



Universidad Nacional de Rosario
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática
Profesorado en Matemática
Proyectos Innovadores en Educación Matemática

Proyecto

Habilidades de conjeturación y demostración para el
cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos poliedros
en el Ciclo Básico de la Educación Secundaria

Bianca Di Biaggio

Diciembre 2021

Habilidades de conjeturación y demostración para el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos poliedros en el Ciclo Básico de la Educación Secundaria

Conjecture and demonstration skills for the calculation of volumes of polyhedra geometric bodies in the high school

Bianca Di Biaggio
biancadibiaggio4423@gmail.com

Resumen

Esta investigación, basada en los Niveles de Pensamiento Geométrico de la teoría de Van Hiele, se propone realizar una caracterización acerca de las habilidades de conjeturación y demostración para el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos poliedros desarrolladas en propuestas de enseñanza de libros de texto del Ciclo Básico de Educación Secundaria. Además, busca reconocer de forma complementaria otros portales educativos que resulten de aporte a tal contenido. Para realizar dicho cometido, se realiza un análisis documental y una posterior descripción y articulación de las propuestas con los Niveles de Van Hiele. Consecuentemente se despliega una propuesta de enseñanza innovadora de tal contenido, con el objetivo de generar un aporte superador respecto de lo investigado. Se pretenden generar situaciones didácticas que permitan a los estudiantes elaborar conjeturas y demostraciones. Por otra parte, se optó por el ámbito de la Geometría por proporcionar un rico contexto para el desarrollo del razonamiento matemático y, en particular, por el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos poliedros por ser un contenido que generalmente es impuesto en las clases de Matemática.

Palabras clave

Habilidades de conjeturación y demostración. Volumen. Cuerpos geométricos Poliedros. Niveles de Pensamiento Geométrico. Teoría de Van Hiele. Libros de texto. Portales Educativos.

Abstract

This research, based on the Levels of Geometric Thought of the Van Hiele theory, aims to make a characterization about the skills of conjecture and demonstration for the calculation of volumes of polyhedra geometric bodies developed in proposals of teaching of high school. It also seeks to recognize in a complementary way other educational portals that result in a contribution to such content. To carry out this task, a documentary analysis, a description and an articulation of the proposals with the Van Hiele Levels are carried out. Consequently, an innovative teaching proposal of such content is deployed, with the aim of generating a superior contribution regarding what was investigated. It is intended to generate didactic situations that allow students to elaborate conjectures and demonstrations. On the other hand, the field of Geometry was chosen to provide a rich context for the development of mathematical reasoning, and particularly, for the calculation of volumes of polyhedra geometric bodies, since it is generally a knowledge imposed in Mathematics classes.

Keywords

Conjecture and demonstration skills, Volume, Polyhedra geometric bodies, Levels of Van Hiele geometric thinking, Van Hiele theory of geometric thought, Textbooks, Educational Portals.

1. Presentación

Esta sección se compone de tres apartados que delimitan los asuntos de interés del proyecto innovador en Educación Matemática. Primeramente, se presenta la problemática del estudio de la cual se desprenden los interrogantes de la investigación. En función de estos interrogantes, en un segundo apartado se dan a conocer los objetivos. A continuación, se desarrolla el estado del arte, donde se realiza un recorrido por ciertos trabajos que abordan el desarrollo de habilidades de conjeturación y demostración, y la enseñanza de los cuerpos geométricos poliedros.

1.1. Problemática

En general, en el Sistema Educativo Argentino, se observa una escasez de situaciones didácticas que permitan a los estudiantes elaborar conjeturas y demostraciones y, por ende, desarrollar las habilidades que estas requieren. En efecto, tal como indica Gascon (2000), muchas veces se ignoran estas instancias esenciales de elaboración de conjeturas y el razonamiento que permite su formulación. De esta forma quedan las fases exploratorias de la actividad matemática muy debilitadas, bajo la exclusiva responsabilidad del alumno y sin ningún tipo de institucionalización. De allí la necesidad de remarcar la importancia de la existencia de estos momentos de exploración, ya que permiten desarrollar la capacidad de análisis, así como también, el pensamiento crítico y la metacognición, aspectos fundamentales en la formación científico-académica.

Además, la elaboración de conjeturas constituye una instancia muy importante del trabajo matemático y resulta oportuno insistir en que los matemáticos realizan sus descubrimientos escalonadamente y atendiendo más bien a lo sustantivo que a lo formal. Al respecto, Chevallard et al (1997) mencionan que cuando uno se enfrenta a un problema que debe resolver o a una cuestión que quiere estudiar, el estudio de la cuestión entra en una fase exploratoria, donde tiene una importancia fundamental la elaboración de conjeturas y, por ende, el razonamiento que las mismas permiten desarrollar.

En relación con lo expuesto, se considera fundamental que las propuestas didácticas matemáticas acerquen al estudiantado al quehacer de un matemático como una forma de fomentar el desarrollo de estas habilidades para construir aprendizajes significativos, que además muestren que históricamente los resultados matemáticos no se dieron de forma inmediata, ni son mágicos o solo obras de mentes brillantes, sino que requirieron de un largo

proceso de exploración. Efectivamente, según Castro (2001), “este proceso de conjetura, prueba, refutación y modificación relaciona la génesis de la demostración con historia y contexto social y cultural, un todo en devenir dialéctico que como tal debe ser contemplado en la enseñanza de las Matemáticas” (p.48).

En este marco, “la Geometría proporciona un rico contexto para el desarrollo del razonamiento matemático, incluyendo los razonamientos inductivos y deductivos, dando validez a conjeturas, y clasificando y definiendo objetos geométricos” (Afonso, 2003, p.87). Sin embargo, Ciccioli y Sgreccia (2020) reconocen que algunas investigaciones han indicado la ausencia o superficialidad en el abordaje de contenidos geométricos, con énfasis en lo algebraico, sin vinculación o complementariedad entre la Geometría “de las formas -sintética- y la de coordenadas -analítica-” (p.9). Al respecto, Afonso (2003) remarca la necesidad de recuperar el abordaje de contenidos geométricos en la escuela, puesto que permiten un mejor conocimiento del espacio y son una fuente de modelos y situaciones problemáticas sumamente enriquecedoras para el aprendizaje de la Matemática.

En particular, se establece en el Diseño Curricular Jurisdiccional (DCJ) de la Provincia de Santa Fe (2014) que en el Ciclo Básico de la escolaridad secundaria se sugiere profundizar en la producción y el análisis de construcciones geométricas y propiciar el control de estas tareas, esto es, decidir si la respuesta a los problemas planteados y el procedimiento utilizado para obtenerla, son válidos. Puntualmente se menciona la producción de fórmulas para el cálculo de volumen. Sin embargo, Abrate et al (2006) mencionan que el aprendizaje de las fórmulas de volumen se ha basado, casi exclusivamente, en un estudio memorístico y en construcciones de tipo mecanicista y completamente descontextualizadas. De hecho, a pesar de que vivimos en un mundo tridimensional, la mayor parte de las experiencias matemáticas que proporcionamos a nuestros estudiantes son bidimensionales, lo que condiciona su desarrollo integral.

En esta línea, se considera de interés el estudio de los poliedros, pues como plantean Zapata et al (2008), puede propiciar tres tipos de procesos cognitivos importantes para el despliegue del pensamiento espacial: visualización, construcción y razonamiento. Al respecto, Gonzato et al (2011) mencionan que el desarrollo de habilidades de orientación espacial y visualización de cuerpos geométricos se considera un objetivo valioso y necesario para cualquier ciudadano. De allí que figure en numerosos lineamientos curriculares como un medio para describir y modelizar el mundo físico.

Por otro lado, las estrategias, materiales y recursos didácticos son un apoyo importante para el docente a la hora de enseñar un contenido y actualmente existe una gran variedad de ellos. De hecho, según Abrate et al (2006), “el libro de texto es uno de los recursos más utilizado en la enseñanza, que tiene una gran influencia a la hora de decidir qué y cómo enseñar, y que con el tiempo se ha convertido en el principal controlador del currículo escolar” (p.1). En este sentido, Villella (2001; citado en Abrate et al, 2006) sostiene que “los docentes suelen sustentar gran parte de sus prácticas en los libros escolares de Matemática que recomiendan usar a los alumnos y que, algunas veces, ellos mismos usan” (p.2). De esta forma, el libro de Matemática se convierte en un legitimador de los contenidos prescritos y en una de las principales fuentes de actividades y tareas (Abrate et al, 2006). Como consecuencia, debido a la importancia que tiene el libro de texto para la planificación del docente y a la vista del tratamiento superficial que se realiza en la escuela media a la hora de conjeturar o demostrar resultados para el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos poliedros, surgen los siguientes interrogantes: ¿Cómo fomentar las habilidades de conjeturación y demostración para el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos poliedros en estudiantes del ciclo básico de la educación secundaria? ¿Qué tipos de abordajes realizan los libros de texto de educación secundaria que circulan en el mercado, sobre el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos poliedros? ¿Qué otros recursos complementarios, como soportes digitales o manipulativos, pueden fomentar el desarrollo de estas habilidades? ¿Qué propuestas innovadoras pueden promover las habilidades de conjeturación y demostración para el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos poliedros en estudiantes del ciclo básico de la educación secundaria?

1.2. Objetivos

En correspondencia con los interrogantes delimitados, los objetivos de este proyecto son los siguientes:

Objetivo general

Promover habilidades de conjeturación y demostración para el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos poliedros en estudiantes del ciclo básico de la educación secundaria.

Objetivos específicos

- Caracterizar las habilidades de conjeturación y demostración para el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos poliedros desarrolladas en libros de texto de educación secundaria que circulan en el mercado.

- Reconocer de forma complementaria otros recursos que fomenten las habilidades de conjeturación y demostración para el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos poliedros en estudiantes del ciclo básico de la educación secundaria.
- Idear propuestas innovadoras que promuevan las habilidades de conjeturación y demostración para el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos poliedros en estudiantes del ciclo básico de la educación secundaria.

1.3. Estado del arte

En lo que sigue se realiza una revisión documental que tiene como objetivo recuperar resultados de investigaciones recientes, vinculadas con la temática de estudio. En esta búsqueda se incluyen investigaciones relacionadas directamente con el proceso de conjeturación y demostración; trabajos que combinan utilización de softwares/recursos con la habilidad de realizar conjeturas geométricas; estudios sobre tipos de demostraciones y razonamiento geométrico; y una investigación sobre caracterización de libros de texto.

Softwares/Recursos - Conjeturas - Geometría

Algunos trabajos combinan la utilización de softwares o recursos para la realización de conjeturas geométricas, en efecto, en el taller dictado por Advíncula (2018) se propone resolver problemas que involucren la realización de construcciones geométricas a través de GeoGebra como medio para estimular la exploración y el descubrimiento de propiedades. Además, se analiza su papel en la elaboración y verificación de conjeturas, y en la generalización de propiedades al resolver problemas geométricos. Para dicho cometido, diseñaron actividades con sustento en la teoría de Van Hiele (1957) y el enfoque instrumental de Rabardel (1995).

A partir de este taller, se obtuvo que el uso de GeoGebra en la resolución de problemas geométricos permite la realización de construcciones dinámicas e interactivas, que pueden ser modificadas de manera casi inmediata, lo cual facilita el desarrollo del pensamiento geométrico. Asimismo, se afirma que GeoGebra ayuda a explorar y descubrir propiedades geométricas, así como a elaborar y verificar conjeturas, lo cual contribuye con el desarrollo de competencias argumentativas.

Como conclusión, se menciona que las actividades diseñadas para ser trabajadas con apoyo de GeoGebra permiten generar espacios donde los participantes pueden construir figuras, explorar y descubrir relaciones y propiedades geométricas, identificar las condiciones

necesarias para resolver problemas, elaborar y validar conjeturas, justificar y argumentar sus soluciones y procedimientos utilizados.

Por otro lado, en el Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, Advíncula (2013) comparte una experiencia que realizó en el curso Introducción a la Matemática Universitaria de la Facultad de Estudios Generales y Ciencias de la Pontificia Universidad Católica del Perú. La misma consistió en introducir el tema poliedros a través de la utilización del ambiente de Geometría dinámica Cabri 3D. Durante la experiencia se observó que este software favorece la visualización de los poliedros y facilita el reconocimiento de sus propiedades al permitir que los sujetos manipulen representaciones dinámicas y tridimensionales, para que luego analicen, generalicen y comprueben conjeturas. En efecto, la potencialidad del arrastre que posee el Cabri 3D permite que los estudiantes realicen cambios inmediatos sobre las figuras construidas y observen cómo se mantienen fijas las relaciones geométricas existentes. De esta forma, el software Cabri 3D resulta ser un recurso que contribuye con el desarrollo de niveles superiores de razonamiento debido a su flexibilidad y versatilidad.

En esta línea, el trabajo de Villarroel y Sgreccia (2012) propone la utilización de materiales didácticos concretos tridimensionales para enseñar Geometría en primer año de la Educación Secundaria (alumnos de 13 años de edad). Luego de una caracterización de los mismos, las autoras reconocen habilidades geométricas que su uso intencionado permite desarrollar e identifican siete grandes grupos de materiales: modelos fijos 2D y 3D, rompecabezas geométricos, tangram, geoplano, transformaciones dinámicas, origami o papiroflexia y objetos del entorno real. Dependiendo de la intencionalidad didáctica, pueden a su vez identificarse nueve criterios de agrupamiento: cualidad, materia prima, disponibilidad, movilidad, dimensión, contenidos conceptuales, modelo de razonamiento, habilidades geométricas y versatilidad. Entre ellos se consideran algunos oportunos para trabajar sobre propiedades de los cuerpos geométricos poliedros.

Por ejemplo, se incluyen modelos de cuerpos espaciales poliedros, los cuales según el modo en que estén fabricados, es posible analizar diferentes propiedades, como por ejemplo se muestran unos fabricados de plástico transparente o acrílico en los cuales se pueden observar sus secciones planas. Además, se menciona el geoplano triangular o isométrico el cual podría servir para el estudio de poliedros y la identificación de caras, aristas y vértices. Los rompecabezas geométricos por disección a partir de los cuales se puede realizar una interpretación de formas compuestas, como desarrollos planos de poliedros. También se incluyen transformaciones dinámicas como poliformas a partir de las cuales se pueden generar

todos los poliedros con caras y vértices congruentes; realizar una comprobación experimental de su existencia; analizar sus posibles desarrollos planos; generar combinatoria de formas poliédricas hechas con más de un tipo de pieza; validar la existencia de poliedros convexos; entre otros. Por otro lado, dentro de este mismo grupo se incluyen retículas que pueden servir para la construcción de estructuras de poliedros y la visualización de sus relaciones estructurales. Otros que se incluyen son los desarrollos planos a partir de los cuales se puede analizar la relación entre el número de aristas, vértices y caras de un poliedro cualquiera y los origamis que permiten descomponer un poliedro en cuerpos más pequeños. Por último, la alternativa más común es la cartulina, la cual puede utilizarse como recurso para la construcción de poliedros.

En este trabajo, se concluye que la utilización de materiales didácticos concretos puede favorecer el desarrollo de habilidades geométricas, siempre que sea de forma intencionada y con un propósito claro.

Estas contribuciones muestran los beneficios de la utilización de softwares de geometría dinámica o materiales concretos en el fomento de habilidades de conjeturación y demostración, y en específico en torno a los poliedros.

Demostración - Razonamiento geométrico

En principio, Lárez (2014) documenta y analiza la importancia de las demostraciones geométricas como resolución de problemas. Además, esboza un modelo para realizar demostraciones, la Prueba a Dos Columnas (PDC). La PDC es una forma metódica de presentar las demostraciones y resulta de interés en el diseño de la propuesta innovadora dado que consiste en ubicar las proposiciones en una columna, y las razones que justifican las proposiciones en otra columna adjunta. Es una herramienta que permite estructurar el conocimiento geométrico mediante una serie de pasos encadenados lógicamente hasta llegar a validar, mediante ellos, una proposición dada. Además, permite al estudiante la adquisición de destrezas procedimentales y cognitivas generales que favorecen el desarrollo del conocimiento geométrico y al docente, la habilidad para mediar y controlar el proceso de producción. En este artículo se evidencia cómo estudiantes de Educación Media tienen la posibilidad de familiarizarse con el proceso formal lógico deductivo.

Por otro lado, es de interés para esta investigación, que a partir de una nueva propuesta los estudiantes además de adquirir herramientas, puedan desarrollar habilidades de orden superior y mejorar progresivamente sus competencias argumentativas. En este marco, Vargas y Araya (2013) realizan una investigación sobre la aplicación del Modelo de Pensamiento

Geométrico de Van Hiele en la enseñanza de la Geometría que explica la evolución del razonamiento geométrico a través de cinco niveles consecutivos y del apoyo que brindan sus fases a la organización del currículo. En efecto, ellos muestran que este modelo de enseñanza y aprendizaje brinda la posibilidad de identificar las formas de razonamiento geométrico y pautas a seguir para fomentar la consecución de niveles más altos de razonamiento. Además, mencionan que el docente a través de una evaluación inicial identificará el nivel en el que se encuentra cada uno de los estudiantes, lo cual le permitirá describir el avance del razonamiento geométrico de cada uno de ellos luego de aplicar las actividades programadas. Además, como el modelo de Van Hiele da importancia al desarrollo del lenguaje -aspecto crucial en el paso de un nivel a otro- se concluye que resulta fundamental establecer actividades en las que el estudiante tenga la oportunidad de comunicar sus ideas matemáticas en un ambiente que le permita aprender de sus errores y mejorar gradualmente su lenguaje matemático. Desde esta perspectiva, se afirma que el docente tiene que ser consciente de que su función es ser un medio para que el estudiante adquiera conocimientos, los reconstruya y pueda utilizarlos.

Conjetura - Demostración

Álvarez et al (2014) presentan descripciones detalladas de los procesos de conjeturación y demostración. Más aún, establecen que el conjeturar puede estructurarse a partir de visualizar; identificar patrones, relaciones, regularidades, propiedades, etc.; formular, verificar y generalizar proposiciones. Además, se presentan ejemplos de cada una de estas cinco etapas y se observa que de manera transversal a la actividad de conjeturar se encuentra el proceso de argumentar, pues en cada una de las fases se producen resultados que se van validando a la luz de los antecedentes y del contexto en el que se trabaje. En ese sentido y ya que, por ejemplo, los argumentos que permiten concluir una observación difieren de los que permiten verificar una conjetura y estos a su vez difieren de los que permiten demostrar la conjetura, se ahonda en el estudio del proceso de argumentar y se destaca su relevancia durante el desarrollo de la actividad matemática con el objetivo de potenciar el pensamiento matemático y propiciar competencias argumentativas.

Un camino posible para trabajar la argumentación es orientar la actividad matemática en pro de la producción y validación de conjeturas, generalidades, proposiciones, entre otros. Por otro lado, se menciona que como las habilidades de argumentar van desde identificar y analizar argumentos en textos o ambientes educativos, hasta construirlos, entonces se podría promover desde la actividad matemática, momentos de reflexión para que los procesos de

conjeturar y argumentar aporten al desarrollo del pensamiento matemático y al desarrollo de otro tipo de competencias que atañen a los distintos campos del saber.

Por otro lado, Sáenz Castro (2001), centrado especialmente en la educación secundaria, establece diferencias entre el razonamiento demostrativo y el plausible o conjetural. Además, recupera los aportes de Hernán (1982) el cual ofrece un esquema operativo para que un estudiante de matemáticas aprenda las dos clases de razonamiento. Este afirma que, desde un punto de vista heurístico, pueden señalarse en el proceso de demostración las siguientes etapas: descubrimiento de la regularidad de una situación; sistematización de los ejemplos; conjetura; crítica de la conjetura (excepciones, falta de generalidad, imprecisión, casos límites...); nueva conjetura; demostración de la conjetura; crítica de las demostraciones.

En este estudio se intenta dar respuesta a las siguientes preguntas mediante el análisis de tres problemas que tienen como objetivo preferente estudiar el sistema de conjetura-demostración utilizado por estudiantes de secundaria: ¿Qué etapas son alcanzadas por los alumnos y cuándo? ¿Es la etapa “natural” en la educación secundaria la conjetura o lo es la demostración? ¿Qué condiciones han de cumplirse para el aprendizaje de estos aspectos procesales de las matemáticas? ¿Pueden conseguirlo la mayoría de los alumnos?

Se concluye que el pensamiento productivo, que consiste en crear nuevas situaciones y en usar nuevas organizaciones, es más difícil de enseñar pues requiere más tiempo y necesita de otros esquemas de temporalización de la enseñanza y estructura de las clases. Sin embargo, este estudio demuestra la necesidad y la importancia de trabajar el sistema de conjeturas-pruebas-refutaciones como metodología de encuentro del razonamiento demostrativo con el razonamiento plausible en la enseñanza matemática.

Libros de texto - Geometría

Por otra parte, los materiales y recursos didácticos constituyen un apoyo importante para el docente a la hora de enseñar. Al respecto, Abrate et al (2006) caracterizan las actividades de Geometría que proponen los textos escolares más utilizados por los docentes de Matemática de la EGB3, en instituciones públicas o privadas de la ciudad de Villa María, Córdoba. Para realizar esta caracterización se analizaron diferentes variables: formulación de las consignas, proceso de solución, cantidad de soluciones, habilidades que tienden a desarrollar y grado de reflexión que involucran. Los resultados de esta investigación arrojan que en dichos libros no existen actividades que propongan la formulación, comprobación o modificación de conjeturas a partir de los datos del problema o de los resultados intermedios; formulación, elaboración y comunicación del proceso seguido en la resolución de problemas con

interpretación de los distintos cálculos realizados; argumentación de la validez de una solución; o la elaboración de estrategias en verdaderos problemas de investigación de cuestionamientos a partir de un conjunto de datos. En ese escenario, la alfabetización matemática queda desprovista de habilidades de orden superior, como la conjeturación y demostración, al menos desde las propuestas escolares.

A modo de síntesis, a lo largo de los antecedentes se ha podido observar que una de las formas más utilizadas para fomentar el desarrollo de habilidades de conjeturación y demostración en geometría en general y en específico sobre cuerpos geométricos poliedros, es la utilización de softwares de geometría dinámica como Cabri 3D y GeoGebra. Asimismo, se observó que la utilización de materiales didácticos concretos puede beneficiar la adquisición de competencias argumentativas, aunque son escasos los avances respecto a cómo implementarlos.

En cuanto a los libros de texto, puntualmente no se ha obtenido información sobre propuestas que desarrollen demostraciones o conjeturas sobre las fórmulas de volumen de cuerpos geométricos poliedros, aunque en el material recabado sobre Geometría se ha observado que estos libros no incluyen actividades que promuevan el desarrollo de este tipo de habilidades. Sin embargo, debido a las fechas en las que fueron realizadas estas investigaciones, se hace necesario profundizar sobre este tema y en específico sobre el desarrollo de las fórmulas de volumen de poliedros.

Por estos motivos, parte de la innovación de este proyecto radica en recabar información de libros de texto, materiales didácticos concretos, softwares y portales de educación en línea con el fin de proponer un abordaje del contenido a través de una propuesta superadora que permita el desarrollo de estas habilidades. Asimismo, se ha podido observar que el beneficio que puede implicar la utilización de recursos en el desarrollo de las habilidades de conjeturación y demostración, estará vinculado con las intenciones didácticas con que se utilicen dentro de las actividades que se propongan y con el aporte que el docente puede hacer al respecto.

Por último, en algunas investigaciones se menciona que la enseñanza de las fórmulas de volumen se basa en una muestra y aplicación directa de las mismas sin ningún tipo de argumentación acerca de por qué dichas fórmulas nos permiten obtener un volumen de un cuerpo geométrico poliedro específico. De esta forma, es de interés que la propuesta permita resignificar el sentido de las mismas al valerse de habilidades como visualizar, identificar, describir y, además, utilizar propiedades, estrategias de trabajo, realizar razonamientos varios,

manipular materiales concretos, entre otros. Todo esto tiene como fin elaborar fórmulas, comprobarlas, argumentar su validez, comunicar el proceso que se realizó para obtenerlas y, por último, contemplar en este proceso modificaciones, errores, resultados intermedios, etc.

