

MINISTERIO DE JUSTICIA E INSTRUCCION PUBLICA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS, Etc.
DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

MATHEMATICÆ NOTÆ

BOLETIN

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA

DIRECTOR

BEPPPO LEVI

AÑO QUINTO - FASC. 3



ROSARIO
REPUBLICA ARGENTINA
1945

Las « Mathematicae Notae » publican artículos, cuestiones, ejercicios, soluciones y correspondencia. La resolución de las cuestiones propuestas será publicada en números sucesivos de la revista al cabo de un tiempo razonable, a juicio del Director del Instituto, para obtener contestaciones de los lectores; de las cuestiones publicadas bajo el título de ejercicios la dirección se reserva la decisión, en cada caso, de publicar o no las respuestas.

A fin de año se adjudicarán dos premios:

1º Por concurso entre alumnos de la Facultad que contesten satisfactoriamente a cuestiones, problemas o ejercicios.

2º Por concurso entre todos los demás lectores del país o del extranjero que contesten en modo acertado a los mismos.

Los premios consistirán en tratados de extensión cultural o libros de especialización.

Las soluciones deben ser entregadas al Instituto en redacción clara y en hojas distintas para cada cuestión, problema o ejercicio. En cada hoja deberá señalarse el nombre del autor; los alumnos de la Facultad indicarán el año de estudios que cursan en la misma, y, los de primer año, además, la escuela media de la cual provienen. Estos elementos serán tenidos en cuenta para el juicio, conjuntamente con el valor intrínseco de las soluciones y la forma expositiva de las mismas, dándose por la Dirección la máxima importancia a la disposición por la cual se compararán sólo alumnos de igual preparación.

En la sección de Bibliografía se publicarán los análisis críticos de libros recientes que sean enviados al Instituto de Matemática.

I N D I C E

	Pág.
Sobre las medias aritmético-geométricas de Gauss - Tercera (última)	
Parte J. V. USPENSKY	129
Complemento a la Nota: Sobre un problema diofántico (L. A. SANTALÓ	162
Solución a la cuestión N° 12	172
Ejercicios y Problemas (Soluciones)	180
Resultado del Concurso entre solucionistas de problemas propuestos en el Año Cuarto (1944)	190
Ejercicios y Problemas (Propuestos)	191
Cuestiones	192



SOBRE LAS MEDIAS ARITMETICO-GEOMETRICAS DE GAUSS

POR

J. V. USPENSKY

(Tercera Parte).

1. - Debemos introducir ahora las tres series

$$p(t) = 1 + 2e^{-\pi t} + 2e^{-4\pi t} + 2e^{-9\pi t} + \dots + 2e^{-n^2\pi t} + \dots$$

$$q(t) = 1 - 2e^{-\pi t} + 2e^{-4\pi t} - 2e^{-9\pi t} + \dots + (-1)^u 2e^{-n^2\pi t} + \dots$$

$$r(t) = 2e^{-\frac{\pi t}{4}} + 2e^{-\frac{9\pi t}{4}} + 2e^{-\frac{25\pi t}{4}} + \dots + 2e^{-\frac{(2n+1)^2\pi t}{4}} + \dots$$

bien conocidas en la teoría de las funciones elípticas y encontradas por Gauss desde muy temprano en sus investigaciones sobre las medias aritmético-geométricas. Ellas se encuentran en las anotaciones más antiguas de Gauss que se refieren a este argumento y no es del todo claro de qué manera el gran matemático las haya descubierto. El modo siguiente de introducirlas, sugerido por Schering, parece muy natural.

Sean a y b dos números positivos, $a > b$, y

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Las razones

$$\frac{a}{M(a,b)}, \quad \frac{b}{M(a,b)}, \quad \frac{c}{M(a,b)}$$

dependen sólo de

$$x = \frac{a}{b},$$

Por otra parte la razón

$$t = \frac{M(a,b)}{M(a,c)} = \frac{M(1,x)}{M(1,\sqrt{1-x^2})}$$

también es función de x , la que al crecer x de 0 a 1 crece de 0 a $+\infty$. Por eso x es una función determinada de la variable auxiliar positiva t y podemos considerar

$$\sqrt{\frac{a}{M(a,b)}}, \quad \sqrt{\frac{b}{M(a,b)}}, \quad \sqrt{\frac{c}{M(a,b)}}$$

como funciones positivas de t ; pongamos

$$\sqrt{\frac{a}{M(a,b)}} = p(t), \quad \sqrt{\frac{b}{M(a,b)}} = q(t), \quad \sqrt{\frac{c}{M(a,b)}} = r(t).$$

De pronto podemos señalar algunas propiedades de ellas.
Primero

$$q(t)^4 + r(t)^4 = p(t)^4 \quad (1)$$

lo que sigue inmediatamente de la relación

$$b^2 + c^2 = a^2.$$

Siendo ahora a_1, b_1, c_1 los términos del algoritmo que siguen a a, b, c tenemos del mismo modo

$$\sqrt{\frac{a_1}{M(a_1,b_1)}} = p(t_1), \quad \sqrt{\frac{b_1}{M(a_1,b_1)}} = q(t_1), \quad \sqrt{\frac{c_1}{M(a_1,b_1)}} = r(t_1)$$

con

$$t_1 = \frac{M(a_1,b_1)}{M(a_1,c_1)}.$$

Pero como $M(a_1,b_1) = M(a,b)$ y $M(a_1,c_1) = \frac{1}{2} M(a,c)$ (ver § 8 de la Primera parte) será

$$t_1 = 2t$$

y por tanto

$$\sqrt{\frac{a_1}{M(a_1, b_1)}} = p(2t), \quad \sqrt{\frac{b_1}{M(a_1, b_1)}} = q(2t), \quad \sqrt{\frac{c_1}{M(a_1, b_1)}} = r(2t);$$

y siendo

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \quad b_1 = \sqrt{ab}, \quad c_1 = \frac{a-b}{2}, \quad (2)$$

con las fórmulas (1), (2) resulta

$$p(t)^2 + q(t)^2 = 2p(2t)^2 \quad (3)$$

$$p(t) q(t) = q(2t)^2 \quad (4)$$

$$p(t)^2 - q(t)^2 = 2r(2t)^2. \quad (5)$$

De (3), (4) y (5) sigue

$$(p(t) - q(t))^2 = 2(p(2t)^2 - q(2t)^2) = 4r(4t)^2 \quad (6)$$

$$(p(t) + q(t))^2 = 2(p(2t)^2 + q(2t)^2) = 4p(4t)^2 \quad (7)$$

de donde

$$p(t) + q(t) = 2p(4t) \quad (8)$$

$$p(t) - q(t) = 2r(4t). \quad (9)$$

En consecuencia de (5) tendremos además

$$p(4t) r(4t) = \frac{1}{2} r(2t)^2$$

o bien

$$p(t) r(t) = \frac{1}{2} r \left(\frac{1}{2} t \right)^2. \quad (10)$$

2.- Para indagar la naturaleza de las funciones $p(t)$, $q(t)$ y $r(t)$ pongamos

$$x = \sqrt{1-z^2};$$

la fórmula (5) del § 6 de la II parte se escribe

$$\frac{\pi}{2} \frac{M(1, \sqrt{1-z^2})}{M(1, z)} = \log \frac{4}{z} - \log \frac{a}{a_1} - \frac{1}{2} \log \frac{a_1}{a_2} - \dots$$

La serie

$$\log \frac{a}{a_1} + \frac{1}{2} \log \frac{a_1}{a_2} + \frac{1}{4} \log \frac{a_2}{a_3} + \dots$$

representa una función analítica regular en el dominio que resulta cortando el plano de la variable z a lo largo del eje real desde 1 a $+\infty$ y desde -1 a $-\infty$; ella se desarrolla luego según una serie de potencias de z regular para $|z| < 1$ y sin término constante, siendo evidentemente $=0$ por $a=b$, $x=1$, $z=0$. Recordando además una observación que hicimos en el § 6 de la II parte, según la cual

$$\frac{\pi}{2} \left[\frac{M(1, \sqrt{1-z^2})}{M(1, z)} - \frac{M(1, \sqrt{1-z^2})}{M(1, -z)} \right] = \log \frac{4}{z} - \log \frac{4}{-z},$$

se ve que dicha serie puede contener solamente potencias pares >0 de z ; siendo por otra parte

$$t = \frac{M(1, \sqrt{1-z^2})}{M(1, z)},$$

la fórmula precedente toma luego la forma

$$-\frac{\pi}{2} t = \log \frac{z}{4} + z^2 \varphi(z^2)$$

de donde

$$e^{-\pi t} = \frac{z^2}{16} e^{z^2 \varphi(z^2)} = \frac{z^2}{16} (1 + \alpha_1 z^2 + \alpha_2 z^4 + \dots).$$

Indicando con q una nueva variable, pongamos todavía

$$e^{-\pi i} = q;$$

resulta, tomando las raíces de los dos miembros

$$4q^{1/2} = z(1 + \beta_1 z^2 + \beta_2 z^4 + \dots),$$

siendo la serie del segundo miembro convergente para $|z|$ bastante pequeño.

Por inversión hallamos

$$z = 4q^{1/2} (1 + \gamma_1 q + \gamma_2 q^2 + \dots)$$

para valores bastante pequeños de q . Por otra parte, calculando por la definición los primeros términos del desarrollo de $M(1, \sqrt{1-z^2})$ se obtiene

$$M(1, \sqrt{1-z^2}) = 1 - \frac{1}{4} z^2 - \dots;$$

luego para $0 < x < 1$ y bastante próximo a 1,

$$\sqrt{\frac{a}{M(a,b)}} = \frac{1}{\sqrt{M(1, \sqrt{1-z^2})}} = 1 + \frac{1}{8} z^2 + \dots,$$

$$\sqrt{\frac{b}{M(a,b)}} = \frac{\sqrt[4]{1-z^2}}{\sqrt{M(1, \sqrt{1-z^2})}} = 1 - \frac{1}{8} z^2 + \dots,$$

$$\sqrt{\frac{c}{M(a,b)}} = \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{M(1, \sqrt{1-z^2})}} = z^{1/2} (1 + \frac{1}{8} z^2 + \dots)$$

son desarrollos convergentes para valores bastante pequeños de z . Sustituyendo aquí el desarrollo de z tendremos

$$\sqrt{\frac{a}{M(a,b)}} = P(q) = 1 + 2q + c_2 q^2 + c_3 q^3 + \dots$$

$$\sqrt{\frac{b}{M(a,b)}} = Q(q) = 1 - 2q + d_2q^2 + d_3q^3 + \dots$$

$$\sqrt{\frac{M(a,b)}{c}} = R(q) = 2q^{1/4} (1 + e_1q + e_2q^2 + \dots)$$

y estos desarrollos serán por cierto convergentes para valores bastante pequeños de q , o, lo que es lo mismo, para valores de t bastante grandes. De tal manera vemos que valen para valores bastante grandes de t los desarrollos

$$p(t) = 1 + 2q + c_2q^2 + c_3q^3 + \dots$$

$$q(t) = 1 - 2q + d_2q^2 + d_3q^3 + \dots$$

$$r(t) = 2q^{1/4} (1 + e_1q + e_2q^2 + \dots)$$

siendo

$$q = e^{-\pi t}, \quad t = \frac{M(1,x)}{M(1/\sqrt{1-x^2})}.$$

Ahora las fórmulas (3) y (4) pueden escribirse así

$$P(q)^2 + Q(q)^2 = 2P(q^2)^2 \quad (11)$$

$$P(q) Q(q) = Q(q^2)^2$$

y como los segundos miembros no cambian al cambiar q en $-q$ es preciso que

$$P(-q) = Q(q)$$

por cuanto la otra posibilidad $P(-q) = P(q)$, llevaría a la identidad imposible

$$1 - 2q + c_2q^2 - c_3q^3 + \dots = 1 + 2q + c_2q^2 + c_3q^3 + \dots$$

Como de (3) y (4) se obtuvieron (6) y (7), se obtiene de (11)

$$(P(q) + P(-q))^2 = 2(P(q^2)^2 + P(-q^2)^2)$$

$$(P(q) - P(-q))^2 = 2(P(q^2)^2 - P(-q^2)^2)$$

y es fácil ver que los coeficientes desconocidos $c_2, c_3, c_4, \dots$ se hallarán por comparación uno tras otro. El cálculo, un poco laborioso conduce al desarrollo de sorprendente belleza

$$P(q) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots ;$$

pero queda por mostrar que la ley tan inesperada no se desmiente nunca. Basta mostrar que las series

$$P(q) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}$$

$$Q(q) = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \dots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2}$$

satisfacen las relaciones (11). Tenemos

$$P(q)^2 + Q(q)^2 = \sum_{m,n} (1 + (-1)^{m+n}) q^{m^2+n^2} = 2 \sum q^{m^2+n^2}$$

donde la sumatoria se extiende a todos los enteros m, n , positivos negativos y cero de la misma paridad. Pero todos los pares de tales enteros resultan de las fórmulas

$$m = x + y, \quad n = x - y$$

haciendo tomar a x e y todos los valores enteros. Por ser

$$m^2 + n^2 = 2x^2 + 2y^2$$

resulta

$$\sum q^{m^2+n^2} = \sum q^{2x^2+2y^2} = (\sum q^{2x^2})^2 = P(q^2)^2$$

y luego

$$P(q)^2 + Q(q)^2 = 2P(q^2)^2$$

Por otra parte

$$P(q) Q(q) = \sum_{m,n} (-1)^m q^{m^2+n^2} = \frac{1}{2} \sum_{m,n} [(-1)^m + (-1)^n] q^{m^2+n^2} ;$$

en la última suma son nulos todos los términos donde m, n tienen paridad diferente; queda luego

$$P(q) Q(q) = \sum (-1)^m q^{m^2+n^2}; \quad m \equiv n \pmod{2}.$$

Por la misma consideración anterior esta suma se escribe

$$\sum (-1)^m q^{m^2+n^2} = \sum (-1)^{x+y} q^{2x^2+2y^2} = (\sum (-1)^x q^{x^2})^2 = Q(q^2)^2$$

y por tanto

$$P(q) Q(q) = Q(q^2)^2.$$

De la fórmula (9) resulta

$$2r(4t) = 4q + 4q^9 + 4q^{25} + \dots$$

de modo que

$$r(t) = R(q) = 2q^{1/4} + 2q^{9/4} + 2q^{25/4} + \dots$$

Teniendo en cuenta la definición de q se sigue que, para valores de x positivos, menores que la unidad y bastante próximos a ella valen los desarrollos

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{1}{\sqrt{M(1,x)}} = 1 + 2e^{-\pi t} + 2e^{-4\pi t} + 2e^{-9\pi t} + \dots \\ q(t) &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{M(1,x)}} = 1 - 2e^{-\pi t} + 2e^{-4\pi t} - 2e^{-9\pi t} + \dots \quad (12) \\ r(t) &= \frac{\sqrt[4]{1-x^2}}{\sqrt{M(1,x)}} = 2e^{-\frac{\pi t}{4}} + 2e^{-\frac{9\pi t}{4}} + 2e^{-\frac{25\pi t}{4}} + \dots \end{aligned}$$

Recordamos ahora que, como se estableció en la segunda parte, las funciones

$$\frac{1}{M(1,x)}, \quad \frac{x}{M(1,x)}, \quad \frac{\sqrt{1-x^2}}{M(1,x)}$$

son analíticas, regulares y no nulas en el dominio R' constituido por el plano cortado según las dos semirectas reales $(0, -\infty)$, $(1, \infty)$; se sigue que lo mismo ocurre también en el mismo dominio para las funciones

$$\frac{1}{\sqrt{M(1,x)}}, \quad \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{M(1,x)}}, \quad \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{M(1,x)}}$$

con la convención de tomar las raíces con parte real positiva. Por otra parte el punto

$$t = \frac{M(1,x)}{M(1-x,1+x)}$$

está en el dominio D para todos los valores de x excluyendo $x=0, -1, 1$ y la parte real de t será mayor que un número positivo fijo en tanto que x no se aproxime demasiado a $0, -1, 1$ o tenga módulo demasiado grande. Por ser las series de los segundos miembros de (12) funciones analíticas regulares de t en tanto que $\operatorname{Re} t > 0$ se sigue, por prolongación analítica, que esas (12) conservan validez en todo el dominio R' .

