z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n z^{n+2}}{n!} \quad \text{si } |z| < +\infty.$$

2. Obtengamos ahora el desarrollo en serie de Maclaurin de $f(z) = \operatorname{senh} z$.

Notemos previamente que la función f es entera y además

$$\operatorname{senh} z = -i \operatorname{sen}(iz)$$

para cualquier $z \in \mathbb{C}$ por lo que sustituyendo z por iz en (4.15) se tiene que

$$\operatorname{sen}(iz) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (iz)^{2n+1} \quad \text{si } |iz| < +\infty$$

y multiplicando a ambos miembros por $-i$ se obtiene que

$$\operatorname{senh}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{si } |z| < +\infty.$$

3. Teniendo en cuenta el hecho de que

$$\cosh z = \cos(iz)$$

para cualquier $z \in \mathbb{C}$ entonces usando (4.16) se tiene que

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{si } |z| < +\infty.$$

4. Busquemos una representación en serie de Maclaurin para la función dada por

$$f(z) = \frac{1}{2+z}.$$

Para ello, notemos que $\frac{1}{2+z} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - (-z/2)}$, por lo que sustituyendo z por $-\frac{z}{2}$ en (4.17) se tiene entonces que

$$\frac{1}{2+z} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-z}{2}\right)^n \quad \text{si } \left|\frac{-z}{2}\right| < 1$$

o equivalentemente,

$$\frac{1}{2+z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}} \quad \text{si } |z| < 2.$$

5. Como último ejemplo, obtengamos la representación en serie de Taylor en potencias de $(z-1)$ de la función definida por

$$f(z) = \frac{1}{z}.$$

Primero notemos que

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1 - [-(z-1)]},$$

por lo que reemplazando $-(z-1)$ por z en (4.17) se tiene entonces que

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n$$

si $|-(z-1)| = |z-1| < 1$.

4.1.2 Integración y derivación de series de potencias

A continuación enunciaremos algunas propiedades de las series de potencias del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \tag{4.18}$$

Teorema 4.1.3. *Si la serie de potencias (4.18) converge a $f(z)$ en el círculo $|z - z_0| < R$ entonces f es analítica en $|z - z_0| < R$.*

Teorema 4.1.4. *Si la serie de potencias (4.18) converge a $f(z)$, entonces puede integrarse término a término en toda curva simple seccionalmente suave C interior al círculo de convergencia de esa serie.*

Además,

$$\int_C f(z) dz = \int_C \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}.$$

Ejemplo 4.1.2. *Integrando en el plano complejo w la serie de Maclaurin,*

$$\frac{-1}{1-w} = -\sum_{n=0}^{\infty} w^n \quad \text{si } |w| < 1,$$

a lo largo de una curva simple seccionalmente suave C interior al círculo de convergencia de la serie, desde $w = 0$ hasta $w = z$ se tiene por un lado

$$\int_C \frac{-1}{1-w} dw = \int_0^z \frac{-1}{1-w} dw = \log(1-z),$$

y por otro se tiene que

$$\int_C -\sum_{n=0}^{\infty} w^n dw = -\sum_{n=0}^{\infty} \int_C w^n dw = -\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^z w^n dw = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1}$$

si $|z| < 1$. Por lo tanto se tiene entonces que

$$\log(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad \text{si } |z| < 1. \blacktriangle$$

Observación 4.1.2. Si la curva C del Teorema 4.1.4 es además cerrada entonces tenemos que

$$\oint_C \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n dz = 0.$$

Teorema 4.1.5. Si la serie de potencias (4.18) converge a $f(z)$, entonces puede derivarse término a término en todo punto interior al círculo de convergencia de dicha serie. Además,

$$f'(z) = \frac{d}{dz} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}.$$

Ejemplo 4.1.3. Por un lado, la función dada por $f(z) = \frac{z}{(1+z)^2}$ puede expresarse

$$f(z) = z \frac{d}{dz} \left(\frac{-1}{1+z} \right),$$

y dado que

$$\frac{-1}{1+z} = - \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} z^n$$

si $|z| < 1$, entonces $f(z)$ admite la representación en serie de Maclaurin siguiente,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n z^n \quad \text{si } |z| < 1. \blacktriangle$$

4.1.3 Series de Laurent

Consideremos la función definida por

$$f(z) = e^{1/z}.$$

Si sustituímos z por $\frac{1}{z}$ en

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{si } |z| < +\infty$$

obtenemos el desarrollo en serie de potencias

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n n!} \quad \text{si } \left| \frac{1}{z} \right| < +\infty$$

y en definitiva

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} + \dots \quad \text{si } 0 < |z| < +\infty.$$

Claramente, la función f no es analítica en $z_0 = 0$, por lo que no podemos hallar una serie de Maclaurin en dicho punto. No obstante, obtuvimos una representación en serie de potencias para f que contiene potencias negativas de z . Esto es posible, gracias al teorema de Laurent.

Teorema 4.1.6 (Serie de Laurent). Sean $w = f(z)$ una función analítica en una corona abierta $R_1 < |z - z_0| < R_2$ y C una curva simple cerrada seccionalmente suave positivamente orientada en torno a z_0 y contenida en dicha corona circular abierta como se observa en la Figura 4.2.

Entonces, la función f admite la representación en serie de potencias, llamada serie de Laurent siguiente

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

si $R_1 < |z - z_0| < R_2$ donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

y

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) (z - z_0)^{n-1} dz, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

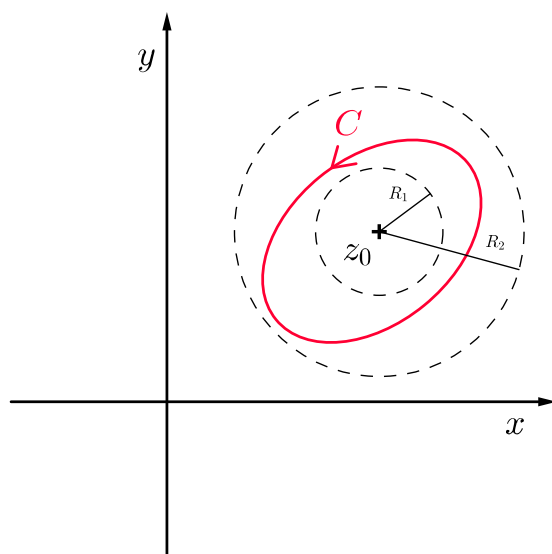


Figura 4.2: Corona abierta $R_1 < |z| < R_2$ y curva C

Observación 4.1.3. A partir del Teorema 4.1.6, nótese que:

1. La representación en serie de Laurent para la función f ,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \quad \text{si } R_1 < |z - z_0| < R_2$$

puede expresarse como

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

si $R_1 < |z - z_0| < R_2$ donde

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad \text{para cualquier } n \in \mathbb{Z}.$$

2. La parte de la serie de Laurent de la función f ,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \quad \text{si } R_1 < |z - z_0| < R_2$$

que contiene potencias positivas de $(z - z_0)$ se llama **parte analítica o regular** del desarrollo en serie de f en z_0 , mientras que la parte de la serie que contiene potencias negativas de $(z - z_0)$ recibe el nombre de **parte principal** del desarrollo en serie de f en z_0 .

3. Si f es una función analítica en $|z - z_0| < R_2$ entonces $f(z)(z - z_0)^{n-1}$ también resultará analítica en $|z - z_0| < R_2$ para todo $n = 1, 2, 3, \dots$. Luego, por el Teorema de Morera

$$b_n = 0 \quad \text{para todo } n = 1, 2, 3, \dots$$

y por la fórmula integral de Cauchy para las derivadas

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad \text{para todo } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Por lo tanto, el desarrollo en serie de Laurent para f se reduce al desarrollo en serie de Taylor de f centrada en z_0 .

4. Si la función f no es analítica en z_0 pero lo es en el resto del disco $|z - z_0| < R_2$, el radio R_1 puede tomarse arbitrariamente pequeño, y la representación en serie de Laurent de f es válida entonces en

$$0 < |z - z_0| < R_2.$$

De manera similar, si f es analítica en todo punto del plano complejo que verifique $R_1 < |z - z_0|$, el radio R_2 se puede como $R_2 = +\infty$, por lo que la condición de validez de la serie es

$$R_1 < |z - z_0| < +\infty.$$

Teorema 4.1.7 (Unicidad de la representación en serie de Laurent de una función).
Si la serie de potencias

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

converge a $f(z)$ en todo punto interior de una corona $R_1 < |z - z_0| < R_2$, entonces

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{Z}$$

es decir, se trata de la serie de Laurent de f centrada en z_0 .

A partir del teorema anterior, que establece la unicidad de representación en serie de Laurent de una función, los coeficientes de una serie de Laurent para una función f no se suelen hallar recurriendo al uso directo de sus representaciones integrales, sino por otros métodos de manera similar a lo realizado para el desarrollo por series de Taylor.

Ejemplo 4.1.4. Consideremos la función dada por $f(z) = \frac{i}{z^3(z-i)}$. Buscamos el desarrollo en serie de Laurent de f en la corona $0 < |z| < 1$, es decir, centrada en $z_0 = 0$ con $R_1 = 0$ y $R_2 = 1$. Nótese que f es analítica en la corona $0 < |z| < 1$ (f no es analítica en 0 y en i , por ser racional).

Dado que el desarrollo de f en serie de Laurent debe ser en potencias (positivas o negativas) de z , bastará con tener en cuenta el hecho que

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n \quad \text{si } |w| < 1. \quad (4.19)$$

Así, se tiene que:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{i}{z^3(z-i)} = \frac{i}{z^3} \frac{1}{i(\frac{z}{i}-1)} = \frac{-1}{z^3} \frac{1}{1+iz} = \frac{-1}{z^3} \frac{1}{1-(-iz)} = \frac{-1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} (-iz)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} i^n z^{n-3} = -\frac{1}{z^3} + \frac{i}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} i^n z^{n-3}. \end{aligned}$$

Luego, hemos obtenido la representación en serie de Laurent de f ,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} i^{n+3} z^n - \frac{1}{z^3} + \frac{i}{z^2} + \frac{1}{z} \quad \text{en la corona } 0 < |z| < 1,$$

donde lo marcado en rojo es la **parte analítica** y lo indicado en azul es la **parte principal** del desarrollo en serie de Laurent de f en la corona $0 < |z| < 1$.▲

Ejemplo 4.1.5. Sea la función definida por

$$f(z) = \frac{-1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}.$$

Claramente f no es analítica en $z = 1$ y $z = 2$, pero sí es analítica en $D_1 = \{z : |z| < 1\}$, $D_2 = \{z : 1 < |z| < 2\}$ y $D_3 = \{z : 2 < |z| < +\infty\}$. En cada uno de estos dominios, la función f admite una representación en serie de potencias de z (de Taylor o de Laurent).

Comencemos considerando el círculo abierto $D_1 = \{z : |z| < 1\}$. La representación en serie de f en D_1 es una serie de Maclaurin pues por un lado usando (4.19)

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{para } |z| < 1 \quad (4.20)$$

y por otro lado como $|z| < 1$ entonces $\left|\frac{z}{2}\right| < \frac{1}{2} < 1$ entonces usando (4.19) se tiene que:

$$-\frac{1}{z-2} = \frac{1}{2(1-z/2)} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n. \quad (4.21)$$

Luego, de (4.20) y (4.21) se tiene que en D_1 la representación en serie de potencias de z de la función f es,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n.$$

Obtengamos ahora una representación en serie de potencias de f en la corona abierta D_2 . Tal representación, resultará una serie de Laurent. Por un lado, y haciendo uso de (4.19) se tiene que,

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z(1-1/z)} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \quad (4.22)$$

pues como $|z| > 1$ entonces $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$.

Por otro lado y dado que $|z| < 2$ entonces $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$ se tiene que,

$$-\frac{1}{z-2} = \frac{1}{2(1-z/2)} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}. \quad (4.23)$$

Por lo tanto, de (4.22) y (4.23), la representación en serie de Laurent de f centrada en $z_0 = 0$ en el dominio D_2 es,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}.$$

Por último, obtengamos la representación en serie de potencias de z de la función f en el dominio abierto D_3 . Primero, observemos que como $|z| > 2$ entonces $\left|\frac{1}{z}\right| < \frac{1}{2} < 1$ y haciendo uso de (4.19) se sigue que,

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-1/z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \quad (4.24)$$

Por otro lado, por (4.19) y teniendo en cuenta que si $|z| > 2$ entonces $\left|\frac{1}{z}\right| < \frac{1}{2}$ y por lo tanto $\left|\frac{2}{z}\right| < 1$, se sigue que

$$-\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{z(1-2/z)} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}. \quad (4.25)$$

Luego, de (4.24) y (4.25), la función f admite la representación en serie de Laurent de f en potencias de z en el dominio D_3 siguiente,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-2^n}{z^{n+1}}. \blacktriangle$$

4.2 Singularidades aisladas y residuos

En esta sección definiremos singularidad y singularidad aislada de una función, a las cuales clasificaremos en tres tipos: evitable, polo y esencial. También presentaremos la singularidad en el infinito de una función compleja.

Además definiremos lo que se conoce con el nombre de residuo de una función en una singularidad aislada, y diferentes fórmulas que permitirán el cálculo del mismo.

Definición (Singularidad). Se dice que z_0 es un punto singular o singularidad de la función f si f no es analítica en z_0 pero en todo entorno de z_0 contiene puntos en los que f es analítica.

Definición (Singularidad aislada). Un punto singular z_0 de una función f se dice singularidad aislada de f si existe un entorno reducido de z_0 donde f resulte analítica.

Ejemplo 4.2.1. La función dada por $f(z) = \frac{1}{z+2i}$ tiene un punto singular en $z_0 = -2i$.

Dicho punto singular es una singularidad aislada dado que la función f resulta analítica en cualquier entorno reducido de $z_0 = -2i$. \blacktriangle

Ejemplo 4.2.2. Consideremos la función logaritmo principal $f(z) = \log z$. Esta función tiene claramente una singularidad en $z_0 = 0$.

Sin embargo, no se trata de una singularidad aislada de f pues no existe ningún entorno reducido de $z_0 = 0$ que no contenga puntos del semieje real negativo donde la función es no analítica. ▲

Clasificación de las singularidades aisladas

Es posible clasificar las singularidades aisladas de una función compleja $w = f(z)$. Para ello, sea z_0 una singularidad aislada de f y consideremos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \quad (4.26)$$

el desarrollo en serie de Laurent de f en $0 < |z - z_0| < R$. Entonces decimos que f tiene

- una **singularidad evitable** en z_0 si no hay ningún término en la parte principal de (4.26).
- un **polo** en z_0 si hay un número finito de términos en la parte principal de (4.26).

Asimismo, se llama **orden del polo** al mayor número natural m tal que la potencia $\frac{1}{(z - z_0)^m}$ esté presente en el desarrollo (4.26). En dicho caso se dice que z_0 es un *polo de orden m* de la función f .

- una **singularidad esencial** en z_0 si hay infinitos términos en la parte principal de (4.26).

Ejemplo 4.2.3. Consideremos la función dada por

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^2}.$$

Claramente $z_0 = 0$ es una singularidad aislada de f . Para determinar la naturaleza de dicha singularidad aislada, obtengamos el desarrollo en serie de Laurent de f ,

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^2} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2} + \frac{z^2}{24} + \dots$$

si $0 < |z| < +\infty$. Luego, f tiene un polo de orden 2 en $z_0 = 0$. ▲

Ejemplo 4.2.4. Clasifiquemos las singularidades aisladas de la función definida por

$$f(z) = e^{1/z^2}.$$

Para ello, obtengamos el desarrollo en serie de Laurent de f con centro en la única singularidad aislada $z_0 = 0$ de la función f . Entonces

$$f(z) = e^{1/z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z^2)^n n!} = 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z^4} + \dots$$

si $0 < |z| < +\infty$. Por lo tanto, la función f tiene una singularidad esencial en $z_0 = 0$. ▲

Ejemplo 4.2.5. La función definida por

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}$$

tiene una singularidad aislada en $z_0 = 0$. Dado que

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = 1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} + \dots$$

si $0 < |z| < +\infty$, entonces la función f tiene una singularidad evitable en $z_0 = 0$. ▲

Si consideramos la función definida por

$$f(z) = \frac{e^z \operatorname{sen} z}{z} \tag{4.27}$$

podemos observar que $z_0 = 0$ es una singularidad aislada de f . Sin embargo, determinar la naturaleza de dicha singularidad no es tarea sencilla.

A continuación enunciaremos un criterio que nos permite clasificar una singularidad aislada de una función sin recurrir a su desarrollo en serie de Laurent.

Teorema 4.2.1. Sea z_0 una singularidad aislada de f . Entonces,

1. z_0 es una singularidad evitable de f si y sólo si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe y es finito.

2. z_0 es un polo de f si y sólo si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$.

El orden del polo z_0 de la función f es el menor número natural m tal que el límite $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z)$ existe y es no nulo.

3. z_0 es una singularidad esencial de f si y sólo si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ no existe.

Ejemplo 4.2.6. La función dada por (4.27) tiene una singularidad evitable en $z_0 = 0$ dado que

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z \operatorname{sen} z}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} e^z (\operatorname{sen} z + \cos z) = 1. \blacktriangle$$

Ejemplo 4.2.7. Consideremos la función definida por

$$f(z) = \frac{1}{e^{1/z} - 1}.$$

Claramente $z_0 = 0$ es una singularidad de f , pero también lo son aquellos números complejos z tales que

$$e^{1/z} - 1 = 0.$$

Luego, los puntos singulares de f resultan ser

$$z_0 = 0 \quad y \quad z_k = -\frac{i}{2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z} - \{0\}.$$

Es sencillo ver que las singularidades z_k con $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ son todas aisladas mientras que $z_0 = 0$ no lo es. En efecto, no existe ningún entorno reducido de $z_0 = 0$ donde f resulte analítica pues cualquier entorno reducido de $z_0 = 0$ contiene alguna singularidad z_k para $|k|$ suficientemente grande.

Para clasificar dichas singularidades aisladas, notemos que

$$\lim_{z \rightarrow z_k} \frac{1}{e^{1/z} - 1} = \infty$$

por lo que z_k con $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ son todos polos de f . Para determinar el orden de cada uno de los polos, busquemos entonces el valor de $m \in \mathbb{N}$ de forma tal que

$$\lim_{z \rightarrow z_k} \frac{(z - z_k)^m}{e^{1/z} - 1}$$

exista y sea no nulo para cada $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Luego,

$$\lim_{z \rightarrow z_k} \frac{(z - z_k)^m}{e^{1/z} - 1} = \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{-mz^2(z - z_k)^{m-1}}{e^{1/z}} \tag{4.28}$$

es 0 si $m > 1$ pero si $m = 1$ entonces (4.28) es

$$\lim_{z \rightarrow z_k} \frac{z - z_k}{e^{1/z} - 1} = \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{-z^2}{e^{1/z}} = -\frac{1}{4k^2\pi^2}$$

si $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Por lo tanto, las singularidades aisladas z_k con $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ son todos polos simples o de primer orden de f . ▲

Singularidad en el infinito

Si trabajamos en el plano complejo extendido $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, podemos estudiar el comportamiento de una función $f(z)$ en el punto $z = \infty$ y determinar qué tipo de singularidad presenta la función f en dicho punto.

Para ello, consideremos la transformación $z = \frac{1}{w}$. El comportamiento de $f(z)$ en $z = \infty$ corresponde al comportamiento de $g(w) = f(1/w)$ en $w = 0$, por lo que si g es analítica en $w = 0$ entonces la función f es analítica en $z = \infty$ y si la función g tiene una singularidad en $w = 0$ entonces la función f tiene una singularidad en $z = \infty$.

Además, si la función g tiene un polo o una singularidad evitable o una singularidad esencial en $w = 0$ entonces la función f tiene un polo o una singularidad evitable o una singularidad esencial respectivamente en $z = \infty$.

Por ejemplo, la función dada por

$$f(z) = z^2$$

tiene un polo de orden 2 en $z = \infty$ ya que la función definida por $g(w) = \frac{1}{w^2}$ tiene un polo de segundo orden en $w = 0$.

Si ahora consideramos por ejemplo la función definida por

$$f(z) = e^z$$

vemos que posee una singularidad esencial en $z = \infty$. En efecto, basta con obtener el desarrollo en serie de Laurent de la función dada por $g(w) = e^{1/w}$ en $0 < |w| < +\infty$ para observar que g tiene una singularidad esencial en $w = 0$.

Residuos en singularidades aisladas

Dada una función $w = f(z)$, a cada singularidad aislada de f le asignaremos un número complejo llamado **residuo**.

La importancia de la obtención de residuos en singularidades aisladas de una función, la discutiremos en la sección siguiente cuando abordemos el teorema de los residuos en el cálculo de integrales complejas. Aquí, nos concentraremos en diferentes formas de calcular el residuo en una singularidad aislada.

Sea z_0 una singularidad aislada de la función $w = f(z)$. Entonces existe $R > 0$ tal que la función f es analítica en la corona $0 < |z - z_0| < R$ y consecuentemente, f admite una representación en serie de Laurent del tipo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \dots \quad (4.29)$$

si $0 < |z - z_0| < R$ donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.30)$$

y

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) (z - z_0)^{n-1} dz, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.31)$$

siendo C es una curva simple cerrada seccionalmente suave orientada positivamente en torno a z_0 e íntegramente contenida en la corona $0 < |z - z_0| < R$.

En particular, si $n = 1$ en (4.31) se tiene que

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz,$$

y al número complejo b_1 , el cual es el coeficiente de $\frac{1}{z - z_0}$ en la expansión (4.29), es llamado **residuo de f en la singularidad aislada z_0** , y notamos

$$\text{Res}(f, z_0) = b_1.$$

Ejemplo 4.2.8. Sea

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 3}{z - 2}$$

la cual tiene una singularidad aislada en $z_0 = 2$. Si escribimos

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 3}{z - 2} = \frac{z(z - 2) + 3}{z - 2} = z + \frac{3}{z - 2} = 2 + (z - 2) + \frac{3}{z - 2}$$

si $0 < |z - 2| < +\infty$, observamos que $z_0 = 2$ es un polo simple de f y además

$$\text{Res}(f, 2) = 3. \blacktriangle$$

Ejemplo 4.2.9. Dada la función definida por

$$f(z) = \frac{\text{senhz}}{z^4}.$$

Es simple determinar que $z_0 = 0$ es un polo de orden 3 de f . En efecto,

$$f(z) = \frac{\text{senhz}}{z^4} = \frac{1}{z^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{6z} + \frac{z}{120} + \dots$$

si $0 < |z| < +\infty$. Además se tiene que el residuo de f en $z_0 = 0$ es

$$\text{Res}(f, 0) = \frac{1}{6}. \blacktriangle$$

Ejemplo 4.2.10. Consideremos ahora la función

$$f(z) = e^{-1/z}.$$

Claramente $z_0 = 0$ es una singularidad aislada de f . Es más, se trata de una singularidad esencial pues

$$f(z) = e^{-1/z} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} - \frac{1}{6z^3} + \dots$$

si $0 < |z| < +\infty$. Además se tiene que el residuo de f en $z_0 = 0$ es

$$\text{Res}(f, 0) = -1. \blacktriangle$$

Observación 4.2.1. Si una función $w = f(z)$ tiene una singularidad evitable en z_0 entonces el desarrollo en serie de Laurent (4.29) de f en la corona $0 < |z - z_0| < R$ no contiene ningún término en la parte principal, es decir

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

y en particular $b_1 = 0$ por lo tanto se tiene que

$$\text{Res}(f, z_0) = 0.$$

Ejemplo 4.2.11. La función dada por

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$$

tiene una singularidad evitable en $z_0 = 0$ pues

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z} = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \dots$$

si $0 < |z| < +\infty$ por lo que

$$\text{Res}(f, 0) = 0. \blacktriangle$$

Cuando una función $w = f(z)$ tiene una singularidad esencial en z_0 , la única manera en que podemos calcular el residuo en dicha singularidad aislada es obteniendo el desarrollo en serie de Laurent de f en la corona $0 < |z - z_0| < R$ y eligiendo el coeficiente b_{-1} de $\frac{1}{z - z_0}$.

Sin embargo, si la función f tiene un polo en z_0 existen otros métodos alternativos para calcular el residuo sin recurrir a su desarrollo en serie de Laurent.

De acuerdo al Teorema 4.2.1, la singularidad aislada z_0 es un polo de orden m de la función f si y sólo si $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z)$ existe y es no nulo. Se puede demostrar entonces el siguiente resultado para calcular el residuo de f en un polo z_0 de orden m :

Teorema 4.2.2 (Cálculo del residuo en un polo). Si la función f tiene un polo de orden m en z_0 entonces

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{(z - z_0)^m f(z)\}.$$

Ejemplo 4.2.12. La función dada por $f(z) = \frac{-iz}{z^4 - z^3}$ tiene un polo doble en $z_0 = 0$. En efecto: $z_0 = 0$ es un polo de f pues:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{-iz}{z^4 - z^3} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-i}{z^3 - z^2} = \infty,$$

y además es de orden 2 dado que:

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^2 \frac{-iz}{z^4 - z^3} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-iz^3}{z^4 - z^3} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-i}{z - 1} = i \neq 0.$$

Por el teorema anterior, el residuo de f en $z_0 = 0$ es

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, 0) &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} (z^2 f(z)) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{-iz^3}{z^4 - z^3} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{iz^6}{(z^4 - z^3)^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{i}{(z-1)^2} = i. \blacktriangle \end{aligned}$$

De los teoremas 4.2.1 y 4.2.2, es inmediato el siguiente resultado cuya demostración se deja como ejercicio:

Corolario 4.2.1 (Cálculo del residuo en un polo). *La función f tiene un polo en z_0 de orden m si y sólo si $f(z)$ se puede expresar como*

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^m}$$

donde ϕ es analítica en z_0 y $\phi(z_0) \neq 0$. Además,

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}.$$

Ejemplo 4.2.13. *Sea la función dada por*

$$f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^2}.$$

Llamando $\phi(z) = e^z$ vemos que ϕ es analítica en $z_0 = -1$ y $\phi(-1) = e^{-1} \neq 0$. Luego, $z_0 = -1$ es un polo doble de f y además,

$$\text{Res}(f, -1) = \frac{\phi'(-1)}{1!} = e^{-1}. \blacktriangle$$

Otra forma de determinar que una función f tiene un polo de orden m en $z = z_0$ es a través del siguiente teorema:

Teorema 4.2.3. *Sea f una función que admite la representación*

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

donde g y h son funciones analíticas en z_0 y $g(z_0) \neq 0$.

Entonces f tiene un polo de orden m en z_0 si y sólo si $h(z_0) = h'(z_0) = \dots = h^{(m-1)}(z_0) = 0$ y $h^{(m)}(z_0) \neq 0$.

Ejemplo 4.2.14. *Consideremos la función definida por*

$$f(z) = \frac{3}{e^z - 1}.$$

De acuerdo al teorema anterior, f presenta un polo simple $z_0 = 0$ pues llamando

$$g(z) = 3 \quad \text{y} \quad h(z) = e^z - 1,$$

podemos observar que g y h son analíticas en $z_0 = 0$, $g(0) = 3 \neq 0$, $h(0) = 0$ y $h'(0) = 1 \neq 0$.

Además, de acuerdo al Teorema 4.2.2, el residuo de f en el polo $z_0 = 0$ está dado por

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{1}{0!} \lim_{z \rightarrow 0} \{zf(z)\} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{3z}{e^z - 1} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{3}{e^z} = 3. \blacktriangle$$

Ejemplo 4.2.15. Calculemos el residuo de $f(z) = \frac{2i}{z(e^z - 1)}$ en la singularidad aislada $z_0 = 0$.

Para ello, llamemos $g(z) = 2i$ y $h(z) = z(e^z - 1)$. Notemos que g y h son analíticas en $z_0 = 0$ y además $g(0) = 2i \neq 0$.

Entonces como $h(0) = h'(0) = 0$ pero $h''(0) = 2 \neq 0$ entonces, de acuerdo al Teorema 4.2.3, se tiene que f tiene un polo doble en $z_0 = 0$.

Luego, de acuerdo al Teorema 4.2.2, el residuo de f en el polo doble $z_0 = 0$ es

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \{z^2 f(z)\} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2i(e^z - 1 - ze^z)}{(e^z - 1)^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-iz}{e^z - 1} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-i}{e^z} = -i. \blacktriangle$$

4.3 El teorema de los residuos

El teorema de Cauchy-Goursat afirma que si una función f es analítica en todo punto dentro y sobre una curva simple cerrada seccionalmente suave C entonces

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

Sin embargo, si la función f es no analítica en un número finito de puntos interiores a C , usaremos los residuos de esos números que contribuirán al cálculo de la integral de f a lo largo de la curva C .

Teorema 4.3.1 (El teorema de los residuos). *Sea C una curva seccionalmente suave simple cerrada orientada positivamente, dentro y sobre la cual la función f es analítica excepto en un número finito z_1, z_2, \dots, z_n de singularidades aisladas interiores a C . Entonces*

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f, z_k).$$

Demostración. Sean z_1, z_2, \dots, z_n singularidades aisladas de f interiores a la curva C simple cerrada seccionalmente suave y orientada positivamente.

Consideremos además, curvas simples cerradas seccionalmente suaves y positivamente orientadas C_k con $k = 1, 2, \dots, n$ interiores a C y disjuntas entre sí que contienen en su interior a los puntos z_k con $k = 1, 2, \dots, n$ respectivamente, como se observa en la Figura 4.3.

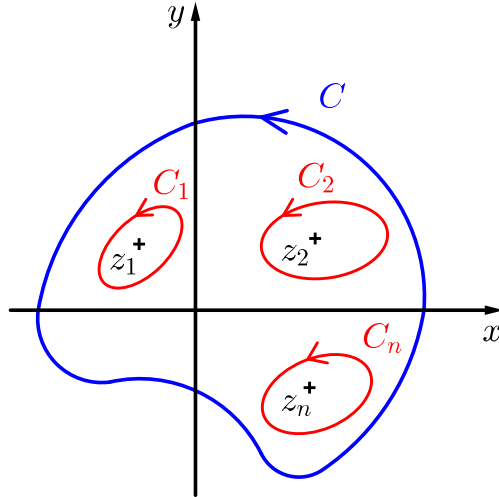


Figura 4.3: Curvas C, C_1, C_2, \dots, C_n

Las curvas C_k con $k = 1, 2, \dots, n$ junto con la curva C forman la frontera de una región cerrada dentro y sobre la cual la función f es analítica y cuyo interior es un conjunto conexo.

Entonces, por una consecuencia del Teorema de Cauchy-Goursat se tiene que

$$\oint_C f(z) dz - \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z) dz = 0. \quad (4.32)$$

Ahora bien, el residuo en cada una de las singularidades aisladas z_k donde $k = 1, 2, \dots, n$ de f está dado por

$$\text{Res}(f, z_k) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_k} f(z) dz \quad (4.33)$$

para todo $k = 1, 2, \dots, n$.

Luego, sustituyendo (4.33) en (4.32) se tiene entonces que

$$\oint_C f(z) dz - 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k) = 0$$

o equivalentemente

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k).$$

□

Ejemplo 4.3.1. *Haciendo uso del teorema de los residuos obtengamos el valor de la integral*

$$\oint_C \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz$$

donde C es la curva de ecuación $|z| = 4$ recorrida en sentido positivo.

Las singularidades de $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2 + z}$ son $z_1 = 0$ y $z_2 = -1$, ambas aisladas e interiores a la circunferencia positivamente orientada C de centro $z = 0$ y radio 4 por lo que

$$\oint_C \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz = 2\pi i [\text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, -1)].$$

Dado que $z_1 = 0$ es una singularidad evitable de f pues

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} = 1$$

entonces se sigue que $\text{Res}(f, 0) = 0$.

Por otro lado, y usando el Corolario 4.2.1, $z_2 = -1$ es un polo simple de f . En efecto la función f puede expresarse por

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z + 1}$$

donde si llamamos $\phi(z) = \frac{e^z - 1}{z}$ vemos que ϕ es analítica en $z_2 = -1$ y $\phi(-1) \neq 0$. Además,

$$\text{Res}(f, -1) = \frac{\phi(-1)}{0!} = 1 - e^{-1}.$$

Por lo tanto se tiene que

$$\oint_C \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz = 2\pi i(1 - e^{-1}). \blacktriangle$$

4.4 Ejercicios propuestos

- En cada uno de los siguientes casos obtenga la serie de Taylor de f alrededor del punto z_0 indicado, y determine la región en la cual la serie representa la función f .

(a) $f(z) = \frac{1}{1 + z^2}$, $z_0 = 0$

(d) $f(z) = e^{-z}$, $z_0 = 0$

(b) $f(z) = \text{sen } z$, $z_0 = \pi$

(e) $f(z) = 1 - \cos(2z)$, $z_0 = 0$

(c) $f(z) = \frac{1}{1 + z}$, $z_0 = 2$

(f) $f(z) = \text{sen } z^2$, $z_0 = 0$

- Utilice desarrollos conocidos para obtener la serie de Taylor de f en potencias de $z - 1$ e indique el círculo de convergencia en cada uno de los siguientes casos:

(a) $f(z) = \frac{z}{z - 2}$

(b) $f(z) = \frac{z}{z^2 - 2z + 5}$

- Sin efectuar el desarrollo, determine el círculo de convergencia de la serie de Taylor de la función f dada alrededor del punto indicado en cada uno de los siguientes casos:

$$(a) f(z) = \frac{\cos z}{1+z^2}, z_0 = 0 \qquad (c) f(z) = \frac{e^z}{1+e^z}, z_0 = 1, z_1 = 2i$$

$$(b) f(z) = \frac{e^z}{z^2-z}, z_0 = 4i, z_1 = 1+4i \qquad (d) f(z) = \frac{1}{\cos(\pi z)}, z_0 = 1, z_1 = -1$$

4. En cada uno de los siguientes casos obtenga la serie de potencias (de Taylor o Laurent), que represente a f en las regiones indicadas.

$$(a) f(z) = \frac{1}{z-1}; \quad S_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \quad S_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}.$$

$$(b) f(z) = \frac{1}{z^2+4z+3}; \quad S_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \quad S_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}, \quad S_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 3\}, \quad S_4 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z+4| < 3\}.$$

$$(c) f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}; \quad S_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| > 1\}, \quad S_2 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-2| < 1\}.$$

$$(d) f(z) = \frac{z}{z^2-1}; \quad S_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| > 2\}.$$

5. En cada uno de los casos siguientes obtenga todos los posibles desarrollos en serie de Laurent de la función f alrededor del punto z_0 indicado. Determine en cada caso la región de convergencia.

$$(a) f(z) = \frac{1}{z^2+1}, z_0 = i$$

$$(b) f(z) = z^2 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{z-1} \right), z_0 = 1$$

$$(c) f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}, z_0 = 0$$

6. Obtenga la serie de Taylor de $f(z) = \log(1+z)$ alrededor del punto $z_0 = 0$ y determine la región en la cual la serie representa a la función f .

7. Obtenga la función suma $f(z)$ de cada una de las siguientes series para $|z| < 1$:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} n z^n$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

8. Una función se dice *meromorfa* si sus únicas singularidades son polos. Se puede demostrar que el cociente de dos funciones enteras es una función entera o una función meromorfa. Analice en cuál de los siguientes casos la función f es entera o meromorfa.

$$(a) f(z) = z^2 e^{-z}$$

$$(c) f(z) = \frac{1 - \cos z}{z}$$

$$(b) f(z) = \frac{z^2+1}{3z-i}$$

$$(d) f(z) = z + \frac{1}{z}$$

9. En cada uno de los siguientes casos, se pide:

- (a) Determine todos los puntos de singularidad de la función f y clasifíquelos según su tipo.
 (b) Analice el comportamiento de f en $z = \infty$.
 (c) Calcule el residuo de la función f en cada uno de sus puntos singulares aislados.

i. $f(z) = \frac{z^4 + 4z + 1}{z^4 - 16}$

v. $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^2}$

ii. $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z}$

vi. $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$

iii. $f(z) = \frac{1}{(2\operatorname{sen} z - 1)^2}$

vii. $f(z) = \operatorname{sen} \left(\frac{z}{1 - z} \right)$

iv. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$

viii. $f(z) = \frac{z - 1}{z^2 + 1}$

10. Utilice el teorema de los residuos para calcular la integral de la función f sobre las curvas C indicadas, recorridas en sentido antihorario, en cada uno de los siguientes casos:

(a) $f(z) = \tan z$, $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$

(b) $f(z) = \frac{1}{\operatorname{sen} z}$, $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

(c) $f(z) = ze^{\frac{1}{z}}$, $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 3\}$

(d) $f(z) = \frac{2z^2 - 5}{(z - 1)^3(z + 2)^2}$, $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 2\}$

(e) $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z}$, $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

Una aplicación del teorema de los residuos: cálculo de integrales reales

Una importante aplicación de la teoría de residuos es la evaluación de ciertos tipos de integrales reales definidas o impropias. Consideraremos aquí dos de los tipos más comunes de integrales reales que pueden ser evaluadas de esta manera.

11. Integrales reales impropias del tipo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

donde $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ es par con p y q polinomios reales sin factores comunes, y donde q no tiene raíces reales.

Para evaluar tales integrales, consideremos la integral de contorno

$$\oint_C f(z) dz$$

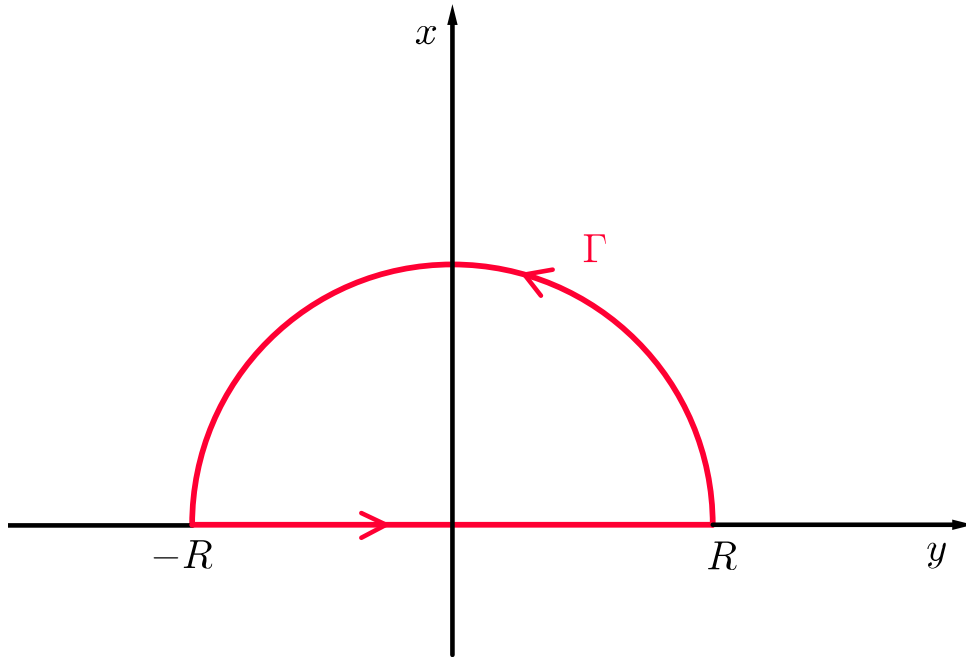


Figura 4.4: Contorno C

donde C es el contorno cerrado ilustrado en la Figura 4.4, que consta del eje real entre $-R$ y R y la semicircunferencia Γ , de radio R , en el semiplano superior z .

Como $z = x$ en el eje real entonces podemos escribir

$$\oint_C f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\Gamma} f(z) dz.$$

Entonces al tomar $R \rightarrow +\infty$ en la igualdad anterior tendremos que

$$\oint_C f(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

si $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma} f(z) dz = 0$. Para probar esto último, consideremos la parametrización para la curva Γ , $z = Re^{i\theta}$ donde $0 \leq \theta \leq \pi$. Luego,

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_0^{\pi} f(Re^{i\theta}) Rie^{i\theta} d\theta.$$

Para que esta última integral tienda a cero si $R \rightarrow +\infty$, $|f(Re^{i\theta})|$ debe decrecer al menos tan rápidamente como R^{-2} . Esto implica que el grado del denominador de la función racional dada por $f(x)$ debe ser al menos dos veces mayor que el grado del numerador,

es decir, $\text{grado}(q) \geq 2 + \text{grado}(p)$. Así, suponiendo que esta condición es satisfecha, esta aproximación puede utilizarse para calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

(a) Pruebe que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)^2} = \frac{\pi}{16}$.

(b) Calcule $\int_0^{+\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$.

Sugerencia: Use el hecho de que si f es una función par entonces se tiene que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x) dx.$$

12. Integrales reales definidas del tipo

$$\int_0^{2\pi} R(\text{sen } \theta, \text{cos } \theta) d\theta$$

donde R es una función racional de $\text{sen } \theta$ y $\text{cos } \theta$.

Para evaluar este tipo de integrales hagamos el cambio de variable

$$z = e^{i\theta}.$$

Entonces $dz = ie^{i\theta} d\theta$ de donde se tiene que

$$d\theta = \frac{dz}{iz}$$

y el intervalo real $[0, 2\pi]$ se transforma en la circunferencia unitaria C de ecuación $|z| = 1$.

Por otro lado,

$$z = e^{i\theta} = \text{cos } \theta + i \text{sen } \theta \tag{4.34}$$

y

$$z^{-1} = e^{-i\theta} = \text{cos } \theta - i \text{sen } \theta. \tag{4.35}$$

Sumando miembro a miembro (4.34) y (4.35) se tiene

$$\text{cos } \theta = \frac{z + z^{-1}}{2}$$

y restando (4.35) de (4.34) se tiene que

$$\text{sen } \theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}.$$

Por lo tanto,

$$\int_0^{2\pi} R(\text{sen } \theta, \text{cos } \theta) d\theta = \oint_C R\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right) \frac{dz}{iz}$$

y se aplica el teorema de los residuos a la integral de la derecha.

(a) Pruebe que $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \operatorname{sen} \theta} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$.

(b) Calcule $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2 \cos \theta + \operatorname{sen} \theta}$.

Capítulo 5

La transformación de Laplace

Los orígenes de la Transformada de Laplace se deben a trabajos realizados por el ingeniero electricista Heaviside (1900) el cual desarrolló un método para resolver en forma sistemática ecuaciones diferenciales ordinarias a coeficientes constantes. Heaviside no estaba interesado en demostraciones rigurosas, sino en un método práctico para resolver problemas. Aunque su método no fue aceptado inicialmente por la comunidad matemática, años más tarde se pudo probar que los fundamentos teóricos de su trabajo, podía ser fundamentado con la Transformada Integral desarrollada por el matemático Laplace casi un siglo antes, a quien se le debe el nombre.

La transformada de Laplace tiene un papel clave en el análisis y diseño de sistemas de ingeniería. Se trata de una transformada integral cuyo propósito es crear un nuevo dominio en el cual sea más simple manipular el problema a ser investigado.

Una de las aplicaciones de la transformada de Laplace es que transforma ecuaciones diferenciales en un dominio real en ecuaciones algebraicas en un dominio complejo, más sencillo de resolver. Por ejemplo, puede aplicarse para resolver sistemas como circuitos eléctricos, vibraciones mecánicas, etc.

Sea por ejemplo, el sistema masa-resorte amortiguado al cual se le aplica una fuerza externa $f = f(t)$ como se observa en la Figura 5.1.

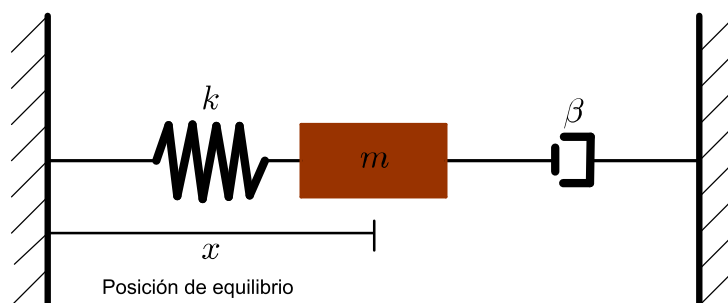


Figura 5.1: Sistema masa-resorte-amortiguador

Por la segunda ley de Newton, sabemos que podemos modelizarlo de la forma

$$mx''(t) = -kx(t) - \beta x'(t) + f(t)$$

o equivalentemente

$$mx''(t) + \beta x'(t) + kx(t) = f(t)$$

donde m es la masa del objeto, k es la constante del resorte y β es la constante de la amortiguación. Tal ecuación es una ecuación diferencial lineal de segundo orden a coeficientes constantes.

Para ciertas condiciones iniciales, conocemos métodos para resolver tal ecuación que fueron tratados en Cálculo IV. Sin embargo, si la fuerza externa f se trata de una función: discontinua, periódica, un pulso o bien un impulso, los métodos clásicos son tediosos para resolver y la transformada de Laplace presenta ventajas a la hora de su resolución.

De esta forma, la transformada de Laplace, transformará la ecuación diferencial en una ecuación algebraica en un dominio complejo, el cual una vez resuelta, se invierte el proceso mediante la transformada inversa de Laplace para así obtener la solución buscada.

5.1 La transformada de Laplace

Definición (Transformada de Laplace). Sea f una función definida en $t \in [0, +\infty)$. Si la integral impropia

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

es convergente para un subconjunto no vacío $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ de valores de la variable compleja s , se dice que f es transformable por Laplace, y tal integral impropia definirá una función $F = F(s)$ llamada transformada de Laplace de f .

Notamos

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (5.1)$$

para toda $s \in \Omega$.

Si queremos obtener la transformada de Laplace de una función $f = f(t)$ la cual está definida también para valores de $t < 0$, haremos uso de la **función escalón unitario** o **función de Heaviside**

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases} .$$

De esta manera,

$$f(t)H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ f(t) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

es una **función causal** y podemos así aplicar (5.1) para obtener su transformada de Laplace. Sin embargo, la transformada de Laplace de $f(t)H(t)$ contiene sólo información sobre el comportamiento de $f(t)$ para $t \geq 0$.

La transformada de Laplace de la constante c

Consideremos la función $f(t) = c$ (c constante no nula) con $t \geq 0$. Observemos primero que:

$$\int_0^T ce^{-st} dt = \begin{cases} cT & \text{si } s = 0 \\ -\frac{c}{s}(e^{-sT} - 1) & \text{si } s \neq 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

Entonces, de (5.2) se tiene que si $s = 0$ la integral impropia

$$\int_0^{+\infty} ce^{-st} dt = \pm\infty,$$

mientras que si $s = x + iy \neq 0$ se tiene que:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} -\frac{c}{s}(e^{-sT} - 1) = \lim_{T \rightarrow +\infty} -\frac{c}{s} [e^{-xT} (\cos(yT) - i \operatorname{sen}(yT)) - 1] = \frac{c}{s}$$

si $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$ mientras que si $x \leq 0$ para cualquier $y \in \mathbb{R}$, el límite no existe.

Luego,

$$\mathfrak{L}\{c\} = \frac{c}{s} \quad \text{si } \operatorname{Re}(s) > 0.$$

La transformada de Laplace de e^{kt}

Sea la función

$$f(t) = e^{kt}$$

donde $k \in \mathbb{R}$ y $t \geq 0$. Observemos que,

$$\int_0^T e^{kt} e^{-st} dt = \begin{cases} T & \text{si } s = k \\ \frac{1}{k-s}(e^{(k-s)T} - 1) & \text{si } s \neq k \end{cases} \quad (5.3)$$

De (5.3) vemos que si $s = k$ la integral impropia

$$\int_0^{+\infty} e^{kt} e^{-st} dt = +\infty,$$

mientras que si $s = x + iy \neq k$ entonces

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{k-s}(e^{(k-s)T} - 1) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{k-s} [e^{(k-x)T} (\cos(yT) - i \operatorname{sen}(yT)) - 1] = \frac{1}{s-k}$$

si $x > k$, $y \in \mathbb{R}$ mientras que si $x \leq k$ para cualquier $y \in \mathbb{R}$, el límite no existe.

Por lo tanto

$$\mathfrak{L}\{e^{kt}\} = \frac{1}{s-k} \quad \text{si } \operatorname{Re}(s) > k.$$

La transformada de Laplace de t

Sea $f(t) = t$, $t \geq 0$. Es claro que:

$$\int_0^T te^{-st} dt = \begin{cases} \frac{T^2}{2} & \text{si } s = 0 \\ \frac{1}{s^2} + e^{-sT} \left(-\frac{T}{s} - \frac{1}{s^2} \right) & \text{si } s \neq 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

De (5.4) vemos que si $s = 0$ la integral impropia

$$\int_0^{+\infty} te^{-st} dt = +\infty,$$

mientras que si $s = x + iy \neq 0$ entonces

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{s^2} + e^{-sT} \left(-\frac{T}{s} - \frac{1}{s^2} \right) = \frac{1}{s^2}$$

si $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$ mientras que si $x \leq 0$ para cualquier $y \in \mathbb{R}$, el límite no existe. Luego,

$$\mathfrak{L}\{t\} = \frac{1}{s^2} \quad \text{si } \operatorname{Re}(s) > 0.$$

Las transformadas de Laplace de $\cos(\omega t)$ y $\operatorname{sen}(\omega t)$

Comencemos considerando $f(t) = \cos(\omega t)$ donde $t \geq 0$ y $\omega \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\int_0^T \cos(\omega t)e^{-st} dt = \frac{e^{-sT}}{s^2 + \omega^2} (\omega \operatorname{sen}(\omega T) - s \cos(\omega T)) + \frac{s}{s^2 + \omega^2}. \quad (5.5)$$

Si en (5.5) hacemos $T \rightarrow +\infty$, la integral diverge si $\operatorname{Re}(s) \leq 0$ mientras que si $\operatorname{Re}(s) > 0$ la integral converge resultando que:

$$\mathfrak{L}\{\cos(\omega t)\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad \text{si } \operatorname{Re}(s) > 0.$$

Sea ahora la función $f(t) = \operatorname{sen}(\omega t)$ donde $t \geq 0$ y $\omega \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\int_0^T \operatorname{sen}(\omega t)e^{-st} dt = -\frac{e^{-sT}}{s^2 + \omega^2} (\omega \cos(\omega T) + s \operatorname{sen}(\omega T)) + \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \quad (5.6)$$

Luego si en (5.6) tomamos $T \rightarrow +\infty$, la integral diverge si $\operatorname{Re}(s) \leq 0$ mientras que si $\operatorname{Re}(s) > 0$ la integral converge resultando que:

$$\mathfrak{L}\{\operatorname{sen}(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad \text{si } \operatorname{Re}(s) > 0.$$

5.1.1 Existencia de la transformada de Laplace

En la definición 5.1.1, establecimos que la transformada de Laplace de $f(t)$ existe si y sólo si la integral impropia (5.1) es convergente para al menos algún valor de la variable compleja s .

En esta sección indicaremos algunas condiciones que debe satisfacer la función $f(t)$ para asegurar la existencia de su transformada de Laplace. Para ello, introduciremos la noción de función de orden exponencial.

Definición (Orden exponencial). Se dice que la función $f = f(t)$ es de orden exponencial en $[0, +\infty)$ si existen constantes $\tau \in \mathbb{R}$ y $M > 0$ tal que

$$|f(t)| \leq Me^{\tau t}$$

para toda $t \geq 0$.

Ejemplo 5.1.1. Dado que

$$f(t) = t^2 \leq e^t$$

para cualquier $t \geq 0$ entonces se tiene que $f(t) = t^2$ con $t \geq 0$ es de orden exponencial. ▲

Ejemplo 5.1.2. La función dada por $f(t) = e^{t^2}$ no es de orden exponencial en $[0, +\infty)$.

En efecto,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{t^2}}{e^{\tau t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{t^2 - \tau t} = +\infty$$

para cualquier $\tau \in \mathbb{R}$, por lo que no existen constantes $M > 0$ y $\tau \in \mathbb{R}$ tal que

$$e^{t^2} \leq Me^{\tau t}$$

para cualquier $t \geq 0$. ▲

Estamos en condiciones de enunciar un teorema que nos asegura la existencia de la transformada de Laplace de una función $f = f(t)$.

Teorema 5.1.1. Si f es una función seccionalmente continua y de orden exponencial en $[0, +\infty)$, entonces existe un número real σ tal que la integral impropia

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

es convergente para todo $s \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}(s) > \sigma$.

Observación 5.1.1. *El teorema establece condiciones suficientes para asegurar que f es transformable por Laplace, pero no necesarias. En efecto, la función dada por*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

tiene una discontinuidad infinita en $t = 0$, sin embargo es transformable por Laplace pues si consideramos el cambio de variable

$$t = \frac{x^2}{s}$$

se tiene que

$$\mathfrak{L} \left\{ \frac{1}{\sqrt{t}} \right\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{\sqrt{s}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{s}} \frac{\sqrt{\pi}}{s} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

si $\operatorname{Re}(s) > 0$.

El Teorema 5.1.1 indica además de condiciones suficientes para la existencia de transformada de Laplace de una función $f = f(t)$, que su función transformada

$$F(s) = \mathfrak{L} \{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

tiene por dominio

$$\Omega = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \sigma\} \subseteq \mathbb{C}.$$

Al conjunto Ω se lo llama región de convergencia de la transformada de Laplace y σ recibe el nombre de abscisa de convergencia.

Por ejemplo, dado que

$$\mathfrak{L} \{c\} = \frac{c}{s}$$

si $\operatorname{Re}(s) > 0$ entonces la región de convergencia es $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > 0\}$ y la abscisa de convergencia es $\sigma = 0$.

5.1.2 Linealidad del operador \mathfrak{L}

El conjunto R de todas las funciones reales $f = f(t)$ seccionalmente continuas y de orden exponencial en $[0, +\infty)$, junto con las operaciones de suma y producto por escalar definidos de manera habitual, constituyen un espacio vectorial al que notamos \mathfrak{F}_R .

Ahora bien, el conjunto C de todas las funciones complejas $F = F(s)$ cuyo dominio es $\Omega = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \sigma\}$, junto con las operaciones de suma y producto por escalar definidos en forma habitual, también puede ser considerado como un espacio vectorial al que notamos \mathfrak{F}_C . Para ello se debe modificar la definición habitual de igualdad de funciones con el objeto de posibilitar la suma entre sus elementos, ya que no todas las funciones de C tienen el mismo dominio Ω . De este modo, se permitirá que si F y G son funciones de C , cuyos dominios son $\Omega_1 = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \sigma_1\}$ y $\Omega_2 = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \sigma_2\}$ respectivamente, entonces su función suma $F + G$ será la función cuyo dominio es la intersección de los dominios de F y G es decir $\Omega_3 = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \sigma\}$ donde $\sigma = \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$.

En consecuencia y por la linealidad de la integral, el operador \mathfrak{L} “transformar por Laplace” es una **transformación lineal** entre el espacio vectorial \mathfrak{F}_R y el espacio vectorial \mathfrak{F}_C ,

$$\mathfrak{L} : \mathfrak{F}_R \rightarrow \mathfrak{F}_C$$

tal que

$$\mathfrak{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

donde para cualesquiera α y β contantes y f y g funciones de R se tiene que:

$$\mathfrak{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathfrak{L}\{f(t)\} + \beta \mathfrak{L}\{g(t)\}.$$

Ejemplo 5.1.3. Para obtener $\mathfrak{L}\{3t + 2e^{3t}\}$ notemos primero que

$$\mathfrak{L}\{t\} = \frac{1}{s^2} \quad \text{si } \operatorname{Re}(s) > 0$$

y

$$\mathfrak{L}\{e^{3t}\} = \frac{1}{s-3} \quad \text{si } \operatorname{Re}(s) > 3.$$

Entonces,

$$\mathfrak{L}\{3t + 2e^{3t}\} = 3\mathfrak{L}\{t\} + 2\mathfrak{L}\{e^{3t}\} = \frac{3}{s^2} + \frac{2}{s-3}$$

si $\operatorname{Re}(s) > \max\{0, 3\} = 3$. ▲

5.2 Propiedades de la Transformada de Laplace

En esta sección presentamos una serie de propiedades que nos permitirán hallar la transformada de Laplace de una función sin necesidad de recurrir a la definición de la misma.

Teorema 5.2.1 (Primer teorema de traslación). *Sea $f = f(t)$ una función cuya transformada de Laplace es $F = F(s)$ con $\operatorname{Re}(s) > \tau$. Entonces la función dada por $e^{at}f(t)$ es transformable por Laplace y su transformada está dada por*

$$\mathfrak{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a) = \mathfrak{L}\{f(t)\}|_{s-a}$$

donde $\operatorname{Re}(s) > \tau + a$.

Demostración. Por hipótesis,

$$\mathfrak{L}\{f(t)\} = F(s) \quad \text{si } \operatorname{Re}(s) > \tau.$$

Entonces,

$$\mathfrak{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{at}f(t)e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t}f(t) dt = F(s-a)$$

si $\operatorname{Re}(s-a) > \tau$ ó equivalentemente $\operatorname{Re}(s) > \tau + a$. □

Ejemplo 5.2.1. $\mathcal{L}\{te^{-2t}\} = \mathcal{L}\{t\}|_{s+2} = \frac{1}{(s+2)^2}$ si $\text{Re}(s) > 0 + (-2) = -2$.▲

Ejemplo 5.2.2. $\mathcal{L}\{e^{3t}\text{sen}(2t)\} = \mathcal{L}\{\text{sen}(2t)\}|_{s-3} = \frac{2}{(s-3)^2 + 4}$ si $\text{Re}(s) > 0 + 3 = 3$.▲

Teorema 5.2.2 (Derivada de la transformada). Si $f = f(t)$ es una función cuya transformada de Laplace es $F = F(s)$ con $\text{Re}(s) > \tau$, entonces la función dada por $t^n f(t)$ con $n \in \mathbb{N}$ es transformable por Laplace y su transformada está dada por

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

donde $\text{Re}(s) > \tau$.