2. Marco teórico referencial

En este apartado se exponen las bases teóricas sobre las que se enmarca este proyecto de investigación. Se toma como referente fundamental la teoría de Van Hiele sobre los Niveles de Pensamiento Geométrico. Además, se expone una concepción de las tres componentes principales del estudio, ellas son: la enseñanza de las conjeturas y demostraciones, los cuerpos geométricos poliedros y los libros de texto.

2.1. Perspectiva educativa

Esta investigación se realiza con base en la Teoría de Van Hiele sobre Niveles de Pensamiento Geométrico. En ella se describen cinco niveles de pensamiento por los que transita un estudiante durante el aprendizaje de contenidos geométricos, así como las fases de enseñanza y aprendizaje necesarias para que los estudiantes logren comprender ideas geométricas. Esta teoría es de utilidad para anticipar las dificultades que tienen los estudiantes al elaborar demostraciones.

En relación con el avance entre niveles, la teoría establece que el logro de una nueva etapa de comprensión no puede llevarse a cabo a través de la enseñanza de hechos y procedimientos, sino que el profesor tiene que crear un escenario favorable para que los estudiantes alcancen un nivel mayor de comprensión mediante una elección adecuada de problemas; es decir, tareas que representen un reto intelectual más que dificultades procedimentales o de cálculo (Van Hiele, 1999). Esto significa que la comprensión de los estudiantes aumenta en la medida que las actividades a las que se enfrentan son más diversas. A continuación, se definen los niveles y fases de enseñanza y de aprendizaje:

Nivel 1. Visualización o Reconocimiento

En el primer nivel de razonamiento se entra en contacto con el objeto de estudio, en este caso los poliedros. El razonamiento se basa en la consideración global de los cuerpos (como un todo) y sus movimientos, siendo este fundamentalmente visual. Por lo tanto, todas las propiedades que se pongan de relieve deberán estar basadas en atributos manipulativos o visuales, pero no jugarán un papel explícito en la identificación. Las representaciones de los

objetos se identifican, comparan y operan con base en su apariencia física mediante descripciones visuales.

Nivel 2. Análisis

Los estudiantes identifican un cuerpo geométrico poliedro mediante sus propiedades, las cuales se consideran independientes unas de otras. El proceso de razonamiento en este nivel se lleva a cabo a través de la identificación de los componentes y atributos de los cuerpos. Además, se descubren, reconocen y utilizan de forma adecuada los elementos que caracterizan los poliedros: caras, vértices, aristas. Se representan esas características mediante dibujos de poliedros y se utiliza la notación y el vocabulario matemático adecuado. Además, se descubren y verifican de forma empírica, a través de softwares de geometría dinámica o con material manipulable, las relaciones entre los elementos de los poliedros.

Nivel 3. Ordenación, Clasificación o Abstracción

Los estudiantes interrelacionan lógicamente propiedades de los conceptos, a través de construir o seguir argumentos informales. Los estudiantes que se encuentran en este nivel son capaces de formular definiciones abstractas (abstracción), es decir, señalar las condiciones necesarias y suficientes que debe satisfacer una clase de cuerpos geométricos (clasificación), además de reconocer cómo unas propiedades de los objetos geométricos se derivan de otras (ordenación), al establecer relaciones entre propiedades y las consecuencias de esas relaciones. Además, son capaces de formular justificaciones informales de resultados matemáticos. En este punto los estudiantes son capaces de describir los poliedros de manera formal y entender el significado de su definición.

Nivel 4. Deducción Formal

Los estudiantes prueban teoremas deductivamente y establecen relaciones entre teoremas. Entienden la necesidad de justificar deductivamente resultados matemáticos o proposiciones, con base en un sistema axiomático.

Nivel 5. Rigor

Los estudiantes establecen teoremas en diferentes sistemas axiomáticos y analizan o comparan estos sistemas. Se conoce la existencia de diferentes sistemas axiomáticos y se pueden analizar y comparar. El estudiante es capaz de realizar deducciones abstractas. El razonamiento geométrico en este nivel es bastante abstracto y no necesariamente involucra el uso de modelos concretos.

Es oportuno realizar una vinculación entre los niveles establecidos por Van Hiele y las habilidades de conjeturar y demostrar. En el primer nivel de razonamiento se entra en

contacto con los poliedros, el razonamiento se basa en la consideración global de los cuerpos y sus movimientos, siendo fundamentalmente visual. El nivel 2 puede considerarse como el primer escalón de exploración del estudiante sobre los objetos matemáticos, donde se verifica empíricamente para algunos ejemplos que ciertas propiedades valen. De esta forma el nivel 3 avanza hacia una deducción informal de las propiedades, al interrelacionar lógicamente propiedades de los conceptos con argumentos informales, e incluso por momentos erróneos, lo que los lleva a retrabajar hasta llegar a formular una conjetura. El nivel 4 se corresponde con una instancia en que es posible organizar una demostración y formalizarla con un rigor adecuado, donde los estudiantes captan la necesidad de justificar deductivamente resultados matemáticos. En un quinto nivel ya se establecen teoremas en diferentes sistemas axiomáticos, se analizan o comparan estos sistemas y se realizan deducciones abstractas, lo cual resulta acorde a la generación de conocimiento matemático avanzado, con sustento en los niveles de razonamiento previos.

Por otro lado, el objetivo de las fases es proporcionar al profesor herramientas que le permitan diseñar actividades y organizar escenarios de enseñanza que les posibiliten a los estudiantes avanzar en los sucesivos niveles de pensamiento geométrico.

Fase 1. Información o indagación

El profesor y los estudiantes se involucran en una discusión sobre los objetos de interés de cada nivel. Se realizan observaciones, se generan preguntas y se introduce vocabulario específico.

Fase 2. Orientación guiada

Los estudiantes exploran un tema de estudio a través de actividades propuestas por el profesor, llevando a cabo procesos de pensamiento matemático relevantes para cada nivel. El profesor formula preguntas que tengan una respuesta concreta, pero de forma que la búsqueda de la respuesta favorezca la reflexión y la comunicación de ideas.

Fase 3. Explicitación o explicación

El estudiante es consciente de las relaciones que existen entre las propiedades de los objetos geométricos, trata de expresarlas verbalmente o por escrito y aprende el lenguaje técnico. Durante el desarrollo de las actividades los estudiantes expresan e intercambian sus puntos de vista con el objetivo de construir relaciones.

Fase 4. Orientación libre

El estudiante aprende mediante la ejecución de tareas que tienen diferentes soluciones o son de respuesta abierta. A través de la actividad matemática que realizan los estudiantes, se

promueve la construcción de redes complejas de relaciones entre conceptos y procesos matemáticos relevantes para cada nivel. Las actividades posibilitan al estudiante explorar, formular conjeturas y justificar relaciones, en esta fase las conexiones y relaciones entre los objetos matemáticos se vuelven explícitas para los estudiantes.

Fase 5. Integración

El estudiante realiza un proceso de metacognición donde reflexiona acerca de lo que ha aprendido, es decir, reflexiona sobre sus propias acciones y obtiene una visión general de la nueva red de relaciones que se construyó durante el proceso de trabajo. Se supone que al final de la quinta fase, los estudiantes han logrado un nuevo nivel de pensamiento.

Con relación a la perspectiva educativa, desde el DCJ de la Provincia de Santa Fe (2014):

Se plantea un trabajo áulico que propicie una actividad a la manera de micro-sociedad científica, en el que se problematice el contenido y los estudiantes tengan oportunidades para interpretar información, establecer relaciones, conjeturar, elegir y construir un modelo para resolver los problemas, comunicar en forma oral y escrita, argumentar acerca de la validez de los procedimientos y resultados, elaborar conclusiones, de modo que posibilite la producción de conocimientos, aspecto central en la enseñanza (p.48).

Con respecto de la validación, entendida como la decisión autónoma del estudiante acerca de la verdad o la falsedad de su respuesta, el DCJ establece que en los primeros años de escolaridad se pueden aceptar argumentaciones imprecisas y escrituras poco formales como pruebas ligadas a la acción y a la experiencia. Además, menciona que se debe profundizar en la producción y el análisis de construcciones geométricas y en la toma de decisiones. Las construcciones deben realizarse con instrumentos tradicionales y con software de geometría dinámica. Asimismo, se establece que las construcciones y el establecimiento de relaciones que pueden conjeturarse a partir del tratamiento dinámico, mediadas por un proceso de validación, permiten reconocer las limitaciones de las pruebas empíricas y favorecer la entrada a la argumentación deductiva.

2.2. Enseñanza de las conjeturas y demostraciones

Como se menciona en el DCJ, en la enseñanza de la Matemática hay una postura de enfrentar a los estudiantes a un trabajo similar al que realiza un matemático para que construyan el conocimiento. Esta es la postura que se toma en esta investigación. De esta forma los estudiantes trabajan en procesos de argumentación al validar ciertas proposiciones. Sin embargo,

si se reduce el papel de la demostración en la escuela al de solo una herramienta lógica de verificación, entonces los alumnos no hallarán justificaciones suficientes para ese trabajo y no se alcanzarán propósitos como el de construir relaciones complejas entre la observación, la argumentación y la construcción de demostraciones (Osorio, 2003, p.171).

Es por esto que importa en gran parte el sentido de la demostración y se la orienta a la producción de argumentos encadenados deductivamente. Por otro lado, el rigor que se le da a la misma no puede ser exacerbado, sino que tiene que ser acorde al nivel educativo, en este caso al Ciclo Básico de la Educación Secundaria.

Más allá de estas consideraciones, la demostración como producto final, es ya un producto refinado y limpio que no refleja el proceso previo. En este proceso es donde se realizan observaciones, se hacen análisis de diferentes situaciones y, luego, se realiza una conjetura la cual se intenta probar a partir de elaborar argumentaciones y desarrollar razonamientos y conocimientos. Es por esto que se toma como base el concepto de *Unidad Cognitiva de Teoremas*, esto es el ciclo: Explorar → Conjeturar → Explorar → Organizar una demostración.

Las primeras dos etapas están relacionadas con la construcción de conjeturas pues se llevan a cabo exploraciones, conjeturaciones, discusiones de tales afirmaciones y una primera sistematización de los enunciados; y las últimas etapas del proceso están enfocadas a la propia construcción de la demostración, después de una segunda exploración, de la búsqueda de argumentos convenientes y del encadenamiento deductivo necesario (Osorio, 2003, p.173)

Al respecto Itzcovich (2008) menciona que:

La idea de la conjetura, en términos escolares, es la producción de una “sospecha”, de un “parecer”, producto de una experiencia de trabajo. Es decir, confluyen en esas exploraciones, ensayos y errores, el uso de los datos conocidos y saberes disponibles que permiten establecer una afirmación con cierto margen de certeza, aunque no es del todo posible, por los recursos utilizados hasta el momento, dar cuenta de que lo afirmado es así y no podría ser de otra manera (p.17).

2.3. Transposición didáctica y libros de texto

Cuando se habla de libros de texto, se refiere a aquellos libros que utilizan habitualmente profesores y alumnos en la escuela en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la Matemática. Su contenido es una estructura fácilmente reconocible, por la subdivisión en capítulos y temas que siguen los períodos básicos del calendario escolar. Ahora bien, el análisis de ellos respecto a cómo se intentan desarrollar las fórmulas para el cálculo

de volumen de un cuerpo geométrico poliedro se remite a analizar si se da el ciclo Explorar-Conjeturar-Explorar-Organizar una demostración y a qué niveles de pensamiento geométrico llega un estudiante mediante la propuesta. Asimismo, se tienen en cuenta las fases de enseñanza a la hora de idear una propuesta innovadora.

Por otro lado, Chevallard (1991; citado en Bravo y Cantoral, 2012) introduce la expresión de transposición didáctica para nombrar al proceso de transformación de un conocimiento desde que es “objeto del saber”, a “objeto a enseñar” y, por último, a “objeto de enseñanza” cuando tiene un tratamiento didáctico. La teoría de Transposición Didáctica considera que las transformaciones que sufre el conocimiento matemático empiezan en la misma actividad de la comunidad científica, pues con comunicar hallazgos, se suprimen todas las reflexiones inútiles, todo proceso errático, las confusiones y discusiones con pares. De esta manera, el conocimiento producido para comunicarse se despersonaliza, es sacado de su contexto y su tiempo. Es por esto que Chevallard sostiene que la transposición didáctica se desarrolla en gran parte en la comunidad científica y prosigue en el entorno del sistema de enseñanza (más exactamente la noosfera).

En definitiva, un conocimiento matemático, cuando es introducido en el currículum escolar y en la escuela, experimenta transformaciones en el proceso de su tratamiento didáctico, proceso que hace que el saber a enseñar sea distinto del saber enseñado. Desde esta perspectiva, los libros de texto presentan una propuesta del saber a enseñar (índice temático) y un tratamiento didáctico (definiciones, explicaciones, gráficas, ejemplos resueltos, etc.); es decir, una forma de enseñar.

Dado que los libros de texto cumplen la función didáctica de proporcionar situaciones de aprendizaje, los autores de estos, a partir de su concepción epistemológica y su experiencia didáctica, organizan contenidos, utilizan recursos técnicos y eligen la forma discursiva de presentar sus contenidos. En este sentido, los manuales registran: los saberes a enseñar y los saberes enseñados como se muestra en la Figura 1, lo que permite ver que los textos presentan de manera explícita un tratamiento didáctico de los saberes matemáticos que su contenido delimita. Chevallard llama a esta explicitación discursiva como “textualización” del saber, la cual conduce, en un primer momento, a la delimitación de saberes “parciales”, cada uno de los cuales se expresa en un discurso casi autónomo. En otras palabras, la delimitación de contenidos y de la profundidad de las explicaciones es un proceso necesario para comunicar el saber a enseñar en los libros. De esta necesaria delimitación del saber se derivan otras transformaciones que se producen en el proceso de transposición, como son la

desincretización del saber, la descontextualización del saber, la despersonalización del saber y la programabilidad de la adquisición del saber.

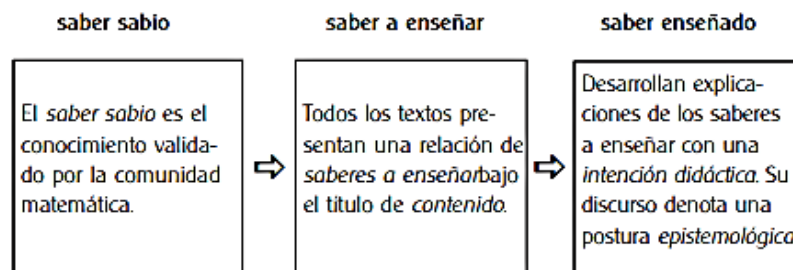


Figura 1. Del saber sabio al saber enseñado

La segmentación del saber tiene que ver con la separación de conceptos que están fuertemente imbricados, en este sentido, se produce una segmentación del saber y por ello a este proceso se le denomina desincretización del conocimiento. La delimitación del saber implica también un proceso de descontextualización, es decir, se desubica al saber de la red de problemáticas y problemas que le dieron sentido en su proceso de creación. Por otro lado, la comunicación escrita de hallazgos matemáticos implica la construcción de un discurso despersonalizado en tanto no muestra los errores, hipótesis inadecuadas, intentos fallidos, que son parte de su creación y realización. Es decir, el sujeto queda fuera de su producción. Esto ha producido una visión del aprendizaje para la cual el error es una simple falta y no es visto como una parte constitutiva del proceso de construcción del saber. Por último, la puesta en texto del conocimiento matemático implica una secuenciación de los saberes a enseñar; esto es, se establece una exposición de contenidos como una progresión de conocimientos adecuada para el aprendizaje. Tal concepción del aprendizaje conduce a la memorización de los contenidos por parte de los estudiantes, pues el aprendizaje del saber no es lo mismo que el texto del saber.

Desde la perspectiva que aborda este trabajo, el seguimiento de las explicaciones de un saber específico en los textos permite identificar ciertas problemáticas que para quién busca entender tal saber, se convierten en obstáculos para poder construir significados más elaborados y completos del concepto en cuestión.

2.4. Cuerpos geométricos poliedros

A continuación, se exponen dos definiciones de cuerpos geométricos poliedros, una concepción acerca de su enseñanza en el Ciclo Básico de la educación secundaria y de la importancia de que se contemple como contenido curricular.

Definición de Poliedro como “saber a enseñar”

Los poliedros son cuerpos geométricos que tienen todas sus caras planas y se clasifican en prismas y pirámides.

- Los prismas tienen dos caras paralelas (bases) y sus caras laterales son paralelogramos. En los prismas rectos, las caras laterales son rectángulos.
- Las pirámides tienen una sola base y sus caras laterales son triángulos. En las pirámides rectas, las caras laterales son triángulos isósceles congruentes.

Definición de Poliedro como “saber científico”

El conjunto de puntos del espacio formado por la unión de un abierto conexo y su frontera es un poliedro si la frontera está constituida por un número finito de polígonos. La frontera de un poliedro se llama superficie poliédrica y los polígonos que la componen son las caras del poliedro. Los lados y los vértices de dichos polígonos son, respectivamente, las aristas y los vértices del poliedro y de la superficie poliédrica. Un poliedro es convexo si está contenido en uno de los dos semiespacios que determina una de sus caras (Figura 2).

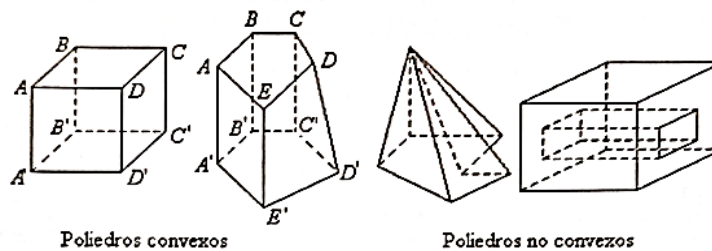


Figura 2. Tipos de poliedros

El DCJ y los Núcleos de Aprendizaje Prioritarios sugieren trabajar con cuerpos geométricos poliedros en el primer año de escolaridad secundaria. Ambos documentos curriculares ubican este contenido dentro del eje de “Geometría y Medida”. En particular el DCJ explicita algunas consideraciones metodológicas al respecto. En general, le da valor al trabajo con Poliedros y sugiere realizarlo mediante la utilización de elementos tradicionales y de software de geometría dinámica. En particular, menciona que tanto las construcciones como el establecimiento de relaciones que pueden conjeturarse a partir del tratamiento dinámico, siempre deben estar mediadas por un proceso de validación que permita reconocer las limitaciones de las pruebas empíricas y favorezca la entrada a la argumentación deductiva. Por otra parte, se menciona que en este año de escolaridad es recomendable utilizar y explicitar las propiedades de figuras y cuerpos geométricos en la resolución de problemas, así como también se requiere la producción y comparación de fórmulas para analizar las

variaciones de volúmenes, en función de la variación de diferentes dimensiones de cuerpos. También se consideran los desarrollos planos de los cuerpos geométricos en general.

Por otro lado, el interés por el mundo de los poliedros deriva de que es un mundo de tres dimensiones que admite con flexibilidad organizaciones locales y los objetos de dos y una dimensión están presentes de forma clara y transparente. El mundo de los poliedros ofrece diversidad de posibilidades para desarrollar un trabajo intuitivo-experimental que permita desarrollar el pensamiento lógico inductivo y de aquí deviene su gran importancia. Además, un curso de geometría organizado desde el punto de vista espacial puede hacer contribuciones importantes a la educación superior, la cual puede presentar a los estudiantes una mejor comprensión del entorno. Puede convencer al futuro no matemático de que la geometría es una herramienta importante para describir y comprender la naturaleza.

Según Guillén (2010), los estudiantes necesitan fundamentalmente una comprensión geométrica del espacio y, por ello, concibe la geometría como ciencia del espacio físico, del espacio en el que el niño vive y se desarrolla y que sirve como vehículo para desarrollar el pensamiento lógico. De esta manera, la geometría en los niveles elementales se concibe como un sencillo nivel de actividad para preparar a los estudiantes para niveles superiores. Además, Guillén (2010) citando a Freudenthal (1973), menciona que:

El material que se aporta a los estudiantes para desarrollar las clases pretende que estos actúen con lógica, pensando. Las manos y el cerebro trabajan conjuntamente para responder la cuestión de cómo está hecha una cosa concreta. Si en ese nivel se dan definiciones, estas serán genéticas, esto es, se expresa cómo está hecha la cosa que se define. Si después esta definición se reformula de un modo más formal, la nueva definición deberá conectar con la anterior. El último desarrollo lógico deberá quedar grabado en los estudiantes con el uso del material concreto (p.24).

Esta concepción de la geometría conlleva que su enseñanza comience por el espacio y además que se utilicen para su desarrollo materiales concretos. Freudenthal menciona diferentes razones sobre su postura, entre ellas una se apoya en lo que este autor denomina “el encaje”: el espacio con sus sólidos es más concreto que el plano con sus figuras, en el espacio hay multitud de relaciones, en el plano el camino hacia el análisis lógico es más corto, el espacio es más intuitivo y facilita más las actividades creativas.

Otra de las razones tiene que ver con que considera a los sólidos como una de las aproximaciones para las figuras planas o las líneas. Guillén (2010) menciona que en el análisis fenomenológico de “planos” y “rectas” que expone Freudenthal, los objetos del entorno y

los sólidos figuran como contextos a partir de los que se pueden constituir objetos mentales iniciales sobre estos conceptos y sus relaciones (igualdad, paralelismo, perpendicularidad) (p.25). Freudenthal también llama la atención sobre las consecuencias que tiene formar a los estudiantes solo en geometría plana: “No es de extrañar que los estudiantes que trabajan satisfactoriamente en la geometría plana, fallen en la espacial. Su imaginación espacial ha ido pereciendo por la demasiada ejercitación con la geometría plana” (Freudenthal, 1973; citado en Guillén, 2010).

3. Marco metodológico

En esta tercera parte se despliega la metodología de investigación. En primer lugar, se delimitan los sujetos del estudio. En un segundo apartado se presenta el enfoque, alcance y tipo de investigación. Seguidamente, en un tercer apartado, se describen las técnicas de recolección y el procesamiento de datos adoptado. Por último, se explicitan las categorías de análisis definidas en función al marco teórico desarrollado.

3.1. Sujetos

Para responder a los objetivos se realiza un análisis de ciertos libros de texto que circulan en el mercado y tratan el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos poliedros en los primeros años de escolaridad. A su vez, se consideran como sujetos complementarios otras propuestas que puedan encontrarse en línea, como portales educativos y en específico el soporte digital de geometría dinámica GeoGebra 3D.

A los libros de texto se accede a través de la web. En una primera fase exploratoria se eligieron seis libros de editoriales diversas y se consideraron solo cuatro de ellos (Becerril et al, 2017; Kaczor y Outón, 2017; Sessa et al, 2017; Pisano, 2018). Esta selección intentó reunir diversas propuestas. Para esto se tuvo en cuenta que los libros hayan sido publicados en los últimos cinco años, así como también el tipo de actividades que incluyen, las institucionalizaciones parciales que realizan y el tipo de enseñanza que buscan desplegar.

Respecto a las propuestas complementarias se realizó una búsqueda en los portales Educ.ar, Khan Academy y otros portales educativos publicados en el Directorio Web de Material Audiovisual de la Facultad de Ciencias Exactas, Agrimensura e Ingeniería de la UNR (Argentina). También se exploraron recursos en GeoGebra 3D y canales de YouTube, como

“Unicoos”, “Derivando”, “Julioprofe” y “Daniel Carreón”. La razón de investigar estos canales está ligada a que muchos estudiantes los utilizan en diversas ocasiones.