De las igualdades (12) resulta que

$$\frac{p(t)^2}{q(t)^2} = x \tag{13}$$

para

$$t = \frac{M(1,x)}{M(1-x,1+x)} \quad (x \neq 0, 1, -1).$$

Pronto veremos (§ 5) que es ésta la única raíz de la ecuación (13) en el dominio D ; pero que existen fuera de ese dominio infinitas otras que aprenderemos a determinar.

3. - Es necesario para eso indagar algunas propiedades de las funciones $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$ definidas para todos los valores de t con parte real positiva. Primero, ellas no se anulan para ningún valor de t . Supongamos en efecto por absurdo que fuera $p(\tau)=0$ o $q(\tau)=0$. De la fórmula (4) resultaría

$$q(2\tau) = p(\tau) q(\tau) = 0$$

y luego

$$q(4\tau) = 0, q(8\tau) = 0, \dots, q(2^n\tau) = 0.$$

Pero evidentemente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q(2^n\tau) \neq 0$$

lo que contradice $q(2^n\tau) = 0$. Segundo, si fuera $r(\tau) = 0$ seguiría de (10) $r(2\tau) = 0$ por no ser $p(2\tau) = 0$ y generalmente $r(2^n\tau) = 0$ para todos los valores de n . Pero se ve fácilmente de la expresión misma de $r(t)$ que por cierto $r(2^n\tau)$ no se anula para n bastante grande.

Al crecer t de 0 a $+\infty$ la función $p(t)$ decrece de $+\infty$ a 1, porque todos los términos de $p(t)$ en (12), salvo el primero, decrecen de 2 a 0; se sigue

$$\frac{dp(t)}{dt} < 0 \quad \text{para } 0 \leq t \leq \infty.$$

Por (4) también $q(t)$ resulta siempre positivo; derivando (4) se tiene además

$$q(t) \frac{dp(t)}{dt} + p(t) \frac{dq(t)}{dt} = 4q(2t) q'(2t)$$

de donde sigue, teniendo en cuenta las observaciones precedentes, que si para cierto valor de t fuera $q'(t) \leq 0$, sería aun $q'(2t) < 0$; luego $q'(4t) < 0$, $q'(2^n t) < 0$. Por otra parte, efectuando la derivación en la segunda igualdad (12) se ve en seguida que, para t bastante grande, $q'(t) > 0$.

Se sigue que para n bastante grande no puede ser $q'(2^n t) < 0$ y por tanto será $q'(t) > 0$ para cualquier t , $0 \leq t < \infty$, es decir $q(t)$ es creciente para t positivo; por otra parte de (12) resulta en seguida

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = 1;$$

luego, para cada t positivo

$$q(t) < 1;$$

finalmente, por (4)

$$q(t) = \frac{q(2t)^2}{p(t)} \leq \frac{1}{p(t)};$$

luego $q(0)=0$, es decir, $q(t)$ crece desde 0 a 1 al crecer t desde 0 a $+\infty$.

Otra propiedad importantísima resulta de las fórmulas (1). Cambiando en ellas b y c y teniendo en cuenta que

$$t' = \frac{M(a,c)}{M(a,b)} = \frac{1}{t}$$

tendremos

$$\sqrt{\frac{a}{M(a,c)}} = p\left(\frac{1}{t}\right), \quad \sqrt{\frac{c}{M(a,c)}} = q\left(\frac{1}{t}\right), \quad \sqrt{\frac{b}{M(a,c)}} = r\left(\frac{1}{t}\right)$$

y como por otra parte

$$\sqrt{\frac{a}{M(a,b)}} = p(t), \quad \sqrt{\frac{b}{M(a,b)}} = q(t), \quad \sqrt{\frac{c}{M(a,b)}} = r(t)$$

se deduce

$$p\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{t} p(t), \quad q\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{t} r(t), \quad r\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{t} q(t) \quad (14)$$

para valores positivos de t . Pero, como ambos miembros son funciones analíticas regulares de t cuando $\operatorname{Re}(t) > 0$, valdrán las fórmulas (14) para todos los valores complejos de t con parte real positiva; hay que advertir que la raíz tendrá siempre parte real positiva.

Por fin, de la definición misma resultan las fórmulas

$$p(t+i)=q(t), \quad q(t+i)=p(t), \quad r(t+i)=e^{-\frac{\pi i}{4}} r(t) \quad (15)$$

de donde sigue para n entero cualquiera

$$p(t+2in)=p(t), \quad q(t+2in)=q(t), \quad r(t+2in)=(-i)^n r(t). \quad (16)$$

4. - Sea D' el dominio entre las rectas

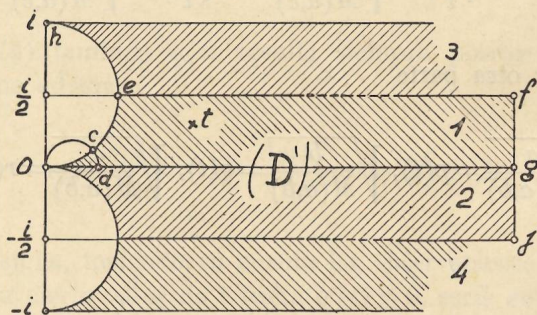
$$I(t)=-1, \quad I(t)=1$$

y a la derecha de dos semicírculos

$$\left| t - \frac{i}{2} \right| = \frac{1}{2}, \quad \left| t + \frac{i}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

Digo que en todo punto t interior al dominio D' vale la desigualdad

$$R \frac{q(t)^2}{p(t)^2} > 0. \quad (17)$$



Trazando de los puntos $\frac{1}{2}i$ y $-\frac{1}{2}i$ las paralelas al eje real, el dominio D' estará dividido en cuatro partes 1, 2, 3, 4 y basta demostrar la desigualdad (17) para los puntos pertenecientes a las partes 1 y 2. En efecto, si t se halla en la parte 4 el punto $t'=t+i$ estará en la parte 1 y si t se halla en la parte 3 el punto $t'=t-i$ estará en la parte 2. En ambos casos, a causa de las fórmulas (15) tenemos

$$\frac{q(t)^2}{p(t)^2} = \frac{q(t')^2}{p(t')^2}.$$

Además en puntos simétricos respecto al eje real $q(t)^2/p(t)^2$ tiene valores complejos conjugados; por tanto basta demostrar la desigualdad (17) sólo para puntos de la parte 1. Sea ocd un semicírculo con radio tan pequeño que él deja el punto dado t de la parte 1 fuera de sí y sea fg una paralela al eje imaginario y bastante alejada.

Examinemos el signo de la parte real del cociente

$$A(t) = \frac{p(t)^2}{q(t)^2}$$

sobre el contorno $dgfecd$ cerrado.

- a) Sobre la parte del eje real dg dicho cociente es positivo.
- b) Sobre el arco ce tenemos

$$\frac{1}{t} = u - i$$

con u real. Teniendo en cuenta las fórmulas (14) podemos escribir

$$A(t) = \frac{r(u-i)^2}{p(u-i)^2}$$

o bien, por (15),

$$A(t) = i \frac{r(u)^2}{q(u)^2}$$

de modo que $RA(t) = 0$.

- c) Sobre ef

$$t = \frac{i}{2} + u$$

con u real $\geq \frac{1}{2}$. Pero de las series para $p(t)$ y $q(t)$ se deduce fácilmente

$$p\left(\frac{i}{2}+u\right)=p(4u)-ir(4u)=\frac{1-i}{2}(p(u)+iq(u))$$

$$q\left(\frac{i}{2}+u\right)=p(4u)+ir(4u)=\frac{1+i}{2}(p(u)-iq(u))$$

y por tanto

$$\frac{q\left(\frac{i}{2}+u\right)}{p\left(\frac{i}{2}+u\right)}=i\frac{p(u)-iq(u)}{p(u)+iq(u)}=i\frac{p(u)^2-q(u)^2-2ip(u)q(u)}{p(u)^2+q(u)^2}$$

es decir

$$\frac{q\left(\frac{i}{2}+u\right)}{p\left(\frac{i}{2}+u\right)}=i\frac{r(2u)^2-iq(2u)^2}{p(2u)^2}$$

de donde sigue

$$R\frac{q\left(\frac{i}{2}+u\right)^2}{p\left(\frac{i}{2}+u\right)^2}=\frac{q(2u)^4-r(2u)^4}{p(2u)^4}.$$

Poniendo $t=1$ en las fórmulas (14) resulta

$$q(1)=r(1)$$

y como $q(t)$ crece al crecer t mientras que $r(t)$ decrece, tendremos

$$q(2u)^4 > r(2u)^4$$

para $u > \frac{1}{2}$ y luego

$$RA(t) > 0$$

sobre ef salvo en el punto e .

d) Tomando fg en distancia suficiente será $A(t)$ sobre fg tan cerca de 1 como se quiera y por tanto todavía $RA(t) > 0$.

e) Llamando ε al radio del semicírculo ocd , tenemos sobre éste

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{2\varepsilon} (1 - iu)$$

con u real. Luego para ε bastante pequeño será $r\left(\frac{1}{t}\right)$ muy pequeño mientras que $p\left(\frac{1}{t}\right)$ será casi igual a 1. Por tanto la parte real de

$$A(t) = \frac{r\left(\frac{1}{t}\right)^2}{p\left(\frac{1}{t}\right)^2}$$

será numéricamente pequeña como se quiera. Ahora digo que la parte real de $A(t)$ no puede ser negativa para ningún valor de t . Como $p(t)$ no se anula, la parte real de

$$A(t) = \frac{q(t)^2}{p(t)^2}$$

será una función armónica regular dentro del contorno $dgfecd$ y alcanza su valor mínimo sólo en puntos del contorno. Como, salvo sobre el arco cd , todos los valores de $A(t)$ son positivos o nulos y sobre el arco cd quedan mayores que un número negativo numéricamente pequeño como se quiera, no puede ser $RA(t)$ negativa. Se sigue que también sobre cd la parte real de $A(t)$ es positiva o nula y luego será positiva en cualquier punto interior a la región 1, y la desigualdad (17) queda así demostrada.

Si el punto t está en el dominio D mencionado en el párrafo 2 fuera de los arcos oab , bcd , es fácil ver que $2t$ o $2t - 2mi$ con m entero convenientemente escogido estará en el dominio D' fuera del arco oeh , de lo que resulta que en tal caso las partes reales de los cocientes

$$\frac{q(2t)^2}{p(2t)^2}, \quad \frac{q(4t)^2}{p(4t)^2}, \quad \frac{q(8t)^2}{p(8t)^2}, \quad \dots$$

serán todas positivas.

Siendo t un punto interior del dominio D , de los tres puntos

$$\frac{1}{t}, \quad \frac{1}{t} + 2i, \quad \frac{1}{t} - 2i$$

uno estará en el dominio D' fuera del arco oeh , de donde resulta que en tal caso las partes reales de los cocientes

$$\frac{r(t)^2}{p(t)^2}, \quad \frac{r(2t)^2}{p(2t)^2}, \quad \frac{r(4t)^2}{p(4t)^2}, \quad \dots$$

o bien de los cocientes

$$\frac{q(t^{-1})^2}{p(t^{-1})^2}, \quad \frac{q(2t^{-1})^2}{p(2t^{-1})^2}, \quad \frac{q(4t^{-1})^2}{p(4t^{-1})^2}, \quad \dots$$

serán todas positivas.

5. - Sea t un punto interior del dominio D . Tomando

$$a = p(t)^2, \quad b = q(t)^2$$

como términos iniciales del algoritmo de las medias aritmético-geométricas por medio de las fórmulas (3) y (4) hallamos

$$a_1 = p(2t)^2, \quad b_1 = q(2t)^2$$

$$a_2 = p(4t)^2, \quad b_2 = q(4t)^2$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$a_n = p(2^n t)^2, \quad b_n = q(2^n t)^2$$

y de lo dicho en el § 4 sigue que las partes reales de los cocientes

$$\frac{b_1}{a_1}, \quad \frac{b_2}{a_2}, \quad \frac{b_3}{a_3}, \quad \dots$$

serán todas positivas. Observando que

$$\lim p(2^n t) = \lim q(2^n t) = 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

se sigue

$$M(p(t)^2, q(t)^2) = 1 \quad (18)$$

y luego, observando que

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} p\left(\frac{1}{t}\right), \quad r(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} q\left(\frac{1}{t}\right),$$

$$M(p(t)^2, r(t)^2) = \frac{1}{t}. \quad (19)$$

Sea ahora t una raíz de la ecuación

$$\frac{q(t)^2}{p(t)^2} = x$$

en el dominio D ; vamos a demostrar que ella está unívocamente determinada por el número x ; pongamos para eso

$$\mu = \frac{1}{p(t)^2};$$

será

$$q(t)^2 = \frac{x}{\mu} \quad r(t)^2 = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\mu}$$

y, por (18), (19)

$$M(1, x) = \mu, \quad M(1, \sqrt{1-x^2}) = \frac{\mu}{t}$$

$$t = \frac{M(1, x)}{M(1, \sqrt{1-x^2})} = \frac{M(1, x)}{M(1-x, 1+x)}.$$

Análogamente se razona para valores negativos de x o positivos > 1 , pero dejamos al lector la demostración que no presenta ninguna dificultad.

6. - Para terminar la teoría de las medias aritméticas-geométricas es preciso ahora aclarar de qué manera se hallan todas las raíces de la ecuación

$$\frac{q(t)^2}{p(t)^2} = x.$$

Podríamos obtenerlas estudiando la prolongación analítica de la media $M(1, x)$ a través de los cortes, lo que a la verdad sería muy natural; pero preferimos otro método más aritmético que va a conducir al resultado quizás más rápidamente. Empecemos con algunas observaciones sobre las fracciones continuas. Sean A y A_1 dos enteros respectivamente impar y par. Podemos dividir A por A_1 de tal modo que el cociente sea par y el resto positivo o negativo numéricamente menor que A_1 . Así será

$$A = 2q_1A_1 + A_2; \quad A_2 \text{ impar, } |A_2| < |A_1|.$$

Luego de la misma manera hallaremos números enteros q_2 y A_3 tales que

$$A_1 = 2q_2A_2 + A_3; \quad A_3 \text{ par, } |A_3| < |A_2|$$

y continuando como en el ordinario procedimiento de Euclides tendremos las igualdades

$$A = 2q_1A_1 + A_2, \quad A_1 = 2q_2A_2 + A_3, \quad A_2 = 2q_3A_3 + A_4, \quad \dots$$

$$A_{2n-2} = 2q_{2n-1}A_{2n-1} + A_{2n}, \quad A_{2n-1} = 2q_{2n}A_{2n}.$$

donde $A, A_2, A_4, \dots$ son números impares y $A_1, A_3, A_5, \dots$ pares. Por ser

$$|A_1| > |A_2| > |A_3| > |A_4| > \dots$$

el procedimiento se terminará llegando a un resto A_{2n} que divide al resto precedente A_{2n-1} .