Demostración. Por hipótesis, $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ si $\text{Re}(s) > \tau$.

$$\begin{aligned} F^{(n)}(s) &= \frac{d^n}{ds^n} \left(\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \right) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^n}{\partial s^n} (e^{-st} f(t)) dt = \\ &= (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n e^{-st} f(t) dt = (-1)^n \mathcal{L}\{t^n f(t)\} \end{aligned}$$

si $\text{Re}(s) > \tau$. □

Ejemplo 5.2.3. $\mathcal{L}\{t\text{sen}(3t)\} = (-1)^1 \frac{d}{ds} (\mathcal{L}\{\text{sen}(3t)\}) = -\frac{d}{ds} \left(\frac{3}{s^2 + 9} \right) = \frac{6s}{(s^2 + 9)^2}$.▲

Ejemplo 5.2.4. Si queremos obtener $\mathcal{L}\{t^n\}$ donde $n \in \mathbb{N}$, notemos que:

$$n = 1 \Rightarrow \mathcal{L}\{t\} = -\frac{d}{ds} (\mathcal{L}\{1\}) = -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s} \right) = \frac{1}{s^2},$$

$$n = 2 \Rightarrow \mathcal{L}\{t^2\} = -\frac{d}{ds} (\mathcal{L}\{t\}) = -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^2} \right) = \frac{2}{s^3},$$

$$n = 3 \Rightarrow \mathcal{L}\{t^3\} = -\frac{d}{ds} (\mathcal{L}\{t^2\}) = -\frac{d}{ds} \left(\frac{2}{s^3} \right) = \frac{6}{s^4},$$

y así sucesivamente se puede probar que para cualquier $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}. \blacktriangle$$

5.3 Transformada inversa de Laplace

En la Sección 5.1.2 vimos que el operador \mathcal{L} es una transformación lineal entre el espacio vectorial \mathfrak{F}_R y el espacio vectorial \mathfrak{F}_C .

Es de sumo interés determinar si \mathcal{L} es 1-1, con el objetivo de intentar definir una transformación inversa. Es decir, nuestra intención es determinar si existe una única solución $y(t)$ de la ecuación

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = F(s). \tag{5.7}$$

El siguiente teorema, conocido como el teorema de Lerch, asegura que la ecuación (5.7) tiene solución $y(t)$ y que la misma será única.

Teorema 5.3.1 (de Lerch). *Si f y g son funciones continuas y de orden exponencial en $[0, +\infty)$ tales que $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g(t)\}$ donde $\text{Re}(s) > \tau$, entonces*

$$f(t) = g(t)$$

para todo $t \geq 0$.

Por lo tanto, esta solución $y(t)$ de (5.7) es llamada **antitransformada de Laplace** o **transformada inversa de Laplace** de F , se simboliza por \mathcal{L}^{-1} y se caracteriza por

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) \Leftrightarrow \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s).$$

Si las funciones f y g del Teorema 5.3.1 son seccionalmente continuas en $[0, +\infty)$, el teorema de Lerch establece que si sus transformadas son iguales entonces las funciones f y g son “casi” iguales. Sin embargo, no identificaremos esta situación y trabajaremos como si fuesen continuas pues su desarrollo no es sencillo y escapa de los intereses de este curso.

También, tenemos que tener en cuenta que si la función $f = f(t)$ no es causal, deberemos escribir

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)H(t).$$

Es sencillo verificar que el operador antitransformada de Laplace \mathcal{L}^{-1} es **lineal**, es decir si F y G son funciones cuyas antitransformadas existen, entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

donde α y β son constantes.

Ejemplo 5.3.1. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-3}\right\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} = 2e^{3t}.$ ▲

Ejemplo 5.3.2. Para obtener $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)(s-2)}\right\}$ descompongamos primero

$$\frac{1}{(s+3)(s-2)}$$

en fracciones simples. Entonces,

$$\frac{1}{(s+3)(s-2)} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s-2} = \frac{(A+B)s + (-2A+3B)}{(s+3)(s-2)}$$

por lo que

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A+3B=1 \end{cases}$$

de donde se tiene que $A = -\frac{1}{5}$ y $B = \frac{1}{5}$.

Luego,

$$\mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+3)(s-2)} \right\} = -\frac{1}{5} \mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+3} \right\} + \frac{1}{5} \mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-2} \right\} = \frac{-1}{5} e^{-3t} + \frac{1}{5} e^{2t}. \blacktriangle$$

Inversión usando el primer teorema de traslación

Una consecuencia importante del Teorema 5.2.1 (primer teorema de traslación) es la fórmula que se obtiene del mismo al plantearla en términos de antitransformadas:

$$\mathfrak{L}^{-1} \{F(s-a)\} = e^{at} f(t)$$

siendo $f(t) = \mathfrak{L}^{-1} \{F(s)\}$.

Ejemplo 5.3.3. $\mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+2)^3} \right\} = e^{-2t} \mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^3} \right\} = \frac{1}{2} e^{-2t} \mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{s^3} \right\} = \frac{1}{2} e^{-2t} t^2. \blacktriangle$

Ejemplo 5.3.4. $\mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{s+7}{s^2+2s+5} \right\} = \mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{s+7}{(s+1)^2+4} \right\} = \mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{(s+1)+6}{(s+1)^2+4} \right\} =$
 $= \mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{s+1}{(s+1)^2+4} \right\} + \mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{6}{(s+1)^2+4} \right\} = e^{-t} \mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2+4} \right\} + 3e^{-t} \mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{s^2+4} \right\} =$
 $= e^{-t} \cos(2t) + 3e^{-t} \text{sen}(2t). \blacktriangle$

5.4 Más propiedades de la transformada de Laplace

En esta Sección deduciremos dos propiedades más de esta transformación integral de fundamental importancia para las aplicaciones, y que permiten expresar las transformadas de la derivada y de la integral de una función.

5.4.1 Transformada de Laplace de la derivada

Sea f una función transformable por Laplace en $(0, +\infty)$ cuya derivada f' es seccionalmente continua y de orden exponencial en $[0, +\infty)$ tal que

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Entonces,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t) dt \quad (5.8)$$

donde integrando por partes (5.8) se tiene que

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = (e^{-st} f(t))|_{0^+}^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = (e^{-st} f(t))|_{0^+}^{+\infty} + sF(s) \quad (5.9)$$

Por otro lado,

$$(e^{-st} f(t))|_{0^+}^{+\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-st} f(t) - \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-st} f(t) = -f(0^+) \quad (5.10)$$

pues $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-st} f(t) = 0$ debido a que la función dada por $e^{-st} f(t)$ es de orden exponencial.

Por lo tanto, sustituyendo (5.10) en (5.9) se tiene entonces que

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = -f(0^+) + sF(s). \quad (5.11)$$

Si la función f es continua en $t = 0$, esto es $f(0) = f(0^-) = f(0^+)$ entonces (5.11) se expresa como

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = -f(0) + sF(s) \quad (5.12)$$

De forma análoga, se obtiene la transformada de Laplace de la derivada segunda f'' y es

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = -f'(0) - sf(0) + s^2 F(s) \quad (5.13)$$

y así, se puede probar, mediante inducción matemática, que para cualquier $n \in \mathbb{N}$, la transformada de Laplace de la derivada n -ésima de f está dada por:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = -f^{(n-1)}(0) - sf^{(n-2)}(0) - \dots - s^{n-1}f(0) + s^n F(s) \quad (5.14)$$

La importancia de (5.14) radica en la resolución de ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones diferenciales. De hecho, haciendo uso de la transformada de Laplace en la ecuación diferencial cuya incógnita es $x(t)$, usando (5.14) y las condiciones iniciales establecidas en la misma, tal ecuación diferencial se transforma en una ecuación algebraica en la variable $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ donde resolviéndola y antitransformando se obtiene $x(t)$.

Ejemplo 5.4.1. Para resolver la ecuación diferencial

$$x'' + 5x' + 6x = 2e^{-t} \quad (5.15)$$

con las condiciones iniciales $x(0) = 1$ y $x'(0) = 0$, apliquemos a ambos miembros de (5.15) la transformada de Laplace

$$\mathfrak{L}\{x'' + 5x' + 6x\} = \mathfrak{L}\{2e^{-t}\}. \quad (5.16)$$

Por las propiedades de la transformada de Laplace y usando (5.13) se tiene entonces que

$$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + 5(sX(s) - x(0)) + 6X(s) = \frac{2}{s+1} \quad (5.17)$$

donde $X(s) = \mathfrak{L}\{x(t)\}$. Usando las condiciones iniciales, entonces (5.17) se expresa como

$$(s^2 + 5s + 6)X(s) = \frac{2}{s+1} + s + 5 \quad (5.18)$$

o equivalentemente

$$X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}. \quad (5.19)$$

Entonces, antitransformando (5.19) se tiene la solución del problema dado:

$$x(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{X(s)\} = e^{-t} + e^{-2t} - e^{-3t}. \blacktriangle$$

Ejemplo 5.4.2. Supongamos que queremos hallar las funciones $x = x(t)$ e $y = y(t)$ que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x' + y' + 5x + 3y = e^{-t} \\ 2x' + y' + x + y = 3 \end{cases}$$

con las condiciones iniciales $x(0) = 2$, $y(0) = 1$.

Transformando por Laplace cada una de las ecuaciones del sistema anterior, usando propiedades de la transformada y (5.12) se tiene que

$$\begin{cases} sX(s) - x(0) + sY(s) - y(0) + 5X(s) + 3Y(s) = \frac{1}{s+1} \\ 2sX(s) - 2x(0) + sY(s) - y(0) + X(s) + Y(s) = \frac{3}{s} \end{cases}$$

donde $X(s) = \mathfrak{L}\{x(t)\}$ y $Y(s) = \mathfrak{L}\{y(t)\}$.

Usando las condiciones iniciales dadas en el sistema anterior, se tiene entonces que

$$\begin{cases} (s+5)X(s) + (s+3)Y(s) = \frac{3s+4}{s+1} \\ (2s+1)X(s) + (s+1)Y(s) = \frac{5s+3}{s} \end{cases} \quad (5.20)$$

Ahora bien, para resolver el sistema (5.20), podemos utilizar cualquiera de los métodos resolución de sistemas de ecuaciones. Aquí, usaremos la regla de Cramer. Para ello, calculemos primero el determinante de la matriz de coeficientes de (5.20),

$$\Delta = \begin{vmatrix} s+5 & s+3 \\ 2s+1 & s+1 \end{vmatrix} = (s+5)(s+1) - (s+3)(2s+1) = -(s+2)(s-1) \quad (5.21)$$

Sea ahora el determinante:

$$\Delta_X = \begin{vmatrix} \frac{3s+4}{s+1} & s+3 \\ \frac{5s+3}{s} & s+1 \end{vmatrix} = \frac{-2s^2 - 14s - 9}{s} \quad (5.22)$$

Entonces, para obtener $X(s)$ usamos (5.21) y (5.20) donde se tiene que

$$X(s) = \frac{\Delta_X}{\Delta} = \frac{2s^2 + 14s + 9}{s(s+2)(s-1)} = -\frac{9}{2} \frac{1}{s} - \frac{11}{16} \frac{1}{s+2} + \frac{25}{3} \frac{1}{s-1} \quad (5.23)$$

y luego antitransformando (5.23) se tiene entonces que

$$x(t) = -\frac{9}{2} - \frac{11}{16}e^{-2t} + \frac{25}{3}e^t. \quad (5.24)$$

Para obtener $y(t)$ procedemos de manera análoga al caso anterior. Para ello, calculemos:

$$\Delta_Y = \begin{vmatrix} s+5 & \frac{3s+4}{s+1} \\ 2s+1 & \frac{5s+3}{s} \end{vmatrix} = \frac{-s^3 + 22s^2 + 39s + 15}{s(s+1)} \quad (5.25)$$

Luego, usando (5.20) y (5.25) se tiene que:

$$Y(s) = \frac{\Delta_Y}{\Delta} = \frac{-s^3 + 22s^2 + 39s + 15}{s(s+1)(s+2)(s-1)} = \frac{15}{2} \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+1} + \frac{11}{2} \frac{1}{s+2} - \frac{25}{2} \frac{1}{s-1} \quad (5.26)$$

y antitransformando (5.26) se tiene que:

$$y(t) = \frac{15}{2} + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{11}{2}e^{-2t} - \frac{25}{2}e^t. \quad (5.27)$$

Por lo tanto, de (5.24) y (5.27) tenemos

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{9}{2} - \frac{11}{16}e^{-2t} + \frac{25}{3}e^t \\ y(t) = \frac{15}{2} + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{11}{2}e^{-2t} - \frac{25}{2}e^t \end{cases}$$

que es la solución del sistema de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales. ▲

5.4.2 Transformada de Laplace de integrales

Sea f una función continua en $[0, +\infty)$, cuya función integral

$$g(t) = \int_0^t f(x) dx$$

sea transformable por Laplace.

Dado que $g'(t) = f(t)$ entonces

$$\mathcal{L}\{g'(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

o equivalentemente

$$s\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0) = \mathcal{L}\{f(t)\}. \quad (5.28)$$

Como $g(0) = 0$ entonces (5.28) se reduce a

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}$$

o equivalentemente

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(x) dx\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}. \quad (5.29)$$

Ejemplo 5.4.3. $\mathcal{L}\left\{\int_0^t (x^3 + \text{sen}(2x)) dx\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{t^3 + \text{sen}(2t)\} = \frac{6}{s^5} + \frac{2}{s(s^2 + 4)}. \blacktriangle$

5.5 El segundo teorema de traslación

5.5.1 La función escalón unitario

En la Sección 5.1 presentamos la función escalón unitario o de Heaviside H definida por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}.$$

Si a es un número no negativo, $H(t-a)$ es la función escalón unitario desplazada a unidades a la derecha. Más precisamente,

$$H(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ 1 & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

y cuya gráfica se observa en la Figura 5.2.

La función escalón unitario puede ser interpretada como un mecanismo para “encender” una función $f = f(t)$ en $t = a$ como se observa en la Figura 5.3.

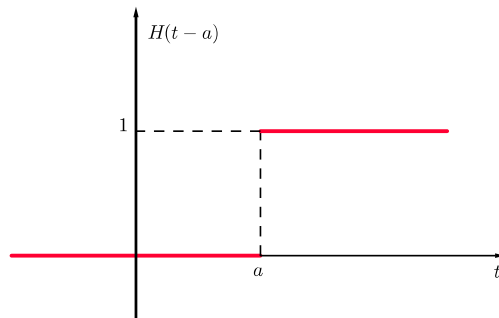


Figura 5.2: Función escalón unitario desplazado $H(t - a)$

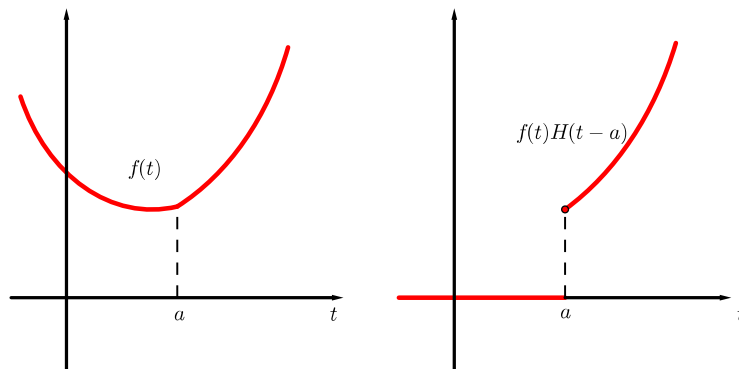


Figura 5.3: Gráfica de $f(t)H(t - a)$

y cuya expresión está dada por

$$f(t)H(t - a) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ f(t) & \text{si } t \geq a \end{cases} .$$

También, la función escalón unitario es especialmente útil para dar **expresiones compactas** de ciertas funciones que tienen una ley definida por tramos. Sea por ejemplo,

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & \text{si } 0 < t < t_1 \\ f_2(t) & \text{si } t_1 < t < t_2 \\ f_3(t) & \text{si } t > t_2 \end{cases} \quad (5.30)$$

cuya gráfica se muestra en la Figura 5.4.

Para obtener una expresión compacta de (5.30), podemos hacer uso de las “operaciones de encendido”

1. encender $f_1(t)$ en $t = 0$,
2. encender $f_2(t)$ y apagar $f_1(t)$ en $t = t_1$,
3. encender $f_3(t)$ y apagar $f_2(t)$ en $t = t_2$.

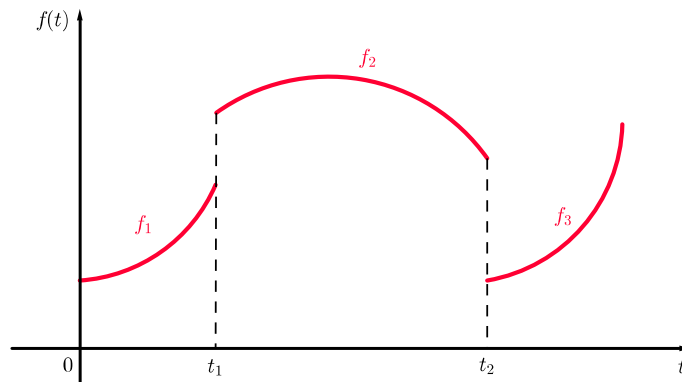


Figura 5.4: Gráfica de la función $f(t)$

Entonces (5.30) toma la forma:

$$f(t) = f_1(t)H(t) + [f_2(t) - f_1(t)]H(t - t_1) + [f_3(t) - f_2(t)]H(t - t_2). \quad (5.31)$$

Pero también (5.31) se puede expresar como

$$f(t) = f_1(t)[H(t) - H(t - t_1)] + f_2(t)[H(t - t_1) - H(t - t_2)] + f_3(t)H(t - t_2). \quad (5.32)$$

que se conoce como la construcción compacta de (5.30) haciendo uso de la función “sombrero de copa” y cuya expresión es,

$$H(t - a) - H(t - b) = \begin{cases} 1 & \text{si } a < t < b \\ 0 & \text{si } t < a \text{ ó } t > b \end{cases}$$

y cuya gráfica se muestra en la Figura 5.5.

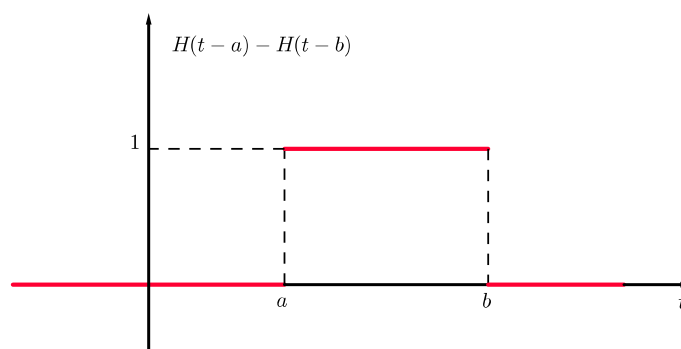


Figura 5.5: Función sombrero de copa

Ejemplo 5.5.1. Para expresar de forma compacta la función definida por

$$f(t) = \begin{cases} 2t^2 & \text{si } 0 \leq t < 3 \\ t + 4 & \text{si } 3 \leq t < 5 \\ 9 & \text{si } t \geq 5 \end{cases}$$

entonces haciendo uso de las operaciones de encendido tenemos

$$f(t) = 2t^2 H(t) + (t + 4 - 2t^2) H(t - 3) + (9 - t - 4) H(t - 5)$$

o equivalentemente

$$f(t) = 2t^2 H(t) + (t + 4 - 2t^2) H(t - 3) + (5 - t) H(t - 5).$$

Si usamos la función sombrero de copa para expresarla en forma compacta se tiene que:

$$f(t) = 2t^2 [H(t) - H(t - 3)] + (t + 4) [H(t - 3) - H(t - 5)] + 9H(t - 5),$$

y es una expresión equivalente a la obtenida anteriormente.▲

5.5.2 Transformada de Laplace de la función escalón unitario

Sea la función escalón unitario

$$H(t - a) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ 1 & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

donde $a \geq 0$. Entonces,

$$\mathfrak{L}\{H(t - a)\} = \int_a^{+\infty} e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_a^T e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(-\frac{e^{-sT}}{s} + \frac{e^{-as}}{s} \right) \quad (5.33)$$

Dado que

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} -\frac{e^{-sT}}{s} = 0$$

si $\text{Re}(s) > 0$ entonces obtenemos de (5.33) que

$$\mathfrak{L}\{H(t - a)\} = \frac{e^{-as}}{s} \quad (5.34)$$

si $\text{Re}(s) > 0$.

En particular, y como es de esperar, si $a = 0$ entonces (5.34) se reduce a:

$$\mathfrak{L}\{H(t)\} = \frac{1}{s} \quad (5.35)$$

si $\text{Re}(s) > 0$.

Ejemplo 5.5.2. Para obtener la transformada de Laplace de la función dada por

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 3 & \text{si } 1 < t < 2 \\ 0 & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$$

entonces expresando de manera compacta a la función f , tenemos

$$f(t) = 3[H(t - 1) - H(t - 2)].$$

Luego la transformada de Laplace de f está dada por

$$\mathfrak{L}\{f(t)\} = 3\mathfrak{L}\{H(t - 1)\} - 3\mathfrak{L}\{H(t - 2)\} = \frac{3}{s} (e^{-s} - e^{-2s}). \blacktriangle$$

5.5.3 El segundo teorema de traslación

El teorema que enunciaremos y probaremos a continuación, llamado segundo teorema de traslación, proporciona una fórmula para las transformadas de funciones de la forma $f(t-a)H(t-a)$.

Las funciones de esta clase son de particular importancia en las aplicaciones, ya que su uso es imprescindible cada vez que se consideran sistemas físicos (eléctricos, mecánicos, etc.) en los cuales ciertas excitaciones, como tensiones, corrientes, fuerzas, etc. se aplican o se quitan abruptamente a partir de cierto instante de tiempo a .

Teorema 5.5.1 (Segundo teorema de traslación). Sean $f = f(t)$ una función cuya transformada de Laplace es $F = F(s)$ y $a > 0$. Entonces

$$\mathfrak{L}\{f(t-a)H(t-a)\} = e^{-as}F(s).$$

Demostración. Aplicando la definición de transformada de Laplace a la función $f(t-a)H(t-a)$ se tiene que:

$$\mathfrak{L}\{f(t-a)H(t-a)\} = \int_0^{+\infty} f(t-a)H(t-a)e^{-st} dt = \int_a^{+\infty} f(t-a)e^{-st} dt. \quad (5.36)$$

Mediante el cambio de variable

$$\tau = t - a$$

entonces:

$$\int_a^{+\infty} f(t-a)e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-s(\tau+a)} d\tau = e^{-as} \int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-s\tau} d\tau = e^{-as}\mathfrak{L}\{f(\tau)\} \quad (5.37)$$

pues f tiene por transformada de Laplace a la función F .

Sustituyendo (5.37) en (5.36) se tiene que:

$$\mathfrak{L}\{f(t-a)H(t-a)\} = e^{-as}\mathfrak{L}\{f(\tau)\} = e^{-as}F(s).$$

□

Ejemplo 5.5.3. Para calcular la transformada de la Laplace de la función del Ejemplo 5.5.1 definida por

$$f(t) = \begin{cases} 2t^2 & \text{si } 0 \leq t < 3 \\ t + 4 & \text{si } 3 \leq t < 5 \\ 9 & \text{si } t \geq 5 \end{cases}$$

primero expresamos la misma en una forma compacta haciendo uso de la función escalón de Heaviside. Del Ejemplo 5.5.1 se tiene que:

$$f(t) = 2t^2H(t) + (t + 4 - 2t^2)H(t-3) + (5-t)H(t-5)$$

ó equivalentemente

$$f(t) = 2t^2 H(t) + (t + 4 - 2t^2) H(t - 3) - (t - 5) H(t - 5). \quad (5.38)$$

Ahora bien, para obtener la transformada de Laplace de $f(t)$, haremos uso del segundo teorema de traslación donde primero debemos escribir la expresión que multiplica a $H(t - 3)$ en términos de $t - 3$. Para ello, sea

$$z = t - 3$$

luego,

$$t + 4 - 2t^2 = (z + 3) + 4 - 2(z + 3)^2 = -2z^2 - 11z - 11 = -2(t - 3)^2 - 11(t - 3) - 11.$$

Entonces (5.38) puede expresarse como:

$$f(t) = 2t^2 H(t) + [-2(t - 3)^2 - 11(t - 3) - 11] H(t - 3) - (t - 5) H(t - 5)$$

y usando esta expresión para $f(t)$, obtenemos su transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\{f(t)\} &= 2\mathfrak{L}\{t^2 H(t)\} - 2\mathfrak{L}\{(t - 3)^2 H(t - 3)\} - 11\mathfrak{L}\{(t - 3)H(t - 3)\} + \\ &\quad - 11\mathfrak{L}\{H(t - 3)\} - \mathfrak{L}\{(t - 5)H(t - 5)\} \end{aligned}$$

por lo que se tiene que

$$\mathfrak{L}\{f(t)\} = 2\frac{2}{s^3} - 2e^{-3s}\mathfrak{L}\{t^2\} - 11e^{-3s}\mathfrak{L}\{t\} - 11\frac{e^{-3s}}{s} - e^{-5s}\mathfrak{L}\{t\}$$

o equivalentemente

$$\mathfrak{L}\{f(t)\} = \frac{4}{s^3} - e^{-3s} \left(\frac{4}{s^3} + \frac{11}{s^2} + \frac{11}{s} \right) - \frac{e^{-5s}}{s^2}. \blacktriangle$$

Inversión usando el segundo teorema de traslación

Una consecuencia importante del Teorema 5.5.1 (segundo teorema de traslación) es la fórmula que se obtiene del mismo al plantearla en términos de antitransformadas:

$$\mathfrak{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = \mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}\Big|_{t-a} H(t - a) = f(t - a)H(t - a)$$

siendo $f(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}$.

Ejemplo 5.5.4. Para calcular

$$\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s\pi}(s + 3)}{s(s^2 + 1)}\right\}$$

usando el segundo teorema de traslación obtenemos que

$$\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s\pi}(s + 3)}{s(s^2 + 1)}\right\} = \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{s + 3}{s(s^2 + 1)}\right\}\Big|_{t-\pi} H(t - \pi) \quad (5.39)$$

Dado que

$$\frac{s+3}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+1} = \frac{(A+B)s^2 + Cs + A}{s(s^2+1)} \Leftrightarrow A=3, B=-3, C=1$$

se sigue que,

$$\mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{s+3}{s(s^2+1)} \right\} = \mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{3}{s} - 3 \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} \right\} = 3 - 3 \cos t + \sin t \quad (5.40)$$

por lo que sustituyendo (5.40) en (5.39) tiene que

$$\mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-s\pi}(s+3)}{s(s^2+1)} \right\} = [3 - 3 \cos(t - \pi) + \sin(t - \pi)] H(t - \pi). \blacktriangle$$

5.6 Transformada de Laplace de funciones periódicas

Sea $f = f(t)$ una función definida en $[0, +\infty)$, seccionalmente continua y periódica de período T es decir

$$f(t + nT) = f(t)$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Entonces,

$$\mathfrak{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} f(t)e^{-st} dt. \quad (5.41)$$

Mediante el cambio de variable

$$t = \tau + nT$$

con $n \in \mathbb{N}_0$ se tiene de (5.41) que

$$\mathfrak{L}\{f(t)\} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^T f(\tau + nT) e^{-s(\tau+nT)} d\tau = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-snT} \int_0^T f(\tau) e^{-s\tau} d\tau \quad (5.42)$$

dado que f es periódica de período T .

Como la serie (geométrica)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-snT}$$

es convergente si

$$|e^{-st}| = e^{-xT} < 1$$

entonces $x > 0$, siendo $s = x + iy$. Luego se sigue que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-snT} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \quad (5.43)$$

si $\text{Re}(s) > 0$ y sustituyendo (5.43) en (5.42) se tiene que

$$\mathfrak{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T f(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

o equivalentemente,

$$\mathfrak{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T f(t) e^{-st} dt \quad \text{si } \text{Re}(s) > 0.$$

Ejemplo 5.6.1. Para obtener la transformada de Laplace de la onda periódica diente de sierra

$$f(t) = t, \quad t \in [0, 1]$$

periódica de período $T = 1$ como se observa en la Figura 5.6

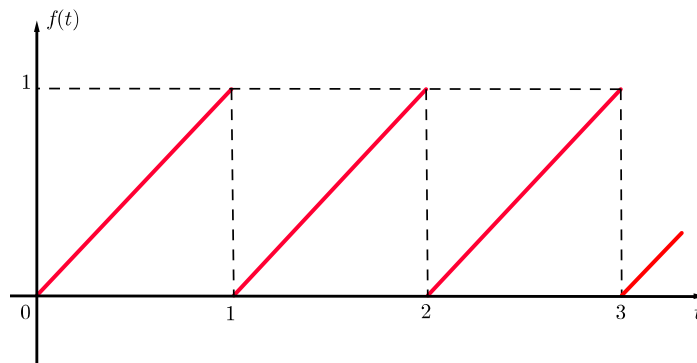


Figura 5.6: Onda periódica diente de sierra

calculamos,

$$\mathfrak{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-s}} \int_0^1 t e^{-st} dt = \frac{1}{1 - e^{-s}} \left(-\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{1}{s^2} \right) \blacktriangle$$

5.7 La función impulso

En muchas aplicaciones en Ingeniería estamos interesados en buscar la respuesta de sistemas a fuerzas que son aplicadas de repente pero sólo en un tiempo muy corto. Estas fuerzas son conocidas como **fuerzas impulsivas**, cuyo valor total está “concentrado” en un punto.

Para formular matemáticamente esta función y comprender su interpretación, consideremos un pulso rectangular dado por:

$$\Phi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{1}{T} & \text{si } 0 \leq t < T \\ 0 & \text{si } t \geq T \end{cases}$$

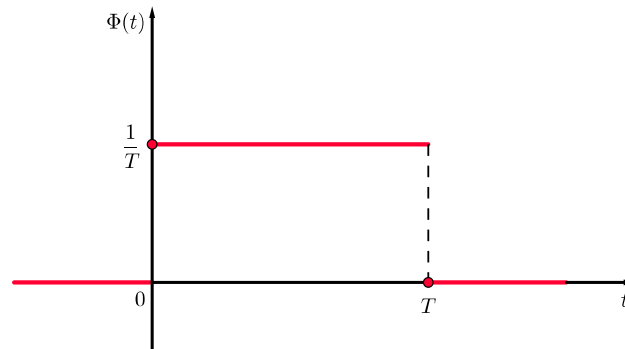


Figura 5.7: Pulso rectangular $\Phi(t)$

y cuya gráfica se muestra en la Figura 5.7.

Claramente, el área bajo la gráfica del pulso rectangular es

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t) dt = \int_0^T \frac{1}{T} dt = 1.$$

Si $T \rightarrow 0$, el pulso rectangular resulta más breve (en tiempo) y a la vez aumenta su intensidad. De tal modo, la **función impulso unitario** δ o **delta de Dirac**, es considerada como el límite del pulso rectangular Φ cuando $T \rightarrow 0$, y cuya gráfica se muestra en la Figura 5.8.

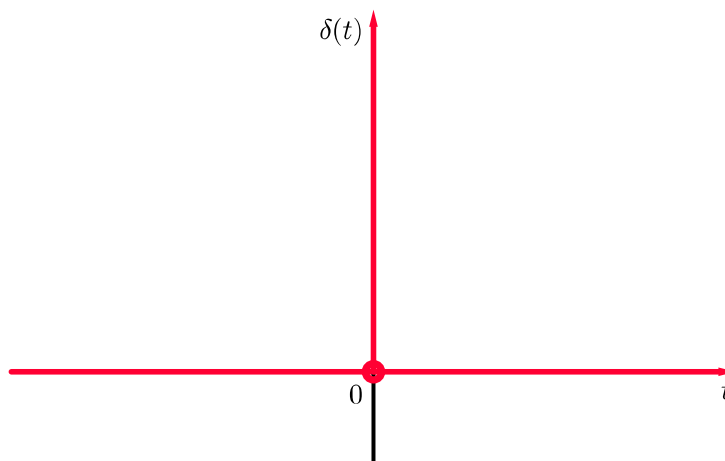


Figura 5.8: Función delta de Dirac $\delta(t)$

La función delta de Dirac $\delta = \delta(t)$ se caracteriza por

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0 \\ +\infty & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

pero

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1.$$

La llamada función impulso unitario es una función idealizada. Ciertamente no puede ser una función pues es “imposible” que una función sea nula excepto en un único punto, y su integral sea no nula.

Esta función se fundamenta a través de la Teoría de Distribuciones. Puede ser interpretada físicamente como un shock o impulso que transmite energía unitaria instantáneamente (idealización).

Si se desea considerar la función impulso unitario en el instante de tiempo $t = a$, la denotamos $\delta(t - a)$, y está definida como el caso límite del pulso unitario:

$$\Phi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a - \frac{T}{2} \\ \frac{1}{T} & \text{si } a - \frac{T}{2} \leq t < a + \frac{T}{2} \\ 0 & \text{si } t \geq a + \frac{T}{2} \end{cases}$$

como se observa en la Figura 5.9.

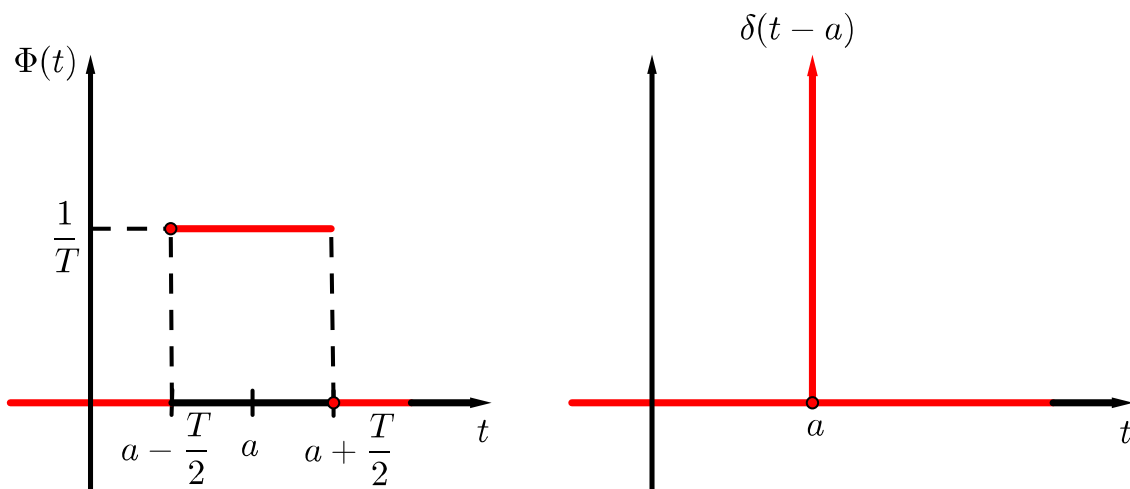


Figura 5.9: Pulso e impulso unitario desplazado

En este caso se tendrá que,

$$\delta(t - a) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq a \\ +\infty & \text{si } t = a \end{cases}$$

y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - a) dt = 1$$

y cuya gráfica se observa en la Figura 5.9.

Se puede probar que si $f = f(t)$ es continua en $t = a$ entonces se verifica que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-a) dt = f(a)$$

conocida con el nombre de **propiedad de filtrado**. Además, si $\alpha < a < \beta$ entonces se tiene que

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\delta(t-a) dt = f(a).$$

Haciendo uso de la propiedad de filtrado se tiene entonces que la transformada de Laplace de $\delta = \delta(t-a)$ con $a > 0$ es

$$\mathfrak{L}\{\delta(t-a)\} = \int_0^{+\infty} \delta(t-a)e^{-st} dt = e^{-as}.$$

Aunque a partir del resultado anterior, podría parecer inmediato que

$$\mathfrak{L}\{\delta(t)\} = \int_0^{+\infty} \delta(t)e^{-st} dt = 1$$

debe tenerse en cuenta que la función δ no es continua en $t = 0$.

De las definiciones de la función escalón de Heaviside $H = H(t)$ y la función delta de Dirac $\delta = \delta(t)$, se puede argumentar que

$$H(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

por lo que se tiene que

$$H'(t) = \delta(t)$$

y más generalmente para cualquier $a > 0$,

$$H'(t-a) = \delta(t-a).$$

También es posible probar que

$$\mathfrak{L}\{\delta^{(n)}(t-a)\} = s^n e^{-as}$$

y en particular tomando $a = 0$,

$$\mathfrak{L}\{\delta^{(n)}(t)\} = s^n.$$

5.8 Convolución

En Matemática y, en particular, en Análisis Funcional, una *convolución* es un operador matemático que transforma dos funciones f y g en una tercera función que en cierto sentido representa la magnitud en la que se superponen f y una versión trasladada e invertida de g .

La convolución y las operaciones relacionadas se encuentran en diversas aplicaciones de Ingeniería y Matemática. Por ejemplo, en Eléctrica y Electrónica, la convolución permite determinar la respuesta de un sistema lineal invariante en el tiempo ante cualquier entrada, a partir del conocimiento de la respuesta del sistema ante una única entrada particular, el impulso.

También, la convolución, es particularmente útil en la solución de ecuaciones diferenciales. La transformada de Laplace de la solución (inicialmente desconocida) de una ecuación diferencial algunas veces se reconoce como el producto de las transformadas de dos funciones desconocidas. Por ejemplo, cuando transformamos el problema con condiciones iniciales

$$x'' + x = \cos t,$$

$x(0) = x'(0) = 0$, obtenemos

$$X(s) = \frac{s}{(s^2 + 1)^2} = \frac{s}{s^2 + 1} \frac{1}{s^2 + 1} = \mathfrak{L}\{\cos t\} \mathfrak{L}\{\sin t\}.$$

Esto nos sugiere que debería existir una forma de combinar las dos funciones $\sin t$ y $\cos t$ para obtener la función $x(t)$ cuya transformada sea el producto de las transformadas de aquellas. Pero, evidentemente, $x(t)$ no es sólo el producto de $\sin t$ y $\cos t$ porque

$$\mathfrak{L}\{\cos t \sin t\} = \mathfrak{L}\left\{\frac{1}{2} \sin(2t)\right\} = \frac{1}{s^2 + 4} \neq \frac{s}{(s^2 + 1)^2}.$$

Así es que

$$\mathfrak{L}\{\cos t \sin t\} \neq \mathfrak{L}\{\cos t\} \mathfrak{L}\{\sin t\}.$$

Por tales motivos, estamos ante la necesidad de definir la convolución entre las funciones $f = f(t)$ y $g = g(t)$, denotada $f * g$, de tal modo que la transformada de $f * g$ resulte ser el producto de las transformadas de f y g .

Definición (Convolución). Sean $f = f(t)$ y $g = g(t)$ funciones seccionalmente continuas. Se llama convolución de f y g , y notamos $f * g$ a la función definida por

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau. \quad (5.44)$$

Notemos que si f y g son funciones causales entonces

$$f(\tau) = g(\tau) = 0$$

si $\tau < 0$ y

$$g(t - \tau) = 0$$

si $\tau > t$ por lo que (5.44) se puede expresar como

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau. \quad (5.45)$$

Teorema 5.8.1. *Si f y g son funciones seccionalmente continuas entonces $f * g = g * f$.*

Demostración. Ejercicio. □

El siguiente teorema nos permite hallar la transformada de Laplace de la convolución de dos funciones:

Teorema 5.8.2. *Si f y g son de orden exponencial σ y seccionalmente continuas en $[0, +\infty)$, entonces para $\text{Re}(s) > \sigma$ se tiene que*

$$\mathfrak{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathfrak{L}\{f(t)\} \mathfrak{L}\{g(t)\}.$$

Demostración. Sean

$$F(s) = \mathfrak{L}\{f(x)\} = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-sx} dx$$

y

$$G(s) = \mathfrak{L}\{g(y)\} = \int_0^{+\infty} g(y)e^{-sy} dy.$$

Entonces por el teorema de Fubini,

$$F(s)G(s) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(x)g(y)e^{-s(x+y)} dx dy = \iint_R f(x)g(y)e^{-s(x+y)} dx dy \quad (5.46)$$

donde R es la región plana representada en la Figura 5.10.

Mediante la transformación en el plano

$$t(x, y) = x + y, \quad \tau(x, y) = y$$

donde $|J(x, y)| = |t_x \tau_y - \tau_x t_y| = 1$ se tiene que (5.46) se puede expresar como

$$F(s)G(s) = \iint_D f(t - \tau)g(\tau)e^{-st} d\tau dt \quad (5.47)$$

donde D es la región del plano representada en la Figura 5.10 que se obtiene de la transformación dada, por lo que (5.47) se puede expresar como

$$F(s)G(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \left(\int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau \right) dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) * g(t) dt$$

o equivalentemente

$$F(s)G(s) = \mathfrak{L}\{f(t) * g(t)\}.$$

□

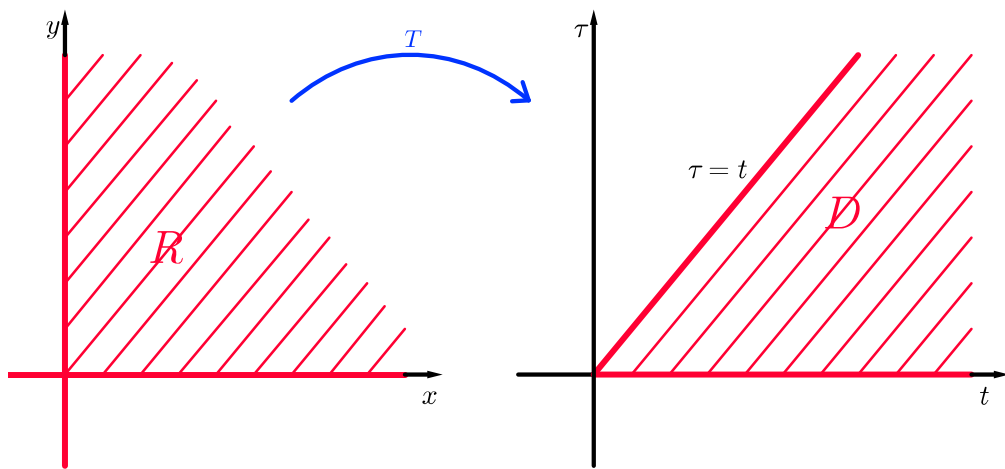


Figura 5.10: Regiones R y D

Inversión usando convolución

Una consecuencia importante del Teorema 5.8.2 es la fórmula que se obtiene del mismo al plantearla en términos de antitransformadas:

$$\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\} * \mathfrak{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathfrak{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}.$$

Ejemplo 5.8.1. *Obtengamos la solución de la ecuación diferencial*

$$x'' + x = \cos t,$$

con las condiciones iniciales $x(0) = x'(0) = 0$, planteada en la introducción de esta Sección. Como

$$X(s) = \frac{s}{(s^2 + 1)^2} = \frac{s}{s^2 + 1} \frac{1}{s^2 + 1}$$

entonces

$$x(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 1}\right\} * \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 1}\right\} = \cos t * \sin t.$$

Entonces,

$$x(t) = \int_0^t \cos(t - \tau) \operatorname{sen}(\tau) d\tau = \frac{t}{2} \operatorname{sen} t. \blacktriangle$$

5.9 Ejercicios propuestos

1. En cada uno de los siguientes casos, determine la transformada de Laplace de la función f , y su correspondiente abscisa de convergencia.

(a) $f(t) = 2e^{4t}$

(c) $f(t) = 6 \operatorname{sen}(2t) - 5 \cos(2t)$

(b) $f(t) = 2t^2 - e^{-5t}$

(d) $f(t) = \cosh(5t) - 4 \operatorname{senh}(2t)$

2. Utilice el primer teorema de traslación para obtener la transformada de Laplace de f en cada uno de los siguientes casos:

(a) $f(t) = e^{at} \cos(\omega t)$

(c) $f(t) = t^2 e^{at}$

(b) $f(t) = e^{at} \cosh(bt)$

(d) $f(t) = -5te^{-3t}$

3. En cada uno de los siguientes casos, utilice el teorema de la derivada de la transformada de Laplace, para obtener $\mathfrak{L}\{f(t)\}$.

(a) $f(t) = t \operatorname{sen}(\omega t)$

(c) $f(t) = t^2 e^t$

(b) $f(t) = t^2 \operatorname{sen}(2t)$

(d) $f(t) = t^2 (\operatorname{sen} t - \cos t)$

4. Halle la transformada inversa de Laplace de cada una de las siguientes funciones:

(a) $F(s) = \frac{1}{s^2 + 9}$

(c) $F(s) = \frac{1}{s^4}$

(e) $F(s) = \frac{1}{s^2 + 16}$

(b) $F(s) = \frac{4}{s - 2}$

(d) $F(s) = \frac{s}{s^2 - 2}$

(f) $F(s) = \frac{1}{s^2 - 3}$

5. Utilice la propiedad de linealidad de la transformación inversa de Laplace para obtener:

(a) $\mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{5s + 4}{s^3} - \frac{2s + 18}{s^2 + 9} + \frac{24}{s^4} \right\}$

(b) $\mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{6}{2s - 3} - \frac{4s + 3}{9s^2 - 16} + \frac{8 - 6s}{16s^2 + 9} \right\}$

6. Utilice el primer teorema de traslación para hallar:

(a) $\mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{6s - 4}{s^2 - 4s + 20} \right\}$

(c) $\mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{3s + 7}{s^2 - 2s + 5} \right\}$

(b) $\mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{4s + 12}{s^2 + 4s + 16} \right\}$

7. Mediante descomposición en fracciones simples, halle las transformadas inversas de Laplace de las siguientes funciones:

(a) $F(s) = \frac{3s + 1}{s^3 - s^2 + s - 1}$

(c) $F(s) = \frac{3s + 7}{s^2 + 3s + 2}$

(b) $F(s) = \frac{4s + 12}{s^2 + 8s + 16}$

8. Resuelva los siguientes problemas de valores iniciales haciendo uso de la transformada de Laplace:

(a) $x'' + 6x' + 10x = 0,$
 $x(0) = 0, x'(0) = 6.$

(c) $x''' - 3x'' + 3x' - x = t^2e^{-t},$
 $x(0) = 1, x'(0) = 0, x''(0) = -2.$

(b) $x'' + 9x = 2t^2 + 4t + 7,$
 $x(0) = x'(0) = 0.$

(d) $x'' + 9x = \cos(2t),$
 $x(0) = 1, x(\pi/2) = -1.$

9. Use la transformada de Laplace para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales:

(a) $\begin{cases} x'' - y = 0 \\ y'' - x = 0 \end{cases}$ tal que $x(0) = y(0) = 1, x'(0) = y'(0) = -1.$

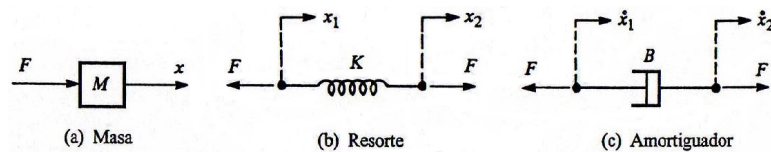
(b) $\begin{cases} x'' = y - 2x \\ y'' = x - 2y \end{cases}$ tal que $x(0) = 4, y(0) = 2, x'(0) = y'(0) = 0.$

(c) $\begin{cases} 2x'' - y'' - x' - y' = 3y - 9x \\ 2x'' - y'' + x' + y' = 5y - 7x \end{cases}$ tal que $x(0) = x'(0) = 1, y(0) = y'(0) = 0.$

10. Vibraciones mecánicas

Los sistemas mecánicos de traslación pueden ser usados para modelar muchas situaciones e involucran tres elementos básicos: *masas* (con masa M , medida en Kg), *resortes* (con rigidez del resorte k , medida en Nm^{-1}) y *amortiguadores* (con coeficiente de amortiguamiento B , medido en Nsm^{-1}).

Las variables asociadas son el *desplazamiento* $x(t)$ (medido en m) y la *fuerza* $F(t)$ (medida en N). Convencionalmente, los elementos básicos son representados simbólicamente de la siguiente manera:



Suponiendo que estamos tratando con resortes y amortiguadores ideales (esto es, suponiendo que se comportan linealmente), las relaciones entre las fuerzas y los desplazamientos en el tiempo t son:

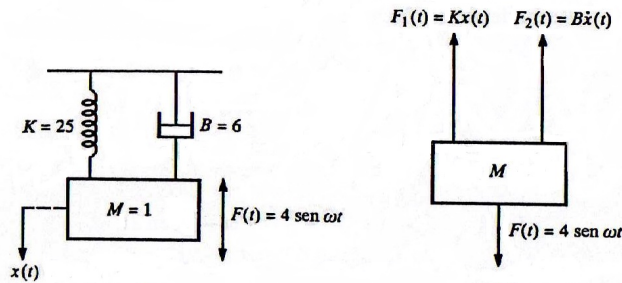
Masa: $F = Mx''(t)$ (ley de Newton)

Resorte: $F = k(x_2 - x_1)$ (ley de Hooke)

Amortiguador: $F = B(x'_2 - x'_1)$

- (a) La masa del sistema masa-resorte-amortiguador de la figura está sometida a una fuerza periódica externa $F(t) = 4\text{sen}(\omega t)$ aplicada en el tiempo $t = 0$.

Como está indicado en la figura, las fuerzas que actúan sobre la masa M son la fuerza aplicada $F(t)$ y las fuerzas de restauración F_1 y F_2 debidas al resorte y al amortiguador respectivamente.



Así por la ley de Newton,

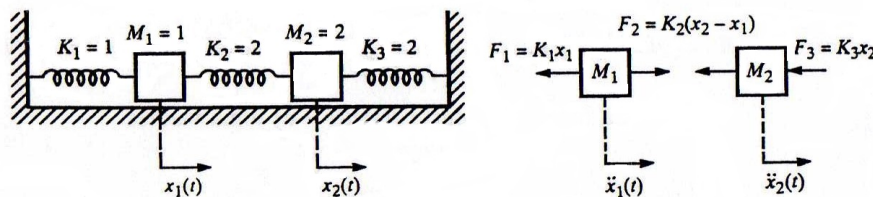
$$Mx''(t) = F(t) - F_1(t) - F_2(t).$$

Dado que $M = 1$, $F(t) = 4\text{sen}(\omega t)$, $F_1(t) = kx(t) = 25x(t)$ y $F_2(t) = Bx'(t) = 6x'(t)$, se tiene que:

$$x''(t) + 6x'(t) + 25x(t) = 4\text{sen}(\omega t).$$

Mediante la transformada de Laplace, determine el desplazamiento resultante $x(t)$ de la masa en el tiempo t , suponiendo que $x(0) = x'(0) = 0$, para los casos:

- i. $\omega = 2$
 - ii. $\omega = 5$. ¿qué pasaría con la respuesta si no tuviese el amortiguador?
- (b) Considere el sistema mecánico de la figura, que consiste en dos masas M_1 y M_2 , cada una atada a una base fija por un resorte, con constantes k_1 y k_3 respectivamente, y atadas entre sí a un tercer resorte con constante k_2 .



El sistema es soltado desde el reposo en el tiempo $t = 0$ en una posición en la cual M_1 está desplazada una unidad a la izquierda de su posición de equilibrio y M_2 está

desplazada dos unidades a la derecha de su posición de equilibrio.

Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ los desplazamientos de las masas M_1 y M_2 respectivamente desde sus posiciones de equilibrio. Como todos los efectos de fricción son despreciados, las únicas fuerzas que actúan sobre las masas son las fuerzas de restauración debidas a los resortes, como se muestra en la figura. Aplicando la ley de movimiento de Newton a M_1 y M_2 respectivamente, se obtiene

$$\begin{cases} M_1 x_1'' = F_2 - F_1 = k_2(x_2 - x_1) - k_1 x_1 \\ M_2 x_2'' = -F_3 - F_2 = -k_3 x_2 - k_2(x_2 - x_1) \end{cases}$$

que, sustituyendo los valores dados en la figura para M_1 , M_2 , k_1 , k_2 y k_3 , se obtiene:

$$\begin{cases} x_1'' + 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ 2x_2'' + 4x_2 - 2x_1 = 0 \end{cases}$$

Haciendo uso de la transformada de Laplace, obtenga las posiciones de la masa en el tiempo t .

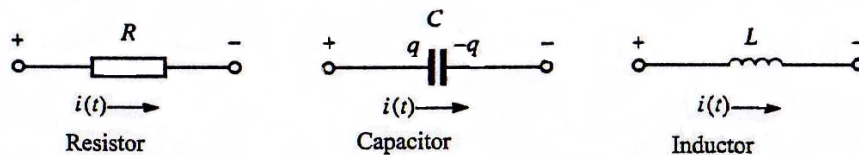
11. Circuitos eléctricos

Los circuitos eléctricos pasivos son construidos con tres elementos básicos: *resistores* (que tienen resistencia R , medida en Ω), *capacitores* (que tienen capacitancia C , medida en farads F) e *inductores* (que tienen inductancia L medida en henrys H). Las variables asociadas son: *corriente* $i(t)$ (medida en amperes A) y *voltaje* $v(t)$ (medido en volts V).

El flujo de corriente en el circuito está relacionado con la *carga* $q(t)$ (medida en coulombs C) mediante la relación:

$$i(t) = q'(t).$$

Convencionalmente, los elementos básicos se representan simbólicamente como en la siguiente figura:



Las relaciones entre el flujo de corriente $i(t)$ y la caída de voltaje $v(t)$ a través de estos elementos en el tiempo t son:

caída de voltaje a través de la resistencia: $v_R(t) = Ri(t)$ (ley de Ohm)

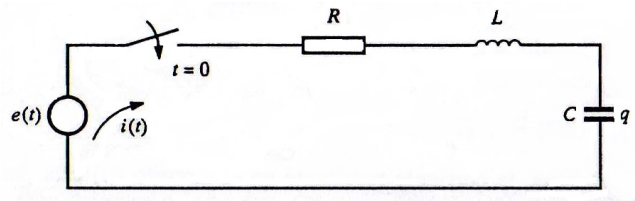
caída de voltaje a través del capacitor: $v_C = \frac{1}{C} \int i(t) dt = \frac{q(t)}{C}$

caída de voltaje a través del inductor: $v_L(t) = Li'(t)$

La interacción entre los elementos individuales que forman un circuito eléctrico está determinada por las leyes de Kirchhoff. En particular, la *ley de las tensiones de Kirchhoff* establece que:

La suma algebraica de todas las caídas de instantáneas de tensión en torno a cualquier circuito cerrado es cero, o sea que la fuerza electromotriz aplicada (fuente de voltaje) en cualquier circuito cerrado es igual a la suma de las caídas de tensión en el resto del circuito.

Sea el circuito *RLC* de la figura siguiente, formado por un resistor R , un capacitor C y un inductor L conectados en serie a una fuente de voltaje $e(t)$.



Aplicando la ley de tensiones de Kirchhoff al circuito de la figura se obtiene

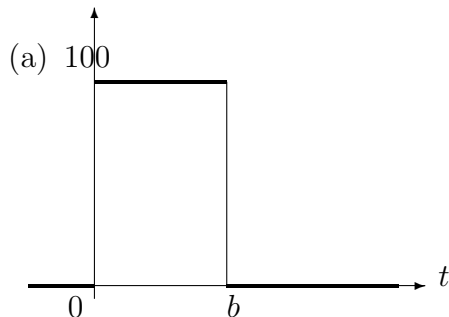
$$Ri + Li' + \frac{1}{C} \int i(t) dt = e(t)$$

o, usando el hecho que $i(t) = q'(t)$, entonces:

$$Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = e(t).$$

Si antes de cerrar el interruptor en el tiempo $t = 0$, tanto la carga como la corriente resultante en el circuito son cero, use la transformada de Laplace para determinar la carga $q(t)$ en el capacitor y la corriente $i(t)$ en el circuito en el instante de tiempo t sabiendo que $R = 160\Omega$, $L = 1$ H, $C = 10^{-4}$ F y $e(t) = 20$ V.

12. Utilice la función escalón de Heaviside para expresar en forma compacta los pulsos siguientes y obtenga sus transformadas de Laplace.



(b)
$$f(t) = \begin{cases} -2 \operatorname{sen} t & \text{si } \pi \leq t \leq 2\pi \\ 0 & \text{si } t < \pi \text{ ó } t > 2\pi \end{cases}$$

13. Represente gráficamente la función f y utilice el segundo teorema de traslación para obtener su transformada de Laplace en cada uno de los siguientes casos:

(a) $f(t) = \text{sen}(t - \pi)H(t - \pi)$

(b) $f(t) = |\text{sen}(\omega t)|$

(c) $f(t) = \begin{cases} \text{sen } t & \text{si } 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & \text{si } \pi < t \leq 2\pi \end{cases}$ tal que $f(t + 2\pi) = f(t)$, $t \geq 0$

14. La entrada $\theta_i(t)$ y la salida $\theta_0(t)$ de un servomecanismo están relacionados por la ecuación diferencial

$$\theta_0'' + 8\theta_0' + 16\theta_0 = \theta_i, \quad t \geq 0$$

e inicialmente $\theta_0(0) = \theta_0'(0) = 0$. Para $\theta_i = f(t)$, donde $f(t) = \begin{cases} 1 - t & \text{si } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$

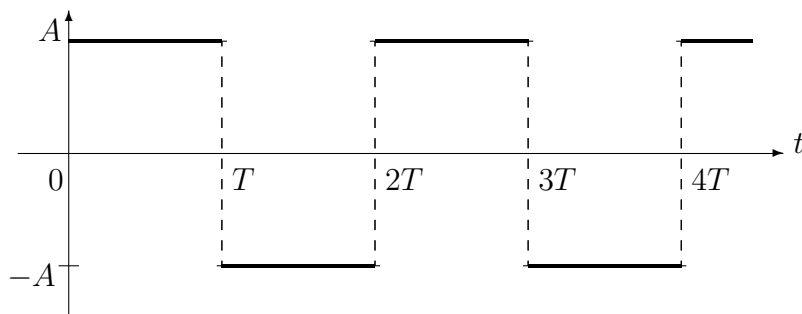
muestre que $\mathcal{L}\{\theta_i\} = \frac{s-1}{s^2} + \frac{e^{-s}}{s^2}$ y luego obtenga una expresión para la respuesta del sistema en el tiempo t .