Puntualmente, se eligieron dos propuestas del portal Khan Academy ([Propuesta 1](#), [Propuesta 2](#)); una actividad con GeoGebra, para trabajar distintos significados de volumen, lo cual robustece conceptualmente las ideas y fundamentos matemáticos, más allá de una fórmula y tres videos de dos canales de YouTube: dos del canal “Susi Profe”, por el cual se optó debido a presentar una propuesta donde utiliza un material concreto y otra para la noción de secciones planas de Cavalieri ([Video 1](#), [Video 2](#)) y un video del canal “Acervo”, donde se presenta una propuesta para docentes y no para estudiantes.

3.2. Enfoque, alcance y tipo de investigación

Para llevar adelante el estudio se propone un *enfoque* cualitativo ya que no se efectúa una medición numérica ni se pretenden generalizaciones. La investigación cualitativa proporciona profundidad a los datos, dispersión, riqueza interpretativa, contextualización del ambiente o entorno, detalles y experiencias únicas. Asimismo, aporta un punto de vista “fresco, natural y holístico” de los fenómenos, así como flexibilidad (Sampieri et al, 2014). En efecto, en este estudio se procura analizar el tratamiento que realizan las propuestas de los libros de texto sobre la fórmula de volúmenes de cuerpos geométricos poliedros y dilucidar vías para desarrollar en los estudiantes habilidades de conjeturación y demostración.

El *alcance* otorgado a la investigación es descriptivo-interpretativo, pues se caracterizan las habilidades de conjeturación y demostración para el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos poliedros desarrolladas en materiales disponibles para el último tramo de escolaridad obligatoria. Asimismo, se reconocen y caracterizan, de forma complementaria, otros recursos como softwares de geometría dinámica o materiales concretos, que potencien el desarrollo las habilidades de orden superior.

Por otro lado, el *tipo de investigación* es de diseño dado que el propósito integral del recorrido consiste en elaborar una propuesta innovadora a partir de la información considerada en el trabajo previo con los materiales.

3.3. Técnicas de recolección y procesamiento de la información

Para la *recolección de la información* se realiza un análisis documental de los materiales seleccionados, con el fin de construir una propuesta innovadora para la enseñanza del contenido mencionado, que sustente de modo fundamentado maneras robustecidas de hacer

Matemática hacia la consolidación científico-académica. Este análisis se realiza a partir de tres categorías de análisis, que se han delimitado en concordancia con los objetivos del estudio. Respecto al *procesamiento de datos*, se utiliza el análisis de contenido ya que se trata de describir y caracterizar propuestas de libros de texto y de portales educativos en línea en base a las categorías de análisis que se describen en el siguiente apartado.

3.4. Categorías de análisis

En función de las consideraciones que se presentaron en el marco teórico del trabajo, la investigación se organizó en base a tres categorías de análisis:

Cuerpos Geométricos Poliedros en Libros de Texto (CL)

Se considera cómo están presentes los cuerpos geométricos poliedros dentro de las propuestas editoriales, cómo se aborda el contenido y, por último, qué niveles de pensamiento geométrico de Van Hiele puede alcanzar un estudiante.

Cuerpos Geométricos Poliedros en Recursos Complementarios (CRC)

Se efectúa una caracterización y descripción del recurso/material elegido, así como de la propuesta en la que se lo enmarca, para posteriormente determinar qué niveles de pensamiento geométrico de Van Hiele se promueven.

Propuestas Innovadoras de Enseñanza (PIE)

Idear una propuesta innovadora, requiere del análisis previo para descartar prácticas que no propicien el desarrollo de las habilidades de conjeturación y demostración para el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos poliedros, pero también, de aportes de otros recursos relacionados al contenido elegido.

Esta categoría tiene su génesis de modo transversal a las anteriores, pues para proponer tales innovaciones se requiere ir entramando los materiales existentes seleccionados, para estar en condiciones de determinar en qué se pueden mejorar de forma que se avance significativamente hacia el rol protagónico de la geometría 3D en la actualidad para una alfabetización matemática de los ciudadanos.

4. Resultados

Los principales hallazgos del estudio se presentan en función a las categorías de interés que se han considerado propicias para el entramado empírico-conceptual correspondiente.

4.1. Caracterización de habilidades de conjeturación y demostración desarrolladas en libros de texto

Se procedió a describir los cuatro libros seleccionados y se analizó qué niveles de Van Hiele podría llegar a alcanzar un estudiante con dichas propuestas.

4.1.1. Descripción de los libros de texto

Becerril et al (2017)

- Parte del libro en el que se abordan los cuerpos geométricos poliedros:

En este libro, el contenido correspondiente a cuerpos geométricos poliedros se encuentra incluido dentro del penúltimo capítulo, esto es, el capítulo nueve del libro (p.131). En el capítulo siete se trabaja con perímetro y área de figuras planas, mientras que en el capítulo ocho se desarrollan contenidos de proporcionalidad.

- De qué manera se aborda (descripción sintética y detallada), qué tipo de actividades se presentan:

Al principio del capítulo se cuenta la historia de Herón y Arquímedes, la cual induce una forma de comparar volúmenes de objetos. Luego, se presentan varios tipos de cuerpos geométricos (poliedros con diferentes bases y redondos) y se define qué es un desarrollo plano. Posteriormente, hay actividades donde se muestran algunos de estos y se pide determinar a qué cuerpo específico corresponde. En otras actividades también se pide dibujarlos.

En la Figura 3 se muestra una actividad y una observación que se titula como “machete”, todo a la misma altura de la página.

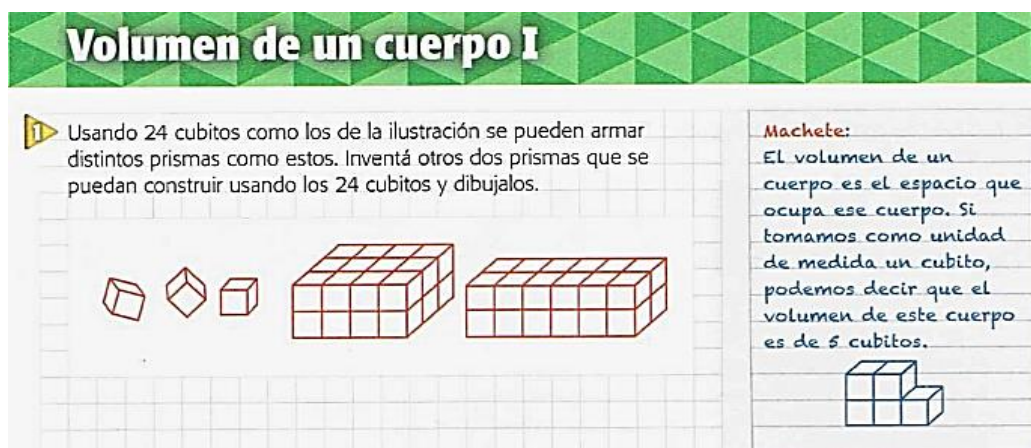


Figura 3. Introducción al cálculo de volúmenes (Becerril et al, 2017, p.134)

En el “machete” se presenta un ejemplo de un cuerpo sencillo formado solo por una fila de cubos y dos pisos de cubos de alto. Esto permite ver fácilmente el volumen que este ocupa.

A su vez, del lado izquierdo se muestran prismas rectangulares formados por 24 cubitos y se pide armar otros prismas distintos con la misma cantidad de cubitos.

En una segunda actividad se presenta un cuerpo geométrico poliedro no convexo formado por cierta cantidad de cubitos. Se indica que el cuerpo no tiene huecos ni salientes que estén ocultos y se pide calcular su volumen. Otra de las actividades muestra tres prismas, dos de ellos cubos y el tercero un prisma de base rectangular, y se pide determinar cuál de ellos tiene mayor volumen. También se presenta la actividad que se expone en la Figura 4.

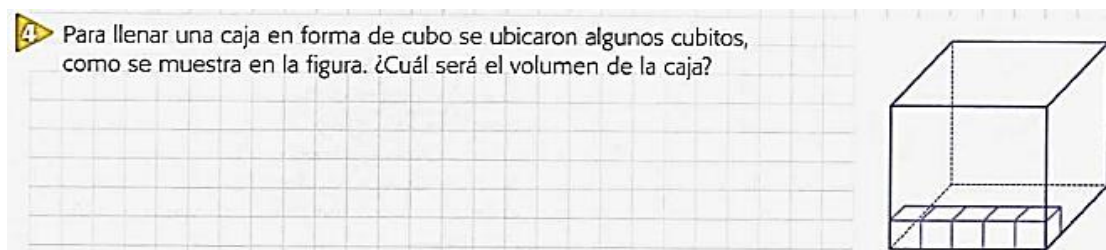


Figura 4. Actividad 4 del capítulo 9 (Becerril et al, 2017, p.135)

En esta misma parte, en una de las actividades se especifica cuántos cubitos caben en una arista de un cubo y cuántos cubitos caben por cada arista de un prisma. A partir de esto, se pide determinar el volumen de los cuerpos geométricos y especificar cuál de ellos tiene mayor volumen. Por consiguiente, se realiza una pregunta para que respondan en parejas: “¿Es posible tener un prisma de base cuadrada de 900 cubitos de volumen?”. Para esto los estudiantes tendrán que pensar si 900 es un cuadrado perfecto. También, al querer introducir cierta generalidad se pregunta cómo harían para determinar el volumen de un cubo de n cubitos de aristas. Con esta pregunta se le da un cierre a la primera parte del capítulo.

En una segunda parte titulada como “Volumen de un cuerpo II” nuevamente se presenta otra observación bajo el nombre de “machete”. En él se menciona que el volumen de un cuerpo puede medirse utilizando diferentes unidades de medida, pero que la más convencional es el cm^3 . Luego se menciona una forma de medir el volumen de un cuerpo irregular que consiste en introducirlo a un recipiente graduado en cm y medir el agua desplazada.

En lo que sigue se propone una actividad en la que dadas las medidas de las aristas de un prisma se pregunta cuántos cubitos de 1 cm de arista caben en él. Posteriormente se presenta otra actividad en la que se pide determinar cuántos cubitos de 1 cm^3 se necesitan para el ancho de un prisma de caras rectangulares al que le caben 72 cubitos de 1 cm de arista, cuatro cubitos de alto y seis de largo. Con esta propuesta gradualmente se trata de inducir la fórmula de volumen.

A continuación, se presenta otra observación titulada como “machete” (Figura 5).

Machete:

Una forma de calcular el volumen de un prisma es averiguar cuántos cubos de 1 cm de arista se necesitan para armar la base del cuerpo, después multiplicar por la altura para saber cuántas de esas bases o “planchas” hacen falta. En este ejemplo, se podría multiplicar $6 \times 4 = 24$ cubitos o 24 cm^2 para saber la cantidad de cubitos de la base; como el prisma tiene 3 cm de altura, hay que multiplicar 24×3 y se obtiene 72 cm^3 .

También puede pensarse como superficie de la base \times altura; en el ejemplo anterior $24 \text{ cm}^2 \times 3 \text{ cm} = 72 \text{ cm}^3$. En general, para calcular el volumen de un prisma se puede hacer: Volumen del prisma = alto \times largo \times ancho. Como el cubo tiene todas sus aristas iguales, la fórmula para calcular su volumen se puede escribir así: Volumen del cubo = $a \times a \times a = a^3$.

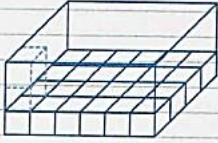


Figura 5. Fórmula para calcular el volumen de un prisma (Becerril et al, 2017, p.137)

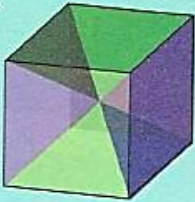
Aquí ya se introduce una manera de calcular el volumen de los prismas. Para esto no se da una fórmula de forma simbólica, sino que se explicita de qué forma puede calcularse. Incluso se menciona la superficie de la base, ya desligándose de la idea de los cubitos. Esto también se ve en la actividad que sigue donde se presentan dos cuerpos geométricos no convexos de los cuales solo se dan las medidas de las aristas en *cm* sin ningún tipo de relleno con cubitos y se pide calcular sus volúmenes.

Hasta aquí puede considerarse que las actividades presentadas resultan de la forma y en el momento en el que se abordan en el libro, como actividades del tipo exploratorias.

En páginas posteriores se comienza a introducir una forma de calcular el volumen de un cilindro y una vez finalizado este abordaje, se presenta la actividad que se muestra en la Figura 6.

Una vuelta de tuerca entre todos

Con 6 pirámides de base cuadrada se puede armar un cubo como se muestra en la figura.



¿Si la arista del cubo mide 4 cm, será cierto que el volumen de cada pirámide es $\frac{1}{3}$ del volumen del prisma de base cuadrada de 4 cm \times 4 cm y altura 2 cm?

Figura 6. Actividad acerca del volumen de las pirámides (Becerril et al, 2017, p.139)

Esta es la única actividad en la que se aborda el volumen de las pirámides. Luego, se presenta el metro cúbico y se comienza a proponer actividades en las que se miden y estiman volúmenes y donde se relaciona el centímetro cúbico con el metro cúbico. Además, se observa la diferencia entre capacidad y volumen, y se presentan actividades en las que se pide determinar si al modificar de cierta forma la medida de alguna arista de un prisma específico,

se realiza una variación similar en su volumen. Por último, se presenta una colección de actividades intramatemáticas para practicar lo dado en el capítulo. Estas actividades son de aplicación ya que “implican la aplicación de contenidos conceptuales aprendidos con anterioridad y que están asociados habitualmente a un aprendizaje memorístico” (Azcárate y Serradó, 2004, p.352).

Kaczor y Outón (2017)

- Parte del libro en el que se abordan los cuerpos geométricos poliedros:

En este libro el contenido correspondiente a cuerpos geométricos poliedros se encuentra incluido dentro del capítulo seis (p.117). En este mismo se incluyen áreas de cuerpos geométricos poliedros y redondos. En el capítulo dos se abordan las figuras planas y en el cuatro se incluye perímetros y áreas de figuras planas. Los demás capítulos no corresponden con contenidos relacionados estrechamente con cuerpos geométricos. El capítulo previo a áreas y volúmenes de cuerpos geométricos poliedros, aborda, al igual que en el libro anterior, proporcionalidad (gráfico cartesiano y funciones).

- De qué manera se aborda (descripción sintética y detallada) y tipos de actividades que incluye:


Al comienzo, se presenta una actividad diagnóstica titulada como “Esto ya lo sabía” donde se pide completar con el número de caras, vértices y aristas de algunos prismas. También se muestra un famoso jardín botánico en el que hay un invernadero en forma de pirámide y se pide completar los mismos datos. A continuación, se definen los prismas y pirámides, y se muestran imágenes de cuerpos geométricos poliedros rectos y oblicuos. Luego se aclara que se trabajará solo con cuerpos rectos.

Por otra parte, se presenta una actividad en la cual se pide completar de qué tipo de prisma o pirámide se trata (prismas y pirámides con diferentes tipos de bases). Luego se presenta la fórmula de Euler y se realizan actividades de reconocimiento de elementos de un cuerpo geométrico para luego aplicar la fórmula.

Se presentan los cuerpos geométricos redondos se los define brevemente y sobre algunas imágenes se indican elementos que componen a cada tipo (cono, esfera, cilindro). Luego se presenta una actividad donde se muestran ocho desarrollos planos y ocho carteles con nombres de cuerpos poliedros y redondos. La consigna consiste en indicar cuál corresponde con cuál. También se incluye una actividad en la que se presenta un desarrollo plano de un poliedro y se pregunta a qué poliedro regular corresponde.

Después de esto, se define área lateral y total de un cuerpo, aunque se indica que en páginas posteriores se encuentran las fórmulas de las áreas de los cuerpos, y se presentan actividades de aplicación para calcular áreas laterales y totales de diferentes poliedros.

Como se muestra en la Figura 7, se conceptualiza al volumen y se presenta el cubo de un centímetro de arista como unidad de medida para el volumen. Sin actividades previas, se muestra mediante un ejemplo cuál es el volumen de un prisma de base rectangular y se indica cómo fue calculado. Luego se describe una fórmula para calcular el volumen de un prisma cualquiera. También se muestra mediante un dibujo que el volumen de una pirámide es igual a un tercio del volumen de un prisma de igual base y altura.

 **Volumen**
 El volumen de un cuerpo es lo que mide el espacio que ocupa.
 Un cubo de 1 cm de arista ocupa un volumen de 1 cm^3 (un centímetro cúbico).

El prisma formado tiene $4 \cdot 3 = 12$ cubitos en la base y 2 cubitos de altura \rightarrow son 24 cubitos. Si cada cubito tiene 1 cm de arista, el volumen del prisma es de 24 cm^3 .

Volumen de un prisma: se calcula el **área de la base** y se la multiplica **por la altura del cuerpo**.

Volumen de una pirámide: tres pirámides como la dibujada ocupan el mismo volumen que el prisma. Por eso, para calcular el volumen de una pirámide, el **área de la base** se multiplica **por la altura del cuerpo y se divide por 3**.
 En la página 160 están las fórmulas de los volúmenes de los prismas y las pirámides.

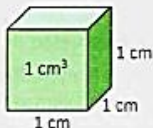
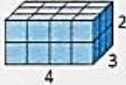
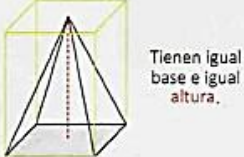




Figura 7. Volumen de prismas y pirámides (Kaczor y Outón, 2017, p.121)

Con respecto a los poliedros, se presentan actividades en las que se pide determinar el volumen de ciertos prismas y pirámides de los cuales se dan las medidas de las aristas. Otra de las actividades pide determinar la altura de un prisma, dados su volumen, así como la forma y perímetro de la base.

36. Observá este desarrollo plano y respondé.

- ¿A qué poliedro corresponde?
- ¿Cuál es el área lateral? ¿Y el área total?
- ¿Qué volumen tendrá el cuerpo una vez armado, si tiene una altura de 14 cm?

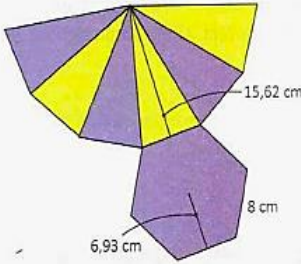


Figura 8. Actividades de aplicación de la fórmula de volumen (Kaczor y Outón, 2017, p.124)

Un desarrollo similar al descrito anteriormente se realiza para áreas y volúmenes de cuerpos redondos. Posteriormente, se proponen actividades de repaso de lo abordado al momento. Las actividades son de aplicación. En algunas de ellas se debe aplicar la fórmula de Euler, en otras se debe trabajar con desarrollos planos y solo dos actividades son de volumen (Figura 8).

Luego de esto se presenta un cuadro donde se muestran las relaciones entre el m^3 y sus múltiplos y submúltiplos, y las actividades que siguen se relacionan con pasaje de unidades. Posteriormente, se presentan las unidades de masas, se define densidad y se presentan actividades al respecto. En las últimas cuatro páginas del capítulo se presentan actividades que responden a los contenidos desarrollados. Las actividades relacionadas con volúmenes escasean.

Sessa et al (2017)

- Parte del libro en el que se abordan los cuerpos geométricos poliedros:

Este libro de texto cuenta con 12 capítulos. En el segundo se abordan contenidos relativos a triángulos y circunferencias y en el octavo contenidos relativos a ángulos, rectas perpendiculares y paralelas. Los demás capítulos se vinculan con contenidos relacionados al eje de Números y Operaciones o de Funciones. Lo respectivo a cuerpos geométricos poliedros se encuentra dentro del décimo capítulo llamado “Teorema de Pitágoras, Prismas y Pirámides”. En este también se aborda área y perímetro de figuras planas.

- De qué manera se aborda (descripción sintética y detallada) y tipos de actividades que se incluye:

Al comienzo del capítulo se presentan actividades que guían una demostración del Teorema de Pitágoras. Luego de esto, dadas algunas definiciones de perímetro y área se presentan actividades para calcular área y perímetros de figuras planas. Posteriormente se proponen actividades de comparación de áreas y luego se presentan actividades que guían el desarrollo de las fórmulas de área para el rombo y el paralelogramo.

Luego, se define a los prismas como se muestra en la Figura 9.

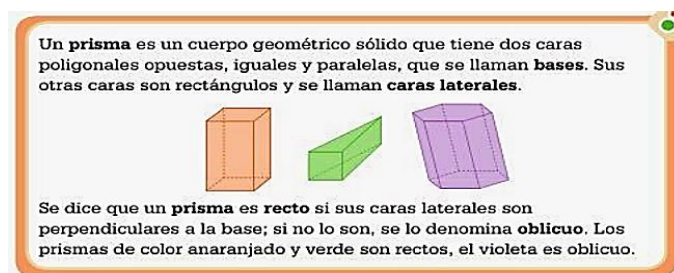


Figura 9. Definición de prisma (Sessa et al, 2017, p.147)

En esta definición se indica que los prismas son sólidos y en el lado derecho de la hoja se explica qué significa esto. A diferencia de los anteriores libros define qué significa que un prisma sea recto u oblicuo y se muestran ejemplos concretos de cada tipo.

En una actividad posterior, se muestran diferentes objetos reales que tienen forma de cuerpos geométricos y se pide determinar cuáles son prismas y qué cantidad de aristas, caras y vértices tienen estos. A la par de esta actividad se definen dichos elementos.

Luego se presenta una actividad del estilo “verdadero o falso” respecto a afirmaciones sobre prismas rectos. Y debajo de esta, una con el fin de identificar cantidad de caras, vértices y aristas que tiene un prisma específico. En esa misma se pide encontrar una fórmula para calcular la cantidad de caras, aristas y vértices de un prisma recto a partir del dato de que su base es un polígono de n lados.

En la página siguiente se definen las pirámides como se muestra en la Figura 10.

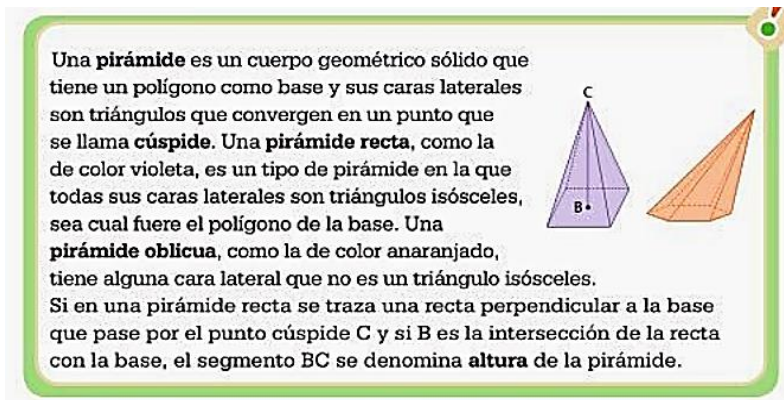


Figura 10. Definición de pirámides (Sessa et al, 2017, p.148)

Nuevamente se explica la diferencia entre una pirámide recta u oblicua y se muestran ejemplos de cada tipo. Además, se define la altura para el caso de la pirámide recta. También se presentan varias imágenes de velas y se pide determinar cuáles de ellas son pirámides rectas. Al igual que se realiza con los prismas, se presenta una actividad de verdadero o falso con el fin de que se comiencen a identificar algunos aspectos que se dan en las mismas. Posteriormente se pide determinar una fórmula para calcular la cantidad de caras, vértices y aristas de una pirámide recta a partir del dato de que su base es un polígono de n lados.

A continuación, se define el volumen de un cuerpo como la cantidad de espacio que ocupa. Se explica que para poder medirlo es necesario considerar un cuerpo como unidad de medida y calcular cuántas veces entra en el volumen a medir. Incluso se menciona que puede ocurrir que la unidad de medida no entre una cantidad entera de veces. Se presenta al metro cúbico como una de las unidades de medida más frecuentes y se menciona que representa al volumen

que ocupa un cubo de 1 m de arista. Sin embargo, luego presenta una actividad en el que pide considerar como unidad de medida al cubo de 1 cm de arista y determinar el volumen de dos prismas dados de los cuales se puede visualizar cuántos de estos cubos caben por cada cara.