Al mismo tiempo el cociente $A : A_1$ será desarrollado en fracción continua

$$\frac{A}{A_1} = 2q_1 + \frac{1}{2q_2 + 1} \left| \dots \left| \frac{1}{2q_{2n-1} + 1} \left| \frac{1}{2q_{2n}} \right| \right. \right|.$$

Sean

$$\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_3}{Q_3}, \dots$$

las fracciones reducidas de modo que

$$P_1 = 2q_1, P_2 = 2q_2 P_1 + 1, P_3 = 2q_3 P_2 + P_1, \dots$$

$$Q_1 = 1, Q_2 = 2q_2 Q_1, Q_3 = 2q_3 Q_2 + Q_1, \dots;$$

$P_1, P_3, P_5, \dots$ serán pares, $P_2, P_4, P_6, \dots$ impares, y además

$$P_2 \equiv 1, P_4 \equiv 1, P_6 \equiv 1, \dots \pmod{4};$$

lo mismo $Q_1, Q_3, Q_5, \dots$ serán impares, $Q_2, Q_4, Q_6, \dots$ pares y

$$Q_2 \equiv 2q_2, Q_4 \equiv 2q_2 + 2q_4, \dots \pmod{4}$$

y en general

$$Q_{2s} \equiv 2q_2 + 2q_4 + \dots + 2q_{2s} \pmod{4}$$

Puesto que A y A_1 son primos entre sí, tenemos

$$\pm A_1 = Q_{2n} \equiv 2q_2 + 2q_4 + \dots + 2q_{2n} \pmod{4};$$

en el caso de que $A_1 \equiv 0 \pmod{4}$, se sigue

$$q_2 + q_4 + \dots + q_{2n} \equiv 0 \pmod{2}.$$

7. - Sean ahora τ y τ' dos números complejos tales que

$$\tau' = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}, \quad (\alpha\delta - \beta\gamma) = 1$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ enteros y

$$\alpha \equiv \delta \equiv 1 \pmod{4}, \gamma \equiv 0 \pmod{4}, \beta \equiv 0 \pmod{2}.$$

Aplicando a la razón $\alpha : \gamma$ el desarrollo en fracción continua como hemos indicado en el n. anterior, de manera que

$$\frac{\alpha}{\gamma} = 2q_1 + \frac{1}{2q_2 +} \left| \dots \left| \frac{1}{2q_{2n-1} +} \right| \frac{1}{2q_{2n}} \right|$$

resulta

$$\alpha = P_{2n}, \quad \gamma = Q_{2n}$$

y, siendo, como se sabe

$$P_{2n} Q_{2n-1} - Q_{2n} P_{2n-1} = 1,$$

será

$$\beta = 2m\alpha + P_{2n-1}, \quad \delta = 2m\gamma + Q_{2n-1}, \quad m \text{ entero}$$

$$\tau' = \frac{P_{2n}(\tau + 2m) + P_{2n-1}}{Q_{2n}(\tau + 2m) + Q_{2n-1}};$$

se sigue que τ' coincide con la fracción que se obtiene agregando al desarrollo en fracción continua de $\frac{\alpha}{\gamma}$ un último cociente $\frac{1}{\tau + 2m}$

$$\tau' = 2q_1 + \frac{1}{2q_2 +} \left| \dots \left| \frac{1}{2q_{2n-1} +} \right| \frac{1}{2q_{2n} +} \right| \frac{1}{\tau + 2m}.$$

En otras palabras, se llegará de τ' a τ por medio de la sucesión de substituciones

$$\tau' = 2q_1 + \frac{1}{\tau_1}, \quad \tau_1 = 2q_2 + \frac{1}{\tau_2}, \dots, \tau_{2n-1} = 2q_{2n} + \frac{1}{\tau_{2n}}, \quad \tau_{2n} = \tau + 2m.$$

Supongamos ahora que τ y τ' sean imaginarios (enteros) y pongamos

$$\tau' = it', \quad \tau_1 = -it_1, \quad \dots, \quad \tau_k = (-1)^k it_k, \quad \dots, \quad \tau_{2n} = it_{2n}, \quad \tau = it;$$

resulta

$$t' = \frac{\alpha t - i\beta}{i\gamma t + \delta}$$

$$t' = -2iq_1 + \frac{1}{t_1}, \quad t_1 = 2iq_2 + \frac{1}{t_2}, \quad \dots, \quad t_{2n} = t - 2im$$

y, por la primera (16)

$$p(t') = p\left(\frac{1}{t_1}\right), \quad p(t_1) = p\left(\frac{1}{t_2}\right), \quad \dots \quad p(t_{2n}) = p(t).$$

Teniendo ahora en cuenta la fórmula (14) resulta

$$p(t')^2 = t_1 p(t_1)^2 = t_1 t_2 p(t_2)^2 = \dots = t_1 t_2 \dots t_{2n} p(t)^2$$

Notamos todavía que, por un cálculo inmediato

$$\tau' = \frac{\tau_1}{2q_1\tau_1+1} = \frac{(4q_1q_2+1)\tau_2+2q_1}{\tau_1\tau_2} = \dots = \frac{P_{2n}(\tau+2m)+Q_{2n}}{\tau_1\tau_2 \dots \tau_{2n}}$$

y por tanto

$$\tau_1 \tau_2 \dots \tau_{2n} = \gamma\tau + \delta.$$

Se sigue

$$t_1 t_2 \dots t_{2n} = i\gamma t + \delta$$

$$p(t')^2 = (i\gamma t + \delta) p(t)^2. \quad (20)$$

Con un cálculo análogo se obtiene

$$q(t')^2 = (i\gamma t + \delta) q(t)^2 \quad (1). \quad (21)$$

(1) En efecto, aplicando alternadamente (16) y (14) se obtiene

$$\begin{aligned} q(t')^2 &= q\left(-2q_1i + \frac{1}{t_1}\right)^2 = p\left(\frac{1}{t_1}\right)^2 = t_1 r(t_1)^2 \\ &= tr\left(2q_2i + \frac{1}{t_2}\right)^2 (-i) 2q_2 t_1 r\left(\frac{1}{t_2}\right)^2 = q_2 t_1 t_2 q(t_2)^2 \\ &= (-1)^{q_2+q_4} t_1 t_2 t_3 t_4 q(t_4)^2 = \dots \\ &= (-1)^{q_2+q_4+\dots+q_{2n}} t_1 t_2 \dots t_{2n} q(t)^2 \end{aligned}$$

y, por ser

$$Q_{2n} = \beta \equiv 0 \pmod{4}$$

$$q_2 + q_4 + \dots + q_{2n} \equiv 0 \pmod{2}$$

De (17) y (18) resulta

$$\frac{q(t')^2}{p(t')^2} = \frac{q(t)^2}{p(t)^2}$$

y ello significa que de una raíz t de la ecuación

$$\frac{q(t)^2}{p(t)^2} = x.$$

resultan infinitas otras t' al poner

$$t' = \frac{\alpha t - i\beta}{i\gamma t + \delta}$$

donde α , β , γ , δ son enteros sujetos a las condiciones mencionadas.

En el párrafo siguiente vamos a demostrar que no hay otras raíces.

8. - Conviene volver a las variables τ, τ' poniendo

$$t = i\tau, \quad t' = i\tau'.$$

Entonces serán τ y τ' números complejos con parte imaginaria positiva y

$$\tau' = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}.$$

Diremos que τ' resulta de τ por medio de la sustitución lineal representada por la matriz

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Si τ'' resulta de τ' por medio de la sustitución lineal

$$S' = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix},$$

resultará τ'' de τ por la sustitución lineal

$$S'S = \begin{pmatrix} \alpha'\alpha + \beta'\gamma & \alpha'\beta + \beta'\delta \\ \gamma'\alpha + \delta'\gamma & \gamma'\beta + \delta'\delta \end{pmatrix}$$

y las sustituciones lineales que consideramos forman un grupo que llamaremos G .

A dos números complejos o puntos ligados por una sustitución del grupo G los llamaremos equivalentes respecto G . Designando por τ_0 el número conjugado de τ , al número positivo

$$H(\tau) = \frac{i(\tau_0 - \tau)}{1 + \tau\tau_0}$$

lo llamaremos altura de τ . Se calcula fácilmente

$$H(\tau') = \frac{i(\tau_0 - \tau)}{(\gamma\tau + \delta)(\gamma\tau_0 + \delta) + (\alpha\tau + \beta)(\alpha\tau_0 + \beta)}.$$

El denominador de esta expresión es una forma cuaternaria positiva de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ considerados como variables; existirán por tanto cuatro enteros $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sujetos a las condiciones

$$\alpha \equiv \delta \equiv 1 \pmod{4}, \quad \gamma \equiv 0 \pmod{4}, \quad \beta \equiv 0 \pmod{2}, \quad \alpha\delta - \gamma\beta = 1$$

que la rinden mínima. Por tanto entre los números equivalentes respecto G existirá al menos un número con altura máxima. Sea τ este número; para cada otro número equivalente será $H(\tau') \leq H(\tau)$ y por tanto

$$(\gamma\tau + \delta)(\gamma\tau_0 + \delta) + (\alpha\tau + \beta)(\alpha\tau_0 + \beta) \geq 1 + \tau\tau_0. \quad (C)$$

Considerando ahora algunas sustituciones particulares, vamos a limitar el dominio donde está τ .

a) Sea $\tau' = \tau \pm 2$ (es decir $\alpha = 1, \beta = \pm 2, \gamma = 0, \delta = 1$). De la desigualdad (C) resulta $\tau + \tau_0 \pm 2 \geq 0$ y por tanto

$$-1 \leq R\tau \leq 1.$$

b) Sea

$$\tau' = \frac{\tau}{\pm 4\tau + 1}.$$

Por (C) será $4\tau\tau_0 \pm (\tau + \tau_0) \geq 0$, es decir $\left| \tau \pm \frac{1}{4} \right| \geq \frac{1}{4}$.

d) Sea

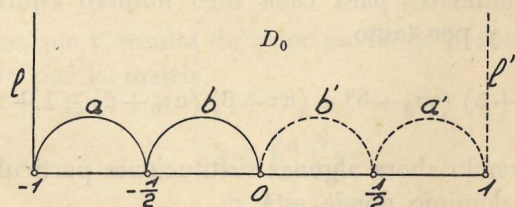
$$\tau' = \frac{\pm 3\tau + 2}{4\tau \pm 3}.$$

De la desigualdad (C) resulta $\tau\tau_0 \pm \frac{3}{4}(\tau + \tau_0) + \frac{1}{2} \geq 0$, es decir,

$$\left| \tau \pm \frac{3}{4} \right| \geq \frac{1}{4}.$$

La recta $R\tau = 1$ se transforma en la recta $R\tau = -1$ por la sustitución $\tau' = \tau - 2$; el círculo $\left| \tau - \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{4}$ por la sustitución $\tau' = \frac{\tau}{-4\tau + 1}$ se transforma en el círculo $\left| \tau' + \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{4}$. En fin el círculo $\left| \tau - \frac{3}{4} \right| = \frac{1}{4}$ se transforma en el círculo $\left| \tau' + \frac{3}{4} \right| = \frac{1}{4}$ por la sustitución $\tau' = \frac{-3\tau + 2}{4\tau - 3}$.

De lo dicho resulta que entre los puntos equivalentes respecto a G de un punto dado siempre existe un punto situado



en el dominio D_0 representado en la figura adjunta del cual excluimos los semicírculos b' , a' y la línea l' . Sea ahora t' una raíz cualquiera de la ecuación

$$\frac{q(t)^2}{p(t)^2} = x.$$

Según lo dicho existirán números enteros $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tales que $\alpha \equiv \delta \equiv 1 \pmod{4}$, $\gamma \equiv 0 \pmod{4}$, $\beta \equiv 0 \pmod{2}$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ y que el punto t del dominio D ligado a t' por la relación $t' = \frac{\alpha t - i\beta}{i\gamma t + \delta}$ es también raíz de la misma ecuación; pero, según el § 5, dicha ecuación no tiene en ese dominio más que una raíz; por tanto todas las raíces tienen la forma indicada.

Respecto a la variable τ ello significa que cada punto del semiplano $\text{Im} \tau > 0$ es equivalente a un único punto del dominio D_0 . La función

$$f(\tau) = \frac{q(i\tau)^2}{p(i\tau)^2}$$

no se cambia por sustituciones del grupo G y toma en el dominio D_0 una vez cada valor, con excepción de $0, 1$. Es una función de las llamadas modulares.

9. - Sean

$$a, a_1, a_2, \dots$$

$$b, b_1, b_2, \dots$$

los términos del algoritmo de las medias aritmético-geométricas bajo la sola condición de que un número finito de los cocientes

$$\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \dots$$

tengan parte real negativa y sea $\bar{M}(a, b)$ el correspondiente valor de la media aritmético-geometría. Sea b_n/a_n el último cociente con parte real negativa o nula, de modo que

$$\text{Re} \frac{b_p}{a_p} > 0$$

para $k = n + 1, n + 2, n + 3, \dots$ Entonces $\bar{M}(a, b) = M(a_n, b_n)$.
Pongamos

$$a_n = \mu p(\tau)^2, \quad b_n = \mu q(\tau)^2$$

siendo τ la raíz de la ecuación

$$\frac{q(\tau)^2}{p(\tau)^2} = \frac{b_n}{a_n}$$

en el dominio D . Por ser $2a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$, $b_n^2 = a_{n-1} b_{n-1}$ tendremos

$$a_{n-1} = a_n + \sqrt{a_n^2 - b_n^2} = \mu (p(\tau)^2 \pm r(\tau)^2)$$

$$b_{n-1} = a_n - \sqrt{a_n^2 - b_n^2} = \mu (p(\tau)^2 \mp r(\tau)^2).$$

Pero

$$p(\tau)^2 + r(\tau)^2 = p\left(\frac{\tau}{2}\right), \quad p(\tau)^2 - r(\tau)^2 = q\left(\frac{\tau}{2}\right)$$

de modo que, tomando $\varepsilon = 0$ o $\varepsilon = 1$, tendremos

$$a_{n-1} = \mu p\left(\frac{\tau}{2} + \varepsilon i\right)^2 = \mu p(\tau_1)^2,$$

$$b_{n-1} = \mu q\left(\frac{\tau}{2} + \varepsilon i\right)^2 = \mu q(\tau_1)^2$$

poniendo $\tau_1 = \frac{\tau}{2} + \varepsilon i$.

De la misma manera

$$a_{n-2} = \mu p(\tau_2)^2, \quad b_{n-2} = \mu q(\tau_2)^2$$

poniendo $\tau_2 = \frac{\tau_1}{2} + \varepsilon_1 i$, con $\varepsilon_1 = 0$ o $\varepsilon_1 = 1$. Continuando así y poniendo

$$\tau_3 = \frac{\tau_2}{2} + \varepsilon_2 i, \quad \varepsilon_2 = 0 \text{ o } \varepsilon_2 = 1$$

.....

$$\omega = \tau_n = \frac{\tau_{n-1}}{2} + \varepsilon_{n-1}i, \quad \varepsilon_{n-1} = 0 \text{ o } \varepsilon_{n-1} = 1$$

hallamos

$$\begin{aligned} a &= \mu p(\omega)^2, & b &= \mu q(\omega)^2 \\ a_1 &= \mu p(\tau_{n-1})^2, & b_1 &= \mu q(\tau_{n-1})^2 \\ a_2 &= \mu p(\tau_{n-2})^2, & b_2 &= \mu q(\tau_{n-2})^2 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Pero

$$\tau_{n-1} = 2\omega - 2\varepsilon_{n-1}i, \quad \tau_{n-2} = 4\omega - 4\varepsilon_{n-1}i - 2\varepsilon_{n-2}i, \dots$$

y por consiguiente

$$\begin{aligned} a &= \mu p(\omega)^2, & b &= \mu q(\omega)^2 \\ a_1 &= \mu p(2\omega)^2, & b_1 &= \mu q(2\omega)^2 \\ a_2 &= \mu p(4\omega)^2, & b_2 &= \mu q(4\omega)^2 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Luego $\mu = \bar{M}(a, b)$.