15. Durante el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$, una fuerza electromotriz constante e_0 actúa en un circuito serie RC . Supongamos que el circuito está inicialmente en estado de reposo, verifique que la corriente en el circuito en el tiempo t es:

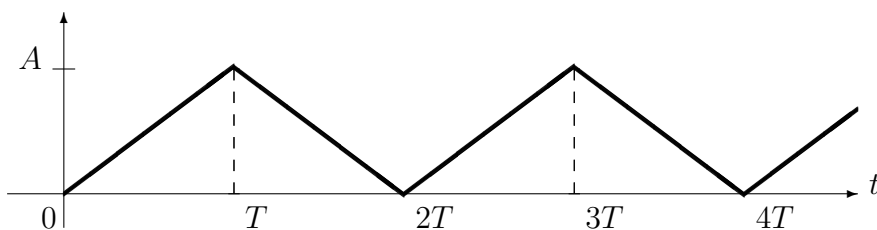
$$i(t) = \frac{e_0}{R} [e^{-(t-t_1)/RC} H(t - t_1) - e^{-(t-t_2)/RC} H(t - t_2)].$$

16. Obtenga la transformada de Laplace $F(s)$ de cada una de las siguientes funciones $f(t)$ cuyas gráficas son las siguientes:

- (a) Onda rectangular periódica



- (b) Onda triangular periódica



17. Calcule la transformada de Laplace de f en cada uno de los casos siguientes:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \quad f(t) = te^{2t}g'(t) & \text{(f)} \quad f(t) = \begin{cases} 4t & \text{si } t \leq 2 \\ 16 - 4t & \text{si } 2 < t \leq 4 \\ 0 & \text{si } t > 4 \end{cases} \\
 \text{(b)} \quad f(t) = g'''(t) + g'(t) & \text{(g)} \quad f(t) = \text{sen }^2 t \\
 \text{(c)} \quad f(t) = e^{-3t} \cos(2t + 4) & \text{(h)} \quad f(t) = \int_0^t xe^{2x} \cos x \, dx \\
 \text{(d)} \quad f(t) = 2e^t \text{sen }(\omega t) \cos(\omega t) & \\
 \text{(e)} \quad f(t) = \int_0^t g(u)g(t-u) \, du &
 \end{array}$$

18. Un impulso de voltaje $E\delta(t)$ es aplicado en el tiempo $t = 0$ a un circuito que consiste de una resistencia R , un capacitor C y un inductor L conectados en serie. Antes de aplicar el voltaje, tanto la carga en el capacitor como la corriente resultante en el circuito son cero. Determine la carga $q(t)$ en el capacitor y la corriente resultante $i(t)$ en el circuito en el tiempo t .

19. Funciones de transferencia

La *función de transferencia* de un sistema lineal invariante en el tiempo está definida como la razón de la transformada de Laplace de la salida del sistema (o función de respuesta) y la transformada de Laplace de la entrada del sistema (o función fuerza), bajo el supuesto de que todas las condiciones iniciales son cero (esto es, el sistema está inicialmente en un *estado de reposo*).

Las funciones de transferencias se usan frecuentemente en Ingeniería para caracterizar las relaciones de entrada-salida de los sistemas lineales invariantes en el tiempo, y juega un papel importante en el análisis y diseño de dichos sistemas. Las funciones de transferencia de un sistema lineal invariante en el tiempo, son útiles para estudiar las condiciones de estabilidad de un sistema.

Consideremos un sistema lineal invariante en el tiempo caracterizado por la ecuación diferencial

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 u$$

donde $n \geq m$, $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$ son constantes, y $x(t)$ es la respuesta del sistema o salida correspondiente a la entrada o término de fuerza $u(t)$ aplicado en el tiempo $t = 0$.

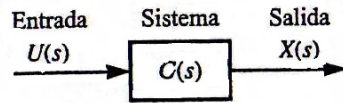
Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación anterior y usando el hecho de que todas las condiciones iniciales son cero, obtenemos

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0) X(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0) U(s)$$

donde $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ y $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$.

La función de transferencia del sistema, denotada $G(s)$, se define como

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$



y el sistema puede representarse en forma de diagrama por la operación dentro de la caja de la figura siguiente. Esta representación se conoce como el *diagrama de bloque de entrada-salida* del sistema.

Escribiendo $P(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0$ y $Q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0$, la función de transferencia puede expresarse como una función racional

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

donde, para hacer que el sistema sea físicamente realizable, los grados m y n de los polinomios $P(s)$ y $Q(s)$ deben ser tales que $n \geq m$.

La ecuación $Q(s) = 0$ es llamada *ecuación característica* del sistema, su grado, determina el *orden del sistema* y sus raíces se conocen como los *polos* de la función de transferencia. De la misma manera, las raíces de $P(s) = 0$ son los *ceros* de la función de transferencia.

Es importante destacar que, en general, una función de transferencia sólo se usa para caracterizar un sistema lineal invariante en el tiempo. Es una propiedad del propio sistema y es independiente tanto de la entrada como de la salida del sistema.

A pesar de que una función de transferencia caracteriza la dinámica del sistema, no proporciona información concerniente a la estructura física real del sistema, y de hecho sistemas que son físicamente distintos pueden tener la misma función de transferencia.

- (a) La respuesta $x(t)$ de un sistema invariante en el tiempo a una función de fuerza $u(t)$ está determinada por la ecuación diferencial

$$9x''(t) + 12x'(t) + 13x(t) = 2u'(t) + 3u(t).$$

- i. Determine la función de transferencia que caracteriza al sistema.
 - ii. Proporcione la ecuación característica del sistema. ¿Cuál es el orden del sistema?
 - iii. Determine los polos y los ceros de la función de transferencia e ilústrellos en un diagrama en el plano s .
- (b) Repita el ejercicio (a) para un sistema cuya respuesta $x(t)$ a una entrada $u(t)$ está determinada por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = 3\frac{du}{dt} + 2u.$$

20. Respuesta al impulso

En el ejercicio anterior encontramos que para un sistema invariante en el tiempo que tiene función de transferencia $G(s)$, la respuesta $x(t)$ del sistema inicialmente en reposo, a una entrada $u(t)$ está determinada por la relación en las transformadas

$$X(s) = G(s)U(s).$$

Si la entrada $u(t)$ es la función impulso $\delta(t)$ entonces la respuesta del sistema estará determinada por

$$X(s) = G(s)\mathfrak{L}\{\delta(t)\} = G(s).$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace a esta última ecuación, obtenemos la respuesta en el tiempo que se llama la *respuesta al impulso del sistema* y la denotamos $h(t)$ (algunas veces también es conocida como la *función peso* del sistema); esto es, la respuesta al impulso está dada por

$$h(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathfrak{L}^{-1}\{G(s)\}.$$

Como la respuesta al impulso es la transformada inversa de Laplace de la función de transferencia, se sigue que tanto la respuesta al impulso como la función de transferencia llevan la misma información acerca de la dinámica del sistema lineal invariante en el tiempo. Por tanto, es posible determinar la información completa del sistema excitándolo con un impulso y midiendo la respuesta. Por esta razón es una práctica común en ingeniería ver la función de transferencia como la transformada de Laplace de la respuesta al impulso, ya que esto pone énfasis en los parámetros del sistema cuando se consideran diseños de sistemas.

Determine las respuestas al impulso de los sistemas lineales cuya respuesta $x(t)$ a una entrada $u(t)$ está determinada por las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $x''(t) + 15x'(t) + 56x(t) = 3u(t)$

(b) $x''(t) - 4x'(t) + 13x(t) = u(t)$

21. Teoremas del valor inicial y del valor final

Los teoremas del valor inicial y del valor final son dos teoremas muy útiles que nos permiten predecir el comportamiento del sistema cuando $t \rightarrow 0$ y $t \rightarrow +\infty$ sin invertir la transformada de Laplace.

Teorema del valor inicial: Si las funciones $f(t)$ y $f'(t)$ son transformables por Laplace y existe $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$, entonces $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$.

Es importante destacar el que teorema del valor inicial no da el valor inicial de $f(0)$, sino más bien el valor de $f(t)$ cuando $t \rightarrow 0^+$.

Teorema del valor final: Si las funciones $f(t)$ y $f'(t)$ son transformables por Laplace y existe $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$, entonces $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$.

pues $h(t)$ es una función causal. Esto es,

$$x(t) = u(t) * h(t).$$

Como la convolución es conmutativa, también podemos escribir:

$$x(t) = h(t) * u(t) = \int_0^t h(\tau)u(t - \tau) d\tau.$$

- (a) La respuesta $\theta_0(t)$ de un sistema a una fuerza de transmisión $\theta_i(t)$ está dada por la ecuación diferencial lineal:

$$\frac{d^2\theta_0}{dt^2} + 2\frac{d\theta_0}{dt} + 5\theta_0 = \theta_i.$$

- i. Determine la respuesta al impulso del sistema.
 - ii. Use la integral de convolución para hallar la respuesta del sistema a una entrada escalón unitario en el tiempo $t = 0$, suponiendo que está inicialmente en estado de reposo.
 - iii. Confirme el resultado obtenido en (ii) por cálculo directo.
- (b) Halle la respuesta del sistema a la entrada de pulso $u(t) = A[H(t) - H(t - T)]$, suponiendo que está inicialmente en reposo, caracterizado por la ecuación diferencial:

$$x''(t) + 7x'(t) + 12x(t) = u(t).$$

Tabla de transformadas de Laplace

- $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$
- $\mathcal{L}\{\text{sen } (\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
- $\mathcal{L}\{c\} = \frac{c}{s}$
- $\mathcal{L}\{\cos (\omega t)\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$
- $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$
- $\mathcal{L}\{H(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}, a \geq 0$
- $\mathcal{L}\{e^{kt}\} = \frac{1}{s-k}$
- $\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}, a \geq 0$

Algunos resultados importantes

- Derivada de la transformada:

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} (\mathcal{L}\{f(t)\}) = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

- Primer teorema de traslación:

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}|_{s-a} = F(s-a)$$

- Inversión usando el primer teorema de traslación:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at} \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = e^{at} f(t)$$

- Transformada de una función periódica f de período T :

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$$

- Segundo teorema de traslación:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\} = e^{-as} \mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-as} F(s)$$

- Inversión usando el segundo teorema de traslación:

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as} F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}|_{t-a} H(t-a) = f(t-a)H(t-a)$$

- Transformada de derivadas:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

- Transformada de integrales:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(x) dx\right\} = \frac{1}{s} \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s} F(s)$$

- Transformada de la convolución:

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)G(s)$$

Evaluación de los Capítulos 4 y 5

1. Pruebe que $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

2. Sea la función definida por

$$f(z) = \frac{1 - e^{2z}}{z^p},$$

donde $p \in \mathbb{Z}$.

- (a) Determine el valor de p de manera que f tenga un polo de orden 3 en $z = 0$.
Para el valor de p hallado en (a):
- (b) Obtenga la representación en serie de Laurent de f en $0 < |z| < +\infty$.
- (c) Haciendo uso del teorema de los residuos, calcule

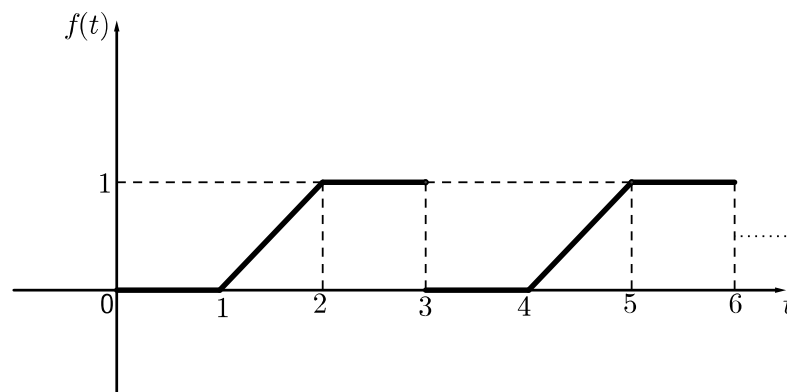
$$\oint_C 2zf(z) dz,$$

siendo C la curva de ecuación $|z - i| = 2$ recorrida en sentido positivo.

3. Dada la función definida por $f(z) = \frac{z + i}{z^2 + 1}$.

- (a) Halle y clasifique las singularidades aisladas de f en el plano complejo extendido.
- (b) Determine el círculo de convergencia de la serie de Taylor de f centrada en $1 + i$.

4. Calcule la transformada de Laplace de la función periódica f cuya gráfica es la siguiente:



5. La respuesta $\theta_0(t)$ de un sistema para una función de fuerza

$$\theta_i(t) = \begin{cases} 3 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

está dada por la ecuación diferencial de segundo orden $\theta_0''(t) + 6\theta_0'(t) + 10\theta_0 = \theta_i(t)$, donde $t \geq 0$. Determine la respuesta del sistema en el tiempo t suponiendo que el sistema está inicialmente en estado de reposo.

6. Halle la función $y = y(t)$ sabiendo que $y(t) = \delta(t - 1) + 2 \int_0^t y(\tau) \cos(t - \tau) d\tau$.

7. Obtenga:

(a) $\mathfrak{L} \left\{ e^{-t} \int_0^t \tau \operatorname{sen}(\sqrt{3}\tau) d\tau \right\}$ (b) $\mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-3s}}{s(s^2 + 1)} \right\}$

8. Halle $x(t)$ del problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) + x(t) + 4y'(t) - 2y(t) = \delta(t) \\ x'(t) + 5y'(t) + 2x(t) - 2y(t) = e^{-t} \\ x(0) = 1, y(0) = 0 \end{cases}$$

Capítulo 6

Métodos numéricos

6.1 Introducción a los Métodos Numéricos

6.1.1 Introducción

Los *modelos matemáticos* son representaciones de fenómenos, sistemas o procesos que aparecen en las distintas ciencias naturales y sociales, la industria, la gestión, entre otros. Estos modelos sirven como herramienta para resolver problemas científicos cuyo objetivo es analizar, describir, explicar, simular, explorar, controlar y predecir esos fenómenos o procesos.

Usando las *leyes generales de la Física, la Química, la Economía, etc.*, se obtienen determinadas *ecuaciones (algebraicas, diferenciales, integrales, etc)* que modelan el problema en estudio. Tomando la matemática como herramienta, es posible encontrar respuestas a estos problemas planteados.

El siguiente esquema representa el rol de la matemática y su relación con las aplicaciones.

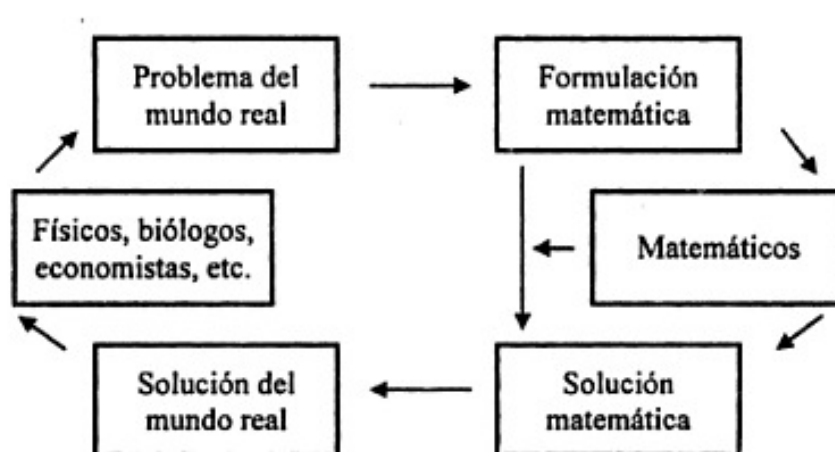


Figura 6.1: Representación esquemática en la resolución de problemas

En la modelación y resolución de un problema formulado matemáticamente contribuyen muchos especialistas a lo largo de años de trabajo, investigación y experimentación. Para modelar se hacen *simplificaciones* de modo que podamos resolver el problema en cuestión, por lo que el modelo matemático no puede describir exactamente *la realidad* que se observa. Por

eso, muchas veces las respuestas a los modelos deben validarse con *resultados experimentales y observables* en los mismos fenómenos.

Muchas veces sucede que no podemos hallar analíticamente las *soluciones exactas* a nuestros problemas matemáticos, por ende tenemos que recurrir a una *solución aproximada* del problema.

Las *aproximaciones numéricas* introducidas al *modelo matemático* ahora reemplazarán el *problema matemático* por un *problema numérico*.

Definición (Problema numérico). *Un problema numérico es una descripción clara y sin ambigüedades que relaciona datos de entrada (data) con datos de salida (soluciones). Estos datos consisten en un número finito de cantidades reales.*

Entonces, al tener que reemplazar nuestro problema matemático por un problema numérico, una representación alternativa al esquema original de la Fig.6.1 es la siguiente:

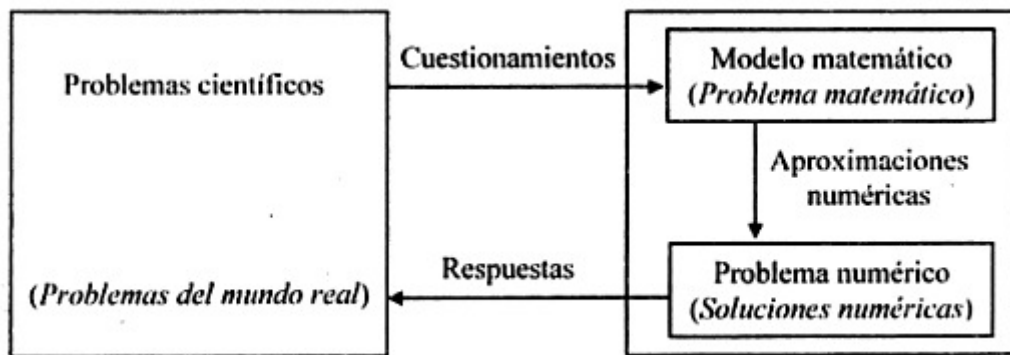


Figura 6.2: Representación alternativa

En la Fig.6.2 observamos que a partir de cuestionar los problemas científicos, complejizamos los modelos matemáticos, de esta manera obtenemos aproximaciones numéricas como respuestas a los problemas del mundo real.

Ahora bien, para construir estas soluciones aproximadas necesitamos desarrollar, implementar y validar los *métodos numéricos* que usaremos. Es decir, un *problema numérico* determinado necesita ser resuelto por un *algoritmo o método numérico* apropiado.

Definición (Algoritmo o método numérico). *Un algoritmo es una descripción completa de un número finito de operaciones bien definidas para un problema numérico dado, a través de las cuales cada vector de datos de entrada es transformado en un vector de datos de salida.*

Estos algoritmos son desarrollados teóricamente, implementados computacionalmente en algún lenguaje o código de programación (Matlab, Octave, SciLab, Fortran, C, C++, Python, etc) y testeados numéricamente. Los mismos nos permitirán simplificar procedimientos y cálculos matemáticos en la computadora.

Dado que la computadora está compuesta por dispositivos que realizan operaciones lógicas y aritméticas, los procedimientos matemáticos deben simplificarse de tal manera que sean

accesibles para ser procesados por una computadora. Éste es uno de los objetivos principales del área de estudio de los *Métodos Numéricos*.

Históricamente el descubrimiento y desarrollo de muchos métodos numéricos ha sido de carácter *empírico*. Su estudio se ha consolidado como ciencia específica a partir del desarrollo de las computadoras y la tecnología. El área de la Matemática que se encarga de estudiar los fundamentos de los métodos numéricos y analizar sus errores se conoce como *Análisis Numérico*. Esta área de la matemática moderna comprende a la vez de muchas sub-áreas y se encuentra en pleno desarrollo dado que existen problemas científicos que aún no se ha encontrado un algoritmo satisfactorio.

Entre las distintas áreas de las matemática, los métodos numéricos se aplican en:

- Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL)
- Raíces de ecuaciones y de sistemas de ecuaciones no lineales
- Aproximación de funciones (*interpolación, ajuste de curvas, etc.*)
- Derivación e integración numérica
- Aproximación de autovalores y autovectores
- Resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)
- Resolución de Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP)

Los métodos numéricos que desarrollaremos en este capítulo permitirán simplificar procedimientos matemáticos de manera que podamos auxiliarnos con una computadora en problemas como: *resolver sistemas de ecuaciones lineales, hallar raíces de ecuaciones no lineales y de sistemas no lineales, calcular derivadas numéricamente, operar con matrices y aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias*. Ese será nuestro objetivo.

Las principales características que tiene que tener un algoritmo son la *eficiencia (rapidez de cálculos)* y la *precisión (exactitud de los resultados)*. Sin embargo, hay más características deseables en un algoritmo numérico:

- **Finito:** Debe terminar en un número finito de pasos.
- **Definido:** Las acciones deben definirse sin ambigüedad.
- **Entrada (*input*):** Puede tener una o varias entradas bien definidas.
- **Salida (*output*):** Debe tener una o varias salidas bien definidas.
- **Eficiente:** Las operaciones deben hacerse en un determinado lapso de tiempo “tolerable”.
- **Preciso y exacto:** Las salidas del algoritmo deben aproximarse tanto a la solución del problema como aproximarse entre sí.
- **Estable:** Pequeños cambios en los datos de entrada (*input*) deben generar pequeños cambios en los resultados de salida (*output*).

6.1.2 Ejemplo de un problema y un método numérico

Problema numérico: Calcular $\sqrt{2}$ con determinada *tolerancia*.

Para resolver este problema numérico, usaremos el siguiente algoritmo:

ENTRADA: x_0 (aproximación inicial), tol (tolerancia)
PASO 1: $x_1 \leftarrow \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{2}{x_0} \right)$
PASO 2: Si $|x_1 - x_0| \leq tol$, entonces TERMINAR.
 En caso contrario, actualizar $x_0 \leftarrow x_1$ y volver al PASO 1
PASO 3: Asignar la salida a x_1
PASO 4: TERMINAR
SALIDA: x_1 aproximación de $\sqrt{2}$

Entonces, si tomamos inicialmente $x_0 = 1$ y $tol = 1 \times 10^{-5}$ resulta:

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{2}{x_0} \right) = 1.5 \quad (1 \text{ dígito exacto})$$

Como $|x_1 - x_0| = 0.5 > tol$, volvemos a calcular:

$$x_2 = \frac{1}{2} \left(x_1 + \frac{2}{x_1} \right) = 1.4166666666666667 \quad (3 \text{ dígitos exactos})$$

Como $|x_2 - x_1| = 0.0833333333333333 > tol$, volvemos a calcular:

$$x_3 = \frac{1}{2} \left(x_2 + \frac{2}{x_2} \right) = 1.414215686274510 \quad (6 \text{ dígitos exactos})$$

Como $|x_2 - x_1| = 0.002450980392157 > tol$, volvemos a calcular:

$$x_4 = \frac{1}{2} \left(x_3 + \frac{2}{x_3} \right) = 1.414213562374690 \quad (12 \text{ dígitos exactos})$$

Como $|x_1 - x_0| = 0.000002123899820 < tol$, el algoritmo termina y resulta entonces:

$$x_4 = 1.414213562374690$$

la aproximación de $\sqrt{2} = 1.414213562373095\dots$ con 12 dígitos exactos.

Es necesario aclarar que nuestro *problema numérico* en este caso consiste en calcular la raíz aproximada de dos con cierta tolerancia fijada de antemano mediante un esquema iterativo. Este tolerancia se fija como un valor que acotación entre la distancia entre aproximaciones sucesivas construidas por el esquema, esto es,

$$d(x_{k+1}, x_k) = |x_{k+1} - x_k|.$$

Ahora bien, necesitamos poder implementar este como otros algoritmos en una computadora. Para ello, introduciremos brevemente los programas (software) que más se usan para realizar cálculos numéricos actualmente. En la Bibliografía o en los Links de interés puede encontrarse más información sobre estos programas.

6.1.3 Software para programación de métodos numéricos

- **MATLAB** (MATrix LABoratory) Es un software privado de MathWorks creado por el matemático y programador C. Moler en 1984. Funciona como un intérprete permitiendo ejecutar órdenes en modo interactivo. Tiene un lenguaje propio de programación.
www.mathworks.com/products/matlab/
- **OCTAVE** (GNU Octave): Software libre para realizar cálculos numéricos considerado el equivalente libre de MATLAB. Es parte del proyecto GNU. No es un sistema de álgebra computacional como Mathematica o Maple, está orientado al análisis y cálculo numérico. Creado en 1988 para la ingeniería química y desde 1992 J.W. Eaton sigue su desarrollo.
www.gnu.org/software/octave/
- **Scilab**: Software para análisis numérico con lenguaje de programación de alto nivel para cálculo científico. Compatible con licencia GNU. Desarrollado inicialmente en el INRIA (Francia) en los 80's por los programadores F. Delebecque y S. Steer. Desde julio de 2012, lo desarrolla Scilab Enterprises.
www.scilab.org/
- **Fortran** (Formula Translating System): Lenguaje de programación de alto nivel especialmente adaptado al cálculo numérico y la computación científica. Necesita un compilador para traducir al código máquina. Desarrollado en IBM en 1957 por el matemático J. Backus. Todavía vigente y en desarrollo (FORTRAN 66/77, Fortran 90/95/2003/2008).
www.fortran.com/

Para nuestro ejemplo anterior, tenemos la implementación del algoritmo usando MATLAB:

Código en MATLAB: *rcuad.m*

```
function x1 = rcuad2(x0,tol)
% rcuad.m aproxima la raiz cuadrada de 2.
% INPUT: x0: aproximacion inicial de la raiz de 2.
% tol : (opcional) tolerancia admitida (valor por defecto: 5e-12).
% OUTPUT: x1 : valor aproximado con dicha tolerancia.
clc % limpio salida MATLAB
if nargin < 2, tol = 5e-12; % tolerancia por defecto
end
fprintf('Valor inicial aproximado: %g \n \n n raiz error n',x0)
x1 = .5*(x0+2/x0); % inicio aproximacion
err = abs(x1-x0); % calculo error entre aproximaciones
k=1; % contador
fprintf('%3d %12.15f %12.15f n',k,x1,err) % imprimo valor inicial
while err>tol % verifico convergencia
    x0 = x1;
    x1 = .5*(x0+2/x0); % actualizo termino aproximado
    err = abs(x1-x0);
    k = k +1;
    fprintf('%3d %12.15f %12.15f n',k,x1,err) % imprimo valores aproximados
end
fprintf(' n Valor final aproximado: %12.15f n',x1) % output
fprintf('Valor exacto MATLAB : %12.15f n',sqrt(2)) % exacto
fprintf('Error absoluto : %12.15f n',abs(x1-sqrt(2))) % error final
end
```

Ventana de Comandos en MATLAB:

```

>> format long
>> x0 = 1.0;
>> tol = 1e-5;
>> r = rcuad2(x0,to)
Valor inicial aproximado: 1
n raiz error
1      1.5000000000000000      0.5000000000000000
2      1.4166666666666667      0.0833333333333333
3      1.414215686274510      0.002450980392157
4      1.414213562374690      0.000002123899820
Valor final aproximado: 1.414213562374690
Valor exacto MATLAB : 1.414213562373095
Error absoluto : 0.000000000001595
r = 1.414213562374690

```

Observación: También podemos correrlo de la siguiente manera:

```
>> r = rcuad2(1,1e-15)
```

Otra manera es armar un *script* de nombre `test_rcuad2.m` como un archivo aparte en el mismo directivo que ejecute secuencialmente los comandos dados en la Ventana de Comandos.

6.1.4 Aplicaciones en la Ingeniería

Actualmente existen muchas revistas científicas, congresos y asociaciones donde ingenieros y científicos de distintas disciplinas se encuentran para compartir y mostrar avances en las aplicaciones de métodos numéricos aplicados en la Ingeniería, así también como su desarrollo teórico y experimental. Algunos de estos eventos y revistas se citan a continuación (¡hay muchos más!).

Congresos:

- VI Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial (MACI 2017)
- XXIII Congreso sobre Métodos Numéricos y sus aplicaciones (ENIEF 2017)

Asociaciones:

- Asociación Argentina de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial (ASAMACI)
- Asociación Argentina de Mecánica Computacional (MECOM)

Revistas internacionales:

- Journal of Computational and Applied Mathematics
- International Journal of Numerical Methods and Applications
- International Journal for Numerical Methods in Engineering
- International Journal of Applied and Computational Mathematics
- Computers and Mathematics with Applications

6.2 Introducción a MATLAB

6.2.1 Características

MATLAB (abreviatura de MATrix LABoratory o “laboratorio de matrices”) es una herramienta de software matemático que ofrece un entorno de desarrollo integrado con un lenguaje de programación propio. El mismo está disponible para las plataformas de sistemas operativos de Unix, Windows, Mac OS X y GNU/Linux. MATLAB puede pensarse como una “gran calculadora” adecuada para realizar cálculos con vectores y matrices fundamentalmente, aunque también permite la manipulación de otros tipos de datos. Si bien su uso principal fue originalmente pensado para el “cálculo numérico”, también puede realizar “cálculo simbólico”.

Esta herramienta es ideal para la comunidad científica que trabaja en Ingenierías y Matemática Aplicada. Es un software muy usado en universidades, centros de investigación e industrias y de constante desarrollo en todo el mundo. Sus usuarios son principalmente científicos, ingenieros, matemáticos, físicos, químicos y economistas, entre otros profesionales. Actualmente están disponibles sus versiones más recientes, R2019a y R2019b, publicadas marzo y septiembre de 2019 respectivamente por MathWorks. Existen versiones de prueba gratuitas y versiones para estudiantes. Mayores detalles pueden consultarse en: [MATLAB en Wikipedia \(Castellano\)](#) o en [MATLAB en Wikipedia \(English\)](#).

Entre sus principales características pueden enumerarse:

- Manipulación algebraica de matrices y vectores.
- Representación de datos y funciones tanto en \mathbb{R} como en \mathbb{C} .
- Soporte de estructuras de distintos tipos de datos.
- Entorno de desarrollo integrado (IDE) para facilitar el manejo del software.
- Lenguaje de programación propio para implementar algoritmos.
- Realización de gran variedad de gráficos 2D y 3D para representar funciones.
- Creación de interfaces de usuario (GUI), paralelización de cálculos, comunicación con programas en otros lenguajes (como C, C++, Java, Fortran y Python), así como también con otros dispositivos del hardware.
- Herramientas adicionales que expanden sus características principales: Simulink (plataforma de simulación multidominio) y GUIDE (editor de interfaces de usuario - GUI).

MATLAB es muy usado en *Computación Paralela, Matemática, Estadística, Optimización, Control de Sistemas, Procesamiento de Imágenes y Comunicaciones, Procesos de Imágenes y Visión Computacional, Finanzas Computacional, Biología Computacional, entre otros*.

A su vez, Simulink se utiliza mucho en *Modelado de eventos, Modelos Físicos, Control de Sistemas, Procesamiento de Señales y Comunicaciones, Generación de Códigos, Simulaciones en Tiempo Real, Verificación, Validación y Prueba, Simulación Gráfica, entre otros*.

6.2.2 Entorno de MATLAB

Iniciamos el entorno de MATLAB haciendo doble clic en el acceso directo de nuestro Escritorio o por medio del menú **Inicio** → **Programas** → **MATLAB**:

- Al iniciar aparece la **Ventana de Comandos (Command Window)** aparecerá el prompt (`>>`), esto quiere decir que el programa está preparado para recibir instrucciones. En dicha Ventana ejecutaremos nuestros comandos como se muestra la parte central de la Figura 6.3.
- Disponemos un **Editor de textos (Editor)** propio para desarrollar programas. Ver parte derecha de la Figura 6.3.
- En la ventana **Area de Trabajo (Workspace)** visualizaremos las variables utilizadas desde nuestra Ventana de Comandos o bien desde algún *script* (veremos más adelante). Ver parte superior de la izquierda de la Figura 6.3.
- La ventana **Centro de Ayudas (Help)** podemos visualizarla opcionalmente o bien acceder desde la Ventana de Comandos con el comando `help`.
- La ventana **Historial de Comandos (Command History)** nos permitirá seguir nuestro historial de comandos. Ver parte media a la izquierda de la Figura 6.3.
- El **Perfilador (Profiler)** permite optimizar y depurar la performance de un archivo de MATLAB (m-file). Dispondremos también de un **Depurador (Debugger)**.

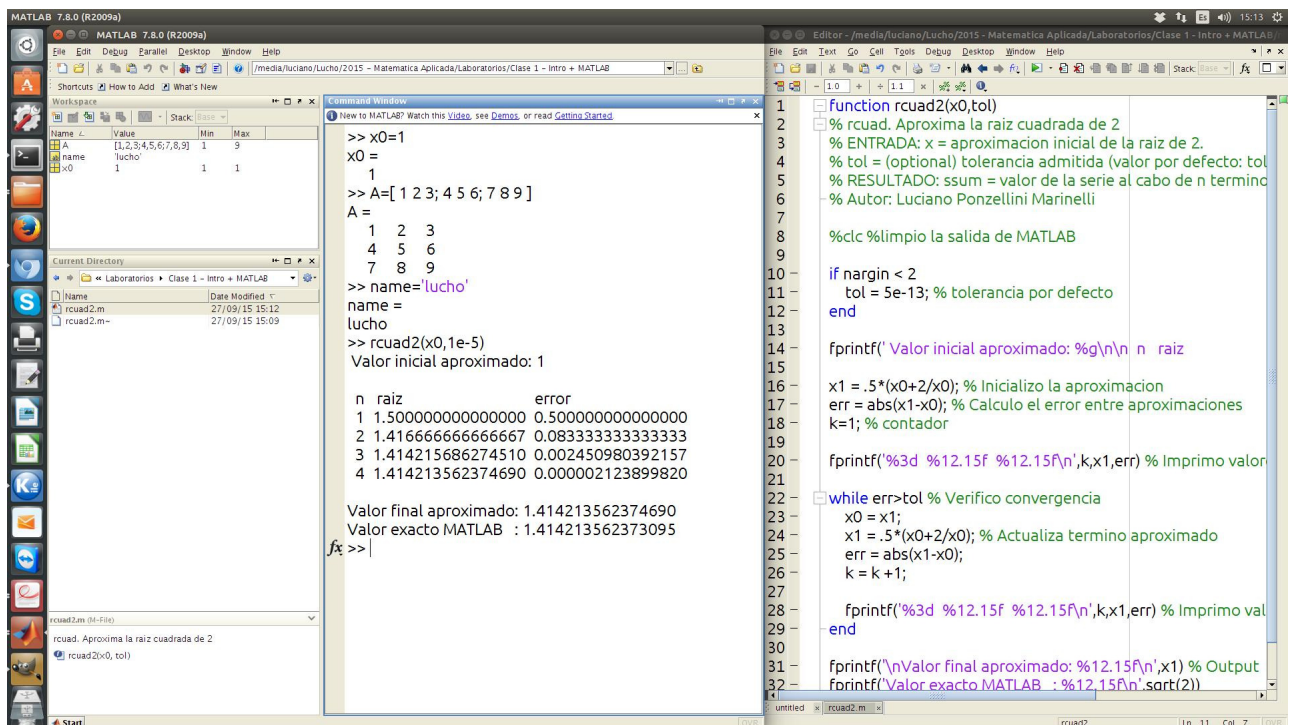


Figura 6.3: Entorno de MATLAB

6.2.3 Expresiones

Para trabajar las expresiones tenemos varias formas:

FORMA 1: Con el operador asignación (=) asignamos valor(es) a variable(s)

variable = expresión

```
>> phi = (1+sqrt(5))/2;
```

El punto y coma (;) evita que el resultado se imprima por pantalla.

FORMA 2: Directamente tecleamos una expresión. En este caso, almacenamos el resultado a una variable interna llamada **ans** (**answer**) hasta que dicha variable se actualice.

expresión

```
>> (1+sqrt(5))/2;
```

Una expresión termina con el **Enter**, y si deseamos continuar escribiendo en la próxima línea, introducimos los **tres puntos (...)**. El **punto y coma (;)** lo utilizamos para evitar imprimir por pantalla resultados. También podemos incluir varias expresiones en la misma línea separando por **coma (,)** o **punto y coma (;)**.

Para limpiar la Ventana de Comandos uso el comando **clc**:

```
>> clc
```

Eliminamos todas las variables de la memoria usando **clear**:

```
>> clear
```

Si solo quiero borrar alguna variable determinada, hacemos:

```
>> clear nom_var
```

6.2.4 Formatos numéricos

Los números reales se calculan en doble precisión almacenados en 8 bytes (64 bits): 53 bits para la mantisa, 11 para el exponente en base 2 y uno para el signo. Esto es, 16 cifras de las cuales hay entre 14 y 15 cifras decimales exactas de precisión. Es importante remarcar que MATLAB siempre calcula internamente con máxima precisión pero se pueden modificar los formatos numéricos mostrados en la salida por la pantalla:

- Coma fija escalada con 4 cifras decimales (por defecto): **format short**

```
>> pi
ans = 3.1416      (3 cifras decimales exactas)
```

- Coma fija escalada con 15 cifras decimales: **format long**

```
>> format long, pi
ans = 3.141592653589793      (15 cifras decimales exactas)
```

- Notación científica de punto flotante con cifras 4 decimales: **format short e**

```
>> format short e, pi
ans = 3.1416e+00      (3 cifras decimales exactas)
```

- Idem con 15 cifras decimales: **format long e**

```
>> format long e, pi
ans = 3.141592653589793e+00      (15 cifras decimales exactas)
```

- Formato ingenieril de 4 cifras decimales y exponente múltiplo de 3: **format short eng**

```
>> format short eng, 100*pi
ans = 314.1593e+000
>> 1000*pi
ans = 3.1416e+003
```

- Formato ingenieril de 15 cifras decimales y exponente múltiplo de 3: **format long eng**

```
>> format long eng, 1000
ans = 1.000000000000000e+003
```

- Con el formato **format short g**, MATLAB elige la mejor notación entre coma fija y punto flotante con 4 decimales, y con **format long g** realiza lo mismo con 15 decimales.

MATLAB dispone tres comandos útiles relacionados con la representación de números de *punto flotante* que utiliza la computadora para representarse internamente los números. Volveremos sobre este punto más adelante:

- **eps**: devuelve la diferencia entre 1 y el número inmediato superior

```
>> eps
ans = 2.2204e-016
```

- **realmin**: devuelve el número más chico con que se puede trabajar

```
>> realmin
ans = 2.2251e-308
```

- **realmax**: devuelve el número más grande con que se puede trabajar

```
>> realmax
ans = 1.7977e+308
```

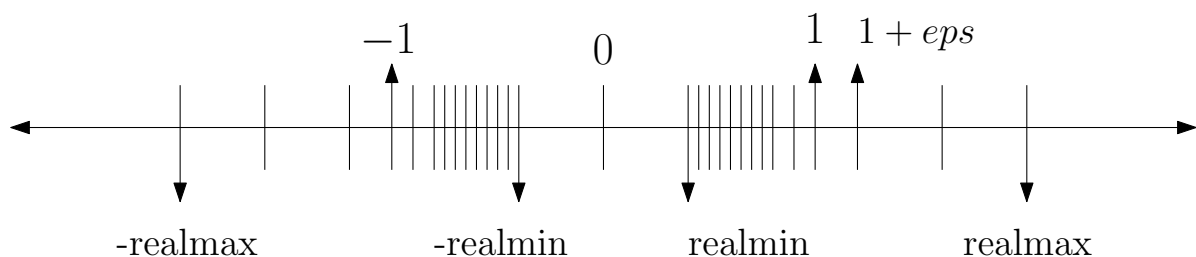


Figura 6.4: Representación esquemática de **eps**, **realmin** y **realmax**.

A la vez, MATLAB tiene un formato especial para números muy grandes (que no puede representar) considerados *infinito*:

```
>> 1.0/0.0
Warning: Divide by zero
ans = Inf
```

También tiene una representación especial para resultados que no están definidos como números reales como *NaN* (Not a Number) o bien *Inf* (Infinity):

```
>> 0/0
Warning: Divide by zero
ans = NaN
>> Inf/Inf
ans = NaN
```

MATLAB trabaja sin ninguna dificultad en el campo de los números complejos \mathbb{C} :

```
>> sqrt(-1)
ans = 0 + 1.0000i (¿y la otra raíz?)
>> 2-3i
ans = 2.0000 - 3.0000i
>> 1+2*j (j no debe ser una variable con un valor determinado)
ans = 1.0000 + 2.0000i
```

Con el comando **complex** creamos un número del campo complejo a partir de dos argumentos, su *parte real* y su *parte imaginaria*:

```
>> z = complex(3,2)
z = 3.0000 + 2.0000i
```

6.2.5 Entrada y salida por Ventana de Comandos

Podemos escribir mensajes por la Ventana de Comandos de MATLAB, así como también leer variables. La función **input** imprime un mensaje en la línea de comandos y recupera como valor de retorno un valor numérico (escalar, vector, matriz), string (cadena de caracteres) o algún otro tipo. Después de imprimir el mensaje, el programa espera que el usuario ingrese un valor numérico o string para luego continuar ejecutándose:

```
>> n = input('Cantidad de ecuaciones del sistema') (n numérico)
>> s = input('Ingrese su nombre (entre apóstrofes)') (s string)
```

La función **disp** imprime en pantalla un mensaje de texto o el valor de una variable pero sin imprimir su nombre:

```
>> disp('Fin del programa')
Fin del programa
>> A=rand(2,5); (defino una matriz random 2x5)
>> disp(A)
0.9340 0.7577 0.3922 0.8235 0.3171
0.6787 0.7431 0.6555 0.6948 0.9502
```

La función **fprintf** imprime en pantalla mensajes permitiendo controlar los distintos valores de formatos de salida. Su estructura es:

```
fprintf('texto')
```

```
fprintf('cadena de control', var1, var2,...)
```

Debemos tener cuidado dónde queda el prompt:

```
>> s = 'Matemática Aplicada', fprintf(s)
Matemática Aplicada>>          (el prompt queda pegado)

>> fprintf('Matemática Aplicada')
Matemática Aplicada>>

>> fprintf('Matemática Aplicada' \n)
Matemática Aplicada          (el \n baja el prompt)
>>
```

La 'cadena de control' de **fprintf** contiene los distintos formatos de escritura. Por ejemplo:

- %c, %d, %e, %E, %f, %g, %G para variables numéricas
- %s para cadenas de caracteres

Se puede controlar la salida numérica con estas opciones:

- %12f \mapsto 12 dígitos mínimos a imprimir por pantalla
- %12.5f \mapsto 12 dígitos mínimos y 5 dígitos después de la coma

Para imprimir números con decimales como salida, se puede hacer de la siguiente manera:

```
>> raiz = 1.414213562374690;
>> fprintf('Valor final aproximado: %12.5f \n', raiz)
Valor final aproximado: 1.41421

>> fprintf('Valor final aproximado: %12.5e \n', raiz)
Valor final aproximado: 1.41421e+00
```

Para imprimir un entero empleando el mismo formato se debe poner un cero después del punto decimal:

```
>> iter = 9;
>> fprintf('Cantidad de iteraciones: %9.0f \n', iter)
Cantidad de iteraciones: 9
```

El comando **fprintf** se utiliza mucho también para escribir datos sobre un archivo de texto.

6.2.6 Operaciones

MATLAB puede operar distintas variables por medio de **operadores**. Los **operadores aritméticos** son los siguientes:

- + adición o suma
- sustracción o resta
- * multiplicación
- / división
- ^ potenciación
- \ división inversa

```
>> s= 2^.5
c = 1.4142      (raíz cuadrada de 2)
>> c= 3 \ 1
c = 0.3333      (divide de derecha a izquierda)
```

MATLAB también dispone de los siguientes **operadores relacionales**:

- < menor que
- > mayor que
- <= menor o igual que
- >= mayor o igual que
- == igual que
- ~= distinto que

```
>> 1==1
ans = 1      (verdadero)
>> 3.1415926==pi
ans = 0      (falso)
>> 3.1415926~=pi
ans = 1
```

A la vez, MATLAB dispone de los siguientes **operadores lógicos**:

- & y (AND)
- | o no excluyente (OR)
- && y (AND con “cortocircuito”)
- || o no excluyente (OR con “cortocircuito”)
- xor o excluyente
- ~ negación lógica (not)

```
>> 1&1
ans = 1
>> 1&0
ans = 0
>> 1|0
ans = 1
>> xor(1,1)
ans = 0
```

6.2.7 Operaciones con vectores y matrices

Nos preguntamos ahora, ¿cómo trabajar con *vectores* y *matrices* en MATLAB?

$$\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n] \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Las matrices y vectores se definen como **variables con nombres** distinguiendo mayúsculas de minúsculas. A diferencia de otros lenguajes de programación, en MATLAB no hace falta preestablecer su dimensión dado que según el número de elementos definidos determina su dimensión. Incluso su dimensión se puede modificar posteriormente.

Podemos definir un **vector fila** \mathbf{x} separando sus componentes por **espacios en blancos** o bien por **comas** (,):

```
>> x = [1 2 4] (o bien x = [1, 2, 4])
x = 1 2 4 (vector fila)
```

Si los números están separados por **punto y coma** (;) obtenemos el **vector columna** \mathbf{y} :

```
>> y = [1; 3; 9]
y =
1
3
9 (vector columna)
```

Definimos las **matrices** por filas separando los elementos de una misma fila por **espacios en blancos o comas** (,) y separando las filas por **punto y coma** (;):

```
>> A=[8 1 6; 3 5 7; 4 9 2]
A =
8 1 6
3 5 7
4 9 2
```

Internamente las matrices se almacenan por columnas y en una columna (aunque se introduzcan por filas). Existen una gran variedad de funciones predefinidas en MATLAB que generan de matrices predefinidas (**zeros**, **ones**, **eye**, **rand**, **magic**, ...). Usaremos luego.

```
>> Z=zeros(3,4)
Z =
0 0 0 0
0 0 0 0
0 0 0 0
>> U=ones(1,10)
Z =
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
```

También se puede crear una nueva matriz o vector a partir de otras matrices o vectores definidos previamente. Sin embargo, debemos tener cuidado en que las dimensiones de concatenación tiene que ser compatibles. En caso de no ser compatibles las dimensiones, MATLAB dará un error advirtiéndolo esto. Veamos los siguientes ejemplos:

```
>> z = [x 8 16 32]
z = 1  2  4  8 16 32
>> B = [A; x]
B =
8  1  6
3  5  7
4  9  2
1  2  4
>> C = [B; z]
??? Error using ==> vertcat
CAT arguments dimensions are not consistent.
```

Accedemos a los elementos de un vector con el índice entre paréntesis, siempre y cuando el mismo esté definido:

```
>> z(5)
ans = 16
>> z(7)
??? Attempted to access z(7); index out of bounds because numel(z)=6.
```

Accedemos a los elementos de una matriz con los índices entre paréntesis separados por una coma:

```
>> B(2,3)
ans = 7
```

También puede accederse con un sólo subíndice (debido a su almacenamiento tipo columna):

```
>> B(6)
ans = 5
```

También podemos crear vectores o matrices muy rápidamente dando valores de algún/os de sus elementos. Automáticamente se asignará cero a todos los demás elementos del vector o matriz:

```
>> u(3) = .1, u(10) = .5
u = 0 0 .1 0 0 0 0 0 0 .5

>> C(3,5) = 1
C =
0 0 0 0 0
0 0 0 0 0
0 0 0 0 1
```

Podemos redefinir el elemento c_{23} de la matriz $\mathbf{C} = (c_{ij})$ haciendo:

```
>> C(2,3) = 1
C =
0 0 0 0 0
0 0 1 0 0
0 0 0 0 1
```

El operador apóstrofo (') es la **trasposición matricial** conocida

```
>> B'
ans =
8 3 4 1
1 5 9 2
6 7 2 4
```

Es importante recordar que MATLAB diferencia entre vectores filas y vectores columnas. Si \mathbf{x} es el vector fila e \mathbf{y} es el vector columna definidos anteriormente, entonces resultará un error si queremos sumarlos (o restarlos):

```
>> x+y
??? Error using ==> +
Matrix dimensions must agree.
```

Lo correcto en dicho caso sería transponer uno de los vectores dependiendo si queremos como solución un vector fila o columna:

```
>> x+y' (vector fila)
>> x'+y (vector columna)
```

Recordemos del *Algebra Lineal* que podemos definir el **producto escalar interno** entre vectores del mismo espacio vectorial:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}^T = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

siendo $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ y $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ vectores del espacio vectorial \mathbb{R}^n .

En MATLAB, podemos calcular producto interno hacerlo usando el operador **producto** adecuadamente como se muestra a continuación:

```
>> x*y
ans = 43
>> x*y'
??? Error using ==> mtimes
Inner matrix dimensions must agree.
>> x'*y
??? Error using ==> mtimes
Inner matrix dimensions must agree.
```

En cambio, si trasponemos los vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} respectivamente, obtendremos:

```
>> xt=x';    (x pasa a vector columna)
>> yt=y';    (y pasa a vector fila)
>> xt*yt     (se denomina producto escalar externo dado que genera una matriz)
ans =
1  3  9
2  6 18
4 12 36
```

También podemos combinar operadores:

```
>> x*2
ans = 2  4  8    (multiplico por 2 cada componente)
>> x-1
ans = 0  1  3    (resto 1 a cada componente)
```

Para multiplicar o dividir vectores o matrices *componente a componente*, utilizaremos el **operador punto** ($\cdot*$) y ($\cdot/$):

```
>> x.*x
ans = 1  4 16
>> c=[1 0 1]
c = 1  0  1
>> x./c
ans = 1  Inf  4
```

Análogamente para la potencia (\cdot^{\wedge}):

```
>> x.^3
ans = 1  8  64
```

Análogamente, consideremos las matrices:

```
>> M = [1 2 3; 4 5 6]
M =
1 2 3
4 5 6
>> N = [1 2; 3 4; 5 6]
N =
1 2
3 4
5 6
```

Recordemos también del *Algebra Lineal* que el **producto matricial** entre las matrices $\mathbf{M} = (m_{ij})$ de dimensión $r \times s$ y la matriz $\mathbf{N} = (n_{ij})$ de dimensión $s \times t$, está definido como:

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^s m_{ik}n_{kj} \quad i = 1, \dots, r, \quad j = 1, \dots, t$$

siendo $\mathbf{P} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{N}$ la matriz producto $\mathbf{P} = (p_{ij})$ de dimensión $r \times t$.

Para obtener el producto matricial $M \cdot N$ en MATLAB haremos:

```
>> M*N
ans =
22 28
49 64
```

En cambio, si hacemos:

```
>> M*N'
??? Error using ==> mtimes
Inner matrix dimensions must agree.
```

Con el operador $(.)$ obtenemos el producto por componentes:

```
>> M.*N'
ans =
1 6 15
8 20 36
```

Análogamente para calcular **la potencia** $(.^{\wedge})$ de las componentes. En el siguiente ejemplo calculamos la raíz cuadrada de cada componente de la matriz M :

```
>> M.^ .5
1.0000 1.4142 1.7321
2.0000 2.2361 2.4495
```

Utilizamos el **operador dos puntos** $(:)$ para construir vectores como rangos de la forma:

$$[inicio : paso : fin]$$

Este operador resultará muy útil para definir *discretizaciones* (veremos).

```
>> i = 1:10
i = 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
>> j = 1:2:10
j = 1 3 5 7 9
>> k = 1:1.5:10
k = 1.0000 2.5000 4.0000 5.5000 7.0000 8.5000 10.0000
>> h = 10:-1:1
h = 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1
```

Este operador también es muy potente en el uso de los índices de matrices. Por ejemplo:

```
>> A
A =
8 1 6
3 5 7
4 9 2
>> A(3, :)
ans = 4 9 2 (devuelve la 3er. fila de A)
```

```
>> A(:,2)
ans =
1
5
9      (devuelve la 2da. columna de A)
>> A(2:3, 2:3)
5  7
9  2      (devuelve una submatriz 2x2 de A desde (2,2) a (3,3))
```

Podemos usar este operador (`:`) para invertir el orden de elementos de un vector o permutar filas/columnas de una matriz:

```
>> x = x(3:-1:1)
x =  4  2  1
>> D = A(:,3:-1:1)
D =
6  1  8
7  5  3
2  9  4      (permutamos las columnas de A)
```

Si en cambio usamos **corchetes** `[]` dentro del paréntesis, hacemos referencia a los *índices* del vector o matriz:

```
>> A([1 3])
ans = 8  4
```

6.2.8 Funciones intrínsecas

MATLAB tiene un gran número de funciones incorporadas. Estas se conocen como *funciones intrínsecas* o *incorporadas* dado que están incorporadas en el propio código ejecutable del programa, por ende serán rápidas y eficientes. Su formato general es:

$$[\text{valor/es de retorno}] = \text{nombre función}(\text{argumento/s})$$

Estas funciones se llaman utilizando su nombre en una expresión o como comando.

Existen además funciones definidas en ficheros ***.m** que vienen con el propio programa o que han sido aportadas por usuarios en **Matlab Central** o bien circulan en la web.

Ejemplos de funciones intrínsecas de MATLAB:

```
>> max(y);
ans = 9      (máxima componente de y)
>> [ maxx, posmax ] = max(x)
maxx = 4      (máxima componente de x)
posmax = 1      (índice de la máxima componente de x)
>> a = cos(pi/2) - sin(pi/2)
a = -1.0000      (funciones trigonométricas)
>> v = [ 1 2 3 ], nv = sqrt(sum(v.^2))
v = [ 1 2 3 ]
nv = 5      (norma euclídea del vector v)
```

Tabla 6.1: **Algunas funciones intrínsecas de MATLAB**

Comando	Función
<code>[xm, in]=max(x)</code>	Componente máxima xm de un vector e índice que ocupa in
<code>[xn, in]=min(x)</code>	Componente mínima xn de un vector e índice que ocupa in
<code>n=length(x)</code>	Si x vector, devuelve la cantidad de elementos
<code>sum(x)</code>	Suma los elementos de un vector
<code>cumsum(x)</code>	Vector suma acumulada de elementos de un vector
<code>mean(x)</code>	Valor medio de los elementos de un vector
<code>prod(x)</code>	Producto de los elementos de un vector
<code>cumprod(x)</code>	Vector producto acumulado de elementos de vector
<code>[y, in]=sort(x)</code>	Ordenación creciente de elementos de un vector x. Devuelve el vector ordenado y junto a un vector in con las posiciones iniciales en x de los elementos en el vector ordenado y.

Tabla 6.2: **Funciones de MATLAB: *Análisis Matemático***

Comando	Función
<code>sin(x)</code>	seno
<code>cos(x)</code>	coseno
<code>tan(x)</code>	tangente
<code>asin(x)</code>	arco seno
<code>acos(x)</code>	arco coseno
<code>atan(x)</code>	arco tangente (devuelve un ángulo entre $-\pi/2$ y $\pi/2$)
<code>sinh(x)</code>	seno hiperbólico
<code>cosh(x)</code>	coseno hiperbólico
<code>tanh(x)</code>	tangente hiperbólica
<code>asinh(x)</code>	arco seno hiperbólico
<code>acosh(x)</code>	arco coseno hiperbólico
<code>atanh(x)</code>	arco tangente hiperbólica
<code>log(x)</code>	logaritmo natural
<code>log10(x)</code>	logaritmo decimal
<code>exp(x)</code>	función exponencial
<code>abs(x)</code>	valor absoluto
<code>sqrt(x)</code>	raíz cuadrada
<code>sign(x)</code>	devuelve -1 si $x < 0$, 0 si $x = 0$ y 1 si $x > 0$
<code>rem(x, y)</code>	resto de la división entre x e y
<code>mod(x, y)</code>	similar a rem pero sirve para reales
<code>round(x)</code>	redondeo hacia el entero más próximo
<code>fix(x)</code>	redondea hacia el entero más próximo a 0
<code>floor(x)</code>	valor entero más próximo hacia $-\infty$
<code>ceil(x)</code>	valor entero más próximo hacia $+\infty$
<code>real(x)</code>	parte real
<code>imag(x)</code>	parte imaginaria

Tabla 6.3: Funciones de MATLAB: *Algebra Lineal*

Comando	Función
<code>[m,n] = size(A)</code>	número de filas m y columnas n de una matriz A
<code>norm(x,1)</code>	norma 1 de un vector o matriz (veremos)
<code>norm(x)</code>	norma 2 de un vector o matriz (veremos)
<code>norm(x,inf)</code>	norma infinito de un vector o matriz (veremos)
<code>A'</code>	devuelve la matriz traspuesta de A (previamente definida)
<code>norm(A,1)</code>	norma 1 de una matriz
<code>norm(A)</code>	norma 2 de una matriz
<code>norm(A,inf)</code>	norma infinito de una matriz
<code>det(A)</code>	determinante de una matriz
<code>inv(A)</code>	inversa de una matriz
<code>eig(A)</code>	autovalores de una matriz
<code>[V,D]=eig(A)</code>	autovectores y autovalores de una matriz
<code>cond(A)</code>	número de condición de una matriz (veremos)
<code>[L,U]=lu(A)</code>	factorizacion LU de una matriz (veremos)
<code>zeros(m,n)</code>	forma matriz de ceros de tamaño m x n
<code>ones(m,n)</code>	forma matriz de unos de tamaño m x n
<code>diag(x)</code>	matriz diagonal con elementos diagonales del vector x
<code>diag(A)</code>	forma vector con los elementos diagonales de la matriz A
<code>rand(n)</code>	forma matriz de tamaño n x n y de números aleatorios entre 0 y 1 (con distribución uniforme)
<code>rand(m,n)</code>	idem pero tamaño m x n

Las funciones intrínsecas anteriores de las Tabla 6.2 y Tabla 6.3 se aplican tanto a escalares, vectores y matrices. Este acto de transformar un código desarrollado para una data de tipo escalar y usarlo en una data de tipo no escalar, se llama **vectorización**.

