



ESTABILIDAD NUMÉRICA DE UN MÉTODO LOCAL INTEGRAL BASADO EN FUNCIONES DE BASE RADIAL PARA PROBLEMAS DE VALORES DE CONTORNO

TESIS DOCTORAL

Presentada en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, en
cumplimiento parcial de los requisitos para optar al título de Doctor en Matemática

Por

Lic. Luciano Ponzellini Marinelli

Doctorando en Matemática

Directora: Dra. Margarita Portapila

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Universidad Nacional de Rosario

2021

Comité de evaluación:

Dra. Natasha Flyer

Dr. Ariel Lombardi

Dr. Gustavo Migoni

© Copyright

Luciano Ponzellini Marinelli

2021

RESUMEN

El Método de Elementos de Contorno (MEC) es una técnica numérica reconocida en la matemática aplicada y las ingenierías desde hace más de 50 años. La base de este método es transformar una ecuación en derivadas parciales (EDP) que describa un problema físico en una ecuación integral equivalente haciendo uso de las identidades de Green y teoremas de representación. Una mejora de este método ha sido el método de elementos de frontera local, en el cual en vez de usar una interpolación directa del campo desconocido la EDP y las condiciones de frontera son incluidas en las interpolaciones locales. En este tipo de método local, el dominio es cubierto por una serie de estenciles de interpolación pequeños y fuertemente solapados, donde una interpolación directa del campo se usa para aproximar la solución y las condiciones de borde se imponen en la representación integral. La ventaja reside en que, en vez de tratar con matrices globales llenas, los sistemas de ecuaciones locales resultan pequeños y se ensamblan en un sistema ralo con estructura de banda que se resuelve por esquemas iterativos.

Para conservar la naturaleza del MEC, las integrales de dominio son transformadas en integrales de contorno por el Método de Reciprocidad Dual (MRD). Un ejemplo de esto es el reciente Método de Reciprocidad Dual-Regular Local (MRD-RL). En esta tesis desarrollamos el Método de Integral Local de Frontera y Dominio (MILFD) que utiliza una formulación integral que depende de integrales de frontera y también de dominio colocadas solamente en puntos interiores de la distribución de nodos en el dominio. Esta formulación utiliza la función de Green-Dirichlet (FGD) para evitar el cálculo de algunas integrales de dominio y las condiciones de frontera son impuestas a la interpolación local con Funciones de Base Radial (FBR).

La teoría de FBR tuvo un desarrollo considerable en los últimos años debido a su alto orden de exactitud, flexibilidad para geometrías no triviales, eficiencia computacional y facilidad de implementación. Cuando se utilizan FBR infinitamente diferenciables, estas dependen de un *parámetro de forma* $\varepsilon > 0$. Fue demostrada la convergencia espectral en varios casos, sin embargo, la experimentación numérica mostró que cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ el error de interpolación decrece hasta cierto valor a partir del cual se desestabiliza debido al mal condicionamiento de la matriz de interpolación. Desde entonces, distintas técnicas de estabilidad han sido investigadas y desarrolladas para interpolaciones globales: Countor-Padé, FBR-QR, Gauss-QR, FBR-GA, FBR-RA. Estas técnicas abrieron nuevas posibilidades para métodos sin mallas basados en interpolaciones locales con FBR.

El objetivo principal de nuestro trabajo consiste en estabilizar el error de un método local integral para resolver EDP a partir de lograr estabilizar el error en las interpolaciones locales cuando el parámetro de forma tiende a cero y evitar el mal condicionamiento de los sistemas locales. Este será nuestra hipótesis de trabajo.

Los resultados numéricos mostrados en dos dimensiones para problemas de Laplace, Poisson, convección-difusión, capa límite y un ecuación elíptica general con condiciones de Dirichlet/Neumann. Todas estas experiencias muestran una mejora considerable en los errores numéricos cuando el parámetro se reduce y, consecuentemente, una mejora en la exactitud del cálculo. Además, comparaciones con otros métodos numéricos de la literatura científica reafirman la robustez del método.

Dedicado a Antonio, Ivana y mi madre.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Centro Franco-Argentino de Ciencias de la Información y de Sistemas (CIFASIS) con doble pertenencia al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) y a la Universidad Nacional de Rosario (UNR). Asimismo agradezco a la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (FCEIA) de la UNR por haber colaborado en las investigaciones presentadas en esta tesis. Una parte de mi trabajo fue financiado por una Beca Doctoral del CONICET y la otra parte por una dedicación parcial de mi cargo docente en la FCEIA. También le doy las gracias al Departamento de Matemática de la Escuela de Formación Básica y al Departamento de Matemática de la Escuela de Ciencias Exactas, ambos de la FCEIA de Rosario.

Estoy profundamente agradecido por la oportunidad de trabajar como miembro del Grupo de Dinámica Computacional e Hidroinformática del CIFASIS dirigido por quien también ha sido mi directora de tesis, la Dra. Margarita Portapila. Agradezco, a la vez, a los integrantes del grupo, en particular a los doctores Martín Romagnoli y Nahuel Caruso, con quien compartí oficina y somos coautores de varios trabajos pasados, actuales y futuros.

Agradezco a mi primer consejera de estudios, la Dra. Cristina Sanziel, por darme la posibilidad de trabajar con ella hasta su retiro. También agradezco al Dr. Lisandro Parente por haber sido mi consejero de estudios hasta la finalización de mi Doctorado.

Un agradecimiento especial para mis profesores Dr. Hugo Aimar del Instituto de Matemática Aplicada del Litoral, al Dr. Ricardo Pignol del Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Sur, al Dr. Cristian Conde de la Universidad Nacional General Sarmiento por sus aportes sobre análisis matemático, ecuaciones en derivadas parciales, álgebra lineal numérica y análisis funcional. También estoy agradecido con otros tantos

docentes y profesores que tuve.

Estoy extremadamente agradecido de la maravillosa estadía científica como doctorando en la Universidad de Colorado en Boulder, Colorado, Estados Unidos (EU) con financiamiento de la beca Asistencia de Viajes al Exterior (AVE-UNR) y fondos propios del CIFASIS. Agradezco al Profesor Bengt Fornberg de dicha universidad por sus valiosas discusiones y sugerencias. Me realicé como científico en dicha estadía.

Agradezco a Elisabeth Larsson del Department of Information Technology de la Universidad de Uppsala, Suecia por su colaboración, así como a todos los especialistas en Funciones de Base Radial que pude conocer cuando asistí al Workshop “Localized Kernel-Based Meshless Methods for Partial Differential Equations” durante agosto de 2017 en el Institute for Computational and Experimental Research in Mathematics perteneciente a la Universidad de Brown en Rhode Island, EU.

También agradezco las valiosas charlas sobre métodos numéricos que tuve por Skype con el Profesor Henry Power de la Universidad de Nottingham en el Reino Unido, así como sus valiosos aportes en sus reiteradas visitas a Rosario, Argentina. Y también al Prof. Adolfo J. Cardozo S. (Universidad Nacional Experimental Francisco de Miranda, Venezuela) por sus aportes en las implementaciones computacionales.

Agradezco a toda mi familia, en particular a mi compañera de vida Ivana Incorvaia, a mi hijo Antonio Ponzellini Marinelli y a mi madre Clotilde Paulina Marinelli por todo lo que dan y enseñan. A mi amigo y matemático puro, Gerardo Sbérghamo, por las valiosas charlas sobre matemática aplicada y pura. A mi grupo de amigos más cercanos Abel, Aty, Ivo, Marce y Rami, como a mi grupo de compañeros de trabajo y militancia de la facultad.

Todos, de una forma u otra, colaboraron para que este trabajo sea posible.

Contenido

	Página
Resumen	II
Dedicatoria	IV
Agradecimientos	V
Figuras	X
Tablas	XIII
Abreviaciones	XV

Capítulos

1. Introducción	1
1.1. Motivación y estado del arte	1
1.2. Organización de la tesis	6
1.3. Contribuciones originales	7
1.4. Publicaciones	8
2. Resolución numérica de problemas de valores de contorno usando el Método de Elementos de Contorno con Funciones de Base Radial	10
2.1. Problemas de contorno en las ecuaciones en derivadas parciales	11
2.1.1. La estructura del MEC	14
2.2. Historia del Método de Elementos de Contorno	14
2.3. Desarrollo del Método de Elementos de Contorno directo y problemas de contorno	15
2.3.1. Ecuaciones integrales	16
2.3.2. La solución fundamental	17
2.3.3. El MEC directo para la ecuación de Laplace	18
2.3.4. El MEC directo para la ecuación de Poisson	22
2.4. Implementación numérica del MEC	22
2.4.1. El MEC para el caso de elementos constantes	24
2.4.2. Resolución numérica de las integrales de línea y de dominio	25
2.4.3. Resolución numérica del SEL global en el MEC	26
2.5. El Método de Reciprocidad Dual	28
2.5.1. El MRD para la ecuación de Poisson	29
2.5.2. Tipos de interpolantes: las Funciones de Base Radial	32
2.5.3. Soluciones particulares de FBR para distintos operadores	33

3. El Método Integral Local de Frontera y Dominio	35
3.1. Antecedentes de descomposición en multidominios de métodos locales integrales	36
3.1.1. Desarrollos del MEC en multidominios	36
3.1.2. Formulaciones locales del MEC	38
3.2. El Método de Reciprocidad Dual-Regular Local	39
3.2.1. Introducción	39
3.2.2. Desarrollo	40
3.2.3. Interpolaciones locales con FBR	43
3.2.4. Expresión matricial discretizada	51
3.2.5. Formulación de la reciprocidad dual	55
3.3. El Método Integral Local de Frontera y Dominio	57
3.3.1. La función de Green-Dirichlet en el MILFD	57
3.3.2. Expresión matricial discretizada	60
3.3.3. Procedimiento algorítmico en la resolución numérica de los SEL locales con FBR	64
3.3.4. Ensamblado del SEL disperso	66
4. El Método Integral Local de Frontera y Dominio Estabilizado	68
4.1. Métodos estables para Funciones de Base Radial	69
4.1.1. Breve historia de las FBR	69
4.1.2. Formulación del problema de interpolación con FBR que dependen de un parámetro de forma	70
4.1.3. Convergencia y exactitud en aproximaciones	71
4.1.4. Condicionamiento de la matriz de interpolación	73
4.1.5. Estabilidad computacional en interpolaciones	76
4.1.6. Desarrollo de métodos de estabilidad para FBR en interpolaciones globales	78
4.2. Expansión de las FBR Gaussianas	80
4.2.1. Forma matricial de FBR-QR en 2D	86
4.3. El MILDF estabilizado	88
4.3.1. Formulación del MILDF estabilizado	88
4.3.2. Expresión matricial discretizada del MILDF estabilizado	90
5. Resultados numéricos	93
5.1. Objetivos	94
5.2. Discretización del dominio	95
5.2.1. Distribuciones de tipo Halton	96
5.2.2. Distribuciones cuasi-uniformes	96
5.2.3. Distribuciones repelentes	97
5.3. Implementación numérica para el MILFD-Est	98
5.4. Resolución numérica de EDP tipo Laplace y Poisson con el MILFD-Est	102
5.4.1. EDP de Laplace y Poisson en casos simples	103
5.4.2. EDP de Poisson con condiciones mixtas	107
5.4.3. EDP de Poisson con condiciones de Dirichlet	113
5.4.4. EDP de Poisson sobre un disco	116

5.5.	Resolución numérica de EDP tipo convección-difusión con el MILFD-Est . . .	125
5.5.1.	Ecuación de convección-difusión unidimensional	125
5.5.2.	Capa límite térmica en un canal bidimensional	132
5.6.	Resolución numérica de EDP elípticas con el MILFD-Est	134
5.6.1.	EDP elíptica sobre un dominio irregular 2D	135
6.	Conclusiones y trabajo futuro	138
6.1.	Resultados de MILFD-Est	138
6.2.	Proyectos futuros	142
	Apéndice A. Integración de frontera y dominio del MILFD-Est	145
A.1.	La EDP de Poisson con condiciones de borde mixtas	145
A.2.	La EDP de Poisson con condiciones de borde de Dirichlet	147
	Apéndice B. Discretizaciones de dominios	149
B.1.	Discretizaciones EDP Laplace y Poisson en casos simples	149
B.2.	Discretizaciones EDP Poisson con condiciones mixtas	149
B.3.	Discretizaciones EDP Poisson con condiciones Dirichlet	150
B.4.	Discretizaciones EDP Poisson sobre un disco	150
B.5.	Discretizaciones ecuación convección-difusión	151
B.6.	Discretizaciones EDP capa límite térmica en un canal	151
B.7.	Discretizaciones EDP elíptica sobre dominio irregular 2D	152
	Bibliografía	153

Figuras

Figura	Página
1.1. Triangulación de un dominio para métodos que dependen de un mallado (izq.) y distribución de nodos interiores y fronteras para métodos que no dependen de un mallado (der.).	2
1.2. Ilustración del comportamiento del error norma- L_2 en un problema de interpolación global sobre un círculo (izq.) con FBR-Directo y con un método estabilizado en función del parámetro de forma ε de las FBR Gaussianas (der.).	5
2.1. Dominio global Ω en 2D con condiciones de contorno mixtas.	13
2.2. Dominio circular Ω_ρ con fuente ξ como centro.	18
2.3. Geometría en puntos esquinas de una frontera no suave.	19
2.4. Algunos tipos de elementos el Método de Elementos de Contorno: constantes (izq.), lineales (centro) y cuadráticos (der.).	23
2.5. Discretización del dominio Ω con nodos internos y fronteras en el MEC. . .	24
2.6. Esquema matricial en el MEC de la ecuación (2.46).	27
2.7. Esquema matricial en el MRD de la ecuación (2.62).	31
3.1. Dominio global Ω en 2D subdividido en subdominios Ω_i	36
3.2. Representación esquemática de los estenciles locales Θ_i con frontera Γ_i y de las subregiones de integración Ω_i para MEC locales sin malla.	42
3.3. FBR Gaussiana con $\varepsilon = 1$ (izq.) y FBR IMQ con $\varepsilon = 1$ y $\beta = \frac{1}{2}$ (der.) sobre un círculo de radio $R = 3$	45
3.4. FBR MQ con $\varepsilon = 1$ (izq.) y FBR TPS con $\varepsilon = 1$ y $\beta = 1$ (der.) sobre un disco de radio $R = 1$	48
3.5. Distribución de nodos dispersos sobre un dominio 2D con algunos estenciles locales para $n = 30$	52
3.6. Estenciles locales Θ_i y subregiones de integración Ω_i en 2D para $n = 30$. . .	52
3.7. Representación esquemática del la función de Green-Dirichlet en un círculo.	58
3.8. Esquema matricial en el MILFD de la ecuación (3.76).	63
3.9. Procedimiento algorítmico en la resolución numérica de los SEL locales con FBR del MILFD.	65
4.1. Comportamiento de las FBR Gaussianas cuando $\varepsilon \rightarrow 0$	72

4.2. Algunas expansiones de las funciones (4.34) y (4.35) usadas para representar las FBR Gaussianas cuando $\varepsilon = 0.1$	85
5.1. Discretizaciones del dominio usando diferentes distribuciones de nodos. Uniforme: $N = 400$ nodos interiores + 84 nodos frontera. De tipo Halton: $N = 400$ nodos interiores + 80 nodos frontera. Cuasi-uniformes: $N = 401$ nodos interiores + 76 nodos frontera.	96
5.2. Diferentes tipos de estenciles: subregión de integración (círculo verde), punto de colocación (asterisco), punto interior (rojo) y nodo frontera (azul).	97
5.3. Patrón de esparcidad de la matriz ensamblada del problema 1D de la ecuación de convección-difusión.	101
5.4. Soluciones exactas.	103
5.5. Error- L_2 para $N = 1600$ ($b = 0$).	104
5.6. Error- L_2 para $N = 1600$ ($b = cte.$).	105
5.7. Error- L_2 para $N = 1600$ ($b = b(x)$).	106
5.8. Comparación entre MRD-RL, MILFD y MILFD-Est con FBR Gaussianas para $N = 1600$ nodos interiores.	108
5.9. Fenómeno de Runge en la comparación del ECM entre diferentes distribuciones de nodos uniformes para el MILFD-Est y $\varepsilon \in [0.1, 4.0]$	110
5.10. Comparación del ECM entre distribuciones de nodos uniformes, tipo Halton y cuasi-uniformes para diferentes valores de N	112
5.11. Comparación del error L_2 % entre MEIFBR, MRD-RL, MILFD-Est para un conjunto uniforme de nodos. N es el número de nodos interiores en el dominio.	114
5.12. Error- L_2 % versus N para distribuciones uniformes, Halton y cuasi-uniformes.	116
5.13. Distribución de nodos con estructura equiespaciada (izq.) y solución exacta (der.).	117
5.14. Isolíneas de exactitud ($\log_{10}(\text{Error-}L_2)$) usando FBR Gaussianas como función del tamaño del estencil n y del parámetro de forma ε para distribuciones de nodos dispersas repelentes con $N = 1185, 4880, 9639$ usando los métodos MILFD y MILFD-Est.	119
5.15. Isolíneas de exactitud ($\log_{10}(\text{Error-}L_2)$) usando el MILFD-Est para grandes valores de $N = 19816, 30976$ como función del tamaño del estencil n y del parámetro de forma ε para distribuciones de nodos dispersas repelentes.	121
5.16. Isolíneas del condicionamiento ($\log_{10}(\kappa(\mathbf{A}_i))$) para las matrices de interpolación local de u con FBR Gaussianas, como función del tamaño del estencil n y del parámetro de forma ε para distribuciones de nodos dispersas repelentes con $N = 1185, 4880, 9639$ usando los métodos MILFD y MILFD-Est.	122
5.17. Tiempo computacional (en segundos (s)) usando el MILFD (línea círculo azul) y el MILFD-Est (línea roja diamantes) como función del tamaño de estencil n para distribuciones de nodos repelentes de $N = 1185, 4880$ y $\varepsilon = 2, 3, 6$	124
5.18. Solución exacta del problema de convección-difusión para $k = 40$	126
5.19. Discretización del dominio $\Omega = [0, 1] \times [-0.1, 0.1]$ de tipo uniforme, Halton y cuasi-uniforme para $N = 500$ puntos interiores.	127

5.20. Comparación del Error- L_2 % entre diferentes distribuciones de nodos uniformes, de tipo Halton y cuasi-uniformes con $N = 4500$ para el MILFD-Est y $\varepsilon \in [0.1, 20]$	128
5.21. Comparación del error- L_2 % entre diferentes métodos locales integrales y distintas distribuciones para el caso $k = 40$ de la ecuación de convección-difusión.	129
5.22. Análisis de convergencia para el MILFD-Est para valores de $k = 40, 100, 200$ de la ecuación de convección-difusión.	130
5.23. Discretización con $N = 185$ internos nodos cuasi-uniformes.	131
5.24. Superficie solución (der.), sección x_1 (centro) y sección x_2 (izq.) para el MILFD-Est con $Pe=2.5$, $N = 901$ y $\varepsilon = 0.1$	134
5.25. Superficie solución (der.), sección x_1 (centro) y sección x_2 (izq.) para el MILFD-Est con $Pe = 50$, $N = 901$ y $\varepsilon = 0.1$	134
5.26. Superficie solución (der.), sección x_1 (centro) y sección x_2 (izq.) para el MILFD-Est con $Pe = 125$, $N = 901$ y $\varepsilon = 0.1$	134
5.27. Discretización del dominio Ω para $h = 0.036$ con el algoritmo repelente.	136
5.28. Error- L_2 como función del número de nodos \sqrt{N} usando estencil local de tamaño $n = 21, 28, 36, 55$ con MILFD-Est para $\varepsilon \in [4, 9]$	137
A.1. Comparación del Error- L_2 para cuadratura Gaussiana y la regla del trapecio en el MILFD (columna izq.) y el MILFD-Est (columna der.) con estenciles de $n = 20, 40, 60$ nodos en una discretización repelente de $N = 1185$	146
A.2. Error- L_2 % para el MILFD-Est usando distribuciones uniformes de nodos (en cada subplot) y $q \in [40, 80]_{\mathbb{N}}$ para un parámetro de forma de $\varepsilon = 0.1$ fijo.	147
A.3. Error- L_2 % para el MILFD-Est usando distribuciones uniformes de nodos (todas las líneas juntas) y $q \in [40, 60]_{\mathbb{N}}$ para un parámetro de forma de $\varepsilon = 0.1$ fijo.	148