Por otra parte ω es una raíz de la ecuación

$$\frac{q(\tau)^2}{p(\tau)^2} = \frac{b}{a}$$

que tiene la raíz

$$t = \frac{M(a, b)}{M(a-b, a+b)}$$

en el dominio D . Existirán por tanto enteros

$$\alpha \equiv \delta \equiv 1 \pmod{4}, \quad \gamma \equiv 0 \pmod{4}, \quad \beta \equiv 0 \pmod{2}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

tales que

$$\omega = \frac{\alpha t - i\beta}{i\gamma t + \delta}$$

De la fórmula (20) sigue $p(\omega)^2 = (i\gamma t + \delta) p(t)^2$ y por tanto

$$\frac{1}{\mu} = \frac{p(\omega)^2}{a} = \frac{p(t)^2}{a} (i\gamma t + \delta) = \frac{1}{M(a,b)} (\delta + i\gamma t),$$

es decir

$$\frac{1}{M(a,b)} = \frac{\delta}{M(a,b)} + \frac{i\gamma}{M(a-b, a+b)} \quad (22)$$

con $\delta \equiv 1 \pmod{4}$, $\gamma \equiv 0 \pmod{4}$ números primos entre sí. Recíprocamente, dados dos tales enteros podemos elegir raíces en el algoritmo de tal manera que la media resultante $\bar{M}(a,b)$ satisfará la relación (22). En efecto, por ser $\delta \equiv 1 \pmod{4}$, $\gamma \equiv 0 \pmod{4}$ primos entre sí se satisface la ecuación diofántica $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ con $\alpha \equiv 1 \pmod{4}$, $\beta \equiv 0 \pmod{2}$. Tomando entonces

$$\omega = \frac{\alpha t - i\beta}{i\gamma t + \delta}$$

será

$$\frac{q(\omega)^2}{p(\omega)^2} = \frac{b}{a}$$

y podemos poner,

$$a = \mu p(\omega)^2, \quad b = \mu q(\omega)^2$$

de donde se sigue que

$$a_n = \mu p(2n\omega)^2, \quad b_n = \mu q(2n\omega)^2,$$

serán términos de un algoritmo posible convergente al límite μ . Pero

$$\frac{1}{\mu} = \frac{p(\omega)^2}{a} = \frac{\delta}{M(a,b)} + \frac{i\gamma}{M(a-b, a+b)}$$

que es lo que se quería demostrar.

Aquí podemos terminar nuestro estudio y sólo añadiremos que las relaciones mutuas de varias medias posibles, culminación y remate de toda la teoría, fueron conocidas por Gauss ya en el año 1800 como se deduce de la alusión que se halla en su diario científico: «Inter duos numeros datos semper dantur infinite multi termini medii tum arithmetico-geometrici, tum harmonico-geometrici, quorum nexum mutuuum ex asse perspicendi felicitas nobis est facta. — Iunio 3, 1800, Brunor [ici]».

A P E N D I C E I

UNA FAMOSA IDENTIDAD DE JACOBI ANTICIPADA POR GAUSS

Poniendo como en el § 2

$$P(x) = 1 + 2x + 2x^4 + 2x^9 + \dots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^{n^2}$$

la identidad a la cual nos referimos se escribe

$$P(x)^4 = 1 + 8 \left[\frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{1+x^2} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \frac{4x^4}{1+x^4} + \dots \right].$$

Jacobi la obtuvo de las series trigonométricas que representan las funciones elípticas y la utilizó para encontrar el número de representaciones de un entero por sumas de cuatro cuadrados ⁽¹⁾. Es sorprendente que esta identidad fuera conocida por Gauss desde mucho tiempo antes sin que la mencionara en sus obras publicadas.

Ella sigue como un corolario fácil de la fórmula

$$d \log \frac{M(a,b)}{M(a,c)} = \frac{2}{\pi c^2} M(a,b) M(a,c) d \log \frac{a}{b} \quad (A)$$

establecida en el § 9 de la Primera parte, junto con los desarrollos de las funciones $P(x)$, $Q(x)$, $E(x)$ en productos infinitos. Cambiando b y c en la fórmula (A) tenemos también

$$-d \log \frac{M(a,b)}{M(a,c)} = \frac{2}{\pi b^2} M(a,b) M(a,c) d \log \frac{a}{c}; \quad (B)$$

estas fórmulas pueden escribirse

$$\frac{\pi}{2} d \log \frac{M(a,b)}{M(a,c)} = \frac{M(a,b)^2}{c^2} d \log \frac{a}{b} = \frac{M(a,b)^2}{b^2} d \log \frac{a}{c},$$

de donde, por ser

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

⁽¹⁾ Cfr. USPENSKY, *Una nueva demostración del teorema de Jacobi*. Math. Notae. Año 4º, p. 80.

se deduce

$$\frac{\pi}{2} d \frac{M(a,b)}{M(a,c)} = \frac{M(a,b)^2}{a^2} d \log \frac{c}{b}.$$

Poniendo

$$\pi \frac{M(a,b)}{M(a,c)} = \log x$$

tenemos

$$\frac{a}{M(a,b)} = P(x)^2, \frac{b}{M(a,b)} = Q(x)^2, \frac{c}{M(a,b)} = R(x)^2$$

y podemos eliminar a, b, c , de las fórmulas precedentes obteniendo

$$\frac{1}{4} d \log x = \frac{1}{P^4} d \log \frac{R}{Q} = \frac{1}{Q^4} d \log \frac{R}{P} = \frac{1}{R^4} d \log \frac{P}{Q}$$

De aquí vamos a obtener expresiones para P^4, Q^4, R^4 calculando previamente los logaritmos luego de desarrollar P, Q, R , en productos infinitos. Para lograr estos desarrollos Gauss dispone de varios métodos de los cuales el siguiente nos parece singularmente ingenioso. Pongamos

$$L = 1 + \frac{x^n(1-x^{2n+1})}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} + \frac{x^{2n}(1-x^{2n+2})(1-x^{n+1})}{(1+x^n)(1+x^{n+1})(1+x^{n+2})} +$$

$$+ \frac{x^{3n}(1-x^{2n+3})(1-x^{n+1})(1-x^{n+2})}{(1+x^n)(1+x^{n+1})(1+x^{n+2})(1+x^{n+3})} + \dots$$

$$M = \frac{x^n}{1+x^n} + \frac{x^{2n}(1-x^{n+1})}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} + \frac{x^{3n}(1-x^{n+1})(1-x^{n+2})}{(1+x^n)(1+x^{n+1})(1+x^{n+2})} + \dots$$

dando a cada suma k términos. Podemos formar la diferencia $L-M$ primero sustrayendo cada término de M del correspondiente término de L y segundo sustrayendo el primer término de M del segundo de L , el segundo término de M del tercero de L , etc.

Poniendo

$$\varphi(x, n, k) = \frac{1}{1+x^n} + \frac{x^n(1-x^n)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} + \frac{x^{2n}(1-x^n)(1-x^{n+1})}{(1+x^n)(1+x^{n+1})(1+x^{n+2})} + \dots$$

donde la suma consta de k términos, hallamos una vez

$$L - M = \varphi(x, n, k)$$

y otra

$$L - M = 1 - x^{2n+1} \varphi(x, n+1, k-1) - \frac{x^{kn}(1-x^{n+1}) \dots (1-x^{n+k-1})}{(1+x^n)(1+x^{n+1}) \dots (1+x^{n+k-1})}$$

de modo que

$$\varphi(x, n, k) = 1 - x^{2n+1} \varphi(x, n+1, k-1) - \frac{x^{kn}(1-x^{n+1}) \dots (1-x^{n+k-1})}{(1+x^n)(1+x^{n+1}) \dots (1+x^{n+k-1})} \quad (C)$$

Sea ahora $0 < x < 1$; entonces al crecer k indefinidamente la suma $\varphi(x, n, k)$ tenderá al límite

$$\varphi(x, n) = \frac{1}{1+x^n} + \frac{x^n(1-x^n)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} + \frac{x^{2n}(1-x^n)(1-x^{n+1})}{(1-x^n)(1+x^{n+1})(1+x^{n+2})} + \dots,$$

serie infinita convergente para $n \geq 0$. De la identidad (C) resulta luego, para $n = 0$,

$$\varphi(x, 0) = 1 - x \varphi(x, 1) - T \quad (D)$$

donde

$$2T = \frac{(1-x)(1-x^2)(1-x^3) \dots}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3) \dots},$$

y para $n \geq 1$,

$$\varphi(x, n) = 1 - x^{2n+1} \varphi(x, n+1) \quad (E)$$

Como $\varphi(x, 0) = \frac{1}{2}$, de (D) y (E) resulta

$$\frac{1}{2} = 1 - T - x + x^4 \varphi(x, 2) = 1 - T - x + x^4 - x^9 \varphi(x, 3)$$

y en general

$$\frac{1}{2} = 1 - T - x + x^4 - x^9 + \dots + (-1)^n x^{n^2} \varphi(x, n).$$

Pero es fácil ver que

$$x^{n^2} \varphi(x, n)$$

tiende a cero al crecer n indefinidamente, de lo que resulta la igualdad

$$\frac{1}{2} = 1 - T - x + x^4 - x^9 + \dots$$

o bien

$$Q(x) = 1 - 2x + 2x^4 - 2x^9 + \dots = \frac{(1-x)(1-x^2)(1-x^3) \dots}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3) \dots}$$

y, cambiando x en $-x$

$$P(x) = 1 + 2x + 2x^4 + 2x^9 + \dots = \frac{(1+x)(1-x^2)(1+x^3) \dots}{(1-x)(1+x^2)(1-x^3) \dots}$$

luego

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^2 \left(\frac{1-x^3}{1+x^3} \right)^2 \left(\frac{1-x^5}{1+x^5} \right)^2 \dots$$

Ahora de la fórmula

$$R^4 = 4x \frac{d}{dx} \log \frac{P}{Q}$$

se deduce inmediatamente la identidad

$$(x^{1/4} + x^{9/4} + x^{25/4} + \dots)^4 = \frac{x}{1-x^4} + \frac{3x^3}{1-x^8} + \frac{5x^5}{1-x^{16}} + \dots$$

La otra identidad de Jacobi se obtiene de modo análogo, pero necesitamos para eso el desarrollo de $R(x)$ en producto infinito. Considerando las dos sumas

$$L = \frac{1-x^{2n+2}}{1-x^{n+1}} + \frac{x^n (1-x^{2n+4})(1-x^{n+2})}{(1-x^{n+1})(1-x^{n+3})} + \\ + \frac{x^{2n}(1-x^{2n+6})(1-x^{n+2})(1-x^{n+4})}{(1-x^{n+1})(1-x^{n+3})(1-x^{n+5})} + \dots$$

$$M = \frac{x^n(1-x^{n+2})}{1-x^{n+1}} + \frac{x^n(1-x^{2n+4})(1-x^{n+2})}{(1-x^{n+1})(1-x^{n+3})} + \\ + \frac{x^{3n}(1-x^{n+2})(1-x^{n+4})(1-x^{n+6})}{(1-x^{n+1})(1-x^{n+3})(1-x^{n+5})} + \dots$$

con el mismo número de términos y procediendo de la misma manera que en el caso precedente, Gauss establece primero la identidad

$$1+x+x^3+x^6+\dots+x^{\frac{n(n+1)}{2}}+\dots = \frac{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\dots}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\dots}$$

de la cual substituyendo x^2 en cambio de x y multiplicando los dos miembros por $x^{1/4}$ se deduce

$$R(x) = x^{1/4} \frac{(1-x^4)(1-x^8)(1-x^{12})\dots}{(1-x^2)(1-x^6)(1-x^{10})\dots}$$

y por tanto

$$\frac{Q(x)}{R(x)} = x^{1/4} \left\{ \frac{(1+x^2)(1+x^4)(1+x^6)\dots}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\dots} \right\}^2$$

y esto basta para lograr la aludida identidad de Jacobi.

APENDICE II

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

A continuación damos algunas referencias acerca del origen de las materias que hemos tratado en nuestra memoria para conveniencia de los lectores que deseen estudiar las notas de Gauss publicadas en sus Obras Completas, o sea, C. F. GAUSS WERKE.

Primera parte

1. La carta a Laplace se halla en *Werke*, 10^a, pág. 371-374.
2. El algoritmo de las medias aritmético-geométricas para números positivos está explicado en *Werke* 3, pág. 361-365.

3. La fórmula para la difeerencial $dM(a, b)$ se halla en *Werke* 3, págs. 372-373.
4. Para la deducción de la ecuación diferencial ver *Werke* 3, pág. 380-382.
5. La segunda deducción de la serie para $1/M(1+x, 1-x)$ se halla en *Werke* 10¹, pág. 181-183.
6. La expresión de la integral elíptica completa de primera especie se halla en *Werke* 3, pág. 370-371. Ver también *Werke* 3, pág. 352-353. La fórmula para la longitud de la elipse se halla en *Werke* 3, pág. 353-354. Ver también *Werke* 3, pág. 359-360 y *Werke* 10¹ pág. 229-231.
7. Ver *Werke* 3, pág. 377 y *Werke* 10¹ pág. 220-221.
8. Ver *Werke* 3, pág. 377 y *Werke* 10¹ pág. 217.
9. Ver *Werke* 3, pág. 377; *Werke* 8, pág. 96; *Werke* 10¹ pág. 217, 220.

Segunda parte

1. Para la definición de la media principal (*einfachste Mittel* según Gauss) ver *Werke* 3, pág. 477.
4. La carta a Bessel se halla en *Werke* 10¹, pág. 365-371.
5. La tercera deducción de la serie para $1/M(1+x, 1-x)$ se halla en *Werke* 3, pág. 367-369.
6. La fórmula fundamental (6) bajo otra forma se halla en *Werke* 3, pág. 477-478.
10. Una parte del dominio D se halla trazada en *Werke* 3, pág. 478.

Tercera parte

1. Fragmentos más antiguos donde aparecen las series $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$ se hallan en *Werke* 10¹ pág. 177, 190, 210. Ver también *Werke* 3, pág. 382-385.
2. Ver *Werke* 3, 383-384.
3. Las fórmulas (14) se hallan en *Werke* 3, pág. 386.
4. Ver *Werke* 3, pág. 477.
5. Ver *Werke* 3, pág. 478.
6. Ver *Werke* 3, pág. 478 y también 10¹ pág. 222-223.
9. El diario científico más interesante de Gauss se halla en *Werke* 10¹ pág. 488-572 y la noticia particular citada en pág. 550.

Apéndice I

Las identidades aludidas se hallan en *Werke* 3, pág. 445. Las fórmulas $P^4 = 4 \frac{d}{dx} \log \frac{R}{Q}$ etc. se hallan en *Werke* 3, pág. 382. Ver también *Werke* 10¹, pág. 211-212. Para los desarrollos en productos infinitos ver *Werke* 3, pág. 437-440.