Este proceso tiene la ventajas de impactar enormemente en la velocidad de cálculos (10 o incluso 1000 veces más rápido), permite escribir en forma sintética y general códigos (funciones y scripts .m). Además, MATLAB internamente tiene automatizado paralelizar operaciones lógicas y aritméticas sobre datos, lo que se conoce como (*paralelización automática implícita*). Las mayoría de las funciones intrínsecas están paralelizadas, por ende, son más rápidas y eficientes. Si quisiéramos hacer esto en otros lenguajes habría que programar estructuras de bucles.

Ejemplos de vectorización: Operamos sobre los elementos de un vector o matriz usando funciones intrínsecas de MATLAB:

```
>> sqrt([1,4; 9,16])
ans =
1 2
3 4      (raíz cuadrada componente a componente)

>> abs([0,1,2,-5,-6,-7])
ans =
0 1 2 5 6 7 (valor absoluto componente a componente)
```

6.2.9 Otras funciones de MATLAB: polinomios

Un polinomio se puede definir por su vector de coeficientes. Por ejemplo:

```
>> pol = [1 0 -8 6 -10]
pol = 1 0 -8 6 -10  $\mapsto p(x) = x^4 - 8x^2 + 6x - 10$ 
```

Para evaluarlo en un determinado valor de x usamos **polyval**:

```
>> polyval(pol,1)
ans = -11
```

Para calcular sus raíces usamos **roots**:

```
>> roots(pol)
ans =
-3.2800
 2.6748
 0.3026 + 1.0238i
 0.3026 - 1.0238i
```

6.2.10 Programación

En MATLAB podemos programar y ejecutar nuestros programas muy fácilmente, sin embargo como lenguaje de programación en sí mismo MATLAB no tiene tantas posibilidades como otros lenguajes (Fortran, C++, etc).

Un programa se escribe en un archivo de texto ***.m**. Estos archivos se crean y modifican con cualquier Editor de textos aunque es recomendable usar el editor propio **Editor** de MATLAB.

Existen dos grandes tipos de archivos *.m:

archivos de comandos (scripts) funciones

Los *scripts* contienen un conjunto de comandos que se ejecutan secuencialmente cuando se teclea el nombre del archivo en la Ventana de comandos.

Las *funciones* permiten definir funciones enteramente análogas a las intrínsecas, con su nombre, argumentos de entrada y de salida. Los archivos *.m que definen funciones permiten extender las posibilidades de MATLAB; de hecho existen bibliotecas de archivos *.m que se venden (toolkits) o se distribuyen gratuitamente (a través de Internet).

Para que el programa encuentre una determinada función desarrollada por el usuario, es importante que el archivo-m (m-file) se encuentre en el directorio actual de trabajo, o bien, se indique el camino (path) de donde se encuentra el mismo

Cuando se programa, es importante ir comentando nuestro código. El carácter porcentual (%) indica comienzo de un comentario. Cuando aparece en una línea de comandos, todo lo que va desde ese carácter hasta el fin de la línea es comentario y no se ejecuta.

Los ciclos de repeticiones puede darse como *bifurcaciones* o *bucles*:

Bifurcaciones: estos realizan una o más operaciones o comandos según se cumpla o no determinada condición (**if**, **switch**). En su forma más simple, la bifurcación **if** es:

```

if [condición]
    sentencias
end

```

Ejemplos de bifurcaciones tipo if:

```

if p=inf
disp('norma infinito')
end

```

Existe también la bifurcación múltiple:

```

if [condición 1]
    bloque 1
elseif [condicion 2]
    bloque 2
else
    bloque 3
end

```

Ejemplos de bifurcaciones múltiples:

```

if p=inf
disp('norma infinito')
elseif p=2
disp('norma euclidea')
else
disp('norma p-ésima')
end

```

La sentencia de bifurcación **switch** realiza una función análoga a un conjunto de **if ... elseif** concatenados:

```

switch [expresión]
    case caso 1
        bloque 1
    case {caso 2,..., caso n}
        bloque 2
    otherwise
        bloque 3
end

```

Ejemplos de bifurcaciones tipo switch:

```

switch p
case inf
disp('norma infinito')
case 2
disp('norma euclidea')
otherwise
disp('norma p-ésima')
end

```

Primero se evalúa *[expresión]* que debe ser escalar o string. Se compara con *caso 1* y si es igual se ejecuta el *bloque 1* de sentencias (es posible agrupar varios casos entre llaves). Así se sigue pero si ninguno es igual, se ejecutan las sentencias del caso *otherwise*.

Bucles: estos permiten repetir las mismas operaciones o comandos sobre datos distintos (**for**, **while**). La sentencia de bucle **for** repite un conjunto de sentencias un número predeterminado de veces:

```
for variable=[rango]
    sentencias
end
```

Ejemplos de bifurcaciones tipo for:

```
for i=1:10
a = a + 1
end

for k=20:-2:1
y(k) = k*sin(k*pi/4)
end

t = [-1:1e-2:1];
for p=[ 10  5.5  1  -3.5  -8 ]
y=@(t)  p*cos(t)
plot(t,y(t)), hold on
end
```

La estructura de bucle **while** (similar a la mayoría de los lenguajes de programación) ejecuta las sentencias del bloque siempre que se cumpla la condición. A diferencia de la sentencia **for**, puede no ejecutarse nunca si no llegara a cumplirse la condición:

```
while [condición]
    sentencias
end
```

Ejemplos de bifurcaciones tipo while:

```
while tol<1e-9
iter = iter + 1;
end

while 1
iter = iter + 1;
if iter == 50,    break
end
end
```

La sentencia **break** termina la ejecución del bucle interno que comprenden dicha sentencia.

6.2.11 Almacenamiento

En el trabajo con Métodos Numéricos aplicados a problemas reales o a problemas científicos, muchas veces encontramos que nuestra data (input) viene en formato tipo: **.dat*, **.txt*, etc dado que manejamos grandes cantidades de datos. Es importante poder leer dichos datos, almacenarlos en alguna variable de nuestro entorno de trabajo en MATLAB y luego poder trabajar con estos valores almacenados. También es importante que una vez que hayamos hecho nuestros cálculos, la salida de nuestros resultados (output) a los cálculos numéricos realizados, se guarde en algún espacio de trabajo para que luego puede ser leído nuevamente y analizado. Recordemos que cuando cerramos nuestra sesión, el contenido de las variables se borra automáticamente. Para esto usaremos principalmente el comando *load* y el comando *save*.

El comando load: Para recuperar los datos almacenados en un archivo de texto (preferentemente plano) utilizamos el comando **load** que lee todo el archivo de datos y lo almacena en una variable cuyo nombre coincide con el nombre del archivo.

De la siguiente manera guardamos todo el contenido del archivo `entrada.dat` en una variable llamada **datos** sin importar cual sea la extensión del archivo:

```
>> load entrada.dat
```

Si en cambio deseamos que la variable tenga distinto nombre, por ejemplo queremos guardar el contenido del archivo en una variable llamada **A**:

```
>> A = load('matriz.dat')
```

Si tipeamos:

```
>> load
```

recuperamos todas variables definidas en la sesión anterior de MATLAB guardadas previamente con el comando **save** (ver abajo).

El comando save: Para grabar datos que en un archivo se utiliza el comando **save**.

Si luego de una sesión de trabajo tipeamos:

```
>> save
```

creamos un archivo binario **matlab.mat** con el nombre y valor de todas las variables definidas en la sesión de MATLAB.

Si queremos guardar solo las variables **A**, **x** e **y** en un archivo binario llamado **archivo.mat**:

```
>> save archivo A, x, y
```

Si en cambio, queremos guardar la matriz **A** en el archivo llamado **salidas.dat**:

```
>> save salida.dat A -ascii
```

De esta última manera, cada elemento de **A** se almacena con 8 cifras decimales. En cambio, si deseamos almacenar 16 cifras decimales:

```
>> save salida.dat A -ascii -double
```

En formato ASCII sólo se guardan valores, no información como nombres de matrices, etc.

6.2.12 Scripts

Los **scripts (archivos de comandos)** son archivos *.m con una secuencia de comandos semejante a la que se ingresan por teclado. Los comandos se ejecutan *secuencialmente* cuando se tecldea el nombre del script (sin extensión) en la Ventana de Comandos o bien se puede ejecutar con algún ícono de MATLAB.

El script debe almacenarse en el directorio actual donde estamos trabajando. Dentro del mismo conviene poner punto y coma (;) al final de cada sentencia para evitar una salida cuantiosa de las variables que usamos.

Un archivo (script o función) *.m puede llamar otros archivos *.m, sean funciones o scripts. Esto hace que la programación sea de tipo modular.

Es importante remarcar que las variables definidas en scripts son variables internas, es decir variables del espacio de trabajo desde el que se ejecuta el archivo. Por ejemplo, si el archivo se ejecuta desde la Ventana de Comandos, se crean interactivamente en el *Workspace* de MATLAB variables con el mismo nombre del script. Al terminar la ejecución del script, dichas variables permanecen en memoria.

6.2.13 Funciones en MATLAB

Hay varios modos básicos de definir funciones en MATLAB, sin embargo sólo estudiaremos estos que detallamos a continuación:

- en archivos .m (*m-file functions*)
- en líneas de comandos (*inline functions, anonymous functions*)

Funciones definidas en archivos (m-file functions):

Estas funciones son las definidas en archivos propios de extensión .m.

```

1 function [ argumentos_salida ] = nom_func( argumentos_entrada )
2 % nom_func: detalle de lo que hace la funcion
3 % INPUT: descripcion de los argumentos de entrada
4 % OUTPUT: descripcion de los argumentos de salida
5 % Autor/es y modificaciones: (recomendable)
6 % Funciones que usa: (recomendable)
7
8 argumentos_salida = argumentos_entrada; % -----> contenido de la funcion
9
10 end
11

```

Figura 6.5: Función m-file en MATLAB.

La primera línea es su definición:

function [argumento(s) de salida] = nombre_función(argumento(s) de entrada)

nombre_función: Es el nombre de la función que tiene que coincidir con el nombre del archivo, es decir, nombre.m. No debe incluir espacios ni palabras reservadas por MATLAB.

argumento(s) de entrada: Parámetro(s) que le paso a la función. Si hay más de uno, van entre paréntesis separados por comas. Si no hay, no hace falta poner paréntesis.

argumento(s) de retorno: Resultado(s) devuelto por la función. Si hay más de uno van entre corchetes separados por comas. Si sólo hay un valor no hacen falta corchetes. Si no hay se omiten corchetes y el signo igual (=).

Los argumentos de entrada o valores de salida, dependerá de cómo esté armada nuestra función. En general, usaremos:

function nombre_funcion(variables_entrada): cuando la función no devuelve ningún valor.

function variables_salida = nombre_funcion: cuando la función no precisa variables de entrada.

function [y] = nombre_funcion(a,b,c): cuando la función devuelve un solo resultado.

function y = nombre_funcion(a,b,c): se puede escribir de esta manera omitiendo corchetes.

function [y1,y2] = nombre_funcion(a,b,c): Esta será la forma general que usaremos.

Una función no modifica los argumentos que recibe, estos pueden ser: *strings, escalares, vectores, matrices o incluso otras funciones*. Los resultados de una función se obtienen a través de los valores de retorno.

Los valores de salida deben calcularse dentro de la función. Las variables definidas dentro de la función son **variables locales**. Dichas variables pertenecen a dicho espacio de trabajo y no son vistas desde otros espacios de trabajo.

Opcionalmente (pero recomendable) desde la segunda línea se ponen comentarios que detallen la función (ver Figura 6.5). Esto genera información asociada a mi función que cree como usuario. Para acceder a esta información podemos usar el comando **Help**. Cuando se teclea en la Ventana de Comandos **help nom_func**, se muestran los comentarios de las primeras líneas del archivo **nom_func.m** que comienzan con **%**. Esto genera un **Help de mi función**.

Opcionalmente (pero recomendable) se termina la función con **end**.

Funciones definidas en línea de comandos:

- **Tipo inline:** Son funciones de una línea de comandos definidas por una cadena de caracteres (string).

valor_func = inline('expresión','arg_1','arg_2',...)

expresión: *Expresión de la función:* Se pasa como cadena string (entre comillas).

'arg_1','arg_2',...: Argumento(s) de entrada de la función. Es el o los argumentos que aparecen como variable en la expresión. Se pasan como string entre comillas separados por coma. Si hay un solo argumento no hace falta especificarlo.

valor_func: Es el valor de salida de la función (sólo se admite un argumento de salida).

Defino la función cuadrática $f(x) = x^2 + 3$:

```
>> f=inline('x^2+3')
f = Inline function:
f(x) = x^2+3
>> f(3)
ans = 12
```

Defino el campo $g(x, y) = x^3 + y^3$:

```
>> g=inline('x^3+y^3','x','y')
g = Inline function:
g(x,y) = x^3+y^3
>> g(2,5)
ans = 133
```

- **Funciones anónimas:** Fueron introducidas desde las versiones MATLAB 7.0. Estos objetos se llaman anónimos porque su construcción no usa strings. Están asociados a una variable cuyo tipo es: `function_handle`.

nom_func = @(arg_1,arg_2,...) expresión

expresión: Expresión de la función. Solo admite una expresión ejecutable.

arg_1,arg_2,...: Argumento(s) de entrada de la función. Es el o los argumentos que aparecen como variable en la expresión. Se pasan separados por comas.

valor_func: Es el valor de salida de la función. Sólo admite un argumento de salida.

```
>> f=@(x) x^2+3
f = @(x) x^2+3
>> f(3)
ans = 12
```

```
>> g=@(x,y) x^3 + y^3
g = @(x,y) x^3 + y^3
>> g(2,5)
ans = 133
```

Nota: Algunos help de versiones nuevas de MATLAB advierten que las funciones 'inline' van a ser removidas en versiones futuras.

Es muy común cuando programamos que queramos pasar como argumento de entrada de una función, otra función. Según C.Moler en "*Numerical Computing with MATLAB*" (2002), hay al menos cinco formas diferentes de pasar una función como argumento de otra función en MATLAB 7.0 o versiones posteriores:

1. Funciones en línea (inline)
2. Definidas en un archivo-m (m-file)
3. Funciones anónimas (anonymous function)
4. Expresiones de cadena de caracteres
5. Expresiones simbólicas

Veremos más adelante como pasar funciones como argumentos.

6.2.14 Ploteos

El comando **plot**: MATLAB dispone cuatro funciones básicas para crear gráficos 2-D:

- **plot()** crea un gráfico a partir de vectores y/o columnas de matrices con escalas lineales sobre ambos ejes.
- **semilogx()** Idem con escala lineal en el eje de ordenadas y logarítmica en el de abscisas.
- **semilogy()** Idem con escala lineal en el eje de abscisas y logarítmica en el de ordenadas.
- **loglog()** Idem con escala logarítmica en ambos ejes.

En lo sucesivo usaremos la función **plot**, pero puede consultarse el Help las restantes en modo similar. Veamos un ejemplo de un ploteo en 2D:

```
>> x = [1 3 2 4 5 3];
>> plot(x), grid on,      (grid on activa una grilla en la gráfica)
>> x = [1 6 5 2 1]; y = [1 0 4 3 1];
>> plot(x,y), grid on
```

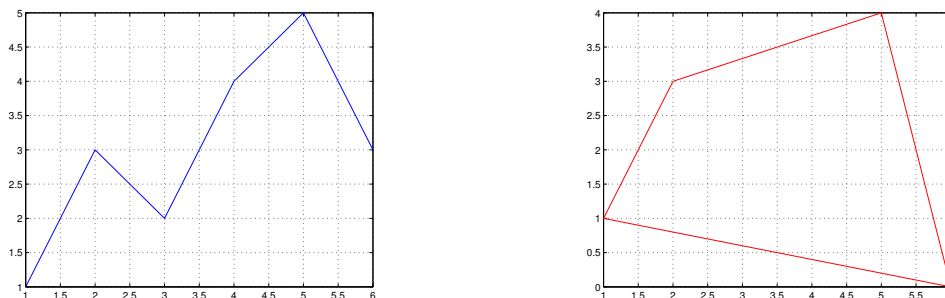


Figura 6.6: Ploteos sencillos

```
>> x = -1:.01:1;
>> plot(x,exp(x),'g'), grid on
>> x = -2*pi:pi/100:2*pi;
>> y = sin(x); z = cos(x);
>> plot(x,y,'c',x,z,'m'), grid on
```

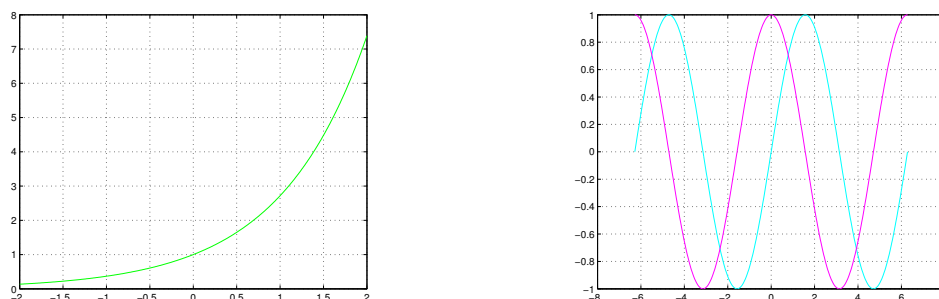


Figura 6.7: Ploteos de funciones

Los estilos, estilos y marcadores del comando **plot** usuales son:

Tipo de línea	Símbolo	Color	Símbolo	Tipo de marca	Símbolo
Continua	-	Azul	b	Puntos	.
A trazos	-	Verde	g	Círculos	o
Punteada	:	Rojo	r	Cruces	x
A trazos y puntos	-.	Cyan	c	Sumas	+
		violet	m	Asteriscos	*
		Amarillo	y		
		Negro	k		

```
>> x = 0:0.4:10;
>> y1 = sin(x).*exp(-0.4*x);
>> y2 = cos(x).*exp(-0.5*x);
>> plot(x,y1,'b+',x,y2,'ro'), grid on
```

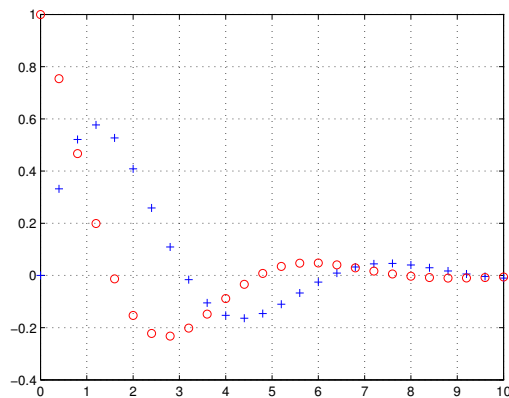


Figura 6.8: Distintos estilos de ploteos en MATLAB

El comando subplot: Una misma ventana de figura de MATLAB se puede dividir en **m** particiones horizontales y **n** verticales. Para esto usamos la función **subplot(m,n,i)** donde:

- **m:** número de subdivisiones de filas.
- **n:** número de subdivisiones de columnas.
- **i:** subdivisión activa donde grafico.

Veamos un ejemplo de cómo implementarlo:

```
>> y = sin(x);
>> z = cos(x);
>> w = exp(-x*.1).*y;
>> v = y.*z;
>> subplot(2,2,1), plot(x,y)
>> subplot(2,2,2), plot(x,z,'r')
>> subplot(2,2,3), plot(x,w,'c')
>> subplot(2,2,4), plot(x,v,'g')
```

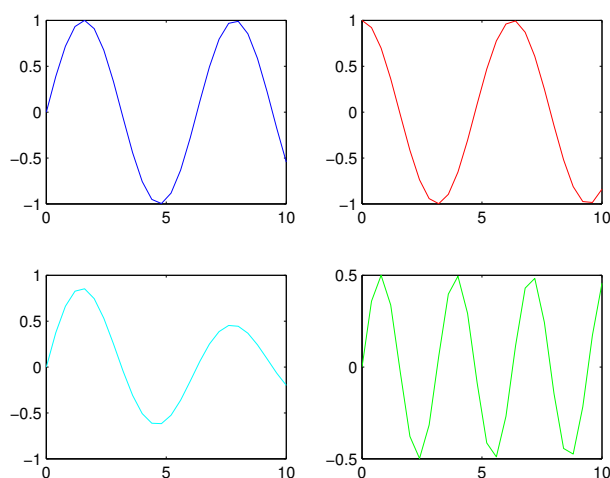


Figura 6.9: Subplot 2×2

El comando contour: La función `contour(X,Y,Z,nivel)` sirve para graficar *curvas de nivel* de un campo escalar $z = f(x, y)$:

- **X,Y:** coordenadas x e y en arreglos bidimensionales.
- **Z:** arreglo bidimensional con valores de la función.
- **nivel:** vector que contiene los niveles de contorno ó entero que representa el número de niveles de contorno (se divide el valor mínimo y máximo de Z en m-1 niveles).

```
>> x = -2:0.2:2;
>> y = x;
>> [X,Y] = meshgrid(x,y);    (uso meshgrid para hacer el "mallado")
>> Z = X.*exp(-X.^2-Y.^2);
>> mesh(X,Y,Z)
>> contour(X,Y,Z,10), grid on
```

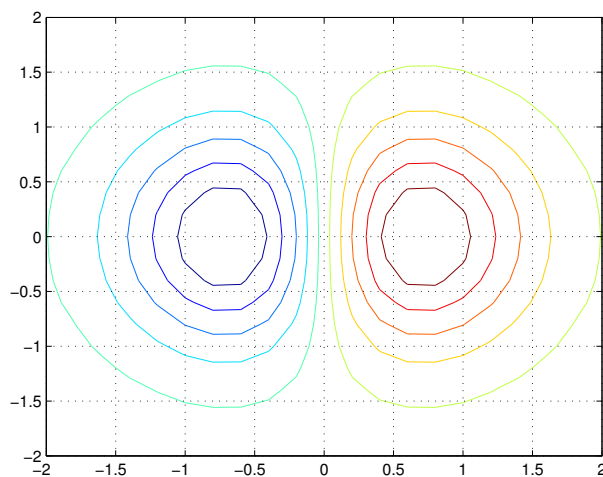


Figura 6.10: Curvas de nivel de $z = xe^{-(x^2+y^2)}$

También podemos utilizarlo para graficar funciones implícitas $f(x, y) = 0$ en 2D. Por ejemplo, la intersección de dos cónicas, una parábola y una elipse:

```
>> x = -3:0.1:3;
>> y = x;
>> [X,Y] = meshgrid(x,y);
>> Z1 = X.^2-2*X-Y+0.5;
>> Z2 = X.^2+4*Y.^2-4;
>> contour(X,Y,Z1,[0,0], 'b'), hold on,
>> contour(X,Y,Z2,[0,0], 'r'), grid on,
```

El vector $[0,0]$ en los argumentos de `contour` especifica el nivel de contorno. Solo nos interesa el contorno de nivel $z = 0$. Los niveles de contorno se ingresan en forma de vector.

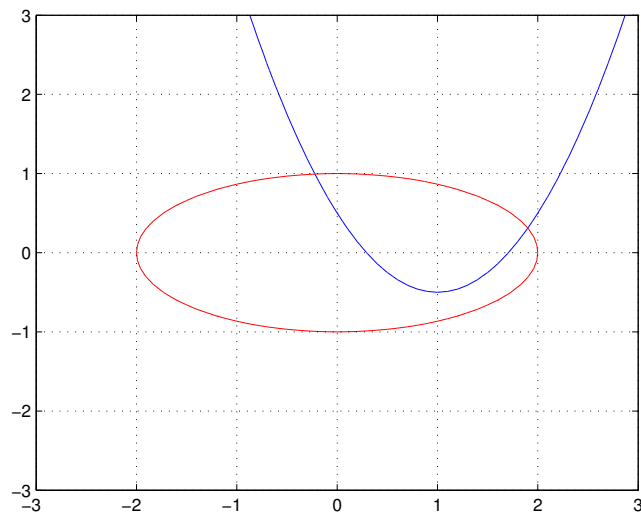


Figura 6.11: Intersección de la parábola y la elipse

El comando mesh: Pasos para graficar el campo en dos variables

$$z = f(x, y)$$

sobre un dominio rectangular $[a, b] \times [c, d]$.

1. Definimos \mathbf{x} , \mathbf{y} vectores con coordenadas en una y otra dirección de la retícula (grilla o mallado) dominio del campo.
2. Creamos dos matrices \mathbf{X} (con filas copias de \mathbf{x}) e \mathbf{Y} (con columnas copias de \mathbf{y}). Estas matrices se crean con `meshgrid` y representan las coordenadas (x, y) de todos los puntos de la retícula.
3. La matriz de valores \mathbf{Z} del campo z se calcula con las matrices de coordenadas \mathbf{X} e \mathbf{Y} .
4. Ejecutamos la función `mesh` con las matrices \mathbf{X} , \mathbf{Y} y \mathbf{Z} como argumentos. Se plotea una superficie cuyos puntos tienen como coordenadas $(\mathbf{X}(\mathbf{i},\mathbf{j}), \mathbf{Y}(\mathbf{i},\mathbf{j}), \mathbf{Z}(\mathbf{i},\mathbf{j}))$.

```
>> x = -2:0.05:2;  
>> y = -1:0.1:1;  
>> [X,Y] = meshgrid(x,y);  
>> Z = X.*exp(-X.^2-Y.^2);  
>> mesh(X,Y,Z)
```

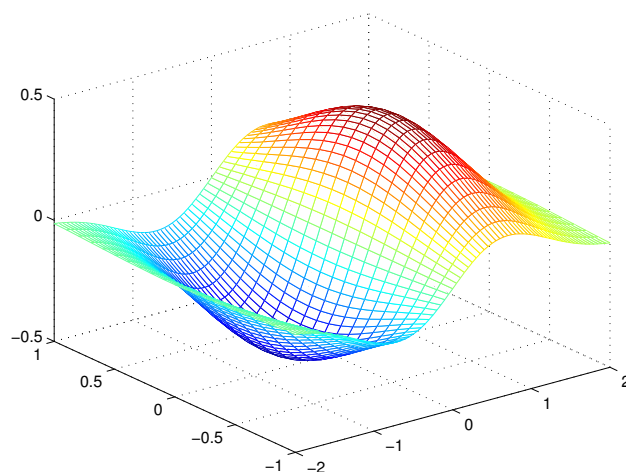


Figura 6.12: El comando mesh.

El comando surf: grafica en perspectiva la grafica de una función faceteada sobre una retícula (el color depende del valor z). El color de las facetas depende del valor de la función y podemos agregar una barra de color con escalas con **colorbar**.

```
>> surf(X,Y,Z), colorbar
```

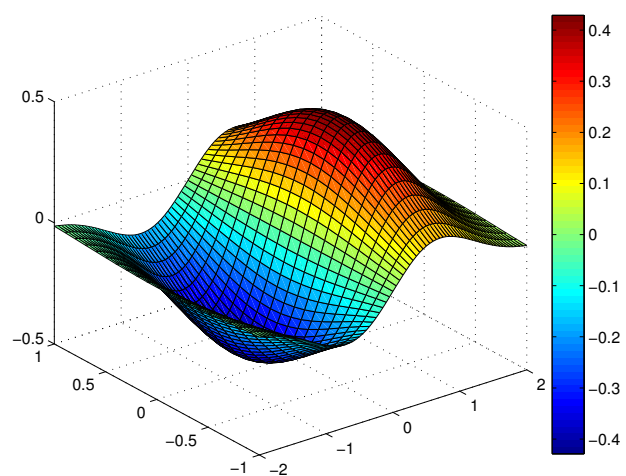


Figura 6.13: El comando surf.

6.3 Errores en los Métodos Numéricos

6.3.1 Introducción

Gran parte del *Análisis Numérico* se centra en explicar cómo resolver un problema numéricamente, esto es, desarrollar una serie de cálculos que darán una solución aproximada como respuesta. Una parte importante de este proceso es considerar los *errores* que aparecen en esos cálculos, ya sea desde los *errores de redondeo* en las operaciones aritméticas hasta los *errores de truncamiento* en los desarrollos analíticos. Esto se debe a que en práctica del cálculo numérico las soluciones obtenidas a los problemas numéricos no son *soluciones matemáticas exactas sino aproximadas*.

En aplicaciones ingenieriles a problemas reales, existen otros tipos de errores que aparecen:

- **Errores en datos de entrada (data uncertainty):** cometidos en los valores numéricos de los datos de entrada. Pueden ser *"sistemáticos"* (debido a la imprecisión de los aparatos de medición) y *"experimentales"* (debido a la apreciación del observador y otras causas).
- **Errores del modelo (model errors):** son las simplificaciones que hacemos en la construcción del modelo que describa el fenómeno físico para representarlo como un modelo matemático y poder resolverlo.
- **Errores causados por la computadora o el hombre (blunders):** son debido al mal funcionamiento de una computadora o por imperfecciones humanas.
- **Errores numéricos (numerical errors):** son los que introducimos al usar un algoritmo en una computadora. Están asociados al *"algoritmo"* (tenemos un tiempo finito de ejecución) y al *"hardware"* (tenemos un espacio finito de almacenamiento).

Nosotros nos concentraremos en estos últimos.

Si retomamos el esquema de la Figura 6.1 y la Figura 6.2, vemos ahora que cuando pasamos del problema matemático al problema numérico, muchas veces tendremos que hacer simplificaciones matemáticas para poder resolver nuestro problema numérico. Por ejemplo, si queremos calcular una función trigonométrica con un desarrollo de Taylor, necesariamente tendremos que hacer un truncamiento de la serie infinita para poder representar dicha función por su polinomio de Taylor correspondiente. Esto es porque no podemos hacer "sumas infinitas" en una computadora. Por ende, esto introducirá un error en la aproximación que llamaremos *errores por truncamiento*.

Por otro lado, una vez planteado el método numérico para resolver dicho problema e implementado el algoritmo en algún lenguaje, el proceso de cálculo introducirá errores dado que la aritmética y la representación de números en la máquina no puede hacerse en forma exacta. Esto introducirá otro tipo de errores que llamaremos *errores de redondeo*.

Finalmente, el resultado aproximado de nuestro problema numérico estará afectado por ambos errores, los de truncamiento y los de redondeo. Llamaremos a la suma de estos errores, el *error total del método numérico*. Esto queda reflejado en el esquema de la Figura 6.14.

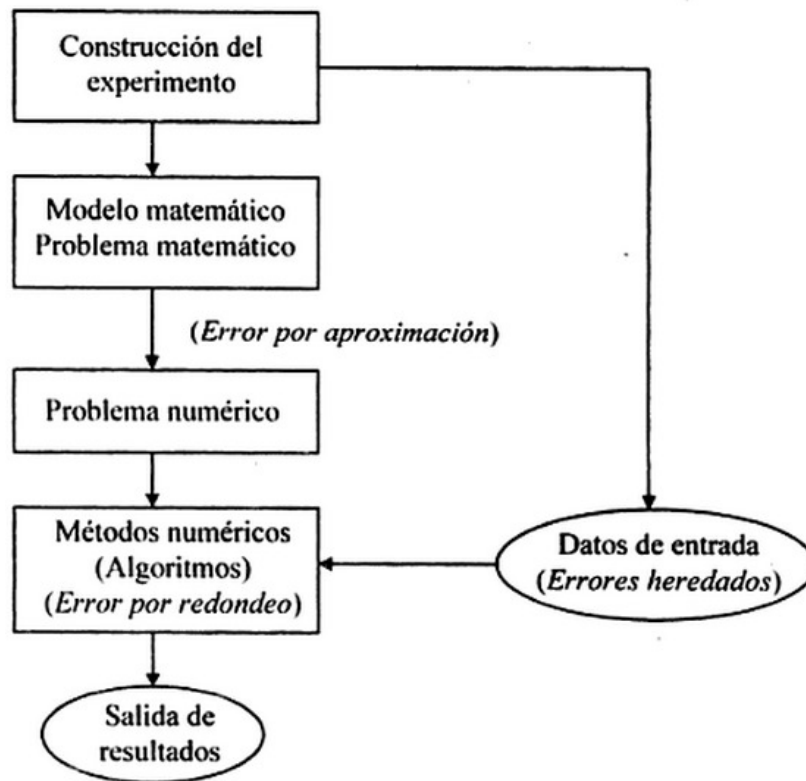


Figura 6.14: Errores en los métodos numéricos aplicados.

6.3.2 Conceptos básicos

Algunos conceptos básicos en el análisis del error a saber son los siguientes:

- **Exactitud (accuracy):** Refiere a la proximidad de un valor calculado respecto al valor verdadero o exacto.
- **Precisión (precision):** Refiere a la proximidad de un valor particular calculado respecto a otros calculados.
- **Cifras significativas:** Dígitos distintos de cero de un número leyendo el número de izquierda a derecha.
- **Overflow:** Fenómeno numérico cuando en un espacio de memoria no puede almacenarse un número positivo (negativo) por ser mayor (menor) que el mayor (menor) número representable en esa memoria. En MATLAB: `realmax` y `-realmax` devuelven el mayor número positivo y el menor número negativo representable.
- **Underflow:** Fenómeno numérico cuando dentro de la memoria no se puede almacenar un número positivo muy chico por ser menor al menor número representable en memoria. En MATLAB: `realmin` y `-realmin` devuelven el menor número positivo y el mayor número negativo representable.

Un esquema de comparación entre la precisión y la exactitud puede verse en la Figura 6.15:

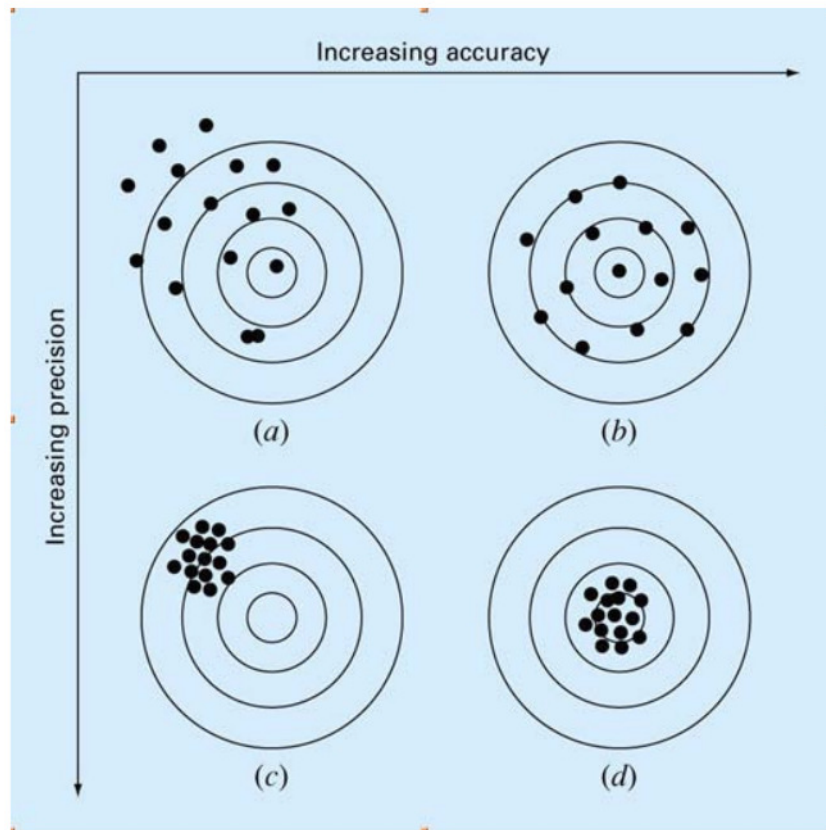


Figura 6.15: Precisión versus exactitud.

En la gráfica podemos suponer que los puntos son calculados por alguna técnica numérica, mientras que el centro de las circunferencias concéntricas es el valor exacto. Si tomamos las aproximaciones del ítem (a) y (c) vemos que ambas son inexactas, sin embargo, la última presenta un esquema de cálculo más preciso ya que la distancia entre puntos es mucho menor. Es decir, el ítem (a) es el resultado *inexacto e impreciso*, mientras que el ítem (c) representa un esquema inexacto, aunque preciso. Por otro lado, si comparamos los ítems (a) y (b), vemos que en este último el esquema se vuelve más exacto, aunque impreciso. Nuestra situación ideal es el ítem (d) que proviene de un método exacto y preciso dado que los puntos están centradas respecto al centro de las circunferencias y entre sí. A continuación definiremos estos conceptos.

Para medir la exactitud, sea x_e el valor exacto de un número real y x_a su aproximación:

Definición (Error absoluto). *Diferencia entre el valor exacto y su aproximado:*

$$\Delta x = x_e - x_a.$$

Definición (Error relativo). Cociente entre el error absoluto y el valor exacto:

$$E_x = \frac{\Delta x}{x_e} = \frac{x_e - x_a}{x_e}$$

siempre que $x_e \neq 0$.

Definición (Error relativo porcentual). Error relativo en porcentaje:

$$E_x^{\%} = E_x * 100 = \frac{\Delta x}{x_e} * 100 = \frac{x_e - x_a}{x_e} * 100$$

siempre que $x_e \neq 0$.

Definición (Precisión). Diremos que x_a es una aproximación a x_e con d cifras decimales significativas, si d es el mayor número natural o cero tal que:

$$\frac{|x_e - x_a|}{|x_e|} < \frac{1}{2} \times 10^{-d}$$

Ejemplo 6.3.1. Sean los valores exactos y aproximados $x_e = 3.141592$ y $x_a = 3.14$,

$$|\Delta_x| = |x_e - x_a| = 0.001592$$

$$|E_x| = \frac{|x_e - x_a|}{|x_e|} = 0.000507 \mapsto E_x^{\%} = 0.0507\%$$

$$|E_x| < 0.005 = \frac{1}{2} \times 10^{-2} \mapsto d = 2 \blacktriangle$$

Ejemplo 6.3.2. Sean los valores exactos y aproximados $y_e = 1000000$ y $y_a = 999997$,

$$|\Delta_y| = |y_e - y_a| = 3$$

$$|E_y| = \frac{|y_e - y_a|}{|y_e|} = 0.000003 \mapsto E_y^{\%} = 0.0003\%$$

$$|E_y| < 0.000005 = \frac{1}{2} \times 10^{-5} \mapsto d = 5 \blacktriangle$$

Ejemplo 6.3.3. Sean los valores exactos y aproximados $z_e = 0.000012$ y $z_a = 0.000009$,

$$|\Delta_z| = |z_e - z_a| = 0.000003$$

$$|E_z| = \frac{|z_e - z_a|}{|z_e|} = 0.25 \mapsto E_z^{\%} = 25\%$$

$$|E_z| < 0.5 = \frac{1}{2} \times 10^0 \mapsto d = 0 \blacktriangle$$

En MATLAB podemos calcular los errores relativos de la siguiente manera:

```
>> xe=3.141592
>> xa=3.14
>> ex=abs(xe-xa)/xe
ex= 5.067494e-04      (d = 2 cifras significativas)
>> ye=1000000
>> ya=999997
>> ey=abs(ye-ya)/ye
ey= 3.0e-06          (d = 5 cifras significativas)
>> ze=1.2e-05
>> za=9.0e-06
>> ez=abs(ze-za)/ze
ez=0.25             (d = 0 cifras significativas)
```

Definición (Notación científica normalizada decimal). Si $x \in \mathbb{R}$ se puede escribir como:

$$x_{10} = \pm 0.d_1d_2d_3\dots d_k\dots \times 10^n$$

siendo $d_1 = \{1, 2, \dots, 8, 9\}$, $d_k = \{0, 1, \dots, 8, 9\}$ para $j \geq 2$ y $n \in \mathbb{Z}$.

Para una cantidad finita de K dígitos decimales (como en la computadora), llamaremos:

- $d_1d_2d_3\dots d_K$ se conocen como la **mantisa**.
- n se conoce como el **exponente**.

Ejemplo 6.3.4. Expresando en notación científica normalizada decimal, resulta:

$$\begin{aligned} 9700000000 &= 0.97 \times 10^{10} \\ 732.5051 &= 0.7325051 \times 10^3 \\ -0.005612 &= -0.5612 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

Ejemplo 6.3.5. Llamando a $fl(x)$ Expresando en notación científica normalizada decimal, resulta:

x	$fl(x)$	cant. decimales	cant. cifras significativas
1004100	1.0041×10^6	0	5
0.00039	3.9×10^{-4}	5	2
25.84	2.584×10^1	2	4
0.0721	$7.21 \times 10^{2-}$	4	3

6.3.3 Errores numéricos

Como mencionamos anteriormente, existen dos grandes tipos de errores en el cálculo numérico: *errores de truncamiento* y *errores de redondeo*.

Error de truncamiento: Estos errores se deben a la interrupción de un proceso de cálculo matemático antes de su terminación pues el tiempo de corrida de un algoritmo es finito. Existen numerosos ejemplos.

- Si consideramos la *sucesión numérica convergente* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ tal que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} r$, entonces aproximamos el límite de la sucesión convergente como

$$\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \quad \text{tal que} \quad x_n \approx r$$

para cierto n “grande”.

- Para calcular la suma de la *serie numérica* $S = \sum_{i=0}^{\infty} a_n$, aproximamos

$$S \approx \sum_{i=0}^n a_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

para cierto n “grande”.

- Para calcular la *serie de Taylor* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$, calculamos el polinomio

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

para cierto n “grande”.

Ejemplo 6.3.6. El desarrollo de Taylor de $f(x) = e^x$ centrado en $a = 0$ es:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\xi} x^{n+1}}{(n+1)!}$$

donde ξ está entre 0 y x . El último término se conoce como fórmula del error en la forma de Lagrange (consultar [Apos1984]). La diferencia entre la función exacta y el polinomio de Taylor de orden n asociado en el punto x será el error de truncamiento de Taylor.

$$E_n(x, a) = e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

Este error puede ser controlado acotando:

$$|E_n(x, a)| = \left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| = \left| \frac{e^{\xi} x^{n+1}}{(n+1)!} \right|,$$

donde podemos obtener una estimación de la función en x con un número finito de términos. Es claro que en la medida que n crece, el factorial en el denominador le gana a la potencia en el numerador.

El script `ExpTaylor.m` explora esto ploteando el error relativo de la suma parcial como función de la cantidad de sumandos n .

Código en MATLAB:

```
% Script: ExpTaylor
% Plotea, como funcion de n, el error relativo en la aproximacion de Taylor de
la funcion exponencial
% 1 + x + x ^2/2! +...+ x^n/n! a exp(x).

clear, clc, close all;
nTerms = 50;
xx = [1 5 10 -1 -5 -10];
for i=1:length(xx)
x = xx(i);
f = exp(x)*ones(nTerms,1);
s = 1;
term = 1;
for k=1:nTerms
term = x.*term/k;
s = s+ term;
err(k) = abs(f(k) - s);
end
relerr = err'/exp(x)';
subplot(2,3,i), semilogy(v1:nTerms,relerr), grid on, hold on
ylabel('Error Relativo Suma Parcial.')
xlabel('Orden Suma Parcial')
title(sprintf('x = %5.2f',x))
end
saveas(gcf,'TaylorExp','fig');
saveas(gca,'TaylorExp','epsc');
```

En la Figura 6.16 observamos que cuando aumentamos la cantidad de términos del polinomio de Taylor n , el error relativo de la suma parcial de la serie disminuye. Esto coincide con lo esperable matemáticamente puesto que si observamos la fórmula del error de Lagrange, el factorial de $n+1$ de denominador tiende a cero más rápidamente comparado con el numerador.

Sin embargo, cuando ploteamos las gráficas para $x = 1, 5, 10, -1, -5, -10$ como se muestra en la Figura 6.17, observamos que el ploteo muestra que la “convergencia matemática” no siempre es válida en máquina dado que los errores no convergen a cero a medida que la serie aumenta la cantidad de términos. En algunos casos, el error se acuesta en un valor pequeño, e incorporando más términos, no hacemos diferencia. Notamos también que el piso del error relativo depende del valor de x :

$$Err_{x=-10} > 1 \times 10^{-10}$$

$$Err_{x=10} < 1 \times 10^{-15}$$

Es decir, podemos notar que además del error analítico de truncamiento existe “otro error” que aparece en este cálculo numérico de la exponencial.

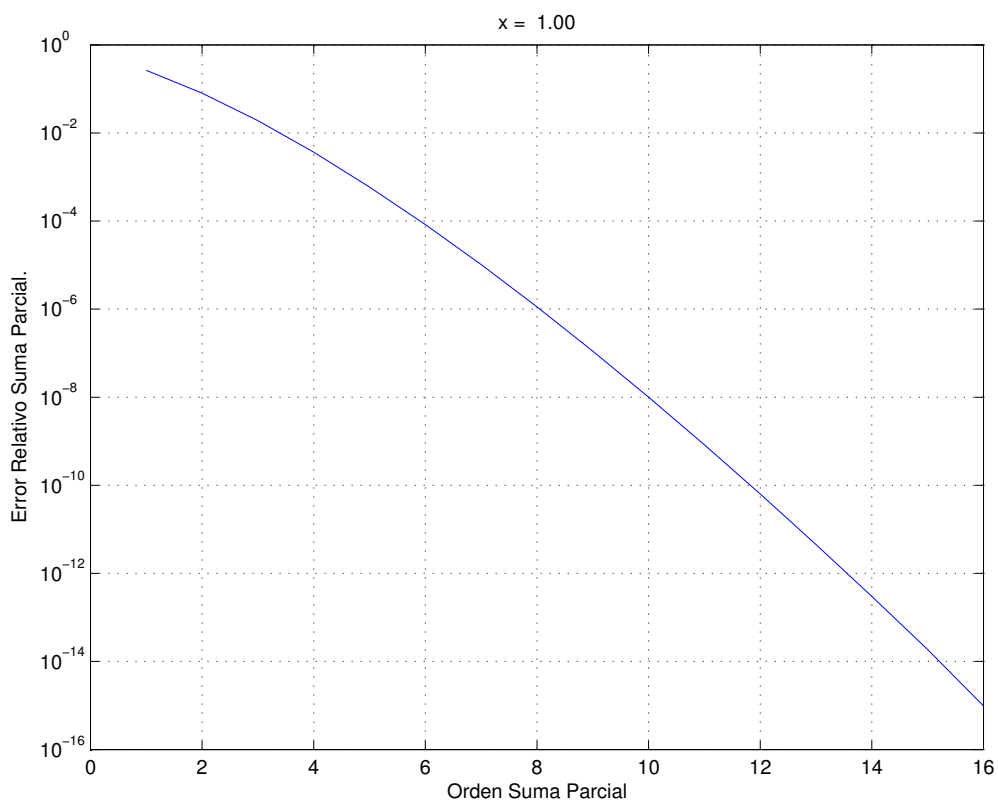


Figura 6.16: Error de Taylor de e^x en función de n

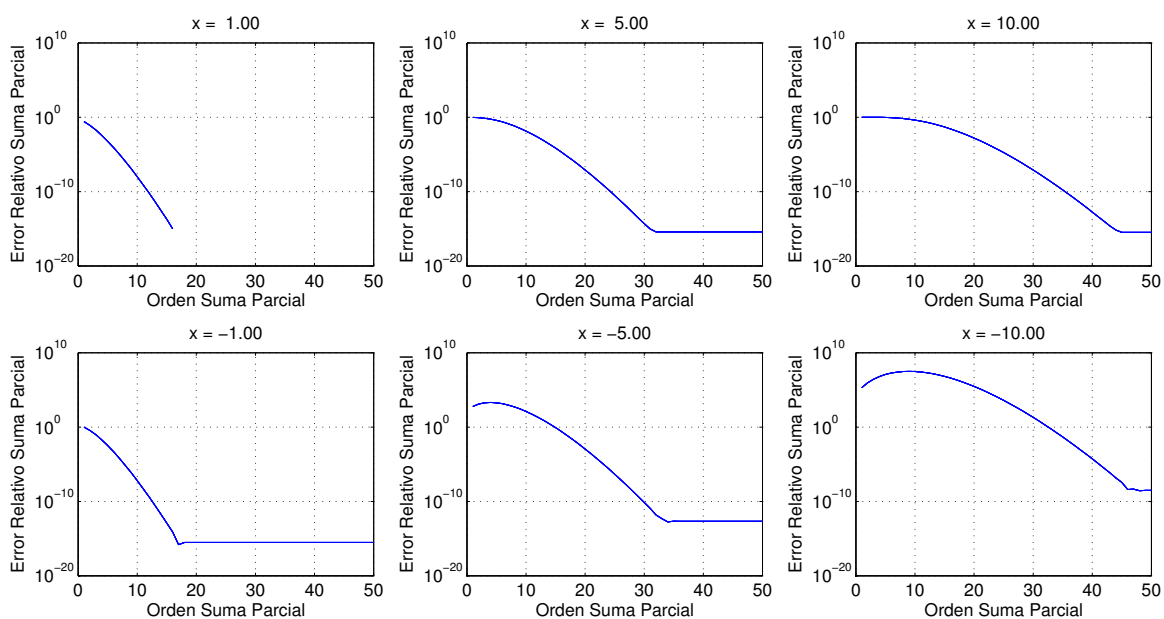


Figura 6.17: Error de Taylor de e^x en función de n para $x = 1, 5, 10, -1, -5, -10$.

Definición (Redondeo simétrico). *Consiste en aumentar en uno el último dígito si el primer dígito descartado está en $\{5, \dots, 9\}$ o dejarlo igual si el primer dígito descartado está en $\{0, \dots, 4\}$. En este caso*

$$fl_{sim}(x) = \pm 0.d_1d_2\dots d_{k-1}d_k^* \times 10^n$$

es la representación de coma flotante por redondeo de x donde

$$\begin{aligned} d_1 &= \{1, 2, \dots, 8, 9\} \\ d_j &= \{0, 1, \dots, 8, 9\} \quad 1 < j \leq k, \end{aligned}$$

y d_k^ se calcula redondeando el número $d_1d_2\dots d_k.d_{k+1}d_{k+2}\dots$ al entero más próximo.*

Ejemplo 6.3.8. *Ejemplos de redondeos truncado y simétrico*

- $x = 7/9 = 0.77777\dots$ con 4 dígitos significativos:

$$\begin{aligned} fl_{trunc}(x) &= 0.7777 \times 10^0 \\ fl_{red}(x) &= 0.7778 \times 10^0 \end{aligned}$$

- $y = 22/7 = 3.14285714285714285$ con 6 dígitos significativos:

$$\begin{aligned} fl_{trunc}(y) &= 0.314285 \times 10^1 \\ fl_{red}(y) &= 0.314286 \times 10^1 \end{aligned}$$

- $z = 0.231599999$ con 8 dígitos significativos:

$$\begin{aligned} fl_{trunc}(z) &= 0.23159999 \times 10^0 \\ fl_{red}(z) &= 0.23160000 \times 10^0 \end{aligned}$$

Ejemplo 6.3.9. *Ejemplo de pérdida de cifras significativas.*

Queremos plotear el polinomio de grado 6:

$$p(x) = (x - 1)^6$$

en el intervalo $[0.9, 1.1]$. Trabajando algebraicamente $p(x)$ puede desarrollarse como:

$$p(x) = x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1.$$

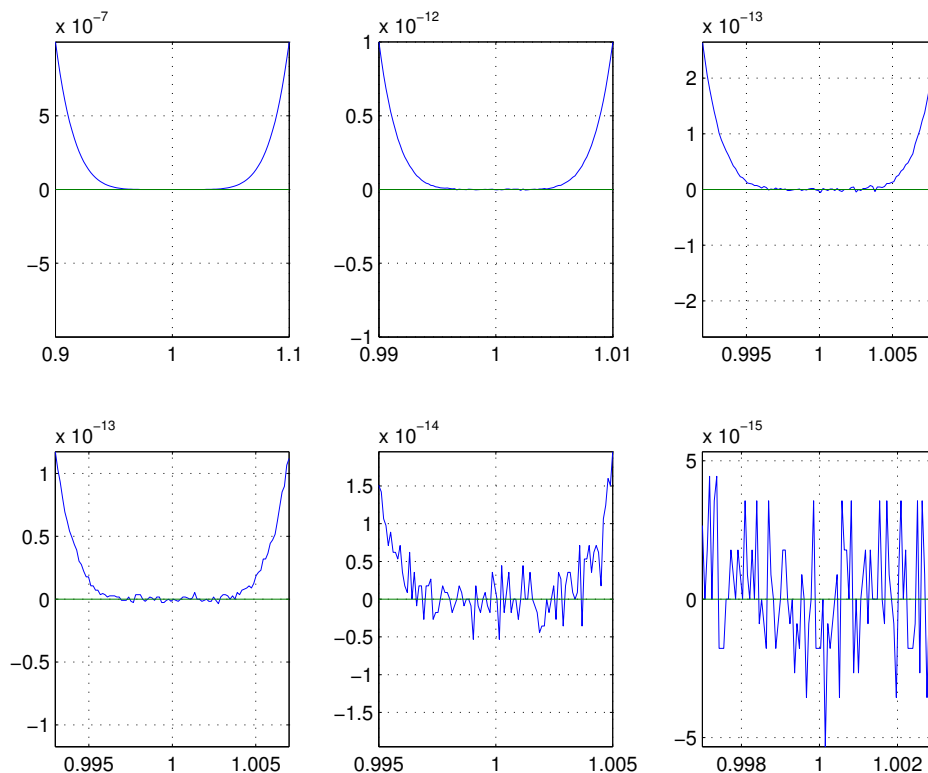
El script ZoomPoli.m grafica el polinomio en pequeños entornos de $x = 1$ usando la segunda expresión de $p(x)$ en los intervalos: $[0.9, 1.1]$, $[0.99, 1.01]$, $[0.992, 1.008]$, $[0.993, 1.007]$, $[0.995, 1.005]$ y $[0.997, 1.003]$.

Código en MATLAB:

```

% Script: ZoomPoli
% Plotea (x-1)^6 alrededor de x=1 con escala creciente
% pero evaluado via x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1
clear, clc, close all;
k=0;
n=100;
for delta = [.1 .01 .008 .007 .005 .003 ]
x = linspace(1-delta,1+delta,n)';
y = x.^6 - 6*x.^5 + 15*x.^4 - 20*x.^3 + 15*x.^2 - 6*x + 1;
k = k+1;
subplot(2,3,k), plot(x,y,x,zeros(1,n)), grid on
axis([1-delta 1+delta -max(abs(y)) max(abs(y))])
end

```

Figura 6.18: Ploteo del polinomio $p(x)$ en entornos de $x = 1$.

El ploteo de la Figura 6.18 no parece un polinomio, de hecho, ni siquiera es derivable. Se observa una oscilación cerca de la raíz $x = 1$. Además, en este ejemplo no hay error de truncamiento (no truncamos un método ni tampoco iteramos). Observamos que en las cercanías de $x = 1$, los valores de $p(x)$ son calculados restando números muy parecidos (potencias de x^6 y x^5). Evidentemente, estamos ante la acción de un error de redondeo del cálculo numérico conocido como **pérdida de cifras significativas**. Veamos en detalle cómo funciona este error.

Ejemplo 6.3.10. Sean las funciones

$$f(x) = x \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \right), \quad x \geq 0$$

y

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}, \quad x \geq 0$$

algebraicamente equivalentes. Vamos a comparar los resultados de calcular $f(500)$ y $g(500)$ usando 4 cifras significativas con redondeo simétrico. ¿Deberíamos obtener el mismo resultado en nuestra máquina imaginaria? Normalizando antes de cada operación, obtenemos:

$$\begin{aligned} f(500) &= 0.5000 \times 10^3 \left(\sqrt{0.5000 \times 10^3 + 0.1000 \times 10^1} - \sqrt{0.5000 \times 10^3} \right) \\ &= 0.5000 \times 10^3 \left(\sqrt{0.5000 \times 10^3 + 0.0010 \times 10^3} - \sqrt{0.5000 \times 10^3} \right) \\ &= 0.5000 \times 10^3 \left(\sqrt{0.5010 \times 10^3} - \sqrt{0.5000 \times 10^3} \right) \\ &= 0.5000 \times 10^3 (22.3830292855\dots - 22.3606797749\dots) \\ &= 0.5000 \times 10^3 (0.2238 \times 10^2 - 0.2236 \times 10^2) \\ &= 0.5000 \times 10^3 (0.0002 \times 10^2) \\ &= 0.5000 \times 10^3 (0.2000 \times 10^{-1}) \\ &= 0.1000 \times 10^2 = 0.1000 \times 10^2 = 10. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(500) &= \frac{0.5000 \times 10^3}{\sqrt{0.5000 \times 10^3 + 0.1000 \times 10^1} + \sqrt{0.5000 \times 10^3}} \\ &= \frac{0.5000 \times 10^3}{\sqrt{0.5000 \times 10^3 + 0.0010 \times 10^3} + \sqrt{0.5000 \times 10^3}} \\ &= \frac{0.5000 \times 10^3}{\sqrt{0.5010 \times 10^3} + \sqrt{0.5000 \times 10^3}} \\ &= \frac{0.5000 \times 10^3}{22.3830292855\dots + 22.3606797749\dots} \\ &= \frac{0.5000 \times 10^3}{0.2238 \times 10^2 + 0.2236 \times 10^2} = \frac{0.5000 \times 10^3}{0.4474 \times 10^2} \\ &= 1.11747575636\dots \times 10^1 \\ &= 0.1117 \times 10^2 = 11.17. \end{aligned}$$

El valor “exacto” es 11.174755300747198..., sin embargo:

$$\begin{aligned} f(500) &= 10, \\ g(500) &= 11.17. \end{aligned}$$

La respuesta de $g(500)$ tiene menor error absoluto que $f(500)$.