Tablas

Tabla	Página
2.1. Soluciones particulares para algunas FBRs donde $r = \ \mathbf{x} - \mathbf{x}_j\ $ es la distancia al centro de la FBR y ε es el parámetro de forma.	33
3.1. Algunas FBR populares con sus respectivos polinomios siendo $r = \ \mathbf{x} - \mathbf{x}_j\ $ la distancia al centro \mathbf{x}_j de la FBR y ε el parámetro de forma.	51
4.1. Caso de una distribución no regular para GA ($\varphi(r) = e^{-(\varepsilon r)^2}$), MQ ($\varphi(r) = \sqrt{1 + (\varepsilon r)^2}$), IMQ ($\varphi(r) = 1/\sqrt{1 + (\varepsilon r)^2}$) y GIMQ ($\varphi(r) = 1/(1 + (\varepsilon r)^2)$).	76
4.2. Relación en el caso 2D de la cantidad de potencias de ε y de monomios adicionales en la expansión de FBR Gaussianas.	80
4.3. Relación en el caso 2D de la cantidad de autovalores y el orden del parámetro de forma ε en la matriz de interpolación de FBR Gaussianas para una distribución no regular.	81
4.4. Relación entre las potencias de ε y la base de potencias pares e impares de r	83
4.5. Relación entre las potencias de ε y el nuevo conjunto de funciones base.	83
5.1. Error- L_2 en Laplace para distribuciones de tipo Halton.	104
5.2. Error- L_2 en Poisson para distribuciones de tipo Halton.	105
5.3. Error- L_2 en Poisson para distribuciones de tipo Halton.	106
5.4. ECM y tiempo computacional (en segundos) para diferentes N en el caso de distribuciones uniformes.	108
5.5. Comparación del error- L_2 % para el MILFD-Est con un rango bajo del parámetro de forma en el caso uniforme.	115
5.6. Comparación del Error- L_2 % para el MRD-RL y el MILFD-Est en distintas distribuciones para el caso $k = 40$ de la ecuación de convección-difusión.	129
5.7. Comparación del Error- L_2 % para el MRD-RL y el MILFD-Est para diferentes valores de k de la ecuación de convección-difusión.	130
5.8. Resultados obtenidos con el MEIFBR, MRD-MD, MEF Galerkin y MILFD-Est.	132
B.1. Discretizaciones de las EDP de Laplace y Poisson 5.4 con N nodos internos y N_{Dir} nodos con condiciones de Dirichlet.	149

B.2. Número de discretizaciones de la EDP de Poisson 5.4.2 con N nodos internos, N_{Dir} nodos con condiciones de Dirichlet y N_{Neu} nodos con condiciones de Neumann.	149
B.3. Discretizaciones de la EDP de Poisson 5.4.3 con N nodos internos, N_{Dir} nodos con condiciones de Dirichlet y r coeficiente de espaciamiento del algoritmo cuasi-uniforme.	150
B.4. Discretizaciones de la EDP de Poisson 5.4.4 con N nodos internos, N_{Dir} nodos con condiciones de Dirichlet y h coeficiente de espaciamiento del algoritmo repelente.	150
B.5. Discretizaciones de la ecuación de convección-difusión 5.5.1 con N nodos internos, N_{Dir} nodos con condiciones de Dirichlet y N_{Neu} nodos con condiciones de Neumann.	151
B.6. Discretizaciones del problema de la capa límite térmica 5.5.2 con N nodos internos, N_{Dir} nodos con condiciones de Dirichlet y N_{Neu} nodos con condiciones de Neumann.	151
B.7. Discretizaciones de la EDP tipo elíptica 5.6.1 con N nodos internos, N_{Dir} nodos con condiciones de Dirichlet y h coeficiente de espaciamiento del algoritmo repelente.	152

Abreviaciones

- 1D** una dimensión. [2](#), [39](#), [71](#), [93](#), [111](#), [126](#), [128](#)
- 2D** dos dimensiones. [2](#), [5](#), [6](#), [13](#), [18](#), [26](#), [32–34](#), [39](#), [41](#), [45](#), [49](#), [51](#), [58](#), [59](#), [78](#), [88](#), [93](#), [95–97](#), [99](#), [102](#), [103](#), [125](#), [126](#), [132](#), [133](#), [138](#), [142](#)
- 3D** tres dimensiones. [2](#), [26](#), [33](#), [143](#)
- AINV** aproximación factorizada de la inversa. [102](#)
- C-Padé** método de Contorno-Padé. [4](#), [78](#), [79](#)
- DF-FBR** Diferencias Finitas con Funciones de Base Radial. [7](#), [49](#), [68](#), [79](#), [116](#), [120](#), [135](#), [139](#), [140](#), [143](#)
- DVS** descomposición en valores singulares. [79](#)
- ECM** error cuadrático medio. [94](#), [107–111](#)
- EDP** ecuación en derivadas parciales. [1–3](#), [5–7](#), [11](#), [14](#), [16](#), [17](#), [28](#), [33](#), [37](#), [41](#), [49](#), [53](#), [57](#), [60](#), [68–70](#), [77](#), [79](#), [93](#), [95–98](#), [102](#), [104](#), [107](#), [116](#), [132](#), [135](#), [138–141](#), [143](#), [144](#)
- EIB** ecuación integral de borde. [3](#), [17](#), [19](#), [68](#)
- FBR** Función de Base Radial. [3–8](#), [10](#), [28](#), [32–35](#), [37–40](#), [42](#), [43](#), [45–50](#), [53–57](#), [60](#), [61](#), [63–65](#), [68–80](#), [82](#), [84](#), [86](#), [88–91](#), [94](#), [95](#), [98–100](#), [103–105](#), [109–111](#), [116](#), [120](#), [121](#), [123](#), [124](#), [127](#), [128](#), [131](#), [135](#), [138–143](#), [145](#)
- FBR-GA** método de FBR Gamma. [4](#), [78](#), [79](#), [143](#)
- FBR-QR** método de FBR QR. [4](#), [5](#), [68](#), [78](#), [79](#), [88](#), [89](#), [91](#), [100](#), [103–106](#), [109](#), [115](#), [124](#), [145](#)
- FBR-RA** método de FBR Aproximaciones Racionales. [4](#), [78](#), [79](#), [143](#)
- FGD** función de Green-Dirichlet. [4](#), [8](#), [57–60](#), [99](#)
- FR** fenómeno de Runge. [109–112](#)
- Gauss-QR** método de Gaussianas con QR. [4](#), [78](#), [79](#), [143](#)

GMRES generalized minimal residual. 100, 102

ILU Factorización LU Incompleta. 102

MDF Método de Diferencias Finitas. 1, 3, 36, 69, 79

MEC Método de Elementos de Contorno. 3, 5, 6, 10, 13–18, 22, 23, 25, 26, 28, 29, 32–34, 36–41, 43, 55, 138

MEF Método de Elementos Finitos. 1, 3, 16, 36, 69, 95, 125, 131, 139, 141

MEIFBR Método de Ecuación Integral con FBR. 113, 125, 131, 139–141

MILEF Método Integral Local de Elementos de Frontera. 3, 39

MILFD Método Integral Local de Frontera y Dominio. 6–8, 35, 57, 59, 60, 64, 65, 89, 90, 93, 95, 99, 103, 104, 107–109, 116–118, 120, 121, 123, 124, 133, 138–140, 143, 145

MILFD-Est Método Integral Local de Frontera y Dominio-Estabilizado. 5, 6, 8, 68, 93, 94, 98–100, 103, 105–109, 113, 115–118, 120, 121, 123–125, 127–131, 133–145

MMC Método de Mínimos Cuadrados. 38, 39

MQ multicuádrica. 33, 40, 48, 50, 69, 71, 76, 78, 128

MRD Método de Reciprocidad Dual. 3, 6, 28–32, 35, 37–40, 55, 57, 92

MRD-MD Método de Reciprocidad Dual-Multidominio. 37, 38, 125, 131, 139, 141

MRD-RL Método de Reciprocidad Dual-Regular Local. 4, 6, 7, 35, 39, 40, 47, 51, 55, 57, 60, 92, 102–109, 113, 114, 124, 125, 127, 128, 130, 139, 141

MVF Método de Volúmenes Finitos. 1, 3, 16, 69

PR potencia radial. 48, 50, 71, 79

PVC problema de valores de contorno. 5–7, 12, 36, 40, 51, 57, 58, 60, 67, 79, 89, 93, 98, 103, 121, 126, 135, 141, 143, 144

SEL sistema de ecuaciones lineales. 3–5, 7, 14, 23, 26, 27, 30, 31, 43, 46, 49, 53, 64–67, 70, 73, 74, 76, 77, 98–100

SPAI aproximación dispersa de la inversa. 102

TPS spline de capa delgada. 33, 40, 47, 48, 50, 128

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1 Motivación y estado del arte

Uno de los objetivos fundamentales de esta tesis es poder resolver en forma eficiente una [ecuación en derivadas parciales \(EDP\)](#) que provenga del modelado de un proceso físico, para el cual, debido a su dificultad, no es posible encontrar una solución exacta usando métodos analíticos. La creación, el desarrollo, la implementación y la extensa experimentación computacional de métodos numéricos (en inglés, numerical methods) ha permitido calcular soluciones aproximadas a problemas numéricos complejos derivados de aplicaciones reales.

Los métodos numéricos sin malla (meshless numerical methods o simplemente, meshless methods) han ganado la atención de la comunidad científica de la matemática aplicada en los últimos años, y también de la física, las ingenierías, la informática y otras ramas de la ciencia. Esto se debe a las numerosas aplicaciones de estos métodos de aproximación que derivan de un trabajo fuertemente interdisciplinario.

Muchos métodos numéricos clásicos desarrollados en los últimos setenta años han alcanzado éxito como el [Método de Diferencias Finitas \(MDF\)](#) (Finite Difference Method), el [Método de Elementos Finitos \(MEF\)](#) (Finite Element Method) o el [Método de Volúmenes Finitos \(MVF\)](#) (Finite Volumen Method), sin embargo, estos requieren de la construcción de un mallado o refinamiento específico para abordar eficientemente determinados problemas numéricos. En cambio, los métodos sin malla se adaptan mejor a problemas sobre geometrías no triviales ya que requieren de la construcción de una distribución de nodos en el dominio.

El hecho de que no se requiera una malla es otra ventaja debido a que su generación en problemas diferenciales es laboriosa y costosa en tiempo y recursos computacionales. Por ejemplo, cuando la malla tiene huecos o esquinas angulosas, se requiere un refinamiento con una alta densidad de elementos para estas regiones críticas. En la Figura 1.1 se muestra una triangulación de un dominio irregular para métodos que dependen de un mallado y una distribución de nodos para métodos que no dependen de un mallado.

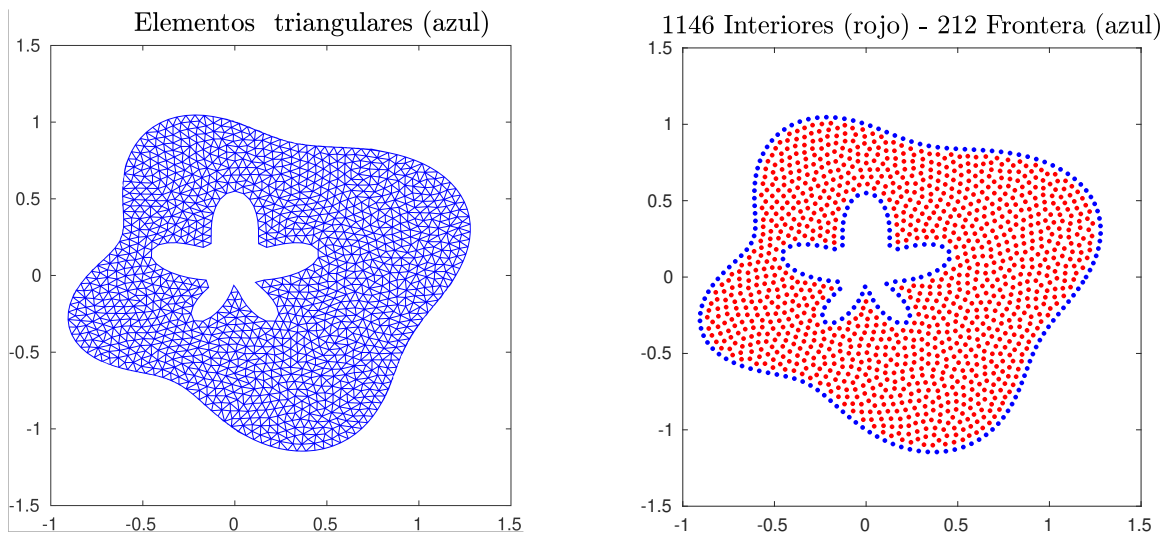


Figura 1.1: Triangulación de un dominio para métodos que dependen de un mallado (izq.) y distribución de nodos interiores y fronteras para métodos que no dependen de un mallado (der.).

Aplicaciones de métodos sin malla pueden encontrarse en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales, mecánica de los fluidos, elasticidad, nanotecnología, modelado de datos dispersos (mapeos en geodesia, geofísica, meteorología), gráfica computacional, inteligencia artificial, matemática financiera y optimización. Particularmente, en esta tesis nos interesarán aplicaciones orientadas a EDP tipo elípticas como la ecuación de convección-difusión.

Muchas de las aplicaciones antes mencionadas involucran una dimensión (1D), dos dimensiones (2D), tres dimensiones (3D) (de la variable espacial \mathbf{x}) o la variable t (temporal), sin embargo, algunos problemas físicos requieren trabajar con más de tres dimensiones. Este

punto es otra ventaja de los métodos sin malla sobre los métodos tradicionales [MDF](#), [MEF](#) y [MVF](#), dado que pueden trabajar precisa y eficientemente en dimensiones grandes, especialmente cuando se trabaja con interpolaciones que usan [Función de Base Radial \(FBR\)](#). Estas funciones se utilizan para interpolaciones en varias dimensiones [[1–3](#)].

El [Método de Elementos de Contorno \(MEC\)](#), también conocido como Método de Elementos de Frontera (Boundary Element Method), es un método utilizado para resolver ecuaciones en derivadas parciales formuladas como ecuaciones integrales, es decir, en forma de integral sobre la frontera. En el [MEC](#) la [EDP](#) que describe al problema físico se transforma en una [ecuación integral de borde \(EIB\)](#), también conocida como de frontera o de contorno (Boundary Integral Equation), lo cual se logra haciendo uso de las identidades de Green para luego aplicar esta formulación integral sobre puntos distribuidos en el dominio.

A partir del desarrollo del [MEC](#), varios métodos han sido propuestos para llevar las integrales de dominio a integrales de contorno a fin de eliminar el cálculo de integrales en celdas internas. Uno de los más conocidos es el [Método de Reciprocidad Dual \(MRD\)](#) (Dual Reciprocity Method) introducido por Nardini y Brebbia [[4, 5](#)], que convierte integrales de dominio en integrales de frontera equivalentes. Popov y Power [[6, 7](#)] encontraron que la aproximación del [MRD](#) puede ser mejorada haciendo una descomposición en subdominios y usando [FBR](#) localmente. Siguiendo esos resultados, el comportamiento del [MRD](#) en multidominios fue investigado en Portapila y Power [[8, 9](#)].

Una mejora ha sido el [Método Integral Local de Elementos de Frontera \(MILEF\)](#) presentado en [[10, 11](#)], con el cual, en vez de usar una interpolación global del campo desconocido, la [EDP](#) y las condiciones de borde son incluidas en interpolaciones locales. En este tipo de método de carácter local, el dominio es cubierto por una serie de estenciles de interpolación pequeños, en la que una interpolación del campo se usa para aproximar la solución y las condiciones de frontera se imponen en la representación integral. En la literatura suele encontrárselo con el nombre de métodos locales integrales. La ventaja reside en que, en vez de tratar con matrices globales grandes y llenas como en el [MEC](#) clásico, los [sistema de ecuaciones lineales \(SEL\)](#) locales a resolver resultan pequeños, los cuales se ensamblan en un gran sistema lineal formado por una matriz rala con estructura de banda que se resuel-

ve eficientemente por métodos iterativos de tipo Krylov [12, 13] o también incorporando técnicas de preconditionamiento [14].

Caruso, Portapila y Power en [15] presentaron un nuevo método denominado **Método de Reciprocidad Dual-Regular Local (MRD-RL)**, en el que aparecen solamente ecuaciones integrales regulares y se implementan interpolaciones locales con **FBR**. En [16] los autores mejoraron este método imponiendo las condiciones de borde en la interpolación local y en [17] mostraron que la colocación en el centro de la región de interpolación circular o esférica es la **función de Green-Dirichlet (FGD)**.

Cuando en las interpolaciones globales se utiliza una base de **FBR** infinitamente diferenciables que dependen de un parámetro de forma $\varepsilon > 0$, se ha mostrado que algunas **FBR** convergen cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ [18–21]. Sin embargo, la experimentación numérica ha mostrado que cuando dicho parámetro tiende a cero el error de interpolación decrece hasta cierto valor a partir del cual se desestabiliza [22, 23]. Esto sucede debido al mal condicionamiento de las matrices de interpolación que se vuelven difíciles de resolver numéricamente con un método de tipo directo para **SEL**, y se conoce como **FBR-Directo**. El llamado principio de incertidumbre formulado por Schaback en [24] ha contribuido a la concepción de que el espacio de funciones con **FBR** no es bueno debido al mal condicionamiento, asumiendo que la resolución de los **SEL** generados deben resolverse en forma directa.

Desde la primera década de este milenio, distintas técnicas numéricas han sido investigadas y desarrolladas por Fornberg y colaboradores para estabilizar el comportamiento del error en interpolaciones globales cuando el parámetro de forma es chico. Algunas de estas técnicas, como el **método de Contorno-Padé (C-Padé)** en [25], el **método de FBR QR (FBR-QR)** en [26–28], el **método de Gaussianas con QR (Gauss-QR)** en [29], el **método de FBR Gamma (FBR-GA)** en [30] o el **método de FBR Aproximaciones Racionales (FBR-RA)** en [31] abrieron nuevas posibilidades, en particular, para métodos locales integrales que no dependen de un mallado y que interpolan localmente con una base de **FBR** que dependen del parámetro de forma.

En la Figura 1.2 se ilustra el comportamiento del error norma- L_2 en un problema de interpolación sobre un círculo con nodos distribuidos en su interior. Se puede observar, por

un lado, la inestabilidad del error generado cuando ε tiende a cero, mientras que, por otro lado, se observa la estabilidad lograda al usar un método de estabilidad como **FBR-QR** en la medida que este tiende a cero.

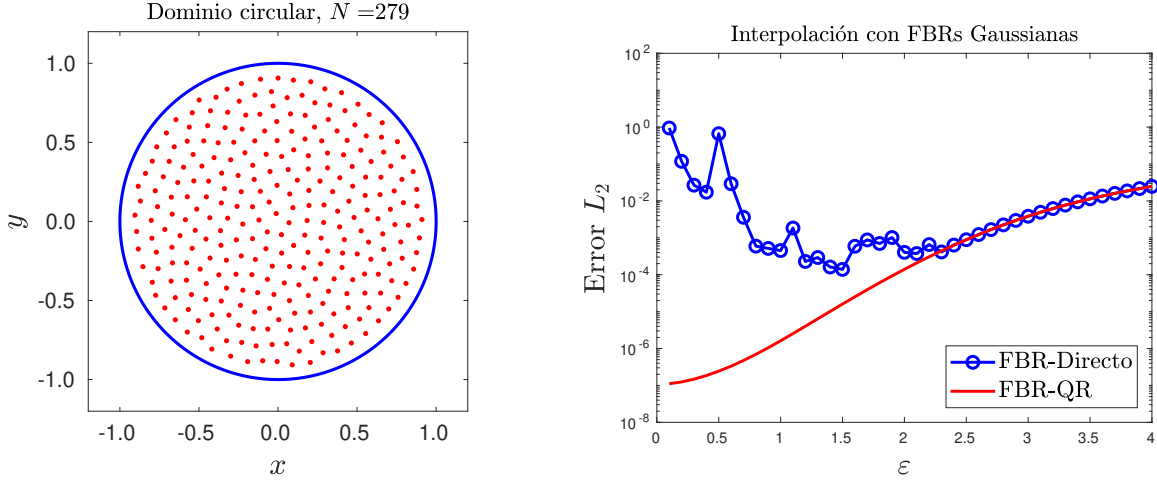


Figura 1.2: Ilustración del comportamiento del error norma- L_2 en un problema de interpolación global sobre un círculo (izq.) con FBR-Directo y con un método estabilizado en función del parámetro de forma ε de las FBR Gaussianas (der.).

La motivación de esta tesis es la resolución numérica precisa y eficiente de **SEL** provenientes de la resolución de **problema de valores de contorno (PVC)** gobernados por **EDP** de tipo elípticas a través de la combinación de métodos sin malla, formulaciones integrales basadas en el **MEC** en multidominios e interpolaciones locales de las incógnitas con **FBR**.

La mayor parte del esfuerzo de trabajo de esta tesis consiste en estabilizar el error numérico de un nuevo método local integral denominado **Método Integral Local de Frontera y Dominio-Estabilizado (MILFD-Est)** a partir de lograr estabilizar el error en las interpolaciones locales cuando disminuye el parámetro de forma, mejorando así el mal condicionamiento de los sistemas locales.

La experimentación numérica permitió obtener resultados en distintos dominios **2D** para problemas de Laplace, Poisson, convección-difusión estacionario, capa límite y una ecuación elíptica con coeficientes variables con condiciones de Dirichlet o Dirichlet-Neumann.

1.2 Organización de la tesis

La tesis se organiza de la siguiente manera. Luego de la introducción de este Cap. 1, en el Cap. 2 presentamos las ideas centrales en la resolución numérica de **PVC** de **EDP** usando el **MEC** que utiliza **FBR**. Desarrollamos las ecuaciones integrales de frontera para problemas de Laplace y Poisson a través de la solución fundamental, su formulación matemática, así como su desarrollo matricial haciendo énfasis en su implementación computacional. Finalmente, explicamos los fundamentos del **MRD** y las soluciones particulares para algunas **FBR**.

En el Cap. 3 desarrollamos la descomposición en multidominios como antecedentes inmediatos al método a desarrollar en esta tesis y presentamos los métodos locales integrales. En particular, el **MRD-RL** presentado en [15] que interpola localmente con **FBR** multicuádricas, y el **Método Integral Local de Frontera y Dominio (MILFD)** presentado recientemente en [32] que utiliza **FBR** Gaussianas que dependen del parámetro de forma ε .