COMPLEMENTO A LA NOTA

SOBRE UN PROBLEMA DIOFANTICO

por

L. A. SANTALÓ

1. - ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. — En el número anterior de estas *Mathematicae Notae* ⁽¹⁾ B. Levi resuelve el problema de hallar cuaternas de números enteros m, n, p, a , el a de una sola cifra, tales que los tres primeros verifiquen a la ecuación pitagórica

$$m^2 + n^2 = p^2 \quad (1.1)$$

y los números que se obtienen anteponiendo a cada uno de ellos la cifra a , sigan todavía verificando la misma ecuación (1.1).

Por ejemplo, para $m=5, n=12, p=13$ se cumple (1.1) y anteponiendo a cada uno de estos números la cifra $a=1$, se obtienen los números 15, 112, 113, que también satisfacen a la misma ecuación.

Demuestra B. Levi que el problema tiene infinitas soluciones, que clasifica en diferentes sucesiones infinitas correspondientes a los distintos casos que aparecen en el análisis del problema y después de estudiar varios de estos casos posibles, deja al cuidado del lector completar el estudio de los restantes.

Nos ha parecido interesante hacer este complemento, principalmente porque una simple observación nos ha permitido poner de manifiesto que puede prescindirse de la condición de que el número a sea de una sola cifra, llegándose al teorema general siguiente:

⁽¹⁾ B. LEVI, *Sobre un problema diofántico*, *Mathematicae Notae*, vol. V, pág. 108, 1945.

Indicando con a un entero positivo, para que existan tres números enteros m, n, p , que verifiquen la ecuación pitagórica (1.1) y cumplan la condición de que los números que se obtienen anteponiendo a cada uno de ellos el número a sigan verificando la misma ecuación (1.1), es condición necesaria y suficiente que sea

$$1 \leq a \leq 7, \quad (1.2)$$

en cuyo caso hay infinitas ternas m, n, p que cumplen las condiciones mencionadas.

Vamos a dividir la demostración en dos partes, probando primero que la condición es *necesaria* y luego que es *suficiente*.

1. *La condición es necesaria.* En la demostración de B. Levi la condición de que el número antepuesto a sea de una sola cifra se utiliza de una manera efectiva únicamente en el n.º. 3, para demostrar que en la expresión (21) que se escribe

$$b = 5^{x-u} 2^{x-u-1+k} a_1 + 2^h m_2 \quad (1.3)$$

debe ser

$$x - u - 1 + k = h. \quad (1.4)$$

Ahora bien, vamos a demostrar que dicha condición es superflua puesto que de fórmulas escritas precedentemente por el autor se puede deducir la acotación (1.2).

En los casos 1.º. y 2.º. a) de B. Levi, sin utilizar la hipótesis de que a sea de una sola cifra, se encuentra que a solamente puede tomar los valores 1, 2, 3. Estamos, pues, dentro de la acotación (1.2).

En el caso 2.º. b) se llega a la igualdad

$$b = 5 \cdot 10^{x-u-1} a + m_1. \quad (1.5)$$

Por otra parte, utilizando siempre las mismas notaciones de B. Levi, se tiene

$$\frac{m_2}{b} = p + n > 2 \cdot 10^{x+u-1} \quad (1.6)$$

siendo

$$m = 10^u m_1 < 10^x. \quad (1.7)$$

De (1.5), (1.6) y (1.7) se tiene

$$m^2 = 10^{2u} m_1^2 > 2 \cdot 10^{x+u-1} (5 \cdot 10^{x-u-1} a + m_1)$$

o sea

$$m_1^2 > 10^{2(x-u)-1} a + 2 \cdot 10^{x-u-1} m_1$$

que se puede escribir en la forma

$$(m_1 - 10^{x-u-1})^2 > 10^{2(x-u-1)} (10a + 1).$$

Pero siendo $m_1 < 10^{x-u}$, de esta desigualdad se deduce

$$10^{2(x-u-1)} 9^2 > 10^{2(x-u-1)} (10a + 1)$$

de donde

$$a < 8 \quad (1.8)$$

lo que prueba la acotación (1.2).

Como confirmación de este resultado se observa que la afirmación contenida en la pág. 117 de la nota de B. Levi de que k puede tomar los valores 0, 1, 2, 3 (lo que equivale a decir que a puede tomar los valores 1, 2, 4, 8) debe modificarse excluyendo el valor $k=3$. En efecto, para $k=3$ se comprueba inmediatamente que los dos extremos de las desigualdades (37) se hacen iguales, lo que demuestra la no existencia de ningún valor de l intermedio entre ellos.

2º. *La condición es suficiente.* Una vez demostrado que la condición (1.2) es *necesaria*, nos falta probar que ella es *suficiente*, es decir, que para cada valor de $a \leq 7$, existen infinitas ternas de números enteros m, n, p satisfaciendo las condiciones del teorema.

Para $a=1, 2, 3$ han sido dados ejemplos por B. Levi y el caso $a=4$ cae también dentro de los casos por él estudiados. Pero como al llegar a la pág. 115 B. Levi pasa a considerar

particularmente el caso $a_1 = c = d = 1$, quedan de lado los casos $a = 5, 6, 7$. Para considerar estos casos partiremos de las fórmulas siguientes, obtenidas en la pág. 115:

$$b = 2^{h+l} c, \quad u \geq \frac{l-h+1}{2} \quad (1.9)$$

$$5^{h-k+1} a_1 + m_2 = 2^l c, \quad p + n = 5^{2u} 2^{2u+h-l} \frac{m_2^2}{c} \quad (1.10)$$

$$5^{h-k} 2^{-k} \leq m_2 < 5^{h-k+1} 2^{1-k} \quad (1.11)$$

$$5^{h-k} 2^{l-k+1} < \frac{m_2^2}{c} < 5^{h-k+1} 2^{l-k+2} \quad (1.12)$$

siendo además

$$m = 10^u m_1 = 10^u 2^h m_2. \quad (1.13)$$

La desigualdad (1.12) se puede escribir

$$5^{\frac{h-k}{2}} 2^{\frac{l-k+1}{2}} \sqrt{c} < m_2 < 5^{\frac{h-k+1}{2}} 2^{\frac{l-k+2}{2}} \sqrt{c}. \quad (1.14)$$

Para reunir (1.11) y (1.14) en una única sucesión de dos desigualdades, basta observar que

$$5^{h-k} 2^{-k} < 5^{\frac{h-k}{2}} 2^{\frac{l-k+1}{2}} \sqrt{c}, \quad 5^{h-k+1} 2^{1-k} < 5^{\frac{h-k+1}{2}} 2^{\frac{l-k+2}{2}} \sqrt{c}.$$

En efecto, ambas desigualdades, por simples transformaciones se ve que serán verificadas siempre que sea

$$5^{h-k+1} < 2^{k+l} c$$

y esta desigualdad es evidente teniendo en cuenta la primera igualdad (1.10).

Podemos por tanto reunir (1.11) y (1.14) en la expresión única

$$5^{\frac{h-k}{2}} 2^{\frac{l-k+1}{2}} \sqrt{c} < m_2 < 5^{h-k+1} 2^{1-k}. \quad (1.15)$$

Teniendo en cuenta la primera igualdad (1.10) estas desigualdades equivalen a las siguientes

$$2^l c > 5^{\frac{h-k}{2}} 2^{\frac{1-k}{2}} 2^{\frac{l}{2}} \sqrt{c} + 5^{h-k+1} a_1 \quad (1.16)$$

$$2^l c < 5^{h-k+1} (a_1 + 2^{1-k}). \quad (1.17)$$

La (1.16) equivale a

$$2^{\frac{l}{2}} > \frac{1}{2\sqrt{c}} 5^{\frac{h-k}{2}} (2^{\frac{1-k}{2}} + \sqrt{2^{1-k} + 20 a_1})$$

y la (1.17) se puede escribir

$$2^{\frac{l}{2}} < \frac{1}{\sqrt{c}} 5^{\frac{h-k+1}{2}} \sqrt{a_1 + 2^{1-k}}.$$

Tomando logaritmos podemos escribir estas desigualdades en la forma más simple

$$l > (h-k) \frac{\log 5}{\log 2} + 2 \frac{\log (2^{\frac{1-k}{2}} + \sqrt{2^{1-k} + 20 a_1})}{\log 2} - 2 \frac{\log c}{\log 2} \quad (1.18)$$

$$l < (h-k) \frac{\log 5}{\log 2} + \frac{\log 5 + \log (a_1 + 2^{1-k}) - \log c}{\log 2}. \quad (1.19)$$

Escribiendo que estas dos desigualdades (1.18) y (1.19) deben ser compatibles, se tiene,

$$2 \frac{\log (2^{\frac{1-k}{2}} + \sqrt{2^{1-k} + 20 a_1})}{\log 2} - 2 < \frac{\log 5 + \log (a_1 + 2^{1-k})}{\log 2}$$

o sea,

$$\frac{1}{4} (2^{\frac{1-k}{2}} + \sqrt{2^{1-k} + 20 a_1})^2 < 5 (a_1 + 2^{1-k})$$

que equivale a

$$2^k a_1 < 8. \quad (1.20)$$

y como $a = 2^k a_1$, se comprueba de nuevo la acotación (1.8).

Siempre que sean dados dos valores k y a_1 que cumplan la condición (1.20), el hecho de que $\log 5 : \log 2$ sea un número irracional permite afirmar (como observó B. Levi en el artículo originario) que existirán infinitos valores enteros de h, l, c para los cuales se verifiquen al mismo tiempo las desigualdades (1.18) y (1.19).

Recordemos que h, l pueden ser cualesquiera mayores que 1; en cambio c debe ser impar, no múltiplo de 5 y divisor de a_1^2 .

Una vez obtenidos h, l, c , mediante (1.10) se obtendrá m_2 . Tomando para u un valor cualquiera que satisfaga a la desigualdad (1.9) conoceremos m por (1.13). Con el valor de $p - n = b$ deducido de (1.9) y el de $p + n$ dado por (1.10) calcularemos p y n . Como u , con tal de verificar la desigualdad (1.9), puede ser cualquiera, resultan infinitas soluciones para cada a y cada terna h, l, c de valores.

2. - EJEMPLOS. — Para $a = 1, 2, 3$ han sido dadas varias sucesiones infinitas de ejemplos por B. Levi. Reproduciremos las más simples:

Caso $a = 1$. Se tiene el ejemplo más simple ya citado

$$m = 5, \quad n = 12, \quad p = 13 \quad (2.1)$$

y la serie infinita que se obtiene dando a v valores enteros ≥ 0 en las expresiones

$$m = 5 \cdot 10^{v+1}, \quad n = 125 \cdot 10^{2v} - 5, \quad p = 125 \cdot 10^{2v} + 5.$$

Caso $a = 2$. Se obtiene, para todo valor de $v \geq 0$,

$$m = 6 \cdot 10^{v+2}, \quad n = 18 \cdot 5^4 \cdot 10^{2v} - 8, \quad p = 18 \cdot 5^4 \cdot 10^{2v} + 8;$$

así, para $v = 0$ resulta

$$m = 600, \quad n = 11242, \quad p = 11258. \quad (2.2)$$

Caso $a=3$. Se obtiene para todo $v \geq 0$,

$$m = 9 \cdot 10^{v+2}, \quad n = 27 \cdot 5^4 \cdot 10^{2v} - 12, \quad p = 27 \cdot 5^4 \cdot 10^{2v} + 12$$

que para $v=0$ dan

$$m = 900, \quad n = 16863, \quad p = 16887 \quad (2.3)$$

Para $a=4, 5, 6, 7$ utilizaremos, como hemos dicho, las desigualdades (1.18) y (1.19). Se tiene:

Caso $a=4$. Es $a_1=1, k=2$. Como c debe ser divisor de a_1^2 debe ser $c=1$. Sustituyendo estos valores en (1.18) y (1.19) y haciendo los cálculos se obtienen las desigualdades

$$2,3219(h-2) + 2,776 < l < 2,3219(h-2) + 2,906.$$

El mínimo valor de h para el cual l puede ser entero es

$$h=12, \quad l=26.$$

De (1.9) se deduce entonces que debe ser $u \geq 15/2$; pongamos $u=v+8$, siendo v un número entero cualquiera ≥ 0 . Se tendrá, según (1.9), (1.10) y (1.13),

$$m_2 = 2^{26} - 5^{11}, \quad m_1 = (2^{26} - 5^{11}) \cdot 2^{12}, \quad m = (2^{26} - 5^{11}) \cdot 2^{12} \cdot 10^{v+8}.$$

$$b = p - n = 2^{38}$$

$$p + n = (2^{26} - 5^{11})^2 \cdot 2 \cdot 5^{15} \cdot 10^{2v+1}.$$

Resulta por tanto la sucesión infinita de soluciones

$$m = (2^{26} - 5^{11}) \cdot 2^{12} \cdot 10^{v+8}$$

$$n = (2^{26} - 5^{11})^2 \cdot 5^{15} \cdot 10^{2v+1} - 2^{37}$$

$$p = (2^{26} - 5^{11})^2 \cdot 5^{15} \cdot 10^{2v+1} + 2^{37}.$$

Para $v=0$ resulta

$$m = 7\ 487\ 790\ 694\ 400\ 000\ 000$$

$$n = 101\ 985\ 296\ 138\ 342\ 452\ 893\ 077\ 778 \quad (2.4)$$

$$p = 101\ 985\ 296\ 138\ 342\ 727\ 770\ 984\ 722.$$

Caso $a=5$. Es $a_1=5$, $k=0$. Como c debe ser divisor de a_1^2 y no ser múltiplo de 5 únicamente puede ser $c=1$. Las desigualdades (1.18) y (1.19) se escriben

$$2,3219 \cdot h + 5,051 < l < 2,3219 \cdot h + 5,129.$$

El mínimo valor de h para el cual l puede ser entero es

$$h=6, \quad l=19.$$

De (1.9) se deduce que debe ser $u \geq 7$; pongamos $u=v+7$, siendo $v \geq 0$.