Veamos sus errores absolutos, relativos y relativos porcentuales:

$$\begin{aligned}\Delta_{f(500)} &\simeq 1.17475530075, \\ \Delta_{g(500)} &\simeq 4.75530074720 \times 10^{-3}, \\ E_{f(500)} &\simeq 1.05125818788 \times 10^{-1}, \\ E_{g(500)} &\simeq 4.25539586256 \times 10^{-4}, \\ E_{f(500)}^{\%} &\simeq 10.51\%, \\ E_{g(500)}^{\%} &\simeq 0.04\%.\end{aligned}$$

Código en MATLAB Definimos las funciones f y g como anónimas en MATLAB:

```
>> format long

>> f=@(x) x*(sqrt(x+1)-sqrt(x))
f = @(x) x*(sqrt(x+1)-sqrt(x))

>> f(500)
ans = 11.174755300746853

>> g=@(x) x/(sqrt(x+1)+sqrt(x))
g = @(x) x/(sqrt(x+1)+sqrt(x))

>> g(500)
ans = 11.174755300747199
```

Notemos que incluso en MATLAB obtenemos una precisión de 16 cifras significativas y también observamos la diferencia entre los cálculos con ambas fórmulas si calculamos los errores absolutos y relativos anteriores.

```
>> exac = 11.174755300747198;

>> eaf = abs(exac-f(500))
ans = 3.4461322684436486e-13

>> eag = abs(exac-g(500))
ans = 1.776356839400250e-15

>> erf = eaf/f(500)
ans = 3.083854792065166e-14

>> erg = eag/g(500)
ans = 1.589615872198539e-16
```

Error numérico total: Es la acumulación del error de truncamiento y redondeo.

Definición (Error numérico total). El error numérico total se define como:

$$\text{Error de truncamiento} + \text{Error de redondeo}$$

Notemos que si en un proceso numérico **disminuyo el Error de truncamiento** \searrow (agregando términos al Taylor, aumentando cantidad de iteraciones, disminuyendo tolerancias, etc.), entonces **el Error de redondeo aumenta** \nearrow . Si en cambio **aumento el Error de truncamiento** \nearrow entonces **el Error de redondeo disminuye** \searrow . Disminuir una componente de error conduce a un incremento en la otra componente. Por tanto hay que buscar una **solución de compromiso**. Esto lo da muchas veces la **experimentación numérica**.

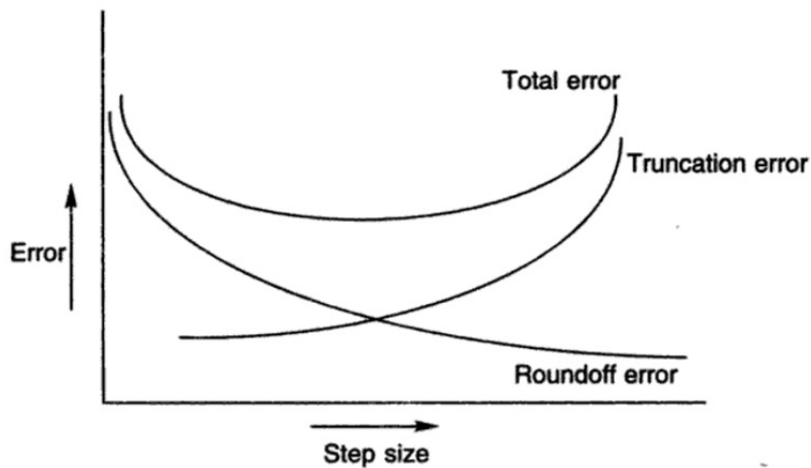


Figura 6.19: Dependencia del Error total del tamaño del paso h (step size)

Ejemplo 6.3.11. *Ejemplo de una solución de compromiso.*

Consideremos la serie de Taylor de $f(x) = \text{sen}(x)$ centrada en $a = 0$:

$$\begin{aligned} \text{sen}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{f^{(2n+3)}(\xi) x^{2n+3}}{(2n+3)!} \end{aligned}$$

donde ξ está entre 0 y x . El error (de Lagrange) puede acotarse de la forma:

$$|E_{2n+3}(x, a)| = \left| \frac{f^{(2n+3)}(\xi) x^{2n+3}}{(2n+3)!} \right| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!},$$

donde el valor del error de truncamiento depende de x y del número de términos de la sumatoria.

Código en MATLAB:

```

function ssum = SerieSeno(x,tol,n)
% SerieSeno.m:  Evalúa la representación en serie de la función SENO
% ssum = SerieSeno(x)
% ssum = SerieSeno(x,tol)
% ssum = SerieSeno(x,tol,n)
% ENTRADA:
% x:  argumento de la función SENO
% tol:  (optional) tolerancia para sumatoria (por defecto:  tol = 5e-9)
% La serie termina cuando abs(T_k/S_k) < tol, donde:
% T_k:  k-ésimo término y S_k suma incluyendo el k-ésimo término
% n:  (optional) máximo número de terminos (por defecto:  n = 15)
% RESULTADO:
% ssum:  valor de la serie al cabo de n terminos o al satisfacer la tolerancia
if nargin < 2,  tol = 5e-9;
end
if nargin < 3,  n = 15;
end
term = x; % Inicializa la serie
ssum = term;
fprintf('Valor aproximado de la función seno (%f)\n\n n término serie\ n',x)
fprintf('%3d %11.3e %12.8f \ n',1,term,ssum)
for k=3:2:(2*n-1)
term = -term .* x.*x./(k.*(k-1)); % Próximo término en la serie
ssum = ssum + term;
fprintf('%3d %11.3e %12.8f\n',k,term,ssum)
if abs(term./ssum) < tol % Verifica convergencia
break
end
end
fprintf('\n Error Total con %d términos es %g \ n\n', (k+1)/2,abs(ssum-sin(x)))
end

```

Ventana de comandos en MATLAB:

```

>> sum = SerieSeno(pi/4,5e-9,100)
Valor aproximado de la función seno (0.785398)
n  termino  serie
1  7.854e-01  0.78539816
3  -8.075e-02  0.70465265
5  2.490e-03  0.70714305
7  -3.658e-05  0.70710647
9  3.134e-07  0.70710678
11 -1.757e-09  0.70710678
Error Total incluyendo 6 términos es 6.92801e-12
sum = 0.707106781179619

```

En caso de utilizar 5 términos no nulos en la sumatoria:

$$|E_{11}(x)| \leq \frac{|x|^{11}}{11!} \leq \frac{|\pi/2|^{11}}{11!} \approx 3.5988 \times 10^{-6}.$$

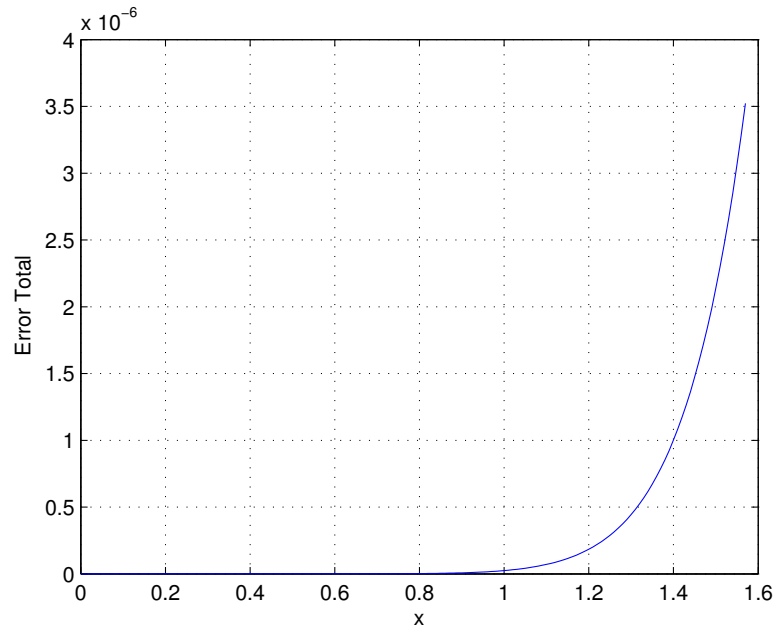


Figura 6.20: Error total con 5 términos.

En caso de utilizar 15 términos no nulos en la sumatoria:

$$|E_{31}(x)| \leq \frac{|x|^{31}}{31!} \leq \frac{|\pi/2|^{31}}{31!} \approx 1.4611 \times 10^{-28}.$$

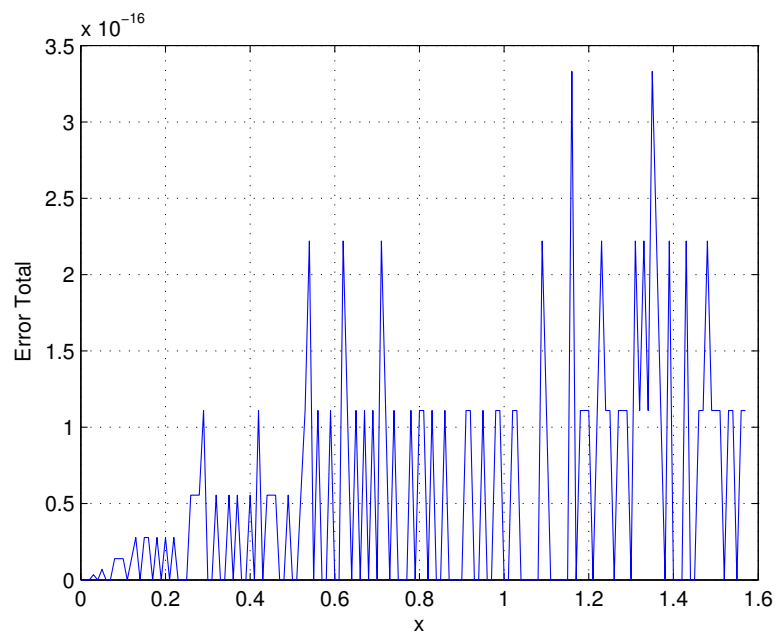


Figura 6.21: Error total con 15 términos.

En la Figura 6.20 observamos que con 5 términos no nulos y valores de x mayores a 1 (aproximadamente), el error numérico total (truncamiento y redondeo) aumenta rápidamente cuando $x \rightarrow \pi/2$, siendo el error máximo aproximadamente $3.6\text{e-}06$ en consonancia con la cota analítica del error de truncamiento de Taylor expresado anteriormente del orden de 10^{-6} .

En la Figura 6.21 vemos que con 15 términos observamos un fenómeno numérico distinto. Vemos una oscilación del error total que aumenta hasta un valor máximo aproximado de $3.3\text{e-}16$ mientras que la cota del error teórico de truncamiento de Taylor expresado antes es del orden de 10^{-28} . Por lo tanto, en este caso el error por redondeo está controlando el comportamiento y necesitamos hallar una solución de compromiso, es decir, disminuir la cantidad de términos de modo de obtener un error total que satisfaga el problema en estudio, pero sin que domine el error de redondeo.

Propagación del error: Veamos como se propaga el error de representación numérica en las operaciones aritméticas básicas que se realizan durante un cálculo numérico.

- **Propagación del error en la suma y resta.** Sean los números exactos x e y con valores aproximados \tilde{x}, \tilde{y} , y sean los errores absolutos δ_x, δ_y respectivamente. Esto es:

$$x = \tilde{x} + \delta_x, \quad y = \tilde{y} + \delta_y.$$

Queremos calcular el error $\delta_{x \pm y}$. Resulta entonces

$$x \pm y = (\tilde{x} + \delta_x) \pm (\tilde{y} + \delta_y) = (\tilde{x} \pm \tilde{y}) + \underbrace{(\delta_x \pm \delta_y)}_{\delta_{x \pm y}}.$$

Por lo tanto, *el error absoluto de la suma y diferencia de dos (o más magnitudes) es la suma de los errores absolutos de dichas magnitudes.*

- **Propagación del error en el producto y cociente.** Sean x e y reales no nulos:

$$x = \tilde{x} + \delta_x = \tilde{x} \left(1 + \frac{\delta_x}{\tilde{x}} \right), \quad y = \tilde{y} + \delta_y = \tilde{y} \left(1 + \frac{\delta_y}{\tilde{y}} \right).$$

Queremos calcular el error $\delta_{x \cdot y}$ al aproximar el producto:

$$x \cdot y = \tilde{x} \tilde{y} \left(1 + \frac{\delta_x}{\tilde{x}} \right) \left(1 + \frac{\delta_y}{\tilde{y}} \right) = \left(1 + \frac{\delta_x}{\tilde{x}} + \frac{\delta_y}{\tilde{y}} + \underbrace{\frac{\delta_x \delta_y}{\tilde{x} \tilde{y}}}_{\approx 0} \right).$$

Por lo tanto, *el error relativo del producto de dos (o más magnitudes) es igual a la suma de los errores relativos de dichas magnitudes.*

Análogamente, esto también vale para el cociente. Consultar [MaFi2000].

6.3.4 Aritmética de punto flotante

Hace más de 30 años, cada computadora de uso personal tenía su sistema de número de punto flotante particular. Algunas eran decimales, otras binarios o incluso triaria. Entre las de base binaria, se usaban base 2, 8 o 16. Todas tenían una precisión distinta.

En 1985, el *Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE)* y el *American National Standards Institute (ANSI)* adoptaron la **norma ANSI/IEEE Standard 754-1985** para la *Aritmética Binaria de Punto Flotante*. Esto fue una década de trabajo de un centenar de matemáticos, científicos de computación, ingenieros, productores de computadoras, entre otros.

Desde entonces las computadoras son diseñadas en la **Aritmética de Punto Flotante IEEE**. Esto no significa que todas lleguen al mismo resultado (hay cierta flexibilidad sobre la precisión), pero hoy hay un modelo de cómo funciona la aritmética de punto flotante no dependiente de la máquina.

Definición (Representación de un número). Si $x \in \mathbb{R}$, entonces decimos que la representación en base β de x es de la forma:

$$x \simeq \pm q \times \beta^n$$

donde β es la base, q la mantisa, $\frac{1}{\beta} \leq |q| < 1$ y n el exponente.

Ejemplo 6.3.12. Sea $\beta = 2$, entonces la representación binaria de x es

$$x \simeq \pm q \times 2^n$$

donde $\frac{1}{2} \leq |q| < 1$.

Sin embargo, en un computadora sólo tenemos una cantidad finita de espacio de números binarios para el almacenamiento de la mantisa q y el exponente n . Por ende, no podemos representar todos los números reales, sino una cantidad finita de los mismos.

Para comprender esto, veamos a continuación una máquina virtual “más chica” que las computadoras actuales.

Ejemplo 6.3.13. *Operación con punto flotante en sistema binario*
Consideremos los reales positivos de la forma

$$(0.d_1d_2d_3d_4)_2 \times 2^n$$

donde $d_1 = 1$, $d_i \in \{0, 1\}$ para $i = 2, 3, 4$ y $n \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Tenemos 8 posibles combinaciones de ceros y unos para la mantisa y 8 posibles exponentes (en sistema decimal para simplificar el ejemplo). Esto nos proporciona un conjunto de 64 números positivos. Ver Tabla de la Figura 6.22.

Es importante remarcar que como se restringieron la mantisa y el exponente, nuestro computador virtual sólo dispone de un número limitado de valores entre los que elegir para representar nuestros números. Por ende, cuando tengamos que representar un número que no esté en nuestra Tabla, haremos una aproximación al número binario más cercano.

Mantisa	Exponente							
	n=-3	n=-2	n=-1	n=0	n=1	n=2	n=3	n=4
0.1000 ₍₂₎	0.0625	0.125	0.25	0.5	1	2	4	8
0.1001 ₍₂₎	0.0703125	0.140625	0.28125	0.5625	1.125	2.25	4.5	9
0.1010 ₍₂₎	0.078125	0.15625	0.3125	0.625	1.25	2.5	5	10
0.1011 ₍₂₎	0.0859375	0.171875	0.34375	0.6875	1.375	2.75	5.5	11
0.1100 ₍₂₎	0.09375	0.1875	0.375	0.75	1.5	3	6	12
0.1101 ₍₂₎	0.1015625	0.203125	0.40625	0.8125	1.625	3.25	6.5	13
0.1110 ₍₂₎	0.109375	0.21875	0.4375	0.875	1.75	3.5	7	14
0.1111 ₍₂₎	0.1171875	0.234375	0.46875	0.9375	1.875	3.75	7.5	15

Figura 6.22: Máquina virtual de 4 bits para la mantisa y 8 exponentes.

En nuestra computadora anterior queremos realizar la operación:

$$\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{6}$$

Comenzaremos resolviendo primero la suma entre paréntesis:

$$\frac{1}{10} \approx 0.1101_2 \times 2^{-3} = 0.01101_2 \times 2^{-2}$$

$$\frac{1}{5} \approx 0.1101_2 \times 2^{-2} = 0.1101_2 \times 2^{-2}$$

$$\frac{3}{10} \qquad 1.00111_2 \times 2^{-2}$$

Para almacenar el número $1.00111_2 \times 2^{-2}$, primero lo normalizamos y luego lo redondeamos como $0.1010_2 \times 2^{-1}$. El paso siguiente es:

$$\frac{3}{10} \approx 0.1010_2 \times 2^{-1} = 0.1010_2 \times 2^{-1}$$

$$\frac{1}{6} \approx 0.1011_2 \times 2^{-2} = 0.01011_2 \times 2^{-1}$$

$$\frac{7}{15} \qquad 0.11111_2 \times 2^{-1}$$

Nuestro computador redondea $0.11111_2 \times 2^{-1}$ como $0.1000_2 \times 2^0$. Por ende, la solución a nuestro problema original es:

$$\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{6} = \frac{7}{15} = 0.4667_{10} \approx 0.1000_2 \times 2^0 = 0.5_{10}$$

El error en el cálculo efectuado por nuestra computadora “virtual” es:

$$|0.4667 - 0.5| \approx 0.0333 > 7\%$$

En cambio, si hacemos la operación asociando de esta manera:

$$\frac{1}{10} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right)$$

tenemos que:

$$\begin{array}{r} \frac{1}{5} \approx 0.1101_2 \times 2^{-2} = 0.1101_2 \times 2^{-2} \\ \frac{1}{6} \approx 0.1011_2 \times 2^{-2} = 0.0101_2 \times 2^{-2} \\ \hline \frac{11}{30} \qquad \qquad \qquad 1.0010_2 \times 2^{-2} \end{array}$$

Nuestro computador normaliza $1.0010_2 \times 2^{-2}$ como $0.1001_2 \times 2^{-1}$. Luego,

$$\begin{array}{r} \frac{1}{10} \approx 0.1101_2 \times 2^{-3} = 0.001101_2 \times 2^{-1} \\ \frac{11}{30} \approx 0.1001_2 \times 2^{-1} = 0.1001_2 \times 2^{-1} \\ \hline \frac{7}{15} \qquad \qquad \qquad 0.110001_2 \times 2^{-1} \end{array}$$

Finalmente, el computador redondea $0.110001_2 \times 2^{-1}$ a $0.1101_2 \times 2^{-1}$. Por ende, la solución a nuestro problema original es:

$$\frac{1}{10} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right) = \frac{7}{15} = 0.4667_{10} \approx 0.1101_2 \times 2^{-1} = 0.40625_{10}$$

El error en el cálculo efectuado por nuestra computadora en este caso es:

$$|0.4667 - 0.4063| \approx 0.0604 \quad (\text{casi } 13\%)$$

Por tanto, en nuestra computadora anterior no vale la asociatividad de la suma:

$$\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{6} = \frac{1}{10} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right).$$

Punto flotante en MATLAB: IEEE754 doble precisión

MATLAB usa el formato de doble precisión de la IEEE. Esto significa que cada número de doble precisión en aritmética de punto flotante se almacena en una palabra de 64 bits (8 bytes).



donde la representación en número binario es:

$$\begin{aligned}
 s &\mapsto d_1 & d_1 &\in \{0, 1\}, \\
 e &\mapsto d_1 d_2 \dots d_{11} & d_i &\in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, 11, \\
 q &\mapsto d_1 d_2 \dots d_{53} & d_1 &= 1, \quad d_i \in \{0, 1\} \quad i = 2, \dots, 53.
 \end{aligned}$$

Cada número en aritmética de punto flotante es normalizado:

$$x = (-1)^s (1 + (q)_2) 2^{e-1023} = (-1)^s (1.q)_2 2^{e-1023}.$$

El signo s surge de $(-1)^s$ y la mantisa (fracción) q en base 2 es un entero que satisface:

$$0 \leq (q)_2 < 1$$

o bien, en sistema decimal q representa el rango

$$0 \leq (q)_{10} \leq 2^{52} - 1.$$

En realidad, como siempre vale que $d_1 = 1$, el formato IEEE permite almacenar información de una palabra de 65 de bits en una de 64 bits.

Teniendo 11 bits para el exponente, estos representarían un rango decimal de:

$$0 \leq (e)_{10} \leq 2^{11} - 1 = 2047.$$

Pero como $(e)_{10} = 0$ y $(e)_{10} = 2047$ están reservados para números especiales, el rango exacto del exponente en base 10 es:

$$1 \leq (e)_{10} \leq 2^{11} - 2 = 2046.$$

Para que $(e)_{10}$ tenga signo negativo, corremos el rango restando 1023 a la representación, y se reacomoda para que el exponente sea un entero en el intervalo:

$$1 - 1023 \leq (e')_{10} \leq 2046 - 1023$$

y obtenemos

$$-1022 \leq (e')_{10} \leq 1023.$$

Estos serán los posibles valores del exponente en base 10 en la representación de punto flotante.

Existen exponentes y números especiales reservados en MATLAB, por ejemplo los valores reservados del exponente:

$$(e)_{10} = 0 \rightarrow \text{todos ceros}$$

$$(e)_{10} = 0 \rightarrow \text{todos unos}$$

En la siguiente Tabla 6.4, vemos las demás combinaciones:

(s)	$(e)_2$	$(q)_2$	Representa
0	todos ceros	todos ceros	0
1	todos ceros	todos ceros	-0
0	todos unos	todos ceros	Inf
1	todos unos	todos ceros	-Inf
0 o 1	todos unos	no-cero	NaN

Tabla 6.4: Valores de mantisa y exponentes reservados en MATLAB.

El **mayor número positivo** es:

$$(1.11\dots1)_2 \times 2^{1023} \approx (1.7997)_{10} \times 10^{308}.$$

El **menor número positivo** es:

$$(1.00\dots0)_2 \times 2^{-1022} \approx (2.2251)_{10} \times 10^{-308}.$$

Una cantidad importante asociada a la aritmética de punto flotante es el **epsilon máquina** ε que suele notarse ε . *El epsilon máquina es la distancia desde el número 1 al siguiente número de punto flotante siguiente más grande.* Antes de la estandarización ANSI/IEEE había diferentes ε s para diferentes máquinas, ahora en doble precisión IEEE

$$\varepsilon = 2^{-52}$$

Epsilon en MATLAB:

```
>> eps
ans = 2.2204-16
```

Estos tres valores mencionados anteriormente, definen el rango de números disponibles y la precisión de nuestra computadora. En doble precisión tendremos que:

	Binario	Decimal
eps	2^{-52}	2.220446049250313e-16
realmin	2^{-1022}	2.225073858507201e-308
realmax	$(2-\text{eps}) \cdot 2^{1023}$	1.797693134862316e+308

Tabla 6.5: Valores de eps, realmin y realmax de MATLAB

Cualquier número por encima de realmax generará un **overflow**, y cualquier número debajo de realmin generará un **underflow**. Sin embargo, algunas máquinas permiten **números de punto flotante subnormales** en el intervalo $[\text{eps} \cdot \text{realmin}, \text{realmin}]$. Esto permite llenar (en parte) el *gap* (salto) entre 0 y realmin. El menor número subnormal positivo de punto flotante es: 4.940656458412465e-324. Cualquier valor menor es cero.

Ejemplo 6.3.14. Punto flotante: *floatgui.m*

El script *floatgui.m* realizado por C. Moler (autor de MATLAB), muestra la estructura de números de punto flotante. Aquí el modelo del conjunto de los números positivos de punto flotante se determina por tres parámetros: t , e_{min} y e_{max} . Según este script, es el conjunto de números racionales de la forma $x = (1+q)2^e$ donde q : (entero)/ 2^t , $0 \leq q < 1$, e : entero y $e_{min} \leq e \leq e_{max}$. En IEEE 754 doble precisión se tiene $t = 52$, $e_{min} = -1022$, $e_{max} = 1023$.

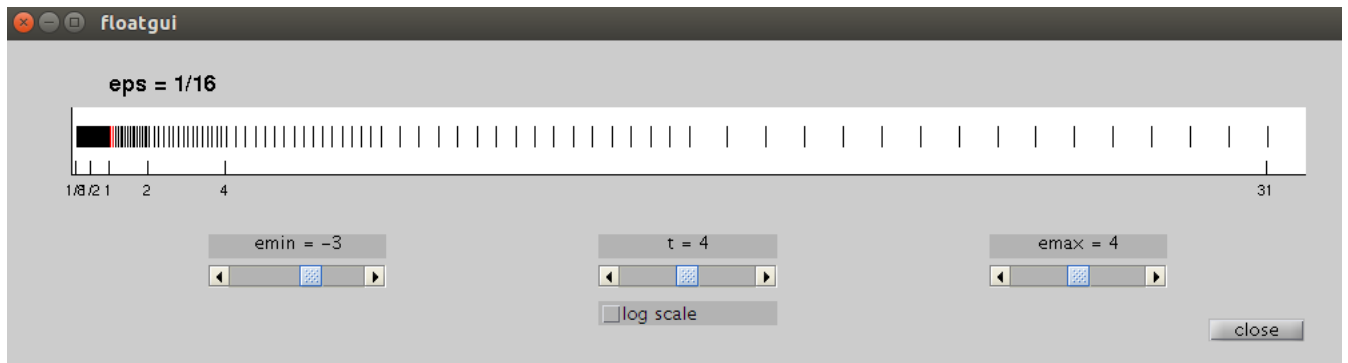


Figura 6.23: Distribución de punto flotante IEEE754

Ejemplo 6.3.15. Ejemplos de errores en punto flotante en MATLAB

El número decimal $4/3$ no es exactamente representable como una fracción binaria exacta, por eso el cálculo $1 - 3*(4/3 - 1)$ no resulta cero.

```
>> format long
>> a = 4/3
a = 1.3333333333333333
>> b = a - 1
b = 0.3333333333333333
>> c = 3*b
c = 1.0000000000000000
>> e = 1 - c
e = 2.220446049250313e-16
```

Similarmente, 0.1 no tiene representación exacta en binarios:

```
>> a = 0.0;
>> for i = 1:10
>>     a = a + 0.1;
>> end
>> a == 1
ans = 0
```

Notemos que el orden de las operaciones puede influir en el cálculo:

```
>> b = 1e-16 + 1 - 1e-16;
>> c = 1e-16 - 1e-16 + 1;
>> b == c
ans = 0
```

A modo de interés general y para resaltar la importancia del estudio de los métodos numéricos en problemas reales, se linkean algunos desastres históricos causados por errores en los cálculos de los métodos:

- **25 de febrero de 1991 (Arabia Saudita):** Falla del misil Patriot en sistema de defensa.
Causa: acumulación de errores de redondeo.
- **4 de junio de 1996 (Holanda):** Explosión del cohete Ariane 5.
Causa del desastre: error de “overflow”.
- Conversión aritmética del EURO.
- **Enero de 1982 - Noviembre de 1983 (Canadá):** Bolsa de valores de Vancouver.
Causa: Rendodeo truncado en vez de simétrico.
- **5 de abril de 1992 (Alemania):** Error de redondeo cambia al Parlamento durante la elección de Schleswig-Holstein.
- **23 de agosto de 1991 (Holanda):** El hundimiento la plataforma offshore Sleipner A.
Causa del desastre: Aproximación inexacta del método de elementos finitos.

SCRIBD: Some disasters caused by numerical errors ([link](#))

6.4.2 Métodos Directos

Sistemas fáciles de resolver:

Existen algunos sistemas de ecuaciones que son “fáciles de resolver” algorítmicamente, por ejemplo sistemas con *matriz diagonal*, con *matriz triangular superiores o inferior*.

Ejemplo 6.4.1. Sea \mathbf{A} una matriz diagonal:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

La solución algorítmica es:

$$\begin{cases} a_{ii}x_i = b_i & i = 1, \dots, n, \\ x_i = \frac{b_i}{a_{ii}} & i = 1, \dots, n, \end{cases}$$

suponiendo $a_{ii} \neq 0$ dado que asumimos que \mathbf{A} es inversible.

Ejemplo 6.4.2. Sea \mathbf{A} una matriz triangular superior:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Asumiendo que $a_{ii} \neq 0$, la solución algorítmica es:

$$\begin{cases} x_n = b_n/a_{nn}, \\ x_{n-1} = (b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n)/a_{n-1,n-1}, \\ x_i = \left(b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j\right)/a_{ii} & i = n - 2, \dots, 1. \end{cases}$$

Este proceso se conoce como la **sustitución regresiva (backward substitution)**. Análogamente, si \mathbf{A} es una matriz triangular inferior, el método se conoce como **sustitución progresiva (forward substitution)**.

Eliminación Gaussiana: La idea consiste en realizar una cantidad finita de pasos donde en cada paso realizamos operaciones elementales entre matrices para obtener sistema de ecuaciones lineales que tengan el mismo conjunto solución e ir triangularizando superiormente la matriz de coeficientes original. Si suponemos que la matriz de coeficientes es cuadrada con n ecuaciones y n incógnitas, luego de $(n - 1)$ pasos obtenemos una matriz triangular superior equivalente a la original y con el método de la sustitución regresiva obtenemos la solución del SEL. Todo este proceso se conoce como eliminación Gaussiana y en general es muy eficiente para resolver sistemas de ecuaciones lineales sobretodo cuando las matrices son “llenas”.

Definición (Sistemas de ecuaciones lineales equivalentes). Decimos que dos SEL son sistemas equivalentes cuando tienen el mismo conjunto de soluciones.

Las operaciones elementales que preservan la equivalencia de los sistemas son:

- **Intercambio:** Intercambiar las filas de la matriz aumentada

$$\mathbf{r}_k \longleftrightarrow \mathbf{r}_j.$$

- **Escalamiento:** Multiplicar una fila por una constante no nula

$$\alpha \mathbf{r}_k \longmapsto \mathbf{r}_k.$$

- **Sustitución:** Reemplazar una fila por la suma de esa fila más un múltiplo escalar de cualquier otra fila

$$\mathbf{r}_k + m \mathbf{r}_j \longmapsto \mathbf{r}_k.$$

El siguiente Teorema afirma que realizar operaciones elementales entre matrices, se generan sistemas de ecuaciones que son equivalentes.

Teorema 6.4.1. Cualquiera de las operaciones elementales aplicadas un número finito de veces a la matriz ampliada de un SEL produce sistemas equivalentes.

Demostración. Consultar [MaFi2000]. □

Ejemplo 6.4.3. Dado el SEL cuya matriz de coeficientes 3×3 es la siguiente

$$\begin{cases} 10x_1 - 7x_2 = 7, \\ -3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 4, \\ 5x_1 - x_2 + 5x_3 = 6. \end{cases}$$

Matricialmente tenemos

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

y su matriz ampliada será

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ -3 & 2 & 6 & 4 \\ 5 & -1 & 5 & 6 \end{array} \right].$$

Dado el SEL $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, nuestro objetivo es construir numéricamente en la computadora un sistema equivalente $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$, donde \mathbf{U} es una matriz triangular superior de modo que podemos resolverlo con sustitución regresiva. En “Algebra Lineal” vimos cómo aplicar operaciones elementales renglón a renglón para lograr esto, sin embargo, en los “Métodos Numéricos” será necesario hacer otras consideraciones por los errores numéricos que se van generando y propagando y que pueden afectar seriamente la aproximación de nuestra solución.

PASO 1

- La 1era. fila se usa para eliminar los elementos de la 1era. columna debajo de la diagonal principal.
- El elemento $a_{11} = 10$ se usa como **pivote**.
- Los valores m_{k1} con $k = 2, 3$ son los **multiplicadores**:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= 10 \text{ (pivote)} \\
 m_{21} &= a_{21}/a_{11} = -0.3 \\
 m_{31} &= a_{31}/a_{11} = 0.5
 \end{aligned}
 \left[\begin{array}{ccc|c}
 10 & -7 & 0 & 7 \\
 -3 & 2 & 6 & 4 \\
 5 & -1 & 5 & 6
 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_2 - m_{21}\mathbf{r}_1 &\mapsto \left[\begin{array}{ccc|c}
 10 & -7 & 0 & 7 \\
 0 & -0.1 & 6 & 6.1 \\
 0 & 2.5 & 5 & 2.5
 \end{array} \right] \\
 \mathbf{r}_3 - m_{31}\mathbf{r}_1 &\mapsto
 \end{aligned}$$

En rojo son los coeficientes de la matriz que se modifican en cada paso del algoritmo.

PASO 2

- Usamos la 2da. fila para eliminar los elementos de la 2da. columna debajo de la diagonal principal.
- El elemento $a_{22} = -0.1$ se usa como **pivote**.
- Los valores m_{k2} con $k = 3$ es el **multiplicador**:

$$\begin{aligned}
 a_{22} &= -0.1 \text{ (pivote)} \\
 m_{32} &= a_{32}/a_{22} = -25
 \end{aligned}
 \left[\begin{array}{ccc|c}
 10 & -7 & 0 & 7 \\
 0 & -0.1 & 6 & 6.1 \\
 0 & 2.5 & 5 & 2.5
 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{r}_3 - m_{32}\mathbf{r}_2 \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c}
 10 & -7 & 0 & 7 \\
 0 & -0.1 & 6 & 6.1 \\
 0 & 0 & 155 & 155
 \end{array} \right]$$

Usando sustitución regresiva:

$$155x_3 = 155 \implies x_3 = 1.$$

Sustituyendo en la 2da. ecuación:

$$-0.1x_2 + 6(1) = 6.1 \implies x_2 = -1.$$

Sustituyendo en la 1er. ecuación:

$$10x_1 + (-7)(-1) = 7 \implies x_1 = 0.$$

Finalmente, la solución al sistema es:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Definición (Pivotes y multiplicadores). Sea \mathbf{A} la matriz de dimensión $n \times n$ con coeficientes (a_{ij}) para $i, j=1, \dots, n$.

- El elemento a_{qq} de la matriz de coeficientes en el PASO q -ésimo que se usará para la eliminación de los coeficientes

$$a_{rq} \quad r = q + 1, q + 2, \dots, n$$

se llama **q -ésimo pivote** y su fila **q -ésima fila pivote**.

- Los números

$$m_{rq} = \frac{a_{rq}}{a_{qq}} \quad r = q + 1, q + 2, \dots, n$$

con los que se multiplica la fila pivote para restarle las correspondientes filas posteriores se llaman **multiplicadores**.

El siguiente Teorema asegura que si la matriz es inversible, entonces puedo aplicar el método de eliminación Gaussiana y obtener una matriz triangular superior inversible.

Teorema 6.4.2. Consideremos el SEL

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

y sea \mathbf{A} la matriz de coeficientes de orden $n \times n$ inversible. Entonces existe un SEL equivalente:

$$\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$$

donde \mathbf{U} es triangular superior con elementos diagonales $u_{kk} \neq 0$.

Demostración. Consultar [MaFi2000], p. 141. □

A continuación construiremos \mathbf{U} y \mathbf{c} en una implementación en MATLAB para luego usar sustitución regresiva para resolver este último SEL equivalente al primero y aproximar numéricamente la solución del sistema.

Código en MATLAB: *Gauss.m*

```

function x = Gauss(A,b)
% Cálculo solución del SEL Ax=b mediante eliminación Gaussiana
% Datos: A matriz invertible nxn, b vector nx1
% Resultado: x solución nx1 del sistema Ax=b
% Inicialización
[n n] = size(A);
% Cálculo matriz ampliada
Aum = [A b];
for q=1:n-1
x=x';
% Proceso de eliminación en columna q-ésima
for k=q+1:n
m = Aum(k,q) / Aum(q,q);
Aum(k,q:n+1) = Aum(k,q:n+1) - m*Aum(q,q:n+1);
end
% Sustitución regresiva (hacia atrás)
x(n) = Aum(n,n+1)/Aum(n,n);
for k=n-1:-1:1
x(k) = (Aum(k,n+1) - Aum(k,k+1:n)*x(k+1:n)) / Aum(k,k);
end
end

```

Notemos que cuando en el PASO q -ésimo:

$$a_{qq} = 0$$

éste a_{qq} no puede usarse como pivote. Entonces, buscamos en la columna k -ésima el coeficiente $a_{kq} \neq 0$ para algún k entre $q + 1 \leq k \leq n$. Una vez hallado dicho valor, intercambiamos la fila q -ésima con la k -ésima. Este proceso se conoce como **pivoteo trivial** y aparece en nuestra implementación en las siguientes sentencias.

```

% Verificación
if (Aum(q,q) == 0)
disp('A no es inversible. No hay solución o no es única');
break
end

```

El proceso de eliminación Gaussiana al resolver sistemas, es afectado por errores de redondeo debido a la gran cantidad de operaciones que realiza y la representación de números en punto flotante que maneja. Sin embargo en este método no aparecen errores de truncamiento debido a que no estamos iterando con algún esquema numérico.

Para abordar y minimizar este tipo de error de redondeo en este caso, existen algunas técnicas numéricas que permiten disminuir el efecto de este error y que son tenidas en cuenta en la mayoría de las implementaciones de la eliminación Gaussiana.

Ejemplo 6.4.4. *El pivoteo parcial*

El cálculo de multiplicadores y la sustitución regresiva requieren divisiones. El algoritmo no puede realizarse si algún pivote es cero o “casi cero”. Modifiquemos el ejemplo anterior perturbando un coeficiente de la matriz y trabajemos con 5 cifras significativas a redondeo simétrico:

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & \mathbf{2.099} & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ \mathbf{3.901} \\ 6 \end{bmatrix}.$$

La solución de este sistema sigue siendo:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

PASO 1

$$\begin{aligned} a_{11} &= 10 \text{ (pivote)} \\ m_{21} &= a_{21}/a_{11} = -0.3 \\ m_{31} &= a_{31}/a_{11} = 0.5 \end{aligned} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ -3 & 2.099 & 6 & 3.901 \\ 5 & -1 & 5 & 6 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_2 - m_{21}\mathbf{r}_1 &\mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & -0.001 & 6 & 6.001 \\ 0 & 2.5 & 5 & 2.5 \end{array} \right] \\ \mathbf{r}_3 - m_{31}\mathbf{r}_1 &\mapsto \end{aligned}$$

PASO 2

$$\begin{aligned} a_{22} &= -0.001 \text{ (pivote)} \\ m_{32} &= a_{32}/a_{22} = -2500 \end{aligned} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & -0.001 & 6 & 6.001 \\ 0 & 2.5 & 5 & 2.5 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} a_{2,3} &= 5 - (-2500) * 6 = 5 + 15000 = 15005 \\ a_{2,4} &= 2.5 - (-2500) * 6.001 = 2.5 + 15002.5 \\ &\approx 2.5 + 15003 = 15005.5 \approx 15006. \end{aligned}$$

$$\mathbf{r}_3 - m_{32}\mathbf{r}_2 \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & -0.001 & 6 & 6.001 \\ 0 & 0 & 15005 & 15006 \end{array} \right]$$

Usando sustitución regresiva:

$$15005 x_3 = 15006 \implies x_3 \approx 1.0001.$$

Sustituyendo en la 2da. ecuación

$$\begin{aligned} (-0.001)x_2 + 6(1.0001) &= (-0.001)x_2 + 6.0006 = 6.001 \\ (-0.001) x_2 &\approx 0.0004 \implies x_2 \approx -0.4 \end{aligned}$$

Finalmente en la 1er. ecuación

$$10x_1 + (-7)(-0.4) = 10x_1 + 2.8 = 7 \implies x_1 \approx 0.42.$$

La solución ahora es:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.42 \\ -0.4 \\ 1.0001 \end{bmatrix}.$$

Para evitar la propagación de errores de redondeo usamos la estrategia de **pivoteo parcial**.

- Para cada columna $q = 1, \dots, n - 1$

1. Encontrar la fila pivote q -ésima “más grande”

$$a_{\tilde{q}q} = \max\{|a_{qq}|, |a_{q+1q}|, \dots, |a_{n-1q}|, |a_{nq}|\}.$$

2. Intercambiar la fila q -ésima con la \tilde{q} -ésima, salvo que $q = \tilde{q}$.
3. Eliminar los a_{iq} de la variable x_q para las filas $i = q + 1, \dots, n$.

Como $a_{\tilde{q}q} \geq |a_{iq}|$ para $i = q, q + 1, \dots, n$:

$$(\text{multiplicadores}) \quad 0 \leq |m_{iq}| = \frac{|a_{iq}|}{a_{\tilde{q}q}}, \leq 1 \quad i = q, q + 1, \dots, n.$$

Notemos que los multiplicadores caen en el intervalo $[0, 1]$ donde hay mayor densidad de representación en punto flotante. Esto permite reducir el error de redondeo en la representación de los números.

Para evitar *más aún* la propagación de errores de redondeo usamos otra estrategia conocida como **pivoteo parcial escalado**.

- Para cada columna $q = 1, \dots, n - 1$

1. Encontrar el coeficiente “más grande” en cada fila:

$$s_i = \max\{|a_{iq}|, |a_{iq+1}|, \dots, |a_{in}|\} \quad i = q, q + 1, \dots, n$$

2. La fila pivote será:

$$\frac{a_{\tilde{q}q}}{s_{\tilde{q}}} = \max \left\{ \frac{|a_{qq}|}{s_q}, \frac{|a_{q+1q}|}{s_{q+1}}, \dots, \frac{|a_{nq}|}{s_n} \right\}$$

3. Intercambiar fila q -ésima con fila \tilde{q} -ésima salvo que $q = \tilde{q}$.
4. Eliminar los a_{iq} de la variable x_q para las filas $i = q + 1, \dots, n$.

Código en MATLAB: *Gauss.m*

```
for q=1:n-1
% Pivoteo parcial con escalonamiento
S = max(abs(Aum(q:n,q:n))');
[Y,j] = max(abs(Aum(q:n,q))./S');
% Intercambio de la fila q-esima con la fila k-esima
C = Aum(q,:);
Aum(q,:) = Aum(j+q-1,:);
Aum(j+q-1,:) = C;
end
```

Finalmente, algunas consideraciones en la eliminación Gaussiana son las siguientes:

- **Error de truncamiento:** No aparece este error, sólo error de redondeo. Si no hubiese error de redondeo tendríamos la solución exacta en n pasos.
- **Error de redondeo:** Puede ser serio. Se recomienda el uso "Pivoteo parcial" o "Pivoteo parcial escalado" para minimizarlo.
- **Esfuerzo computacional:** En la Tabla 6.6 se muestran la cantidad de operaciones para un SEL cuadrado $n \times n$. Esto significa que se requieren alrededor de n^3 operaciones para la eliminación Gaussiana. La sustitución regresiva alrededor n^2 operaciones. Y el total de operaciones cerca de n^3 .

	Elim. Gaussiana	Sust. regresiva	Total
<i>Flops</i>	$\frac{2}{3}n^3 + o(n^2)$	$n^2 + o(n)$	$\frac{2}{3}n^3 + o(n^2)$

Tabla 6.6: Cantidad de operaciones en la eliminación Gaussiana.

- **Sistemas mal condicionados:** Existen sistemas de ecuaciones lineales que pueden ser sistemas "mal condicionados" (veremos). Esto significa que pequeños cambios en los elementos de \mathbf{A} o en el lado derecho \mathbf{b} provocan grandes cambios en el vector solución \mathbf{x} . Estos SEL son proclives a tener más errores de redondeo.

Factorización LU: En ciertos casos, la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales puede ser factorizado como el producto de dos matrices triangulares. Existen varios tipos de factorizaciones que tienen ciertas ventajas en algunos procesos numéricos determinados. En nuestro caso, estudiaremos la *factorización LU*.

Definición (Factorización LU). Diremos que una matriz \mathbf{A} invertible admite una **factorización LU** si podemos expresarla como el producto

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}$$

siendo:

- \mathbf{L} : matriz triangular inferior (Lower)
- \mathbf{U} : matriz triangular superior (Upper)

Matricialmente, tendremos que si \mathbf{A} es invertible:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ m_{21} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ m_{n1} & \dots & m_{nn-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \ddots & u_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & u_{nn} \end{bmatrix}$$

La invertibilidad de \mathbf{A} asegura que la diagonal $u_{kk} \neq 0$.

Suponiendo que \mathbf{A} admite una factorización LU, ¿cómo resuelvo $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$? Notemos que

$$\mathbf{Ax} = (\mathbf{LU})\mathbf{x} = \mathbf{L}(\mathbf{Ux}) = \mathbf{Ly} = \mathbf{b}$$

donde $\mathbf{y} = \mathbf{Ux}$. Por lo tanto

- 1°) $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ (hallo \mathbf{y})
- 2°) $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ (hallo \mathbf{x})

Si la eliminación Gaussiana para resolver el SEL $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ pueda llevarse a cabo hasta el final **sin intercambio de filas** entonces es posible realizar la factorización LU. Es importante porque una vez hallada la factorización LU podemos resolver el SEL para distintos vectores \mathbf{b} .

Veamos cómo determinamos las matrices triangulares \mathbf{L} y \mathbf{U} .

Ejemplo 6.4.5. *Volvamos nuevamente al ejemplo 3×3 original:*

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Matricialmente hicimos:

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & -0.1 & 6 \\ 0 & 2.5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.3 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_1\mathbf{A}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & -0.1 & 6 \\ 0 & 0 & 155 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -25 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & -0.1 & 6 \\ 0 & 2.5 & 5 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_2(\mathbf{M}_1\mathbf{A})$$

Por ende

$$\mathbf{U} = \mathbf{M}_2\mathbf{M}_1\mathbf{A}.$$

Suponiendo que las matrices triangulares inferiores \mathbf{M}_1 y \mathbf{M}_2 son inversibles (lo son), entonces

$$\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{U} = \mathbf{A}.$$

Llamando $\mathbf{L}_1 = \mathbf{M}_1^{-1}$ y $\mathbf{L}_2 = \mathbf{M}_2^{-1}$ a las inversas de las matrices triangulares inferiores (que también serán triangulares inferiores)

$$\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2\mathbf{U} = \mathbf{A} \implies \mathbf{LU} = \mathbf{A}$$

siendo $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1\mathbf{L}_2$ matriz triangular inferior por ser producto de matrices triangulares inferiores. Por ende, los elementos de \mathbf{L} y \mathbf{U} son calculados en el proceso de eliminación Gaussiana.

El siguiente Teorema nos garantiza este hecho:

Teorema 6.4.3. *Consideremos el SEL $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ donde \mathbf{A} de orden $n \times n$. Supongamos que podemos realizar el proceso de eliminación Gaussiana sin intercambio de filas. Entonces \mathbf{A} puede factorizarse como el producto de una matriz triangular inferior \mathbf{L} y una matriz superior \mathbf{U} . Esto es, $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$.*

Demostración. Ver [MaFi2000], p. 158. □

Una vez construidas **L** y **U**, usamos la sustitución regresiva y progresiva para resolver este último SEL equivalente al original.

Código en MATLAB: *DescompLU.m*

```
function x = DescompLU(A,b)
% Calculo solucion sistema lineal Ax=b mediante descomposicion LU
% Datos: A matriz invertible nxn, b vector nx1
% Resultado: x solucion del sistema Ax=b
... (idem Gauss.m)
% Resolucion para determinar y con sustitucion progresiva (hacia adelante)
y(1) = b(1);
for k=2:n
y(k) = b(k) - A(k,1:k-1)*y(1:k-1)';
end
% Resolucion para determinar x con sustitucion regresiva (hacia atras)
x(n) = y(n)/A(n,n);
for k=n-1:-1:1
x(k) = (y(k) - A(k,k+1:n)*x(k+1:n)') / A(k,k);
end
x=x';
end
```

Ejemplo 6.4.6. *Volvamos otra vez nuestro ejemplo 3 × 3 modificado:*

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & \mathbf{2.099} & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ \mathbf{3.901} \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Resolviendo por eliminación Gaussiana con pivoteo parcial, tuvimos que permutar en el PASO 2 la 2da. fila con la 3era. dado que el pivote lo encontramos de calcular:

$$\max\{|-0.001|, |2.5|\}.$$

Entonces

$$\begin{matrix} a_{22} = 2.5 \text{ (pivote)} \\ m_{32} = a_{32}/a_{22} = -0.0004 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & 2.5 & 5 & 2.5 \\ 0 & -0.001 & 6 & 6.001 \end{array} \right].$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & \mathbf{-0.001} & 6 \\ 0 & \mathbf{2.5} & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{-0.3} & 1 & 0 \\ \mathbf{0.5} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2.099 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_1 \mathbf{A},$$

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & \mathbf{2.5} & \mathbf{5} \\ 0 & \mathbf{-0.001} & \mathbf{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & \mathbf{-0.001} & \mathbf{6} \\ 0 & \mathbf{2.5} & \mathbf{5} \end{bmatrix} = \mathbf{PM}_1 \mathbf{A}.$$

Notemos que es este caso estamos introduciendo una nueva matriz en el proceso matricial. Esta matriz \mathbf{P} se conoce como **matriz de permutación**

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Cada vez que intercambio filas en la eliminación Gaussiana matricialmente estoy multiplicando por una matriz de permutación.

Definición (Matriz de permutación). Una matriz de permutación \mathbf{P} de orden $n \times n$ es tal que cada fila y cada columna tiene solo un elemento igual a 1. Es decir, es la matriz identidad con filas y columnas intercambiadas.

Una matriz de permutación es inversible y su inversa es

$$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T.$$

Ejemplo 6.4.7. Matriz de permutación de orden 4×4

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si hacemos \mathbf{PA} permutamos la 1era. con 2da. fila de \mathbf{A} y también la 3era. con la 4ta.

Ahora podemos generalizar el proceso de eliminación Gaussiana matricialmente considerando los intercambios de filas aportados por el pivoteo parcial (o escalado) y teniendo en cuenta las matrices de permutación introducidas en cada caso:

- Sean \mathbf{P}_k con $k = 1, \dots, n - 1$ las matrices de permutación obtenidas en los intercambios de filas de la matriz \mathbf{A} en el paso k -ésimo de la eliminación Gaussiana.
- Sean \mathbf{M}_k con $k = 1, \dots, n - 1$ las matrices unitarias triangulares inferiores que se obtienen con los multiplicadores debajo de la k -ésima diagonal en el paso k -ésimo.
- Sea \mathbf{U} la matriz triangular superior obtenida después de $(n - 1)$ pasos en la eliminación Gaussiana.
- Entonces el proceso puede describirse matricialmente como:

$$\mathbf{U} = \mathbf{M}_{n-1}\mathbf{P}_{n-1} \dots \mathbf{M}_2\mathbf{P}_2\mathbf{M}_1\mathbf{P}_1\mathbf{A}$$

equivalente a (consultar [TrBa1997]):

$$\mathbf{U} = (\mathbf{M}'_{n-1} \dots \mathbf{M}'_2\mathbf{M}'_1) (\mathbf{P}_{n-1} \dots \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1) \mathbf{A}$$

donde $\mathbf{M}'_k = \mathbf{P}_{n-1} \dots \mathbf{P}_{k+1}\mathbf{M}_k\mathbf{P}_{k+1}^{-1} \dots \mathbf{P}_{n-1}^{-1}$.

- Llamando:

$$\mathbf{L} = (\mathbf{M}'_{n-1} \dots \mathbf{M}'_2 \mathbf{M}'_1)^{-1} = \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2 \dots \mathbf{L}_{n-1}$$

a la matriz triangular inferior que contiene los multiplicadores donde $\mathbf{L}_k = \mathbf{M}'_k{}^{-1}$

- Y llamando

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{n-1} \dots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1$$

la matriz de permutación que contiene todos los intercambios.

- Obtenemos que

$$\mathbf{U} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{A}$$

o equivalentemente

$$\mathbf{P} \mathbf{A} = \mathbf{L} \mathbf{U}$$

que se conoce como la **factorización indirecta LU** de \mathbf{A} .

Teorema 6.4.4. Condición suficiente para la factorización indirecta LU

Si \mathbf{A} es una matriz inversible, entonces existe una matriz de permutación \mathbf{P} tal que $\mathbf{P} \mathbf{A}$ admite una factorización triangular

$$\mathbf{P} \mathbf{A} = \mathbf{L} \mathbf{U}.$$

Demostración. Consultar [MaFi2000]. □

Entonces, suponiendo que \mathbf{A} admite una factorización indirecta LU, veamos cómo resolvemos $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$. En este caso,

$$\mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x} = (\mathbf{L} \mathbf{U}) \mathbf{x} = \mathbf{L} (\mathbf{U} \mathbf{x}) = \mathbf{L} \mathbf{y} = \mathbf{P} \mathbf{b}$$

donde $\mathbf{y} = \mathbf{U} \mathbf{x}$. Por ende,

$$1^\circ) \quad \mathbf{L} \mathbf{y} = \mathbf{P} \mathbf{b}$$

$$2^\circ) \quad \mathbf{U} \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

MATLAB tiene incorporada una función intrínseca que usando el método de eliminación Gaussiana con pivoteo parcial devuelve la matriz triangular inferior \mathbf{L} , la matriz triangular superior \mathbf{U} y la matriz de permutación \mathbf{P} .

El comando lu de MATLAB:

```
>> [L,U] = lu(A)
```

Devuelve una triangular superior \mathbf{U} y una matriz \mathbf{L} producto de la matriz triangular inferior y la matriz de permutación.

```
>> [L,U,P] = lu(A)
```

Devuelve la triangular inferior \mathbf{L} con diagonal de unos, la triangular superior \mathbf{U} y la matriz de permutación \mathbf{P} de modo que puedo reconstruir $\mathbf{P}^* \mathbf{A} = \mathbf{L}^* \mathbf{U}$.

6.4.3 Métodos Iterativos

Una de las ventajas de utilizar *métodos iterativos* para resolver numéricamente sistemas lineales de ecuaciones es que la cantidad de operaciones que necesitamos para resolver un SEL $n \times n$ es del orden $o(n^2)$, mientras que con algún método directo (eliminación Gaussiana, LU, etc) la cantidad de operaciones es del orden $o(n^3)$. Recordemos que el método de Gauss y sus variantes se conocen como *métodos directos*, dado que en un número finito de pasos generan una solución numérica aproximada que sería la exacta si no fuera afectada por los errores de redondeo de la computadora.

Los métodos iterativos generan una sucesión de vectores que idealmente convergen a la solución del SEL. El proceso itera desde una *aproximación inicial* hasta alcanzar una *tolerancia* introducida inicialmente devolviendo una solución aproximada que se verá ahora afectada por errores de truncamiento, además de los de redondeo. Es decir, que si bien ahorraremos en introducir una cantidad de errores de redondeo por la aritmética de los cálculos, introduciremos error de truncamiento.

Para sistemas de ecuaciones lineales grandes (con miles de ecuaciones), los métodos iterativos presentan ventajas decisivas respecto a los métodos directos en cuanto a velocidad y memoria de almacenamiento. Incluso muchas veces son pocas las iteraciones necesarias para alcanzar la tolerancia deseada.

Para sistemas de ecuaciones “ralos” (*sparse*), los cuales una gran proporción de los elementos de la matriz de coeficientes son ceros, los métodos iterativos presentan enormes ventajas por sobre los métodos directos. Esto último ocurre en la solución numérica de *ecuaciones en derivadas parciales*. Además, los métodos iterativos son muy estables numéricamente. Una colección de matrices provenientes de aplicaciones reales puede consultarse en Matrix-Market.

En esta Sección nos limitaremos a estudiar los métodos iterativos de *Jacobi* y *Gauss-Seidel*, así como algunas condiciones para garantizar la convergencia de los mismos.

Algunos conceptos previos:

Debido a que tanto un vector como una matriz podemos verlos como elementos de un *espacio vectorial normado*, recordemos su definición vista en los curso de Algebra Lineal.

Definición (Norma sobre un espacio vectorial). Sea $(\mathbb{V}, +, \cdot)$ un espacio vectorial con sus operaciones $+$ suma de vectores y \cdot producto por escalares (en \mathbb{R} o \mathbb{C}). Una **norma** $\|\cdot\|$ es una función a valores reales que satisface:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\| &> 0 && \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}. \\ \|\mathbf{x}\| &= 0 && \text{sí y solo sí } \mathbf{x} = \mathbf{0}. \\ \|\lambda \mathbf{x}\| &= |\lambda| \|\mathbf{x}\| && \lambda \in \mathbb{R}. \\ \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| &\leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|. && (\text{desigualdad triangular}) \end{aligned}$$

Decimos que $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ es un **espacio vectorial normado**.

Observaciones:

- La noción de norma generaliza el concepto de *longitud*.
- Trabajaremos con los espacios vectoriales $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ (vectores) o $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{m \times n}$ (matrices).

Sobre estos espacios definiremos algunas normas muy usadas en el cálculo numérico.

Definición (p -normas). Sea $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Las p -normas se definen como:

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Ejemplo 6.4.8. En particular nos interesan:

$$p = 1 \quad \mapsto \quad \|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad (\text{Norma 1})$$

$$p = 2 \quad \mapsto \quad \|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} \quad (\text{Norma Euclídea})$$

$$p = \infty \quad \mapsto \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i| \quad (\text{Norma infinito})$$

Si por ejemplo consideramos la bola unitaria en la p -norma como el siguiente conjunto

$$B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{V} : \|\mathbf{x}\|_p \leq 1\},$$

geoméricamente tendremos las representaciones mostradas en la Figura 6.24. Este concepto generaliza la noción de norma euclídea estudiada en otros cursos.