En el Cap. 4 se describen algunas **FBR**, la exactitud en sus aproximaciones y los problemas de mal condicionamiento asociados a su matriz de interpolación. En particular, comentamos el desarrollo de métodos de estabilidad para **FBR** en interpolaciones globales. También desarrollamos la formulación matemática de la nueva técnica numérica estabilizada llamada **MILFD-Est**, presentada por Ponzellini, Caruso y Portapila en [32], la cual usa ecuaciones integrales regulares e interpolaciones locales con **FBR** estabilizadas.

En el Cap. 5 mostramos los resultados de la experimentación numérica del **MILFD-Est** en varios **PVC** estacionarios en **2D** y comparaciones con otros métodos numéricos. Ecuaciones de Laplace y Poisson con condiciones de Dirichlet o Dirichlet-Neumann son resueltas sobre distintos tipos de dominios. También se experimenta numéricamente con la ecuación de convección-difusión aplicada en un canal con condiciones mixtas, el problema de la capa límite termal sin solución analítica, y finalmente con una ecuación general tipo elíptica con coeficientes oscilantes sobre un dominio general con agujero y picos angulosos. Para las discretizaciones de los dominios son usadas distintas distribuciones de puntos (uniforme, Halton, cuasi-uniformes y dispersión repelente).

Finalmente, en el Cap. 6 presentamos las conclusiones generales de la tesis y los lineamientos para futuros trabajos.

1.3 Contribuciones originales

Inicialmente se investigaron técnicas de preconditionamiento aplicadas a las matrices globales y ralas surgidas del [MRD-RL](#) aplicadas a la ecuación de convección-difusión con distintos métodos iterativos de tipo Krylov para [SEL](#) [33], cuyos resultados fueron presentados en el IV Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial (MACI) organizado por la sección Argentina de la Society for Industrial and Applied Mathematics (AR-SIAM) realizado durante mayo de 2013 en la ciudad de Buenos Aires, Argentina.

Sin embargo, experimentaciones numéricas orientaron las investigaciones de los métodos tipo Krylov preconditionados a técnicas de estabilidad numérica para métodos que usan [FBR](#). Esto se debe a que el [MRD-RL](#) se basa en una formulación integral con interpolaciones locales utilizando [FBR](#) para resolver [EDP](#). En este método aparecen solamente ecuaciones integrales regulares y se resuelven dos interpolaciones locales con [FBR](#) que dependen del parámetro de forma de esta. Estos [SEL](#) se vuelven extremadamente mal condicionados cuando el parámetro tiende a cero. Resultados preliminares fueron publicados en el VI Congreso de MACI en mayo de 2017 realizado en Comodoro Rivadavia, Argentina, donde se logró estabilizar el error en [PVC](#) con condiciones de borde de Dirichlet [34].

Seguidamente, en agosto de 2017 se presentó un poster científico en el Workshop Localized Kernel-Based Meshless Methods for Partial Differential Equations realizado en The Institute for Computational and Experimental Research in Mathematics (ICERM) en Providence, Estados Unidos (EU), en el cual se estabilizó el error en [PVC](#) con condiciones de Dirichlet-Neumann [35].

Durante los meses de abril y mayo del 2018 realicé una estancia de investigación en el Departamento de Matemática Aplicada de la University of Colorado at Boulder (Colorado, EU) con el Prof. Bengt Fornberg, en la cual se trabajó sobre dominios más generales incorporando distribuciones de puntos cuasi-uniformes [36]. Por otro lado, con estas distribuciones se logró estabilizar los errores de las interpolaciones locales del [MILFD](#) al compararlas con resultados presentados en [37] con el método de [Diferencias Finitas con Funciones de Base Radial \(DF-FBR\)](#) (RBF-generated finite difference method) para [EDP](#) tipo elípticas.

Un primer acercamiento a las comparaciones entre métodos de estabilidad para interpolaciones globales con **FBR** aplicados en métodos integrales locales fue presentado en mayo de 2019 en el VII Congreso de MACI en la ciudad de Río Cuarto, Argentina [38].

Todos estos resultados preliminares presentados contribuyeron a un trabajo científico publicado en la revista internacional con referato Mathematics and Computers in Simulation [32].

A partir del Cap. 3 en adelante los resultados presentados son originales. En particular, el **MILFD** utiliza la **FGD** e integrales locales regulares. La principal contribución de esta tesis es la estabilidad numérica del error en un método local integral. En este sentido, en el Cap. 4 se proporciona un nuevo método denominado el **MILFD-Est** que estabiliza el error total logrando alcanzar casos límites del parámetro de forma de la **FBR** Gaussiana. Por otro lado, se consiguió ampliar el rango de utilidad del parámetro de forma logrando mayor exactitud para valores bajos y, además, se mejoró el condicionamiento de los sistemas locales y, por tanto, el error total del método. Las experiencias numéricas del Cap. 5 muestran la buena performance de este nuevo método estabilizado presentado.

1.4 Publicaciones

Parte de los resultados incluidos en esta tesis ya fueron publicados y presentados en congresos nacionales e internacionales y en revistas internacionales. Otros resultados que se desprenden forman parte de trabajos en preparación.

A continuación se enumeran en orden de aparición cronológica.

- L. Ponzellini Marinelli, M. Portapila, M.C. Sanziel, “*Solución numérica de sistemas de ecuaciones lineales provenientes del método MRD-RL para la ecuación de convección-difusión*”, Acta IV Congreso de MACI 2013, Vol. 4, 299-302, 2013. ISSN 2314-3282.
- L. Ponzellini Marinelli, N. Caruso, M. Portapila, “*Estabilidad numérica del Método de Reciprocidad Dual Regular Local usando FBR-QR*”, Acta VI Congreso de MACI 2017, Vol. 6, 134-137, 2017. ISSN 2314-3282.

- L. Ponzellini Marinelli, N. Caruso, M. Portapila, “*Numerical stability of the Localized Regular Dual Reciprocity Method using RBF-QR*”, Poster Participant Workshop “Localized Kernel-Based Meshless Methods for Partial Differential Equations”, Institute for Computational and Experimental Research in Mathematics (ICERM), Providence, Rhode Island, August 7-11 2017.
- L. Ponzellini Marinelli, N. Caruso, M. Portapila, “*Estabilidad numérica de un Método Local Integral con RBF-QR*”, Libro XII Jornadas de Ciencia y Tecnología 2018, 595-601, 2018. ISSN 978-987-702-366-4.
- L. Ponzellini Marinelli, N. Caruso, “*Estabilidad numérica de un Método Local Integral sin malla usando RBF-GA*”, Actas VII Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial (VII MACI 2019), Vol. 7, 185-188, 2019. ISSN 2314-3282.
- L. Ponzellini Marinelli, N. Caruso, M. Portapila, “*A stable computation on local boundary-domain integral method for elliptic PDEs*”, Mathematics and Computers in Simulation, 180 (2021) 379-400.

Capítulo 2

RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE PROBLEMAS DE VALORES DE CONTORNO USANDO EL MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO CON FUNCIONES DE BASE RADIAL

Este capítulo consta de cinco secciones donde presentamos las ideas centrales del [MEC](#) para la resolución de problemas diferenciales. Describimos brevemente la historia de su desarrollo, el concepto de la solución fundamental, así como su implementación y resolución numérica. A la vez, introducimos la idea de la reciprocidad dual en el [MEC](#) y presentamos las interpolantes con base de [FBR](#) y sus correspondientes soluciones particulares.

2.1 Problemas de contorno en las ecuaciones en derivadas parciales

Muchos fenómenos físicos se modelan matemáticamente por ecuaciones en derivadas parciales. Estas son ecuaciones que involucran derivadas de una función que depende de dos o más variables.

Consideremos la ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes variables siendo las variables independientes (x, y)

$$\mathcal{L}(u) = A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0, \quad (2.1)$$

donde A, B, C, D, E, F, G son funciones continuas en (x, y) sobre el dominio abierto y conexo Ω y las funciones A, B y C no se anulan simultáneamente.

El carácter de la solución $u = u(x, y)$ de la ecuación (2.1), así como el tipo de problema diferencial a resolver, viene dado por el valor del discriminante

$$\Delta = B^2 - AC, \quad (2.2)$$

siendo la ecuación de tipo:

- Elíptica si $\Delta < 0$.
- Parabólica si $\Delta = 0$.
- Hiperbólica si $\Delta > 0$.

Las **EDP** de tipo elípticas describen procesos que alcanzaron un estado estacionario y, por tanto, son independientes del tiempo, mientras que las ecuaciones parabólicas describen procesos físicos disipativos que dependen del tiempo, como la difusión, y que evolucionan hacia un estado estacionario. Los problemas de tipo hiperbólicos son dependientes del tiempo y describen procesos físicos conservativos, como la convección, que no evolucionan a un estado estacionario.

La mayoría de estos problemas diferenciales provenientes de aplicaciones del mundo real no pueden resolverse explícitamente debido a la imposibilidad de disponer técnicas

analíticas para encontrar una expresión exacta de la solución. Se vuelve necesario, entonces, disponer de métodos numéricos específicos y robustos que aproximen las soluciones. El tipo de ecuación también determina cómo será resuelta numéricamente.

En esta tesis abordamos principalmente ecuaciones de tipo elípticas cuando $B = 0$, y particularmente nos interesan las ecuaciones de la forma

$$\nabla^2 u = b \quad \text{en } \Omega. \quad (2.3)$$

Esta ecuación diferencial es conocida como la ecuación de Laplace para el caso $b = 0$ y como la ecuación de Poisson cuando $b \neq 0$. La solución u representa el potencial producido en un punto del dominio Ω debido a la fuente b distribuida en Ω . Este potencial describe problemas de procesos estacionarios, tales como el flujo de un fluido, flujo en medios porosos, flujos termales, entre otros. Se busca una solución en la clausura de Ω , $\bar{\Omega}$, con frontera $\Gamma = \partial\Omega$, donde está definida la función u o bien su derivada normal a Γ , $\frac{\partial u}{\partial n}$. Esta solución, además de la EDP (2.3), debe satisfacer las condiciones de borde o de contorno.

Los PVC para la ecuación potencial, los clasificamos de la siguiente manera usual:

- Problemas de Dirichlet

$$\begin{cases} \nabla^2 u = b & \text{en } \Omega, \\ u = f & \text{en } \Gamma, \end{cases} \quad (2.4)$$

donde la función f es conocida en Γ .

- Problemas de Neumann

$$\begin{cases} \nabla^2 u = b & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{en } \Gamma, \end{cases} \quad (2.5)$$

donde la función g es conocida en Γ .

- Problemas mixtos

$$\begin{cases} \nabla^2 u = b & \text{en } \Omega, \\ u = f & \text{en } \Gamma_1, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{en } \Gamma_2, \end{cases} \quad (2.6)$$

donde f es conocida en Γ_1 , g en Γ_2 , siendo $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$ y $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

- Problemas de Robin

$$\begin{cases} \nabla^2 u = b & \text{en } \Omega, \\ u + k \frac{\partial u}{\partial n} = f & \text{en } \Gamma, \end{cases} \quad (2.7)$$

donde las funciones f y k son conocidas en Γ .

Una generalización de los casos anteriores es:

$$\begin{cases} \nabla^2 u = b & \text{en } \Omega, \\ \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = \gamma & \text{en } \Gamma, \end{cases} \quad (2.8)$$

donde α , β y γ son funciones conocidas sobre Γ .

En la Figura 2.1 tenemos una representación esquemática de un dominio global Ω en 2D con condiciones de contorno mixtas sobre Γ_1 y Γ_2 .

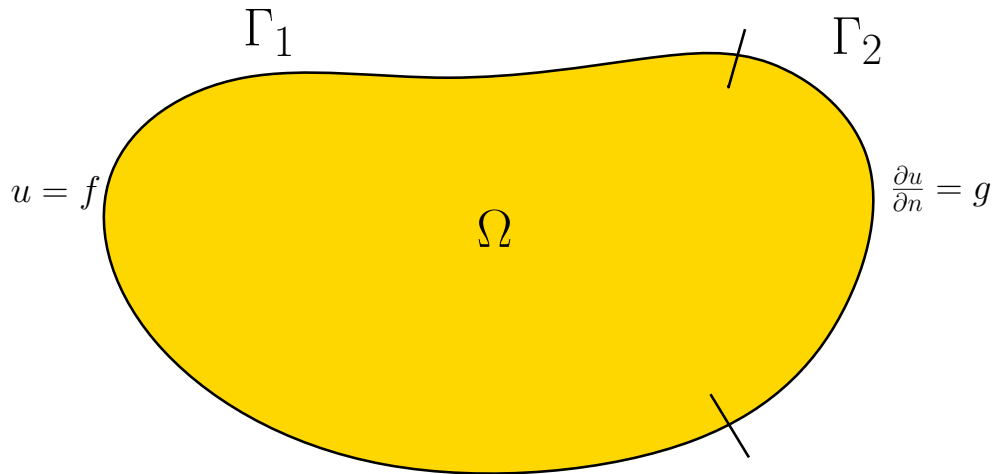


Figura 2.1: Dominio global Ω en 2D con condiciones de contorno mixtas.

El MEC fue desarrollado para construir una solución numérica de problemas diferenciales descritos por la ecuación potencial y los problemas de valores de contorno (2.4,2.5,2.6,2.7) citados anteriormente. Existen dos clases: el MEC directo y el MEC indirecto. En esta tesis desarrollaremos el MEC directo.

2.1.1 La estructura del MEC

Una aplicación clásica del MEC consta de las siguientes partes:

- Modelo matemático.
- Fórmula de representación.
- Ecuaciones integrales de borde.
- Ecuaciones discretizadas.
- Solución de los SEL.
- Interpretación de los resultados numéricos.

2.2 Historia del Método de Elementos de Contorno

Hoy día el MEC es una técnica numérica establecida en los métodos numéricos y sus aplicaciones ingenieriles. La idea central de este método es transformar la EDP original, o sistema de EDP que definen un problema físico dado, en una ecuación integral equivalente (o sistema) mediante la segunda identidad de Green correspondiente y su solución fundamental, es decir, la fórmula de representación integral de Green. De esta manera, es suficiente con que algunas o todas las funciones incógnitas y sus derivadas estén definidas en la frontera Γ del dominio Ω .

La idea de resolver problemas potenciales transformando la ecuación diferencial en una ecuación integral de frontera se remonta a los trabajos iniciales de Green [39], en los que se introdujo la función de Green para formular una representación integral de la solución de problemas de contorno de Dirichlet y Neumann para la ecuación de Laplace. Sin embargo, fue Fredholm quien en el siglo XX usó las ecuaciones integrales singulares de frontera para encontrar soluciones sobre una frontera para problemas potenciales [40].

Debido a la imposibilidad práctica de resolver ecuaciones integrales de frontera singulares, estas ideas se limitaron a probar teoremas de existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales. No fue sino hasta el desarrollo de la computación moderna con los trabajos de

Jaswon [41], Symm [42] y Jaswon y Ponter [43], en los cuales se desarrolló e implementó una técnica numérica para resolver ecuaciones integrales de frontera en problemas potenciales y el problema clásico de torsión, que se resolvió en un problema con condiciones de Neumann para la ecuación de Laplace.

Numerosas trabajos sobre soluciones con MEC para problemas potenciales han sido publicados en las últimas décadas. Los libros de Jaswon y Symm [44] y Gipson [45] tienen un detallado estudio del método de ecuaciones integrales de frontera. Aplicaciones del MEC a problemas potenciales pueden hallarse en Brebbia y Dominguez [46].

Hacia fines de 1980, numerosas publicaciones sobre el MEC aparecían en la literatura científica con aplicaciones a distintas áreas de las ingenierías: estática y dinámica, problemas de elasticidad lineal y no-lineal, problemas de elastodinámica, dinámica de fluidos, fluidos en medios porosos, ingeniería de ondas y terremotos, geomecánica e ingeniería de cimentos, viscoelasticidad, interacción suelo-estructura, interacción fluido-estructura, mecánica de fracturas, electricidad y electromagnetismo, conducción de calor, acústica, aerodinámica, corrosión, optimización, entre otras.

Desde la primera conferencia internacional del MEC organizada por Brebbia en 1978, periódicamente se presentan los principales resultados conocidos sobre los enfoques del método aplicados a problemas potenciales, formulaciones, implementaciones numéricas, programación y aplicaciones a problemas de mediana y gran escala. Actualmente, la International Association for Boundary Element Methods (IABEM) y el Wessex Institute of Technology (WIT), Inglaterra, Reino Unido, publican la serie de la International Conference on Boundary Elements and other Mesh Reduction Methods (BEM/MRM) y el Journal of Engineering Analysis with Boundary Elements.

2.3 Desarrollo del Método de Elementos de Contorno directo y problemas de contorno

El aumento del número de aplicaciones del MEC se ha visto obstaculizado por la necesidad de operar con soluciones fundamentales relativamente complejas o por las dificultades

encontradas cuando estas soluciones no pueden expresarse en una forma cerrada. En la formulación MEC de este tipo de problemas, es común usar una representación integral basada en una EDP con una expresión conocida de la solución fundamental y los términos restantes de la ecuación original. Se sabe que en estos casos el MEC está en desventaja en comparación con los clásicos esquemas de dominio, como el MEF o el MVF.

2.3.1 Ecuaciones integrales

Las ecuaciones integrales son una herramienta importante para la modelización, formulación y resolución de problemas científicos. Una ecuación integral es una ecuación que contiene una o varias funciones incógnitas bajo el signo integral. En \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 pueden definirse como

$$\alpha(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{y}} = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2.9)$$

donde u es la función incógnita, $K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es un núcleo conocido y α, f son funciones dadas para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Gamma$. Las siguientes ecuaciones son ecuaciones integrales:

$$\int_{\Gamma} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{y}} = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2.10)$$

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{y}} + g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (2.11)$$

La ecuación (2.10) se conoce como ecuación lineal de Fredholm de primer tipo y la ecuación (2.11) se conoce como ecuación lineal de Fredholm de segundo tipo. Si el límite de la integral es fijo, se denomina ecuación integral de tipo Fredholm y si uno de los límites es variable, se denomina ecuación integral de tipo Volterra.

El núcleo $K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ determina la característica de la ecuación integral, por ejemplo en el caso que

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}, \quad (2.12)$$

las integrales en (2.10) y (2.11) son singulares cuando $\mathbf{x} \in \Gamma$, y estas ecuaciones son llamadas ecuaciones integrales singulares.

2.3.2 La solución fundamental

Las soluciones fundamentales son una parte importante de las formulaciones de EIB. Generalmente, sin estas soluciones explícitas no podemos transformar una EDP en una EIB. Estas soluciones se conocen en la mayoría de los problemas lineales, sin embargo, dependen de una fuente distinta (fuente de calor, de fuerza, de carga, otras) para diferentes problemas. Entender el comportamiento de estas soluciones fundamentales para un problema particular es importante para comprender el desarrollo del MEC. En esta tesis abordaremos el caso del problema de Poisson.

Consideremos una fuente puntual $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ cuya densidad en el punto $\boldsymbol{\xi} \in \Omega$ se expresa matemáticamente por la distribución delta de Dirac

$$b(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}). \quad (2.13)$$

Entonces, el potencial $u^* = u^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ en el punto $\boldsymbol{\xi}$ puede expresarse como

$$\nabla^2 u^* = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}). \quad (2.14)$$

Una solución particular de la ecuación (2.14) se conoce como una solución fundamental del potencial (2.3).

En el caso bidimensional, reescribiendo esta ecuación en coordenadas polares con centro en \mathbf{x} , el operador laplaciano se transforma en

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du^*}{dr} \right) = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}), \quad (2.15)$$

donde $r = \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|$ es la distancia euclídea. Como el término de la derecha en la ecuación (2.15) se anula en todo el plano salvo cuando $r = 0$, resulta

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du^*}{dr} \right) = 0, \quad r > 0. \quad (2.16)$$

Integrando dos veces resulta

$$u^* = a \ln r + b, \quad r > 0, \quad (2.17)$$

siendo a, b constantes a determinar. Tomando $b = 0$ y considerando un dominio circular Ω_ρ de radio $r = \rho$ con centro en ξ como en la Figura 2.2 y aplicando la segunda identidad de Green se obtiene que, en el caso 2D, $a = \frac{1}{2\pi}$ y, por tanto la solución fundamental tiene la forma

$$u^*(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{2\pi} \ln(r). \quad (2.18)$$

Debido a la simetría axial $\frac{\partial u^*}{\partial n} = \frac{\partial u^*}{\partial r}$, la derivada normal viene dada por

$$q^*(\mathbf{x}, \xi) := \frac{\partial u^*}{\partial n}(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n}. \quad (2.19)$$

Esta solución fundamental (2.18) es conocida en la literatura como función de Green.

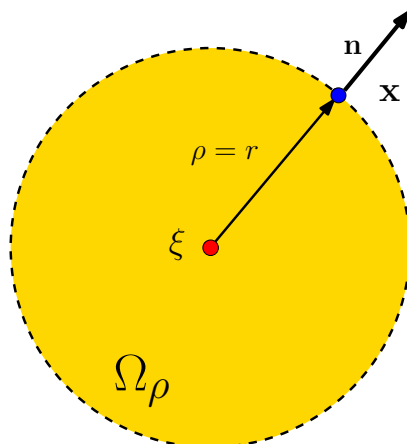


Figura 2.2: Dominio circular Ω_ρ con fuente ξ como centro.