Luego se presenta la actividad de la Figura 11, en la que se muestran las medidas de las aristas sobre el dibujo, pero no así, los cubos de 1 cm de arista por cada una de ellas. Se aclara que los cubitos pueden partirse por el apartado d).

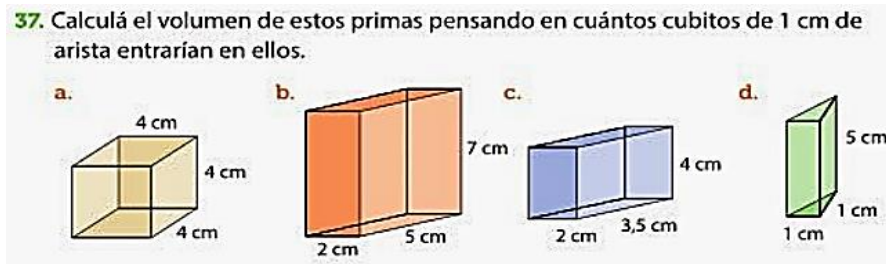


Figura 11. Actividad de cálculo de volumen (Sessa et al, 2017, p.148)

Posteriormente, se presenta una estrategia para calcular el volumen de un prisma recto, se aplica dicha estrategia a un ejemplo anterior y luego, se muestra la siguiente fórmula:

$$\text{Volumen del prisma} = \text{área de la base} \times \text{altura}$$

En la página siguiente se presenta una actividad de exploración para comenzar a pensar cómo calcular el volumen de una pirámide. En esta se muestra una pirámide de altura h y base cuadrada de lado L . Luego se pregunta si es correcto calcular su volumen al hacer $L^2 \cdot h$.

En esta propuesta también se pide buscar unos desarrollos planos de seis pirámides iguales de base cuadrada que se encuentran en otras páginas del libro. Propone armarlas, formar un cubo con ellas y luego calcular el volumen de una de las pirámides. Seguido de esto, se muestra la observación de la Figura 12, donde se demuestra una fórmula para el cálculo de volumen de cualquier pirámide.

En la actividad anterior armaron un cubo con 6 pirámides iguales y, por lo tanto, el volumen de cada pirámide es $\frac{1}{6}$ del volumen del cubo. Entonces, si L es la arista del cubo:

$$\text{Volumen de la pirámide} = \frac{L \cdot L \cdot L}{6} = L^2 \cdot \frac{L}{6}$$

Pero estas pirámides son muy especiales: el lado de la base mide el doble que la altura de la pirámide, es decir, $L = 2H$. Así, $\frac{L}{6} = \frac{2H}{6} = \frac{H}{3}$. Por otro lado, L^2 es el área de la base. Reemplazando en la fórmula anterior obtenemos la siguiente igualdad.

$$\text{Volumen de la pirámide} = \frac{\text{área de la base} \cdot H}{3}$$

Si bien esta fórmula fue deducida para pirámides muy particulares, los matemáticos han demostrado que sirve para cualquier pirámide, aunque no podamos armar un cubo con 6 de ellas.

Figura 12. Formula de volumen para pirámides (Sessa et al, 2017, p.150)

A modo de ejercitación, se presentan algunos problemas de aplicación para calcular volúmenes de ciertas pirámides o cuerpos geométricos que resultan de cortar a una pirámide. En una nueva página se presentan actividades para comparar volumen y área total de un cuerpo. En esta parte se concluye que hay prismas que tienen el mismo volumen, pero las sumas de las áreas de las caras son distintas y que hay cuerpos de diferente volumen, pero las sumas de las áreas de las caras son las mismas.

Por último, se proponen varias actividades que integran los contenidos dados a lo largo del capítulo. De ellas solo tres tratan sobre el cálculo de volúmenes (Figura 13).

10. Esta figura representa a un cuerpo que está formado por un prisma de base rectangular y una pirámide. Usá las medidas que están en la figura para calcular su volumen.

.....

.....

.....

11. Decidan, con un compañero, si esta afirmación es verdadera o falsa. Justifiquen su decisión. Si se duplica la altura de un prisma de base rectangular, entonces se duplica su área lateral.

.....

.....

.....

12. Esta figura representa una pirámide de base cuadrada. Calculá el valor de x , que es la altura de los triángulos de las caras laterales.

.....

.....

.....

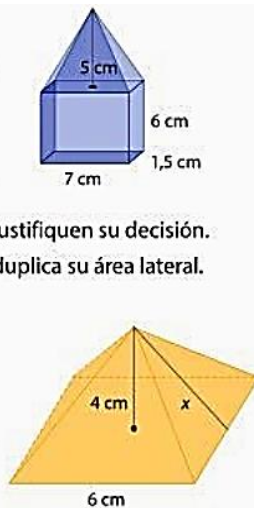


Figura 13. Actividades sobre el cálculo de volúmenes de prismas y pirámides (Sessa et al, 2017, p.153)

Pisano (2018)

- Parte del libro en el que se abordan los cuerpos geométricos poliedros:
- Este libro a diferencia de los demás está dividido en temas. El tema 23 es el de cuerpos en el espacio. En el tema 20 se presenta perímetro de figuras y en el 21 el área de figuras.
- De qué manera se aborda (descripción sintética y detallada) y tipos de actividades que incluye:
- Al principio de esta propuesta se define a un cuerpo como un objeto que ocupa un lugar en el espacio donde al espacio se lo identifica con las tres dimensiones. También se define al volumen de un cuerpo como la cantidad de espacio que ocupa y se presenta un ejemplo de una cacerola.
- Luego, se pregunta para qué sirve calcular el volumen de un cuerpo y se describen los cuerpos huecos y macizos. Sobre los cuerpos macizos se pone como ejemplo una bolita de vidrio y se dice que el volumen será la cantidad de vidrio que se necesite para construir dicha bolita.

Sobre los cuerpos huecos se pone como ejemplo una caja y se dice que su volumen será la cantidad de cosas que se pueda meter dentro de esa caja.

En esta misma página se define la superficie de un cuerpo como la suma de las superficies de las caras externas de ese cuerpo y se presenta un cuadro con diferentes tipos de cuerpos geométricos, que se muestran en la Figura 14.

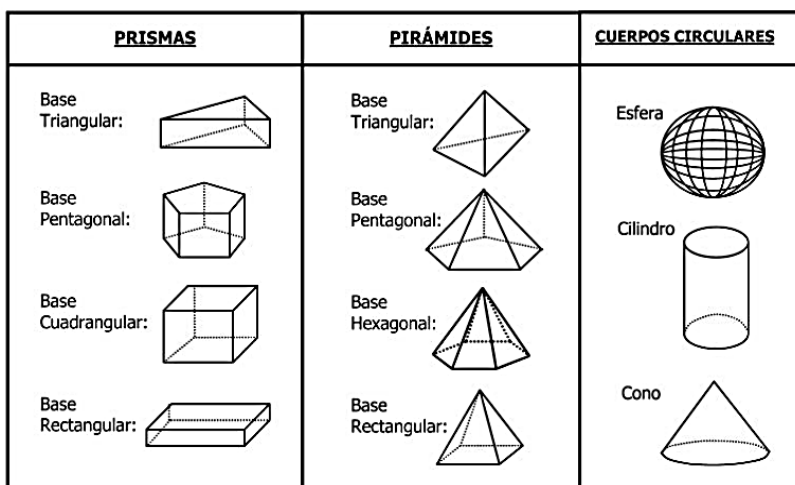


Figura 14. Cuerpos Poliedros y Redondos (Pisano, 2018, p.174)

A partir del cuadro, se establece una diferencia entre los prismas y las pirámides, esta es, que los prismas tienen “piso y techo” mientras que las pirámides solo tienen piso ya que son puntiagudas. También se muestran cuerpos que son unión de otros y se dice que se va a trabajar con ellos.

Sin ningún tipo de introducción se presenta un cuadro con fórmulas para calcular áreas laterales y totales y volúmenes de cuerpos geométricos (Figura 15).

FORMULAS:

En este cuadro tenemos las fórmulas que podemos usar para calcular el área lateral, total o el volumen de cualquier prisma o pirámide.

Para el cilindro se usan las fórmulas de los prismas (el cilindro es un prisma de base circular)

Para el cono se usan las fórmulas de las pirámides (el cono es una pirámide de base circular)

θ Prismas y Pirámides

	PRISMAS	PIRÁMIDES
Área Lateral	Perímetro de la base * Altura	$\frac{\text{Perímetro (de la Base)} \cdot \text{Apotema Lateral} (^*)}{2}$
Área Total	Área Lateral + 2 * Área base	Área Lateral + Área de la base
Volumen	Área de la base * Altura	$\frac{\text{Área (de la Base)} \cdot \text{Altura}}{3}$

Figura 15. Fórmulas de áreas y volúmenes de poliedros (Pisano, 2018, p.175)

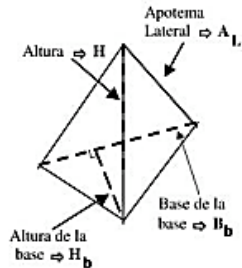
Luego de esto se muestra la fórmula del área de la esfera y de su volumen, y lo mismo se realiza con el cono y el cilindro. A continuación, se presenta un ejemplo en el que se debe calcular el área lateral, total y el volumen de un cono, del cual se dan solo algunos datos.

Más Fórmulas:

Si bien, ya vimos fórmulas generales para los cuerpos según sean prismas o pirámides. También podemos utilizar estas fórmulas para los cuerpos mas comunes que ya están desarrolladas en función de los elementos de cada cuerpo en particular.

Pirámides mas comunes:

Pirámide Base triangular



$$\text{Área Lateral} = \frac{P_b \cdot A_L}{2}$$

$$\text{Área Total} = \text{Área Lat} + \frac{H_b \cdot B_b}{2}$$

$$\text{Volumen} = \frac{\left(\frac{H_b \cdot B_b}{2}\right) \cdot H}{3}$$

Pirámide Base Cuadrangular

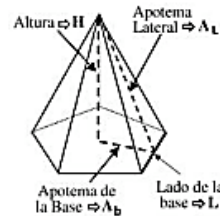


$$\text{Área Lateral} = \frac{(2B_b + 2H_b) \cdot A_L}{2}$$

$$\text{Área Total} = \text{Área Lat} + H_b \cdot B_b$$

$$\text{Volumen} = \frac{H_b \cdot B_b \cdot H}{3}$$

Pirámide Base Pentagonal



$$\text{Área Lateral} = \frac{5 \cdot L \cdot A_L}{2}$$

$$\text{Área Total} = \text{Área Lat} + \left(\frac{5 \cdot L \cdot A_b}{2}\right)$$

$$\text{Volumen} = \frac{\left(\frac{5 \cdot L \cdot A_b}{2}\right) \cdot H}{3}$$

Si la base fuera un polígono de más lados, por ejemplo un hexágono, en lugar de 5 debemos poner 6, o el número de lados que corresponda.

Figura 16. Fórmulas de áreas y volúmenes de pirámides en función de sus elementos (Pisano, 2018, p.177)

Se muestran más fórmulas para calcular áreas y volúmenes de cuerpos geométricos poliedros, pero ahora en función de los elementos de cada cuerpo. En la Figura 16 se pueden observar algunas fórmulas de las Pirámides. Lo mismo se realiza con ciertos prismas particulares.

Paralelepípedo	Base					
	Base	Altura	Altura	Area Lateral	Area Total	Volúmen
	2 cm	10 cm	5 cm			
	5 cm	6 cm	4 cm			
	3 cm	4 cm	1 cm			
	5 cm	20 cm	2 cm			
	4 cm	6 cm	2 cm			
	8 cm	7 cm	3 cm			
	8 cm	15 cm	10 cm			

6) Paralelepípedo	Base					
	Base	Altura	Altura	Area Lateral	Area Total	Volúmen
		5 cm	6 cm	cm ²	cm ²	150,00 cm ³
		6 cm	8 cm	cm ²	cm ²	192,00 cm ³
		8 cm	5 cm	cm ²	cm ²	40,00 cm ³
		9 cm	2 cm	cm ²	cm ²	36,00 cm ³
		7 cm	3 cm	cm ²	cm ²	21,00 cm ³
		4 cm	4 cm	40,00 cm ²	cm ²	cm ³
		2 cm	8 cm	64,00 cm ²	cm ²	cm ³

Figura 17. Ejercicio de aplicación de fórmulas (Pisano, 2018, p.178)

Posteriormente, se propone un ejercicio de aplicación de fórmulas (Figura 17), en el cual para diferentes cuerpos geométricos se muestran cuadros en los que se especifican ciertas medidas de estos cuerpos y se debe calcular el área lateral y total y el volumen de los mismos. En otros

cuadros, dadas la altura de la base, la altura del cuerpo y el volumen, se solicita calcular las áreas laterales y totales y el ancho de la base del cuerpo.

Otras actividades que se presentan son ejercicios intramatemáticos para aplicar fórmulas. Algunos de los cuerpos que se muestran en estos son unión de cuerpos poliedros y redondos. Por último, se proponen algunas actividades de aplicación con contexto.

4.1.2. Articulación con los niveles de Van Hiele

En la Tabla 1 se presenta una breve descripción acerca de los niveles de pensamiento geométrico relativos al tema que ha sido posible identificar en las cuatro obras de interés.

Tabla 1. Articulación de los Niveles de Van Hiele con los libros de texto

Libros	Niveles	Forma en que alcanzan esos niveles
Becerril et al (2017)	3	Se considera que con esta propuesta un estudiante no alcanzaría los niveles 1 y 2 de Van Hiele ya que no hay momentos de visualización de los poliedros ni se los reconoce por sus propiedades. Podrían llegar a alcanzar un nivel 3 ya que las actividades en su conjunto pueden llevar a conjeturar una forma de calcular el volumen de un prisma y realizar una justificación informal del hecho. No se considera que se alcancen los niveles 4 y 5 ya que no se realizan demostraciones ni se establecen relaciones entre ellas.
Kaczor y Outón (2017)	2	En esta propuesta no se considera que un estudiante pueda alcanzar un nivel 1 ya que no hay una etapa de reconocimiento de los cuerpos. Se podría alcanzar un nivel 2 ya que al principio se propone identificar cantidad de vértices, aristas y caras de ciertos cuerpos geométricos. Luego se los define y a continuación se propone una actividad donde los alumnos deberán determinar qué tipo de prisma o pirámide es según la cantidad de elementos que poseen. También se pueden establecer relaciones entre sus elementos. Estas cuestiones se corresponden con un nivel 3; aunque en un nivel 3 deben ser capaces de realizar argumentaciones informales, algo que desde esta propuesta no se considera por lo cual es un nivel 3 que no se llega a concretar. No se considera que se alcance un nivel 4 o 5, ya que no se efectúa ningún tipo de demostración. De hecho, si bien en un nivel 3 se podría realizar una justificación informal de las fórmulas de volumen, en este caso, solo se imponen.
Sessa et al (2017)	1 a 4	En esta propuesta se podría considerar que se alcanza un nivel 1 ya que luego de realizar definiciones sobre los poliedros, los estudiantes deben realizar un reconocimiento de prismas a partir de objetos de la vida diaria. También se realiza una actividad en la que se debe determinar si ciertas propiedades son verdaderas o falsas. Estas están basadas en atributos visuales, así que con esta se profundiza en un nivel 1. Se alcanza un nivel 2 ya que se reconocen y utilizan los elementos que caracterizan a los poliedros. Se propone una actividad para establecer relaciones entre las aristas, vértices y caras. Un estudiante podría alcanzar un nivel 3 ya que deberá realizar justificaciones informales. También se podría decir que con esta propuesta se realiza una demostración del volumen de la pirámide y para ella se realiza una relación con el volumen de un cubo, por lo cual se alcanza un nivel 4.
Pisano (2018)	-	En esta propuesta no se considera que se alcance ningún nivel ya que no hay una etapa de reconocimiento ni de análisis de los elementos de los cuerpos geométricos. Hay una especie de clasificación de los cuerpos, aunque es impuesta y no surge de un análisis que deban realizar los estudiantes. Las fórmulas son dadas y no se realizan actividades que induzcan a algún tipo de demostración.

4.2. Caracterización de habilidades de conjeturación y demostración que fomentan otros recursos

En este segundo apartado de Resultados se pretende realizar aportes complementarios sobre otros recursos que podrían fomentar las habilidades de conjeturación y demostración para el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos poliedros en estudiantes del ciclo básico de la educación secundaria. Para esto dividimos este análisis en dos subcategorías, una de ellas se corresponde con la descripción de las propuestas online y la otra con la articulación de ellas a los niveles de Van Hiele.

4.2.1. Descripción de los recursos en línea

Canal de YouTube “Acervo”

- De qué manera se aborda el contenido (descripción sintética y detallada):

Este material audiovisual se presenta como una guía para el docente. En el mismo, una docente realiza indicaciones sobre el abordaje de la fórmula para calcular el volumen de prismas rectos cuya base sea un triángulo o un cuadrilátero.

Se propone calcular el volumen de prismas a partir del conteo de cubos unitarios como una forma de recuperar conocimientos previos y se establecen algunos objetivos, estos son:

- Construir una fórmula para justificar el volumen de un prisma recto de base cuadrangular.
- Construir una fórmula para justificar el volumen de un prisma recto de base triangular.
- Construir una fórmula general para calcular el volumen de prismas rectos de base cuadrangular o triangular.
- Utilizar la fórmula para resolver problemas de volumen para determinar alguna de las dimensiones utilizadas.

Luego de establecer estos objetivos, se comienza con la construcción de una fórmula de volumen para un prisma de base rectangular. En este momento se muestra un cubo de 1 cm^3 y otro cubo formado por varios cubitos de 1 cm^3 y se pregunta cuál es su volumen, cuáles son las medidas de las aristas, qué relación existe entre el volumen total y las medidas de las aristas y cuál es entonces la fórmula para calcular el volumen de un prisma de base cuadrangular. Además, se menciona que el tratamiento debe ser gradual y constructivo y que esas son algunas preguntas que pueden guiar una planificación.

Después de esto, se presentan algunas indicaciones respecto al segundo objetivo, construir una fórmula para justificar el volumen de un prisma recto de base triangular. Nuevamente se realizan algunas preguntas generales que pueden guiar la planificación: ¿Qué ocurre con el

volumen si dividimos por la mitad al prisma de base cuadrada? ¿Qué figura tiene ahora la base del prisma recortado a la mitad? ¿Cómo modificarías la fórmula que obtuviste para calcular el volumen de un prisma de base cuadrangular para obtener una nueva fórmula para obtener el volumen de un prisma de base triangular?

El tercer objetivo consiste en construir una fórmula general para calcular el volumen de un prisma de base cuadrangular o triangular. Se proponen realizar las siguientes preguntas e indicaciones: ¿Cómo es la base del prisma? Anota la fórmula que encontraste para calcular el volumen de un prisma recto de base cuadrangular. ¿Cómo calcular el área de la base de un rectángulo? Anota la fórmula que encontraste para calcular el volumen de un prisma recto de base triangular. ¿Puedes incluir el área de la base en tu fórmula del volumen en ambos prismas? Anota tu nueva fórmula para calcular el volumen de un prisma recto de base rectangular o triangular.

Luego, se realizan algunas observaciones. Entre ellas se menciona que no basta con la construcción de conocimientos, sino que también es necesario formalizar las expresiones que modelan el volumen de prismas rectos de base cuadrangular y triangular. También se sugiere no olvidar de presentar la expresión general para prismas rectos de base cuadrangular, rectangular o triangular ya que esa será la base para extenderla hacia los prismas rectos de base poligonal. Desde acá se concluye que el volumen será el área de la base por la altura.

Para finalizar se propone verificar que el estudiante logró los aprendizajes esperados, para esto se plantea un cierre con actividades en donde el estudiante deba poner en práctica lo aprendido.

Por último, se mencionan algunas dificultades que pueden aparecer durante la enseñanza, algunas de ellas son:

- Explicar las fórmulas sin que el alumno haya intentado su construcción.
- Limitarse a encontrar el volumen a partir de fórmulas y evitar encontrar otras dimensiones dado el volumen.
- No utilizar la generalización encontrada del volumen como base por altura.
- Confundir el volumen con la capacidad y sus unidades.
- No utilizar problemas como medio y como meta de aprendizaje.

También se realizan observaciones sobre cómo superar dichas dificultades, entre ellas se menciona utilizar preguntas de reflexión que guíen a los estudiantes en la construcción de fórmulas; acompañar al alumno en el análisis de las propiedades de los prismas rectos; formalizar las fórmulas construidas y analizar sus variables, significados y unidades; plantear

problemas para el cálculo de volumen de prismas rectos de base cuadrangular o triangular; definir con precisión y ejemplos, los conceptos de volumen y capacidad así como sus unidades.

Canal de YouTube "Susí Profe"

- De qué manera se aborda el contenido (descripción sintética y detallada):

De este canal se tomaron dos videos, uno de ellos trata sobre el área y el volumen de prismas y cilindros. El segundo trata sobre el área y el volumen de la pirámide.

En primer lugar, se describe el video de área y volumen del prisma. Al comenzar, se muestran los desarrollos planos de un prisma de base cuadrada y de un cilindro. Se recuerda que el prisma es un poliedro ya que tiene todas sus caras planas. Además, se menciona que los prismas en particular son poliedros que tienen dos bases a diferencia de las pirámides que también son poliedros que solo tienen una. También se menciona que los prismas se nombran conforme al polígono que tengan en la base y se dan algunos ejemplos. En estos ejemplos se reconoce que la cantidad de lados de la base determina la cantidad de caras laterales del prisma. Luego, se explica el desarrollo plano del prisma y se menciona que los desarrollos planos ayudarán a deducir las fórmulas, incluso si estas se olvidan con el tiempo, se sugiere que volver a ellos será de ayuda. Una vez que se comentan estas características del prisma, se realiza algo similar con el cilindro.

En el video se presentan al prisma y al cilindro juntos ya que se menciona que, al obtener la fórmula para el cálculo del área y el volumen del primero, es más sencillo obtener las mismas fórmulas para el segundo.

Luego se explica que para calcular el área total del prisma hay que calcular el área de cada una de sus caras y que el área total es igual al área lateral más el área de las dos bases. Se escribe la fórmula como sigue: $A_T = A_L + 2A_B$. También se explica cómo calcular el área lateral y el área de las bases. Respecto a la primera, se muestra una forma de calcularla a partir de interpretar el desarrollo plano (Figura 18) y se menciona que se puede obtener al calcular el área del rectángulo del desarrollo plano que queda determinado por los rectángulos que forman las caras laterales. Se explica que la altura de este rectángulo coincide con la altura del prisma y la base coincide con el perímetro de la figura de la base del prisma.

A continuación, se prosigue con el volumen del prisma. Se explica que en este caso como la base es un cuadrado, el volumen va a ser la cantidad de veces que entra ese cuadrado hasta rellenar el prisma. Se concluye que el volumen es igual al área de la base por la altura y se escribe como sigue: $V = A_B \cdot h$.

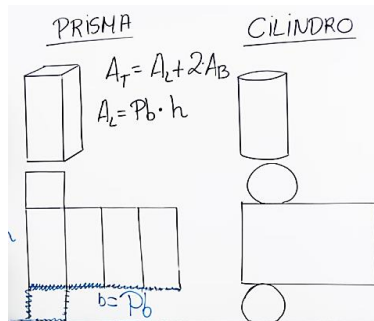


Figura 18. Desarrollo plano del prisma cuadrangular y áreas laterales y totales ([Enlace Canal Susi Profe](#))

Una vez realizado esto, continúa con el área lateral del cilindro y se explica que se puede utilizar la misma fórmula general que antes solo que ahora el perímetro es de un círculo y si se calcula y suma el área de las bases al área lateral se obtiene el área total. También se explica que la fórmula de volumen del prisma sirve para el cilindro ya que el volumen de este será la cantidad de veces que entre en él, la figura de la base, en este caso, un círculo de cierta unidad de medida de espesor.