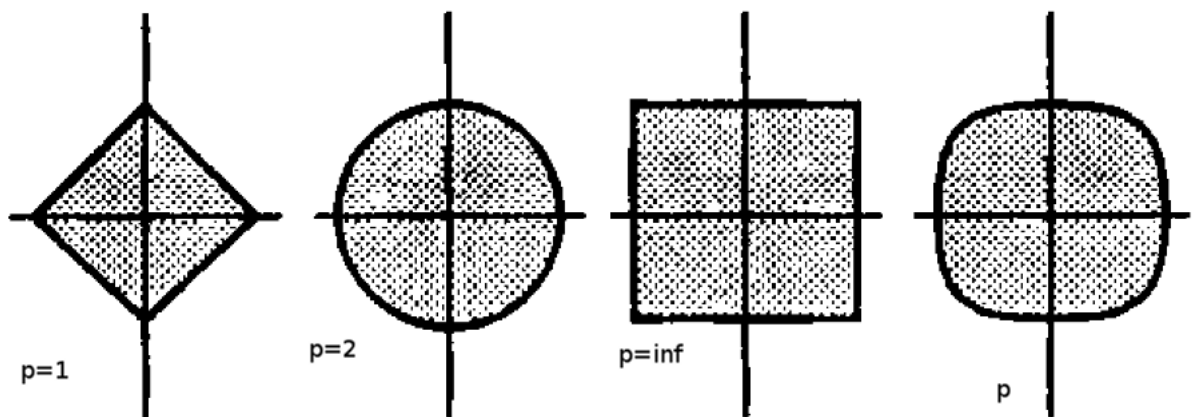


Figura 6.24: Bola unitaria en distintas normas.

En MATLAB tenemos predefinida la función **norm(x,p)** que calcula la $\|\mathbf{x}\|_p$ de un vector.

El comando norm de MATLAB:

```
>> x=(1:4)/5
x = 0.2000 0.4000 0.6000 0.8000
>> norm1=norm(x,1)
norm1 = 2
>> norm2=norm(x)      (por defecto calcula la norma  $\|\mathbf{x}\|_2$ )
norm2 = 1.0954
>> norminf=norm(x,inf)
norminf = 0.8000
```

Código en MATLAB: normap.m

```
function np = normap(x,p)
% Cálculo de norma p-ésima de un vector
% Datos:      - x vector nx1
%            - p norma a calcular (1<=p<= inf)
% Resultado:
%            - np norma p-ésima de x
if p == inf
np = max(abs(x));
else
np = (sum(abs(x).^p))^(1/p);
end
```

También pueden definirse normas matriciales, o sea, normas en el espacio de matrices $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Ejemplo 6.4.9. Dada $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, algunas normas matriciales son:

$$p = 1 \quad \mapsto \quad \|\mathbf{A}\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad (\text{Norma 1})$$

$$p = 2 \quad \mapsto \quad \|\mathbf{A}\|_2 = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \quad (\text{Norma Euclídea})$$

$$p = \infty \quad \mapsto \quad \|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (\text{Norma infinito})$$

Observación: En algunos desarrollos teóricos, no utilizaremos la norma euclídea dado que no satisface la **condición de compatibilidad** definida de la siguiente manera para cierta p -norma :

$$\|\mathbf{Ax}\|_p \leq \|\mathbf{A}\|_p \|\mathbf{x}\|_p.$$

Sin embargo, a fines prácticos, la norma euclídea puede ser implementada y usada.

La noción de iteración:

Una técnica fundamental de resolución en los Métodos Numéricos es la idea de **iteración**. Esta consiste en repetir un proceso determinado para obtener una sucesión de valores hasta un resultado suficientemente aproximado (que idealmente converge a la solución). Se necesita un **esquema iterativo** (regla, fórmula, función), una **condición inicial** y un **tolerancia de corte**. Estos esquemas se utilizan en hallar raíces de ecuaciones, soluciones de sistemas de ecuaciones lineales y no lineales, entre otros. Nosotros estudiaremos el proceso de iteración que consiste en sustituir repetidamente un valor obtenido en una misma fórmula.

Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función para calcular los términos sucesivos a partir de

$$\mathbf{x} = G(\mathbf{x}).$$

Generamos una sucesión $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ mediante el proceso iterativo:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = G(\mathbf{x}^{(k)}), \quad k \geq 0$$

siendo $\mathbf{p}^{(0)}$ la *condición inicial*. Nuestro objetivo es que

$$\mathbf{p}^{(k)} \rightarrow \mathbf{r}$$

siendo \mathbf{r} la solución de nuestro problema numérico. En general, detendremos nuestro proceso cuando la *tolerancia* sea la deseada, es decir, cuando la p -norma entre dos aproximaciones sucesivas se encuentren “cerca”:

$$\|\mathbf{p}^{(k+1)} - \mathbf{p}^{(k)}\|_p < \textit{tolerancia}.$$

El método iterativo de Jacobi:

Consideremos el SEL:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 7, \\ 4x_1 - 8x_2 + x_3 = -21, \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 = 15. \end{cases}$$

Despejando una incógnita de cada ecuación, este sistema puede escribirse como:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{7 + x_2 - x_3}{4}, \\ x_2 &= \frac{21 + 4x_1 + x_3}{8}, \\ x_3 &= \frac{15 + 2x_1 - x_2}{5}. \end{aligned}$$

Lo cual sugiere el siguiente esquema iterativo:

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= \frac{7 + x_2^{(k-1)} - x_3^{(k-1)}}{4}, \\ x_2^{(k)} &= \frac{21 + 4x_1^{(k-1)} + x_3^{(k-1)}}{8}, \\ x_3^{(k)} &= \frac{15 + 2x_1^{(k-1)} - x_2^{(k-1)}}{5}, \end{aligned} \quad k \geq 1,$$

donde el *supraíndice* k indica el número de la iteración k -ésima. Además, necesitamos un vector de aproximación inicial:

$$\mathbf{x}_0 = \left[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)} \right]^T.$$

Este esquema se conoce como **método iterativo de Jacobi**.

Ejemplo 6.4.10. Tomando como vector inicial $\mathbf{x}_0 = [1, 2, 2]^T$ en el ejemplo anterior obtenemos la primer aproximación de Jacobi:

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{7 + 2 - 2}{4} = 1.75, \\ x_2^{(1)} &= \frac{21 + 4 \cdot (1) + 2}{8} = 3.375, \\ x_3^{(1)} &= \frac{15 + 2 \cdot (1) - 2}{5} = 3. \end{aligned}$$

Luego, reemplazando esta aproximación nuevamente en el esquema, obtenemos la segunda:

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= \frac{7 + 3.375 - 3}{4} = 1.84375, \\ x_2^{(2)} &= \frac{21 + 4 \cdot (1.75) + 3}{8} = 3.875, \\ x_3^{(2)} &= \frac{15 + 2 \cdot (1.75) - 3.375}{5} = 3.205. \end{aligned}$$

Y así obtendremos la sucesión de vectores:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= \left[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)} \right]^T = [1.0000, 2.0000, 2.0000]^T \\ \mathbf{x}_1 &= \left[x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)} \right]^T = [1.7500, 3.3750, 3.0000]^T \\ \mathbf{x}_2 &= \left[x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)} \right]^T = [1.8438, 3.8750, 3.2050]^T \\ \mathbf{x}_3 &= \left[x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)} \right]^T = [1.9625, 3.9250, 2.9625]^T \\ \mathbf{x}_4 &= \left[x_1^{(4)}, x_2^{(4)}, x_3^{(4)} \right]^T = [1.9906, 3.9766, 3.0000]^T \\ \mathbf{x}_5 &= \left[x_1^{(5)}, x_2^{(5)}, x_3^{(5)} \right]^T = [1.9941, 3.9953, 3.0009]^T \\ \mathbf{x}_6 &= \left[x_1^{(6)}, x_2^{(6)}, x_3^{(6)} \right]^T = [1.9986, 3.9972, 2.9986]^T \\ \mathbf{x}_7 &= \left[x_1^{(7)}, x_2^{(7)}, x_3^{(7)} \right]^T = [1.9996, 3.9991, 3.0000]^T \\ \mathbf{x}_8 &= \left[x_1^{(8)}, x_2^{(8)}, x_3^{(8)} \right]^T = [1.9998, 3.9998, 3.0000]^T \\ \mathbf{x}_9 &= \left[x_1^{(9)}, x_2^{(9)}, x_3^{(9)} \right]^T = [1.9999, 3.9999, 2.9999]^T \\ \mathbf{x}_{10} &= \left[x_1^{(10)}, x_2^{(10)}, x_3^{(10)} \right]^T = [2.0000, 4.0000, 3.0000]^T \end{aligned}$$

que vemos converge al vector $\mathbf{x} = [2, 4, 3]^T$ que es la solución del SEL inicial.

En general, podemos decir que dado el SEL $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ el esquema de Jacobi es:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \left(b_1 - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{1j} x_j^{(k-1)} \right) / a_{11}, \\ x_2^{(k)} = \left(b_2 - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{2j} x_j^{(k-1)} \right) / a_{22}, \\ \vdots \\ x_n^{(k)} = \left(b_n - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{nj} x_j^{(k-1)} \right) / a_{nn}. \end{cases}$$

Código en MATLAB: *Jacobi.m*

```
function x = Jacobi(A,b,x0,tol,itmax)
% Método iterativo de Jacobi
% A : matriz invertible nxn
% b : lado derecho n x 1
% x0 : estimación inicial
% tol : tolerancia
% itmax : número máximo de iteraciones
% x : vector nx1 aproximacion solución SEL Ax=b
n = length(b);
x0=x0';
if diagdom(A) == 0, disp('No se garantiza convergencia');
end
iter = 0;
while 1
iter=iter + 1;
for i =1:n
x(i) = b(i);
for j=1:n
if j = i, x(i) = x(i) - A(i,j)*x0(j);
end
end
x(i) = x(i) / A(i,i);
err = normap(x-x0,2);
if err < tol, x=x', break,
end      (Criterio de parada por tolerancia)
if iter == itmax, disp('Número máximo de iteraciones alcanzado');
x=x', break      (Criterio de parada por iteraciones)
end
end
x0 = x;
end
```

¿Cuándo cortamos *Jacobi.m*? Tenemos dos criterios de corte o de parada. Uno dado cuando se alcance la tolerancia pasada como parámetro de entrada de la función y medida como la norma entre dos aproximaciones sucesivas de Jacobi. La otra será el número máximo de iteraciones que realizará la implementación del método. Ésta última nos garantiza que el esquema dejará de iterar y no caerá en un ciclo infinito.

El método iterativo de Gauss-Seidel:

Para mejorar la convergencia del método de Jacobi modificamos el esquema iterativo. De la primera ecuación despejamos la primer incógnita x_1 , de la segunda ecuación despejamos la segunda incógnita x_2 pero tomando actualizada la incógnita x_1 , y de la tercer ecuación despejamos la tercer incógnita x_3 con las actualizaciones de x_1 y x_2 . Esto es:

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= \frac{7 + x_2^{(k-1)} - x_3^{(k-1)}}{4}, \\ x_2^{(k)} &= \frac{21 + 4x_1^{(k)} + x_3^{(k-1)}}{8}, \quad k \geq 1, \\ x_3^{(k)} &= \frac{15 + 2x_1^{(k)} - x_2^{(k)}}{5}, \end{aligned}$$

donde los supraíndices en verde son la diferencia con el método de Jacobi. Este esquema iterativo se conoce como **método iterativo de Gauss-Seidel**.

Ejemplo 6.4.11. Usando la misma aproximación inicial $\mathbf{x}_0 = [1, 2, 2]^T$ obtenemos la sucesión:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}]^T = [1.0000, 2.0000, 2.0000]^T \\ \mathbf{x}_1 &= [x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}]^T = [1.7500, 3.3750, 2.9200]^T \\ \mathbf{x}_2 &= [x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}]^T = [1.9500, 3.9688, 2.9862]^T \\ \mathbf{x}_3 &= [x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)}]^T = [1.9956, 3.9961, 2.9990]^T \\ \mathbf{x}_4 &= [x_1^{(4)}, x_2^{(4)}, x_3^{(4)}]^T = [1.9993, 3.9995, 2.9998]^T \\ \mathbf{x}_5 &= [x_1^{(5)}, x_2^{(5)}, x_3^{(5)}]^T = [1.9999, 3.9999, 3.0000]^T \\ \mathbf{x}_6 &= [x_1^{(6)}, x_2^{(6)}, x_3^{(6)}]^T = [2.0000, 4.0000, 3.0000]^T \end{aligned}$$

que converge al vector solución $\mathbf{x} = [2, 4, 3]^T$. Notemos que lo hace en menos iteraciones.

En general, dado el SEL $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \left(b_1 - \sum_{j=2}^n a_{1j}x_j^{(k-1)} \right) / a_{11}, \\ x_2^{(k)} = \left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - \sum_{j=3}^n a_{2j}x_j^{(k-1)} \right) / a_{22}, \\ x_3^{(k)} = \left(b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)} - \sum_{j=4}^n a_{3j}x_j^{(k-1)} \right) / a_{33}, \\ \vdots \\ x_n^{(k)} = \left(b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j^{(k)} \right) / a_{nn}. \end{cases}$$

Código en MATLAB: *Gauss-Seidel*

```

function x = Jacobi(A,b,x0,tol,itmax)
% Metodo iterativo de Gauss-Seidel
% A : matriz invertible nxn
% b : lado derecho n x 1
% x0 : estimacion inicial
% tol : tolerancia
% itmax : numero maximo de iteraciones
% x : vector nx1 aproximacion solucion SEL Ax=b
...
(idem Jacobi.m)
...
for i =1:n
x(i) = b(i);
for j=1:n
if j = i
x(i) = x(i) - A(i,j)*x(j); (diferencia con Jacobi.m)
end
end
x(i) = x(i) / A(i,i);
end
...
(idem Jacobi.m)
...

```

Nos preguntamos ahora, ¿cuando convergen estos esquemas iterativos? Es decir, bajo qué condiciones podemos tener asegurada la convergencia de estos esquemas para cierta tolerancia y cierto punto de arranque. Para responder esto, introduciremos un concepto muy importante del Análisis Numérico.

Definición. Decimos que una matriz \mathbf{A} $n \times n$ es **estrictamente diagonal dominante** o **directamente diagonalmente dominante** sii:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ejemplo 6.4.12. La matriz anterior es diagonalmente dominante pues:

$$\begin{aligned} |4| &> |-1| + |1|, \\ |-8| &> |4| + |1|, \\ |5| &> |-2| + |1|. \end{aligned}$$

El siguiente Teorema garantiza la convergencia de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel cuando la matriz es diagonalmente dominante.

Teorema 6.4.5. Si \mathbf{A} es una matriz diagonalmente dominante, los métodos iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel convergen a la solución del SEL $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ para cualquier vector inicial \mathbf{x}_0 .

Demostración. Consultar [MaFi2000]. □

En las implementaciones de los algoritmos tenemos agregada una función que nos permite determinar numéricamente cuando la matriz de coeficientes del SEL es diagonalmente dominante.

Código en MATLAB: *diagdom.m*

```
function z = diagdom(A)
% Determina si la matriz A es diagonalmente dominante
% Datos: A matriz invertible nxn
% Resultado: z variable logica: 0 false - 1 true
n = length(A);
i = 0;
z = 1;
while ( i < n && z == 1 )
i = i+1;
if sum(abs(A(i,:))) >= 2*abs(A(i,i))
z = 0;
end
end
end
```

Algunas consideraciones sobre estos métodos iterativos:

- Si \mathbf{A} es una matriz inversible con diagonal no nula del SEL $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ($a_{ii} \neq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$), no siempre está garantizada la convergencia de los esquemas iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel.
- Las iteraciones de Jacobi y Gauss-Seidel aplicadas al mismo SEL pueden ser ambas convergentes, ambas divergentes, o bien una cualquiera de ellas convergente y la otra no.
- Cuando las iteraciones de Jacobi y Gauss-Seidel resultan ambas convergentes, en general, pero no siempre, las iteraciones de Gauss-Seidel convergen en menos iteraciones (más “rápidamente”) que las de Jacobi.
- Si bien estos algoritmos son fáciles de entender e implementar, son poco usados en aplicaciones. En general, los métodos iterativos más usados para resolver grandes SEL son los de tipo Krylov. Consultar [Saad2003].

El vector residual:

Al resolver en una máquina un sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con precisión finita, obtenemos una aproximación $\tilde{\mathbf{x}}$ del vector solución \mathbf{x} :

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$$

que se verá afectada por errores de redondeo (en los métodos directos), y por errores de redondeo y truncamiento (en los métodos iterativos). Ahora queremos conocer cuánto difiere nuestra solución $\tilde{\mathbf{x}}$ de la solución exacta \mathbf{x} . Para esto, introduciremos los siguientes conceptos.

Definición. Llamaremos **vector residual** al vector:

$$\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}$$

y **vector error** al vector:

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}$$

El número de condición de una matriz:

Otro concepto muy importante es el concepto de número de condición asociado a una matriz y el de sistema de ecuaciones mal condicionado.

Definición. Un SEL $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ se dice que está **mal condicionado** si pequeños cambios en la matriz de coeficientes \mathbf{A} o del vector del lado derecho \mathbf{b} generan grandes cambios en el vector solución \mathbf{x} .

Por ejemplo, pueden darse las siguientes situaciones:

- **Caso 1.** Modificamos solo el vector del lado derecho:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = (\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b})$$

- **Caso 2.** Modificamos solo la matriz de coeficientes:

$$(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b}$$

- **Caso 3.** Modificamos ambos:

$$(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = (\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b})$$

Cada una de estas perturbaciones generará una modificación en la aproximación de nuestra solución. Si nuestro SEL está bien condicionado, pequeñas modificaciones generarán pequeñas modificaciones en el vector solución. Sin embargo, si el sistema está mal condicionado, nuestra nueva solución aproximada del sistema perturbado puede distar mucho de la solución del sistema sin perturbar. Se presenta entonces el problema de cómo medir el condicionamiento de un SEL.

Definición. Siendo \mathbf{A} una matriz inversible, llamamos **número de condición** $\kappa(\mathbf{A})$ a:

$$\kappa(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|$$

donde $\|\cdot\|$ es una norma que satisface la condición de compatibilidad.

Para calcular el número de condición de una matriz en una computadora no se utiliza la definición anterior debido al costo computacional de calcular la inversa de \mathbf{A} . Se utilizan otros métodos numéricos de aproximación para aproximar $\kappa(\mathbf{A})$. El MATLAB tenemos una función incorporada que aproxima dicho número.

Código en MATLAB: el comando *cond*

```
>> A = [4 -1 1; 4 -8 1; -2 1 5];
>> k = cond(A)
k = 3.1467
>> B = [4.1 2.8; 9.7 6.6]
>> k = cond(B)
k = 1.6230e+03
```

El siguiente Teorema establece una cota para el error relativo de la aproximación de un SEL que depende del número de condición.

Teorema 6.4.6. El error relativo al resolver $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ está acotado por:

$$\frac{1}{\kappa(\mathbf{A})} \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|} \leq \frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \kappa(\mathbf{A}) \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

donde $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}$ es el error absoluto y $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}$ el vector residual.

Demostración. Consultar [Mole2015]. □

Algunas consideraciones:

- Cuando mayor sea $\kappa(\mathbf{A})$, mayor será la cota del error relativo.
- Notemos que $\kappa(\mathbf{A}) \geq 1$ para toda matriz \mathbf{A} inversible y norma compatible.
- Si $\kappa(\mathbf{A})$ es “pequeño” (cercano a 1), entonces el error relativo también lo será y diremos que \mathbf{A} está **“bien condicionada”**. En cambio, si $\kappa(\mathbf{A})$ es “grande”, entonces el error relativo también lo será y diremos que \mathbf{A} está **“mal condicionada”**.
- Cuando la matriz está muy mal condicionada, puede haber pérdida de precisión en el cálculo de la solución \mathbf{x} . Esto significa queda que en general el SEL será “muy difícil” de resolver por algún método numérico.
- Como regla general puede tomarse que si $\text{cond}(\mathbf{A}) \approx 10^K$, entonces podemos perder K dígitos de precisión. Como MATLAB trabaja con 16 dígitos de precisión, podemos decir que si $\text{cond}(\mathbf{A}) \approx 1/\text{eps}$, entonces \mathbf{A} está mal condicionada.

6.5 Raíces y Sistemas de Ecuaciones No Lineales

6.5.1 Introducción

En la Sección anterior vimos métodos para aproximar la solución de sistemas de ecuaciones lineales. En esta sección estudiaremos métodos numéricos para hallar raíces de ecuaciones no lineales y de sistemas de ecuaciones no lineales.

Un método numérico para hallar raíces de Ecuaciones No Lineales en el caso unidimensional (1D) es el método de Método de Newton-Raphson (N-R). Hay otros como el métodos de Punto Fijo, el método de la Bisección, de Secante, entre otros.

Para hallar raíces de Sistemas de Ecuaciones No Lineales (SENL) en el caso bidimensional (2D) estudiaremos el Método de Punto Fijo (PF). También existen otros como el método de Newton-Raphson para SENL, entre otros. Se puede consultar [MaFi2000].

6.5.2 Método de Newton-Raphson

Nuestro objetivo es hallar numéricamente la raíz $r \in (a, b)$ de f tal que:

$$f(r) = 0$$

para cierta función f definida en (a, b) tal que f, f', f'' continuas en un intervalo que contenga un entorno $(r - \delta, r + \delta)$. En la Figura 6.25 vemos el ejemplo de $f(x) = e^x - x - 2$ donde $x \in [-3, 3]$.

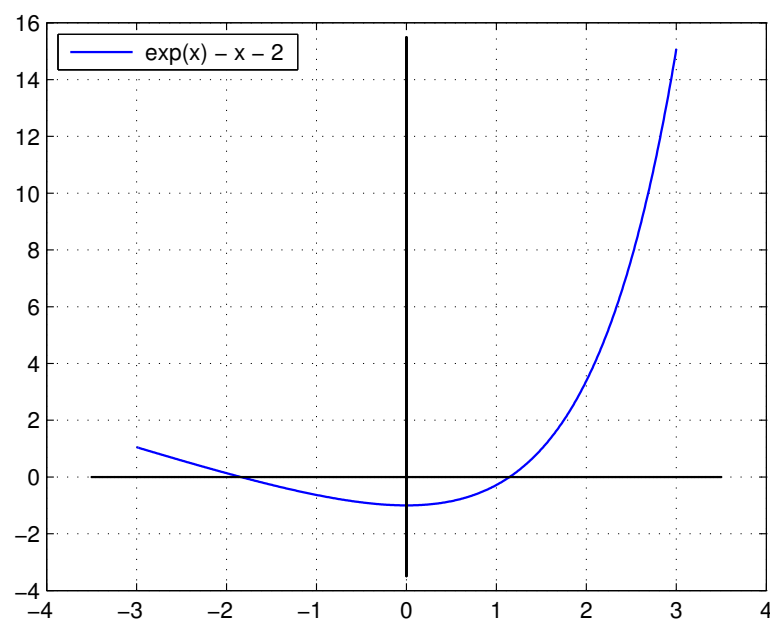


Figura 6.25: Gráfica de $f(x) = e^x - x - 2, x \in [-3, 3]$.

Queremos desarrollar un algoritmo que produzca una sucesión numérica de valores que converjan a dicha raíz.

Si x es la aproximación de la raíz r entonces $r = x + h$. Como f es dos veces derivable con continuidad en (a, b) , podemos usar el desarrollo de Taylor centrado en x :

$$f(r) = f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\xi)}{2!}h^2.$$

donde ξ está entre r y x . Si h es pequeña, podemos despreciar el último término, es decir

$$f(r) \approx f(x) + f'(x)h.$$

Como $f(r) = 0 \implies f(x) + f'(x)h \approx 0 \implies h \approx -\frac{f(x)}{f'(x)}$. Entonces podemos escribir

$$r = x + h \approx x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Esta expresión nos sugiere un esquema de iteración. La **iteración de N-R** será de la forma:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0,$$

siendo x_0 una aproximación inicial.

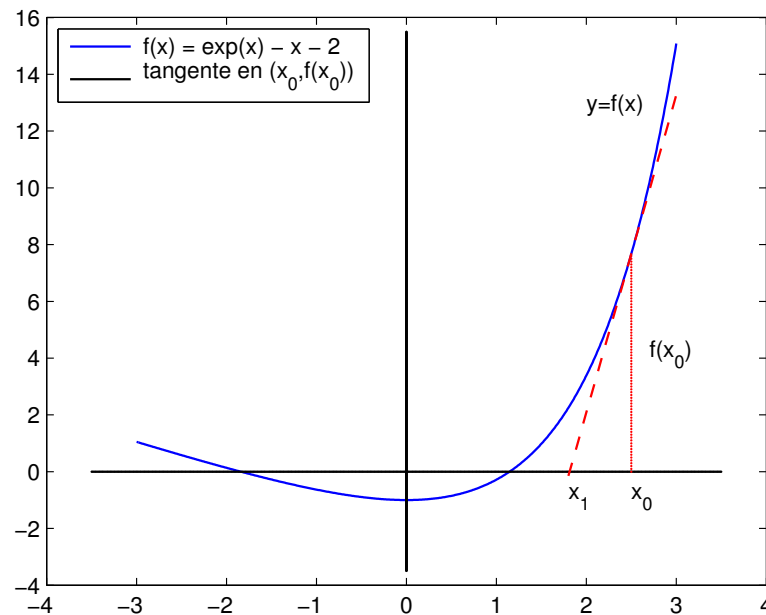


Figura 6.26: Interpretación geométrica de N-R

Geoméricamente, si consideramos la primera iteración:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \implies f'(x_0) = \frac{0 - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función que pasa por los puntos: $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, 0)$. Es decir, calculamos la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto x_0 , donde esta recta corta al eje de las ordenadas tenemos la primer aproximación x_1 . Así sucesivamente.

Ejemplo 6.5.1. Calcular la raíz cuadrada \sqrt{M} siendo $M > 0$.

Definamos la función

$$f(x) = x^2 - M.$$

Como f infinitamente derivable y $f'(x) = 2x$,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - M}{2x_n} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{M}{x_n} \right).$$

Para el caso $M = 2$,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right), \quad n \geq 0.$$

Notemos que este es nuestro ejemplo `rcuad2.m` visto en la sección introductoria.

Código en MATLAB: *NewtonRaphson.m*

```
function x = NewtonRaphson(fnom,fpnom,x0,tol,itmax)
% Método de Newton-Raphson
% ENTRADA
% fnom : nombre función que define la ecuación
% fpnom : nombre derivada función fnom
% x0 : estimación inicial
% tol : tolerancia
% itmax : número máximo de iteraciones
% SALIDA
% x : raíz aproximada
fprintf(' Método iterativo de Newton-Raphson \n \n')
fprintf(' Iter    x    f(x)    Error \n')
iter= 1;
while 1
fx = fnom(x0);
fpx = fpnom(x0);      (Nótese que tenemos que pasarle la derivada)
x = x0 - fx/fpx;
if abs(x-x0) <= tol & abs(fnom(x)) <= tol
fprintf('Se alcanzó la tolerancia. \n\n')
fprintf('Resultado final:\n Raíz aproximada %12.6f \n',x)
return
end
x0 = x;
iter = iter +1;
if iter > itmax
fprintf('Número de iteraciones máximo alcanzado. \n\n')
fprintf('Resultado parcial:\n Raíz aproximada = %12.6f \n',x)
break
end
end
```

Ejemplo 6.5.2. Aproximar la raíz de $f(x) = x^2 - 2$.

```
>> f=@(x) x^2-2;
>> df=@(x) 2*x;
>> x=NewtonRaphson(f,df,1,1e-5,30)
```

Notemos que pasamos como argumento del N-R las funciones f y su derivada f' definidas en forma de funciones anónimas.

Ejemplo 6.5.3. Aproximar la raíz de $g(x) = e^x - x - 2$.

```
>> g=inline('exp(x)-x-2');
>> dg=inline('exp(x)-1');
>> x=NewtonRaphson(g,dg,1,1e-5,30)
```

Notemos que ahora pasamos como argumento de N-R las funciones g y su derivada g' definidas "en línea".

Ahora bien, un problema que aparece en el método de N-R es que necesitamos conocer explícitamente una expresión para la derivada de la función f que me define la ecuación no lineal. Pero, ¿cómo aproximamos numéricamente $f'(x)$? Una forma natural (aunque mala) de hacerlo es mediante el *cociente incremental*

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Usando Taylor, el error que cometemos con esta fórmula es

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(\xi).$$

Reacomodando

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{1}{2}hf''(\xi).$$

Por ende, el **error de truncamiento** es

$$-\frac{1}{2}hf''(\xi) = o(h).$$

Definición (La notación o de Landau). Supongamos que $g(h) \neq 0$ para todo $h \neq 0$ en cierto intervalo que contenga al 0. La notación:

$$f(h) = o(g(h)) \quad \text{cuando} \quad h \rightarrow 0$$

significa que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{g(h)} = 0.$$

Se dice que $f(h)$ es **de orden $g(h)$** cuando $h \rightarrow 0$.

Ejemplo 6.5.4. Veamos algunos ejemplos:

- $f(h) = o(1)$ significa que $f(h) \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$.
- $f(h) = o(h)$ significa que $f(h)/h \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$.
- $f(h) = o(h^2)$ significa que $f(h)/h^2 \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$.

Una mejor forma de aproximar la derivada primera, es usando la conocida **fórmula centrada de aproximación de la derivada**, la cual establece que:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

Esta expresión tiene un error $o(h^2)$ al aproximar por el *cociente incremental*.

Código en MATLAB: la función *df1dx.m*

```
function deriv = df1dx(fnom,x)
% Derivada primera numérica con formula centrada o(h^2)
% fnom : nombre de la función que define la ecuacion
% x : puntos de evaluación
% deriv : puntos de evaluación de la derivada primera aproximada
h = 1e-6;
deriv = (fnom(x+h)-fnom(x-h))/(2*h);
end
```

Entonces, podemos modificar nuestra implementación inicial de N-R de la siguiente manera:

Código en MATLAB: *NewtonRaphsonDeriv.m*

```
function x = NewtonRaphsonDeriv(fnom,x0,tol,itmax)
% Método de Newton-Raphson utilizando derivación numérica
% ENTRADA
% fnom : nombre función que define la ecuación
% x0 : estimación inicial
% tol : tolerancia
% itmax : número máximo de iteraciones
% SALIDA
% x : raíz aproximada
% USAMOS
% df1dx.m : función que calcula la derivada numérica primera aproximada
...
(idem NewtonRaphson.m)
...
while 1
fx = fnom(x0);
fpx = df1dx(fnom,x0);      (llamamos a df1dx.m)
x = x0 - fx/fpx;
...
(idem NewtonRaphson.m)
...
```

Es importante observar que, si bien bajo ciertas hipótesis podemos construirnos un esquema numérico, no siempre hay garantías de que el método numérico converja a la raíz de nuestra ecuación. Por ejemplo, puede suceder que haya una oscilación divergente o un ciclo como muestran las Figuras 6.27 y 6.28 siguientes.

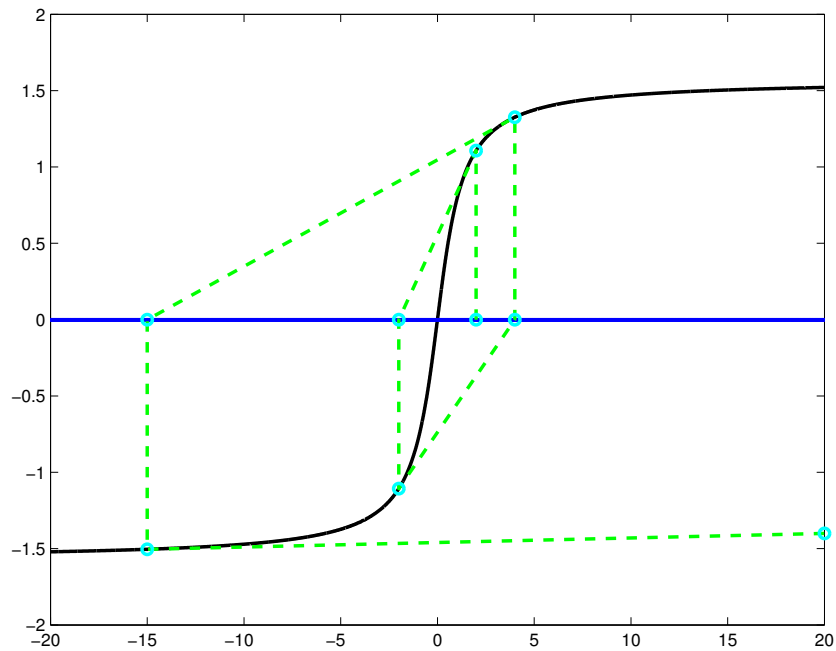


Figura 6.27: Ejemplo de divergencia de N-R.

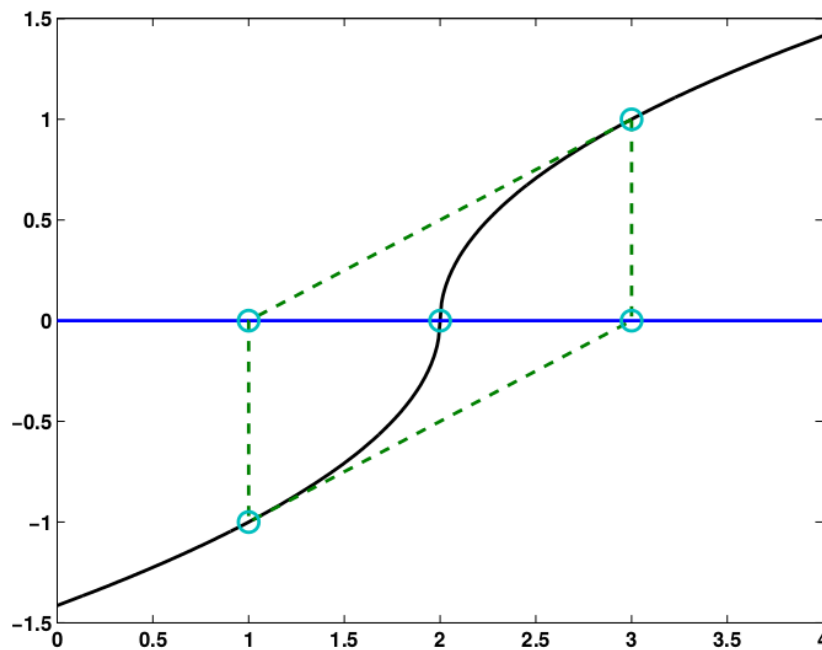


Figura 6.28: Ejemplo “perverso” de N-R.

Los siguientes Teoremas nos brindan condiciones suficientes para asegurar la convergencia del método de N-R tanto local como globalmente.

Teorema 6.5.1. Carácter local. Supongamos que $f \in C^2(a, b)$ y que existe una raíz r de f en (a, b) . Si $f'(r) \neq 0$ entonces existe un $\delta > 0$ tal que la sucesión $\{x_k\}_{k \geq 0}$ definida por el proceso iterativo de Newton-Raphson:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad n \geq 0$$

converge a r para cualquier aproximación inicial $x_0 \in (r - \delta, r + \delta)$.

Demostración. Consultar [MaFi2000]. □

Teorema 6.5.2. Carácter global. Si $f \in C^2(\mathbb{R})$ es una función creciente, convexa y tiene una raíz r entonces dicha raíz es única y la iteración de N-R convergerá a r para cualquier aproximación inicial.

Demostración. Consultar [MaFi2000]. □

Una de las características del método de N-R para aproximar raíces de ecuaciones no lineales, es su velocidad de convergencia. Esto significa que para ciertos casos, alcanzará la tolerancia deseada en pocas iteraciones. Veamos como formalizar estos conceptos matemáticamente.

Definición (Orden de convergencia). Se dice que un método numérico que genera una sucesión convergente $x_n \rightarrow r$ tiene **orden de convergencia** α si:

$$\frac{|x_{n+1} - r|}{|x_n - r|^\alpha} = \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^\alpha} \simeq C \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

siendo $\alpha > 0$, C una constante y e_n el error absoluto.

Esto equivale a decir que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - r|}{|x_n - r|^\alpha} = C$$

siendo C la **constante asintótica del error**.

- Si $\alpha = 1$ diremos que la **convergencia es lineal**
- Si $\alpha = 2$ diremos que la **convergencia cuadrática**

Es decir, si $\alpha = 1$ tenemos que:

$$|e_{n+1}| \approx C|e_n|$$

lo cual significa que el error en el paso $n + 1$ será el error en el paso n por la constante C (menor que 1). Entonces el error decrecerá linealmente en cada iteración. En cambio si $\alpha = 2$ tenemos:

$$|e_{n+1}| \approx C|e_n|^2$$

por ende, si el error es chico, en cada paso de la iteración de N-R decrecerá cuadráticamente.

Ejemplo 6.5.5. Aproximar las raíces de $h(x) = x^3 - 3x + 2$. Se sabe que $r_1 = -2$ raíz simple y $r_2 = 1$ raíz doble.

Es importante que grafiquemos la función para poder observar en qué lugar aproximadamente estarán la o las raíces.

```
>> x = -3:1e-2:3;
>> h = inline('x.^3-3*x+2');
>> plot(x,h(x)), grid on
```

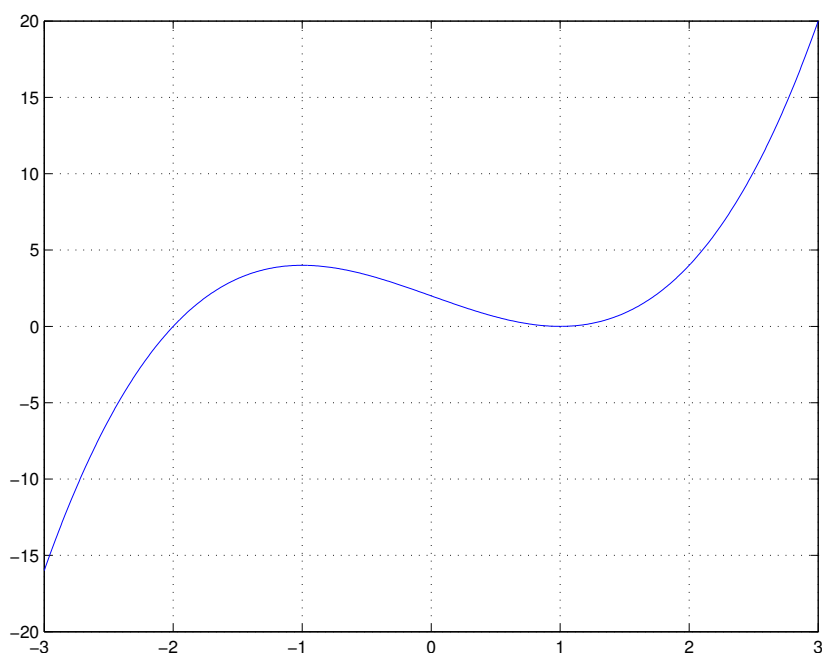


Figura 6.29: Raíz simple y doble de $h(x) = x^3 - 3x + 2$

Aproximemos la raíz simple $r_1 = -2$.

```
>> x = NewtonRaphsonDeriv(h,-2.5,1e-5,30);
Metodo iterativo de Newton-Raphson con derivada numerica
```

Iter	x	f(x)	Error
1	-2.111111	-1.075446	0.388889
2	-2.007407	-0.066996	0.103704
3	-2.000036	-0.000327	0.007371
4	-2.000000	-0.000000	0.000036
5	-2.000000	0.000000	0.000000

Se alcanzo la tolerancia.

Resultado final:

Raiz aproximada -2.000000

Notemos que alcanzamos la tolerancia deseada en 5 iteraciones.

Ahora aproximemos la raíz doble $r_2 = 1$.

```
>> x = NewtonRaphsonDeriv(h,1.5,1e-5,30);
Metodo iterativo de Newton-Raphson con derivada numerica
Iter      x      f(x)      Error
1  1.266667  0.232296  0.233333
2  1.138562  0.060259  0.128105
3  1.070777  0.015383  0.067785
4  1.035792  0.003889  0.034985
5  1.018001  0.000978  0.017791
6  1.009027  0.000245  0.008974
7  1.004520  0.000061  0.004507
8  1.002262  0.000015  0.002258
9  1.001131  0.000004  0.001131
10 1.000566  0.000001  0.000566
11 1.000283  0.000000  0.000283
12 1.000141  0.000000  0.000141
13 1.000071  0.000000  0.000071
14 1.000035  0.000000  0.000035
15 1.000018  0.000000  0.000018
16 1.000009  0.000000  0.000009
Se alcanzo la tolerancia.

Resultado final:
Raiz aproximada 1.000000
```

Notemos que para alcanzar la misma tolerancia e inicializando con una aproximación inicial tan cercana como en el caso anterior, tuvimos que iterar un mayor número de veces. Esto se debe a que la raíz $r_2 = 1$ es doble, es decir, $h(r_1) = h'(r_1) = 0$ y $h''(r_1) \neq 0$.

El método de N-R presenta una velocidad de convergencia lineal para raíces múltiples y convergencia cuadrática para raíces simples, como es el primer caso.

Veamos algunas consideraciones sobre el método de N-R:

VENTAJAS:

- La convergencia de N-R cerca de una raíz simple es **cuadrática**.
- La convergencia de N-R cerca de una raíz múltiple **lineal**.
- Modificando el esquema iterativo de N-R para una raíz múltiple puede recuperarse la convergencia cuadrática.

DESVANTAJAS:

- Puede darse la división por cero (o casi cero) si $f'(x_n) \simeq 0$.
- El esquema iterativo puede diverger o ciclar.
- Se requiere evaluar la derivada de f en cada paso.

6.5.3 Métodos de Punto Fijo

A continuación introduciremos el método iterativo de Punto Fijo para el caso bidimensional. Consideremos los campos escalares

$$\begin{cases} f_1(x, y) = x^2 - 2x - y + 0.5, \\ f_2(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4, \end{cases}$$

y sea el Sistemas de Ecuaciones No Lineales (SENL)

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y) = 0. \end{cases}$$

Sabemos de *Algebra y Geometría Analítica* que estas ecuaciones son ecuaciones generales de segundo grado que definen implícitamente curvas en el plano $z = 0$ como se muestra en la Figura 6.30. Una raíz del SENL es un punto del plano $(p^*, q^*) \in \mathbb{R}^2$ que satisface simultáneamente ambas ecuaciones. Geométricamente son los puntos donde se intersecan ambas curvas

$$\begin{cases} f_1(p^*, q^*) = 0, \\ f_2(p^*, q^*) = 0. \end{cases}$$

Nuestro objetivo en esta Sección es desarrollar un método numérico para aproximar estas raíces iterativamente. Es decir, construiremos una sucesión de puntos del plano que converja a la o las raíces del SENL.

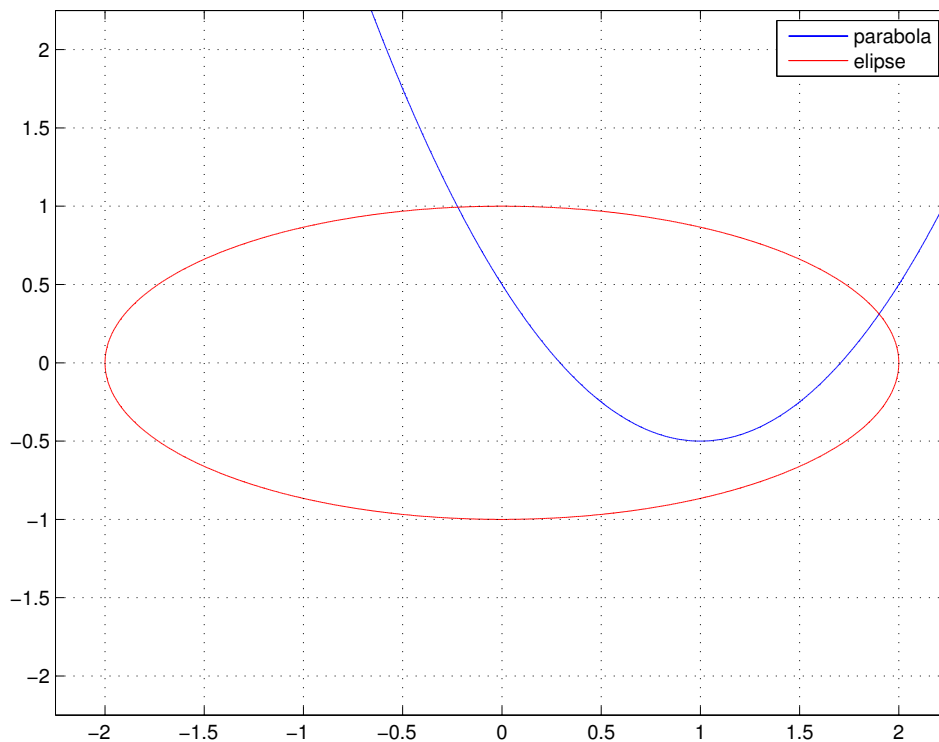


Figura 6.30: Intersección de una elipse y una parábola.

Despejando algebraicamente x e y de alguna forma particular obtenemos:

$$f_1(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{x^2 - y + 0.5}{2},$$

$$f_2(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-x^2 - 4y^2 + 8y + 4}{8}.$$

Definimos a continuación las funciones llamadas **generatrices**:

$$g_1(x, y) := \frac{x^2 - y + 0.5}{2},$$

$$g_2(x, y) := \frac{-x^2 - 4y^2 + 8y + 4}{8}.$$

Tomando una aproximación inicial (p_0, q_0) , generamos la sucesión $\{(p_k, q_k)\}_{k \geq 0}$ tal que

$$p_{k+1} = g_1(p_k, q_k) = \frac{p_k^2 - q_k + 0.5}{2} \quad k \geq 0,$$

$$q_{k+1} = g_2(p_k, q_k) = \frac{-p_k^2 - 4q_k^2 + 8q_k + 4}{8} \quad k \geq 0$$

Deseamos que esta sucesión de pares ordenados converjan a alguna de las raíces del SENL dado inicialmente.

Observación: Notemos además que hay otras posibles generatrices que podemos definir a partir de los campos escalares iniciales, como por ejemplo

$$\tilde{g}_1(x, y) := \frac{-x^2 + 4x + y - 0.5}{2},$$

$$\tilde{g}_2(x, y) := \frac{-x^2 - 4y^2 + 11y + 4}{11}.$$

Debido a que nuestro esquema iterativo de Punto Fijo necesita de la definición de las generatrices obtenidas, veamos primero cómo definir nuestras generatrices en un *m-file*:

Código en MATLAB: las generatrices *G1.m*

```
function Y = G1(X)
% Función generatriz para del SENL Punto Fijo
% ENTRADA: X = [ X(1) X(2) ] vector fila de dos componentes
% SALIDA: Y = [ Y(1) Y(2) ] vector fila de dos componentes
Y(1) = ( X(1)^2 - X(2) + 0.5) / 2;
Y(2) = (-X(1)^2 - 4*X(2)^2 + 8*X(2) + 4) / 8;
end
```

Este m-file define las generatrices en un archivo separado que luego pasaremos como argumento a la función `PuntoFijo.m` como cadena de caracteres (string).

Código en MATLAB: *PuntoFijo.m*

```

function [Pk,iter] = PuntoFijo(Fnom,P0,tol,itmax)
% Datos
% - Fnom: (string) función m-file que definen las generatrices
% - P0: estimación inicial
% - tol: tolerancia
% - itmax: número iteraciones máximas
% Resultado
% - Pk: aproximación solución
% - iter: número de iteraciones realizadas
fprintf('Método iterativo de Punto Fijo \ n \ n')
fprintf('Iter      Pk      Qk \ n')
iter = 0;
fprintf('%3.0f %15.7f %15.7f \ n', iter, P0)
while 1
Pk = feval(Fnom,P0);
err = abs(norm(Pk-P0));
relerr = err / (norm(Pk)+eps);
if (err < tol || relerr < tol), disp('Se alcanzó la tolerancia. '),
disp('Resultado final: '), fprintf('%15.7f %15.7f \ n',Pk), break
end
if iter > itmax, disp('Número de iteracioneas máximo alcanzaso. '), break
end
iter = iter + 1;
P0 = Pk;
fprintf('%3.0f %15.7f %15.7f \ n', iter, Pk)
end
end

```

En la ventana de comandos, llamamos a *PuntoFijo.m* de la siguiente manera:

```

>> [Pk,iter] = PuntoFijo('G1',[0 1],1e-9,15)
Metodo iterativo de Punto Fijo
Iter      Pk      Qk
0         0.0000000    1.0000000
1        -0.2500000    1.0000000
2        -0.2187500    0.9921875
3        -0.2221680    0.9939880
4        -0.2223147    0.9938121
5        -0.2221941    0.9938029
6        -0.2222163    0.9938095
7        -0.2222147    0.9938083
8        -0.2222145    0.9938084
9        -0.2222146    0.9938084
10       -0.2222146    0.9938084
Se alcanzó la tolerancia.

```

¡CONVERGE!

En cambio, si queremos aproximar la otra raíz del SENL observamos que:

```
>> [Pk,iter] = PuntoFijo('G1',[2 0],1e-9,15)
Metodo iterativo de Punto Fijo

Iter      Pk          Qk
0         2.0000000    0.0000000
1         2.2500000    0.0000000
2         2.7812500   -0.1328125
3         4.1840820   -0.6085510
4         9.3075467   -2.4820360
5        44.8062311 -15.8910907
6       1011.9947186 -392.6042650
7      512263.2073904 -205477.8225378
:         :
13        Inf     -Inf
14        Inf     -Inf           ¡DIVERGE!
15        Inf     -Inf
```

En este caso observamos que las iteraciones sucesivas no convergen a la raíz que se observa en la gráfica, aún cuando el punto de arranque lo tomemos cerca de dicha raíz. Incluso, si probamos con otros puntos de arranque cerca de dicha raíz, veremos que el esquema diverge también. Será necesario entonces tomar otras generatrices.

Consideremos las generatrices \tilde{g}_1 y \tilde{g}_2 dadas anteriormente:

$$f_1(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = \tilde{g}_1(x, y) = \frac{-x^2 + 4x + y - 0.5}{2},$$

$$f_2(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \tilde{g}_2(x, y) = \frac{-x^2 - 4y^2 + 11y + 4}{11}.$$

Consideremos la sucesión obtenida a partir de estas:

$$p_{k+1} = \tilde{g}_1(p_k, q_k) = \frac{-p_k^2 + 4p_k + q_k - 0.5}{2}, \quad k \geq 0,$$

$$q_{k+1} = \tilde{g}_2(p_k, q_k) = \frac{-p_k^2 - 4q_k^2 + 11q_k + 4}{11}, \quad k \geq 0,$$

tomando alguna aproximación inicial (p_0, q_0) .

Código en MATLAB: las generatrices G2.m

```
function Y = G1(X)
% Función generatriz para del SENL Punto Fijo
% ENTRADA: X = [ X(1) X(2) ] vector fila de dos componentes
% SALIDA: Y = [ Y(1) Y(2) ] vector fila de dos componentes
Y(1) = ( -X(1)^2 + 4*X(1) + X(2) - 0.5) / 2;
Y(2) = ( -X(1)^2 - 4*X(2)^2 + 11*X(2) + 4) / 11;
end
```

```

>> [Pk,iter] = PuntoFijo('G2',[2 0],1e-9,30)
Metodo iterativo de Punto Fijo
Iter      Pk          Qk
0         2.0000000  0.0000000
1         1.7500000  0.0000000
2         1.7187500  0.0852273
3         1.7530629  0.1776676
4         1.8083448  0.2504410
5         1.8568547  0.2939870
6         1.8867482  0.3127486
7         1.8999613  0.3171972
8         1.9035947  0.3160782
9         1.9033921  0.3139605
10        1.9023137  0.3123981
11        1.9014277  0.3115647
12        1.9009241  0.3112267
13        1.9007053  0.3111394
14        1.9006400  0.3111474
15        1.9006375  0.3111762
16        1.9006517  0.3111994
17        1.9006646  0.3112124
18        1.9006724  0.3112180
19        1.9006760  0.3112196
20        1.9006772  0.3112196
21        1.9006773  0.3112192
22        1.9006771  0.3112189
23        1.9006769  0.3112187
24        1.9006768  0.3112186
25        1.9006767  0.3112186
26        1.9006767  0.3112186
27        1.9006767  0.3112186
28        1.9006767  0.3112186
29        1.9006767  0.3112186
30        1.9006767  0.3112186
Resultado final:  1.9006767 0.3112186

```

¡CONVERGE!

En este caso, observamos que si bien el esquema corta por número de iteraciones, las aproximaciones sucesivas generadas por G2.m convergen a la otra raíz partiendo del mismo punto de arranque que en el caso con G1.m. Podemos verificarlo evaluando nuestros campos (f_1, f_2) en el valor aproximado (p^*, q^*) .

Definición (Punto fijo). *Un punto fijo de un sistema de ecuaciones bidimensional:*

$$\begin{cases} x = g_1(x, y) \\ y = g_2(x, y) \end{cases}$$

es un punto $(p^*, q^*) \in \mathbb{R}^2$ del dominio de g_1 y de g_2 , y donde:

$$\begin{aligned} p^* &= g_1(p^*, q^*) \\ q^* &= g_2(p^*, q^*) \end{aligned}$$

siendo g_1 y g_2 son campos escalares y $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Para las funciones del sistema de ecuaciones bidimensional, el **esquema de iteración de punto fijo** es:

$$\begin{cases} p_{k+1} = g_1(p_k, q_k) & k \geq 0 \\ q_{k+1} = g_2(p_k, q_k) & k \geq 0 \end{cases}$$

para cierto (p_0, q_0) inicial.

Definición (Punto fijo). *Análogamente, un punto fijo del sistema n -dimensional:*

$$\mathbf{x} = \mathbf{G}(\mathbf{x})$$

es un punto $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in \mathbb{R}^n$ del dominio de \mathbf{G} , y donde:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{G}(\mathbf{x}^*)$$

siendo $\mathbf{G} = (g_1(\mathbf{x}), \dots, g_n(\mathbf{x}))$ vector de funciones y $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Análogamente, para el sistema de ecuaciones n -dimensional, el **esquema de iteración de punto fijo** es:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{G}(\mathbf{x}_k) \quad k \geq 0$$

siendo $\mathbf{G} = (g_1, \dots, g_n)$, $\mathbf{x}_k = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$ y \mathbf{x}_0 inicial.

A continuación veremos algunas condiciones suficientes de carácter local para garantizar la convergencia del método de punto fijo.

Teorema 6.5.3. Caso bidimensional. Sean las funciones g_1 y g_2 con derivadas parciales continuas en un dominio que contiene un punto fijo en (p^*, q^*) . Sea (p_0, q_0) “suficientemente cerca” de (p^*, q^*) y se satisface:

$$\left| \frac{\partial g_1(x, y)}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial g_1(x, y)}{\partial y} \right| < 1$$

$$\left| \frac{\partial g_2(x, y)}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial g_2(x, y)}{\partial y} \right| < 1$$

para todo punto (x, y) en un entorno de (p^*, q^*) . Entonces la iteración de punto fijo genera una sucesión $\{(p_k, q_k)\}_{k \geq 0}$ convergente al punto fijo (p^*, q^*) .

Demostración. Consultar [MaFi2000]. □

Si las condiciones de acotación no se cumplen entonces la iteración de Punto Fijo podría diverger o bien converger.

Definición (La matriz jacobiana). Sean $f_1(x, y)$ y $f_2(x, y)$ con derivadas parciales continuas. Definimos en cada (x, y) la **matriz Jacobiana** $\mathbf{J}(x, y)$ como:

$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{bmatrix} \nabla f_1(x, y) \\ \nabla f_2(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Análogamente, si $f_1, \dots, f_m \in C^1(\Omega)$ y $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ definimos:

$$\mathbf{J}(x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} \nabla f_1(\mathbf{x}) \\ \nabla f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Ahora sí podemos enunciar el teorema en el caso n-dimensional.

Teorema 6.5.4. Caso n-dimensional. Sean las funciones $\mathbf{G} = (g_1, \dots, g_n)$ con derivadas parciales continuas en un dominio que contiene un punto fijo \mathbf{x}^* . Sea \mathbf{x}_0 suficientemente cerca de \mathbf{x}^* , y se satisface que:

$$\|\mathbf{J}(\mathbf{x}^*)\|_\infty < 1$$

para todo punto (x, y) en un entorno de \mathbf{x}^* . Entonces la iteración de punto fijo

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{G}(\mathbf{x}_k), \quad k \geq 1$$

genera una sucesión $\{\mathbf{x}_k\}_{k \geq 0}$ convergente al punto fijo \mathbf{x}^* .

Demostración. Consultar [MaFi2000]. □

Ejemplo 6.5.6. Con las primeras generatrices de $G1.m$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial g_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial g_1}{\partial y} \right| &= |x| + \left| \frac{-1}{2} \right| < 1 \\ \left| \frac{\partial g_2}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial g_2}{\partial y} \right| &= \left| \frac{-x}{4} \right| + |-y + 1| < 1. \end{aligned}$$

Analíticamente podemos hallar una **región de convergencia**:

$$|x| < 0.5 \quad |y - 1| < 0.875$$

Inicializando en el punto $(p_0, q_0) = (0, 1)$ tenemos garantizada la convergencia al punto fijo aproximado $(-0.2222146, 0.9938084)$. Pero inicializando en $(p_0, q_0) = (2, 0)$ no podemos garantizar la convergencia (en nuestro caso diverge).