2.3.3 El MEC directo para la ecuación de Laplace

En la formulación del MEC directo, los valores de la función y su derivada normal sobre Γ juegan el papel de las densidades fuentes para generar u sobre Ω . Consideremos la ecuación de Laplace con condiciones de borde mixtas

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \Omega, & (2.20a) \\ u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma_1, & (2.20b) \\ \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} = g(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma_2, & (2.20c) \end{cases}$$

donde $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$ y $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. La condición (2.20b) se conoce como esencial y (2.20c) como natural. Aplicando la segunda identidad de Green para las funciones u y u^* que satisfacen las ecuaciones (2.20a) y (2.14) respectivamente, y asumiendo que la fuente está colocada en ξ , resulta

$$-\int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \xi) d\Omega_{\mathbf{x}} = \oint_{\Gamma} \left[u^*(\mathbf{y}, \xi) \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n} - u(\mathbf{y}) \frac{\partial u^*(\mathbf{y}, \xi)}{\partial n} \right] d\Gamma_{\mathbf{y}}, \quad (2.21)$$

o bien,

$$u(\xi) = - \oint_{\Gamma} \left[u^*(\mathbf{y}, \xi) \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n} - u(\mathbf{y}) \frac{\partial u^*(\mathbf{y}, \xi)}{\partial n} \right] d\Gamma_{\mathbf{y}}, \quad (2.22)$$

donde los subíndices de los diferenciales $d\Omega_{\mathbf{x}}$ y $d\Gamma_{\mathbf{y}}$ indican las variables respecto a las cuales se integra.

Esta fórmula se conoce como representación integral de Green para la ecuación de Laplace, la cual provee el valor exacto de la solución u de (2.20a-2.20c) en el punto ξ interior al dominio Ω , conociendo los valores de u y de su derivada normal $\partial u/\partial n$ sobre Γ y siendo u^* la solución fundamental descrita anteriormente.

Para obtener una EIB de u para puntos sobre la frontera Γ , hay que hacer tender un punto interior hacia la frontera. En la Figura 2.3 consideramos el caso general donde la frontera no es suave y P es el punto de la esquina del dominio.

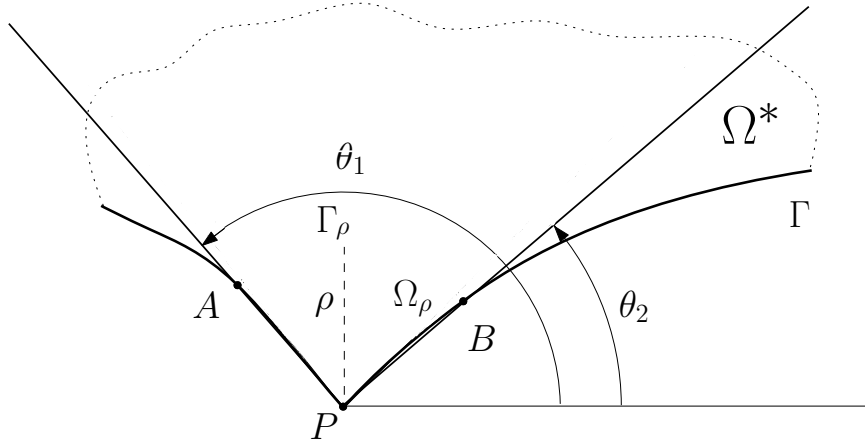


Figura 2.3: Geometría en puntos esquinas de una frontera no suave.

Sea el dominio $\Omega^* = \Omega - \Omega_\rho$ que resulta de quitar una sección circular centrada en P de radio ρ con frontera en las curvas PA y PB y el arco circular Γ_ρ (notaremos Γ_{AB} a la unión de las curvas PA y PB). El ángulo α entre las tangentes de la frontera a P satisface

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} (\theta_1 - \theta_2) = \alpha. \quad (2.23)$$

Aplicando la segunda identidad de Green a las funciones u y u^* que satisfacen las ecuaciones (2.20a) y (2.14) respectivamente, como en la ecuación (2.21) obtenemos

$$0 = \int_{\Gamma - \Gamma_{AB}} \left[u^* \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial u^*}{\partial n} \right] d\Gamma + \int_{\Gamma_\rho} \left[u^* \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial u^*}{\partial n} \right] d\Gamma, \quad (2.24)$$

puesto que ξ es un punto exterior al dominio Ω^* donde $\delta(\mathbf{x} - \xi) = 0$.

Tomando límite cuando $\rho \rightarrow 0$, la primera integral de (2.24) resulta

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_{AB}} \left[u^* \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial u^*}{\partial n} \right] d\Gamma = \oint_{\Gamma} \left[u^* \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial u^*}{\partial n} \right] d\Gamma. \quad (2.25)$$

La segunda resulta

$$\int_{\Gamma_\rho} \left[u^* \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial u^*}{\partial n} \right] d\Gamma = \int_{\Gamma_\rho} \frac{1}{2\pi} \frac{\partial u}{\partial n} \ln(r) ds - \int_{\Gamma_\rho} \frac{1}{2\pi} u \frac{\cos\phi}{r} ds = I_1 + I_2, \quad (2.26)$$

donde ϕ es el ángulo entre \mathbf{r} y \mathbf{n} (ver Figura 2.2).

Para el arco circular Γ_ρ , resulta $r = \rho$ y $ds = (-\rho)d\theta$, y por el teorema del valor medio integral, el valor de la integral es el valor de su integrando en algún punto \mathbf{x}^* por la longitud del intervalo. Por ende, I_1 en (2.26) queda de la forma

$$I_1 = \int_{\Gamma_\rho} \frac{1}{2\pi} \frac{\partial u}{\partial n} \ln(r) ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2\pi} \frac{\partial u}{\partial n} \rho \ln(\rho) (-d\theta) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \rho \ln(\rho) (\theta_2 - \theta_1). \quad (2.27)$$

Por lo tanto, $\lim_{\rho \rightarrow 0} I_1 = 0$.

Análogamente, la integral I_2 en (2.26) queda de la forma

$$I_2 = - \int_{\Gamma_\rho} \frac{1}{2\pi} u \frac{\cos\phi}{r} ds = - \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2\pi} u \frac{(-1)}{\rho} \rho (-d\theta) = - \frac{1}{2\pi} [u]_{\mathbf{x}^{**}} (\theta_1 - \theta_2). \quad (2.28)$$

para algún punto \mathbf{x}^{**} . Por lo tanto, $\lim_{\rho \rightarrow 0} I_2 = \frac{\alpha}{2\pi} u(\xi)$, con $\xi \in \Gamma$.

Usando las ecuaciones (2.25) y (2.26), y tomando en cuenta I_1 y I_2 cuando $\rho \rightarrow 0$, la

ecuación (2.24) resulta

$$\frac{\alpha}{2\pi}u(\boldsymbol{\xi}) = - \oint_{\Gamma} \left[u^*(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n} - u(\mathbf{y}) \frac{\partial u^*(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi})}{\partial n} \right] d\Gamma_{\mathbf{y}}. \quad (2.29)$$

Esta fórmula es la representación integral de la solución del Laplace en puntos $\boldsymbol{\xi} \in \Gamma$ cuando la frontera no es suave (tiene esquinas). En el caso de una frontera suave, resulta $\alpha = \pi$ y la ecuación (2.29) anterior se transforma en

$$\frac{1}{2}u(\boldsymbol{\xi}) = - \oint_{\Gamma} \left[u^*(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n} - u(\mathbf{y}) \frac{\partial u^*(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi})}{\partial n} \right] d\Gamma_{\mathbf{y}}. \quad (2.30)$$

Cuando el punto de colocación $\boldsymbol{\xi}$ es exterior a Ω y con la segunda identidad de Green

$$0 = - \oint_{\Gamma} \left[u^*(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n} - u(\mathbf{y}) \frac{\partial u^*(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi})}{\partial n} \right] d\Gamma_{\mathbf{y}}. \quad (2.31)$$

Las ecuaciones (2.22), (2.30) y (2.31) pueden combinarse en una sola ecuación integral

$$c(\boldsymbol{\xi})u(\boldsymbol{\xi}) = - \oint_{\Gamma} \left[u^*(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n} - u(\mathbf{y}) \frac{\partial u^*(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi})}{\partial n} \right] d\Gamma_{\mathbf{y}}. \quad (2.32)$$

donde el factor $c(\boldsymbol{\xi})$, conocido como coeficiente libre, toma el valor

$$c(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} 1 & \boldsymbol{\xi} \text{ interior a } \Omega, \\ \frac{\alpha}{2\pi} & \boldsymbol{\xi} \in \Gamma = \partial\Omega, \\ 0 & \boldsymbol{\xi} \text{ exterior a } \Omega, \end{cases} \quad (2.33)$$

siendo $\alpha = \pi$ cuando Γ es suave.

La ecuación (2.30) puede mirarse como una ecuación integral sobre Γ , y se conoce como una ecuación integral de frontera. Esta representación fue usada por Fredholm en [40].

Asumiendo que la frontera Γ es suave, podemos describir la ecuación integral de frontera en el problema mixto (2.20a-2.20c) como

$$\frac{1}{2}f(\boldsymbol{\xi}) = - \oint_{\Gamma} \left[u^*(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n} - f(\mathbf{y}) \frac{\partial u^*(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi})}{\partial n} \right] d\Gamma_{\mathbf{y}} \quad \text{sobre } \Gamma_1, \quad (2.34)$$

$$\frac{1}{2}u(\boldsymbol{\xi}) = - \oint_{\Gamma} \left[u^*(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}) g(\mathbf{y}) - u(\mathbf{y}) \frac{\partial u^*(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi})}{\partial n} \right] d\Gamma_{\mathbf{y}} \quad \text{sobre } \Gamma_2, \quad (2.35)$$

siendo f conocida en (2.34) (desconocida $\frac{\partial u}{\partial n}$) sobre Γ_1 y g conocida en (2.35) (desconocida u) sobre Γ_2 .

2.3.4 El MEC directo para la ecuación de Poisson

En este caso buscamos la formulación del MEC directo para generar la solución u en Ω gobernada por la ecuación de Poisson con condiciones de borde mixtas

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, & (2.36a) \\ u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma_1, & (2.36b) \\ \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} = g(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma_2, & (2.36c) \end{cases}$$

siendo b una función conocida, f y g datos conocidos y $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$ y $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

Aplicando la segunda identidad de Green a las funciones u y u^* que satisfacen las ecuaciones (2.36a) y (2.14) respectivamente, y asumiendo que la fuente está colocada en ξ ,

$$c(\xi)u(\xi) = \int_{\Omega} u^*(\mathbf{x}, \xi) b(\mathbf{x}) d\Omega_{\mathbf{x}} - \oint_{\Gamma} \left[u^*(\mathbf{y}, \xi) \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n} - u(\mathbf{y}) \frac{\partial u^*(\mathbf{y}, \xi)}{\partial n} \right] d\Gamma_{\mathbf{y}}. \quad (2.37)$$

Su correspondiente ecuación integral de frontera para fronteras suaves es

$$\frac{1}{2}u(\xi) = \int_{\Omega} u^*(\mathbf{x}, \xi) b(\mathbf{x}) d\Omega_{\mathbf{x}} - \oint_{\Gamma} \left[u^*(\mathbf{y}, \xi) \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n} - u(\mathbf{y}) \frac{\partial u^*(\mathbf{y}, \xi)}{\partial n} \right] d\Gamma_{\mathbf{y}}, \quad (2.38)$$

donde vemos que integrando sobre Ω no introduce nuevas incógnitas y necesitamos calcular integrales sobre el dominio de u^* y u , además de las integrales sobre la frontera Γ .

2.4 Implementación numérica del MEC

En aplicaciones ingenieriles reales, encontrar una solución analítica como respuesta a un modelo físico es prácticamente imposible por la complejidad del problema. Sin embargo, se puede construir una solución numérica haciendo uso del MEC.

Consideremos un dominio abierto y conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ con frontera Γ . La idea central del MEC consiste en discretizar la frontera Γ en un número finito de elementos, no necesariamente iguales, que llamamos elementos de frontera o de contorno. Sobre estos elementos se realiza la aproximación del campo desconocido en la frontera y la aproximación de la geometría de la frontera, dependiendo de qué tipo de elementos se utilicen: constantes, lineales, cuadráticos o de mayor orden. En cada elemento distinguimos los puntos extremos y los

puntos nodales, es sobre estos últimos donde se evalúa la incógnita sobre la frontera.

En la Figura 2.4 (izq.) puede observarse el caso del elemento constante, donde el punto nodal se ubica en el punto medio del segmento que conecta los puntos extremos y el valor sobre la frontera es igual al valor en el punto nodal. Para los elementos lineales de la Figura 2.4 (centro), estos son segmentos que tienen los extremos en los puntos nodales y se asume que el valor sobre la frontera varía linealmente entre los valores sobre los puntos nodales. Finalmente, para los elementos cuadráticos de la Figura 2.4 (der.) la sección de frontera es aproximada por un arco de parábola y el elemento tiene tres puntos nodales, dos de estos en los extremos y el tercero en el punto medio del arco de parábola.

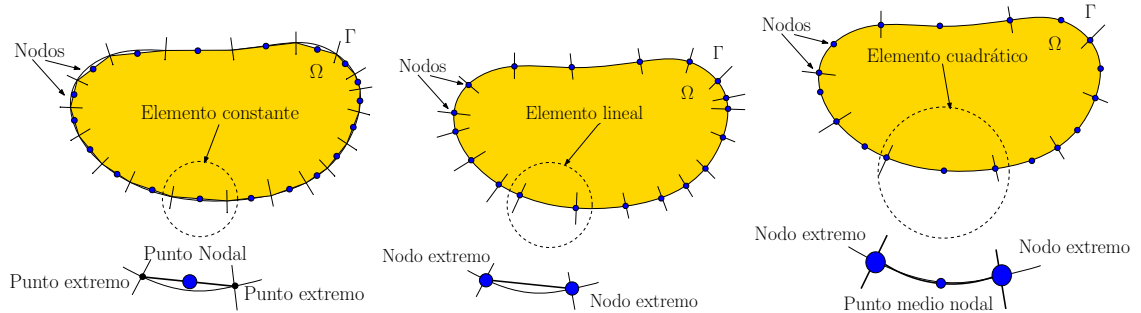


Figura 2.4: Algunos tipos de los elementos del Método de Elementos de Contorno: constantes (izq.), lineales (centro) y cuadráticos (der.).

Luego, en el procedimiento del MEC, se aplica la ecuación integral discretizada a puntos nodales dentro de cada elemento, donde se conocen los valores del potencial y su derivada normal. Las integrales sobre cada elemento de frontera se calculan usando una cuadratura numérica adecuada.

Posteriormente, imponiendo las condiciones de borde del problema, se obtiene un sistema de ecuaciones lineales algebraico que se resuelve usando métodos directos o bien métodos iterativos dependiendo de las características del sistema obtenido. La solución de este SEL genera los demás valores de u y $\partial u/\partial n$ sobre la frontera mediante un álgebra matricial.

Finalmente, es posible calcular la aproximación de u y sus derivadas parciales $\partial u/\partial x$ y $\partial u/\partial y$ en puntos interiores del dominio Ω debido a la continuidad de la solución fundamental u^* y sus derivadas como funciones de x e y en la frontera. Se puede derivar directamente bajo el signo integral en la ecuación (2.32) tomando $c(\xi) = 1$.

2.4.1 El MEC para el caso de elementos constantes

Consideremos que la frontera $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ en un problema de Laplace con condiciones de borde mixta es discretizada en $N = N_1 + N_2$ puntos frontera como en la Figura 2.5.

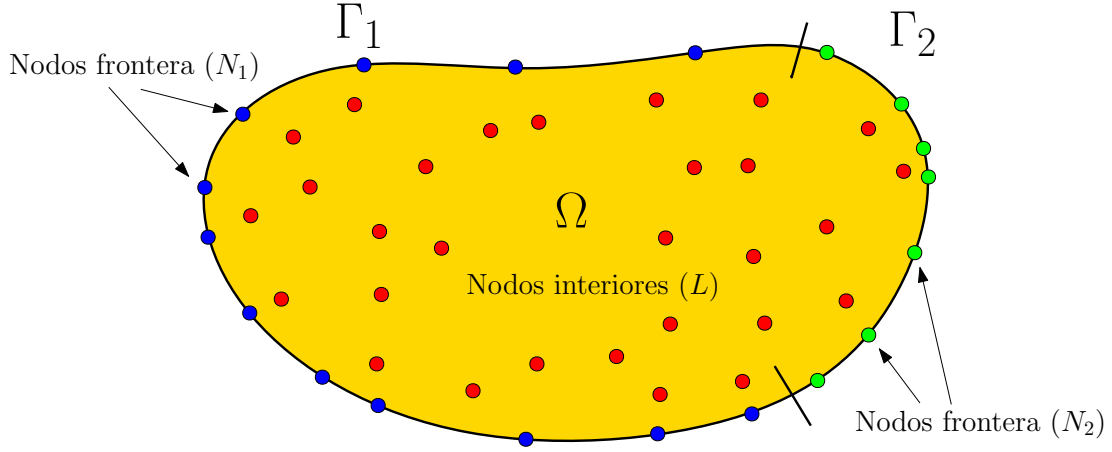


Figura 2.5: Discretización del dominio Ω con nodos internos y fronteras en el MEC.

La ecuación (2.30) aplicada en ξ se discretiza de la forma

$$\frac{1}{2}u_i = - \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} u^*(\mathbf{y}, \xi_i) q(\mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{y}} + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} u(\mathbf{y}) q^*(\mathbf{y}, \xi_i) d\Gamma_{\mathbf{y}}, \quad (2.39)$$

donde $q = \frac{\partial u}{\partial n}$, $q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n}$ es la derivada normal de la solución fundamental u^* , Γ_j es el segmento que contiene al punto nodal j -ésimo y ξ_i es el punto nodal del i -ésimo elemento.

Si consideramos elementos constantes y denotamos u_j y q_j los valores de u y q (constantes) sobre el elemento j -ésimo Γ_j respectivamente, la ecuación (2.39) puede notarse como

$$-\frac{1}{2}u_i + \sum_{j=1}^N u_j \left(\int_{\Gamma_j} q^*(\mathbf{y}, \xi_i) d\Gamma_{\mathbf{y}} \right) = \sum_{j=1}^N q_j \left(\int_{\Gamma_j} u^*(\mathbf{y}, \xi_i) d\Gamma_{\mathbf{y}} \right). \quad (2.40)$$

Los coeficientes en las integrales de las sumatorias anteriores son conocidos como coeficientes de influencia dado que expresan la contribución de los valores nodales u_j y q_j para

determinar el valor $\frac{1}{2}u_i$. Estos coeficientes denotados h_{ij} y g_{ij} tienen la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{h}_{ij} = \int_{\Gamma_j} q^*(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}_i) d\Gamma_{\mathbf{y}}, \\ g_{ij} = \int_{\Gamma_j} u^*(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}_i) d\Gamma_{\mathbf{y}}, \end{array} \right. \quad (2.41a)$$

$$\left. \right\} \quad (2.41b)$$

donde el punto $\boldsymbol{\xi}_i$ es el punto de colocación y \mathbf{y} varía sobre el elemento j -ésimo.

2.4.2 Resolución numérica de las integrales de línea y de dominio

Las integrales de línea (2.41a) y (2.41b) se evalúan numéricamente usando la cuadratura Gaussiana o algún otro método de integración (regla del Trapecio, regla de Simpson, fórmula de Newton-Cotes). La ventaja reside en la exactitud de estos métodos numéricos para aproximar estas integrales debido a que calcularlas con lenguajes simbólicos como Mathematica o Maple sería muy costoso computacionalmente. El éxito del MEC depende de calcular integrales de línea y de dominio en forma eficiente y exacta.

La integración numérica Gaussiana, se calcula sobre el intervalo $\xi \in [-1, 1]$ como

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \sum_{k=1}^n w_k f(\xi_k) \quad (2.42)$$

donde $\xi_k, k = 1, \dots, n$ son los puntos de integración de Gauss o directamente puntos de Gauss (no necesariamente equidistantes), n es la cantidad de estos puntos, y $w_k, k = 1, \dots, n$ son los pesos de la cuadratura Gaussiana de orden n . En la cuadratura gaussiana se busca que la fórmula (2.42) sea exacta para los polinomios de grado menor o igual que m_n , $1, x, x^2, \dots, x^{m_n}$. Es decir, la igualdad de la fórmula anterior da lugar a $m_n + 1$ ecuaciones con $2n$ incógnitas, los pesos w_k y los puntos de Gauss ξ_k para un valor fijo de n . De donde para obtener un sistema cuadrado $m_n = 2n - 1$. Por tanto, (2.42) debe ser exacta para los polinomios de grado menor o igual a $2n - 1$ para tener mayor precisión en la integración. Usando las expresiones de los polinomios de Legendre las abscisas ξ_k quedan determinadas por las raíces de dichos polinomios y además se tienen fórmulas exactas para los pesos w_k y el error de cuadratura. En adelante la llamaremos cuadratura de Gauss-Legendre o directamente integración de Gauss a este método sin pérdida de generalidad.

En el caso del cálculo de las integrales de línea en el MEC se distinguen dos casos. Cuando

$i \neq j$, es decir, cuando el punto fuente y el punto del campo no coinciden, la cuadratura Gaussiana es el método indicado para el cálculo de \hat{h}_{ij} y g_{ij} . En el caso que $i = j$, debido a la singularidad de la solución fundamental, es recomendable usar otras reglas de integración de mayor orden o bien fórmulas de cuadratura especialmente desarrolladas como la logarítmica.

La extensión natural de esta cuadratura a 2D o 3D sobre distintos tipos de dominio puede consultarse en [46, 47].

Para el caso de un problema de Poisson, la ecuación (2.38) discretizada aplicada en ξ es

$$\frac{1}{2}u_i = \int_{\Omega} u^*(\mathbf{x}, \xi_i) b(\mathbf{x}) d\Omega_{\mathbf{x}} - \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} u^*(\mathbf{y}, \xi_i) q(\mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{y}} + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} u(\mathbf{y}) q^*(\mathbf{y}, \xi_i) d\Gamma_{\mathbf{y}}. \quad (2.43)$$

En este caso, el dominio Ω es subdividido en celdas (triangulares o rectangulares) y sobre cada una se calculan numéricamente las integrales de dominio por cuadratura Gaussiana.