Según (1.9), (1.10) y (1.13) se tendrá

$$m_2 = 2^{19} - 5^8, \quad m_1 = (2^{19} - 5^8) \cdot 2^6, \quad m = (2^{19} - 5^8) \cdot 2^6 \cdot 10^{v+7}$$

$$b = p - n = 2^{25}$$

$$p + n = (2^{19} - 5^8)^2 \cdot 2 \cdot 5^{14} \cdot 10^{2v}.$$

Se tiene así la sucesión infinita de soluciones

$$m = (2^{19} - 5^8) \cdot 2^6 \cdot 10^{v+7}$$

$$n = (2^{19} - 5^8)^2 \cdot 5^{14} \cdot 10^{2v} - 2^{24}$$

$$p = (2^{19} - 5^8)^2 \cdot 5^{14} \cdot 10^{2v} + 2^{24}.$$

Para $v=0$ resulta

$$m = 85\ 544\ 320\ 000\ 000$$

$$n = 109\ 044\ 174\ 615\ 461\ 738\ 409 \quad (2.5)$$

$$p = 109\ 044\ 174\ 615\ 495\ 292\ 841.$$

Caso $a=6$. Es $a_1=3$, $k=1$; c puede tomar los valores 1, 3, 9. Las desigualdades (1.18) y (1.19) se escriben

$$2,3219(h-1) + 4,278 - \frac{\log c}{\log 2} < l < 2,3219(h-1) + 4,322 - \frac{\log c}{\log 2}$$

Probando valores enteros de h y los posibles de c , se obtiene que los valores mínimos para h y l resultan al tomar

$$h=5, c=3, l=12.$$

De (1.9) se deduce entonces que debe ser $u \geq 4$; pongamos $u=v+4$. Según (1.9), (1.10) y (1.13) se tendrá

$$m_2 = (2^{12} - 5^5) \cdot 3, \quad m_1 = (2^{12} - 5^5) \cdot 3 \cdot 2^5,$$

$$m = (2^{12} - 5^5) \cdot 3 \cdot 2^5 \cdot 10^{v+4}$$

$$b = p - n = 2^{17} \cdot 3$$

$$p + n = (2^{12} - 5^5)^2 \cdot 5^8 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10^{2v}.$$

Dando a v todos los valores ≥ 0 se obtiene así la sucesión de soluciones siguiente

$$m = (2^{12} - 5^5) \cdot 3 \cdot 2^5 \cdot 10^{v+4}$$

$$n = (2^{12} - 5^5)^2 \cdot 5^8 \cdot 3 \cdot 10^{2v} - 2^{16} \cdot 3$$

$$p = (2^{12} - 5^5)^2 \cdot 5^8 \cdot 3 \cdot 10^{2v} + 2^{16} \cdot 3.$$

Para $v=0$ resulta

$$m = 932 \ 160 \ 000$$

$$n = 1104 \ 891 \ 600 \ 267 \quad (2.6)$$

$$p = 1104 \ 891 \ 993 \ 483.$$

Caso $a=7$. Es $a=7$, $k=0$; c puede tomar los valores 1, 7, 49. Las desigualdades (1.18) y (1.19) se escriben

$$2,3219 h + 5,46 - \frac{\log c}{\log 2} < l < 2,3219 h + 5,49 - \frac{\log c}{\log 2}.$$

Probando valores enteros de h y los posibles de c se obtiene que los valores mínimos para h y l resultan al tomar

$$h=1, c=7, l=5.$$

De (1.9) se deduce entonces que debe ser $u \geq 5/2$; pongamos $u = v + 3$, con $v \geq 0$. Según (1.9), (1.10) y (1.13) se tendrá

$$m_2 = (2^5 - 5^2) \cdot 7, m_1 = (2^5 - 5^2) \cdot 7 \cdot 2, m = (2^5 - 5^2) \cdot 2 \cdot 7 \cdot 10^{v+3}$$

$$b = p - n = 2^6 \cdot 7$$

$$p + n = (2^5 - 5^2) \cdot 7 \cdot 5^5 \cdot 2 \cdot 10^{2v+1}.$$

Se obtiene así la sucesión infinita de soluciones

$$m = (2^5 - 5^2) \cdot 2 \cdot 7 \cdot 10^{v+3}$$

$$n = (2^5 - 5^2)^2 \cdot 5^5 \cdot 7 \cdot 10^{2v+1} - 2^5 \cdot 7$$

$$p = (2^5 - 5^2)^2 \cdot 5^5 \cdot 7 \cdot 10^{2v+1} + 2^5 \cdot 7.$$

Para $v = 0$ resulta

$$m = 98000, \quad n = 10718526, \quad p = 10718974. \quad (2.7)$$

Observemos finalmente que, *por la manera como han sido obtenidos, los ejemplos numéricos (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (2.5), (2.6), (2.7) son, en cada caso, los de mínimo número de cifras.*

Se observa también que las sucesiones obtenidas de soluciones no son, evidentemente, las únicas, puesto que las desigualdades (1.18) y (1.19), en cada caso, pueden verificarse para infinitos valores de h y l .

ROSARIO, INSTITUTO DE MATEMÁTICA.

SOLUCION DE LA CUESTION N.º 12

La cuestión N.º 12 propuesta en el año IV, pág. 184, decía:

Ocho puntos elegidos arbitrariamente en un plano determinan en general un haz de cúbicas. Interesa particularmente el caso en que nunca más de tres se encuentran sobre una misma recta, ni más de seis sobre una cónica, en cuanto el haz no es degenerado. Se pide determinar la configuración que presenta el máximo número posible de ternas de puntos alineados y caracterizar el haz de cúbicas correspondiente.

SOLUCIÓN. — 1. — En el enunciado de la cuestión, la palabra *configuración* está evidentemente usada en sentido amplio de distribución de puntos sin pretender que los varios puntos tengan comportamiento simétrico. Después de esta aclaración, indicaremos con $P_1, P_2, \dots, P_8$ los 8 puntos y con r_i ($i=1, 2, \dots, v$) las rectas que contienen tres puntos, quedando momentáneamente indeterminado el número v ; formaremos símbolos $P_i r_i$ asociando cada punto con cada una de las rectas r_i que pasan por él; los llamaremos símbolos de *punto*.

Notemos ahora que ningún punto puede asociarse con más de tres rectas, porque de lo contrario, se tendrían por lo menos $2 \times 4 + 1 = 9$ puntos. Resulta pues que se tienen a lo más $8 \times 3 = 24$ símbolos de puntos (y serán menos si hay puntos para los cuales no pasan tres r_i). Como además cada r_i pertenece a tres símbolos, resulta que las r_i serán a lo más ocho, es decir $v \leq 8$.

Obtenemos por lo tanto esta primera conclusión que: *la configuración requerida con el máximo número de ternas de puntos alineados es una 8_3 (ocho puntos cada uno sobre tres rectas con tres puntos) en el caso de que tal configuración exista.*

La teoría de las cúbicas nos permite afirmar que existe efectivamente una configuración que responde a estas características y es la que se obtiene de la configuración de los nueve

puntos de inflexión restándole un punto. En efecto, tal configuración contiene doce rectas, cuatro para cada uno de los nueve puntos. Al suprimir uno, desaparecen también las cuatro rectas por él y quedan ocho rectas y de éstas tres solamente para cada punto.

Pero vamos ahora a demostrar elementalmente la existencia y unicidad de la configuración requerida.

Sea P_1 uno de los puntos y sean r_1, r_2, r_3 las rectas de la configuración, que pasan por él. Sean P_2, P_5 los puntos contenidos en r_1 ; P_4, P_8 los contenidos en r_2 ; P_6, P_7 en r_3 . La configuración tendrá el esquema:

r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8
P_1	P_1	P_1	P_2	P_2	.	.	.
P_2	P_4	P_6	.	.	.	.	.
P_5	P_8	P_7	.	.	.	.	.

Las rectas r_4 y r_5 que pasan por P_2 no contendrán al punto P_5 ni a los pares P_4P_8, P_6P_7 , serán por lo tanto, y a menos de permutaciones de letras que no varían las características de la configuración

P_2	P_2
P_6	P_7
P_3	P_8

Análogamente, teniendo en cuenta que por P_3 solamente pasarán dos rectas más, en las cuales no deben figurar P_1, P_6, P_2 ni tampoco los pares que ya figuran, resulta:

P_3	P_3
P_4	P_5
P_7	P_8

Falta todavía una recta que pase por P_4 ; en ella no deben figurar P_3, P_7, P_1, P_8, P_2 , resulta

P_4	P_5	P_6
-------	-------	-------

Queda por lo tanto la configuración: (*)

$$C(8_3) \left\{ \begin{array}{cccccccc} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 & r_6 & r_7 & r_8 \\ P_1 & P_1 & P_1 & P_2 & P_2 & P_3 & P_3 & P_4 \\ P_2 & P_4 & P_6 & P_6 & P_7 & P_4 & P_5 & P_5 \\ P_5 & P_8 & P_7 & P_3 & P_8 & P_7 & P_8 & P_6 \end{array} \right.$$

Realización. — Probaremos que esta configuración es realizable en el campo complejo, aunque no en el real:

En efecto, entre los puntos P_1, P_2, P_4, P_6 no hay tres alineados, pueden por lo tanto tomarse como puntos básicos de un sistema de coordenadas trilineales, para ello atribuiremos a estos puntos las siguientes coordenadas:

$$P_1 (1, 0, 0); P_2 (0, 1, 0); P_4 (0, 0, 1); P_6 (1, 1, 1).$$

Determinaremos las coordenadas de los otros, por las ecuaciones que resultan de la alineación:

De r_1 resulta

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_5 & y_5 & z_5 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{es decir } z_5 = 0. \quad (1)$$

De r_2 resulta

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{es decir } y_4 = 0. \quad (2)$$

De r_3 resulta

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_6 & y_6 & z_6 \\ x_7 & y_7 & z_7 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{es decir } y_6 z_7 = z_6 y_7. \quad (3)$$

(*) Un estudio completo de las configuraciones (n_3) puede encontrarse en *Geometrische Configurationen* de FRIEDRICH LEVI y en *Anschauliche Geometrie* de HILBERT y COHN-VOSSEN.

De r_4 resulta

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ x_6 & y_6 & z_6 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{es decir } x_6 = z_6, \text{ ponemos } y_6 = x. \quad (4)$$

De r_5 resulta

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x_7 & y_7 & z_7 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{es decir } x_7 = 0. \quad (5)$$

De r_6 resulta

$$\begin{vmatrix} x_4 & 0 & z_4 \\ 0 & y_7 & z_7 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{es decir } -z_4 y_7 - x_4 z_7 + x_4 y_7 = 0. \quad (6)$$

De r_7 resulta

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ x_5 & y_5 & z_5 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{es decir } y_5 = x_5. \quad (7)$$

De r_8 resulta

$$\begin{vmatrix} x_6 & y_6 & z_6 \\ x_5 & y_5 & z_5 \\ x_4 & 0 & z_4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{es decir } x_4(y_5 z_6 - z_5 y_6) + z_4(x_5 y_6 - y_5 x_6) = 0. \quad (8)$$

De (4) resulta $P_6(1, x, 1)$ (9), ya que, por ser coordenadas homogéneas puede tomarse una de ellas no nula igual a 1.

De (7) y (1) resulta

$$P_5(1, 1, 0). \quad (10)$$

De (3) y (9) haciendo $z_7 = 1$ resulta $y_7 = x$, luego, por (5).

$$P_7(0, x, 1). \quad (11)$$

De (6), (8), (9), (10) y (11) resulta el sistema homogéneo:

$$\begin{cases} x_4(x-1) - z_4 x = 0 \\ x_4 + z_4(x-1) = 0; \end{cases}$$

la condición de compatibilidad es

$$\begin{vmatrix} x-1 & -x \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{es decir } (x-1)^2 + x = 0$$

o también $x^2 - x + 1 = 0$, cuya solución es

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt[3]{\frac{3}{4}} = -\varepsilon \quad (\text{con } \varepsilon = \sqrt[3]{1} \neq 1).$$

Luego resulta como realización de la configuración (8_3) :

$$\begin{aligned} P_1(1, 0, 0); \quad P_2(0, 1, 0); \quad P_3(0, 0, 1); \quad P_4(1, 1, 1) \\ P_5(1, 1, 0); \quad P_6(0, 1 + \varepsilon, 1); \quad P_7(1, -\varepsilon, 1); \quad P_8(0, -\varepsilon, 1). \end{aligned}$$

2.-De lo anteriormente dicho resulta que cuando no se especifica si los puntos son reales o complejos, la configuración buscada es

	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8
$C(8_3)$:	P_1	P_1	P_1	P_2	P_2	P_3	P_3	P_4
	P_2	P_4	P_6	P_6	P_7	P_4	P_5	P_5
	P_5	P_8	P_7	P_3	P_8	P_7	P_8	P_6

Las rectas r_1 , r_6 y $r_9 = (P_6 P_8)$ contienen los ocho puntos, luego forman una cúbica del haz, es decir, el noveno punto fijo del haz (P_9) está sobre r_9 ya que no puede estarlo en r_1 ni r_6 . Análogamente r_2 , r_4 y $r_{10} = (P_5 P_7)$; entonces es $P_9 = (r_9 r_{10})$; además, r_3 , r_7 , $r_{11} = (P_2 P_4)$; por lo tanto r_{11} y $r_{12} = (P_1 P_3)$ pasan también por P_9 . Los nueve puntos forman:

	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}	r_{11}	r_{12}
$C(9_3)$:	P_1	P_1	P_1	P_2	P_2	P_3	P_3	P_4	P_6	P_5	P_2	P_1
	P_2	P_4	P_6	P_3	P_7	P_4	P_5	P_5	P_8	P_7	P_4	P_3
	P_5	P_8	P_7	P_6	P_8	P_7	P_8	P_6	P_9	P_9	P_9	P_9

Esta configuración consta de nueve puntos y doce rectas, en cada recta hay tres puntos, por cada punto pasan cuatro rectas.

Teorema: La configuración $C(9_3)$ es la de Mac Laurin y el haz es sizigético.

En efecto, un punto cualquiera, por ejemplo el P_1 , es de inflexión, puesto que las rectas r_1, r_2, r_3 , por P_1 cortan a una cúbica cualquiera del haz en dos ternas de puntos alineados sobre las rectas r_5, r_8 . Análogamente para los otros puntos.

De ello resulta que los nueve puntos base son de inflexión, es decir, el haz es sizigético.

3. - *El problema con puntos reales.* Resulta de lo dicho que en el caso de puntos reales la configuración requerida no puede componerse con más de 7 alineaciones. Procediendo en modo eurístico podemos intentar de obtener el resultado de dos maneras:

1º. Suprimir una columna en el esquema de las alineaciones de la $C(8_3)$; se resta de esta manera un vínculo en la colocación de los 8 puntos; por la simetría de la configuración es indiferente la columna que se suprima; obtenemos por tanto el esquema

$$\begin{array}{ccccccc} & P_1 & P_1 & P_1 & P_2 & P_2 & P_3 & P_3 \\ a) & P_2 & P_4 & P_6 & P_6 & P_7 & P_4 & P_5 \\ & P_5 & P_8 & P_7 & P_3 & P_8 & P_7 & P_8 \end{array}$$

Se demuestra fácilmente que por dejar de ser alineados los puntos $P_4 P_5 P_6$, dejan de ser puntos de inflexión los puntos P_1 y P_3 .

2º. Es conocido⁽¹⁾ que es posible una configuración $C(7_3)$ de sólo 7 rectas y 7 puntos distribuidos en ternas sobre las rectas; pero, al igual como la $C(8_3)$ no es realizable con puntos reales; su esquema es

$$\begin{array}{ccccccc} P_1 & P_1 & P_1 & P_2 & P_2 & P_3 & P_3 \\ P_2 & P_4 & P_6 & P_4 & P_5 & P_4 & P_5 \\ P_3 & P_5 & P_7 & P_6 & P_7 & P_7 & P_6 \end{array}$$

desdoblando uno de los puntos se elimina igualmente un vínculo y se consigue la realización en el campo real

⁽¹⁾ Ver el tratado citado de F. LEVI, pág. 94

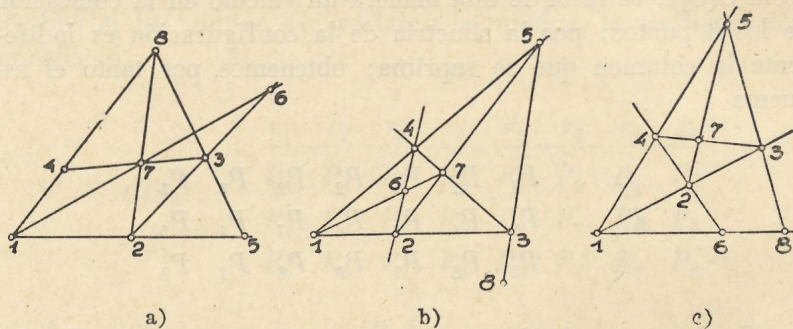
b)

P_1	P_1	P_1	P_2	P_2	P_3	P_3
P_2	P_4	P_6	P_4	P_5	P_4	P_5
P_3	P_5	P_7	P_6	P_7	P_7	P_8

Una ulterior transformación se obtiene sustituyendo el mismo P_8 al P_7 de la tercera columna

c)

P_1	P_1	P_1	P_2	P_2	P_3	P_3
P_2	P_4	P_6	P_4	P_5	P_4	P_5
P_3	P_5	P_8	P_6	P_7	P_7	P_8



Las figuras adjuntas dan ejemplos de las tres distribuciones de puntos.