Por último, se realizan dos ejercicios, uno para calcular el área total de un prisma y su volumen y otro donde se calcula lo mismo para un cilindro. En el primer ejercicio se muestra un prisma cuadrangular de altura 10 *cm* y lado de la base 5 *cm*. Al comenzar se calcula el área lateral, donde se identifica que el perímetro de la base es $4 \cdot l$. Luego se calcula el área total para cual se identifica que el área de la base es l^2 y, por último, se calcula el volumen del prisma. La pizarra queda como se muestra en la Figura 19.

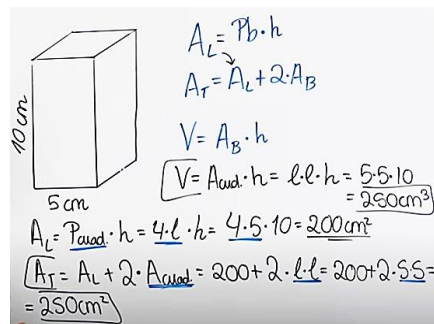


Figura 19. Ejercicio de aplicación ([Enlace Canal Susi Profe](#))

Se menciona que en caso de que el prisma tenga otra base, entonces se deberá calcular el área de la base correspondiente a ese polígono.

En el segundo ejercicio se realiza lo mismo que en el primero, pero para un cilindro de altura 5 *m* y radio 3 *m*. Al finalizar se menciona que, como se vio, no es necesario acordarse una fórmula para cada prisma o cilindro, se pueden utilizar las fórmulas generales para el área

total y el volumen, donde el perímetro y el área de la base corresponden a la figura plana que se tenga en la base.

En el segundo video se describe a la pirámide como un cuerpo geométrico que se caracteriza por tener una sola base y como caras laterales triángulos. Se muestra una pirámide de base rectangular y se explica que se nombran según la base que tengan. Se identifican aristas, caras y vértices, y se indica que el punto en el que se unen todas las caras laterales se llama cúspide. Además, se indica que la altura de la pirámide va desde el “punto medio de la base” hasta el vértice llamado “cúspide” y se indica que la apotema es la altura de cada uno de los triángulos laterales.

Luego, se realiza el desarrollo plano de la pirámide y se indica que en él se tendrán tantos triángulos como lados se tengan en la base de la misma.

Es importante mencionar que en este video se muestran las fórmulas del área lateral y total y del volumen de la pirámide desde el principio, así que una vez que termina de caracterizar la pirámide, propone un valor para la altura de la misma, un valor para el lado de la base y un valor para la apotema con el fin de calcular las áreas y el volumen de la pirámide para esas medidas dadas. Se realiza este ejercicio y se explica que habrá veces en que no se tendrán todos los datos y habrá que averiguarlos de alguna forma para poder calcular área y volumen. La mitad restante del video se dedica a realizar una demostración de las fórmulas utilizadas para lo cual se ayuda del desarrollo plano de la pirámide. Para esto se realiza el bosquejo que se muestra en la Figura 20, donde se dibujan los triángulos laterales de una forma diferente y se rellena con línea de puntos y puntitos los triángulos que no forman parte del desarrollo plano. Se indica que la figura obtenida es un romboide y que su área se calcula como base por altura. Se explica que la base de la figura coincide con el perímetro del cuadrado de la base de la pirámide y que la altura es la altura de los triángulos que coincide con la apotema. Luego, se explica que, como el desarrollo plano se rellenó con triángulos que no correspondían al de la pirámide, se tienen ocho triángulos y, por ende, el área lateral será el perímetro de la base por la apotema dividido dos ya que teníamos cuatro triángulos en el desarrollo plano.

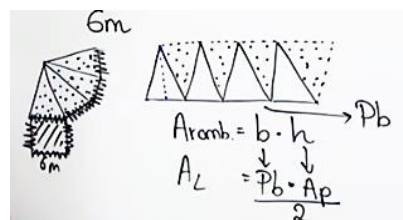


Figura 20. Desarrollo plano de la pirámide cuadrangular y área lateral ([Enlace Canal Susi Profe](#))

Por último, se demuestra la fórmula de volumen. Para esto se utiliza material concreto, se muestra un prisma de base cuadrangular y una pirámide de igual altura con la misma base. Se recuerda el volumen de los prismas y se explica que el volumen del prisma es tres veces el de la pirámide ya que cabe tres veces el volumen de la pirámide en un prisma con misma base y altura. Para mostrarlo llena la pirámide tres veces y vuelca el agua en el prisma (Figura 21); de esta forma, el prisma queda totalmente lleno de agua.



Figura 21. Desarrollo de la fórmula de volumen de las pirámides a partir de material concreto ([Enlace Canal Susi Profe](#))

Propuestas de Khan Academy

- De qué manera se aborda (descripción sintética y detallada):

Propuesta 1

En esta propuesta se desarrolla el volumen de un prisma rectangular. Al comenzar, se presenta un video en el que se explica cómo se puede medir en diferentes dimensiones. En una dimensión se explica que, para comparar dos longitudes, es necesario definir una unidad de medida y ver cuántas veces cabe ese segmento unidad en los segmentos que se quieren comparar. Luego se realiza algo similar para la dimensión 2D, donde se define un cuadrado unitario con el cual se pueden medir las áreas de otros cuadrados. Se explica que, como se trabaja en dos dimensiones, esos cuadrados tienen ciertas unidades cuadradas de área. Por último, se explica que en la dimensión 3D, para medir el espacio que ocupa un cubo, se toma como unidad de medida un cubo que tiene aristas de longitud una unidad y se ve cuántos cubos unitarios caben en el cubo grande al cual se le quiere calcular el volumen.

Se presenta otro video en el que se despliega un applet que muestra cuerpos geométricos aleatorios con diferentes volúmenes y diferentes unidades (metro y centímetro). En el video se cuenta la cantidad de cubos unitarios que tiene cada cuerpo. Una vez contados, se introduce el valor hallado en el cuadro de texto llamado “respuesta” y, al apretar el botón

“comprobar tu respuesta”, el applet indica si el volumen que se halló es correcto o no. Se muestran en el video cuatro cuerpos diferentes, dos prismas los cuales no se pueden mover y dos cuerpos geométricos no convexos que pueden girarse para observar cómo están compuestos (Figura 22). Para contar la cantidad de cubos unitarios que forman el prisma de la Figura 22, primero se analizó cuántos cubos conforman la primera capa y a esa cantidad se la multiplicó por dos dado que el prisma está formado por dos capas iguales.

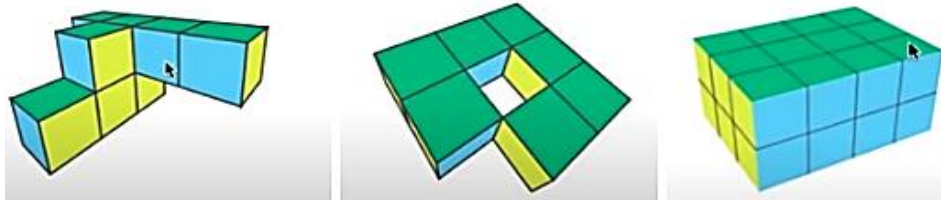


Figura 22. Actividad interactiva para calcular volúmenes ([Enlace Propuesta 1 KA](#))

Luego de esto se presenta otro video en el cual se busca obtener otra forma de calcular el volumen que no sea a partir del conteo de cubitos; para esto se presenta un prisma de aristas de 4 cm , 3 cm y 2 cm . Se toma una de las capas del prisma, se cuentan los cubitos que forman la capa y se concluye que la capa tiene 8 unidades cúbicas. Luego, se analiza el área del rectángulo que determina esta capa y se observa que esa área (se calcula como $4\text{ cm} \cdot 2\text{ cm} = 8\text{ cm}^2$), numéricamente, es igual a la cantidad de cubitos en esa capa; pero como el cuerpo tiene 3 capas de estas ya que tiene 3 cm de profundidad, se multiplica el área de la capa que es 8 cm^2 por 3 cm . Así se obtiene que el volumen del prisma es de 24 cm^3 (Figura 23).

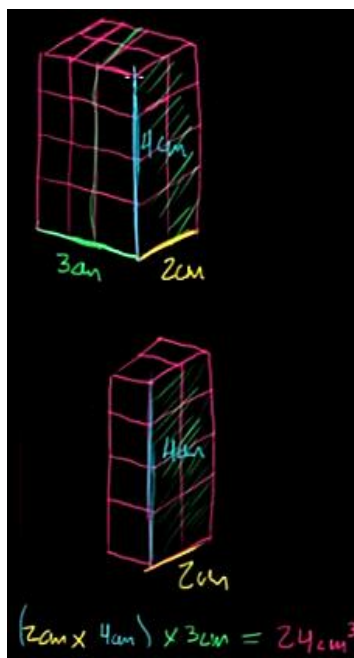


Figura 23. Cálculo de volumen de prisma dadas las medidas de sus aristas ([Enlace Propuesta 1 KA](#))

Sin embargo, una vez hallado el volumen, se plantea calcularlo a partir de otra capa que no sea la primera que se eligió. Se toman dos capas más que se muestran en la Figura 24 y se observa que calcular el volumen a partir de esas capas es indistinto ya que se obtiene el mismo volumen; esto muestra que el volumen no depende de la capa que se elija.

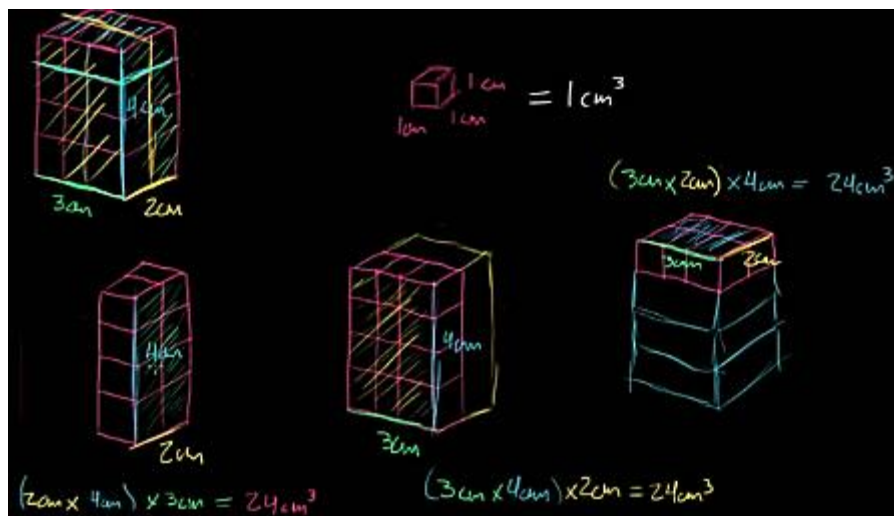


Figura 24. Cálculo de volumen de prisma dadas las medidas de sus aristas ([Enlace Propuesta 1 KA](#))

Se concluye que entonces para calcular el volumen de un prisma dadas las medidas de sus aristas basta con multiplicar estas medidas, sin necesidad de contar los cubos unitarios.

A continuación, se presenta una actividad en la que se muestran dos prismas rectangulares de los cuales no se muestran los cubitos unitarios que contiene, sino que solo se dan las medidas de las aristas en pies y *cm* respectivamente. Se calcula el volumen de la misma forma que antes solo que ahora se aplica directamente lo que se concluyó en el video anterior. Después de esto, se presenta un ejercicio en el que se muestran cuatro prismas rectangulares diferentes en los que se marca cada capa con distintos colores como en la Figura 25 y se pide reconocer cuántas capas tiene cada prisma, con qué cantidad de cubos está formada cada capa y luego cuál es el volumen del prisma.

Intuición acerca de la fórmula del volumen

PROBLEMA 1

El prisma rectangular tiene capas separadas por color.

Cada capa de un color está hecha de cubos unitarios.

¿Cuál es el volumen de un prisma rectangular? unidades cúbicas



Figura 25. Actividad de cálculo de volumen ([Enlace Propuesta 1 KA](#))

Por último, se realiza un repaso de todo lo abordado. En este repaso se define el volumen como la cantidad de espacio tridimensional que ocupa un objeto y se menciona que se mide en unidades cúbicas. Se muestra un ejemplo de un cubo formado por 18 cubitos unitarios. Luego se observa que, para encontrar el volumen de un prisma rectangular, se multiplica el largo del prisma por su ancho y por su altura y se muestra la siguiente fórmula:

$$\text{Volumen del prisma rectangular} = \text{largo} \cdot \text{ancho} \cdot \text{altura}$$

Después de mostrarse esta fórmula, se presentan dos ejemplos, un cubo del cual se pueden ver los cubos unitarios que lo conforman y la medida de la arista, y otro prisma del cual solo se muestran las medidas. Se aplica la fórmula y se calcula el volumen de ambos cuerpos geométricos. A continuación, muestran dos ejercicios parecidos a los de los ejemplos para que realice el estudiantado.

Por último, se presenta como desafío calcular el volumen de un cuerpo geométrico que resulta de la unión de dos prismas. De este cuerpo se muestran las medidas de las aristas y se puede comprobar si el volumen dado es correcto.

Propuesta 2

De esta propuesta solo se analiza una sección. Al comenzar se describe a una pirámide como la colección de todos los puntos entre (e inclusive) una base en forma de polígono y un ápice que está en un plano diferente al de la base (Figura 26).

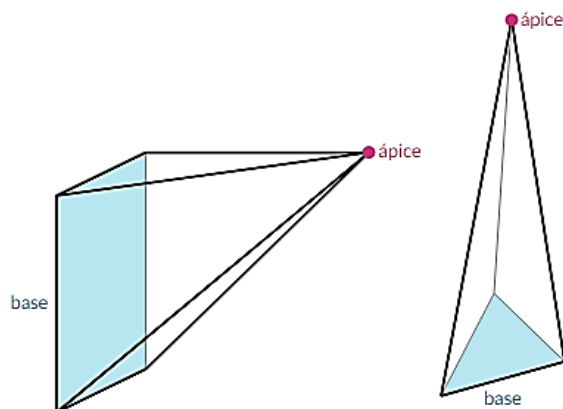


Figura 26. Descripción de la pirámide ([Enlace Propuesta 2 KA](#))

También se la define como una colección de todas las homotecias de la base, con el ápice como centro de homotecia, con factores de escala de cero a uno (Figura 27).

Posteriormente, se muestra la fórmula de volumen de la pirámide y se pregunta “¿de dónde sale esta fórmula?”. Se propone empezar con un cubo cuya longitud lateral es una unidad y rebanarlo en tres pirámides congruentes y esto se hace mediante un recurso de [GeoGebra](#). Se pregunta cuál es el volumen de cada pirámide y se pide completar con aquel dato.

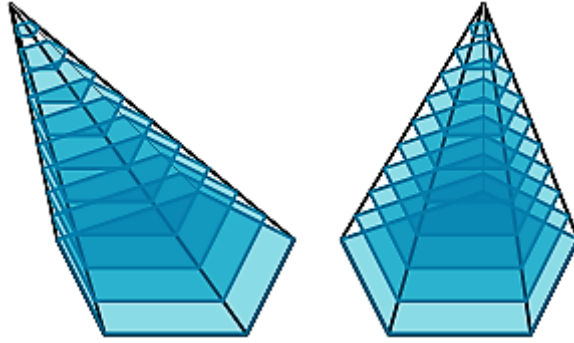


Figura 27. Pirámide como colección de homotecias de la base ([Enlace Propuesta 2 KA](#))

También, se da la opción para corroborar si lo respondido está bien y ver una explicación; la misma se muestra en la Figura 28.

Ocultar explicación.

El volumen del cubo es $1^3 = 1$ unidad cúbica. Cortamos el cubo en 3 pedazos iguales para crear las pirámides.

Entonces el volumen de cada pirámide es $\frac{1}{3}$ del volumen del cubo.

El volumen de la pirámide es $\frac{1}{3}$ unidades cúbicas.

[¿Siempre podemos juntar pirámides congruentes para hacer un cubo?]

Figura 28. Explicación del volumen de las pirámides ([Enlace Propuesta 2 KA](#))

También se pregunta si siempre es posible juntar pirámides congruentes para formar un cubo, se explica que esto no siempre es posible y se muestra un ejemplo gráfico. A su vez se menciona que siempre se puede cortar un prisma rectangular o triangular en tres pirámides con volúmenes iguales, pero esas pirámides solo serán congruentes en el caso especial en que sean parte de un cubo.

Luego se muestra un ejemplo de una pirámide de la cual se indican sus medidas y se pide calcular su volumen. En la explicación se utiliza el método de disección. Este propone pensar el volumen de la pirámide como un tercio del volumen del prisma de misma área y altura que la contiene.

Luego de esto, se invita a rebanar una pirámide en capas paralelas a su base y deslizar dichas capas. Se menciona que esto no cambiará el volumen y que, a medida que el número de capas se acerca a infinito, la pirámide remodelada se suavizará. Esto da pie a introducir el principio de Cavalieri; sobre el mismo se menciona que, mientras no cambien la altura ni las áreas de secciones transversales paralelas a la base de la pirámide, tampoco cambia el volumen. Se concluye que entonces es posible utilizar la misma fórmula para el volumen de la pirámide sin importar dónde se mueva el ápice.

A continuación, se presenta un ejercicio para calcular el volumen de una pirámide, aunque no está relacionado con lo anteriormente desarrollado. Se muestra otra aplicación del principio de Cavalieri a las pirámides. Esta dice que dos bases pueden tener la misma área y formas totalmente diferentes y que si la altura y el área de la base de dos pirámides o sólidos en forma de pirámide son iguales, también lo son sus volúmenes, pues las áreas de todas las demás secciones transversales paralelas a la base también deben ser iguales. Se pregunta cómo se sabe que las áreas de las demás secciones transversales son iguales y al clicar dicha pregunta se muestra la respuesta. Para ilustrar esto se utilizan homotecias.

A partir de lo anterior, se concluye que la fórmula del volumen de la pirámide funciona sin importar la forma 2D que tenga la base y se presenta un ejercicio para calcular el volumen de una pirámide de base triangular de la cual se dan las medidas de las aristas.

Luego, se muestra otra forma de deducir la fórmula al aproximar el volumen de la pirámide con prismas. Se presenta una manera de modelar a la pirámide como una pila de prismas, como si se construyera la pirámide con bloques. El volumen de este modelo es mayor que el de la pirámide. A medida que se hacen capas más y más finas, el volumen del modelo se acerca cada vez más al volumen de la pirámide. Esta idea se muestra mediante un gif (Figura 29).

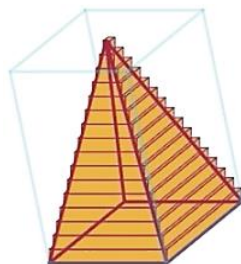


Figura 29. Aproximación del volumen de una pirámide al modelar a la misma como pilas de prismas (Enlace Propuesta 2 KA)

En la Tabla 2 se realizan aproximaciones del volumen de la pirámide con este método.

Tabla 2. Aproximaciones con diferentes cantidades de capas (Enlace Propuesta 2 KA)

Número de capas	$\frac{\text{Volumen de la aproximación de pirámide de bloques}}{\text{Volumen del prisma}}$
4	≈ 0.469
16	≈ 0.365
64	≈ 0.341
256	≈ 0.335
1024	≈ 0.334
4096	≈ 0.333
∞	$\frac{1}{3}$

Se concluye a partir de la tabla que como las figuras prismáticas pueden tener cualquier figura cerrada 2D en sus bases, y como se pueden inclinar sin cambiar su volumen, la razón es válida para todas las figuras piramidales y conos.

Propuesta de GeoGebra

- De qué manera se aborda (descripción sintética y detallada):

Esta propuesta de GeoGebra se divide en varias secciones. La primera sección introduce a los estudiantes a las características de objetos con volumen medible. Dentro de esta sección hay dos subsecciones. En la primera se propone ver la película “Planilandia” basada en la novela “Flatland” de Edwin Abbott escrita en 1884. En base a la película se realizan algunas preguntas para que respondan los estudiantes, entre ellas: ¿Qué objetos conoces de tres dimensiones? ¿Qué objetos de tu entorno no tienen tres dimensiones? ¿Cómo se vería un objeto de la cuarta dimensión? Luego se muestra la proyección de la sombra de un tesseracto, que es un cubo en cuatro dimensiones. La representación que se muestra es en 3D ya que los seres humanos solo pueden percibirlo de manera limitada.

En la segunda subsección, al comenzar se pregunta cuántas veces se puede doblar una hoja de papel por la mitad. Se propone doblar una hoja la mayor cantidad de veces que se pueda y luego se propone ver un video del canal de YouTube “Derivando” en el cual se explica que si se doblara la hoja 54 veces la altura sería mayor que la distancia de la Tierra al Sol. Una vez visto el video se propone responder algunas preguntas más: ¿La hoja de papel tiene volumen?, ¿Por qué? ¿Qué objetos con volumen observas en tu entorno? ¿Qué objetos de tu entorno no tienen volumen?

La siguiente sección tiene como objetivo distinguir las cualidades de los recipientes y los objetos volumen-medibles, como: altura, capacidad y forma. Esta se divide en cuatro subsecciones. La primera de ellas trata sobre capacidad de recipientes. Aquí se muestran cuatro grupos de envases y se pregunta para cada grupo qué envase tiene mayor capacidad y se pide estimar el volumen de cada uno.

Tabla 3. Actividad de exploración (Enlace Propuesta GeoGebra)

Unidad de medida:		
Recipiente	Estimación ¿Cuántas veces creo que cabe la unidad de medida?	Medición ¿Cuántas veces cabe la unidad de medida?
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		

En la segunda subsección se propone elegir una unidad para medir (agua; semillas; harina; azúcar; canicas) y un instrumento de medición (taza; vaso; tapa de garrafón; tapa de botella) y se presenta la actividad de la Tabla 3 con el fin de que los estudiantes estimen la capacidad de cierto recipiente y luego determinen qué tan acertada es la estimación.

En la tercera subsección se busca comparar capacidades. Para esto se propone formar equipos de tres integrantes, y comprobar cuántas veces cabe el contenido de un recipiente en cada uno de los demás. Esto se debe registrar como se indica en la Tabla 4.

Tabla 4. Actividad sobre capacidad ([Enlace Propuesta GeoGebra](#))

¿Cuántas veces cabe el contenido de 100 ml?				
en 1 litro	en 500 ml	en 250 ml	en 125 ml	en 100 ml
¿Cuántas veces cabe el contenido de 125 ml?				
en 1 litro	en 500 ml	en 250 ml	en 125 ml	en 100 ml
¿Cuántas veces cabe el contenido de 500 ml?				
en 1 litro	en 500 ml	en 250 ml	en 125 ml	en 100 ml
¿Cuántas veces cabe el contenido de 1 ml?				
1 litro	500 ml	250 ml	125 ml	100 ml
¿Cuántas veces cabe el contenido de 1 litro?				
1 litro	500 ml	250 ml	125 ml	100 ml

Luego se propone comparar los resultados con los demás equipos y validar los que sean correctos. Además, se pide observar la forma en que cada equipo representó las equivalencias y decidir en grupo cuál es la más conveniente.

En la cuarta subsección se plantea un reto en el cual se muestran botellas de tres capacidades diferentes y se propone meter dentro de un rectángulo veinte botellas de diferentes tamaños que contengan veinte litros en total. Para esto se indica que una botella pequeña tiene una capacidad de 500 ml, una mediana un litro y una grande dos litros.

La tercera sección trata sobre el volumen que se ocupa y está conformada por tres subsecciones. En la primera de ellas se pregunta qué se entiende por el volumen de un objeto y se muestran tres pelotas dentro de una misma caja, una de tenis, una de ping pong y una de acero; luego se pregunta cuál de ellas ocupa mayor volumen. La respuesta elegida se puede corroborar.