2.4.3 Resolución numérica del SEL global en el MEC

Usando la notación de (2.41a) y (2.41b) en la ecuación (2.39), la forma discretizada de la solución u sobre Γ obtenida es

$$-\frac{1}{2}u_i + \sum_{j=1}^N \hat{h}_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N g_{ij} q_j. \quad (2.44)$$

Llamando $h_{ij} = \hat{h}_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{ij}$, siendo δ_{ij} la delta de Kronecker, podemos reescribir la ecuación (2.44) como

$$\sum_{j=1}^N h_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N g_{ij} q_j. \quad (2.45)$$

Matricialmente, aplicando esta ecuación en los puntos de colocación ξ_i con $i = 1, \dots, N$, siendo $N = N_1 + N_2$ sobre la frontera $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, resulta el SEL $N \times N$ de la forma

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{q}, \quad (2.46)$$

donde $\mathbf{H}, \mathbf{G} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, y $\mathbf{u}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$. Esta ecuación es la base del desarrollo del MEC. En la Figura 2.6 se puede observar una representación esquemática de las matrices \mathbf{H} y \mathbf{G} y los vectores \mathbf{u} y \mathbf{q} .

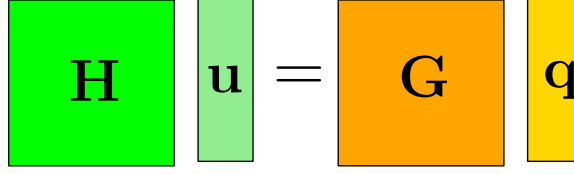


Figura 2.6: Esquema matricial en el MEC de la ecuación (2.46).

La ecuación (2.46) tiene $(N - N_1)$ valores incógnitas de u sobre Γ_2 y $(N - N_2)$ valores incógnitas de q sobre Γ_1 . Particionando las matrices \mathbf{H} y \mathbf{G} como

$$[\mathbf{H}_{11} \mathbf{H}_{12}] \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{G}_{11} \mathbf{G}_{12}] \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{g}_2 \end{bmatrix}, \quad (2.47)$$

donde \mathbf{f}_1 y \mathbf{g}_2 representan los valores datos conocidos sobre Γ_1 y Γ_2 respectivamente, y \mathbf{u}_2 y \mathbf{q}_1 representan las incógnitas podemos reacomodar este sistema algebraico como

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (2.48)$$

donde $\mathbf{A} = [\mathbf{H}_{12} -\mathbf{G}_{11}]$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{q}_1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{b} = [-\mathbf{H}_{11} \mathbf{f}_1 + \mathbf{G}_{12} \mathbf{g}_2]$. Este SEL lleno se resuelve numéricamente por un método directo.

Conociendo todos los valores de u y q sobre Γ podemos calcular la solución u en puntos interiores de Ω usando la ecuación (2.32) con $c(\boldsymbol{\xi}) = 1$. En ese caso, la discretización de la solución se obtiene de la fórmula

$$u_i = \sum_{j=1}^N \hat{h}_{ij} u_j - \sum_{j=1}^N g_{ij} q_j. \quad (2.49)$$

También podemos calcular q en puntos interiores de Ω usando la ecuación (2.32) con $c(\boldsymbol{\xi}) = 1$ debido a que la solución fundamental y sus derivadas son continuas y, a la vez, podemos derivar las integrales sobre Γ .

2.5 El Método de Reciprocidad Dual

A comienzos del desarrollo del MEC, la evaluación de las integrales de dominio se realizó mediante integración por celdas, como se mencionó en 2.4.2. Se trata de una técnica que, aunque efectiva y general, hizo que el enfoque fuera demasiado costoso computacionalmente, debido a las sucesivas integraciones en cada celda requerida para cada uno de los puntos de colocación de la superficie. Para abordar esto, se han desarrollado en la literatura varios métodos para llevar las integrales de dominio a la frontera y así eliminar la necesidad de las celdas internas. Uno de los métodos más populares hasta la fecha es el MRD (Dual Reciprocity Method (DRM)) introducido por Nardini y Brebbia [4, 5] hacia mediados de los 80. Su idea principal reside en que no es necesario una nueva solución particular en cada problema que se considera. Otro método conocido es la Técnica de Integrales Particulares, (*Particular Integrals Technique*) introducida por Ahmad y Banerjee [48], que también transforma integrales de dominio en integrales de contorno. Katsikadelis introdujo el Método de la Ecuación Análoga (Analog Equation Method) para abordar problemas de EDP no-lineales estáticos y problemas lineales dinámicos en mecánica del continuo, así como también sistemas [49].

En el MRD, las densidades desconocidas u de las correspondientes integrales de dominio se interpolan mediante un esquema de FBR. Así, aplicando la segunda identidad de Green a una integral de convolución de una solución particular y la solución fundamental, las integrales de dominio se convierten en integrales de frontera equivalentes. Muchos problemas han sido resueltos exitosamente con este método, por ejemplo, en [50]. Sin embargo, el enfoque del MRD tiene las mismas limitaciones computacionales que el esquema de integración por celdas, ya que se obtienen sistemas matriciales muy grandes y llenos. La aproximación del MRD es un enfoque alternativo para evaluar las integrales de dominio definiendo interpolaciones globales de dominio y solo evaluando integrales de frontera, pero sigue siendo un esquema de integración de dominios.

2.5.1 El MRD para la ecuación de Poisson

Consideremos la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \cup \Gamma, \quad (2.50)$$

donde la fuente $b = b(\mathbf{x})$ es un dato conocido. La representación integral de la solución de la ecuación (2.50) viene dada por (2.37) y para mantener el carácter de contorno del MEC es necesario convertir las integrales de dominio de la formulación en integrales de contorno.

Sabemos que la solución de la ecuación (2.50) puede ser expresada como la suma de una solución de la parte homogénea y una solución particular \hat{u} tal que

$$\nabla^2 \hat{u}(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \cup \Gamma. \quad (2.51)$$

Como es necesario proveer una solución particular \hat{u} y sus derivadas normales, tarea que puede ser no trivial, la idea del MRD consiste en usar una serie de soluciones particulares \hat{u}_j obtenidas de una aproximación de la fuente b . La cantidad de funciones aproximantes \hat{u}_j a usar es igual al número total de nodos del problema en estudio, que consisten en L nodos internos y N nodos sobre la frontera. Ver Figura 2.5.

En el MRD la fuente b toma la totalidad de los nodos y es aproximada de la forma

$$b \approx \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \varphi_j, \quad (2.52)$$

donde α_j son coeficientes a determinar y φ_j las funciones aproximantes. Las soluciones particulares \hat{u}_j son obtenidas a partir de la ecuación

$$\nabla^2 \hat{u}_j = \varphi_j, \quad j = 1, \dots, N + L. \quad (2.53)$$

Las funciones φ_j son independientes geoméricamente y al sustituir la ecuación (2.53) en (2.52) obtenemos

$$\nabla^2 u = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left(\nabla^2 \hat{u}_j \right), \quad (2.54)$$

es decir, la fuente b es sustituida por una combinación lineal de operadores laplacianos que operan sobre soluciones particulares.

La ecuación (2.37) se transforma entonces en

$$c(\boldsymbol{\xi})u(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\Omega} u^* b \, d\Omega_{\mathbf{y}} - \oint_{\Gamma} \left[u^* \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial u^*}{\partial n} \right] d\Gamma_{\mathbf{y}} \quad (2.55)$$

$$= \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left(\int_{\Omega} u^* \nabla^2 \hat{u}_j \right) d\Omega_{\mathbf{y}} - \oint_{\Gamma} \left[u^* \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial u^*}{\partial n} \right] d\Gamma_{\mathbf{y}}, \quad (2.56)$$

y aplicando la segunda identidad de Green se transforma en

$$\int_{\Omega} \left(u^* \nabla^2 \hat{u}_j - \hat{u}_j \nabla^2 u^* \right) d\Omega_{\mathbf{y}} = \oint_{\Gamma} \left(u^* \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial n} - \hat{u}_j \frac{\partial u^*}{\partial n} \right) d\Gamma_{\mathbf{y}}. \quad (2.57)$$

Usando la solución fundamental del laplaciano u^* como potencial auxiliar, se obtienen las integrales de frontera en términos de los coeficientes de interpolación α_j

$$c(\boldsymbol{\xi})u(\boldsymbol{\xi}) + \oint_{\Gamma} u^* q d\Gamma_{\mathbf{y}} - \oint_{\Gamma} u q^* d\Gamma_{\mathbf{y}} = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left(c(\boldsymbol{\xi})\hat{u}_j(\boldsymbol{\xi}) + \oint_{\Gamma} u^* \hat{q}_j d\Gamma_{\mathbf{y}} - \oint_{\Gamma} \hat{u}_j q^* d\Gamma_{\mathbf{y}} \right) \quad (2.58)$$

donde $q = \frac{\partial u}{\partial n}$, $q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n}$ y $\hat{q}_j = \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial n}$. Notemos que ahora solo contamos con términos con integrales de contorno. Esta técnica se conoce con el nombre de **MRD**.

Tomando $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_i \in \Omega \cup \Gamma$, la forma discretizada de la (2.58) es

$$c_i u_i + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} u^* q d\Gamma_{\mathbf{y}} - \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} u q^* d\Gamma_{\mathbf{y}} = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left(c_i \hat{u}_{ij} + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} u^* \hat{q}_j d\Gamma_{\mathbf{y}} - \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} \hat{u}_j q^* d\Gamma_{\mathbf{y}} \right) \quad (2.59)$$

donde \hat{u}_{ij} es el valor de la solución particular \hat{u}_j en $\boldsymbol{\xi}$, esto es $\hat{u}_{ij} = \hat{u}_j(\boldsymbol{\xi}_i)$.

Llamando H_{ik} y G_{ik} a los coeficientes de influencia provenientes de las integraciones de u^* y q^* en los elementos de contorno y de las funciones \hat{u}_j y \hat{q}_j en (2.59), tenemos

$$c_i u_i + \sum_{k=1}^N G_{ik} q_k - \sum_{k=1}^N \hat{H}_{ik} u_k = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left(c_i \hat{u}_{ij} + \sum_{k=1}^N G_{ik} \hat{q}_k - \sum_{k=1}^N \hat{H}_{ik} \hat{u}_k \right). \quad (2.60)$$

Matricialmente, aplicando la ecuación (2.60) en los puntos de colocación $\boldsymbol{\xi}_i$ con $i = 1, \dots, N$ sobre la frontera Γ , resulta el **SEL** $N \times N$ de la forma

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left(\mathbf{H}\mathbf{u}_j - \mathbf{G}\mathbf{q}_j \right), \quad (2.61)$$

donde los coeficientes c_i fueron incorporados en la diagonal de \mathbf{H} . Para el caso de elementos constantes, los elementos de las matrices \mathbf{H} y \mathbf{G} están dadas por las ecuaciones (2.41a) y (2.41b). Considerando \mathbf{u}_j y \mathbf{q}_j como columnas de las matrices \mathbf{U} y \mathbf{Q} , reescribimos (2.61)

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = (\mathbf{H}\mathbf{U} - \mathbf{G}\mathbf{Q})\boldsymbol{\alpha}. \quad (2.62)$$

Esta ecuación es la base del desarrollo del MRD.

En la Figura 2.7 se puede observar una representación esquemática de las matrices en el MRD. Este es un método de frontera en el sentido de que sólo se realizan discretizaciones de frontera, mientras que los nodos interiores sólo son necesarios cuando se necesita evaluar la solución u en esos puntos.

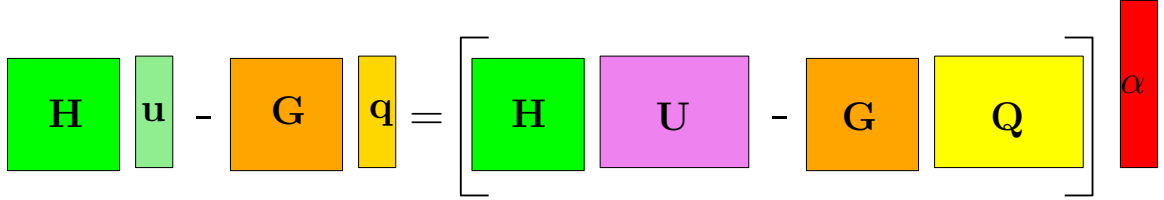


Figura 2.7: Esquema matricial en el MRD de la ecuación (2.62).

Como en el caso de la ecuación de Poisson, la fuente b es conocida, entonces podemos calcular el vector $\boldsymbol{\alpha}$ haciendo la colocación de (2.52) en los $N + L$ nodos. Obtenemos el SEL

$$\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b}, \quad (2.63)$$

donde $\boldsymbol{\Phi} = [\varphi_j(\mathbf{x}_i)]$ para $i = 1, \dots, N + L$ es la matriz de interpolación y $\mathbf{b} = [b(\mathbf{x}_i)]$.

Posteriormente, aplicando las condiciones de frontera (2.36b) y (2.36c) a la expresión (2.62), esta se transforma algebraicamente en otro SEL a resolver

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{w}, \quad (2.64)$$

donde el vector \mathbf{v} contiene N valores de frontera de u y q .

Una vez conocidos los valores nodales de u y q sobre la frontera, calculamos los valores en cualquier nodo interior del dominio usando la ecuación (2.60) con $c_i = 1$, donde las matrices $[\hat{H}_{ik}]$ y $[G_{ik}]$ son evaluadas en los puntos interiores donde se desea conocer la solución. Matricialmente,

$$\hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{I}\hat{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{G}}\mathbf{q} = (\hat{\mathbf{H}}\mathbf{U} - \hat{\mathbf{G}}\mathbf{Q})\boldsymbol{\alpha} - \hat{\mathbf{U}}\boldsymbol{\alpha}, \quad (2.65)$$

donde el símbolo circunflejo refiere a los nodos interiores, $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{L \times L}$ es la matriz identidad, $\hat{\mathbf{H}}, \hat{\mathbf{G}} \in \mathbb{R}^{L \times N}$, $\mathbf{U}, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{N \times (N+L)}$ y $\hat{\mathbf{U}} \in \mathbb{R}^{L \times (N+L)}$.

2.5.2 Tipos de interpolantes: las Funciones de Base Radial

Una parte del éxito del MRD depende de la elección de las funciones interpolantes $\{\varphi_j\}$ que aproximen la fuente b , como se muestra en la ecuación (2.52). Las funciones tradicionales fueron en su mayoría funciones de coordenadas (polinómicas y trigonométricas), que son costosas computacionalmente cuando se tratan problemas de dimensión alta debido a su dependencia lineal en geometrías complejas. En cambio, las FBR se construyen en términos de una variable unidimensional, la distancia r , independientemente de la dimensión del problema y tienen ventaja sobre las funciones de base polinómicas tradicionales.

La metodología de usar FBR como funciones base para interpolar datos dispersos fue introducida por Hardy para interpolar superficies geodésicas en 2D [51] y luego los trabajos de Golberg [52] y Partridge [53] introdujeron estas funciones al MEC.

Una función $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ se dice función de base radial o radial si existe una función $\phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi(\mathbf{x}) = \phi(r), \quad r = \|\mathbf{x}\|, \quad (2.66)$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma euclídeana u otra norma en \mathbb{R}^d . En particular, cuando la función radial depende de la distancia a un centro $\mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^d$, llamado centro de la FBR, notamos

$$\varphi_j(\mathbf{x}) = \phi(r), \quad r = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|. \quad (2.67)$$

Las ventajas de la interpolación con FBR reside en que, además de la flexibilidad respecto a la geometría del dominio del problema, son fáciles de implementar computacionalmente en d -dimensiones, tienen exactitud espectral, convergencia exponencial y generan soluciones continuamente diferenciables. Muchas de estas funciones han sido reportadas en la literatura desde su aparición, como en [1], [2] y [3].

Algunas FBR dependen de un parámetro $\varepsilon > 0$ conocido como parámetro de forma. La experiencia ha demostrado que, cuando este parámetro tiende a cero, la convergencia mejora hasta cierto valor donde se desestabiliza numéricamente debido al mal condicionamiento del problema. Varios métodos han sido desarrollados para encontrar el parámetro óptimo. Otros métodos logran estabilizar el error de la interpolación. Desarrollaremos esto en el Cap. 4.

2.5.3 Soluciones particulares de FBR para distintos operadores

Otra parte del éxito del MEC para resolver EDP depende de la habilidad de encontrar soluciones particulares a distintos operadores diferenciales en una o varias dimensiones, como el caso de la ecuación 2.53 para el operador laplaciano. Esto es, hallar una expresión de una solución particular fijando una función en el lado derecho.

Las correspondientes soluciones particulares de las FBR para el MEC son conocidas en forma cerrada en varios casos y también son fáciles de implementar computacionalmente. Una revisión para el Laplaciano ∇^2 , el operador biarmónico ∇^4 , operadores tipo Helmholtz $\nabla^2 \pm \lambda$ y otros puede hallarse en [54, 55], donde se estudian fuentes FBR de tipo spline de capa delgada (TPS) (Thin Polyharmonic Spline) y también de tipo monomiales r^k para el caso 2D y 3D.

La Tabla 2.1 muestra algunas soluciones particulares para el caso 2D para algunas FBR que dependen y no dependen del parámetro de forma ε . Es sabido que algunas FBR deben usarse en la interpolación con un polinomio para asegurar la convergencia [1], por tanto, las soluciones particulares a estos polinomios deben ser incorporadas. Algunas soluciones particulares FBR de tipo multicuádrica (MQ) (multiquadric) pueden encontrarse en [56] junto a las soluciones de algunos polinomios.

FBR no dependiente de ε	$\phi(r)$	Solución particular \hat{u}
Polinómica	$1 + r + r^2 + \dots + r^k$	$\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{9}r^3 + \dots + \frac{1}{(2+k)^2}r^{k+2}$
Spline de capa delgada	$r^{2k} \log(r)$	$\frac{2r^{2k+2}}{(2k+2)^3} [(k+1) \log(r) - 1]$
FBR dependiente de ε	$\phi(r, \varepsilon)$	Solución particular \hat{u}
Gaussiana	$e^{-(\varepsilon r)^2}$	Consultar [57]
Multicuádrica	$\sqrt{1 + (\varepsilon r)^2}$	$\frac{1}{9}\phi^3(r) + \frac{1}{3}\phi(r)\varepsilon^2 - \frac{\varepsilon^3}{3} \ln(\varepsilon + \phi(r))$

Tabla 2.1: Soluciones particulares para algunas FBRs donde $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|$ es la distancia al centro de la FBR y ε es el parámetro de forma.

En esta tesis usaremos interpolaciones locales con [FBR](#) Gaussianas $\phi(r) = e^{-(\varepsilon r)^2}$. Las soluciones particulares en forma cerrada para el operador laplaciano usando las Gaussianas en el [MEC](#) no estaban disponibles debido a la dificultad de integración de estas. Los desarrollos de herramientas computacionales simbólicas o numéricas como Matlab permitieron sortear esta dificultad. Lamichhane y Chen en [\[57\]](#) establecieron formas cerradas explícitas de soluciones particulares para el operador Laplaciano con lado derecho Gaussianas en [2D](#)

$$\nabla^2 \hat{u} = e^{-(\varepsilon r)^2}, \quad \nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right), \quad (2.68)$$

haciendo uso de funciones especiales como la función integral exponencial $Ei(r)$ y la función error $erf(r)$.

Capítulo 3

EL MÉTODO INTEGRAL LOCAL DE FRONTERA Y DOMINIO

En este capítulo presentamos algunos antecedentes de descomposición en multidominios de métodos locales integrales entre los cuales desarrollamos el Método de Reciprocidad Dual - Regular Local. Este método integral de descomposición de dominio tiene dos ventajas: por un lado, las condiciones de contorno son impuestas al nivel de la interpolante local con [FBR](#) y, por otro, las integrales calculadas son siempre regulares. También desarrollamos el Método Integral Local de Frontera y Dominio que, además de las ventajas anteriores, evita el uso del [MRD](#).

El capítulo consta de tres secciones. En la primera, describimos antecedentes de descomposición en multidominios de métodos locales integrales. En la segunda, desarrollamos el [MRD-RL](#) y en la tercera, el [MILFD](#).

3.1 Antecedentes de descomposición en multidominios de métodos locales integrales

3.1.1 Desarrollos del MEC en multidominios

Es sabido que el MEC tradicional corre en desventaja cuando es comparado con esquemas clásicos de dominios como el MDF o el MEF, por eso cuando se trabaja con el MEC para PVC sobre grandes dominios, con o sin solución fundamental en su forma cerrada, se utiliza con frecuencia la técnica de descomposición del dominio en la que el dominio original $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ abierto y conexo, se subdivide en subdominios abiertos y conexos Ω_i de modo que

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^N \bar{\Omega}_i, \quad (3.1)$$

donde $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ para $i \neq j$ como se muestra en la Figura 3.1. Estrictamente, tomamos clausura en la ecuación anterior para garantizar la igualdad. Sin embargo, la representación de Ω como unión en (3.1) solo debe incluir las fronteras Γ_i de los subdominios Ω_i que sean interiores al dominio dado que a estos los consideramos abiertos y conexos (líneas rojas en la Figura 3.1). En este caso Γ_i define el contorno para calcular las integrales de línea (líneas de trazo azul en la Figura 3.1).