Fausto I. Toranzos

N. de la Red. — El procedimiento indicado para la determinación de soluciones con 7 rectas no garantiza suficientemente la obtención de todas las posibles. Puede regularizarse la investigación de la manera siguiente:

Indicando con x, y, z, t respectivamente los números de puntos del sistema que pertenecen a 3, 2, 1 o ninguna terna de puntos alineados, se tienen las dos ecuaciones

$$\begin{aligned} x + y + z + t &= 8 \\ 3x + 2y + z &= 7 \times 3 = 21. \end{aligned}$$

De este sistema indeterminado deben buscarse las soluciones enteras y positivas. Se ve en seguida que ellas son

$$\begin{aligned}t=1, \quad x=7, \quad y=z=0 \\t=0, \quad x=6, \quad y=z=1 \\t=0, \quad x=5, \quad y=3, \quad z=0.\end{aligned}$$

La primera solución corresponde a la $C(7_3)$ a la cual tendría que agregarse un punto aislado; pero ya se notó que no existe una $C(7_3)$ de puntos reales.

Para realizar la segunda solución se puede suponer que los dos puntos para los cuales pasan respectivamente una y dos rectas del sistema tengan una de estas rectas en común o no la tengan; la primera hipótesis se demuestra imposible porque de los 6 puntos restantes habría 3 para los cuales pasan tres rectas que contienen cada una 3 puntos de esta sextupla, lo cual es absurdo, porque una sola de estas ternas de rectas necesitaría 7 puntos. La segunda hipótesis corresponde a la distribución b).

Análogo análisis puede hacerse para la tercera solución; se encuentra que de los tres puntos dobles a lo más dos pueden estar sobre una misma recta del sistema; y según se supone existir o no existir este par se obtienen respectivamente los esquemas c) o a).

Puede ser interesante notar que los esquemas b) y c) presentan la particularidad de que 4 de los puntos triples forman un cuadrángulo del cual un punto doble es punto diagonal, mientras los otros tres puntos están sobre una recta (por otro punto diagonal). Al haz de cúbicas determinado por los 8 puntos pertenece una formada de 3 rectas con punto doble el primer punto diagonal nombrado. Esto significa que el haz tiene en este punto una tangente fija y no existe noveno punto fundamental del haz distinto de los anteriores.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

SOLUCIONES

Nº 59 — Demostrar que cualesquiera que sean los números positivos x , y , z se verifica

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$

1ª. SOLUCIÓN. — Multiplicando ambos miembros de la desigualdad que se trata de establecer por el número positivo $(y+z)(x+z)(x+y)$ y pasando todos los términos al primer miembro, el problema equivale a demostrar que:

$$2x^3 + 2y^3 + 2z^3 - x^2y - x^2z - z^2x - z^2y - y^2x - y^2z \geq 0$$

o sea, hay que demostrar que

$$(x^2 - y^2)(x - y) + (x^2 - z^2)(x - z) + (y^2 - z^2)(y - z) \geq 0.$$

Pero el primer miembro de esta desigualdad, poniendo las diferencias de cuadrados como productos de suma por diferencia, se puede escribir

$$(x - y)^2(x + y) + (x - z)^2(x + z) + (y - z)^2(y + z)$$

lo cual es evidentemente un número no negativo. Queda así demostrado el enunciado.

2ª. SOLUCIÓN. — Poniendo $x + y + z = t$, la expresión propuesta se escribe

$$\frac{x}{t-x} + \frac{y}{t-y} + \frac{z}{t-z} = \frac{x}{t} \frac{1}{1-\frac{x}{t}} + \frac{y}{t} \frac{1}{1-\frac{y}{t}} + \frac{z}{t} \frac{1}{1-\frac{z}{t}}$$

y observando que cada uno de los quebrados $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$ es ≤ 1 , se desarrolla en la serie

$$\frac{x+y+z}{t} + \frac{x^2+y^2+z^2}{t^2} + \frac{x^3+y^3+z^3}{t^3} + \dots$$

Cada suma $x^n+y^n+z^n$ es mínima para $x=y=z$; se sigue que aun la expresión propuesta es mínima en estas condiciones.

N.º 65 — Sea un triángulo ABC ; sobre las rectas de los lados AB, BC, CA sean los puntos C', A', B' respectivamente tales que

$$AC':AB=BA':BC=CB':CA=n$$

(n es un número real positivo o negativo); se trazan los segmentos AA', BB', CC' ; demostrar que

$$\overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2 + \overline{CC'}^2 = (n^2 - n + 1)(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2).$$

SOLUCIÓN. — En el triángulo ABC se tiene

$$\overline{AB}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 - 2\overline{CA} \cdot \overline{CB} \cos C.$$

Escribiendo las igualdades análogas para los lados BC y CA y sumando se obtiene inmediatamente

$$\begin{aligned} 2\overline{CA} \cdot \overline{CB} \cos C + 2\overline{BA} \cdot \overline{BC} \cos B + 2\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cos A = \\ = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2. \end{aligned} \quad (1)$$

En el triángulo ABA' se tiene

$$\overline{AA'}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BA'}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{BA'} \cos B$$

o bien, sustituyendo $\overline{BA'} = n \cdot \overline{BC}$,

$$\overline{AA'}^2 = \overline{AB}^2 + n^2 \overline{BC}^2 - 2n \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cos B.$$

Escribiendo las igualdades análogas para BB' y CC' y sumando, se tiene, teniendo en cuenta (1)

$$\overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2 + \overline{CC'}^2 = (n^2 + 1 - n)(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2)$$

que es lo que se quería demostrar.

N.º 83 — Sea dada una elipse de semiejes a, b . Suponiendo que esta elipse gira manteniéndose tangente a una recta fija en un punto fijo de la misma, después de haber dado la vuelta completa, el centro de la elipse habrá descrito una curva cerrada. Hallar la ecuación de esta curva y demostrar que el área limitada por la misma vale $\frac{\pi}{2}(a-b)^2$.

Se sabe que la ecuación de una elipse en coordenadas polares (ρ, ϑ) es

$$\rho^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 \vartheta + a^2 \sin^2 \vartheta}, \quad (1)$$

cuando se toma el polo en el centro de la elipse y el eje polar en coincidencia con el semieje mayor.

Se sabe también que en una curva cualquiera, referida a coordenadas polares, la tangente en un punto de coordenadas ρ, ϑ , forma con el radio vector un ángulo ω que viene dado por la relación

$$\operatorname{tg} \omega = \rho \frac{d\vartheta}{d\rho}. \quad (2)$$

(Ver por ejemplo, P. Appell. Elements d'Analyse, p. 276).

Aplicando esta fórmula en nuestro caso se obtiene, teniendo en cuenta (1),

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{a^2 b^2}{\rho^2 (b^2 - a^2) \sin \vartheta \cos \vartheta}; \quad (3)$$

y también mediante (1) puede eliminarse ϑ obteniéndose mediante un cálculo simple

$$(a^2 - \rho^2)(\rho^2 - b^2) \operatorname{tg}^2 \omega = a^2 b^2$$

Se observa entonces que esta es precisamente la ecuación de la

curva pedida con referencia a un sistema de coordenadas polares en que ρ sea el radio vector y ω el argumento.

La ecuación obtenida puede escribirse en la forma

$$\rho^4 - (a^2 + b^2) \rho^2 + a^2 b^2 \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \omega}\right) = 0,$$

y siendo ésta una ecuación bicuadrada en ρ se obtiene

$$\rho^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)^2}{4} - a^2 b^2 \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \omega}\right)}$$

o bien

$$\rho^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} \pm \frac{a^2 - b^2}{2} \sqrt{1 - \frac{k^2}{\operatorname{tg}^2 \omega}} \quad (4)$$

donde hemos puesto

$$k^2 = \frac{4a^2 b^2}{(a^2 + b^2)^2}.$$

Esta expresión nos da para cada valor de ω cuatro valores de ρ pero deben excluirse los que sean negativos.

Observamos también que, en virtud de su definición cinemática, y por la simetría de la elipse respecto de sus ejes, la curva debe ser simétrica con respecto a un eje normal al eje polar por el polo; lo que se ve también por la ecuación que no cambia si se sustituye ω por $\pi - \omega$.

Para que sea ρ^2 real debe ser $\operatorname{tg}^2 \omega \geq k^2$ es decir

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} k \leq \omega \leq \pi - \operatorname{arc} \operatorname{tg} k$$

o bien

$$\pi + \operatorname{arc} \operatorname{tg} k \leq \omega \leq 2\pi - \operatorname{arc} \operatorname{tg} k;$$

pero a estos últimos valores de ω corresponden puntos situados del otro lado de la recta fija respecto de la posición inicial de la elipse, los que no pueden ser alcanzados por el centro de

curva pedida con referencia a un sistema de coordenadas polares en que ρ sea el radio vector y ω el argumento.

La ecuación obtenida puede escribirse en la forma

$$\rho^4 - (a^2 + b^2) \rho^2 + a^2 b^2 \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \omega}\right) = 0,$$

y siendo ésta una ecuación bicuadrada en ρ se obtiene

$$\rho^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)^2}{4} - a^2 b^2 \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \omega}\right)}$$

o bien

$$\rho^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} \pm \frac{a^2 - b^2}{2} \sqrt{1 - \frac{k^2}{\operatorname{tg}^2 \omega}} \quad (4)$$

donde hemos puesto

$$k^2 = \frac{4a^2 b^2}{(a^2 + b^2)^2}.$$

Esta expresión nos da para cada valor de ω cuatro valores de ρ pero deben excluirse los que sean negativos.

Observamos también que, en virtud de su definición cinemática, y por la simetría de la elipse respecto de sus ejes, la curva debe ser simétrica con respecto a un eje normal al eje polar por el polo; lo que se ve también por la ecuación que no cambia si se sustituye ω por $\pi - \omega$.

Para que sea ρ^2 real debe ser $\operatorname{tg}^2 \omega \geq k^2$ es decir

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} k \leq \omega \leq \pi - \operatorname{arc} \operatorname{tg} k$$

o bien

$$\pi + \operatorname{arc} \operatorname{tg} k \leq \omega \leq 2\pi - \operatorname{arc} \operatorname{tg} k;$$

pero a estos últimos valores de ω corresponden puntos situados del otro lado de la recta fija respecto de la posición inicial de la elipse, los que no pueden ser alcanzados por el centro de

la misma en un movimiento real. En este movimiento el ángulo ω oscila por lo tanto entre los extremos $\arctg k$ y $\pi - \arctg k$; esto se hace intuitivo observando que si recorremos la elipse a partir del punto $\rho = a, \vartheta = 0$ el ángulo ω varía desde $\frac{\pi}{2}$ creciendo o decreciendo, según el sentido del movimiento, para volver luego al valor $\frac{\pi}{2}$ cuando llegamos al punto $\rho = b, \vartheta = \frac{\pi}{2}$ y luego nuevamente para $\rho = a, \vartheta = \pi$. Se ve también con este análisis que al hacer la elipse un giro completo el centro recorre dos veces cierto óvalo, cuya ecuación hemos determinado y cuya área se trata de demostrar que vale $\frac{\pi}{2} (a-b)^2$.

Para calcular el área limitada por la curva recordamos que el área de un sector elemental limitado por dos radios vectores muy próximos, vale

$$dA = \frac{1}{2} \rho^2 d\omega.$$

En nuestro caso, teniendo en cuenta que el polo es exterior a la curva, que ésta es simétrica respecto a un eje normal al eje polar y que el valor mínimo que puede tomar ω es igual a $\arctg k$, el área buscada vale

$$A = 2 \int_{\arctg k}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (\rho_1^2 - \rho_2^2) d\omega$$

donde indicamos con ρ_1 y ρ_2 los valores correspondientes respectivamente al signo $+$ y $-$ en la fórmula (4).

Resulta pues

$$A = (a^2 - b^2) \int_{\arctg k}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{k^2}{\operatorname{tg}^2 \omega}} d\omega.$$

Para efectuar la integración hacemos el siguiente cambio de variable

$$\frac{k^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{1+x^2};$$

obtenemos entonces mediante un cálculo simple

$$A = k(a^2 - b^2) \int_0^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)[1+k^2(1+x^2)]} dx.$$

La función a integrar puede transformarse fácilmente en una suma de fracciones más simples poniendo

$$\frac{x^2}{(1+x^2)[1+k(1+x^2)]} = \frac{c_1}{1+x^2} + \frac{c_2}{1+k^2(1+x^2)}$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes tales que el segundo miembro sea idéntico al primero.

Se calcula entonces

$$c_1 = -1 \quad c_2 = 1 + k^2;$$

luego

$$\begin{aligned} A &= k(a^2 - b^2) \left[\int_0^{\infty} \frac{1+k^2}{1+k^2(1+x^2)} dx - \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \right] \\ &= k(a^2 - b^2) \left[\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{1+k^2}}{k} \frac{d\left(\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}x\right)}{1+\frac{k^2}{1+k^2}x^2} - \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \right] \\ &= k(a^2 - b^2) \left[\frac{\sqrt{1+k^2}}{k} \left| \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} x \right|_0^{\infty} - \left| \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \right|_0^{\infty} \right] \\ &= \frac{\pi}{2} (a^2 - b^2) (\sqrt{1+k^2} - k) \end{aligned}$$

y recordando que $k = \frac{2ab}{(a^2-b^2)}$ se obtiene

$$A = \frac{\pi}{2} (a-b)^2.$$

Solución de ADOLFO DAGHETTO, alumno de la Escuela Industrial de la Nación, Rosario.

Nota de la Red. — El mismo problema puede resolverse con el cálculo siguiente que parece más simple, principalmente por pretender menores conocimientos previos. Refiriendo la elipse a la anomalía φ se sabe que

$$\begin{aligned}x &= a \cos \varphi & y &= b \sin \varphi \\x' &= -a \sin \varphi & y' &= b \cos \varphi;\end{aligned}$$

por lo tanto, con los símbolos anteriores

$$\begin{aligned}\rho^2 &= x^2 + y^2 = (a^2 - b^2) \cos^2 \varphi + b^2 \\ \cos^2 \omega &= \frac{(xx' + yy')^2}{\rho^2(x'^2 + y'^2)} = \frac{(a^2 - b^2)^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{\rho^2((a^2 - b^2) \sin^2 \varphi + b^2)}.\end{aligned}$$

Resolviendo la primera ecuación respecto $\cos^2 \varphi$ y sustituyendo en la segunda, se obtiene

$$\rho^2 \cos^2 \omega = \frac{(a^2 - \rho^2)(\rho^2 - b^2)}{a^2 + b^2 - \rho^2}$$

que es la ecuación polar de la curva, encontrada en la solución anterior.

Para el cálculo del área parece sin embargo más conveniente referirse a un sistema cartesiano ortogonal en el cual se ponga

$$x = \rho \cos \omega, \quad \rho^2 = x^2 + y^2$$

pues la ecuación anterior da, después de esta substitución,

$$x^2(a^2 + b^2 - x^2 - y^2) = (a^2 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - b^2)$$

es decir

$$x^2 = \frac{(a^2 - y^2)(y^2 - b^2)}{y^2}.$$

Sobre esta ecuación, como también del simple análisis intuitivo de la figura, se ve que la curva es simétrica respecto del eje y y sus puntos reales corresponden a los valores de y en el intervalo $b-a$.