La segunda subsección trata sobre clasificar diferentes objetos con volumen ocupado. Al inicio de esta, se define el volumen como la cantidad de espacio que ocupa un cuerpo. Para el estudio del volumen ocupado se clasifican los cuerpos en abiertos y cerrados. Los objetos

abiertos no tienen tapa por lo que son recipientes y un ejemplo puede ser una taza. Los objetos cerrados son aquellos que están limitados por una o varias superficies o cáscara, pueden ser huecos o sólidos. Una vez realizada esta clasificación, se pide reconocer objetos de Volumen-Medibles abiertos, cerrados huecos y cerrados sólidos que hay en el entorno. Se muestran posibles respuestas de cada tipo.

En la tercera subsección se trata el volumen que ocupan diferentes objetos. Se analiza el volumen de un objeto abierto y se menciona que el propósito de querer averiguar su volumen tiene que ver con que estos objetos pueden contener cosas, entonces resulta interesante saber cuánto de algo pueden contener. Se presentan algunos ejemplos sencillos de objetos reales y se desarrolla otra forma de pensar el volumen como el espacio ocupado que ya no puede ser utilizado por otro objeto; es decir, se piensa el volumen de un cuerpo con relación a otros. Para proseguir con este análisis, se presenta un applet en el que al manipular deslizadores se puede rellenar un cubo respecto al ancho, el largo y la altura (Figura 30).

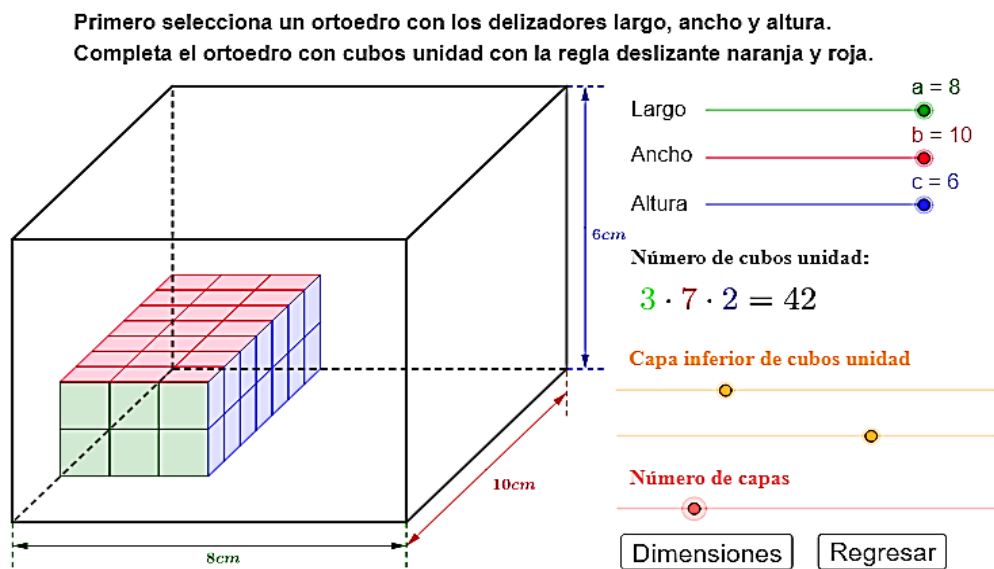


Figura 30. Applet para analizar el volumen de un cuerpo en relación a otro ([Enlace Propuesta GeoGebra](#))

Algunas de las preguntas que se realizan luego de mostrarse el applet son: Si se llena la caja con cubos, ¿con cuántos cubos se llenó la caja? Entonces, ¿cuál es el volumen de la caja? Cuando solo hay un cubo en la caja, ¿cuál es el volumen ocupado en la caja? Cuando solo hay un cubo en la caja, ¿cuál es el volumen que no está ocupado por cubos en la caja? Con las mismas condiciones del caso anterior, crea una caja de ocho cubos, ¿cuál es el volumen que no está ocupado en la caja?

Así como se analiza el volumen de cuerpos abiertos, también se realiza un pequeño abordaje para analizar el volumen de objetos cerrados huecos. Para esto se presenta la imagen de una bocha de navidad y se menciona que el espacio ocupado considera el espacio vacío que encierra, pues el objeto también ocupa ese espacio en el sentido de que no permite que otro cuerpo lo ocupe. Con esto se concluye que entonces el volumen ocupado es el mismo que si la bocha fuese completamente sólida. Luego se pregunta qué se le ocurre al estudiante que puede tener la bocha de navidad dentro. La respuesta que da la propuesta y que es opcional ver, dice que la bocha contiene aire. Se entiende que esta pregunta se realiza para dimensionar que siempre hay algo, en este caso aire.

La cuarta sección de la propuesta se llama “volumen externo” y tiene tres subsecciones; en la primera de ellas se realiza una introducción a los sólidos platónicos. Se desarrollan algunas particularidades de su historia y luego se propone construirlos con palitos y gomitas. Al respecto se pregunta sobre la cantidad de palitos y gomitas que se utilizó para cada uno.

En la segunda subsección se introduce el teorema de Euler y se pide comprobar esta relación en los sólidos platónicos; para esto se muestra un applet para cada sólido en el que mediante un deslizador se puede desarmar el poliedro en su desarrollo plano (Figura 31).

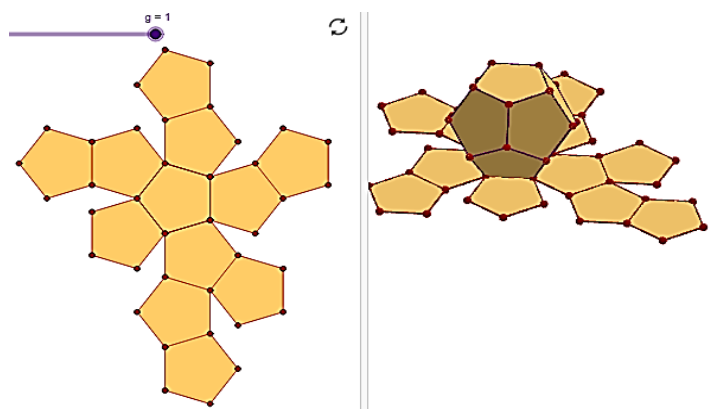


Figura 31. Applet que muestra el desarrollo plano del dodecaedro ([Enlace Propuesta GeoGebra](#))

En la tercera subsección se realiza un experimento para estimar el volumen de los sólidos platónicos. Para esto se propone construirlos con limpiapipas y sumergirlos en una mezcla realizada con agua, jabón y glicerina para medir la cantidad de agua desplazada y así calcular el volumen. Sin embargo, esta medición no es exacta ya que se pierde agua en el proceso de la misma.

En la quinta sección se desarrolla el volumen numérico. Esta sección está dividida en tres subsecciones. En la primera de ellas se propone pensar en los cuerpos geométricos que se encuentran en nuestra vida diaria. Luego se muestra una imagen con varios de estos objetos

y se pide reconocer las figuras geométricas (círculo, triángulo, cuadrado, etc.) que hay entre ellos. En la Figura 32 se muestran objetos de la vida diaria en los que se pueden reconocer cuerpos geométricos.



Figura 32. Objetos de la vida diaria ([Enlace Propuesta GeoGebra](#))

Luego se muestran algunos cuerpos geométricos con sus respectivos nombres y se pide completar lo que se indica en la Tabla 5.

Tabla 5. Actividad para reconocer elementos en los objetos dados ([Enlace Propuesta GeoGebra](#))

NOMBRE DEL OBJETO	NÚMERO DE LADOS	NÚMERO DE CARAS	LADOS CURVOS O PLANOS	FORMA DE LAS CARAS (TRIÁNGULO, CUADRADO, RECTÁNGULO, CÍRCULO)
CONO				
BALÓN				
PIRÁMIDE				
DADOS				
LATA				
CAJA				
TAMBOR				

También se presenta una actividad en la que se dan varias opciones entre las que se encuentran cuerpos y figuras geométricas, y se pide elegir aquellos que sean cuerpos. Se da la opción para corroborar que lo realizado esté bien. Luego se pregunta si existe alguna diferencia entre cuerpo y figura geométrica, y cuál es aquella diferencia. Sobre estas preguntas también está la posibilidad de ver la respuesta.

En la segunda subsección se propone que el estudiante forme figuras geométricas al unir palitos con plastilinas. Para esto el docente debe proveer al estudiante una tarjeta donde se indique el número de lados y vértices de la figura como se muestra en la Figura 33.

Luego se propone montar las formas tridimensionales como prismas y pirámides que derivan del triángulo, para analizar la relación que hay entre ellos. También se invita a construir un tetraedro con 6 trozos de pajillas de 10 cm de longitud. Todo esto se realiza y luego se pregunta qué nombre reciben las líneas que forman a las caras y las bases de los cuerpos geométricos; también, qué nombre reciben las uniones representadas con la plastilina. En ambas preguntas se dan como opciones “cúspides”, “vértice” y “arista”.



Figura 33. Tarjetas con figuras y cuerpos geométricos y su cantidad de lados y vértices ([Enlace Propuesta GeoGebra](#))

A continuación, se puede acceder a un pdf donde se definen los prismas y pirámides. Sobre los prismas se menciona que son cuerpos geométricos poliedros que tienen dos caras paralelas poligonales e iguales llamadas bases y que el resto de sus caras laterales son paralelogramos. Sobre las pirámides se dice que solo tienen una base y el resto de sus caras son triángulos.

En este documento también se muestra una imagen de un prisma con los elementos que lo constituyen (aristas, vértices, bases y caras laterales). Además, se indica que según el número de lados de la base se le da nombre al prisma y se desarrollan algunos ejemplos y se comparten imágenes. También se define la altura del prisma, así como los prismas rectos, oblicuos y truncados.

Esta misma caracterización se realiza para las pirámides. Se define a la pirámide como una figura tridimensional constituida por una base poligonal y por caras laterales cuyas aristas concurren en un mismo punto del espacio, llamado vértice común o cúspide. A raíz de esto se concluye que por eso las caras son triangulares. También se define el eje o altura de la pirámide como la línea que va del vértice común al centro de la base y la apotema de una pirámide regular como la altura de cualquiera de sus caras laterales. Por otra parte, se define pirámide oblicua, rectangular y truncada. Se muestra una imagen de una pirámide rectangular,

aunque en la imagen se le llama recta. Por último, se muestran algunos tipos de pirámides y se dice que se las distingue y nombra según el polígono de la base.

Seguido del documento donde se caracteriza a las pirámides y los prismas, se presenta el applet que se muestra en la Figura 34. En esta, al apretar el botón “Nuevo Ejercicio”, aparecen nuevos prismas y pirámides sobre los cuales analizar los datos pedidos.

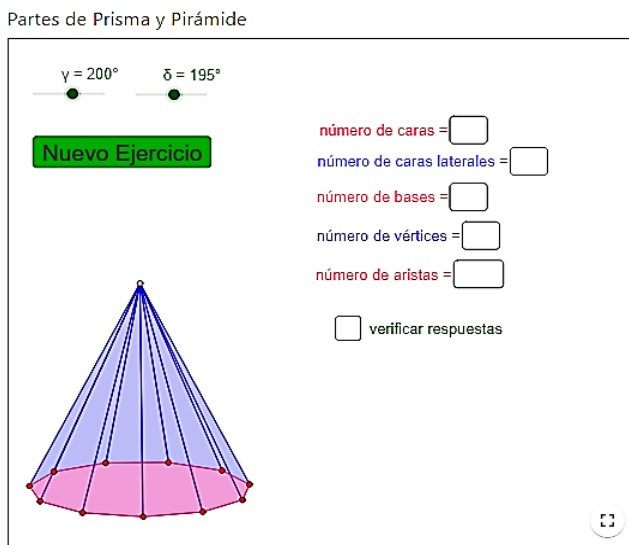


Figura 34. Applet para analizar los elementos de prismas y pirámides ([Enlace Propuesta GeoGebra](#))

En la tercera subsección se trabaja el volumen como magnitud. Al inicio de esta, se define el volumen como la magnitud física y métrica, euclidiana y de tipo escalar, que se puede definir como la extensión de un objeto en sus tres dimensiones. También se establece que, para medir este espacio, hay que considerar las tres dimensiones básicas: Largo, Ancho, Altura; y que las unidades de medida son las cantidades elegidas para comparar con ellas las demás cantidades de su misma magnitud. Además, se menciona que medir una cantidad es compararla con la unidad de medida para saber cuántas veces la cantidad contiene a la unidad y que este número de veces seguido del nombre de la unidad expresa la medida de la cantidad.

Luego se presenta la imagen de un cubo compuesto por varios cubitos más pequeños todos del mismo tamaño y se pregunta a qué se le llama unidad de medida; la respuesta que se muestra dice que se le llama unidad de medida a los cubos pequeños que conforman el cubo grande. También se pregunta cuántas unidades cúbicas integran al cubo y si, al cambiarlas de lugar, el volumen cambia.

Se presenta otro diseño formado con cubitos que no representan ningún cuerpo geométrico conocido y se pregunta cuántas unidades cúbicas integran el cubo y por ende cuál es su

volumen. También se comparte una imagen con las partes del cubo soma (juego de ingenio) para que los estudiantes armen el cubo.

A partir de esto, se utiliza geometría dinámica para trabajar con las unidades cúbicas. Se presenta un applet en la que, al mover los deslizadores llamados “ancho”, “largo” y “alto”, se forma un prisma con cubos unitarios y se muestra el volumen que posee.

A continuación, se presenta un documento pdf en el que se define a los cuerpos geométricos como los sólidos que ocupan lugar en el espacio, es decir, que se pueden tocar, medir y pesar. También se los divide en redondos y poliedros. Luego se menciona que cuando se estudian las áreas se habla de dos dimensiones, largo y ancho. Sin embargo, para calcular el volumen se necesitan tres dimensiones, largo, ancho y alto, y la multiplicación de estas tres da como resultado el volumen. Para empezar a ver esto, se propone colocar unidades cúbicas en las tres dimensiones, 10 cajas de largo, 10 cajas de ancho y 10 de alto, y se pregunta cuántas cajas se necesitan para completar la superficie de la base. Se realiza un análisis a partir del cual se concluye que en la mayoría de los cuerpos geométricos el volumen se calcula como el área de la base por la altura. Para practicar esto se presentan dos prismas con diferentes medidas de aristas y se pide calcular cuántos cubitos unitarios caben en ellos.

Luego, se presenta el applet que se muestra en la Figura 35, en la que al mover los deslizadores se muestra cómo calcular el volumen y el área lateral y total de diferentes prismas con diferentes. Las medidas se pueden cambiar a partir de los deslizadores.

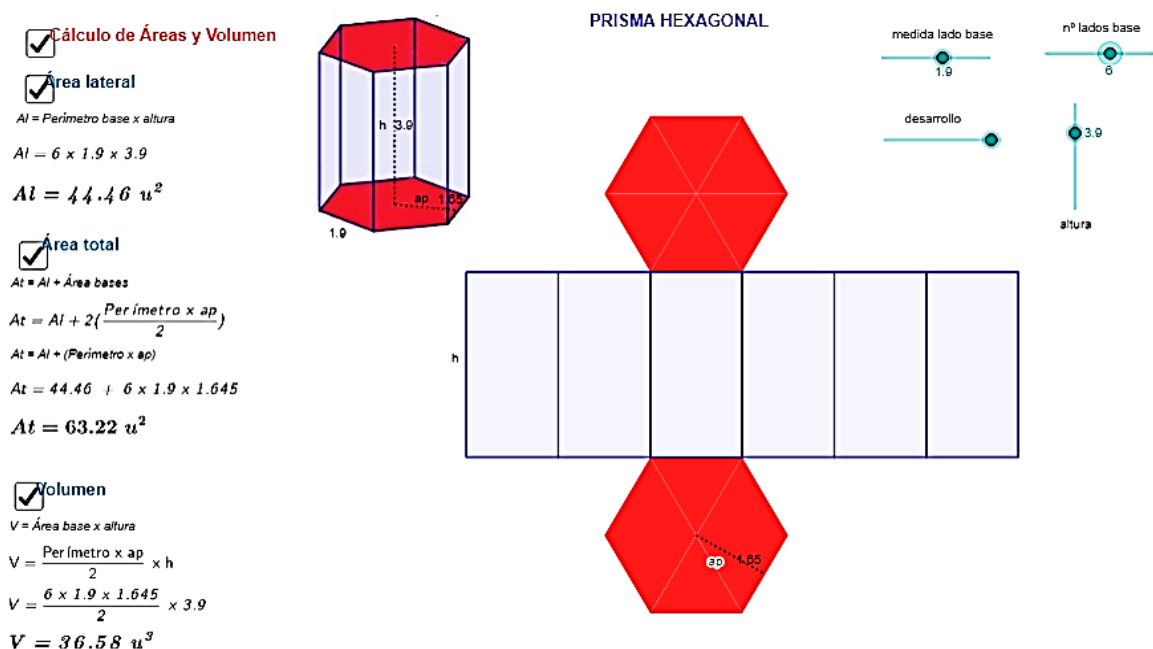


Figura 35. Applet que calcula volúmenes y áreas de diferentes prismas ([Enlace Propuesta GeoGebra](#))

A continuación, se comparte un documento pdf en el que se muestra cómo calcular volúmenes de diferentes cuerpos geométricos. Respecto a la pirámide se menciona que, si se llena de agua la pirámide y se la echa al prisma, se comprueba que en el prisma cabe exactamente tres veces el contenido de la pirámide y que, por lo tanto, el volumen de la pirámide es tres veces menor al volumen del prisma de base y altura iguales. En lo que sigue de esta subsección se presentan actividades de aplicación de lo abordado hasta al momento sobre volumen y unidades de medida.

4.2.2. Articulación con los niveles de Van Hiele

En la Tabla 6 se asocian los niveles de pensamiento geométrico vinculados con el tema que ha sido posible identificar en las cuatro propuestas complementarias analizadas.

Tabla 6. Articulación de los Niveles de Van Hiele con las propuestas complementarias

Portales	Niveles	Forma en que alcanzan esos niveles
Acervo	3 y 4	No se considera que esta guía por sí sola pueda hacer que los estudiantes alcancen niveles de Van Hiele. La guía acompañada de una propuesta con actividades que estén en la misma línea que las preguntas que se plantean, podrían hacer que los estudiantes alcancen ciertos niveles. Con esta propuesta un estudiante no podría desarrollar un nivel 1 ya que no hay un momento de reconocimiento de los cuerpos geométricos como un todo. Tampoco se cree que se pueda alcanzar un nivel 2 ya que no se considera un momento de reconocimiento de los elementos de un poliedro. Dependiendo de las actividades que se presentan podrían llegar a alcanzarse un nivel 3, si es que se llega a realizar una argumentación informal de la fórmula de volumen de un poliedro. Podría alcanzarse un nivel 4 debido a la relación que se establece entre el prisma de base cuadrangular y el de base triangular para desarrollar la fórmula de este último. No se considera que se alcance un nivel 5.
Susi Profe	1 y 3	Se considera que un estudiante al ver estos videos podría alcanzar un nivel 1, ya que hay un reconocimiento y una visualización de los cuerpos geométricos a partir de su desarrollo plano como un todo. Se podría considerar un nivel 2 ya que se hace una correspondencia entre la cantidad de caras laterales y la cantidad de aristas de la base. Los estudiantes podrían dar una argumentación informal de la construcción de las fórmulas de volumen de un prisma y una pirámide, es por esto que se considera que se podría alcanzar un nivel 3. Asimismo, y si bien los cuerpos geométricos entre los que se establecen relaciones no son ambos poliedros, se considera que también se alcanza un nivel 3 debido a que se reconoce cómo la propiedad para calcular el volumen del cilindro se puede desprender de la fórmula ya establecida para el prisma.
Khan Academy	3 y 4	No se considera que un estudiante pueda alcanzar un nivel 1 con esta propuesta ya que no existe un momento de reconocimiento y visualización de los cuerpos geométricos poliedros como un todo. No existe una distinción de los poliedros respecto de otros cuerpos, por ende, no se cree que se alcance un nivel 2. Se considera que se alcanza un sólido nivel 3 ya que la propuesta incluye una gran variedad de actividades para deducir las fórmulas de volumen de un prisma y una pirámide. Asimismo, con no mucho más trabajo, se podría alcanzar un nivel 4. Respecto a la propuesta de las pirámides, sí se alcanza el nivel 2 ya que hay un momento de identificación de sus elementos. Por otro lado, en este caso, nuevamente se considera que al proponer a los estudiantes escribir una

		justificación del cálculo del volumen de la pirámide se podría alcanzar un nivel 4.
GeoGebra	1 a 4	Los estudiantes podrían alcanzar un nivel 1 ya que se considera que hay una cantidad considerable de actividades que permitirían un reconocimiento de los cuerpos geométricos como un todo. Asimismo, se alcanza un nivel 2 ya que se identifican los elementos que componen a los poliedros e incluso se presentan actividades que benefician el establecimiento de relaciones entre ellos. Se considera que se podría alcanzar un nivel 3 ya que hay momentos de conjeturación de las fórmulas de volumen donde se utiliza una argumentación informal y se establecen relaciones entre los prismas y las pirámides para poder deducir la fórmula de las segundas. En este sentido, al igual que la propuesta anterior, se considera que al proponer a los estudiantes una escritura de lo construido y analizado podría alcanzarse un nivel 4.

4.3. Propuesta didáctica innovadora

En este tercer apartado se propone realizar aportes al objetivo: Idear propuestas innovadoras que promuevan las habilidades de conjeturación y demostración para el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos poliedros en estudiantes del ciclo básico de la educación secundaria. Para esto se tendrá en cuenta lo analizado previamente con respecto a los libros de texto y las propuestas de portales educativos en línea. Asimismo, esta se enmarca dentro de un primer año de la escuela secundaria orientada y su fundamento tiene base en la teoría de Van Hiele sobre Pensamiento Geométrico.

En cada actividad se indica qué nivel y qué habilidad se procura desarrollar con ella. En los casos en que no se indica ninguna habilidad es porque se considera que no tienen el fin de desarrollarlas, ya que son actividades de aplicación.

Objetivos de la secuencia

- Que los estudiantes desarrollen habilidades de conjeturación y demostración para el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos poliedros en estudiantes del ciclo básico de la educación secundaria.
- Que los estudiantes comprendan y demuestren la fórmula de volumen para un prisma y una pirámide.

Desarrollo de la secuencia

La primera actividad de la secuencia está orientada a que los estudiantes reconozcan cuerpos geométricos en su entorno y a partir de la visualización de imágenes.

Se considera que los estudiantes han dado cuerpos geométricos en la educación básica y por ende poseen ciertos conocimientos o la habilidad de reconocerlos y diferenciarlos de las figuras geométricas. En principio se les pregunta qué son para ellos los cuerpos geométricos con el fin de determinar si los diferencian de las figuras geométricas. En este momento se les

propone reconocer cuerpos geométricos dentro del aula (cesto - cartuchera - mochila - carpeta - banco - borrador - lápiz).

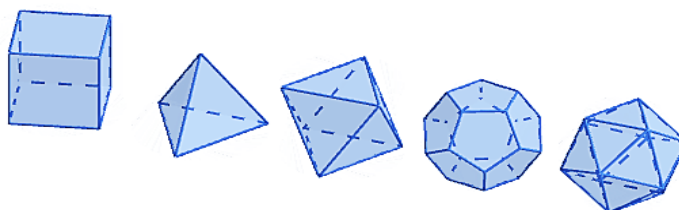
Actividad 1 (Nivel 1)

- ¿Qué son los cuerpos geométricos? ¿Reconocés algunos de ellos dentro del aula?
- Identificá en las siguientes imágenes cuerpos geométricos y si los recordás, indicá sus nombres.