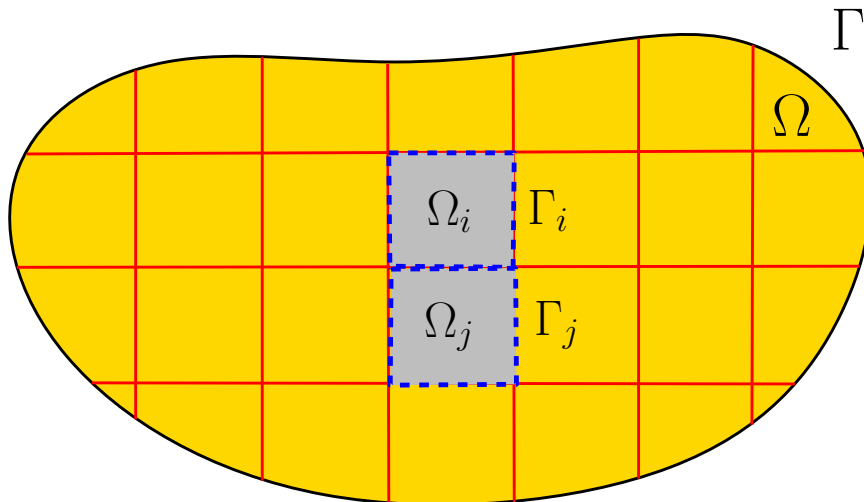


Figura 3.1: Dominio global Ω en 2D subdividido en subdominios Ω_i .

En cada uno de estos subdominios se aplican las fórmulas de representación integral y en los puntos de contacto (conocidas como interfaces) de los subdominios adyacentes se imponen las condiciones comunes (conocidas como condiciones de macheo), para lo cual es necesario definir computacionalmente conectividades de los subdominios y los elementos.

Una de las ventajas en el MEC en multidominios consiste en que la fórmula de representación integral de la EDP basada en la segunda identidad de Green es una representación integral exacta de la EDP original en cada subregión de integración. Otra de las ventajas reside en que las matrices que aparecen en la formulación de un único dominio Ω son matrices llenas, mientras que en el ensamblado de las matrices locales la formulación en subdominios Ω_i genera matrices bandas en bloques y ralas (en inglés sparse), con un bloque para cada subregión de integración y con superposición entre bloques cuando sus respectivos subdominios tienen una interfaz común (caso de Ω_i y Ω_j en la Figura 3.1).

Uno de estos desarrollos para un gran número de subdominios fue realizado por Popov y Power en [6, 7], donde desarrollaron el Método de Reciprocidad Dual-Multidominio (MRD-MD) (Dual Reciprocity Method - Multi Domain) cuyo enfoque está basado en descomponer en una gran cantidad de subdominios utilizando, a la vez, el MRD para evaluar las integrales en cada subdominio Ω_i , reemplazando la integración celular. Esta técnica mostró mejor convergencia y propiedades de aproximación que la aplicación del MRD global sobre el dominio Ω . En este caso, la ecuación base del desarrollo del MRD (2.62) queda definida en cada subdominio Ω_i como

$$\mathbf{H}_i \mathbf{u} - \mathbf{G}_i \mathbf{q} = (\mathbf{H}_i \mathbf{U} - \mathbf{G}_i \mathbf{Q}) \boldsymbol{\alpha}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.2)$$

Sin embargo, uno de las desventajas del MRD es que requiere una serie de multiplicaciones de matrices llenas y, en el caso de problemas no-lineales, un gran número de nodos para la interpolación del término no-homogéneo. Florez, Power y Chejne en [58] y Florez y Power en [59] mejoraron la performance del MRD para la solución numérica de las ecuaciones de Navier-Stokes con el MEC a través de otra técnica de descomposición en multidominios. Siguiendo esos resultados, el comportamiento del MRD-MD fue investigado por Portapila y Power [8, 9], quienes implementaron FBR cuadráticas en los elementos de la frontera.

3.1.2 Formulaciones locales del MEC

El aspecto más atractivo del enfoque del MEC en multidominios es el uso de la representación integral exacta de la ecuación diferencial, sin embargo, la eficiencia numérica de este tipo de enfoques todavía compite con esquemas numéricos de dominio clásico Ω . Por esta razón, se han realizado importantes esfuerzos para mejorar este tipo de esquemas tratándolas como MEC locales.

Estas variantes son atractivas para incrementar la eficiencia de los esquemas locales del MEC dado que la fórmula de representación integral es aplicada internamente en cada subdominio Ω_i que está inmerso en un estencil de interpolación Θ_i , el cual está formado por puntos de la discretización del dominio Ω y de su frontera Γ (ver esquema de la discretización en la Figura 2.5 del capítulo anterior).

La continuidad del campo incógnita u se satisface por la continuidad de las funciones interpolantes evitando la conectividad local entre subregiones o elementos necesarios para forzar el macheo entre estos. Pueden usarse distintos tipos de interpolaciones, siendo las más conocidas en la literatura científica la aproximación polinomial del Método de Mínimos Cuadrados (MMC) o la interpolación directa con FBR.

Cuando se compara las formulaciones del MEC local con variantes del MEC en multidominios, como el MRD-MD, una de las ventajas es que los integrandos de la representación integral son regulares, dado que la colocación de los nodos es elegida en el interior del subdominio de integración Ω_i y no en su frontera Γ_i . Otro problema del MRD es que se obtienen sistemas algebraicos provenientes de multiplicaciones de matrices llenas. Cuando se consideran pocos puntos internos, el tiempo computacional es, en general, menor al necesario para los esquemas de integración por celdas, pero sigue siendo costoso en comparación con aproximaciones de dominio. Además, para mejorar la exactitud es necesario incrementar el número de nodos internos en el dominio, pero mientras este aumenta la multiplicación del conjunto de matrices llenas requiere un esfuerzo computacional mayor. Por otro lado, en problemas complejos este método se ve limitado a valores chicos del término no homogéneo o del número de Péclet como en el caso de la ecuación de convección-difusión.

En el [MILEF](#) (Local Boundary Integral Element Methods (LBEM o LBIEM)) presentado por Atluri y Zhu en [\[10\]](#) y Zhu, Zhang y Atluri en [\[11\]](#), y posteriormente en sus aplicaciones en [\[60, 61\]](#), la solución sobre el dominio Ω es cubierta con estenciles locales de interpolación Θ_i , donde una interpolación directa de la incógnita se utiliza para aproximar la solución, y las condiciones de frontera del problema son impuestas en la formulación integral local. En este tipo de algoritmo, los dominios de integración Ω_i son fuertemente solapados y definidos en cada uno de los estenciles de interpolación Θ_i , que también resultan solapados. Los esquemas de interpolación local del [MILEF](#) reconocidos en la literatura son el [MMC](#) y las [FBR](#).

Otra variante del [MEC](#) local es el [MRD-RL](#) presentado por Caruso, Portapila y Power en [\[15\]](#). Este es un método local integral basado en el [MRD](#) que considera solamente integrales regulares. Además, en este método las condiciones de frontera son impuestas a la interpolación local con [FBR](#) y no existe la necesidad de que las subregiones de integración estén basadas en un mallado. Desarrollaremos este método en la siguiente sección [3.2](#).

3.2 El Método de Reciprocidad Dual-Regular Local

3.2.1 Introducción

En esta sección introducimos como antecedente reciente la formulación propuesta en [\[15, 56\]](#), en la cual los estenciles locales de interpolación Θ_i se superponen entre sí y las subregiones de integración Ω_i se solapan las unas de las otras dentro del dominio del problema Ω de tal manera que lo cubren completamente. En dichos trabajos solo fueron considerados subregiones rectangulares en [1D](#) y [2D](#) con un número variable de puntos internos dentro de cada subregión de integración, cada uno correspondiente a un punto de colocación de la fórmula de representación integral local. En cada uno de los estenciles donde la interpolación con [FBR](#) es aplicada, se incluyó una única subregión de integración que encierra al menos un punto de interpolación (también conocido como punto de colocación) rodeado de puntos de colocación de subregiones de integración vecinas.

En comparación con otras formulaciones del [MEC](#) local previamente reportadas, en el

[MRD-RL](#) la ecuación integral es aplicada a uno o más puntos de colocación siempre dentro de la subregión de integración y no se consideran puntos sobre el contorno de las subregiones de integración. La aproximación se dice regular puesto que las ecuaciones integrales se aplican solamente a puntos internos del dominio y también se dice local, ya que la incógnita u es interpolada localmente. Para convertir las integrales de dominio en integrales de línea (o contorno) se recurrió al [MRD](#) visto anteriormente.

Este esquema numérico es un tipo de método independiente de un mallado sin condiciones comunes impuestas en los contornos de las subregiones de integración, lo cual, de este modo, evita algoritmos de conectividad. Al igual que la aproximación propuesta por Popov y Bui en [62], esas condiciones comunes son impuestas a través de la interpolación local en función de las [FBR](#) que se extienden a los puntos comunes que van definiendo los estéciles vecinos, en función de recorrer las subregiones de integración. Por ende, no es necesario aplicar condiciones comunes en las interfaces de las subregiones de integración, y así se simplifica sustancialmente la implementación numérica. Las condiciones de contorno del problema son directamente impuestas en los estéciles de interpolación que tienen bordes comunes con la frontera Ω del problema en estudio y no sobre las integrales de superficie, como se hace en las formulaciones del [MEC](#). Esto último también simplifica la programación.

Una vez realizada la discretización del dominio Ω del problema, esta es cubierta por un conjunto de N estéciles de interpolación Θ_i superpuestos, que coinciden con el número de subregiones de integración Ω_i . El número total de puntos internos por esténcil es una cantidad constante n , y cada uno tiene un punto de colocación por subdominio. Cuando el esténcil está totalmente dentro del dominio del problema, la función incógnita u se aproxima con [FBR](#) como las [MQ](#), [IMQ](#) y [TPS](#).

3.2.2 Desarrollo

Consideremos el siguiente [PVC](#) sobre un dominio abierto y acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \mathcal{L}[u](\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathcal{B}[u](\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma, \end{cases} \quad (3.3a)$$

$$(3.3b)$$

donde $\mathcal{L}[\cdot]$ es un operador diferencial elíptico y $\mathcal{B}[\cdot]$ un operador de frontera con diferentes tipos de condiciones vistas en la sección 2.1 (Dirichlet, Neumann, Robin o mixtas). Asumimos que la ecuación en derivadas parciales (3.3a) puede reescribirse del siguiente modo

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x})), \quad (3.4)$$

como ecuación de Poisson con lado derecho b , donde $u(\mathbf{x})$ es el potencial incógnita en el punto $\mathbf{x} \in \Omega$ y ∇ el operador nabla.

La fórmula de representación integral de la EDP de (3.4) sobre Γ y Ω se obtiene como en el Cap. 1 a partir de la solución fundamental de Laplace y la segunda identidad de Green

$$c(\boldsymbol{\xi})u(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\Gamma} q^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) u(\mathbf{x}) d\Gamma_{\mathbf{x}} - \int_{\Gamma} u^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) q(\mathbf{x}) d\Gamma_{\mathbf{x}} + \int_{\Omega} b u^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\Omega_{\mathbf{x}}, \quad (3.5)$$

donde $\boldsymbol{\xi}$ es el punto de colocación, $q(\mathbf{x}) = \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n}$ la derivada normal del campo incógnita, $u^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ la solución fundamental del Laplaciano y $q^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial u^*}{\partial n}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ la derivada normal de la solución fundamental. En nuestro caso 2D, $u^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ viene dada por

$$u^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|} \right), \quad (3.6)$$

donde $\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|$ es la distancia entre los puntos de integración \mathbf{x} y de colocación $\boldsymbol{\xi}$. La constante $c(\boldsymbol{\xi}) \in [0, 1]$, siendo 1 si el punto $\boldsymbol{\xi}$ es interior a Ω , $\frac{1}{2}$ si el punto $\boldsymbol{\xi}$ pertenece a una parte suave de $\Gamma = \partial\Omega$ y 0 si $\boldsymbol{\xi}$ es exterior.

La fórmula (3.5) es base de cualquier esquema del MEC local donde el contorno de integración Γ y el dominio Ω son elegidos como subregiones de integración Ω_i con frontera Γ_i , ambas insertas dentro de un estencil de interpolación Θ_i , los cuales se hayan fuertemente solapados entre sí. En la Figura 3.2 se tiene una representación esquemática de la distribución de estenciles locales Θ_i y subregiones de integración Ω_i para MEC locales sin malla. En la misma se puede observar el solapamiento entre los estenciles Ω_i y Ω_j que tienen nodos en común. Es importante remarcar que en esta tesis no se utilizan técnicas para considerar nodos exteriores al dominio sino que los nodos que conforman un estencil son interiores o bien parte de la frontera. A su vez los nodos no tienen que ser necesariamente interiores

a la subregión de integración respecto al centro considerado, así como no es necesario que coincida la cantidad de nodos de cada estencil ni tampoco tiene que coincidir el radio de cada subregión de integración circular como se muestra en la figura.

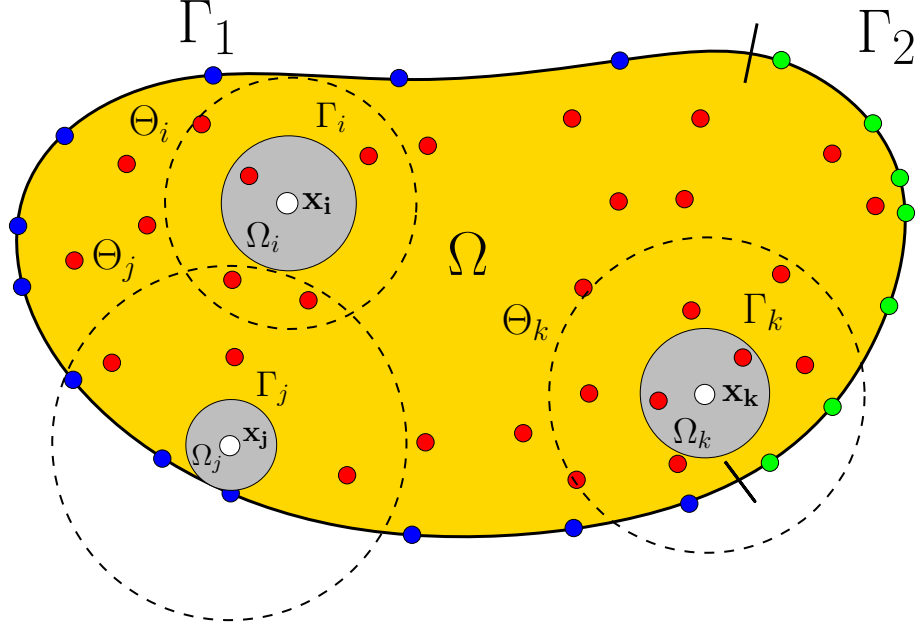


Figura 3.2: Representación esquemática de los estenciles locales Θ_i con frontera Γ_i y de las subregiones de integración Ω_i para MEC locales sin malla.

El campo $u(\mathbf{x})$ es aproximado por una interpolación local con **FBR** usando como centros los nodos de la discretización correspondientes a los estenciles interiores del dominio. Si dicho nodo está cerca de la frontera del dominio global, se utilizarán para la interpolación con **FBR** algunos nodos de la frontera como centros de estas.

En caso de que el estencil sea interior, el conjunto $\{(\mathbf{x}_j, u(\mathbf{x}_j))\}_{j=1}^{n_i}$ estará formado por los nodos interiores \mathbf{x}_j y sus correspondientes valores nodales desconocidos $u(\mathbf{x}_j)$ para $j = 1, \dots, n_i$ (puntos rojos del estencil Θ_i en la Figura 3.2).

En caso de que el estencil esté próximo a la frontera, el conjunto $\{(\mathbf{x}_j, g(\mathbf{x}_j))\}_{j=n_i+1}^n$ tendrá los nodos \mathbf{x}_j y data de frontera $g(\mathbf{x}_j)$ conocida para $j = n_i+1, \dots, n$ siendo $n = n_i+n_b$ (puntos rojos y azules del estencil Θ_j , y puntos rojos, azules y verdes del estencil Θ_k en la Figura 3.2). Desarrollaremos las interpolaciones locales con **FBR** en el siguiente punto.

3.2.3 Interpolaciones locales con FBR

Consideremos el siguiente problema de interpolación: dada la data $\{(\mathbf{x}_j, u_j)\}_{j=1}^n$ donde $\mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^d$ y $u_j \in \mathbb{R}$, buscamos P_u continua tal que $P_u(\mathbf{x}_j) = u_j$ para $j = 1, \dots, n$. Cuando en las formulaciones de los MEC y sus variantes se interpola localmente con las FBR definidas en la sección 2.5.2, se tiene una interpolante que aproxima al campo incógnita u de la forma

$$u(\mathbf{x}) \approx P_u(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j(\mathbf{x}), \quad (3.7)$$

donde $\varphi_j(\mathbf{x}) = \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|)$ es una FBR con centros \mathbf{x}_j y $\|\cdot\|$ es la norma euclídea.

Si hacemos una colocación en los valores datos $u(\mathbf{x}_j) = u_j$, obtenemos los coeficientes de la expansión α_j resolviendo el SEL

$$\Phi \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{u}, \quad (3.8)$$

siendo $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matriz de interpolación, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ el vector de coeficientes y $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ el vector del lado derecho. Este sistema tendrá la forma

$$\begin{bmatrix} \phi(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1\|) & \phi(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|) & \dots & \phi(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_n\|) \\ \phi(\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|) & \phi(\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_2\|) & \dots & \phi(\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_n\|) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_1\|) & \phi(\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_2\|) & \dots & \phi(\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_n\|) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

El problema de interpolación anterior está bien planteado si la solución existe y es única, lo que equivale a decir que la matriz Φ es inversible. Mairhuber [63] y Curtis [64] mostraron que, si se fijan las funciones base, el problema de interpolación anterior estaba bien planteado sólo en el caso de que los nodos sean distintos en \mathbb{R}^d con $d = 1$. Pero cuando la dimensión $d > 1$ en dicho problema no puede garantizarse la inversibilidad de la matriz de interpolación (y, por ende, existencia y unicidad) para cualquier caso de nodos multidimensionales distribuidos en forma dispersa o uniforme.

Para abordar lo anterior definieron los conjuntos m -unisolventes, es decir, conjuntos de la forma $\chi = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\} \subset \mathbb{R}^d$ donde el único polinomio de grado menor o igual a m que interpola datos nulos en χ es el polinomio nulo. Esta definición garantiza una única solución para el problema de interpolación por un polinomio de grado m . Llamaremos Π_m^d al espacio vectorial de todos los polinomios de grado menor o igual que m en d variables.

FBR estrictamente definidas positivas

A su vez es necesario tener una caracterización de la clase de funciones base $\{\varphi_j\}$ para generar una matriz inversible y que exista única solución del sistema (3.9) para cualquier conjunto de nodos distintos χ mencionado anteriormente. Un tratamiento de los resultados teóricos más importantes para la interpolación con datos dispersos puede consultarse en [1, 21] a partir de la caracterización de funciones estrictamente definidas positivas y condicionalmente definidas positivas.

Se dice que una función continua a valores complejos $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ es definida positiva en su dominio \mathbb{R}^d si y solo si la forma cuadrática

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_j \overline{c_k} \varphi(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k) \geq 0 \quad (3.10)$$

para cualquier conjunto de n nodos distintos $\chi = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\} \subset \mathbb{R}^d$ y $\mathbf{c} = [c_1, \dots, c_n] \in \mathbb{C}^d$.

A su vez la función se dice estrictamente definida positiva en \mathbb{R}^d si la forma cuadrática anterior (3.10) es cero sólo cuando $\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Debido a que las funciones (estrictamente) definidas positivas satisfacen como propiedad que $\varphi(-\mathbf{x}) = \overline{\varphi(\mathbf{x})}$, en el caso de que la función φ sea a valores reales como trataremos en esta tesis, es necesario pedir que φ sea una función par además de la no negatividad de la forma cuadrática. También es posible caracterizar las funciones estrictamente definidas positivas φ como toda función continua del espacio de Lebesgue $L_1(\mathbb{R}^d)$, acotada y cuya transformada de Fourier sea no-negativa y no idénticamente nula.

Las **FBR** Gaussianas (Gaussians (GA)) son de la forma

$$\varphi(\mathbf{x}) = e^{-\varepsilon^2 \|\mathbf{x}\|^2}, \quad \varepsilon > 0, \quad (3.11)$$

y las **FBR** Multicuádricas Inversas Generalizadas (Generalized Inverse Multicadrics (IMQ)) son de la forma

$$\varphi(\mathbf{x}) = \left(1 + \varepsilon^2 \|\mathbf{x}\|^2\right)^{-\beta}, \quad \beta > \frac{d}{2}, \quad \varepsilon > 0. \quad (3.12)$$

Estas **FBR** son infinitamente diferenciables, y a través de sus respectivas transformadas de Fourier se puede ver que son estrictamente definidas positivas en \mathbb{R}^d para cualquier dimensión d . La **FBR** IMQ introducida por Hardy en [51] corresponde a $\beta = \frac{1}{2}$. Fornberg y Wright trabajaron con el caso $\beta = 1$ en [25] popularizándolas como multicuádricas inversas.

En la Figura 3.3 se muestran la **FBR** GA y la **FBR** IMQ en 2D para los casos $\varepsilon = 1$ y $\beta = \frac{1}{2}$ sobre un círculo de radio $R = 3$.