Ejemplo 6.5.7. Con las segundas generatrices de $G2.m$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \tilde{g}_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \tilde{g}_1}{\partial y} \right| &= |-x + 2| + \left| \frac{1}{2} \right| < 1 \\ \left| \frac{\partial \tilde{g}_2}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \tilde{g}_2}{\partial y} \right| &= \left| \frac{-2x}{11} \right| + \left| \frac{-8}{11}y + 1 \right| < 1. \end{aligned}$$

Analíticamente podemos hallar otra **región de convergencia**:

$$|x - 2| < 0.5$$

$$\frac{|x|}{4} + |y - 1| < 1$$

Inicializando en $(p_0, q_0) = (2, 0)$ no podemos garantizar la convergencia, pero aún así converge al punto fijo $(1.9006767, 0.3112186)$.

6.6 Solución numérica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

6.6.1 Introducción

Muchos fenómenos físicos de la ciencia y la ingeniería pueden ser descriptos matemáticamente por *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)* y *Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP)*. La mayoría de estos problemas diferenciales no pueden resolverse *explícitamente* pues no podemos encontrar una expresión exacta de la solución. Se vuelve necesario entonces, disponer de métodos numéricos específicos que *aproximen* la solución de estos problemas.

Ejemplo 6.6.1. *Un ejemplo no trivial aparece en la dinámica de poblaciones. Un sistema de EDO no lineales a resolver que surge de las conocidas ecuaciones de Lotka-Volterra es:*

$$\begin{cases} x' = f(t, x, y) = x - xy - \alpha x^2, & x = x(t), y = y(t) & t \in [0, T] \\ y' = g(t, x, y) = xy - y - \beta y^2, \\ x(t_0) = x_0, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

El objetivo de esta sección es estudiar el *Método de Euler* para EDO dado que nos sirve para ilustrar conceptos utilizados en métodos más avanzados. Este método es fácil de implementar pero ineficiente computacionalmente debido al error que genera.

Recordemos previamente algunas nociones:

Definición (Problema de Valores Iniciales (PVI)). *Un Problema de Valores Iniciales es de la forma:*

$$\begin{cases} y' = f(t, y) & t \in [a, b] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

conformado por una **ecuación diferencial** y una **condición inicial**.

Definición (Solución de un PVI). *Una solución de un PVI en el intervalo $[a, b]$ es una función derivable $y = \phi(t)$ tal que:*

$$\begin{cases} \phi'(t) = f(t, \phi(t)) & t \in [a, b] \\ \phi(t_0) = y_0 \end{cases}$$

es decir, satisface tanto la ecuación diferencial como la condición inicial.

Ejemplo 6.6.2. *Consideremos el PVI*

$$\begin{cases} y' = \frac{t-y}{2} & t \in [0, 5] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Aplicando técnicas conocidas puede ver que:

$$\phi(t) = 3e^{-t/2} + t - 2$$

es solución de este PVI.

Si modificamos la **condición inicial** $y(0) = 4$, obtenemos como solución

$$\phi(t) = 6e^{-t/2} + t - 2.$$

Usando técnicas de *Cálculo Matemático* conocidas, la solución general del PVI será de la forma

$$\phi(t) = ce^{-t/2} + t - 2,$$

donde la constante $c = y_0 + 2 \in \mathbb{R}$ depende de la condición inicial. Todas estas funciones son soluciones del PVI dado que satisfacen la ecuación diferencial y la condición inicial. Algunas gráficas se muestran en la siguiente Figura 6.31.

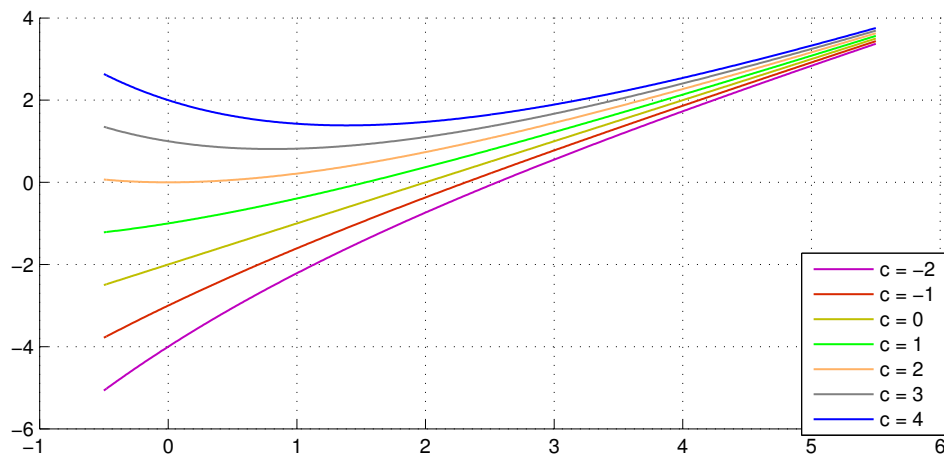


Figura 6.31: Familia de soluciones de distintos PVI

Notemos que como la solución depende de un parámetro, en la medida que variamos dicho parámetro se van “moviendo” las curvas soluciones del PVI. Cuando traducimos esto a la solución de un modelo matemático de un problema físico, observamos que la condición inicial nos fija la curva que relaciona una variable independiente (como el tiempo t), y otra dependiente (como la posición o una temperatura). Esta condición inicial medida al comienzo de nuestro experimento y que sería parte de la data de nuestro problema, determina la solución final que es la descripción final de nuestro modelo físico.

6.6.2 Interpretación geométrica: el campo de direcciones

Suele ocurrir que *a priori* no conozcamos la solución de nuestro problema o bien no podamos encontrarla por métodos clásicos conocidos. En ese caso, podemos ayudarnos a tener una descripción de la solución usando el *campo de direcciones*.

Un **campo de direcciones** es una gráfica del plano cartesiano tal que en cada punto (t, y) del rectángulo $R = \{(t, y) : a \leq t \leq b, c \leq y \leq d\}$ representamos la pendiente de la solución del PVI $y = y(t)$ dado por la fórmula implícita $m = f(t, y(t))$. Es decir, para una cantidad finita de valores $m_{i,j} = f(t_i, y_j)$ representamos un vector pendiente a la solución que pasa por el punto (t_i, y_j) para $i = 1, \dots, m$ y $j = 1, \dots, m$.

Código en Matlab: *CampoDirec.m*

```
function CampoDirec(xmin,xmax,ymin,ymax,fpvi)
% Función para graficar un campo de direcciones
% ENTRADA
% xmin : valor mínimo del eje de abscisas
% xmax : valor máximo del eje de abscisas
% ymin : valor mínimo del eje de ordenadas
% ymax : valor máximo del eje de ordenadas
% fpvi : función que define mi PVI  $y' = f(t,y)$ 
[T,Y] = meshgrid(xmin:xmax,ymax:-1:ymin);
dT = ones(xmax-xmin+1,ymax-ymin+1)';
dY = fpvi(T,Y);
figure, quiver(T,Y,dT,dY), hold on, grid on
legend('campo de direcciones')
end
```

En la **Ventana de Comandos** llamamos:

```
>> fpvi = inline('(t-y)/2','t','y');
>> CampoDirec(0,5,0,5,fpvi)
```

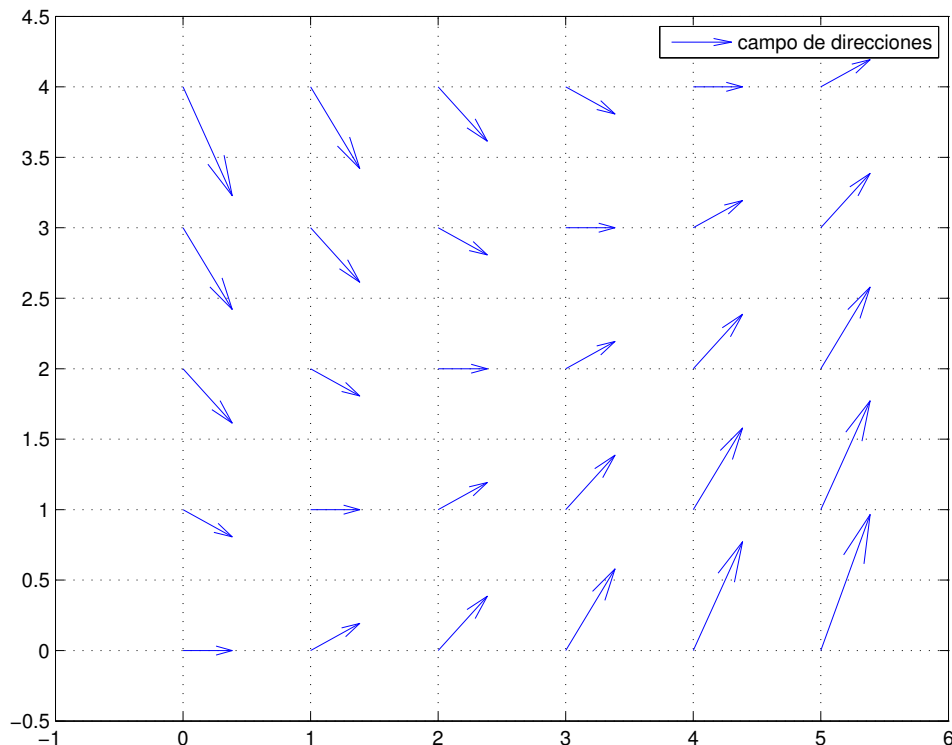


Figura 6.32: Campo de direcciones de $y' = f(t, y) = \frac{t-y}{2}$

En la Figura 6.32 se observa la gráfica del campo de direcciones del PVI original realizado con la función *CampoDirec.m* en MATLAB.

6.6.3 Existencia y unicidad de solución de un PVI

Definición. Dado un rectángulo

$$R = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq t \leq b, c \leq y \leq d\}$$

donde supongamos que $f(t, y)$ es continua en R . Decimos que la función f verifica la **condición de Lipschitz** con respecto a su variable y en R , si existe una constante $L > 0$ tal:

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

para cualesquiera $(t, y_1), (t, y_2) \in R$.

La constante L se llama **constante de Lipschitz de f** y decimos que f es una **función Lipschitziana**.

Teorema 6.6.1. Supongamos que $f(t, y)$ está definida en el rectángulo R . Si existe una constante $L > 0$ tal que

$$|f_y(t, y)| \leq L$$

para todo $(t, y) \in R$, entonces f es Lipschitziana respecto a su variable y en R , siendo L la constante de Lipschitz.

Demostración. Sean $y_1 < y_2$ en el intervalo (c, d) . Fijando t en el intervalo (a, b) y usando el Teorema del Valor Medio, existe ξ con $y_1 < \xi < y_2$ tal que

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, \xi)(y_1 - y_2) \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, \xi) \right| |(y_1 - y_2)| \leq L|y_1 - y_2|.$$

Ejemplo 6.6.3. En nuestro PVI anterior, tenemos que: □

$$|f_y(t, y)| = \left| \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{t-y}{2} \right) \right| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow L = \frac{1}{2} \quad (\text{f Lipschitziana}) \blacktriangle$$

Teorema 6.6.2. Existencia y unicidad de solución de un PVI. Supongamos que $f(t, y)$ es continua en el rectángulo

$$R = \{(t, y) : a \leq t \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

Si f es Lipschitziana respecto a su variable y en R y $(t_0, y_0) \in R$, entonces el PVI:

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

tiene solución única $y = \phi(t)$ en algún intervalo $t \in [t_0, t_0 + \delta]$.

Demostración. Consultar [Codd1968]. □

Por tanto, podemos asegurar que nuestro PVI original tiene solución única. Ahora bien, aún sabiendo que existe y es única, ¿cómo hacemos para hallarla en los casos en que no podamos obtener una “expresión cerrada” la por métodos clásicos y conocidos del Análisis Matemático? En ese caso, recurriremos a “aproximar” la solución.

6.6.4 El método de Euler

Consideremos el PVI en su forma general

$$\begin{cases} y' = f(t, y), & t \in [a, b], \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Asumimos que f satisface la condición de Lipschitz en la variable y . El método de Euler no se usa en práctica debido a que la aproximación de la solución que genera acumula errores considerables. Estudiaremos este método debido a que su *implementación* y su *análisis del error* cometido en este método son más fáciles de entender que en otros métodos más exactos pero más complejos.

Es importante remarcar que no vamos a hallar una función derivable ϕ que resuelva el PVI, sino que buscaremos un *conjunto finito de puntos* del plano cartesiano:

$$\{(t_k, y_k)\} \quad k = 1, \dots, n$$

que sean *aproximaciones* de la solución $y = \phi(t)$ evaluada en los puntos t_k , esto es,

$$y_k \approx \phi(t_k) \quad k = 1, \dots, n.$$

Para construir dicho conjunto de puntos que verifiquen “aproximadamente” la EDO, primero particionamos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos iguales:

$$t_k = a + kh \quad k = 0, 1, \dots, n$$

siendo h el **tamaño del paso**

$$h = \frac{b - a}{n}.$$

Asumiendo y, y', y'' continuas en el intervalo (a, b) y haciendo el desarrollo de Taylor de y centrado en $t = t_0$, tenemos que:

$$y(t) = y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0) + \frac{y''(\xi)}{2!}(t - t_0)^2$$

donde ξ está entre t y t_0 .

Evaluando esta expresión en $t = t_1$, siendo $h = t_1 - t_0$ el tamaño del paso:

$$y(t_1) = y(t_0) + hy'(t_0) + \frac{y''(\xi_1)}{2!}h^2$$

donde ξ_1 está entre t_1 y t_0 .

Como en $t = t_0$ se satisface que $y'(t_0) = f(t_0, y(t_0))$, resulta:

$$y(t_1) = y(t_0) + hf(t_0, y(t_0)) + \frac{y''(\xi_1)}{2!}h^2.$$

Entonces, si el tamaño del paso h es “suficientemente pequeño”, podemos despreciar el último término del desarrollo de Taylor que tiene h^2 , obteniendo así

$$y(t_1) \approx y(t_0) + hf(t_0, y(t_0)).$$

Esta expresión se conoce como **aproximación de Euler**

Si repetimos este proceso en cada subintervalo, generamos una sucesión de puntos $\{y_k\}$ que aproximan la solución del PVI evaluada en esos puntos:

$$\begin{aligned} y_1 &:= y_0 + hf(t_0, y_0) \approx y(t_1) \\ y_2 &:= y_1 + hf(t_1, y_1) \approx y(t_2) \\ &\vdots \\ y_n &:= y_{n-1} + hf(t_{n-1}, y_{n-1}) \approx y(t_n) \end{aligned}$$

En general, el Método de Euler es:

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k), \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

siendo $t_{k+1} = t_k + h$ para $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Ejemplo 6.6.4. *En nuestro PVI anterior, tenemos que:*

$$y_{k+1} = y_k + h \frac{(t_k - y_k)}{2} = \frac{h}{2}t_k + \left(1 - \frac{h}{2}\right)y_k \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

siendo $t_{k+1} = t_k + h$ para $k = 0, 1, \dots, n-1$.

6.6.5 Descripción geométrica

Si hacemos el desarrollo de Taylor de primer orden en el punto t_0 y evaluamos dicho polinomio lineal en t_1 , geoméricamente es como si en el punto (t_0, y_0) calculamos el valor de la pendiente $m_0 = f(t_0, y_0)$ y nos movemos horizontalmente una distancia h y verticalmente una distancia $hf(t_0, y_0)$ y nos desplazamos por la curva $y(t)$ terminando en el punto (t_1, y_1) . Si bien (t_1, y_1) no es un punto de nuestra solución, es la primer aproximación generada por el método de Euler.

Repetimos el procedimiento en (t_1, y_1) y calculamos la pendiente $m_1 = f(t_1, y_1)$. Nos desplazamos en la recta tangente un desplazamiento vertical de $hf(t_1, y_1)$ que nos lleva a (t_2, y_2) y así sucesivamente hasta llegar hasta (t_n, y_n) .

Código en MATLAB: *Euler.m*

```

function [t,y] = Euler(fnom,a,b,y0,n)
% Método de Euler para aproximar la solución de un PVI
% ENTRADA
% fnom : nombre función que define la EDO y'=f(t,y)
% a,b : extremos del intervalo [a,b]
% y0 : condición inicial y(t0)=y0
% n : número de pasos
% SALIDA
% t : vector de abscisas
% y : vector de ordenadas
    fprintf('Método de Euler \n')
    fprintf('k      t_k      y_k \n')
    h = (b-a)/n;
    t = a:h:b;
    y(1) = y0;
    fprintf('%3.0f %10.6f %10.6f \n',0, t(1),y(1))
    for k=1:n
        y(k+1) = y(k) + h*fnom(t(k),y(k));
        fprintf('%3.0f %10.6f %10.6f \n',k, t(k+1),y(k+1));
    end
    fprintf('Tamaño del paso:  %12.6f \n',h);
    fprintf('Número de pasos:  %3.0f \n',n);
end

```

Ejemplo 6.6.5. Consideremos el PVI:

$$\begin{cases} y' = \frac{t-y}{2} & t \in [0, 3] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

En la **Ventana de Comandos**:

```

>> fpvi=@(t,y) (t-y)/2;
>> [t,y]=Euler(fpvi,0,3,1,6);
Metodo de Euler
k      t_k      y_k
0      0.000000    1.000000
1      0.500000    0.750000
2      1.000000    0.687500
3      1.500000    0.765625
4      2.000000    0.949219
5      2.500000    1.211914
6      3.000000    1.533936
Tamaño del paso:  0.500000
Numero de pasos:  6

```

Si aumentamos la cantidad de subintervalos (disminuimos el paso), vemos como mejora la aproximación en este caso.

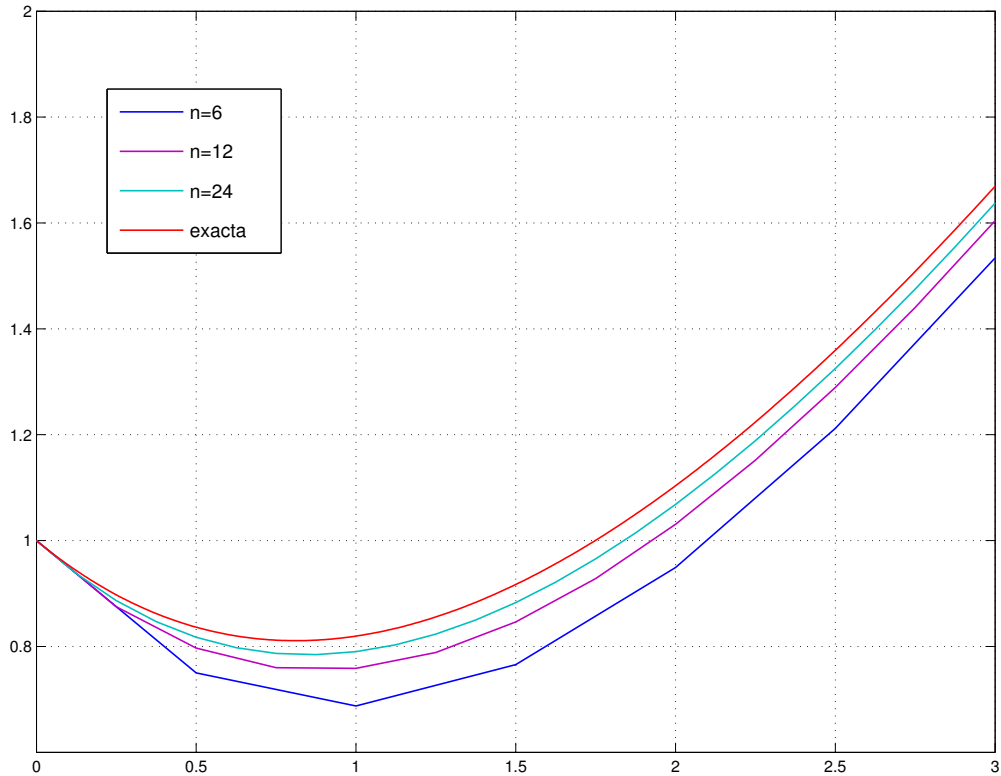


Figura 6.33: Comparación de aproximaciones usando Euler.m

6.6.6 Error en el método de Euler

Veamos que sucede con la precisión del método de Euler.

Definición. Supongamos que $\{(t_k, y_k)\}_{k=0,1,\dots,n}$ es un conjunto finito de aproximaciones numéricas a la única solución $y = \phi(t)$ de un PVI. Entonces, llamaremos el **error de truncamiento o de discretización global** e_k :

$$e_k = \phi(t_k) - y_k \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Es la diferencia entre la solución exacta y la calculada en el punto.

Y llamaremos el **error de truncamiento o de discretización local** ε_k :

$$\varepsilon_{k+1} = \phi(t_{k+1}) - y_k - hf(t_k, y_k) \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Es el error cometido en un solo paso desde el nodo t_k al t_{k+1} .

Teorema 6.6.3. Sea $y = \phi(t)$ la solución del PVI. Si $\phi(t) \in C^2[a, b]$ y $\{(t_k, y_k)\}_{k=0}^n$ son las aproximaciones generadas con el método de Euler, entonces:

$$\begin{aligned} |e_k| &= |\phi(t_k) - y_k| = o(h) \\ |\varepsilon_k| &= |y(t_{k+1}) - y_k - hf(t_k, y_k)| = o(h^2) \end{aligned}$$

Demostración. Consultar [MaFi2000]. □

Definición. El error final del intervalo $[a, b]$ se conoce como **error global final**:

$$E(\phi(b), h) = |\phi(b) - y_n| = o(h)$$

Este error se usa para estudiar el comportamiento para diferentes pasos. Si calculamos el error usando un paso h tenemos:

$$E(\phi(b), h) \approx Ch$$

Si disminuimos el paso a $h/2$ (duplicamos n):

$$E(\phi(b), h/2) \approx C \frac{h}{2} \approx \frac{1}{2}Ch \approx \frac{1}{2}E(\phi(b), h)$$

$$E(\phi(b), h/2) \approx \frac{1}{2}E(\phi(b), h)$$

Si reducimos a la mitad el tamaño del paso en el método de Euler, entonces cabe esperar que el error final global se reduzca a la mitad.

Observamos la relación entre el tamaño del paso h definido por $h = (b - a)/n$ y el error final global $|\phi(b) - y_n|$ para las aproximaciones del método de Euler

h	n	$ \phi(b) - y_n $	$o(h) \approx Ch$
1.000000	3	0.294390	0.256000
0.500000	6	0.135455	0.128000
0.250000	12	0.065139	0.064000
0.125000	24	0.031961	0.032000
0.062500	48	0.015833	0.016000
0.031250	96	0.007880	0.008000
0.015625	192	0.003931	0.004000

En la medida que reducimos a la mitad h , el error final global se reduce a la mitad.

6.6.7 Otros métodos para resolver EDO

1. Métodos de un paso

- Método Euler Modificado
- Método de Taylor
- Método de Runge-Kutta (RK4)
- Método de Runge-Kutta-Fehlberg (RKF45)

2. Métodos multipasos

- Método de Adams-Bashforth-Moulton
- Método de Milne-Simpson
- Método de Hamming

Muchos de estos métodos pueden ser extendidos para aproximar soluciones de **Sistemas de EDO**. También existen métodos específicos para resolver **Problemas de Contorno de EDO**. El campo es un campo de investigación, de desarrollo y de aplicaciones nuevas totalmente abierto con nuevos problemas y desafíos todo el tiempo.

6.7 Ejercicios propuestos

6.7.1 Introducción a MATLAB

Funciones intrínsecas en MATLAB:

1. Asuma que se encuentran definidas en memoria las siguientes variables:

$$v=[5; 0; 4; 5; -2; 1; 7] \quad x=[4, 1] \quad y=[2 \ 5] \quad z=[3 \ 0 \ 1; 1 \ 2 \ 6; 0 \ -1 \ 7]$$

Sin usar MATLAB, indique qué resultados se obtienen al ejecutar los siguientes comandos:

- | | |
|--------------------------------|---------------------------|
| (a) <code>min(v(2:5:7))</code> | (f) <code>x'*y</code> |
| (b) <code>size(z')</code> | (g) <code>z*v(1:3)</code> |
| (c) <code>ones(x)</code> | (h) <code>[z v]</code> |
| (d) <code>x*y'</code> | (i) <code>z(y)</code> |
| (e) <code>y*y</code> | (j) <code>sum(y+2)</code> |

Si la respuesta es un vector o matriz, indique sus elementos usando notación de MATLAB. Si algún comando es erróneo, analice su causa.

2. Asuma que se encuentran definidas en memoria las siguientes instrucciones:

```

a = [ 1, 5, -1]
b = 3:-2:-2
c = [4 6 -1 0 -6 7 9 1 5]
d = [-1 1 5; 2 3 0; 1 5 -2]
    
```

Escriba un único comando para resolver las siguientes instrucciones:

- (i) Obtener el máximo de cada fila de la matriz **d**.
- (ii) Obtener la suma de los valores absolutos de todos los elementos de **d**.
- (iii) Obtener la suma de los elementos de posición par del vector **c**.
- (iv) Calcular el mínimo valor entre los elementos de posición 3,4,5 y 6 de **c**.
- (v) Calcular la primer columna del producto externo de **a** por **b**.
- (vi) Eliminar el cuarto elemento del vector **c**.
- (vii) Generar un vector llamado **z** con los elementos de posición impar del vector **c**.
- (viii) Agregar una cuarta columna a la matriz **d** cuyos elementos sean -2,3 y 0.
- (ix) Armar una matriz diagonal con la diagonal de la matriz **d**.
- (x) Calcular la norma del vector **a-b**.

Funciones y scripts definidos por usuarios en MATLAB:

3. (a) Escriba la función `suma.m` que reciba como argumentos dos vectores fila y devuelva como resultado el *vector columna suma*.
- (b) Modifique la función anterior de modo que los vectores de entrada sean filas o columna pero siga devolviendo un vector columna.
4. (a) Escriba una función llamada `cuad.m` que calcule las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$, recibiendo como argumentos de entrada los coeficientes y devolviendo como salida las raíces:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

- (b) Modifique dicha función para que se imprima por pantalla indicando si las raíces son reales, reales iguales (en cuyo caso solo imprima una) o complejas conjugadas.
5. (a) Genere el script `res_sel.m` que lea una matriz cuadrada $n \times n$ **A** almacenada en el archivo de datos `matriz.dat` y un vector $n \times 1$ **b** desde el `rhs.dat`.
- (b) Resuelva el sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ usando el operador aritmético *barra invertida* `\`, y guarde el vector solución **x** en un archivo de datos de salida `sol.dat`.
6. (a) Escriba la función `multi.m` que reciba como argumentos dos funciones y un vector de abscisas, y devuelva como resultado un vector con la multiplicación de ambas funciones evaluadas en dichas abscisas.
- (b) Calcule el producto de f_1 y f_2 del Ej. 7 en el vector $x = [-1, 0, 1]$ usando `multi.m`.

Ploteos en MATLAB:

7. (a) Escriba m-archivos para evaluar cada una de las siguientes funciones:
- | | |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> • $f_1(x) = x^3 - x - 1$ • $f_2(x) = e^{-x} - x$ | <ul style="list-style-type: none"> • $f_3(x) = \cos(2x) - \sin(x)$ • $f_4(x) = x \ln(x)$ |
|---|--|
- (b) Grafíquelas en el intervalo $[-3, 3]$, todas en la misma gráfica y con distintos colores.
- (c) Repita el item (b) pero graficando cada función en distintas gráficas de la misma figura usando el comando `subplot`.
8. (a) Defina la función $f(x) = x^2 + 2 \sin(x) - 1$ utilizando `inline`.
- (b) Defina la función $g(x) = \frac{1}{x^2} + 2 \cos(x)$ como función anónima `g=@(x)`.
- (c) Grafique ambas funciones f y g en el intervalo $[0.1, 3]$ diferenciando por color.
9. (a) Grafique el polinomio $p(x) = x^5 + 3x^2 - 2$ definido en el intervalo $[0, 2]$ utilizando una discretización de 401 puntos (use `polyval` para evaluarlo).
- (b) En la misma gráfica, marque los puntos de p evaluados en $x = 0, 0.5, 1, 1.5, 2$ con asteriscos de distintos colores.
10. (a) Realice las gráficas 3D de la función $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ en el dominio $[-1, 1] \times [-1, 1]$ mediante los comandos `mesh` y `surf`.
- (b) Realice otra gráfica 2D que muestre las curvas de nivel de dicha función para distintos niveles.

6.7.2 Errores en los Métodos Numéricos

Errores de truncamiento y de redondeo:

1. Considere la función:

$$f(x) = \frac{1}{1 + 2x} - \frac{1 - x}{1 + x}$$

- (a) Explique por qué evaluando numéricamente $f(x)$ cerca de $x \approx 0$ puede ser inexacto.
- (b) Reescriba $f(x)$ de modo de evitar el error generado en a).
- (c) Plotee la función $f(x)$ usando las 2 expresiones en la misma gráfica para los intervalos $[-1 \times 10^{-1}, 1 \times 10^{-1}]$, $[-1 \times 10^{-7}, 1 \times 10^{-7}]$ y $[-1 \times 10^{-8}, 1 \times 10^{-8}]$. Utilice un paso de `paso = 1e-10` para la discretización. *Sug.* Use el comando `subplot`.
2. (a) Modifique el script `ZoomPoli.m` para que plotee el polinomio de sexto grado de la siguiente manera algebraicamente equivalente a la ya implementada:

$$p(x) = (x - 1)^6$$

¿Observa el mismo fenómeno numérico de oscilación que aparecía originalmente?

- (b) Modifique el script `ZoomPol1.m` para que plotee el polinomio cúbico de las siguientes dos maneras algebraicamente equivalentes:

$$p(x) = (x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

¿Observa el mismo fenómeno numérico que en el ítem a)?

- (c) Teniendo en cuenta a) y b), explique el fenómeno numérico de oscilación original.

3. *Fórmula Mejorada para la Resolución de la Ecuación General de Segundo Grado.*

Considere la ecuación $x^2 - 40x + 0.25 = 0$.

- (a) Halle a mano las raíces de la ecuación con la *resolvente* utilizando aritmética de 4 dígitos y redondeo por truncamiento.
- (b) Demuestre que las raíces de una ecuación general de 2do. grado $ax^2 + bx + c = 0$ pueden obtenerse a través de las siguientes fórmulas:

$$x_1 = \frac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}, \quad x_2 = \frac{-2c}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

- (c) Halle a mano las raíces de la ecuación con las fórmulas presentadas en el apartado anterior, utilizando aritmética de 4 dígitos y redondeo por truncamiento.
- (d) Compare errores relativos porcentuales de los resultados en los apartados a) y c). ¿Por qué se producen estas diferencias? Calcule valores exactos usando MATLAB.

4. Considere la ecuación $x^2 - 1000000.000001x + 1 = 0$.

- (a) Utilice la función `cuad.m` del ejercicio 4(a) de la sección 6.7.1 para hallar sus raíces.
- (b) Usando las fórmulas mejoradas del Ejercicio 2, implemente la función `cuad_mejor.m` para calcular raíces.
- (c) Compare los resultados obtenidos en a) y b) y obtenga conclusiones.

5. (a) Modifique el script `TaylorExp.m` para transformarlo en un *m-file* para aproximar la función exponencial e^x mediante su polinomio de Taylor centrado en $a = 0$:

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!},$$

recibiendo como parámetros de entrada x y n (número de términos de la suma).

- (b) Modifique la función anterior para que imprima en columnas el valor de las sumas parciales, el término que se está sumando y el error absoluto cometido. Use la función intrínseca `exp` de MATLAB para calcular el error.
- (c) Corra los casos $x = 1, 10, 100$ cada uno para $n = 10, 15, 20$. Analice el error cometido.

6. (a) Calcule en forma exacta $\sin(\pi/2 + 2\pi 10^j)$, con j entero positivo.

- (b) Calcule en MATLAB la misma expresión, para $j = 1, 10, 20, 50, 100, 1000$.

- (c) Intente dar una explicación a los resultados obtenidos.

7. Analice la función `SerieSeno` y las salidas por *Ventana de Comandos* en respuesta de:
- (a) `SerieSeno(pi/4,5e-9)`,
 - (b) `SerieSeno(pi,5e-9)`,
 - (c) `SerieSeno(5*pi,5e-9)`.
8. (a) Usando la función `SerieSeno.m`, grafique el error total cometido para $x \in [0, \pi/2]$ usando 6 y 15 términos no nulos del polinomio de Taylor del $\text{sen}(x)$ respectivamente. Considere que la función intrínseca `sin` de MATLAB devuelve el valor exacto del seno. ¿Qué controla el error total en cada caso? *Sugerencia:* Vea las transparencias.
- (b) Repita el item anterior para la función exponencial desarrollada en el Ejercicio 5.

Representación en aritmética de punto flotante:

9. Usando la máquina virtual que aparece en la Tabla de las transparencias con mantisa binaria de 4 bits, 8 posibles exponentes y redondeo simétrico (si x_1 y x_2 son los números de la Tabla más próximos al número x que quiero representar, entonces x redondea a x_1 sólo si $x < \frac{x_1+x_2}{2}$, caso contrario se redondea a x_2), evalúe las siguientes expresiones:
- (a) 1.1
 - (b) `eps`
 - (c) 20
 - (d) `8 + 5 * eps`
 - (e) `(8 + 3 * eps) + 3 * eps`

Ejemplo: $(5 + 3 * \text{eps}) - 4 * \text{eps} = (5 + 0.375) - 0.5 = \mathbf{5,375} - 0.5 \xrightarrow{\text{redondeo}} 5.5 - 0.5 = 5$.
¿Cuanto vale el epsilon máquina en nuestro caso?

10. Anticipe los resultados de evaluar las siguientes expresiones. Luego verifique en MATLAB.
- (a) `1 + eps/3 + eps/3 + eps/3`
 - (b) `1 + (eps/3 + eps/3) == 1`
 - (c) `1e-16 + 1 - 1e-16 == 1e-16 - 1e-16 + 1`
 - (d) `1 + eps/2 - 1` (¿hay redondeo simétrico?)

6.7.3 Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales

Métodos Directos:

1. Considere el sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 12 & 11 & 5 \\ -2 & 9 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 17 \\ 18 \end{bmatrix}.$$

- (a) Resuelva a mano con el método de Gauss con pivoteo parcial escalado.
- (b) Compruebe sus resultados utilizando la función `Gauss.m` en MATLAB.

2. Considere el siguiente sistema lineal 2x2:

$$\begin{bmatrix} 17 & 5 \\ 1.7 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 2.2 \end{bmatrix}$$

- (a) Resuelva a mano dicho sistema con eliminación Gaussiana. ¿Cuántas soluciones hay?
 - (b) Modifique la función `Gauss.m` para que imprima por pantalla la matriz aumentada en cada paso y resuelva en máquina nuevamente el sistema.
 - (c) En la salida de pantalla, ¿resulta nula la última fila de la matriz ampliada? Explique el error numérico cometido.
3. (a) Desarrolle en MATLAB un m-file que tome como argumento una matriz cuadrada triangular superior \mathbf{A} , el vector lado derecho \mathbf{b} , y devuelva una solución \mathbf{x} mediante una sustitución regresiva (*backward substitution*).
- (b) Repita lo anterior para una sustitución progresiva (*forward substitution*).

Sugerencia: Ayúdese con la función `DescompLU.m`.

4. El siguiente SEL $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ admite ser resuelto utilizando factorización triangular, siendo: Se sabe que la matriz de coeficientes A admite ser factorizada con matrices L , U y P siendo

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Reconstruya la matriz de coeficientes A y determine la solución del SEL siendo $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

- (a) Por el método de Gauss con pivoteo parcial.
- (b) Por factorización LU .

5. Para cada una de las siguientes matrices:

- i) $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 12 & 2 \end{bmatrix}$
- ii) $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & -5 & 1 \end{bmatrix}$
- iii) $\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} \text{eps} & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- iv) $\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 \\ 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 & 1/9 \end{bmatrix}$

Conocida como *matriz de Hilbert*
En MATLAB, `hilb(n)`

- (a) Genere un vector lado derecho \mathbf{b}_i en cada caso usando el comando `ones` de MATLAB y resuelva el SEL $\mathbf{A}_i \mathbf{x} = \mathbf{b}_i$ mediante algún método directo.
 - (b) Calcule el vector residual $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}$ en los SEL anteriores y la norma del mismo $\|\mathbf{r}\|_p$ para $p = 1, 2, \text{inf}$.
6. Para las matrices del ejercicio anterior, calcule con ayuda de MATLAB:
- (a) El número de condición $\kappa(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_p \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|_p$ utilizando el comando `inv(A)` para calcular la inversa y el comando `norm(A,p)` para la norma matricial con $p = 1, 2, \text{inf}$.
 - (b) Compare los resultados anteriores usando el comando `cond(A)` de MATLAB.
¿Están bien condicionadas las matrices?
 - (c) ¿Observa alguna relación entre el vector residual \mathbf{r} y el número de condición $\kappa(\mathbf{A})$ de las matrices obtenido?

Métodos Iterativos:

7. Considere el SEL

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 4 \end{cases}$$

- (a) Calcule a mano las dos primeras iteraciones del *método de Jacobi*.
 - (b) Resuelva en MATLAB utilizando la función `Jacobi.m`, tomando como aproximación inicial $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ y una tolerancia de 1×10^{-3} .
 - (c) ¿Puede asegurar la convergencia del método de Jacobi en este caso? Justifique.
 - (d) Repita los 3 items anteriores utilizando el *método de Gauss-Seidel*.
8. (a) Compare las implementaciones en MATLAB de `Jacobi.m` y `GaussSeidel.m`
 (b) Modifique ambas para que se imprima por pantalla la iteración k-ésima, la aproximación, el vector error (`iter, x, err`).
9. Compare la velocidad de convergencia en la resolución de los siguientes SELs,

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \begin{cases} -x + 3y = 1 \\ 6x - 2y = 2 \end{cases} & \text{(b)} \begin{cases} x + z = 2 \\ -x + y = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases} & \text{(c)} \begin{cases} 5x - y + z = 10 \\ 2x + 8y - z = 11 \\ -x + y + 4z = 3 \end{cases} \end{array}$$

usando `Jacobi` y `GaussSeidel`. ¿Observa algún comportamiento general?

10. Modifique los archivos `Jacobi.m` y `GaussSeidel.m` de forma que:

- (a) El criterio de parada sea la norma del *vector residual* $\|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)}\| < \text{tol}$.
- (b) La salida por pantalla sea la iteración k-ésima, la aproximación, el vector residual.

Nota: Este criterio de parada es malo debido a que el producto matricial $\mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)}$ es muy costoso de calcular en cada paso.

6.7.4 Raíces y Sistemas de Ecuaciones No Lineales (SENL)

Raíces de ecuaciones: El método de Newton-Raphson (Caso 1D)

1. Considere la función $f(x) = e^x - 3x$ para $x \in [0, 4]$.
 - (a) Determine gráficamente la cantidad de soluciones de la ecuación $f(x) = 0$.
 - (b) Halle la o las raíces aproximadas utilizando la función `NewtonRapshon.m`.
 - (c) ¿Puede garantizar la convergencia? Justifique.
2. Considere el polinomio cúbico $p(x) = 816x^3 - 3835x^2 + 6000x - 3125$.
 - (a) Plotee dicho polinomio en el intervalo $[1, 2]$. ¿Cuántas raíces observa?
 - (b) Plotee dicho polinomio en el intervalo $[1.4, 1.7]$. ¿Y ahora?
 - (c) Aproxime dichas raíces utilizando `NewtonRapshon.m` y compare los errores absolutos.
Sug. Tome como valor exacto las raíces obtenidas usando la función `roots`.
3. Considere la función $s(x) = \text{sign}(x - 2)\sqrt{|x - 2|}$ para $x \in [0, 4]$.
 - (a) Muestre que en $x = 2$ hay una raíz simple.
 - (b) Utilice `NewtonRapshonDeriv.m` para hallar esta raíz tomando como aproximación inicial $x_0 = 2.5$.
 - (c) ¿Converge el esquema iterativo? Explique qué fenómeno numérico se está dando.

Sugerencia: Para implementar la función signo utilice la función `sign` de MATLAB.

4. Resuelva las siguientes ecuaciones no lineales a través de un estudio gráfico y numérico:

a) $3x^3 + 1 = 0$	b) $\text{sen}(x + 2) = 2 + x$	c) $x^2 = \tan(x)$
-------------------	--------------------------------	--------------------
5. Se sabe que la función $f(x) = x^3 - 3x + 2$ tiene una raíz doble en $r = 1$.

- (a) Modifique `NewtonRapshon.m` para que imprima otra columna con el cociente $\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|}$ siendo $e_n = x_n - r$ el error absoluto cometido en el paso n -ésimo, y aproxime esta raíz tomando $x_0 = 1, 2$ y $\text{tol} = 1 \times 10^{-5}$. ¿A qué valor tienden esos cocientes?
- (b) Se sabe que el esquema de N-R tiene *orden de convergencia lineal* para raíces múltiples, pero puede recuperar el *orden de convergencia cuadrático* modificando el esquema así:

$$x_{n+1} = x_n - \alpha \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad n \geq 0,$$

donde α es la multiplicidad de la raíz. Modifique el esquema iterativo en su caso.

- (c) Vuelva a aproximar la raíz en las mismas condiciones que en el ítem a) pero ahora mostrando en la columna agregada $\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^\alpha}$. ¿Qué fenómeno numérico observa?

Raíces de SENLs: El método de Punto Fijo (Caso 2D)

6. Determine analíticamente los puntos fijos de cada una de las siguientes generatrices:

$$a) \begin{cases} g_1(x, y) = x - y^2 \\ g_2(x, y) = -x + 6y \end{cases} \qquad b) \begin{cases} g_1(x, y) = \text{sen}(y) \\ g_2(x, y) = -6x + y \end{cases}$$

7. Determine analíticamente las raíces de cada uno de las siguientes SENLs:

$$a) \begin{cases} f_1(x, y) = 2x + y - 6 \\ f_2(x, y) = x + 2y \end{cases} \qquad b) \begin{cases} f_1(x, y) = 3x^2 + 2y - 4 \\ f_2(x, y) = 2x + 2y - 3 \end{cases}$$

8. Dado el siguiente sistema no lineal:

$$\begin{cases} x = (8x - 4x^2 + y^2 + 1)/8, \\ y = (2x - x^2 + 4y - y^2 + 3)/4. \end{cases}$$

- (a) Usando la aproximación inicial $(p_0, q_0) = (1.1, 2.0)$, calcule dos iteraciones a mano mediante el esquema de Punto Fijo.
- (b) Realice lo mismo pero utilizando el esquema iterativo de `PuntoFijo.m`.
- (c) Grafique las curvas involucradas en el plano $z = 0$.

9. Dado el siguiente sistema no lineal:

$$\begin{cases} x = g_1(x, y) = (y - x^3 + 3x^2 + 3x)/7, \\ y = g_2(x, y) = (y^2 + 2y - x - 2)/2. \end{cases}$$

- (a) Intente hallar las soluciones con `PuntoFijo.m`.
- (b) Grafique las curvas involucradas en el plano $z = 0$ y analice las condiciones de convergencia para Punto Fijo. Indique si los procesos iterativos serán convergentes, divergentes o no puede asegurar nada en cada caso.
- (c) Proponga otras dos generatrices distintas y realice lo mismo anterior.

10. Considere el sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{cases} x^2 - y = 0.2, \\ y^2 - x = 0.3. \end{cases}$$

- (a) Grafique las curvas en el plano $z = 0$.
- (b) Utilice el método de Punto Fijo comenzando en el punto inicial $(p_0, q_0) = (1.2, 1.2)$ para aproximar una raíz.
- (c) Repita lo mismo anterior pero comenzando en $(p_0, q_0) = (-0.2, -0.2)$.
- (d) ¿Qué fenómeno observa? ¿Puede garantizar la convergencia en este caso?

6.7.5 Solución numérica de EDO

El método de Euler:

- Utilice la función `CampoDirec.m` para hallar el campo de direcciones de las siguientes EDOs en el rectángulo $R = \{(t, y) : 0 \leq t \leq 4, 0 \leq y \leq 4\}$. En las mismas figuras, grafique además las respectivas soluciones para las constantes de integración indicadas:

(a) EDO: $y' = \frac{t-y}{2}$ Solución Exacta: $\phi(t) = ce^{-t/2} + t - 2$ para $c = -3, -2, -1, 0$.

(b) EDO: $y' = 1 - e^{-t}$ Solución Exacta: $\phi(t) = e^{-t} + t + c$ para $c = -1, 0, 1, 2$.

- Usando la función `Euler.m`, resuelva los siguientes PVI. En una misma figura, grafique las aproximaciones para distintos pasos y las soluciones exactas:

(a)
$$\begin{cases} y' = -ty, & t \in [0, 5] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$
 Solución Exacta: $\phi(t) = e^{-t^2/2}$.

(b)
$$\begin{cases} y' = \frac{1}{1+t^2} - 2y^2, & t \in [0, 10] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$
 Solución Exacta: $\phi(t) = \frac{t}{1+t^2}$.

(c)
$$\begin{cases} y' = \frac{1}{4}y \left(1 - \frac{1}{20}y\right), & t \in [0, 20] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$
 Solución Exacta: $\phi(t) = \frac{20}{1+19e^{-t/4}}$.

- Usando el método de Euler, resolver el PVI siguiente:

$$\begin{cases} y' = x^2 - y, & x \in [0, 4] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

para los siguientes tamaño del paso $h = 1, 0.5, 0.25, 0.125, 0.0625$. Para cada valor de h :

- Grafique la poligonal que determinan los puntos $\{(t_j, y_j)\}_{j=0, \dots, n}$, y en la misma figura grafique la solución exacta del PVI dada por: $\phi(x) = x^2 - 2x + 2 - e^{-x}$ para $x \in [0, 4]$.
- Calcule el *error global final*, es decir:

$$E = |\phi(4) - y_n|$$

siendo y_n el último valor de la aproximación de Euler.

- Según lo que observa numéricamente, ¿en la medida que reduce el tamaño del paso a la mitad, en cuanto se reduce este error?

- Un PVI con dos soluciones.

Consideremos el siguiente PVI:

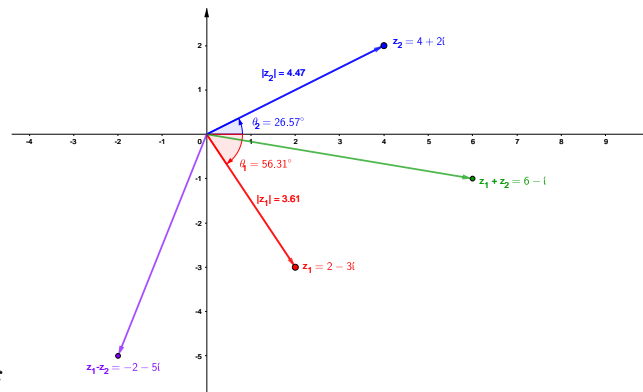
$$\begin{cases} y' = \frac{3}{2}y^{1/3}, & t \in [0, 1] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

- Verifique a mano que $\phi(t) = 0$ es una solución del PVI.
- Verifique a mano que $\phi(t) = t^{3/2}$ es otra solución del PVI.
- ¿Contradice esto el Teorema de existencia y unicidad visto?
- Utilice la función `Euler.m` para resolver este PVI. ¿Qué solución devuelve? Explique.

Respuestas a los Ejercicios propuestos

Ejercicios del Capítulo 1

1. (a) Forma binómica: $z = 4$.
Forma trigonométrica: $z = 4(\cos(0) + i\text{sen}(0))$.
Forma polar: $z = 4_0$.
Forma exponencial: $z = 4e^{i \cdot 0}$.
 - (b) Forma binómica: $z = -3$.
Forma trigonométrica: $z = 3(\cos(\pi) + i\text{sen}(\pi))$.
Forma polar: $z = 3_\pi$.
Forma exponencial: $z = 3e^{i \cdot \pi}$.
 - (c) Forma binómica: $z = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$.
Forma trigonométrica: $z = 4(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\text{sen}(\frac{\pi}{4}))$.
Forma polar: $z = 4_{\frac{\pi}{4}}$.
Forma exponencial: $z = 4e^{i \cdot \frac{\pi}{4}}$.
 - (d) Forma binómica: $z = -2i$.
Forma trigonométrica: $z = 2(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\text{sen}(-\frac{\pi}{2}))$.
Forma polar: $z = 2_{-\frac{\pi}{2}}$.
Forma exponencial: $z = 2e^{i \cdot (-\frac{\pi}{2})}$.
 - (e) Forma binómica: $z = -2 - 2i$.
Forma trigonométrica: $z = 2\sqrt{2}(\cos(-\frac{3}{4}\pi) + i\text{sen}(-\frac{3}{4}\pi))$.
Forma polar: $z = 2\sqrt{2}_{-\frac{3}{4}\pi}$.
Forma exponencial: $z = 2\sqrt{2}e^{i \cdot (-\frac{3}{4}\pi)}$.
 - (f) Forma binómica: $z = -1 + i$.
Forma trigonométrica: $z = \sqrt{2}(\cos(\frac{3}{4}\pi) + i\text{sen}(\frac{3}{4}\pi))$.
Forma polar: $z = \sqrt{2}_{\frac{3}{4}\pi}$.
Forma exponencial: $z = \sqrt{2}e^{i \cdot (\frac{3}{4}\pi)}$.
2. (a) **Gráfica.**



1-2-a.pdf

$$|z_1| = \sqrt{13}, \arg(z) = \arctan(-\frac{3}{2}) \approx -0.9828.$$

$$|z_2| = 2\sqrt{5}, \arg(z) = \arctan(\frac{1}{2}) \approx 0.4636.$$

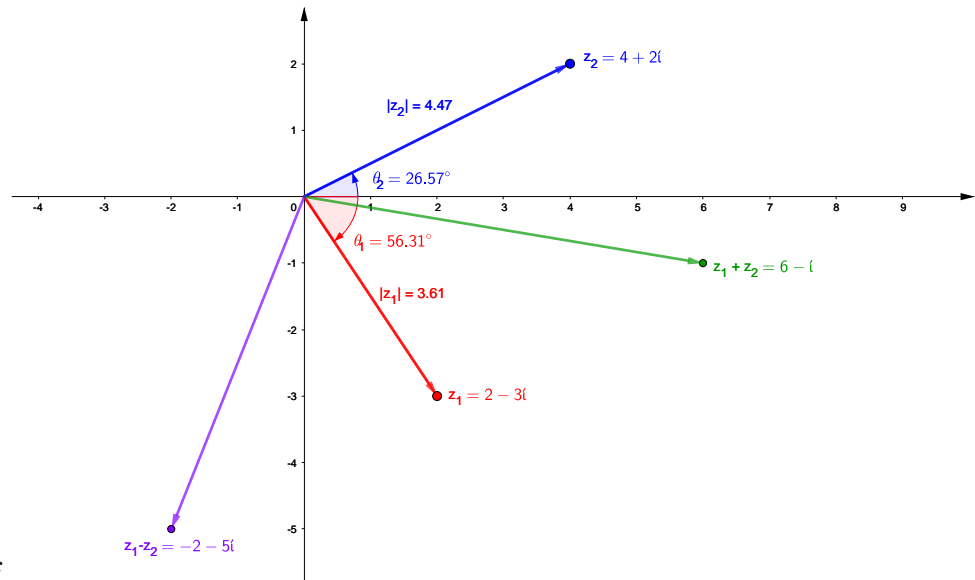
(b) Gráfica.

$$z_1 + z_2 = 6 - i, z_1 - z_2 = -2 - 5i.$$

(c) $iz_1 = 3 + 2i.$

$$iz_2 = -2 + 4i.$$

Gráfica.



1-2-a.pdf

Efectos: se produce una rotación de $\frac{\pi}{2}$ en sentido antihorario, manteniendo el módulo de z .

3. (a) $\text{Re}(3z_1 - 2z_2) = 0.$

(b) $\text{Im}(z_1 z_2 - iz_3) = -\frac{1}{2}.$

(c) $-3z_1^2 + 4z_1 - 8i = -1 - 8i.$

(d) $\frac{z_1 \bar{z}_3}{z_2} = \frac{-4 + 7\sqrt{3}}{26} + \frac{-7 - 4\sqrt{3}}{26}i.$

(e) $(\bar{z}_3)^4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1_{-\frac{2}{3}\pi}.$

- (f) $|z_1|z_3 = -\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}i$.
4. (a) $x = -3, y = -6$.
 (b) $x = \frac{3}{2}, y = -\frac{1}{2}$.
5. $Q_1 = 8, Q_2 = -8$ resultando $\tilde{S}_1 = 6 + 8i, \tilde{S}_2 = 6 - 8i$. **Gráfica.**
6. (a) $|z_1| = |A|$.
 (b) $|z_3| = |A|e^\alpha$.
 (c) $i^3 z_1 + iz_2 = (-A + B)e^{i(\frac{\pi}{2} + \beta)}$.
 (d) $|z_1 + z_2| = |A + B|$.
 (e) $|\bar{z}_3 + z_4| = e^\alpha [A^2 + B^2 + 2AB \cos(2\beta)]^{1/2}$.
 (f) $|z_2 - \rho z_2| = |1 - \rho||B|$.
7. (b) $|\dot{V}| = 220, \arg(\dot{V}) = \phi$.
 (c) Forma binómica: $\dot{V} = 220 \cos(\phi) + 220 \text{sen}(\phi)i$.
 Forma polar: $\dot{V} = 220_\phi$.
 Forma exponencial: $\dot{V} = 220e^{i\phi}$.
 Forma trigonométrica: $\dot{V} = 220(\cos(\phi) + i \text{sen}(\phi))$.
 (d) $\dot{V}_2 = 220e^{i(\phi + \frac{\pi}{2})}$.
 (e) $|\dot{V}_2| = 220 = |\dot{V}|$ y $\arg(\dot{V}_2) = \phi + \frac{\pi}{2} = \arg(\dot{V}) + \frac{\pi}{2}$, es decir que \dot{V}_2 es \dot{V}_2 rotado $\frac{\pi}{2}$ en sentido antihorario.
 (f) $i(t) = -\sqrt{2} \cdot 22\pi \text{sen}(2\pi 50t + \phi)$.
 $\dot{I} = 22\pi_{\frac{\pi}{2} + \phi} = -22\pi \text{sen}(\phi) + 22\pi \cos(\phi)i$.
 (g) Forma binómica: $Z = -\frac{10}{\pi}i$.
 Forma polar: $Z = \frac{10}{\pi}_{-\frac{\pi}{2}}$.
 Forma exponencial $Z = \frac{10}{\pi}e^{-i\frac{\pi}{2}}$.
 (h) $i_r(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(2\pi 50t + \phi)$.
 $\dot{I}_r = \frac{1}{2}_\phi = \frac{1}{2} \cos(\phi) + \frac{1}{2} \text{sen}(\phi)i$.
8. (a) $(1 + i)^{14} = 128e^{-i\frac{\pi}{2}}$.
 (b) $(2e^{-i\frac{\pi}{4}})^{-25} = 2^{-25}e^{i\frac{\pi}{4}}$.
 (c) $(3\frac{\pi}{3})^9 = 19683\pi$.
 (d) $\sqrt[4]{-1}$ posee cuatro soluciones $w_0 = 1_{\frac{\pi}{4}}, w_1 = 1_{\frac{3}{4}\pi}, w_2 = 1_{-\frac{3}{4}\pi}, w_3 = 1_{-\frac{\pi}{4}}$.
 (e) \sqrt{i} posee dos soluciones $w_0 = 1_{\frac{\pi}{4}}$ y $w_1 = 1_{-\frac{3}{4}\pi}$.
 (f) $(-1 + i)^{1/3}$ posee tres soluciones $w_0 = 2^{\frac{1}{6}}_{\frac{\pi}{4}}, w_1 = 2^{\frac{1}{6}}_{\frac{11}{12}\pi}$ y $w_2 = 2^{\frac{1}{6}}_{-\frac{5}{12}\pi}$.
9. (a) $S = \{z = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}i\}$.

- (b) $S = \{z = \frac{1}{75} + \frac{43}{75}i\}$.
- (c) $S = \{z_1 = -1 - 2i, z_2 = -1 + 2i\}$.
- (d) $S = \{w_0 = 2\frac{\pi}{5}, w_1 = 2\frac{3}{5}\pi, w_2 = 2\pi, w_3 = 2\frac{4}{5}\pi, w_4 = 2\frac{5}{5}\pi\}$.
- (e) $S = \{z_1 = -\frac{1}{5} + \frac{7}{5}i, z_2 = -\frac{1}{5} + \frac{7}{5}i\}$.
- (f) $S = \{w_0 = \sqrt[6]{2}\frac{\pi}{9}, w_1 = \sqrt[6]{2}\frac{4}{9}\pi, w_2 = \sqrt[6]{2}\frac{7}{9}\pi, w_3 = \sqrt[6]{2}\frac{10}{9}\pi, w_4 = \sqrt[6]{2}\frac{13}{9}\pi, w_5 = \sqrt[6]{2}\frac{16}{9}\pi\}$.
- (g) $S = \{z_1 = 1 - 2i, z_2 = 1 + i\}$.
- (h) $S = \{z \in \mathbb{C} : z = (2n + 1)\pi i, n \in \mathbb{Z}\}$.
- (i) $S = \{z \in \mathbb{C} : z = 2n\pi i, n \in \mathbb{Z}\}$.
- (j) $S = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x = \ln(\sqrt{2}) \wedge y = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- (k) $S = \{z \in \mathbb{C} : z = [(2n + 1)\pi + \frac{\pi}{2}]i, n \in \mathbb{Z}\}$.
- (l) $S = \{z_1 = -\sqrt{\sqrt{3} + 1}, z_2 = \sqrt{\sqrt{3} + 1}, z_3 = -\sqrt{\sqrt{3} - 1}i, z_4 = \sqrt{\sqrt{3} - 1}i\}$.