A continuación, se institucionaliza el concepto de cuerpo geométrico:

Un cuerpo geométrico es una figura geométrica que ocupa un lugar en el espacio, es decir, tiene tres dimensiones: largo, ancho y alto. Algunos ejemplos son:



Cubo Tetraedro Octaedro Dodecaedro Icosaedro

*Están compuestos por tres elementos: caras, vértices y aristas. Una **arista** de un cuerpo es la intersección de dos caras. Un **vértice** de un cuerpo es el punto en donde coinciden al menos tres caras o donde se unen tres o más aristas.*

Luego de esta institucionalización, se presenta una actividad que tiene el fin de comenzar a realizar una clasificación de los cuerpos geométricos basada en atributos visuales o manipulativos. Para esto se llevan cuerpos geométricos de madera/plástico/cartulina y se forman grupos de cuatro personas para ir rotando los cuerpos, en caso de que no haya para todos los grupos.

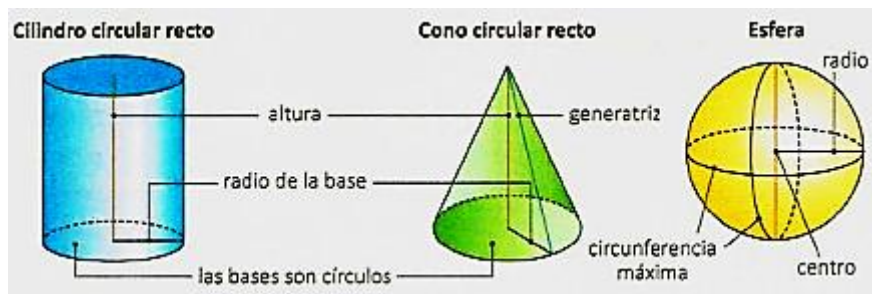
Actividad 2 (Nivel 1)

Formar grupos de cuatro estudiantes y realizar una clasificación de los cuerpos geométricos según cualidades que identifiquen como comunes entre ellos. Luego, discutan con otros grupos acerca de las clasificaciones realizadas. ¿Cómo los dividieron?



Seguido de esta actividad, se institucionaliza la clasificación en cuerpos geométricos poliedros y redondos:

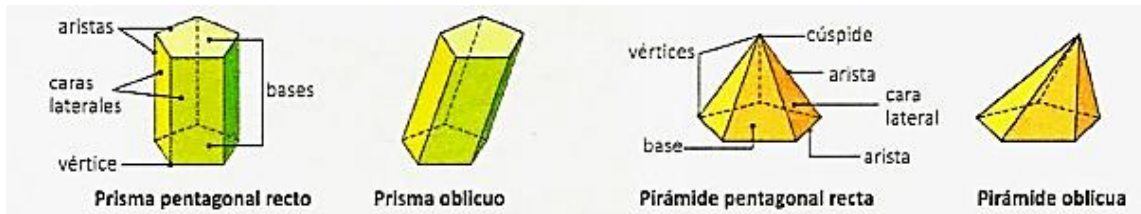
*Los cuerpos geométricos **redondos** tienen una superficie curva.*



*Los cuerpos geométricos **poliedros** tienen caras poligonales. Existen dos tipos de poliedros:*

- *Prismas: Tienen dos caras poligonales opuestas, iguales y paralelas, llamadas bases. La forma de las bases le da nombre al cuerpo. Sus caras laterales son paralelogramos. Si todas ellas son rectángulos o perpendiculares a la base, el prisma es recto. Si no es así el prisma se llama oblicuo.*
- *Pirámides: Tienen una base cuya forma le da nombre al cuerpo. Sus caras laterales son triángulos y concurren en un vértice llamado "vértice común" o "cúspide". Si los triángulos son isósceles, la pirámide es recta sea cual fuere su base. Una pirámide oblicua tiene alguna cara lateral que no es un triángulo isósceles.*

En una pirámide recta la altura de la misma es un segmento perpendicular a la base cuyos extremos son el vértice cúspide y el punto central de la base.



En este momento se aclarará que primero se trabajará con los cuerpos geométricos poliedros. Los redondos no serán tenidos en cuenta en este esquema de planificación.

Luego de definir estos conceptos, se realizan actividades que tienen el fin de establecer algunas relaciones entre los elementos de los poliedros y comprender la definición de cada poliedro.

Actividad 3 (Nivel 2)

Completa los casilleros y verifica tu respuesta. Ayúdate con los deslizadores para mover el prisma y visualizar mejor el cuerpo. Al apretar el botón de nuevo ejercicio vas a obtener nuevos cuerpos a los cuáles calcular los datos en color rojo y azul.

Partes de Prisma y Pirámide

$\gamma = 225^\circ$

$\delta = 215^\circ$

Nuevo Ejercicio

número de caras =

número de caras laterales =

número de bases =

número de vértices =

número de aristas =

verificar respuestas

¿Podés establecer alguna relación entre la cantidad de caras y de lados de las bases de los cuerpos geométricos?

Actividad 4 (Nivel 2)

Completa los enunciados. Estrategia: hacer un dibujo esquemático.

- Un prisma tiene 7 caras laterales, 21 aristas y vértices.
- Una pirámide tiene 8 caras laterales, vértices y 16 aristas.
- Un prisma tiene 16 vértices, 24 aristas y caras laterales.
- Una pirámide tiene 8 vértices, aristas y 7 caras laterales.

Actividad 5 (Nivel 2-Demostración)

Con tu compañero decidí si estas afirmaciones respecto de las pirámides rectas son verdaderas o falsas. Explicá tus decisiones.

- a) La cantidad de caras laterales coincide con la cantidad de lados del polígono de la base.
- b) Los triángulos de las caras laterales siempre son congruentes.
- c) Si la base es un hexágono regular, entonces las caras laterales tienen que ser triángulos equiláteros.
- d) El lado igual de los triángulos isósceles de las caras laterales mide lo mismo en todos los triángulos.
- e) Siempre la base es un polígono regular.

Actividad 6 (Nivel 2-Demostración)

Con tu compañero decidí si las siguientes afirmaciones respecto de los prismas rectos son verdaderas o falsas. Argumenten sus respuestas.

- a) La cantidad de caras laterales siempre coincide con la cantidad de lados de los polígonos de las bases.
- b) Los rectángulos de las caras laterales siempre son congruentes.
- c) Si la base es un hexágono regular, entonces las caras laterales son cuadrados.
- d) Si la base es un pentágono regular, entonces las caras laterales son cuadrados.
- e) Si la base es un triángulo este tiene que ser equilátero.

Para empezar a trabajar con volumen se puede comentar lo siguiente:

D: En nuestra vida cotidiana nos movemos en un mundo de tres dimensiones. Todos los objetos que existen en este mundo tienen volumen. Sabemos si podemos pasar o no entre dos objetos. Con frecuencia podemos saber si una remera nos queda, aún antes de medírnosla. También manejamos con destreza el volumen de los cuerpos que nos rodean y los espacios delimitados por paredes. A veces nos equivocamos y el mueble que tanto trabajo costó subir por la escalera no cabe en el espacio que habíamos previsto. Lo que quiero decir con todo esto es que el volumen es la magnitud de nuestro mundo. Incluso los seres vivientes tenemos cuerpos tridimensionales. Pero, además, medir es una actividad común en las sociedades. Así que no es extraño que en muchas ocasiones necesitemos medir el volumen de un cuerpo. De modo que el concepto de volumen tiene su importancia en nuestra vida cotidiana y es lo que nos abocaremos a ver de ahora en adelante.

Previo a definir el volumen se pueden realizar algunas preguntas

¿Qué es medir? ¿Cómo hacemos para medir un segmento? ¿Utilizamos algún instrumento?

¿Cómo son esos instrumentos? ¿Cómo hacemos para medir el área de una figura geométrica 2D? ¿En base a qué medimos longitudes y áreas?

Estas preguntas tienen el fin de que los estudiantes determinen que siempre medimos por comparación con una unidad de medida establecida que se toma como referencia. En ocasiones, se mide mediante un instrumento graduado con dicha unidad. Por ejemplo, para medir segmentos utilizamos la regla graduada en *cm*.

Luego de esto se establece que entonces para medir el volumen de un cuerpo también debemos establecer una unidad de medida. Entonces se pregunta qué unidades de medida reconocen en el caso de las longitudes y las áreas. Se espera que reconozcan que una unidad de medida posible para medir la longitud de un segmento es el centímetro o el metro. Se les pregunta cómo hacen para determinar una longitud en base a esa unidad de medida y se espera que reconozcan que medir es determinar cuántas veces entra la unidad de medida en el segmento al cual queremos calcular la longitud. Se pueden poner algunos ejemplos concretos como cuando se compra tela o cinta bebé por metro o centímetros. O cuando se quiere medir el alto de alguna pared que normalmente se mide en metros.

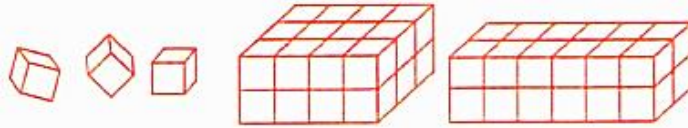
Por otro lado, en el caso del área se puede poner como ejemplo medir el área de un terreno y esperar que mencionen que se suele medir en metros cuadrados. En ese momento, se puede mencionar que la unidad de medida está elevada al cuadrado ya que son dos dimensiones las que se tienen en cuenta para medir y ambas se deben medir con la misma unidad unidimensional. Posterior a este desarrollo, se les pregunta cuál creen que podría ser una unidad de medida posible para medir volúmenes, si los cuerpos geométricos tienen tres dimensiones: ancho, largo y alto.

Se institucionaliza la noción de “medir”, el volumen y se presentan las unidades de medida.
Medir es determinar la longitud, área o volumen de una cosa por comparación con una unidad establecida que se toma como referencia.

El volumen de un cuerpo es la cantidad de espacio que ocupa. Para medirlo hay que considerar un cuerpo como unidad de medida y calcular cuántas veces entra en el volumen a medir. Puede ocurrir que la unidad de medida no entre una cantidad de veces entera. Para medir un volumen se pueden utilizar distintas unidades de medida. Algunas son más frecuentes, como el metro cúbico, que es el volumen que ocupa un cubo de 1 m de arista y se escribe m^3 , o el centímetro cúbico, que es el volumen que ocupa un cubo de 1 cm de arista y se escribe cm^3 .

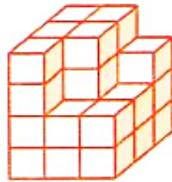
Actividad 7 (Nivel 3 - Conjeturación)

Si se utilizan 24 cubitos como los de la ilustración se pueden armar distintos prismas como estos. Inventa otros dos prismas que se puedan construir usando 24 cubitos y dibújalos. Si se toma a los cubitos como unidad de medida, ¿qué volumen tiene cada prisma ilustrado? ¿Y los que construiste?



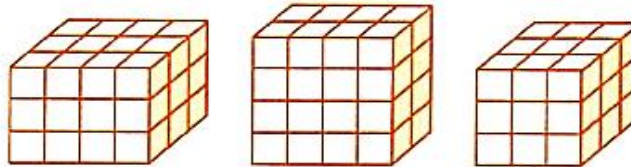
Actividad 8 (Nivel 3 - Conjeturación)

El cuerpo no tiene huecos ni salientes que estén ocultos. Averigua su volumen medido en cubitos.



Actividad 9 (Nivel 3 - Conjeturación)

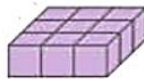
¿Cuál de estos cuerpos tiene mayor volumen?



Actividad 10 (Nivel 3 - Conjeturación)

Estos prismas están contruidos con cubos de 1 cm de arista. Calculá el volumen de cada uno considerando el cubo de 1 cm de arista como unidad de medida. Explicá cómo lo hiciste.

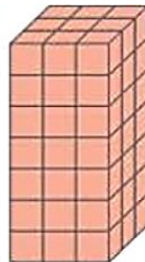
a.



.....
.....
.....

Factor

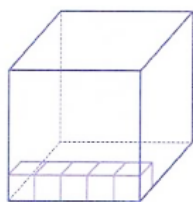
b.



.....
.....
.....

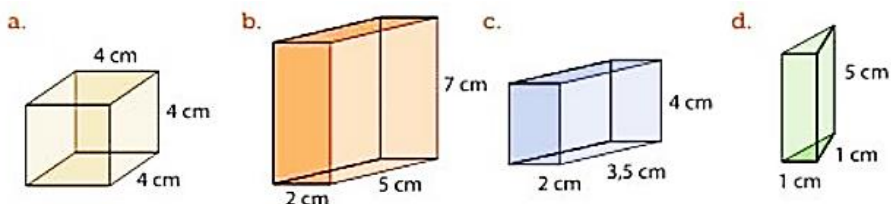
Actividad 11 (Nivel 3 - Conjeturación)

Para llenar una caja en forma de cubo se ubicaron algunos cubitos de 1 cm de arista como se muestra en la figura. ¿Cuál será el volumen de la caja? Explicá cómo lo calculaste.



Actividad 12 (Nivel 3 - Conjeturación)

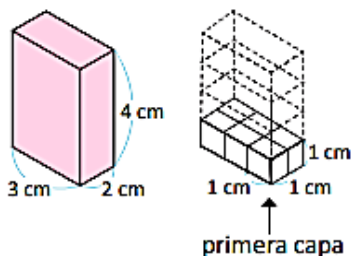
Calculá el volumen de estos prismas, para esto pensá en cuántos cubitos de 1 *cm* de arista entrarían en ellos.



Actividad 13 (Nivel 3 - Conjeturación)

Pensá cómo calcular el volumen del siguiente prisma rectangular.

- ¿Cuántos cubos de 1 *cm* de arista caben en la primera capa?
- ¿Cuántas capas hay?
- ¿Cuál es el volumen del prisma rectangular?



Actividad 14 (Nivel 4 - Conjeturación/Demostración)

Determiná una fórmula para calcular el volumen de un prisma de base rectangular. Argumentá con tus palabras dicha fórmula. Sugerencia: Ayudate con un esquema.

Actividad 15 (Nivel 4 - Conjeturación/Demostración)

Respondé a las siguientes preguntas:

- ¿Qué ocurre con el volumen del prisma de base rectangular si lo dividimos por la diagonal de la base?
- ¿Qué figura tiene ahora la base del prisma recortado a la mitad?
- ¿Cómo modificarías la fórmula que obtuviste para calcular el volumen de un prisma de base rectangular para obtener una nueva fórmula para obtener el volumen de un prisma de base triangular?

d) ¿Cómo se calcula el área de un triángulo? Reescribí la fórmula obtenida en el ítem c).

e) ¿Cómo calcularías el volumen de un prisma con cualquier base?

Luego de esta tanda de ejercicios que en algunos casos pueden resolverse de forma grupal o individualmente, e incluso otras pueden ser guiadas por el docente, se espera que obtengan una fórmula general para calcular el volumen de un prisma cualquiera sea su base. Se institucionaliza este hecho y luego se realiza una argumentación informal del resultado.

Una estrategia para medir el volumen de los prismas es calcular la cantidad de pisos de cuadraditos que hay en el cuerpo y multiplicarla por la cantidad de pisos de cuadraditos que hay en el cuerpo. En general para medir el volumen de un prisma se considera el área del polígono de la base y se multiplica por la altura.

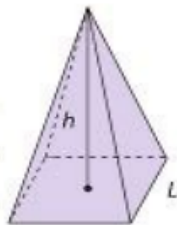
Esta argumentación informal es guiada por el docente. Para esto se propone ver el siguiente applet <https://www.geogebra.org/3d/gvhdgkzs> y utilizar los deslizadores para observar como las secciones planas siempre son cuadrados del mismo área. Incluso se indica cambiar el volumen del cubo al agrandarlo desde uno de sus vértices para ver que en otro cubo el área de las secciones planas también resulta ser siempre el mismo.

Con esto se busca deducir que multiplicar la base por la medida de la altura nos dará como resultado el volumen del prisma. Se indicará cambiar el prisma por uno con otra base distinta para que observen que esto se da en cada prisma.

Luego de esto se presenta el siguiente ejercicio.

Actividad 16 (Nivel 3 - Conjeturación)

Mirá el siguiente applet <https://www.geogebra.org/m/WtjMb2Z7> donde se muestran un prisma y una pirámide base hexagonal y desliza el plano al presionar sobre los puntos. Ahora respondé a la siguiente situación: La pirámide de la imagen es recta de altura h , su base es cuadrada y su lado mide L . ¿Es correcto calcular su volumen como $L^2 \cdot h$?



La idea de la actividad anterior es que los alumnos den cuenta de que en las pirámides la situación cambia, ya que las secciones planas no tienen siempre la misma área. Se espera que determinen que en este caso no es posible calcular el volumen como área de la base por la altura.

Actividad 17 (Nivel 3 - Conjeturación)

Imaginá que tenemos una pila de libros o de cartas o fichas de un juego, si empujamos la parte superior de la pila para que se incline a un lado, ¿hemos cambiado el volumen? ¿Ha cambiado el volumen de cada uno de los libros o cada una de las fichas?

Con esta actividad se espera que los estudiantes determinen que el volumen no cambia, es el mismo solo que ahora la pila no está de la misma forma.

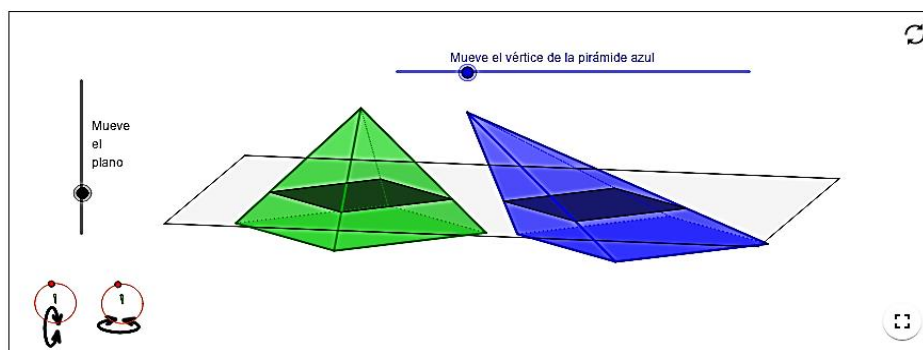
A partir de esto se introduce el Principio de Cavalieri:

El principio de Cavalieri dice lo siguiente: “Si dos sólidos al ser cortados por planos paralelos producen siempre secciones de igual superficie entonces estos cuerpos tienen el mismo volumen”.

Para observar esto nos valemos del siguiente applet:

<https://www.geogebra.org/m/fcmpwfv9>.

Utiliza los cuatro deslizadores que se muestran en pantalla y observa cómo son las secciones planas al deslizar el plano. Los deslizadores circulares permiten girar vertical y horizontalmente las pirámides para una mejor visualización. ¿Cómo son los volúmenes de las pirámides? (Nivel 3 - Conjeturación)



A partir de esto se espera concluir que: *Por ejemplo, las dos pirámides del applet al tener las secciones en forma de cuadrados de la misma medida tienen el mismo volumen. El desplazamiento lateral del vértice superior de la pirámide azul no modifica las secciones y por lo tanto tampoco su volumen.*

A partir de esto, la idea es conjeturar la fórmula de volumen de una pirámide de base cuadrangular para esto se propone observar con material manipulativo o a partir de GeoGebra (<https://www.geogebra.org/m/bfmmdeq6>) cómo se puede dividir un cubo en tres pirámides congruentes de base cuadrangular.

Después de ver este applet se propone que determinen cómo son los volúmenes de las tres pirámides. Se pretende que a partir de esta manipulación o visualización determinen que el

volumen de las pirámides es el mismo debido al principio de Cavalieri. Asimismo, se propone escribir el volumen del cubo como la suma de los volúmenes de las pirámides. Como los volúmenes son iguales se les pregunta cómo se puede escribir esa suma.

$$V(ABCDEFGH) = V(BGFEH) + V(BDEHC) + V(BDEFA) = 3V(BGFEH)$$

$$V(\text{Prisma}) = 3V(\text{Pirámide})$$

donde las pirámides y el cubo tienen igual bases y alturas.

De aquí se deduce que el volumen de la pirámide es un tercio del volumen del prisma y entonces su fórmula será $V(\text{Pirámide}) = \frac{A(\text{BASE}) \cdot h}{3}$. Se puede hacer un comentario general de que esta fórmula vale para cualquier pirámide sea cual sea su base más allá de que se haya probado solo para un caso particular. **(Nivel 4 - Conjeturación/Demostración)**

A continuación, se les propone realizar un razonamiento similar para obtener la misma fórmula para un prisma triangular. Asimismo, se plantea como interrogante, si existirá alguna forma de probar que esta fórmula es válida para todo tipo de base de una pirámide.

Actividad 18 (Nivel 4 - Conjeturación/Demostración)

Utilizá la applet <https://www.geogebra.org/m/svca8dzm> y realizá un razonamiento similar al anterior para justificar la fórmula del volumen en el caso de la pirámide de base triangular.

Actividad 19 (Nivel 4)

La gran pirámide Guiza fue construida alrededor del año 2570 a.C. en Egipto, por orden del faraón Keops. Se cree que en su construcción intervinieron especialistas con muchos conocimientos geométricos. Esta pirámide tiene una base cuadrada cuyo lado mide 230 m, aproximadamente, y su altura mide 146 m aproximadamente. ¿Cuál es su volumen aproximado?

Actividad 20 (Nivel 4)

A una pirámide de base cuadrada, con 30 metros de lado de base y una altura de 16 metros, se la cortó con un plano paralelo a la base a 6 metros de la misma. La cara horizontal superior es cuadrada y su lado mide 15 metros. Calcula el volumen del cuerpo que quedó. A este tipo de pirámides se les llama truncadas.

5. Conclusiones

Se presentan las conclusiones obtenidas a partir de los resultados del capítulo anterior. Estas se subdividen en dos apartados. En el primero de ellos se procura responder a los

interrogantes planteados y en el segundo delimitar los avances y similitudes respecto de las investigaciones reportadas en el estado del arte.

5.1. Respuesta a los interrogantes planteados

A continuación, se responderá a los interrogantes planteados en el apartado 1.1 de la problemática con base en los resultados que se han explicitado en la parte 4 del proyecto de investigación.

Con relación a *¿Qué tipos de abordajes realizan los libros de texto de educación secundaria que circulan en el mercado, sobre el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos poliedros?*, se obtuvo, como se puede observar en la Tabla 1, que solo con uno de los libros de texto elegidos, un estudiante podría alcanzar cuatro de los niveles de Van Hiele. Con los libros restantes un estudiante podría alcanzar uno o ningún nivel. En tal sentido se considera que, de los libros que circulan en el mercado, la mayoría de ellos no realiza un abordaje en profundidad del contenido estudiado. Estos resultados posibilitan inferir que, en general, no se le da valor a la visualización de los cuerpos geométricos ni se realizan actividades de reconocimiento de los elementos de los poliedros, así como de las relaciones que existen entre ellos. Tampoco abundan los momentos de exploración y argumentación. Estos aspectos muestran que no se promueve la alfabetización científica, por el contrario, se promueve la aplicación mecanicista de fórmulas a las que no se les otorga sentido alguno. Se concluye que los abordajes de los libros son incompletos e insuficientes para promover habilidades de conjeturación y demostración sobre el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos poliedros. Asimismo, se destaca el libro de texto “Hacer Matemáticas” ya que presenta una secuencia considerable.

Respecto a *¿Qué otros recursos complementarios, como soportes digitales o manipulativos, podrían fomentar el desarrollo de estas habilidades?*, se obtuvo que las propuestas en línea denotan mucha más riqueza pues con ellas los sujetos pueden alcanzar niveles de pensamiento más elevados y ponen en juego, para dicho cometido, la visualización de recursos digitales y concretos.

De las propuestas en línea, se destaca la de GeoGebra por la cantidad de recursos que incluye, y que de forma intencionada permiten acercar a los estudiantes a una conjetura respecto del volumen de los prismas. También se subraya la versatilidad de algunos de los recursos ya que varios de ellos han sido adaptados para ser incluidos dentro de la propuesta didáctica diseñada en el apartado 4.3.