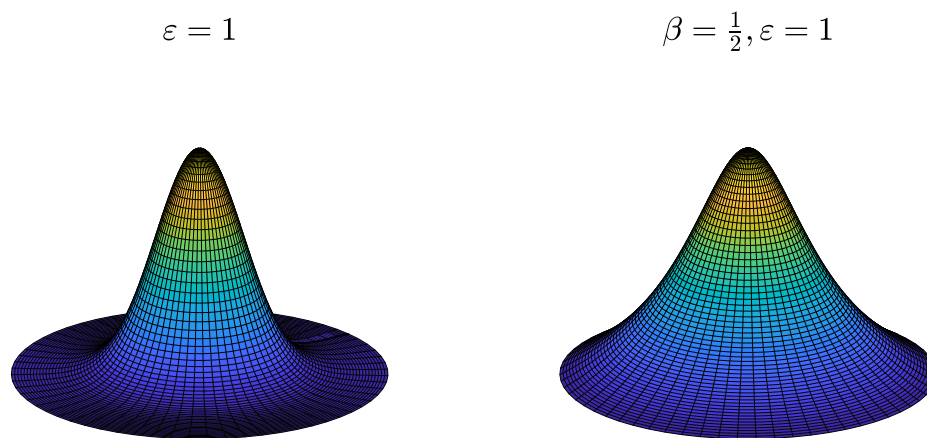


Figura 3.3: **FBR** Gaussiana con $\varepsilon = 1$ (izq.) y **FBR** IMQ con $\varepsilon = 1$ y $\beta = \frac{1}{2}$ (der.) sobre un círculo de radio $R = 3$.

Es posible probar que tanto las Gaussianas como las Multicuádricas Inversas y otras **FBR** que sean estrictamente definidas positivas generan matrices de interpolación definidas positivas que aseguran la existencia y unicidad del sistema (3.9).

Una matriz real y simétrica \mathbf{A} se dice semidefinida positiva si su forma cuadrática asociada es no-negativa, es decir

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_j c_k A_{jk} \geq 0 \quad (3.13)$$

para cualquier $\mathbf{c} = [c_1, \dots, c_n]^T \in \mathbb{R}^n$. Si la forma cuadrática anterior (3.13) es cero sólo en el caso que $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ entonces la matriz \mathbf{A} se dice definida positiva. Una propiedad importante de las matrices definidas positivas es que todos sus autovalores son positivos y por tanto es una matriz inversible.

A su vez, una matriz real y simétrica \mathbf{A} se dice condicionalmente semidefinida positiva de orden uno si su forma cuadrática satisface (3.13) para cualquier $\mathbf{c} = [c_1, \dots, c_n]^T \in \mathbb{R}^n$ que cumple

$$\sum_{j=1}^n c_j = 0. \quad (3.14)$$

Si $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ implica la desigualdad estricta en (3.13) entonces la matriz \mathbf{A} se dice condicionalmente definida positiva de orden uno. Se puede pensar esta última matriz como una matriz definida positiva en el espacio de vectores $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ tal que vale la condición (3.14). Es decir, es perpendicular a las funciones constantes.

Es sencillo demostrar que si una matriz real simétrica $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es condicionalmente definida positiva de orden uno y $\mathbf{P} = [1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^n$, entonces el SEL

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

tiene única solución.

Las FBR estrictamente definidas positivas como las GA y las IMQ mostradas anteriormente generan matrices de interpolación definidas positivas que pueden ser vistas como matrices condicionalmente definidas positivas de orden uno. Por tanto puede asegurarse la invertibilidad de esta matriz cuando es aumentada como en (3.15) garantizando la única solución del SEL. Para interpolaciones de FBR con polinomios de mayor orden es necesario introducir el concepto de funciones condicionalmente definidas positivas de orden m .

FBR estrictamente condicionalmente definidas positivas de orden m

Muchas FBR han sido consideradas en la literatura como interpolantes locales en los métodos numéricos integrales. En [15, 16] se utilizaron las MQ1, MQ2 y TPS aumentadas con sus correspondientes polinomios. Se describen a continuación algunas de estas FBR usadas en la interpolación local del MRD-RL. Estas funciones se clasifican como condicionalmente definidas positivas de orden m .

Se dice que una función continua a valores complejos $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ es condicionalmente definida positiva de orden m en su dominio \mathbb{R}^d si y solo si la forma cuadrática

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_j \bar{c}_k \varphi(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k) \geq 0 \quad (3.16)$$

para cualquier conjunto de n nodos distintos $\chi = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\} \subset \mathbb{R}^d$ y $\mathbf{c} = [c_1, \dots, c_n]^T \in \mathbb{C}^d$ que satisfacen

$$\sum_{j=1}^n c_j p(\mathbf{x}_j) = 0 \quad (3.17)$$

para cualquier polinomio complejo p de grado a lo sumo $m - 1$. La función φ se dice estrictamente condicionalmente definida positiva de orden m si la forma cuadrática (3.16) es cero sólo cuando $\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Como mencionamos en la subsección anterior, al restringirnos a funciones a valores reales que son las que nos interesan en esta tesis, es necesario considerar que φ es par.

Las FBR Potencias Radiales (Radial Power (RP)) vienen definidas de la forma

$$\varphi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^\beta, \quad \beta \in \mathbb{R}^+ \setminus 2\mathbb{N}, \quad (3.18)$$

las FBR Multicuádricas (Multicubic (MQ)) vienen definidas como

$$\varphi(\mathbf{x}) = \left(1 + \varepsilon^2 \|\mathbf{x}\|^2\right)^\beta, \quad \beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0, \quad \varepsilon > 0 \quad (3.19)$$

y las FBR Spline de capa delgada (Thin Plate Spline (TPS)) se definen como

$$\varphi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^{2\beta} \log \|\mathbf{x}\|, \quad \beta \in \mathbb{N}. \quad (3.20)$$

Asimismo, mediante sus respectivas transformadas de Fourier, puede verse que las **potencia radial (PR)** $\varphi_0(\mathbf{x}) = (-1)^{\lceil \beta/2 \rceil} \varphi(\mathbf{x})$, $\beta \in \mathbb{R}^+ \setminus 2\mathbb{N}$, que las **FBR MQ** $\varphi_0(\mathbf{x}) = (-1)^{\lceil \beta \rceil} \varphi(\mathbf{x})$, $\beta \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ y las **FBR TPS** $\varphi_0(\mathbf{x}) = (-1)^{\beta+1} \varphi(\mathbf{x})$, $\beta \in \mathbb{N}$ son estrictamente condicionalmente definidas positivas de orden $m = \lceil \beta \rceil$ para las RP, $m = \lceil \beta/2 \rceil$ para las MQ y $m = \beta + 1$ para las TPS respectivamente.

En la Figura 3.4 se pueden observar estas funciones para los casos MQ y TPS $\varepsilon = 1$ y $\beta = 1$ (der.) sobre una circunferencia de radio $R = 1$.

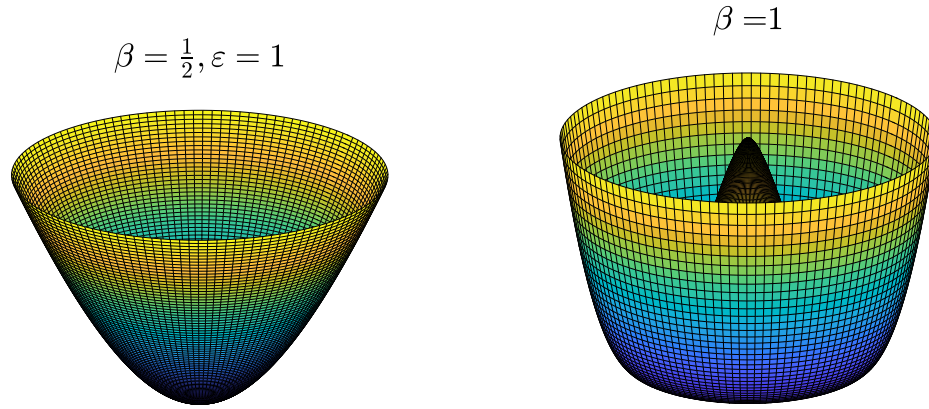


Figura 3.4: FBR MQ con $\varepsilon = 1$ (izq.) y FBR TPS con $\varepsilon = 1$ y $\beta = 1$ (der.) sobre un disco de radio $R = 1$.

Las **FBR** estrictamente condicionalmente definidas positivas de orden m requieren un término adicional polinomios de grado a lo sumo $(m - 1)$ con el fin de garantizar que la matriz de colocación sea inversible [1]. En este caso, una interpolante puede plantearse como

$$u(\mathbf{x}) \approx P_u(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|) + \sum_{j=1}^{n_p} \alpha'_j p_j(\mathbf{x}), \quad (3.21)$$

donde p_1, \dots, p_{n_p} forman una base del espacio Π_{m-1}^d de los polinomios en la variable $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ de grado $gr(p) \leq m - 1$ y cuya dimensión es $n_p = \binom{m-1+d}{m-1}$. Entonces, forzando las n condiciones de interpolación

$$P_u(\mathbf{x}_j) = u_j \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.22)$$

es necesario entonces forzar las n_p condiciones

$$\sum_{j=1}^n \alpha'_j p_k(\mathbf{x}_j) = 0, \quad k = 1, \dots, n_p, \quad (3.23)$$

para obtener un **SEL** cuadrado $n + n_p$ y asegurar solución única [1]. El sistema es

$$\begin{bmatrix} \Phi & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{0}' \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

donde los coeficientes de la matriz Φ son $\Phi_{ij} = \phi(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|)$, $i, j = 1, \dots, n$, los coeficientes de la matriz \mathbf{P} son $P_{jk} = p_k(\mathbf{x}_j)$, $j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, n_p$, y los vectores $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n_p \times n_p}$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\alpha}' \in \mathbb{R}^{n_p}$, $\mathbf{0}' \in \mathbb{R}^{n_p}$ y $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ siendo sus coeficientes de la forma $u_i = P_u(\mathbf{x}_i) = u(\mathbf{x}_i)$.

El concepto de unisolvencia permite afirmar que si el conjunto de puntos $\chi = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\} \subset \mathbb{R}^d$ es $(m-1)$ -unisolventes, esto equivale a decir que la matriz \mathbf{P} tiene rango completo por columnas. Entonces es posible demostrar que si una función par ϕ a valores reales es estrictamente condicionalmente definida positiva de orden m en \mathbb{R}^d y los puntos $\chi = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\} \subset \mathbb{R}^d$ forman un conjunto $(m-1)$ -unisolvente, entonces el **SEL** anterior (3.24) tiene solución única.

En el caso de **FBR** estrictamente condicionalmente definidas positivas de orden m , la elección de m , y por tanto de n_p , es un tema actual de estudio e investigación. Flyer y colaboradores realizaron en [65] varias experiencias numéricas para estudiar la exactitud de las interpolaciones locales del método **DF-FBR** con Gaussianas y Splines de Capa Delgada aumentando el grado del término polinomial en (3.21) hasta $m-1 = 9$ en **2D**. En el caso de las TPS mostraron que la parte polinomial controla la tasa de convergencia del error, volviendo muy atractivas estas funciones debido a que no dependen de un parámetro de forma ε . A su vez, en el caso de las **FBR GA** que si bien son funciones estrictamente definidas positivas que dependen de ε , mostraron que trabajando con 16 dígitos significativos es posible introducir y aumentar el grado polinomial permitiendo mejorar el error numérico en doble precisión. Sin embargo, trabajando con 80 dígitos significativos el aporte polinomial en la interpolación no varía el error y por tanto dicho error está controlado por la combinación lineal de las Gaussianas en (3.21). En [37] continuaron el estudio del rol del aumento polinomial en **DF-FBR** para la solución numérica de **EDP** elípticas.

Dependencia del parámetro de forma

Las PR y las TPS se conocen como FBR libres de un parámetro de forma dado que no están afectadas por un escalamiento de dicho parámetro. Si bien esto es una característica sobre aquellas que sí lo tienen, a su vez es una desventaja dado en los casos que sí dependen de dicho parámetro, se puede obtener un parámetro de forma óptimo (denominaremos ε_{opt}) que permite disminuir los errores de aproximación. Desarrollaremos este aspecto en el siguiente capítulo como parte fundamental del desarrollo de esta tesis. Por otro lado, las PR no pueden lograr convergencia espectral (o exponencial) como sí tienen las Gaussianas, MQ e IMQ. En estos casos, el error decrece con una tasa de $O(\eta^N)$, siendo η una constante $0 < \eta < 1$ y N la cantidad de nodos.

Cuando las FBR dependen del parámetro de forma $\phi(r, \varepsilon)$, el estudio de la convergencia de los métodos son analizados de forma estacionaria o no estacionaria. En el caso de la aproximación estacionaria, se fija el número de centros n de las FBR y el parámetro de forma ε se hace tender a cero, mientras que en el caso no estacionario se fija el valor de ε y se aumenta la cantidad n de FBR para interpolar. Este tipo de análisis de convergencia son una característica de los métodos que usan espacios de FBR dependientes del parámetro de forma dado que no es posible hacerlo, por ejemplo, en métodos basados en polinomios.

En la Tabla 3.1 se muestran varias FBR estrictamente definidas positivas como las Gaussianas y las Multicuádricas Inversas Generalizadas, así como también las funciones estrictamente condicionalmente definidas positivas como las Multicuádricas Generalizadas, las Potencias Radiales y varias Splines de Capa Delgada. En la última columna aparecen los respectivos aumentos polinómicos para asegurar inversibilidad de la matriz de interpolación. A su vez se dividen en dos grandes grupos, entre aquellas que dependen del parámetro de forma $\phi(r, \varepsilon)$ y las que no $\phi(r)$.

$\phi(r, \varepsilon)$	Nombre	Abreviación	Aumento polinómico
$e^{-(\varepsilon r)^2}$	Gaussiana	GA	Ninguno
$(1 + (\varepsilon r)^2)^{-\beta}$	Multicuádrica Inversa Generalizada	GIMQ	Ninguno
$1/\sqrt{1 + (\varepsilon r)^2}$	Multicuádrica Inversa	IMQ	Ninguno
$1/1 + (\varepsilon r)^2$	Inversa Cuadrática	IQ	Ninguno
$(1 + (\varepsilon r)^2)^{m/2}$	Multicuádrica Generalizada	GMQ	De grado m
$\phi(r)$	Nombre	Abreviación	Aumento polinómico
r^3	Cúbica	PR3	Lineal
r^5	Quíntica	PR5	Cuadrático
r^{2m+1}	Potencia Radial	PR	De grado m
$r^2 \log(r)$	Spline de Capa Delgada	TPS2	Lineal
$r^4 \log(r)$	Spline de Capa Delgada	TPS4	Cuadrático
$r^{2m} \log(r)$	Spline de Capa Delgada	TPS	De grado m

Tabla 3.1: Algunas FBR populares con sus respectivos polinomios siendo $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|$ la distancia al centro \mathbf{x}_j de la FBR y ε el parámetro de forma.

3.2.4 Expresión matricial discretizada

Si bien en el desarrollo del [MRD-RL](#) fueron utilizados en su mayoría distribuciones de nodos uniformes o cartesianas, la formulación integral puede ser extendida a otro tipo de distribuciones de nodos sobre dominios más generales. En esta tesis consideramos distribuciones de nodos uniformes y dispersas sobre dominios [2D](#) que describiremos en el [Cap. 5](#). En la [Figura 3.5](#) puede observarse una distribución de nodos (conocida como cuasi-uniforme) sobre un dominio irregular con frontera exterior suave y frontera interior con puntos angulosos también usada en [\[37\]](#).

Cuando el estencil de interpolación Θ_i tiene nodos sobre el contorno Γ del dominio global Ω , se consideran puntos de interpolación sobre la frontera para el estencil. En la [Figura 3.6](#) se muestran los distintos casos de estenciles y sus respectivas subregiones de integración Ω_i : en el caso (a) cuando son totalmente interiores al dominio, y en los casos (b) y (c), cuando los estenciles tienen contacto con la frontera del dominio global, se consideran puntos dato sobre el contorno en cuestión con las condiciones impuestas del [PVC](#) en estudio. El caso (b) muestra un estencil en las cercanías de una parte suave de Γ y el caso (c) en las cercanías de un punto anguloso.

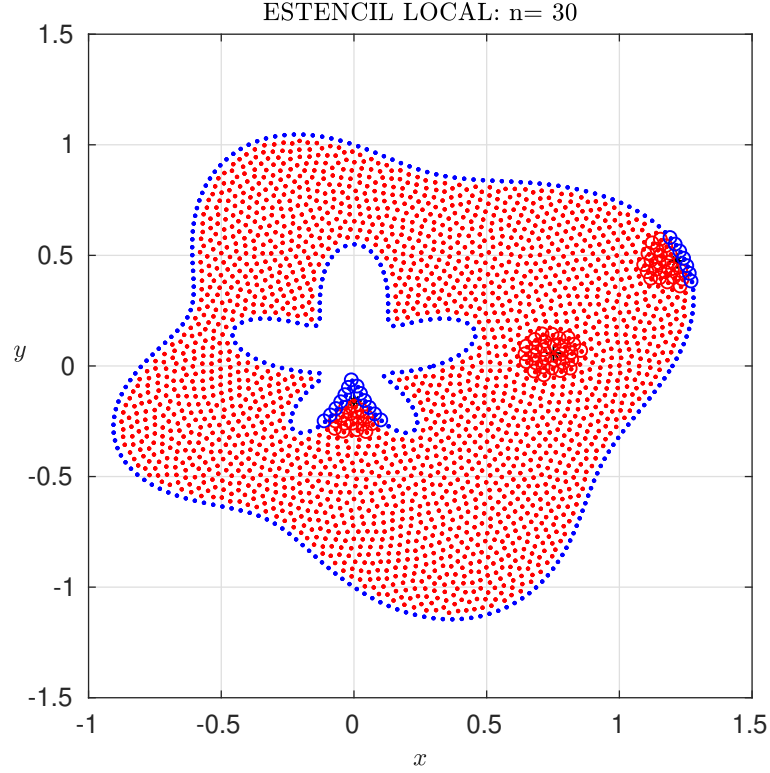


Figura 3.5: Distribución de nodos dispersos sobre un dominio 2D con algunos estenciles locales para $n = 30$.

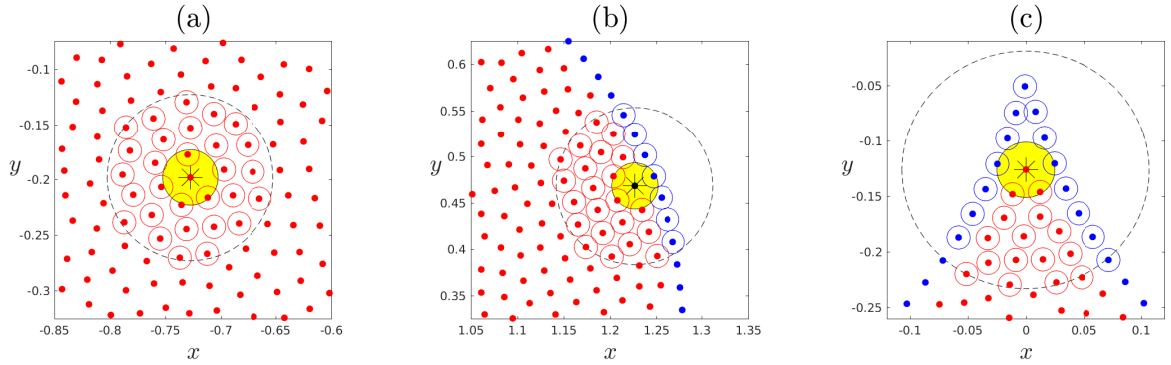


Figura 3.6: Estenciles locales Θ_i y subregiones de integración Ω_i en 2D para $n = 30$.

En los casos (b) y (c) de la Figura 3.6, la interpolante directa (3.7) es sustituida por una interpolación de tipo Hermite que se puede consultar en [1]

$$u(\mathbf{x}) \approx P_u(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_j \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|) + \sum_{j=n_i+1}^{n_i+n_b} \alpha_j \mathcal{B}_{\xi} \phi(\|\mathbf{x} - \xi\|) |_{\xi=\mathbf{x}_j} + \sum_{j=1}^{n_p} \alpha'_j p_j(\mathbf{x}), \quad (3.25)$$

donde n_i es el número de nodos interiores del estencil, n_b es la cantidad de nodos en la frontera y n_p es la cantidad de términos auxiliares polinómicos siendo $n = n_i + n_b$. El operador $\mathcal{B}_{\mathbf{x}_j}$ es el operador de borde respecto a esos nodos \mathbf{x}_j y $\mathcal{B}_{\mathbf{x}}$ respecto a \mathbf{x} , que en el caso de condiciones de Dirichlet, será igual al operador identidad. Este tipo de interpolante tiene la ventaja en nuestro caso que trabajamos con EDP elípticas de asegurar la inversibilidad de la matriz de interpolación para las FBR Gaussianas que usamos en esta tesis. A su vez, en el caso de que haya condiciones de borde de Dirichlet, la matriz resultará simétrica, lo cual permite una implementación eficiente de la misma.