Se sigue que el área buscada se expresa por

$$A = 2 \int_b^a x \, dy = 2 \int_b^a \frac{\sqrt{(a^2 - y^2)(y^2 - b^2)}}{y^2} y \, dy.$$

La última integral toma en seguida una forma elemental al tomar como variable de integración

$$t = y^2$$

resultando

$$A = \int_{b^2}^{a^2} \frac{\sqrt{(a^2 - t)(t - b^2)}}{t} dt.$$

Para reducir esta integral a la integración de funciones racionales es conocido que basta hacer la sustitución

$$\frac{t - b^2}{a^2 - t} = \tau^2$$

de la cual resulta

$$t = \frac{b^2 + a^2 \tau^2}{1 + \tau^2}, \quad (a^2 - t)(t - b^2) = (a^2 - b^2)^2 \frac{\tau^2}{(1 + \tau^2)^2}$$

$$dt = 2(a^2 - b^2) \frac{\tau}{(1 + \tau^2)^2} d\tau$$

$$A = 2(a^2 - b^2)^2 \int \frac{\tau^2 d\tau}{(b^2 + a^2 \tau^2)(1 + \tau^2)^2}$$

Se sabe entonces que la integral indefinida debe tener la forma

$$\alpha \operatorname{arctg} \frac{a}{b} \tau + \beta \operatorname{arctg} \tau + \gamma \frac{1 + \tau^2}{\tau},$$

donde α, β, γ son constantes que quedan por determinar, efectuando la derivación y comparando; se obtiene

$$\alpha = -\frac{ab}{(a^2 - b^2)^2}, \quad \beta = \frac{a^2 - b^2}{2(a^2 - b^2)^2}, \quad \gamma = \frac{2(a^2 - b^2)^2}{a^2 + b^2}.$$

Poniendo los extremos de integración resulta

$$A = 2(a^2 - b^2)^2 (\alpha + \beta) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} (a - b)^2.$$

N.º 86 — Calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ x_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & x_2 \\ x_3 & x_3 & 1 & \dots & 0 & x_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n-1} & x_{n-1} & x_{n-1} & \dots & 1 & x_{n-1} \end{vmatrix}$$

SOLUCIÓN. — Representemos por D_{n-1} el determinante del enunciado, de manera que será

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix} = 1 - x_1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_2 \end{vmatrix} = (x_1 - 1)(x_2 - 1), \dots$$

Desarrollando D_{n-1} por los elementos de la penúltima columna, se tiene

$$\begin{aligned} D_{n-1} = (-1)^n & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ x_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & x_2 \\ x_3 & x_3 & 1 & \dots & 0 & x_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ x_{n-1} & x_{n-1} & x_{n-1} & \dots & x_{n-1} & x_{n-1} \end{vmatrix} + \\ & + (-1)^{2n-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ x_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n-2} & x_{n-2} & x_{n-2} & \dots & 1 & x_{n-2} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

En el primero de estos determinantes se puede sacar factor común x_{n-1} y trasladar luego la última fila a la primera, con lo cual tienen lugar $n-2$ cambios de signo. Se tiene entonces

$$D_{n-1} = x_{n-1} D_{n-2} - D_{n-2} = (x_{n-1} - 1) D_{n-2}.$$

Observando los valores de D_1 y D_2 dados anteriormente, esta fórmula recurrente nos da como valor del determinante del enunciado

$$D_{n-1} = (x_1 - 1)(x_2 - 1)(x_3 - 1) \dots (x_{n-1} - 1).$$

Esta solución ha sido enviada por el Sr. JOSÉ LAHOZ, alumno de la Facultad de Ciencias Matemáticas de Rosario.

N.º 89 — Los lados de un triángulo ABC están divididos por los puntos C_1, A_1, B_1 según las razones $\frac{m_1}{m_2}, \frac{n_1}{n_2}, \frac{p_1}{p_2}$. Calcular las razones entre las áreas del triángulo ABC y cada uno de los $AC_1B_1, BA_1C_1, CA_1B_1, A_1B_1C_1$.

SOLUCIÓN. — Si los lados del triángulo ABC están divididos según las razones dadas, se podrá poner

$$\begin{aligned} AC_1 &= k m_1, A_1B = h n_1, AB_1 = l p_1 \\ BC_1 &= k m_2, A_1C = h n_2, B_1C = l p_2' \end{aligned} \quad (1)$$

siendo k, h, l constantes de proporcionalidad.

Representemos por S, S_1, S_2, S_3, S_4 respectivamente a las áreas de los triángulos $ABC, AC_1B_1, BA_1C_1, CA_1B_1$ y $A_1B_1C_1$. Se tendrá

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \text{sen } A = \frac{1}{2} BA \cdot BC \cdot \text{sen } B = \frac{1}{2} CA \cdot CB \cdot \text{sen } C \quad (2)$$

$$S_1 = \frac{1}{2} AC_1 \cdot AB_1 \cdot \text{sen } A$$

$$S_2 = \frac{1}{2} BA_1 \cdot BC_1 \cdot \text{sen } B$$

$$S_3 = \frac{1}{2} CA_1 \cdot CB_1 \cdot \text{sen } C$$

de donde se deduce, teniendo en cuenta (1)

$$\frac{S}{S_1} = \frac{(m_1 + m_2)(p_1 + p_2)}{m_1 p_1}, \quad \frac{S}{S_2} = \frac{(m_1 + m_2)(n_1 + n_2)}{m_2 n_1}$$

$$\frac{S}{S_3} = \frac{(n_1+n_2)(p_1+p_2)}{n_2 p_2}$$

Para hallar la última razón pedida se observa que

$$\frac{S}{S_4} = \frac{1}{1 - \left(\frac{S_1}{S} + \frac{S_2}{S} + \frac{S_3}{S} \right)}$$

de donde, sustituyendo los valores encontrados se obtiene

$$\frac{S}{S_4} = \frac{(m_1+m_2)(n_1+n_2)(p_1+p_2)}{m_2 n_2 p_1 + m_1 n_1 p_2}.$$

Esta solución es debida al señor REBÉN MARIO RIBONE, alumno de la Facultad de C. Matemáticas de Rosario. Otra solución análoga, pero más complicada, ha sido enviada por el señor MOISÉS GRILL, alumno de la misma Facultad.

RESULTADO DEL CONCURSO ENTRE SOLUCIONISTAS DE PROBLEMAS PROPUESTOS EN EL AÑO CUARTO (1944)

En aplicación a lo dispuesto en el art. 4º de la ordenanza de institución del Boletín del Instituto de Matemáticas *Mathematicæ Notæ* (ver Año I, pág. 4), el Director del Instituto ha tomado en consideración las soluciones enviadas hasta el 1º de julio de 1945, haciendo al señor Decano de la Facultad las propuestas correspondientes, que fueron aceptadas por resolución del Exp. nº 1000 - I - 1945, con fecha 7 de noviembre de 1945, en el sentido de: 1º Adjudicar al estudiante de la Facultad Sr. MOISÉS GRILL el premio correspondiente al año 1944; 2º Declarar desierto el concurso entre solucionistas no pertenecientes a la Facultad; 3º Encargar al Director del Instituto de Matemática para indicar uno o más libros de argumento matemático o físico para obsequiar al señor Moisés Grill en calidad de premio.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

PROPUESTOS

101.- Escribir la condición que deben cumplir los coeficientes p, q, r de la ecuación

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

para que sus raíces sean lados de un triángulo rectángulo.

102.- Demostrar que las ecuaciones

$$(x+i)^n + (x-i)^n = 0, \quad (x+i)^n - (x-i)^n = 0$$

tienen todas sus raíces reales.

103.- Demostrar la validez del siguiente desarrollo en serie

$$\frac{e}{2} = \sum_0^{\infty} \frac{1}{n!(1+n^2+n^4)}.$$

Este ejercicio ha sido indicado por el Prof. J. V. USPENSKY de la Stanford University (California, U. S. A.).

104.- Estudiar la curva

$$x^4 + y^4 = a^2 xy$$

y hallar el área limitada por cada uno de los ciclos cerrados que la constituyen.

105.- En un plano se da un arco AB que sea convexo (o bien cóncavo) respecto de un punto O del plano y respecto de un par de rectas ortogonales que pasen por O . Demostrar, posiblemente con un razonamiento elemental, que el área del sector

que proyecta desde O el arco AB es igual a la semisuma de las áreas de los trapezoides que proyectan el arco sobre las dos rectas.

La proposición se extiende sin dificultad al caso de un arco cualquiera atribuyendo signos convenientes a las áreas eventualmente superpuestas por efecto de los cambios de dirección de la convexidad o a las áreas de los trapezoides en caso de que la convexidad se comporte en modo diferente respecto del punto O y de las rectas consideradas. Se propone expresar también tal complemento.

CUESTIONES

14. - Son conocidos los teoremas siguientes: Si se admiten los postulados ordinarios de la geometría elemental, salvo el de las paralelas, entonces, si existe un triángulo tal que la suma de sus ángulos sea menor, igual o mayor que dos rectos, lo mismo ocurrirá para cualquier triángulo. Este teorema, debido probablemente a Legendre, se demuestra ordinariamente por medio del postulado de Arquímedes. Max Dehn (*Mathematische Annalen*, Vol. 53) se propuso discutir el teorema desde el punto de vista de la geometría no euclidiana y de su relación con la existencia de infinitas, una o ninguna paralelas por un punto a una recta, llegando a la conclusión de que puede la suma de los ángulos de un triángulo valer dos ángulos rectos en una geometría no arquimediana en la cual por un punto puedan trazarse infinitas rectas que no cortan a una recta dada.

Estas conclusiones permiten poner el siguiente problema: Supongamos que se sepa que por un punto dado A a una recta dada a existe una sola paralela. ¿Que puede decirse con respecto a otro punto y otra recta cualesquiera? El nuevo problema se reduce al anterior en el caso de admitir el postulado de Arquímedes. Se pide una contestación independiente de tal postulado.

- El precio de suscripción a «Mathematicae Notae» es de 8 \$ (m/n.) anuales.
- El Instituto de Matemática publica también una colección de Notas y Memorias bajo el título «Publicaciones del Instituto de Matemática de la Facultad de Ciencias etc.», cuyo precio de suscripción es de 10 \$ (m/n.) por volumen. Se pueden adquirir los fascículos sueltos de las publicaciones al precio señalado en la pág. 4 de esta misma tapa.
- Para todo lo relacionado al Instituto, a las Publicaciones y a «Mathematicae Notae» dirigirse al Director del Instituto de Matemática — Avenida Pellegrini 250 — Rosario (R. Argentina).
- Para suscripciones y adquisición de los fascículos sueltos dirigirse al Director del Instituto o bien al Bibliotecario de la Facultad de Ciencias Matemáticas, etc., Avenida Pellegrini 250, Rosario (Rep. Argentina). Los importes deberán remitirse en efectivo o bien por giros postales o bancarios pagaderos en la ciudad de Rosario, con preferencia sobre el Banco de la Nación Argentina.
- Los suscriptores en la República Oriental del Uruguay pueden dirigirse al señor Prof. Rodolfo F. Sayagués, Constituyente 1863, Montevideo.

INDICE DEL FASCICULO 1

	Pág.
Sobre las medias aritmético-geométricas de Gauss (Primera Parte)	
(J. V. USPENSKY)	1
Un teorema sobre representación conforme (LUIS A. SANTALÓ)	29
Acercas de la sucesión $\{\cos n_k x\}$, $n_k \rightarrow \infty$ (RALPH P. BOAS, Jr.)	41
Breve nota bibliográfica sobre el problema nº 50 (PEDRO E. ZADUNAISKY)	42
Ejercicios y problemas (Soluciones)	47
Ejercicios y Problemas (Propuestos)	55
Cuestiones	56

INDICE DEL FASCICULO 2

	Pág.
Sobre las medias aritmético-geométricas de Gauss (Segunda Parte)	
J. V. USPENSKY	57
Una generalización de los factoriales (MISCHA COTLAR)	89
Sobre un problema diofántico (BEPPO LEVI)	108
Ejercicios y Problemas (Soluciones)	120
Ejercicios y Problemas (Propuestos)	128

Fascículos aparecidos en las "PUBLICACIONES" del Instituto de Matemáticas

		m\$ñ.
Vol. I.	1 - B. LEVI — Sobre el sistema $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xy)dx = p(y); \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xy)dy = q(x)$	1.00
	2 - L. A. SANTALÓ — Geometría integral de figuras ilimitadas	1.80
	3 - F. AMODEO — Origen y desarrollo de la Geometría proyectiva. Trad. de Nicolás y José Babini	8.00
	4 - B. LEVI — Una teoría intuicionista de las funciones racionales enteras de una variable	1.00
Vol. II.	1 - P. MONTEL — Funciones armónicas y subarmónicas	1.00
	2 - G. FUBINI — La ley de la media para funciones no derivables. B. LEVI — Sobre un teorema de Weierstrass, el teorema de Rolle y el anterior teorema de Fubini	1.00
	3 - L. A. SANTALÓ — Una demostración de la propiedad isoperimétrica del círculo	1.20
	4 - L. A. SANTALÓ — Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas	1.50
	5 - I. Antecedentes de la creación del Instituto. II. Acto de inauguración oficial del Instituto. C. PLÁ — Origen y propósitos del Instituto. J. REY PASTOR — La matemática italiana en el último medio siglo y la posición del Dr. Beppo Levi en ella. B. LEVI — Evolución del pensamiento matemático	1.50
	6 - E. GASPAS — Fórmulas integrales referentes a intersección de una figura plana con bandas variables	1.50
	7 - A. ROSENBLATT — Sobre el teorema de los grandes números en la teoría de la probabilidad	1.00
	8 - M. COTLAR — Sobre conjuntos no medibles y generalización de la integral de Lebesgue - Prólogo por B. Levi	1.50
	9 - B. LEVI — La noción de "dominio deductivo" como elemento de orientación en las cuestiones de fundamentos de las teorías matemáticas	1.50
Vol. III.	1 - Homenaje a la memoria de V. Volterra y J. J. Thomson. C. PLÁ — Semblanza de Sir Joseph J. Thomson. B. LEVI — La personalidad de Vito Volterra	1.00
	2 - G. FUBINI — Algunas propiedades de los grupos discontinuos finitos	2.50
	3 - B. LEVI — Teoría de la integral de Lebesgue independiente de la noción de medida	3.00
	4 - B. LEVI — Sobre la inversión de una integral definida	1.20
	5 - L. A. SANTALÓ — Curvas extremales de la torsión total y curvas-D.	2.00
	6 - A. TERRACINI — Orígenes de algunos conceptos geométricos	2.00
	7 - L. A. SANTALÓ — Complemento a la Nota "Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas"	1.00
Vol. IV.	1 - L. A. SANTALÓ. — Sobre ciertas variedades con carácter de desarrollable en el espacio euclidiano de cuatro dimensiones	3.00
	2 - M. COTLAR — Funciones univalentes sobre un conjunto de puntos del contorno de un dominio de holomorfismo	2.00
	3 - JOSÉ L. MASSERA. — Fórmulas en diferencias finitas con aplicación a la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales de primer orden	3.50
	4 - A. KOMISCHKE. — Sobre las relaciones entre la luz y la gravitación	2.50
	5 - R. LAGUARDIA y B. LEVI. — Sobre la representación por integrales de algunas funciones definidas por desarrollos de Taylor y aplicación a las soluciones de ecuaciones en derivadas parciales	2.00
Vol. V y VI.	(En preparación).	
	Memorias ofrecidas por varios amigos, alumnos y admiradores en homenaje al Dr. Julio Rey Pastor	
Vol. VII.	1 - J. C. VIGNAUX y M. COTLAR. — Las familias totalmente normales de funciones analíticas	6.00
	2 - J. V. USPENSKY. — Sobre el problema de la ruina de los jugadores	2.50