Por otra parte, las propuestas de “Khan Academy” y “Susi Profe” introducen el Principio de Cavalieri, un resultado matemático clave para comprender de dónde provienen las fórmulas de volumen. En estas propuestas, si bien no se realizan demostraciones formales, se busca dar sentido a lo que se está estudiando. La importancia de darle un significado a las cosas no está en recordarlo para siempre, porque seguramente haya cuestiones que se vayan olvidando; está en tener las herramientas para poder volver sobre aquello que se sabe, y esas herramientas son las que sirven en otros ámbitos de la vida, más allá del área de la Matemática.

Por último, el video del canal Acervo, brinda preguntas claves para el desarrollo del contenido que pueden servir de guía para la planificación de la enseñanza del contenido.

El tercer interrogante *¿Qué propuestas innovadoras podrían promover las habilidades de conjeturación y demostración para el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos poliedros en estudiantes del ciclo básico de la educación secundaria?*, fue planteado con el fin de idear una propuesta superadora que promueva *la adquisición de habilidades de orden superior, como lo son las de conjeturación y demostración, en torno al cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos poliedros*. Con esta propuesta se buscó alcanzar la mayor cantidad de niveles de pensamiento geométrico, pero también darle a cada nivel la importancia que merece. La innovación de esta propuesta en sí misma radica en la calidad de recursos implementados a lo largo de la secuencia didáctica que, guiados intencionalmente, permiten realizar visualizaciones constantes de las situaciones que se presentan y, de esta forma, los sujetos pueden avanzar por los niveles de Van Hiele hacia capacidades superiores.

Muchas de las actividades que se tomaron de estas propuestas han sido ubicadas en la nueva propuesta en diferentes momentos respecto de las primeras. La actividad 1 de la planificación resulta de una adaptación de una de las actividades de la propuesta de GeoGebra, ya que en la original, a partir de la observación de cuerpos geométricos se pedía completar con número de caras, vértices y aristas, lo cual resulta un tanto apresurado para que un estudiante logre un nivel 1. A raíz de esto, se tomó la idea de la observación de cuerpos geométricos, en principio del entorno y luego a partir de imágenes, para empezar a reconocer algunos de ellos por sus nombres. Esto tiene como fin recuperar algunos saberes previos e ir introduciendo al alumnado al mundo de los cuerpos geométricos y en específico de los poliedros.

La actividad 2 no forma parte de ninguna de las propuestas analizadas, sino que tiene que ver con algunos de los aspectos innovadores de la propuesta. Esta actividad tiene el objetivo

de que los estudiantes a partir de manipular diferentes objetos geométricos puedan clasificarlos y discutir con sus compañeros acerca de dicha clasificación.

Las actividades 3 a 6 tienen el objetivo de establecer algunas propiedades de los cuerpos geométricos y relaciones entre los elementos de estos. Las 5 y 6 forman parte del libro “Hacer Matemáticas” y en estos libros están orientadas con el mismo propósito. La actividad 3 se armó a partir de un applet de la propuesta de GeoGebra aunque la pregunta que se incluye al final no forma parte de la original y tiene el propósito de que los estudiantes establezcan ciertas relaciones entre el número de caras de los poliedros y el número de lados de las bases. Las preguntas que se realizan previo a definir volumen: *¿Qué es medir? ¿Cómo hacemos para medir un segmento? ¿Utilizamos algún instrumento? ¿Cómo son esos instrumentos? ¿Cómo hacemos para medir el área de una figura geométrica 2D? ¿En base a qué medimos longitudes y áreas?*, se idearon a partir de uno de los videos de la primera propuesta de Khan Academy. Aunque, en este caso, al no estar presentadas en un video son los estudiantes quienes deben responderlas. En este sentido, se considera que los estudiantes realizan una mayor profundización al respecto ya que surgen en el proceso de responderlas, ciertas nociones erróneas que merecen atención en este momento de la planificación. Además, se considera a esta tarea como una de tipo exploratorias-investigativas, las cuales, según Sanches y Beline (2013; citado en Limas y Jiménez, 2017), generalmente son abiertas, poco estructuradas y permiten al alumno explorar, elaborar sus propias preguntas y conjeturas, así como buscar la argumentación para la justificación y validación de estas.

Las actividades 7 a 12 están orientadas con el mismo propósito que en los libros de texto de los cuales fueron extraídas, solo que se considera más cantidad y más variación respecto de los datos que se tienen y de lo que hay que hacer. En este sentido la propuesta es superadora, pues en los libros de texto, a partir de 2 o 3 actividades ya se presenta la fórmula del volumen, como si fuese suficiente con ellas poder conjeturar una fórmula para el cálculo del volumen de prismas. La propuesta diseñada tiene más actividades y mayor diversidad, lo cual le da a los estudiantes un tiempo considerable para conjeturar en el camino la fórmula para calcular el volumen. Además, en algunas de estas actividades se agrega con respecto a las originales una consigna que consiste en que los alumnos expliquen cómo procedieron para calcular algunos volúmenes. Esta estrategia que utilizan y que ponen en palabras, los ayudará a ver con más claridad cómo es que proceden generalmente y de esta forma obtener una conjetura. Las actividades 13 y 14 son parte de la innovación de este proyecto, buscan que los estudiantes determinen una fórmula y realicen una argumentación informal con sus propias palabras. La

actividad 15 está ideada a partir del video del canal Acervo aunque se agregan algunas preguntas nuevas que tienen el propósito de que los alumnos determinen una fórmula general para calcular el volumen de prismas. Todas estas actividades tienen el propósito de que los estudiantes alcancen un nivel 3.

La actividad 16 también está adecuada respecto de la original que corresponde al libro “Hacer Matemáticas” ya que previo a la situación se presenta una applet de GeoGebra que tiene el fin de que los estudiantes observen que las secciones planas de las pirámides cambian de área a medida que el plano que la corta se acerca al ápice.

La actividad 17 es parte de la propuesta 2 de Khan Academy aunque el applet de GeoGebra que se utiliza luego es parte de la innovación del proyecto y tienen el propósito de que los estudiantes determinen que los volúmenes de las pirámides que se muestran son iguales. El desarrollo que le sigue a esta actividad y la actividad 18 tienen el propósito de que los estudiantes alcancen un nivel 4 a partir de la utilización de todas las herramientas y conocimientos adquiridos anteriormente. Esto último también forma parte de la innovación de la propuesta.

En general, se puede decir que la propuesta resulta innovadora gracias a la implementación de diferentes applets de GeoGebra y materiales manipulativos y de las consignas que se crearon en torno a ellos para poder avanzar sobre los Niveles de Pensamiento Geométrico de Van Hiele.

Respecto a este interrogante, queda pendiente como un aspecto que amerita profundizar, proponer vías para que un estudiante pueda alcanzar un nivel 5 de pensamiento geométrico de Van Hiele a través de una propuesta didáctica.

Por último y respecto al primer interrogante, *¿Cómo fomentar las habilidades de conjeturación y demostración para el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos poliedros en estudiantes del ciclo básico de la educación secundaria?*, se considera debido a lo concluido anteriormente, que son de gran importancia los momentos en que los estudiantes exploran por sí solos o en conjunto con sus compañeros, ciertas situaciones a partir de la manipulación o visualización de materiales concretos o recursos digitales. En este caso se consideraron fundamentales los cuerpos geométricos de madera/plástico para realizar una clasificación de los poliedros; el applet de la actividad 3 para que los estudiantes reconozcan propiedades de los poliedros; los applets de GeoGebra que procuran ayudar a los estudiantes en la construcción de una demostración o de una conjetura sobre la fórmula de prismas y pirámides y los applets que permiten visualizar el principio de Cavalieri para una mejor comprensión

del mismo y, de esta forma, los estudiantes lo puedan utilizar en las demostraciones antes mencionadas. La importancia no está en la utilización del material concreto o el recurso tecnológico, sino con respecto a en qué contexto se lo utiliza. Por sí solos no componen una vía de aprendizaje, las situaciones o actividades en las que se los enmarca son fundamentales para potenciar el beneficio que trae la manipulación/visualización de ellos.

5.2. Vinculaciones con otras investigaciones

En este apartado se establecen vinculaciones entre los resultados obtenidos en la parte 4 y las investigaciones reportadas en el Estado del Arte. Estas procuran develar en qué sentido se ha avanzado, qué similitudes se pueden establecer entre este proyecto y aquellos recuperados en un primer momento o en otro caso, determinar en qué no se avanzó.

Respecto de la primera investigación reportada, Advíncula (2018) propone resolver problemas que involucren la realización de figuras geométricas a través de GeoGebra. Desde esta investigación se afirma que GeoGebra ayuda a los participantes a explorar y descubrir propiedades geométricas, así como elaborar y verificar conjeturas, lo cual contribuye con el desarrollo de otros procesos como la demostración y la argumentación. En este sentido, se develan similitudes respecto al presente proyecto, ya que como se estableció en el apartado anterior, los applets involucrados en la propuesta innovadora y en la propuesta de GeoGebra analizada en 4.2, podrían permitir que los estudiantes exploren y elaboren conjeturas en torno a la fórmula para el cálculo de volúmenes de poliedros y pirámides, y a partir de esto realizar algún tipo de demostración con un rigor adecuado a un primer año del nivel secundario. Además, se puede decir que se avanza, en el sentido de que, así como GeoGebra puede ser de utilidad para trabajar propiedades de figuras geométricas, aquí se establece que también es de utilidad para conjeturar y demostrar las fórmulas para el cálculo de volúmenes de los cuerpos geométricos poliedros.

En cuanto al trabajo de Villarroel y Sgreccia (2012), de los recursos didácticos concretos que nombran solo se utilizan en la propuesta innovadora los modelos fijos 3D, aunque allí se tienen en consideración aquellos en los que se pueden observar las capas de los poliedros. En cambio, en el presente proyecto los cuerpos geométricos que se presentan están hechos de madera, cartulina o plástico, pero no se pueden vislumbrar capas ni se necesita para la actividad en la que se implementan. Sin embargo, estos que proponen las autoras se podrían haber utilizado en la propuesta innovadora, en las actividades de conjeturación de las

fórmulas o incluso habrían sido de utilidad en el trabajo realizado sobre el Principio de Cavalieri. Por otro lado, se considera que se avanza en la utilización de otros materiales didácticos no concretos como los son los Softwares de Geometría Dinámica; por ejemplo, el implementado en la propuesta, GeoGebra. Además, estas autoras concluyen que estos materiales beneficiarán el desarrollo de habilidades geométricas dependiendo de las intenciones didácticas con que se utilicen. En este sentido, se puede decir que los recursos implementados ya sea materiales concretos o GeoGebra, no aportarían demasiado sin estar enmarcados en una propuesta pensada como la que se diseñó.

Respecto al trabajo de Álvarez et al (2014), estos mencionan que el proceso de conjeturar puede estructurarse a partir de actividades de visualizar; identificar patrones, relaciones, regularidades, propiedades, etc.; formular, verificar y generalizar conjeturas. En el caso del presente trabajo, la visualización es fundamental en el desarrollo de la propuesta innovadora, asimismo a partir de una variedad de actividades se prevé que los estudiantes identifiquen regularidades para determinar fórmulas para el cálculo de volúmenes de cuerpos poliedros. En este sentido se estructura el proceso de conjeturación de la misma forma en que lo proponen estos autores.

Con relación al esquema operativo que presenta Saenz Castro (2001) para que un estudiante de matemáticas aprenda el razonamiento plausible y el demostrativo, hay etapas que desde la propuesta innovadora no se consideraron. Por ejemplo, no se tuvo en consideración la etapa de crítica a la conjetura, aunque sí se puso en tela de juicio una situación en la que se propone calcular el volumen de una pirámide de cierta forma errónea. Tampoco se realizó una crítica a la demostración realizada en esta misma parte. Se podría haber considerado de forma tal de intentar a partir de esta crítica, avanzar respecto del rigor que se le otorgó a la prueba.

Por último, en la investigación de Abrate et al (2006) se establecen ciertas variables para analizar los libros de texto de Geometría. Esto difiere demasiado del análisis que se realiza en el presente trabajo, ya que no se establecen variables, sino que se describen los libros y luego se establecen vinculaciones con los Niveles de Van Hiele. En este sentido no se pueden establecer grandes similitudes. La única variable que podría tener un punto de contacto es “habilidades que tienden a desarrollar”. Al respecto se concluye que no existen actividades dentro de esos libros que promuevan habilidades de conjeturación y demostración. En el caso de los libros que se han analizado en este trabajo, se puede decir que solo uno de ellos promueve dichas habilidades.

5.3. Aportes innovadores y posibles líneas de trabajo que se desprenden

El presente trabajo resulta innovador por diferentes cuestiones. El motivo principal radica en que se ofrece una propuesta que intenta ser superadora respecto de las que se analizan en la parte 4 de este trabajo. Incluso para dicha propuesta se delimita en cada una de las actividades cuáles de ellas son tomadas e implementadas tal cual de las propuestas analizadas y cuáles son modificadas o se constituyen como nuevas. Esta propuesta recorre los diferentes niveles de Van Hiele, exceptuando el último, con el fin de que los estudiantes desarrollen habilidades de conjeturación y demostración. En este sentido, este proyecto propone repensar las formas de enseñanza de las fórmulas para el cálculo de volúmenes de cuerpos poliedros, que generalmente por lo que se constató en la problemática, son impuestas. Además, la geometría constituye uno de los mejores ámbitos para desarrollar habilidades de conjeturación y demostración debido a la visualización de los objetos geométricos. En particular, la propuesta diseñada propone utilizar a lo largo de la enseñanza de este contenido, el software de geometría dinámica GeoGebra. Si bien muchas actividades de otras propuestas utilizan dicho software, en este caso se lo utiliza como medio para la conjeturación de ciertas propiedades lo cual denota innovación pues no se reduce a implementar recursos sino al sentido que se le da a esa implementación.

Por otro lado, se desprenden algunas posibles líneas de trabajo. Esta investigación se enfocó desde la perspectiva de la enseñanza de los cuerpos geométricos poliedros y si bien se determina qué niveles puede alcanzar un estudiante con las propuestas presentadas y con la propuesta diseñada, se dio mayor interés al desarrollo de una propuesta de enseñanza que resulte innovadora abarcando la mayor cantidad de niveles. Es por esto que resulta de interés llevar al campo dicha propuesta delimitando posibles adaptaciones según el grupo de estudiantes, con el fin de establecer comparaciones con lo obtenido en la presente investigación y, de esta forma, establecer posibles mejoras y delimitar qué niveles de Van Hiele pueden alcanzar realmente dicho grupo de estudiantes.

Asimismo, otra línea de trabajo que se desprende tiene que ver con diseñar una propuesta con la que un alumno pueda alcanzar un nivel 5 de Pensamiento Geométrico de Van Hiele, sin dejar de considerar el nivel educativo en el que se enmarca.

Por otro lado, el presente trabajo solo se abocó al estudio de los cuerpos geométricos poliedros, pero el proceso en el que se llevó a cabo esta investigación dio indicios de que la situación es bastante similar en el caso de los cuerpos geométricos redondos. En este sentido se podría pensar en una investigación similar para este tipo de cuerpos.

5.4. A modo de cierre

A modo de cierre, se considera que, desde las instituciones de Educación Superior, como lo es la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura desde la cual se impulsó este proyecto:

La primera obligación es formar profesionales con conciencia social. La universidad puede llegar a preparar profesionales excelentes desde el punto de vista técnico, pero que carezcan por completo de conciencia de sus obligaciones para con la sociedad donde viven y de la que viven (Fronidzi, 2005; citado en Cecchi et al, 2013, p.166).

En este sentido, merece atención esclarecer y precisar los aportes que el presente trabajo realiza a la sociedad. Por un lado, se da a conocer una alternativa de enseñanza para abordar lo relativo a fórmulas para el cálculo de volúmenes de poliedros. Esta busca potenciar el aprendizaje de los estudiantes repensando modos de enseñanza y analizando críticamente el material que tienen disponibles los docentes y del cual se pueden valer para planificar sus clases. Esta propuesta se aleja de las prácticas de enseñanza tradicionales en las que estas fórmulas son simplemente impuestas, y propende que los estudiantes construyan los conocimientos y desarrollen habilidades de conjeturación y demostración, dándole un sentido a las fórmulas para el cálculo de volúmenes de poliedros. Asimismo, el motivo de buscar desarrollar dichas habilidades tiene que ver con un compromiso de formar estudiantes críticos, autónomos y creativos, dotados de habilidades que les permitan relacionarse con los conocimientos y la realidad de forma independiente y significativa.

Además, se le da importancia en la propuesta a la utilización contextualizada de materiales concretos y recursos tecnológicos. Se busca implementarlos de forma situada, en el marco de actividades o situaciones de la clase que beneficien el proceso de aprendizaje, así como el de enseñanza.

Este trabajo resulta innovador porque realiza un aporte que promueve no solo transformaciones educativas, sino también la formación científico-tecnológica de las personas, la generación de conocimientos que despierten la vocación científica y el crecimiento personal y profesional. En este sentido, se considera a la Matemática como neurálgica y se busca aportar desde ese lugar a los campos de conocimiento que la requieren, incluso más allá de los tecnológicos.

Por último y no menos importante, el trabajo ofrece un análisis de propuestas de libros de texto y portales educativos en el que los docentes se podrían basar para determinar qué

bibliografía será de más utilidad y, de esta forma, crear sus propias propuestas de enseñanza adecuadas al grupo de estudiantes que se les presente.

Para finalizar, la realización de este proyecto surge de un largo camino transitado en la carrera Profesorado en Matemática, en el que se han ido configurando diferentes problemáticas a partir del trayecto de la Práctica Profesional Docente. En particular, este proyecto se compromete e intenta dar respuesta a una cuestión social emergente en el último tramo del nivel obligatorio de educación en Argentina, como lo es el desarrollo de habilidades de orden superior. La problemática sobre la que se busca dar alternativas de trabajo atañe a los formadores de formadores, en tanto encargados de formar docentes preparados para desarrollar en sus estudiantes cualidades como el razonamiento matemático, la creatividad, la autonomía en el aprendizaje y el criterio de decisión. En tal sentido, este proyecto se compromete con la sociedad avanzando en alternativas de trabajo, así como también, plantea nuevos interrogantes y aristas que pueden ser material de próximos estudios.

Referencias bibliográficas

- Abrate, R.S., Delgado, G.I. y Pochulu, M.D. (2006). Caracterización de las actividades de Geometría que proponen los textos de Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*, 39(1), 1-9. <https://doi.org/10.35362/rie3912598>.
- Advíncula, E. (2013). Enseñanza de los poliedros con Cabri 3D. En *Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp.6820-6826). SEMUR. <http://funes.uniandes.edu.co/18248/>.
- Advíncula, E. (2018). Conjeturas geométricas y GeoGebra. En L. Sema y D. Páges (Eds.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp.1939-1944). CLAME. <http://funes.uniandes.edu.co/13604/>.
- Afonso, M.C. (2003). *Los niveles de pensamiento geométrico de Van Hiele. Un estudio con profesores en ejercicio* [Tesis de Doctorado]. Universidad de La Laguna. <https://riull.ull.es/xmlui/handle/915/12143>.
- Álvarez, C.A. (2017). *Ambiente de aprendizaje para la enseñanza de poliedros y sus propiedades basado en problemas y mediado por TIC para estudiantes de grado noveno de Educación Básica Secundaria en la Institución Educativa Teresita Montes de la ciudad de Armenia Quindío* [Tesis de Doctorado]. Universidad Tecnológica de Pereira. <https://hdl.handle.net/11059/8715>.
- Álvarez, I., Ángel, J.L., Vargas, E. y Soler, M.N. (2014). Actividades matemáticas: conjeturar y argumentar. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 85, 75-90. http://sinewton.es/revista_numeros/085/.
- Azcárate, P. y Serradó, A. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la ESO. *Revista de Educación*, 340(12), 341-378. <http://hdl.handle.net/11162/68967>.
- Barrera, F. y Rodríguez, A. (2015). La teoría de Van Hiele: Niveles de pensamiento Geométrico. *Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI*, 3(5). <https://doi.org/10.29057/icbi.v3i5.554>.
- Becerril, M.M., García, P., Grimaldi, V. y Ponce, H. (2017). *Matemática en Secundaria 1º. CABA/ 2º ES*. Santillana.
- Bravo, S. y Cantoral, R. (2012). Los Libros de Texto de Cálculo y el Fenómeno de la Transposición Didáctica. *Educación Matemática*, 24(2), 5-36. <http://somidem.com.mx/revista/vol24-2/>.
- Cecchi, N.H., Pérez, D.A. y Sanllorenti, P. (2013). *Compromiso Social Universitario: De la Universidad posible a la Universidad necesaria*. CONADU. <http://biblioteca.clacso.edu.ar/Argentina/iec-conadu/20100317010331/2.pdf>.
- Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Horsori. <http://hdl.handle.net/2445/174473>.
- Ciccioli, V. y Sgreccia, N. (2020). *Conocimiento Matemático para la Enseñanza de la geometría analítica. El caso del Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de Rosario*. [Tesis de Doctorado]. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. <https://www.ridaa.unicen.edu.ar/xmlui/handle/123456789/2302>.
- Gascón, J. (2002). El problema de la Educación Matemática y la doble ruptura de la didáctica de las Matemáticas. *Revista La Gaceta*, 5, 673-702. <https://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=125>.
- González, M.T. y Sierra, M. (2004). Metodología de Análisis de Libros de Texto de Matemáticas. Los Puntos Críticos en la Enseñanza Secundaria en España Durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(3), 389-408. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3872>.
- Gonzato, M., Fernández Blanco, T. y Díaz Godino, J. (2011). Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas* 77, 99-117. http://sinewton.es/revista_numeros/077/.

- Guillen, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza-aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación? En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp.21-68). SEIEM. <https://www.seiem.es/docs/actas/14/Actas14SEIEM.pdf>.
- Garguichevich, G.G. (2007). *Geometría del plano y del espacio*. UNR.
- Itzcovich, H. (2008). *La Matemática Escolar*. Aique.
- Kaczor, P.J. y Outón, V.L. (2017). *Entre números I*. Santillana.
- Lárez, J.D. (2014). Las demostraciones geométricas como instancias de resolución de problemas. *Revista Paradigma*, 35(2), 183-198. <http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/article/view/543>.
- Limas, L. y Jiménez, A. (2017). Actividades exploratorio investigativas en clase de matemáticas. *Eco matemático*, 8(1), 93-105. <https://doi.org/10.22463/17948231.1480>.
- Osorio, V. (2003). Si no demuestro... ¿enseño Matemática? *Educación Matemática*, 15(2), 163-178. <http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol15/vol15-2/vol15-2-7.pdf>.
- Pisano, J.P. (2018). *Cuerpos en el espacio*. Logikamente.
- Sáenz, C. (2001). Sobre conjeturas y demostraciones en la enseñanza de las matemáticas. En M.F. Moreno, F. Gil, M. Socas y J.D. Godino (Eds.). *Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp.45-62). SEIEM. <https://www.seiem.es/docs/actas/05/Actas05SEIEM.pdf>.
- Sampieri, R., Collado, C. y Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6ta. Ed.). Mc Graw Hill.
- Sessa, C., Borsani, V., Lamela, C. y Murúa, R. (2017). *Hacer Matemáticas 1/2*. Estrada.
- Vargas, G. y Gamboa, R. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la Geometría. *Uniciencia*, 27(1), 74-94. <https://www.revistas.una.ac.cr/index.php/uniciencia/article/view/4944>.
- Villarroel, S. y Sgreccia, N. (2012). Enseñanza de la geometría en secundaria. Caracterización de materiales didácticos concretos y habilidades geométricas. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 8(29), 59-84. <https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/874>.
- Zapata, F. y Cano, N. (2008). El universo de los poliedros: experiencias significativas con el doblado de papel y las construcciones geométricas. En *Memorias del 9º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*. ASOCOLME. <http://funes.uniandes.edu.co/942/1/11Taller.pdf>.