10. Gráficas.

11. (a) Abierto: no.
Cerrado: si.
Conexo: no.
Simplemente Conexo: no.
Dominio: no.
- (b) Abierto: no.
Cerrado: no.
Conexo: si.
Simplemente Conexo: si.
Dominio: no.
- (c) Abierto: no.
Cerrado: no.
Conexo: si.
Simplemente Conexo: si.
Dominio: no.
- (d) Abierto: no.
Cerrado: si.
Conexo: si.
Simplemente Conexo: si.
Dominio: no.
- (e) Abierto: si.
Cerrado: no.
Conexo: si.
Simplemente Conexo: no.
Dominio: si.

- (f) Abierto: no.
 Cerrado: si.
 Conexo: no.
 Simplemente Conexo: no.
 Dominio: no.
- (g) Abierto: no.
 Cerrado: si.
 Conexo: si.
 Simplemente Conexo: si.
 Dominio: no.

Ejercicios del Capítulo 2

- Dom(f) = \mathbb{C} , $u(x, y) = x^3 - 3xy + x + 1$, $v(x, y) = 3x^2y - y^3 - 3x^2 + 3y^2 + y$, $f(z_1) = 1 + 51i$ y $f(z_2) = -1 - 3i$.
 - Dom(f) = $\mathbb{C} - \{-i, i\}$, $u(x, y) = \frac{x^3 - xy^3 + x + 2xy^2}{(x^2 + y^2)^2 + 2(x^2 - y^2) + 1}$, $v(x, y) = \frac{yx^2 - y^3 + y}{(x^2 + y^2)^2 + 2(x^2 - y^2) + 1}$, $f(z_1) = -\frac{1}{2}$ y $f(z_2) = 0$.
 - Dom(f) = $\mathbb{C} - \{0\}$, $u(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $v(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$, $f(z_1)$ no existe y $f(z_2) = i$.
 - Dom(f) = $\mathbb{C} - \{-1\}$, $u(x, y) = \frac{1 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + 2x + 1}$, $v(x, y) = \frac{-2y}{x^2 + y^2 + 2x + 1}$, $f(z_1) = -i$ y $f(z_2) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.
 - Dom(f) = $\mathbb{C} - \{0\}$, $u(x, y) = x + \frac{x}{x^2 + y^2}$, $v(x, y) = y - \frac{y}{x^2 + y^2}$, $f(z_1) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$ y $f(z_2)$ no existe.
 - Dom(f) = \mathbb{C} , $u(x, y) = 2x^2 + y^2$, $v(x, y) = xy$, $f(z_1) = 3 + i$ y $f(z_2) = 100$.
- Notaremos con D a la región de derivabilidad de f .
 - $D = \emptyset$.
 - $D = \{z \in \mathbb{C} : |z|^2 = n\pi, n \in \mathbb{N}_0\}$ y $f'(z) = 0, \forall z \in D$.
 - $D = \mathbb{C}$ y $f'(z) = e^z, \forall z \in D$.
 - $D = \emptyset$.
 - $D = \emptyset$.
 - $D = \emptyset$.
- Notaremos con Ω a la región de analiticidad
 - $\Omega = \emptyset$.
 - $\Omega = \mathbb{C}$ y $f'(r e^{i\theta}) = \frac{e^{-\theta(1+i)}}{r} (-\text{sen}(\ln r) + i \cos(\ln r))$.
- $u(x, y) = -x^2 - 2y + y^2 + i(2x - 2xy)$ y $f(z) = -z^2 + 2zi$.
 - $v(x, y) = e^{-x}(x \cos(y) + y \text{sen}(y))$ y $f(z) = ze^{-z}i$.
 - $v(x, y) = \frac{x^4}{4} - \frac{y^4}{4} + \frac{3}{2}x^2y^2 = c, c \in \mathbb{R}$.
 - $v(x, y) = e^{-x}(x \cos(y) + y \text{sen}(y)) = c, c \in \mathbb{R}$.

5. (a) $z = \ln(2) + i(\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.
 (b) $z = \ln(2) + i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.
 (c) $z = \frac{1}{2} + k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.
 (d) $z = i$

10. Notaremos con Ω a la región de analiticidad

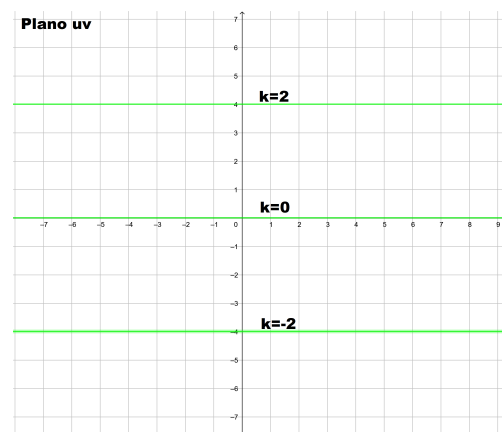
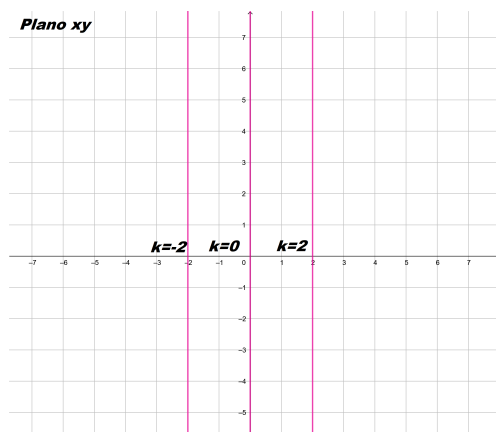
- (a) $\Omega = \mathbb{C}$ y $f'(z) = 3z^2 - 4iz$, $\forall z \in \Omega$.
 (b) $\Omega = \mathbb{C}$ y $f'(z) = 3(z^2 + iz)^2(2z + i)$, $\forall z \in \Omega$.
 (c) $\Omega = \mathbb{C} - \{0\}$ y $f'(z) = \frac{-6z^3 - 3iz^2 - 3}{(z^3 - 1)^2}$, $\forall z \in \Omega$.
 (d) $\Omega = \mathbb{C}$ y $f'(z) = -\frac{3}{z}e^{\frac{1}{z}}$, $\forall z \in \Omega$.
 (e) $\Omega = \mathbb{C} - \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x \leq 1 \wedge y = -3\}$ y $f'(z) = \frac{1}{2\sqrt{z-1+3i}}$, $\forall z \in \Omega$.
 (f) $\Omega = \mathbb{C} - [\{z = x + iy \in \mathbb{C} : x \leq -4 \wedge y = 0\} \cup \{-i, i\}]$ y $f'(z) = \frac{1}{(z+4)(z^2+1)} - \frac{2z \log(z+4)}{(z^2+1)^2}$, $\forall z \in \Omega$.

11. (a) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{\sin z} = 0$.
 (b) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - e^z}{z^2}$ no es posible aplicar L'Hopital.
 (c) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z - \pi} = -1$.

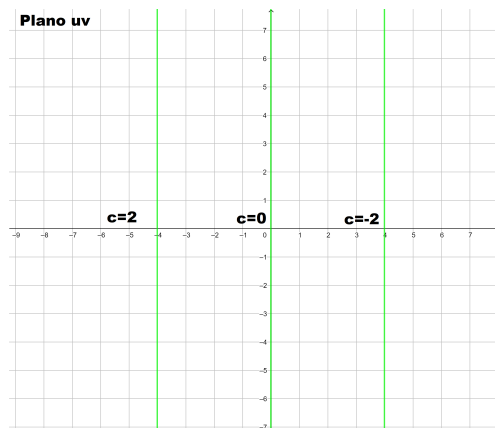
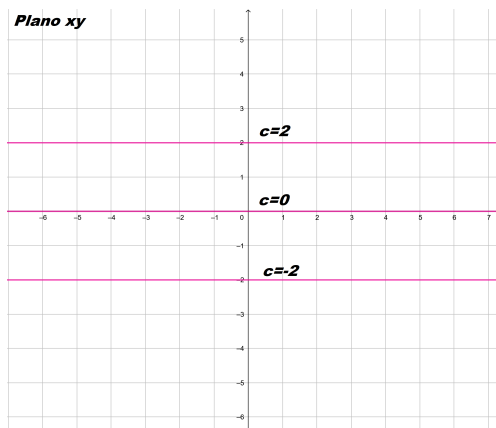
12. Llamaremos $f(z) = w$ y a los diferentes items de las diferentes regiones como

- i. $\text{Re}(z) = k$.
 ii. $\text{Im}(z) = c$.
 iii. $|z| = r$.
 iv. $\arg(z) = \alpha$.

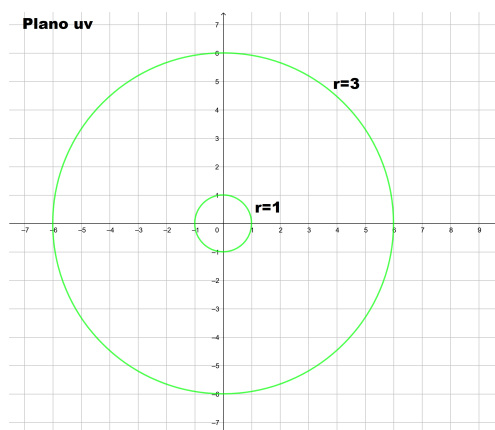
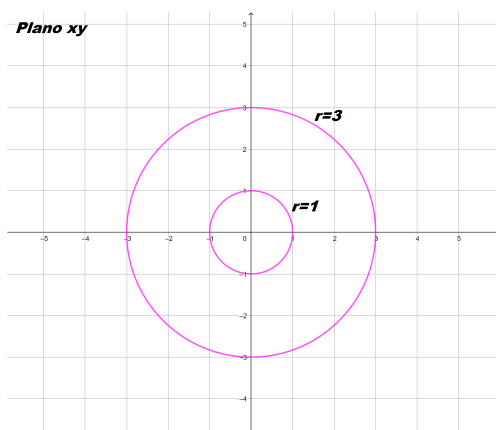
- (a) i. $\text{Im}(w) = 2k$.



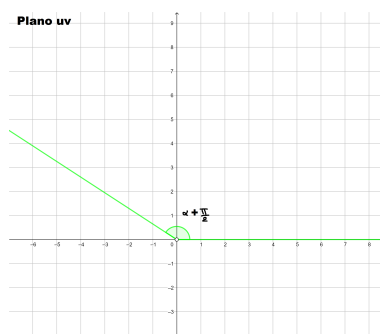
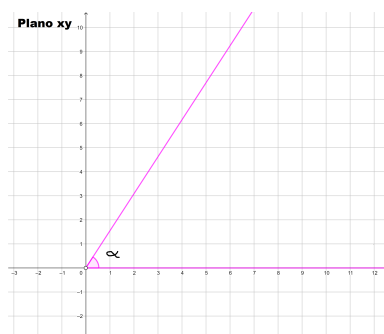
(a) ii. $\operatorname{Re}(w) = -2c$.



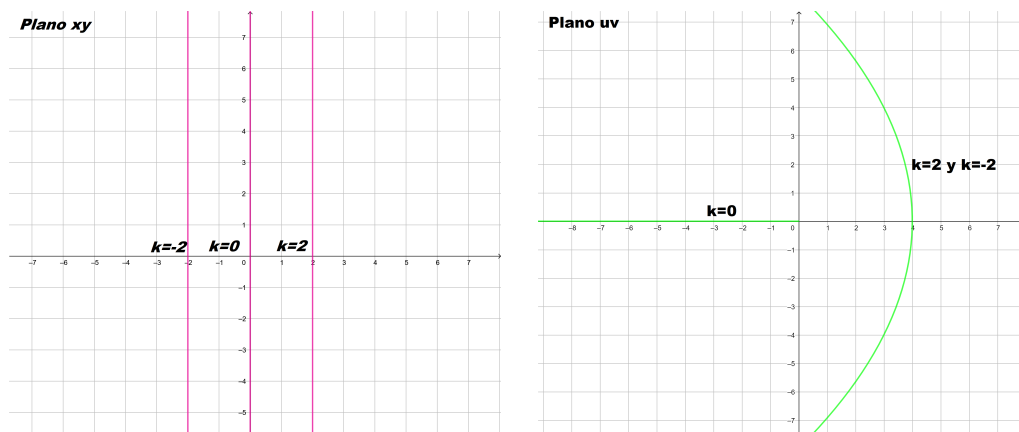
(a) iii. $|w| = 2r$.



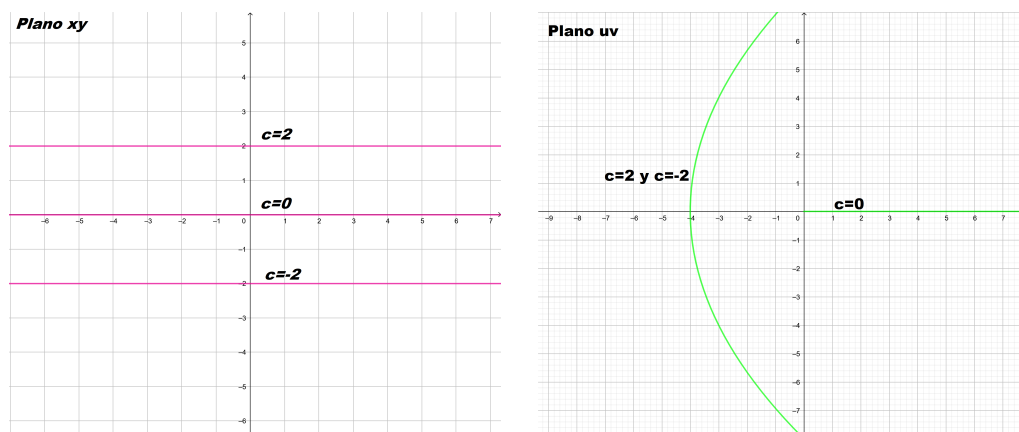
(a) iv. $\arg(w) = \alpha + \frac{\pi}{2}$.



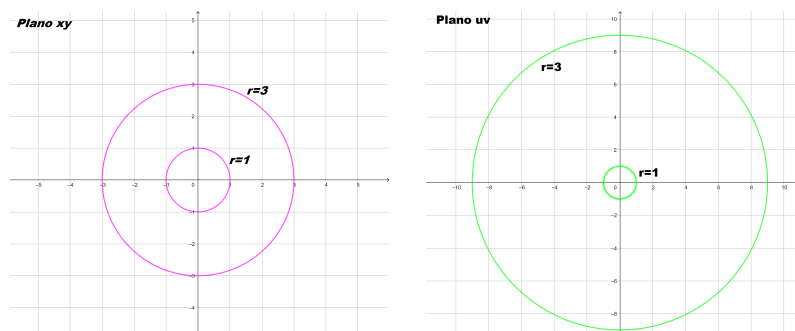
(b) i. $\text{Re}(w) = k^2 - \frac{\text{Im}(w)^2}{4k^2}$ si $k \neq 0$ e $\text{Im}(w) = 0$ y $\text{Re}(w) \in \mathbb{R}_0^-$ si $k = 0$.



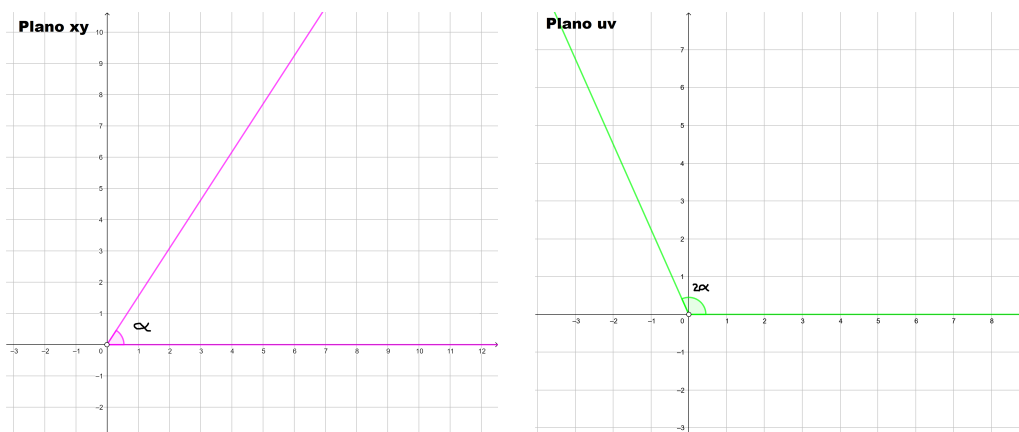
(b) ii. $\text{Re}(w) = \frac{\text{Im}(w)^2}{4c^2} - c^2$ si $c \neq 0$ e $\text{Im}(w) = 0$ y $\text{Re}(w) \in \mathbb{R}_0^+$ si $k = 0$.



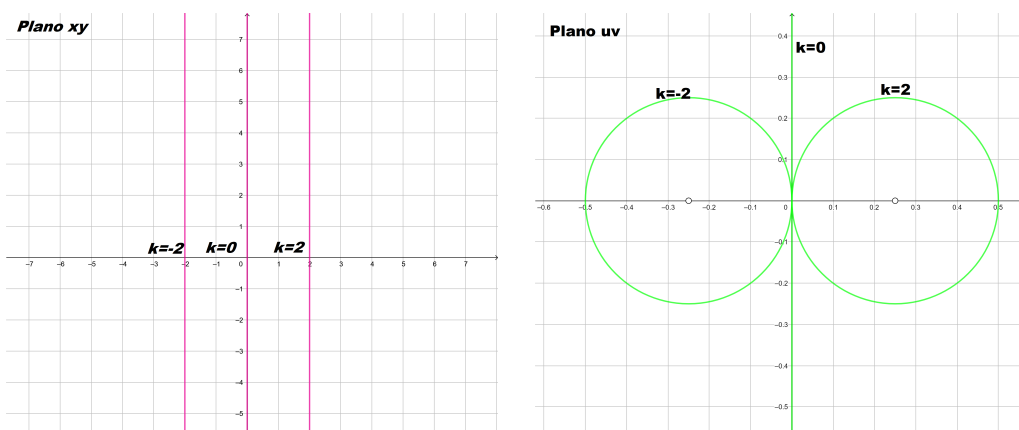
(b) iii. $|w| = r^2$.



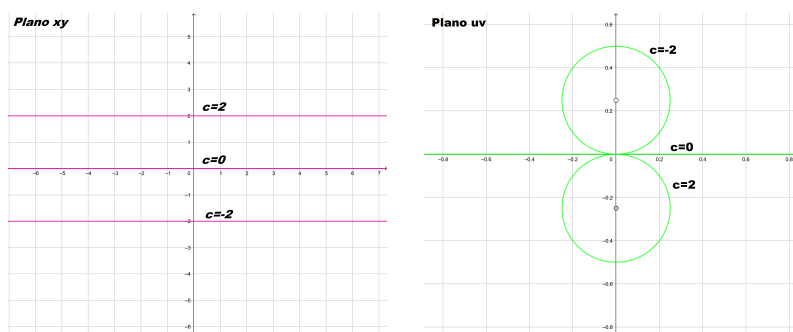
(b) iv. $\arg(w) = 2\alpha$.



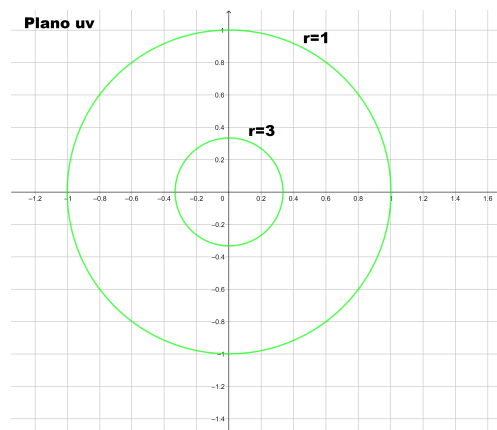
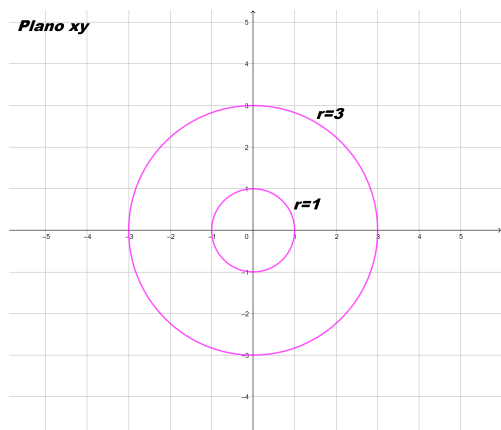
(c) i. $(\operatorname{Re}(w)^2 - \frac{1}{2k})^2 + \operatorname{Im}(w)^2 = \frac{1}{4k^2}$ si $k \neq 0$ y $\operatorname{Re}(w) = 0$ si $k = 0$.



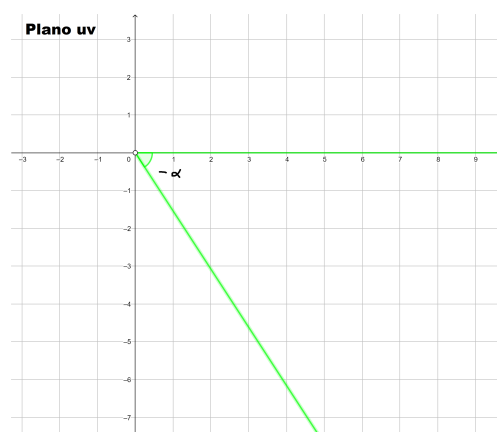
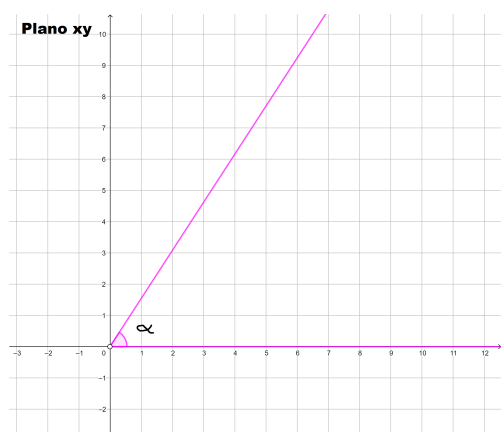
(c) ii. $(\operatorname{Im}(w)^2 + \frac{1}{2c})^2 + \operatorname{Re}(w)^2 = \frac{1}{4c^2}$ si $c \neq 0$ y $\operatorname{Im}(w) = 0$ si $k = 0$.



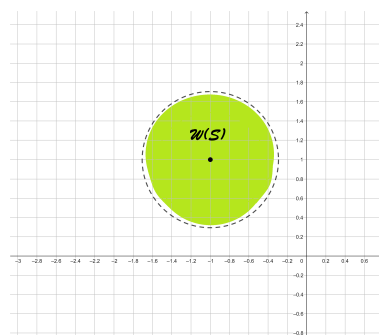
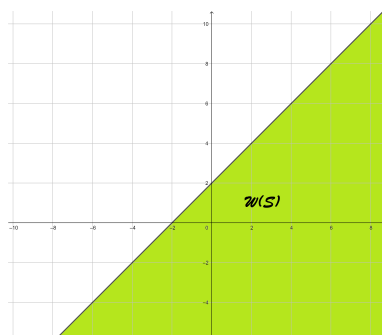
(c) iii. $|w| = \frac{1}{r}$.



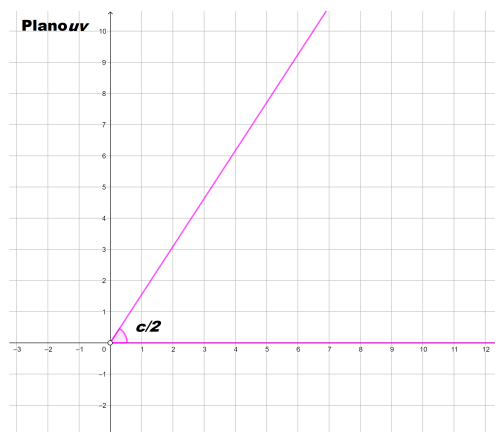
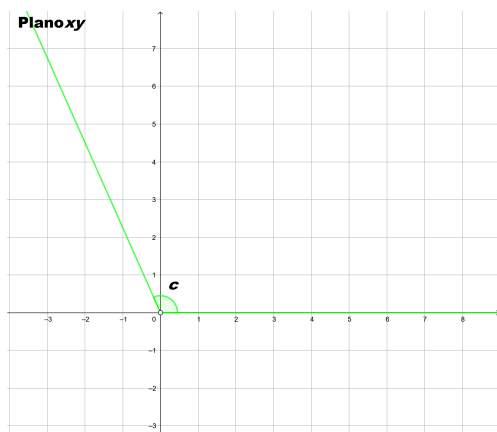
(c) iv. $\arg(w) = -\alpha$.



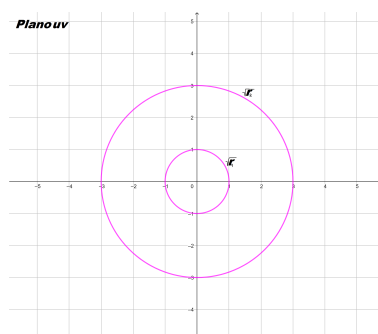
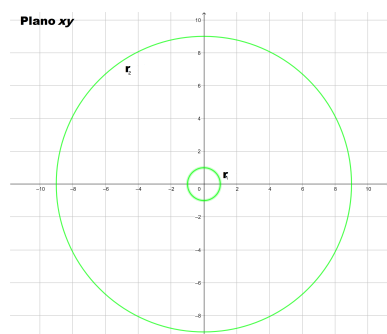
13. (a) $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ y $\beta = -1 + i$.
 (b) - (c)



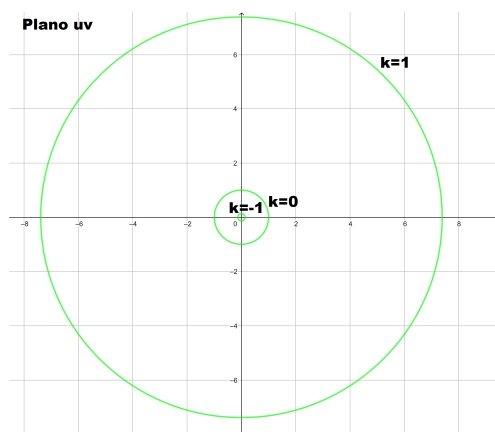
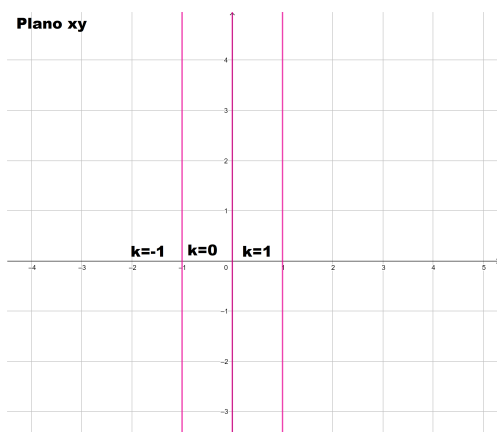
14. i. $\arg(z) = c$ se transforma en $\arg(w) = \frac{c}{2}$.



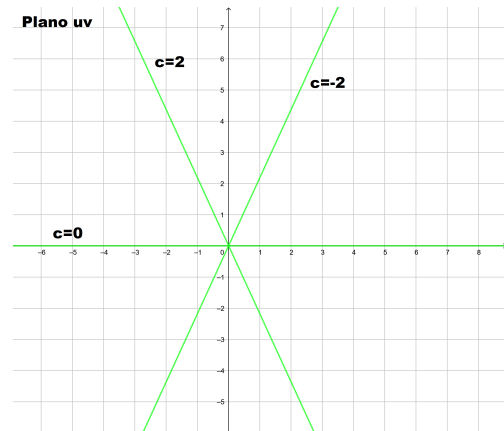
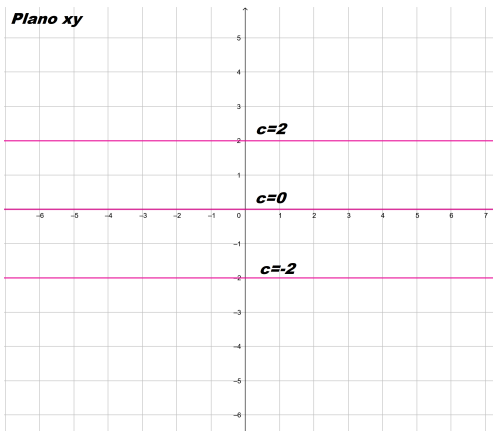
ii. $|z| = k$ se transforma en $|w| = \sqrt{k}$.



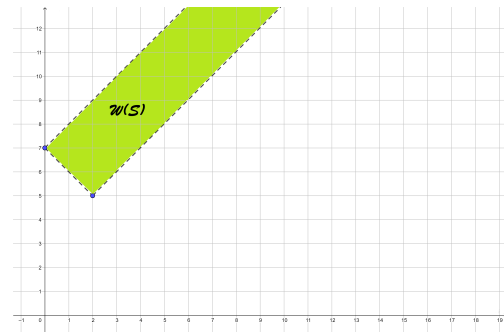
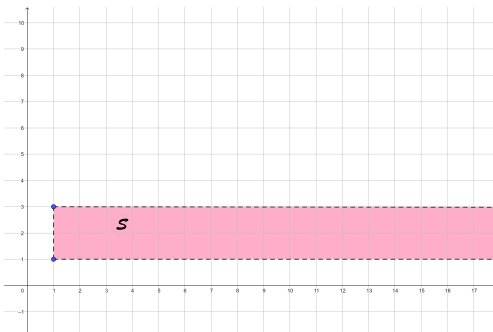
15. i. $\operatorname{Re}(z) = k$ se transforma en $\operatorname{Re}(w)^2 + \operatorname{Im}(w)^2 = e^{2k}$.



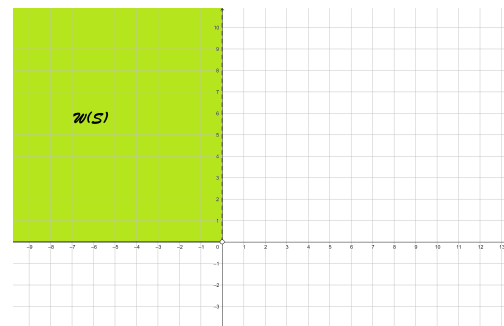
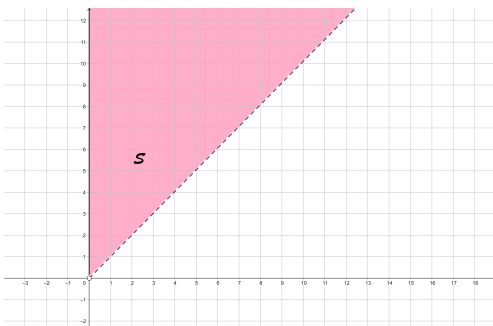
ii. $\operatorname{Im}(z) = c$ se transforma en $\operatorname{Im}(w) = \tan(c) \operatorname{Re}(w)$.



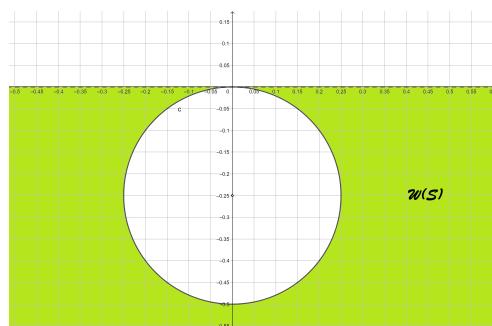
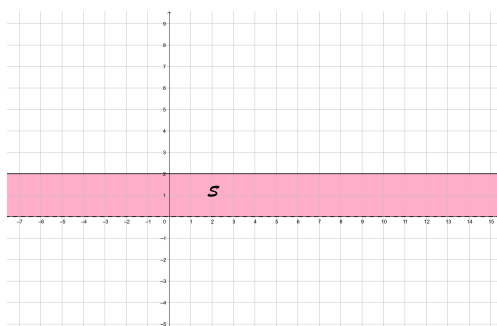
16. (a)



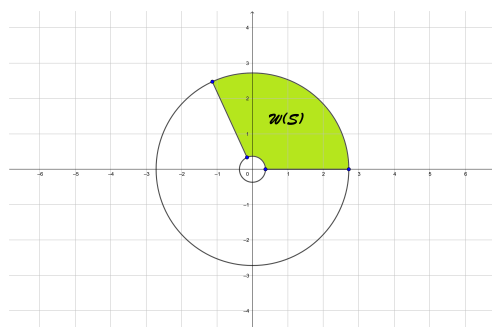
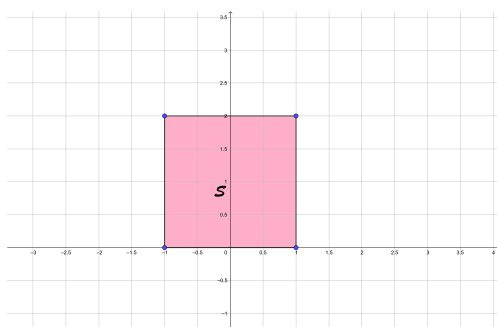
(b)



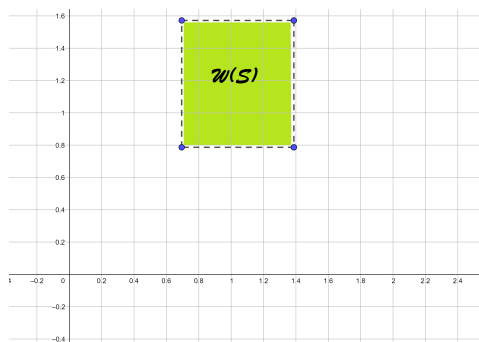
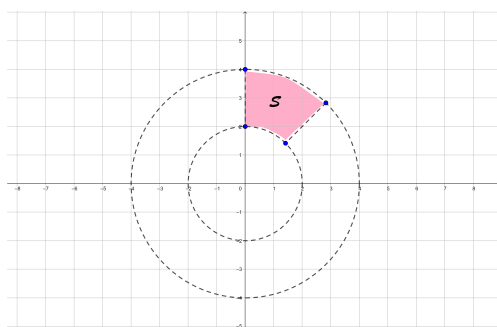
(c)



(d)

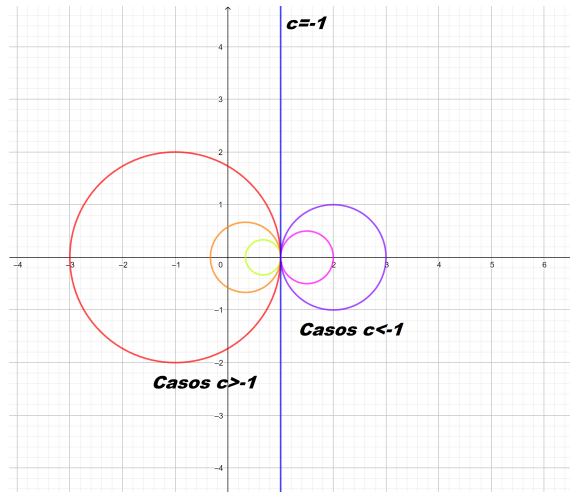


(e)

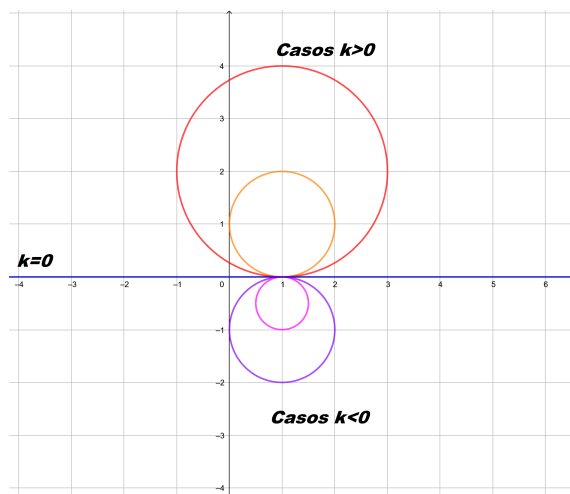


17. $T(z) = \frac{z+1}{iz-i}$.

18. i. $\operatorname{Re}(z) = c$ se transforma en $(\operatorname{Re}(w) - \frac{c}{c+1})^2 + \operatorname{Im}(w)^2 = (\frac{1}{1+c})^2$ si $c \neq -1$ y $\operatorname{Re}(w) = 1$ si $c = -1$.
 ii. $\operatorname{Im}(z) = k$ se transforma en $(\operatorname{Re}(w) - 1)^2 + (\operatorname{Im}(w) - \frac{1}{k})^2 = (\frac{1}{k})^2$ si $k \neq 0$



y $\operatorname{Im}(w) = 0$ si $k = 0$.



19. Ver ejemplo 2.4.3.

Ejercicios del Capítulo 3

1. (a) $\int_1^2 (\frac{1}{t} - i)^2 dt = -\frac{1}{2} - 2i \ln 2$.
 (b) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{2it} dt = \frac{\sqrt{3}}{4} + i\frac{1}{4}$.
2. (a) i. $\int_C (z - 1) dz = -1$.
 ii. $\int_C (z - 1) dz = -1$.

- (b) i. $\int_C \bar{z} dz = 315 - 39i$.
 ii. $\int_C \bar{z} dz = 315 - 33i$.
3. (a) $\oint_C e^z dz = 0$.
 (b) $\oint_C z \bar{z} dz = -1 + i$.
 (c) $\oint_C z^3 \text{sen}(2z) dz = 0$.
4. (a) $\int_C \text{sen}(z) dz = 0$.
 (b) $\int_C (z^3 - iz^2 - 5z + 2i) dz = -103.33$.
 (c) $\int_0^{\pi i} \text{sen}(3z) \cos(3z) dz = -\frac{i}{6} \text{senh}^2(3\pi) = \frac{1}{6} \text{sen}(3\pi i)$.
 (d) $\int_0^{\pi+i} (z+2)e^{iz} dz = -2e^{-1} - 1 + i(2 + (\pi+2)e^{-1})$.
5. (a) $\oint_C \frac{e^z}{z-2} dz = 2\pi i e^2$.
 (b) $\oint_C \frac{1}{z^4-16} dz = 0$.
 (c) $\oint_C \frac{5z}{(z+1)(z-2)(z+4i)} dz = 0$.
6. Caso 1: $z_1 = -3i$ y $z_2 = 3i$ son exteriores a la curva C , resulta $\oint_C \frac{1}{z^2+9} dz = 0$.
 Caso 2: $z_1 = -3i$ es interior y $z_2 = 3i$ es exterior a la curva C , resulta $\oint_C \frac{1}{z^2+9} dz = -\frac{\pi}{3}$.
 Caso 3: $z_1 = -3i$ es exterior y $z_2 = 3i$ es interior a la curva C , resulta $\oint_C \frac{1}{z^2+9} dz = \frac{\pi}{3}$.
 Caso 4: $z_1 = -3i$ y $z_2 = 3i$ son interiores a la curva C , resulta $\oint_C \frac{1}{z^2+9} dz = 0$.
7. (a) $\oint_C \frac{e^z}{(z+1)^4} dz = \frac{\pi i}{3e}$.
 (b) $\oint_C \frac{\text{sen}^6(z)}{(z-\pi)^3} dz = 0$.
 (c) $\oint_C \frac{\text{sen}(3z)}{(z+\pi)^2} dz = -6\pi i$.
 (d) $\oint_C \frac{4z}{(z-1)(z+2)^2} dz = 0$.
8. (a) $\max_{z \in R} |f(z)| = 9$ y se da en $z = 2$.
 (b) $\max_{z \in R} |f(z)| = 6$ y se da en $z = -1$.

Ejercicios del Capítulo 4

1. (a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$ en $|z| < 1$
 (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} (z-\pi)^{2n-1}$ en $|z-\pi| < +\infty$
 (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (z-2)^n$ en $|z-2| < 3$

- (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^n$ en $|z| < +\infty$
- (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (-1)^{n+1}}{(2n)!} z^{2n}$ en $|z| < +\infty$
- (f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{4n+2}$ en $|z| < +\infty$
2. (a) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n$ donde $a_0 = -1$ y $a_n = -2, \forall n \in \mathbb{N}$ en $|z-1| < 1$
- (b) $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}(z-1) - \frac{1}{16}(z-1)^2 - \frac{1}{16}(z-1)^3 + \frac{1}{64}(z-1)^4 + \frac{1}{64}(z-1)^5 - \frac{1}{256}(z-1)^6 - \frac{1}{256}(z-1)^7 + \dots$
en $|z-1| < 2$
3. (a) $|z| < 1$
- (b) $|z-4i| < 4; |z-1-4i| < 4$
- (c) $|z-1| < \sqrt{1+\pi^2}; |z-2i| < \pi-2$
- (d) $|z-1| < \frac{1}{2}; |z+1| < \frac{1}{2}$
4. (a) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} -z^n$ para todo $z \in S_1$,
 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}$ para todo $z \in S_2$
- (b) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) z^n$ para todo $z \in S_1$,
 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2 \cdot 3^{n+1}} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2} \frac{1}{z^n}$ para todo $z \in S_2$,
 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2} \frac{1-3^n}{z^{n+1}}$ para todo $z \in S_3$,
 $f(z) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+4)^n}{3^{n+1}} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+4)^n}$ para todo $z \in S_4$
- (c) $f(z) = \frac{1}{z-1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{(z-1)^n}$ para todo $z \in S_1$,
 $f(z) = \frac{2}{z-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (z-2)^n$ para todo $z \in S_2$
- (d) $f(z) = \frac{1}{z-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n-1}}{(z-1)^{n+1}}$ para todo $z \in S_1$

5. (a) $f(z) = -\frac{1}{2}i \frac{1}{z-i} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{2^{n+2}} (z-i)^n$ si $0 < |z-i| < 2$,
 $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n-1} i^{n+1}}{(z-i)^{n+1}}$ si $2 < |z-i| < +\infty$,
- (b) $f(z) = 2 + (z-1) + \frac{5}{6} \frac{1}{z-1} - \frac{1}{3} \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{19}{120} \frac{1}{(z-1)^3} + \frac{1}{60} \frac{1}{(z-1)^4} + \frac{41}{5040} \frac{1}{(z-1)^5} - \frac{1}{2520} \frac{1}{(z-1)^6} - \frac{71}{362880} \frac{1}{(z-1)^7} + \dots$ si $0 < |z-1| < +\infty$
- (c) $f(z) = \frac{1}{2} + z + z^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)! z^n}$ si $0 < |z| < +\infty$
6. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{n+1}$ si $|z| < 1$
7. (a) $\frac{z}{z^2 - 2z + 1}$ (b) $-\log(1-z)$
8. (a) entera (c) meromorfa (0 es un polo)
 (b) meromorfa ($\frac{1}{3}i$ es un polo) (d) meromorfa (0 es un polo)
9. i. (a) 2, -2, 2i y -2i son polos simples
 (b) $z = \infty$ singularidad evitable
 (c) $\text{Res}(f, 2i) = -\frac{1}{4} + \frac{17}{32}i$, $\text{Res}(f, -2i) = -\frac{1}{4} - \frac{17}{32}i$, $\text{Res}(f, -2) = -\frac{9}{32}$, $\text{Res}(f, 2) = \frac{25}{32}$
- ii. (a) 0 singularidad evitable
 (b) $z = \infty$ singularidad esencial
 (c) $\text{Res}(f, 0) = 0$
- iii. (a) $z_k = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) y $z_n = \frac{5}{6}\pi + 2n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) son polos dobles
 (b) $z = \infty$ no es una singularidad aislada
 (c) Residuos muy difíciles de calcular
- iv. (a) 0 singularidad esencial
 (b) $z = \infty$ singularidad evitable
 (c) $\text{Res}(f, 0) = 1$
- v. (a) 0 polo simple
 (b) $z = \infty$ singularidad esencial
 (c) $\text{Res}(f, 0) = 1$
- vi. (a) $z_k = 2k\pi i$ ($k \in \mathbb{Z} - \{0\}$) polos simples y $z_0 = 0$ singularidad evitable
 (b) $z = \infty$ no es una singularidad aislada
 (c) $\text{Res}(f, z_k) = 2k\pi i$ ($k \in \mathbb{Z} - \{0\}$) y $\text{Res}(f, z_0) = 0$
- vii. (a) 1 singularidad esencial
 (b) $z = \infty$ singularidad evitable
 (c) $\text{Res}(f, 1) = -\cos 1$

- viii. (a) i y $-i$ polos simples
 (b) $z = \infty$ singularidad evitable
 (c) $\text{Res}(f, -i) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$, $\text{Res}(f, i) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$
10. (a) $-4\pi i$ (c) πi (e) $2\pi i$
 (b) $2\pi i$ (d) $-\frac{30}{81}\pi i$
11. (b) $\frac{\pi}{4}$
12. (b) π

Ejercicios del Capítulo 5

1. (a) $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{2}{s-4}$ y $\sigma = 4$.
 (b) $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{4}{s^3} - \frac{1}{s+5}$ y $\sigma = 0$.
 (c) $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{12-5s}{s^2+4}$ y $\sigma = 0$.
 (d) $\mathcal{L}\{f(t)\} = -\frac{3}{2}\frac{1}{s-5} + \frac{3}{2}\frac{1}{s+5}$ y $\sigma = 5$.
2. (a) $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{s-a}{(s-a)^2-w^2}$ y $\sigma = a$.
 (b) $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{2}\frac{1}{s-a-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+a+1}$ y $\sigma = \max\{-1+a, 1+a\}$.
 (c) $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{2}{(s+a)^3}$ y $\sigma = a$.
 (d) $\mathcal{L}\{f(t)\} = -\frac{5}{(s+3)^2}$ y $\sigma = -3$.
3. (a) $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{2sw}{(s^2+w)^2}$ y $\sigma = 0$.
 (b) $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{6s^2w-2w^2}{(s^2+w)^2}$ y $\sigma = 0$.
 (c) $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{2}{(s+1)^3}$ y $\sigma = 1$.
 (d) $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{2}{s^3} + \frac{4}{(s^2+4)^2} - \frac{16s^2}{(s^2+4)^3}$ y $\sigma = 0$.
4. (a) $f(t) = \frac{1}{3}\text{sen}(3t)$.
 (b) $f(t) = 4e^{2t}$.
 (c) $f(t) = \frac{t^3}{3!}$.
 (d) $f(t) = \cosh(\sqrt{2}t)$.
 (e) $f(t) = \frac{1}{4}\text{sen}(4t)$.
 (f) $f(t) = -\frac{1}{2\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}t} + \frac{1}{2\sqrt{3}}e^{\sqrt{3}t}$.
5. (a) $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = 5t + 2t^2 - 2\cos(3t) - 6\text{sen}(3t) + 4t^3$.
 (b) $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = 3e^{\frac{3}{2}t} - \frac{4}{9}\cosh(\frac{4}{3}t) - \frac{1}{4}\text{senh}(\frac{4}{3}t) + \frac{2}{3}\text{sen}(\frac{3}{4}t) - \frac{3}{8}\cos(\frac{3}{4}t)$.

6. (a) $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = 6e^{2t} \cos(4t) + 2e^{2t} \text{sen}(4t)$.
 (b) $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = 4e^{-2t} \cos(\sqrt{12}t) + \frac{4}{\sqrt{12}}e^{-2t} \text{sen}(\sqrt{12}t)$.
 (c) $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = 3e^t \cos(2t) + 5e^t \text{sen}(2t)$.
7. (a) $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \text{sen}(t) - 2 \cos(t) + 2e^t$.
 (b) $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = 4e^{-t}(1-t)$.
 (c) $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = 4e^{-t} - e^{-2t}$.
8. (a) $x(t) = 6 \text{sen}(t)e^{-3t}$.
 (b) $x(t) = \frac{59}{81} + \frac{4}{9}t + \frac{2}{9}t^2 + \left(-\frac{59}{81}\right) \cos(3t) + \left(-\frac{4}{27}\right) \text{sen}(3t)$.
 (c) $x(t) = -\frac{3}{8}e^{-t} - \frac{3}{8}e^{-t}t - \frac{1}{8}e^{-t}t^2 + \frac{11}{8}e^t - \frac{11}{8}e^t t - \frac{3}{8}e^t t^2$.
 (d) $x(t) = \frac{1}{5} \cos(2t) + \frac{4}{5} \cos(3t) + \frac{12}{5} \text{sen}(3t)$.
9. (a) $x(t) = y(t) = e^{-t}$.
 (b) $x(t) = 3 \cos(t) + \cos(3t)$ e $y(t) = 3 \cos(t) - \cos(3t)$.
 (c) $x(t) = \frac{1}{3}e^t + \frac{2}{3} \cos(2t) + \frac{1}{3} \text{sen}(2t)$ e $y(t) = \frac{2}{3}e^t - \frac{2}{3} \cos(2t) - \frac{2}{3} \text{sen}(2t)$.
10. (a) i. $x(t) = \frac{-2}{195}e^{-3t} (-14e^{3t} \text{sen}(2t) + \text{sen}(4t) + 8e^{3t} \cos(2t) - 8 \cos(4t))$.
 ii. $x(t) = \frac{1}{60}e^{-3t} (6 \text{sen}(4t) + 8 \cos(4t) - 8 \cos(5t))$.
 Sin amortiguamiento resulta $x(t) = \frac{-4\omega}{5(25-\omega^2)} \text{sen}(t) + \frac{4}{25-\omega^2} \text{sen}(\omega t)$ que tiende a infinito cuando $\omega \rightarrow 5$.
 (b) $x_1(t) = -\cos(2t) + \frac{1}{2} \cos(t) - \frac{1}{2} \cos(\sqrt{3}t)$ y $x_2(t) = \cos(2t) + \cos(t)$.
11. $q(t) = \frac{1}{500} - e^{-80t} \left[\frac{1}{500} \cos(60t) + \frac{1}{375} \text{sen}(60t) \right]$ e $i(t) = \frac{1}{3}e^{-80t} \text{sen}(60t)$, si $t \geq 0$.
12. (a) $F(s) = \frac{100}{s} - \frac{100}{s} e^{-bs}$.
 (b) $F(s) = \frac{2e^{-\pi s}}{s^2+1} + \frac{2e^{-2\pi s}}{s^2+1}$.
13. (a) $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{e^{-st}}{s^2+1}$.
 (b) $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1+e^{-\frac{\pi}{w}s}}{1-e^{-\frac{\pi}{w}s}} \frac{w}{s^2+w^2}$.
 (c) $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{(1+s^2)(1-e^{-\pi s})}$.
14. $\theta_0(t) = \frac{3}{32} - \frac{1}{16}t - \frac{3}{32}e^{-4t} - \frac{10}{32}te^{-4t} + H(t-1) \left(-\frac{1}{32} - \frac{1}{16}(t-1) + \frac{1}{32}e^{-4(t-1)} + \frac{2}{16}(t-1)e^{-4(t-1)} \right)$.
15. Demostrar.
16. (a) $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{A}{s} \frac{1}{1+e^{-sT}}$.
 (b) $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-2sT}} \frac{A(1-e^{-sT}(sT+1))}{s^2T} + \frac{1}{1-e^{-2sT}} \frac{Ae^{-2sT}(1+e^{sT}(sT-1))}{s^2T}$.
17. En este ejercicio usaremos la notación $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$.
 (a) $\mathcal{L}\{f(t)\} = -G(s-2) - (s-2)G'(s-2)$.

(b) $\mathcal{L}\{f(t)\} = (s^3 + s)G(s) + (-s^2 - 1)g(0) - sg'(0) - g''(0).$

(c) $\mathcal{L}\{f(t)\} = \cos(4)\frac{s+3}{(s+3)^2+4} - \operatorname{sen}(4)\frac{2}{(s+3)^2+4}.$

(d) $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{2\omega}{(s-1)^2+4\omega^2}.$

(e) $\mathcal{L}\{f(t)\} = [G(s)]^2.$

(f) $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{4}{s^2} - \frac{8}{s^2}e^{-2s} + \frac{4}{s^2}e^{-4s}.$

(g) $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{2s} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+4}.$

(h) $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{(s-2)^2-1}{s[(s-1)^2+1]^2}.$

18. $q(t) = E\sqrt{\frac{4C}{C-4R^2L}}e^{-\frac{R}{2L}t}\operatorname{sen}\left(t\sqrt{\frac{C-4R^2L}{4L^2C}}\right).$

$$i(t) = \frac{E}{L}e^{-\frac{R}{2L}t}\left(-\frac{R}{2}\sqrt{\frac{4C}{C-4R^2L}}\operatorname{sen}\left(t\sqrt{\frac{C-4R^2L}{4L^2C}}\right) + \frac{1}{L}\cos\left(t\sqrt{\frac{C-4R^2L}{4L^2C}}\right)\right).$$

19. (a) i. $G(s) = \frac{2}{9}\frac{s+\frac{3}{2}}{s^2+\frac{4}{3}s+\frac{13}{9}}.$

ii. $Q(s) = 9(s^2 + \frac{4}{3}s + \frac{13}{9})$ y el orden del sistema es 2.

iii. Los polos son $p_1 = -\frac{2}{3} - i$ y $p_2 = -\frac{2}{3} + i$, y el cero es $c = -\frac{3}{2}$.

(b) i. $G(s) = 3\frac{s+\frac{2}{3}}{s^2+2s+5}.$

ii. $Q(s) = s^2 + 2s + 5$ y el orden del sistema es 2.

iii. Los polos son $p_1 = -1 - 4i$ y $p_2 = -1 + 4i$, y el cero es $c = -\frac{2}{3}$.

20. (a) $h(t) = 3e^{-7t} - 3e^{-8t}.$

(b) $h(t) = \frac{1}{3}e^{-2t}\operatorname{sen}(3t).$

21. (a) Demostrar.

(b) Demostrar.

(c) El salto es de tamaño $\frac{2}{7}$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \frac{4}{5}.$

22. (a) $1 * t = \frac{t^2}{2}.$

(b) $t * \operatorname{sen}(\omega t) = \frac{t}{\omega} - \frac{\operatorname{sen}(\omega t)}{\omega^2}.$

(c) $f(t) * f(t) = \frac{(1-e^{-s})^2}{s^2}.$

(d) $e^{-t} * \operatorname{sen}(t) = \frac{e^{-t}}{2} - \frac{\cos(t)}{2} + \frac{\operatorname{sen}(t)}{2}.$

23. (a) $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = 1 - \cos(t).$

(b) $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{t}{2}\operatorname{sen}(t).$

24. $y(t) = \frac{8}{9} + \frac{40}{9}t + \frac{10}{9}\cos(3t) + \frac{50}{27}\operatorname{sen}(3t), t \geq 0.$

25. (a) i. $h(t) = \frac{1}{2}e^{-t}\operatorname{sen}(2t), t \geq 0.$

ii. $\theta(t) = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}e^{-t}\cos(2t) - \frac{1}{10}e^{-t}\operatorname{sen}(2t), t \geq 0.$

(b) $x(t) = \frac{1-A}{3}e^{-3t} - \frac{1-A}{4}e^{-4t} + \frac{e^{3T}}{3} - \frac{e^{4T}}{4}, t \geq 0.$

Bibliografía

- [Alav2006] J. Alavez Ramírez, "*Métodos Numéricos I*", Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, México, 2006.
- [Apos1984] T.M. Apostol, "*Calculus*", Vol. 1, Ed. Reverté, Buenos Aires, 1984.
- [Atki1985] K. Atkinson, "*Elementary Numerical Analysis*", John Wiley & Sons, New York, 1985.
- [BrCh2004] J.W. Brown, R.V. Churchill, "*Variable compleja y aplicaciones*", McGraw-Hill, Madrid, 2004.
- [Codd1968] E.A. Coddington, "*Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*", Compañía Editorial Continental, S.A., México, 1968.
- [FuGi1995] R. Fuster, I. Giménez, "*Variable Compleja y Ecuaciones Diferenciales*", Reverté, Barcelona, 1995.
- [GoVa2013] G.H. Golub, C.F. Van Loan, "*Matrix Computations*", 4th Ed., The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 2013.
- [Jame2002] G. James, "*Matemáticas avanzadas para Ingeniería*", Pearson Educación, México, 2002.
- [KiCh1994] D. Kincaid, W. Cheney, "*Análisis Numérico. Las matemáticas del cálculo científico*", Addison-Wesley Iberoamericana, Delaware, 1994.
- [Krey2003] E. Kreyszig, "*Matemáticas avanzadas para Ingeniería*", Limusa Wiley, México, 2003.
- [MaFi2000] J.M. Mathews, K.D. Fink, "*Métodos Numéricos con MATLAB*", 3era Ed., Pearson Prentice Hall, Madrid, 2000.
- [Mole2015] C.B. Moler, "*Numerical computing with MATLAB*", SIAM, Philadelphia, 2004.
- [Saad2000] Y. Saad, "*Iterative Methods for Sparse Linear Systems*", SIAM, Philadelphia, 2003.
- [SiSo2010] J.W. Signorelli, J. Sorribas, "*Notas de Clases de Informática Aplicada y Métodos Computacionales*", FCEIA, UNR, Rosario, 2010.
- [SLSS2011] M. Spiegel, M. Lipschutz, J. Schiller, D. Spellman, "*Variable Compleja y Ecuaciones Diferenciales*", Mc Graw Hill, México, 2011.
- [TrBa1997] L.L.N. Trefethen, D. Bau, "*Numerical Linear Algebra*", SIAM, Philadelphia, 1997.
- [Wuns1997] A.D. Wunsch, "*Variable Compleja con Aplicaciones*", Addison Wesley, México, 1997.

Link de interés

- <https://la.mathworks.com/products/matlab.html>
- <https://www.gnu.org/software/octave/>
- <https://www.scilab.org/>
- www.fortran.com/