En este caso, la matriz de interpolación de Hermite viene dada por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \Phi & \mathcal{B}_{\xi}\Phi & \mathbf{P} \\ \mathcal{B}_{\mathbf{x}}\Phi & \mathcal{B}_{\mathbf{x}}\mathcal{B}_{\xi}\Phi & \mathcal{B}_{\mathbf{x}}\mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & [\mathcal{B}_{\mathbf{x}}\mathbf{P}]^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

donde $[\Phi] \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$, $[\mathcal{B}_{\mathbf{x}_j}\Phi] \in \mathbb{R}^{n_i \times n_b}$, $[\mathbf{P}] \in \mathbb{R}^{n_i \times n_p}$, $[\mathcal{B}_{\mathbf{x}}\Phi] \in \mathbb{R}^{n_b \times n_i}$, $[\mathcal{B}_{\mathbf{x}}\mathcal{B}_{\mathbf{x}_j}\Phi] \in \mathbb{R}^{n_b \times n_b}$, $[\mathcal{B}_{\mathbf{x}}\mathbf{P}] \in \mathbb{R}^{n_b \times n_p}$ y $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n_p \times n_p}$. Los coeficientes de los bloques matriciales anteriores son de la forma

$$\begin{aligned} [\Phi]_{ij} &= \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|)|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i} \quad i, j = 1, \dots, n_i, \\ [\mathcal{B}_{\xi}\Phi]_{ij} &= \mathcal{B}_{\xi}\phi(\|\mathbf{x}_i - \xi\|)|_{\xi=\mathbf{x}_j} \quad i = 1, \dots, n_i, j = 1, \dots, n_b, \\ [\mathbf{P}]_{ij} &= p_j(\mathbf{x}_i), \quad i = 1, \dots, n_i, j = 1, \dots, n_p, \\ [\mathcal{B}_{\mathbf{x}}\Phi]_{ij} &= \mathcal{B}_{\mathbf{x}}\phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|)|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i} \quad i = 1, \dots, n_b, j = 1, \dots, n_i, \\ [\mathcal{B}_{\mathbf{x}}\mathcal{B}_{\xi}\Phi]_{ij} &= \mathcal{B}_{\mathbf{x}}\mathcal{B}_{\xi}\phi(\|\mathbf{x} - \xi\|)|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i, \xi=\mathbf{x}_j} \quad i, j = 1, \dots, n_b, \\ [\mathcal{B}_{\mathbf{x}}\mathbf{P}]_{ij} &= \mathcal{B}_{\mathbf{x}}p_j(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i} \quad i = 1, \dots, n_b, j = 1, \dots, n_p. \end{aligned}$$

El vector de coeficientes $\boldsymbol{\alpha}$ de la interpolación viene dado por la solución del SEL

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{d}, \quad (3.27)$$

donde por simplicidad hemos incluido los coeficientes α'_j de (3.25) en el vector $\boldsymbol{\alpha}$. Llamando $\mathbf{u} = [u(\mathbf{x}_1), \dots, u(\mathbf{x}_{n_i})]$ y $g(\mathbf{u}) = [g(\mathbf{x}_{n_i+1}), \dots, g(\mathbf{x}_n)]$, siendo g de la ecuación (3.3b).

En los estenciles íntegramente dentro del dominio del problema, el vector \mathbf{d} está dado por

$$\mathbf{d}^T = [\mathbf{u}, \mathbf{0}]^T, \quad (3.28)$$

y la matriz de interpolación viene dada por (3.24). Mientras que en los estenciles que toman datos de contorno el vector \mathbf{d} viene dado por

$$\mathbf{d}^T = [\mathbf{u}, g(\mathbf{u}), \mathbf{0}]^T, \quad (3.29)$$

cuya matriz corresponde a la matriz de interpolación de Hermite dada por (3.26).

Los valores del campo desconocido u y su derivadas $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ sobre una subregión de integración se obtienen a partir de la fórmula de reconstrucción

$$u(\mathbf{x}) = \Phi^T(\mathbf{x})\alpha = \Phi^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{d}, \quad (3.30)$$

donde el vector $\Phi(\mathbf{x})$ contiene las FBR y sus respectivos polinomios. Para el caso en los que los estenciles Θ_i sean interiores, $\Phi(\mathbf{x})$ será de la forma

$$\Phi^T(\mathbf{x}) = [\phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\|), \dots, \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n\|), p_1(\mathbf{x}), \dots, p_{n_p}(\mathbf{x})]^T, \quad (3.31)$$

mientras que en el caso de que estos tomen dato sobre la frontera serán de la forma

$$\Phi^T(\mathbf{x}) = [\phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\|), \dots, \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n\|), \mathcal{B}_{\mathbf{x}_1}\phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\|), \dots, \mathcal{B}_{\mathbf{x}_{n_b}}\phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{n_b}\|), p_1(\mathbf{x}), \dots, p_{n_p}(\mathbf{x})]^T. \quad (3.32)$$

Para la reconstrucción de las derivadas parciales, derivando la ecuación (3.7) se tiene

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i} \approx \sum_{j=1}^n \alpha_j \frac{\partial \varphi_j(\mathbf{x})}{\partial x_i}, \quad (3.33)$$

o bien, matricialmente

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi^T(\mathbf{x})}{\partial x_i} \alpha = \frac{\partial \Phi^T(\mathbf{x})}{\partial x_i} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{d}. \quad (3.34)$$

Finalmente, usando (3.7) y (3.33) en la formulación integral (3.5) con $\xi = \mathbf{x}_i$ como punto fuente en el interior del subdominio Ω_i con frontera Γ_i , obtenemos

$$u(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \int_{\Gamma_i} q^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \varphi_j(\mathbf{x}) d\Gamma_{\mathbf{x}} - \sum_{j=1}^n \alpha_j \int_{\Gamma_i} u^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \frac{\partial \varphi_j(\mathbf{x})}{\partial n} d\Gamma_{\mathbf{x}} + \int_{\Omega_i} b u^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) d\Omega_{\mathbf{x}}, \quad (3.35)$$

donde u^* , q^* y b definidos como en la sección 3.2.2 anterior.

Llamando a la incógnita $u_i = u(\mathbf{x}_i)$, su forma discretizada será de forma

$$u_i = \sum_{j=1}^n \alpha_j h_{ij} + \sum_{j=1}^n \alpha_j g_{ij} + \int_{\Omega_i} b u^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) d\Omega_{\mathbf{x}}, \quad (3.36)$$

donde los coeficientes de influencia

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{ij} = \int_{\Gamma_i} q^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \varphi_j(\mathbf{x}) d\Gamma_{\mathbf{x}}, \\ g_{ij} = \int_{\Gamma_i} u^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \frac{\partial \varphi_j(\mathbf{x})}{\partial n} d\Gamma_{\mathbf{x}}, \end{array} \right. \quad (3.37a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{ij} = \int_{\Gamma_i} q^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \varphi_j(\mathbf{x}) d\Gamma_{\mathbf{x}}, \\ g_{ij} = \int_{\Gamma_i} u^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \frac{\partial \varphi_j(\mathbf{x})}{\partial n} d\Gamma_{\mathbf{x}}, \end{array} \right. \quad (3.37b)$$

son calculados con cuadratura numérica.

3.2.5 Formulación de la reciprocidad dual

Existen diferentes formas de calcular las correspondientes integrales de volumen en (3.35)

$$\int_{\Omega_i} b u^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) d\Omega_{\mathbf{x}}. \quad (3.38)$$

En esta subsección seguimos el enfoque dado en el MRD-RL presentado por Caruso, Portapila y Power en [15, 17]. Como en muchos enfoques locales del MEC, en el MRD-RL la formulación de la representación integral es aplicada en integrales locales de subregiones dentro de estenciles de interpolación que están fuertemente solapados (Ω_i y Ω_j ; Θ_i y Θ_j en la Figura 3.2). El MRD-RL usa el MRD que consiste en aproximar la densidad b en términos de una función de interpolación

$$b(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x})) \approx \sum_{j=1}^m \beta_j \chi_j(\mathbf{x}), \quad (3.39)$$

siendo m el número de puntos de interpolación, que coincide con el número de puntos del estencil de interpolación, y $\chi_j(\mathbf{x})$ usualmente definida como una FBR, no necesariamente las mismas que en la interpolación local del campo u .

Se determina una solución particular auxiliar $\tilde{\chi}_j$ del operador Laplaciano

$$\nabla^2 \tilde{\chi}_j(\mathbf{x}) = \chi_j(\mathbf{x}), \quad (3.40)$$

siendo el lado derecho $\chi_j(\mathbf{x})$ una FBR como en la sección 2.5.3.

Luego, aplicando la segunda identidad de Green (este paso del procedimiento se conoce como reciprocidad dual) a la integral de superficie o volumen resultante con la solución particular como densidad y la solución fundamental como núcleo, obtenemos

$$\int_{\Omega_i} b u^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) d\Omega_{\mathbf{x}} = \sum_{j=1}^m \beta_j \int_{\Omega_i} \nabla^2 \tilde{\chi}_j u^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) d\Omega_{\mathbf{x}} \quad (3.41)$$

$$= \sum_{j=1}^m \beta_j \left\{ \tilde{\chi}_j(\mathbf{x}_i) + \int_{\Gamma_i} \left[u^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \frac{\partial \tilde{\chi}_j}{\partial n} - q^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \tilde{\chi}_j \right] d\Gamma_{\mathbf{x}} \right\} \quad (3.42)$$

Llamando a

$$f_{ij} = \tilde{\chi}_j(\mathbf{x}_i) + \int_{\Gamma_i} \left[u^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \frac{\partial \tilde{\chi}_j}{\partial n} - q^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \tilde{\chi}_j \right] d\Gamma_{\mathbf{x}}, \quad (3.43)$$

podemos obtener la forma discretizada de la ecuación (3.42) como

$$u_i = \sum_{j=1}^n \alpha_j h_{ij} + \sum_{j=1}^n \alpha_j g_{ij} + \sum_{j=1}^m \beta_j f_{ij}, \quad (3.44)$$

siendo su forma matricial

$$u_i = \mathbf{h}_i^T \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{g}_i^T \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{f}_i^T \boldsymbol{\beta}, \quad (3.45)$$

donde $\boldsymbol{\alpha} = [\dots, \alpha_j, \dots]^T \in \mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{\beta} = [\dots, \beta_j, \dots]^T \in \mathbb{R}^m$, y los vectores columnas $\mathbf{h}_i = [\dots, h_{ij}, \dots]^T \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{g}_i = [\dots, g_{ij}, \dots]^T \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{f}_i = [\dots, f_{ij}, \dots]^T \in \mathbb{R}^m$ siendo sus componentes definidos en las ecuaciones (3.37a), (3.37b) y (3.43) respectivamente.

Todas las integrales en la formulación anterior también son calculadas a través de una cuadratura. Los coeficientes de interpolación $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ en la ecuación (3.45) corresponden a la interpolación de la variable u y a la parte no-homegénea b , respectivamente, y vienen dados en términos de los valores nodales de la variable de campo u .

Finalmente, la ecuación (3.45) es aplicada en cada punto interior de cada estencil para formar un sistema matricial disperso para los valores nodales no-conocidos u , donde las condiciones de contorno son impuestas en la interpolante local con un esquema tipo Hermite.

3.3 El Método Integral Local de Frontera y Dominio

El objetivo principal de aplicar la formulación del [MRD](#) en el [MRD-RL](#) presentado en la sección anterior es evitar el costo computacional de calcular las integrales de dominio sobre las subregiones de integración. Sin embargo, para un método local integral con una cantidad fija y pequeña de grados de libertad, las integrales de dominio pueden evaluarse a un bajo costo computacional.

Como el objetivo de esta tesis es lograr mejorar las aproximaciones a soluciones numéricas de problemas diferenciales a partir de estabilizar el comportamiento del error para un rango bajo del parámetro de forma de las [FBR](#), el cálculo de integrales de frontera usando el [MRD](#) puede ser omitido y estas pueden calcularse como integrales de dominio sobre las subregiones locales.

En esta sección desarrollamos el [MILFD](#) presentado recientemente por Ponzellini Marinelli, Caruso y Portapila en [\[32\]](#) como un nuevo método local integral.

3.3.1 La función de Green-Dirichlet en el MILFD

Consideremos un [PVC](#) definido sobre un dominio abierto y acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mediante la ecuación diferencial [\(3.3a\)](#) con condiciones de borde [\(3.3b\)](#) sobre $\Gamma = \partial\Omega$ vistas anteriormente. Supondremos que la [EDP](#) gobernante podemos escribirla como la ecuación [\(3.4\)](#).

La [FGD](#) que denotamos $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ surge de considerar la solución al problema

$$\begin{cases} \nabla^2 G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}), & \mathbf{x} \in \Omega, \\ G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = 0, & \mathbf{x} \in \Gamma, \end{cases} \quad (3.46a)$$

$$(3.46b)$$

siendo \mathbf{x} la variable independiente y $\boldsymbol{\xi}$ el punto fuente o de colocación fijado.

En general, es conveniente considerar $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ dividida en dos partes de la forma

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = U(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + v(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \quad (3.47)$$

donde U es una solución particular (conocida como solución principal) de [\(3.46a\)](#) que no necesariamente satisface las condiciones de borde, y v es solución del Laplaciano $\nabla^2 v = 0$. En nuestro caso, es conocida la solución particular de [\(3.47\)](#) dada por la ecuación [\(2.18\)](#),

siendo

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2\pi} \ln(r) + v(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \quad (3.48)$$

donde $r = \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|$ y v la función armónica solución del PVC

$$\begin{cases} \nabla^2 v(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = 0, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ v(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{2\pi} \ln(r), & \mathbf{x} \in \Gamma. \end{cases} \quad (3.49a)$$

$$(3.49b)$$

Cuando Ω es un disco circular en 2D con radio R y centro \mathbf{x}_0 , la FGD y su derivada pueden ser obtenidas explícitamente por el método de las imágenes presentado en [66]. En la Figura 3.7, se observa el punto fuente $\boldsymbol{\xi}$ dentro del círculo Ω y el punto reflejado o punto imagen $\hat{\boldsymbol{\xi}}$ fuera de este sobre una semirrecta con origen en \mathbf{x}_0 y que también contiene al punto fuente. El punto \mathbf{x} está situado en la frontera Γ . El planteo geométrico del método de las imágenes consiste en describir a la circunferencia Γ como todos los puntos tales que el cociente $r/\hat{r} = cte.$ siendo $r = \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|$ y $\hat{r} = \|\mathbf{x} - \hat{\boldsymbol{\xi}}\|$. Es decir, dado $\boldsymbol{\xi}$ en el interior del círculo y \mathbf{x} sobre su frontera la circunferencia, siempre es posible encontrar un punto imagen $\hat{\boldsymbol{\xi}}$ tal que la relación anterior valga. A partir de esto es posible encontrar las ecuaciones de $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ y de su derivada normal $Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ como se describe en la bibliografía citada.

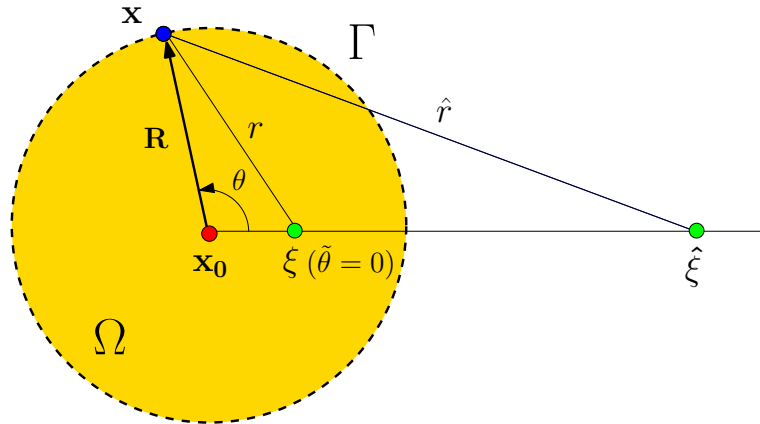


Figura 3.7: Representación esquemática de la función de Green-Dirichlet en un círculo.

Notando $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ y $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$, hacemos el cambio a polares centrado en \mathbf{x}_0 ,

$$\begin{cases} x_1 = \rho \cos(\theta), & \xi_1 = \tilde{\rho} \cos(\tilde{\theta}), \\ x_2 = \rho \text{sen}(\theta), & \xi_2 = \tilde{\rho} \text{sen}(\tilde{\theta}), \end{cases} \quad (3.50)$$

se tiene que

$$r^2 = \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|^2 = \rho^2 + \tilde{\rho}^2 - 2\rho\tilde{\rho} \cos(\theta - \tilde{\theta}), \quad (3.51)$$

$$\hat{r}^2 = \|\mathbf{x} - \hat{\boldsymbol{\xi}}\|^2 = \frac{R^4}{\tilde{\rho}^2} + \rho^2 - 2\rho \frac{R^2}{\tilde{\rho}} \cos(\theta - \tilde{\theta}). \quad (3.52)$$

Puede verse que la [FGD](#) es de la forma

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2\pi} \ln(r) - \frac{1}{2\pi} \ln(\hat{r}) + \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{R}{\tilde{\rho}}\right), \quad (3.53)$$

siendo su correspondiente derivada normal sobre la frontera Γ

$$Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) := \left. \frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial n} \right|_{\Gamma} = \frac{1}{2\pi R} \frac{R^2 - \tilde{\rho}^2}{R^2 + \tilde{\rho}^2 - 2R\tilde{\rho} \cos(\theta - \tilde{\theta})}. \quad (3.54)$$

Resulta entonces que en el caso [2D](#)

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{R}{r}\right) & \text{si } \boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}_0, \\ \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{rR}{\hat{r}\tilde{\rho}}\right) & \text{si } \boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{x}_0. \end{cases} \quad (3.55)$$

Los métodos integrales locales utilizan una representación integral a nivel local usando diferentes formas geométricas para las subregiones de integración, siendo el círculo la más popular. En el desarrollo del [MILFD](#) en [2D](#), si en lugar de usar la solución fundamental $u^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ y su correspondiente derivada normal $q^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ en la ecuación [\(3.5\)](#), consideramos dominios circulares Ω_i con su respectivas fronteras Γ_i , y usamos la [FGD](#) $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ con su correspondiente derivada normal $Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$, obtenemos

$$c(\boldsymbol{\xi})u(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\Gamma_i} Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) u(\mathbf{x}) d\Gamma_{\mathbf{x}} - \int_{\Gamma_i} G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) q(\mathbf{x}) d\Gamma_{\mathbf{x}} + \int_{\Omega_i} b G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\Omega_{\mathbf{x}}, \quad (3.56)$$

Ahora, si bien $u(\mathbf{x})$ es conocida en la frontera, su derivada normal $q(\mathbf{x})$ no lo es, y por tanto podemos remover el integrando $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) q(\mathbf{x})$ haciendo uso de que $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ es nula sobre la

frontera Γ_i . Obtenemos así una nueva formulación integral de la forma

$$c(\boldsymbol{\xi})u(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\Gamma_i} Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) u(\mathbf{x}) d\Gamma_{\mathbf{x}} + \int_{\Omega_i} b G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\Omega_{\mathbf{x}}. \quad (3.57)$$

El valor de la constante $c(\boldsymbol{\xi}) \in [0, 1]$ será 1 si $\boldsymbol{\xi}$ es interior al dominio, $\frac{1}{2}$ si $\boldsymbol{\xi}$ está sobre una parte suave de la frontera Γ_i y 0 si es un punto de colocación exterior. En [17] pueden obtenerse mayores detalles sobre el uso de la FGD en el MRD-RL.

3.3.2 Expresión matricial discretizada

En el MILFD, la fórmula de representación integral (3.57) se aplica en cada subregión local de integración inserto dentro los estenciles de interpolación que están fuertemente solapados (ver Figura 3.2). En este método, las condiciones de borde del PVC son impuestas localmente en el estencil de interpolación, y el punto de colocación es interior a la subregión de integración que será un círculo, de modo que la FGD presentada en la subsección 3.3.1 anterior es bien conocida.

Asumimos que el término b de la EDP puede partirse de la siguiente manera

$$b(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}) + \tilde{b}(u(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x})), \quad (3.58)$$

donde la función fuente f es conocida o bien es dato. Asumimos \tilde{b} es lineal en la variable u y ∇u . La representación integral de la fórmula anterior (3.57), usando la FGD $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ y su correspondiente derivada normal $Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$, estará dada en cada subregión de integración por

$$u(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\Gamma_i} Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})u(\mathbf{x}) d\Gamma_{\mathbf{x}} + \int_{\Omega_i} G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})f(\mathbf{x}) d\Omega_{\mathbf{x}} + \int_{\Omega_i} \tilde{b} G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\Omega_{\mathbf{x}}, \quad (3.59)$$

siendo $\boldsymbol{\xi}$ el punto fuente interior.

El campo u es interpolado localmente con una base de FBR $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ con centros $\{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^n$ del estencil $\Theta_{\mathbf{x}}$ como se presentó en la sección 3.2.3,

$$u(\mathbf{x}) \approx \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j(\mathbf{x}), \quad (3.60)$$

así como también el término \tilde{b} de la ecuación (3.58) es interpolado con FBR $\{\chi_j\}_{j=1}^m$ con

centros $\{\mathbf{y}_j\}_{j=1}^m$ del estencil $\Theta_{\mathbf{x}}$

$$\tilde{b}(u(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x})) \approx \sum_{j=1}^m \beta_j \chi_j(\mathbf{x}), \quad (3.61)$$

siendo $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ y $\{\chi_j\}_{j=1}^m$ bases de funciones de **FBR**, eventualmente del mismo tipo y con el mismo centro.

Obtenemos entonces de (3.59) la siguiente formulación integral local

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{\xi}) &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \left\{ \int_{\Gamma_i} Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \varphi_j(\mathbf{x}) d\Gamma_{\mathbf{x}} \right\} + \sum_{j=1}^m \beta_j \left\{ \int_{\Omega_i} G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \chi_j(\mathbf{x}) d\Omega_{\mathbf{x}} \right\} \\ &+ \int_{\Omega_i} G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) f(\mathbf{x}) d\Omega_{\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Si tomamos $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}_i$ un punto de colocación en el interior de la subregión de integración Ω_i , la forma discretizada del campo desconocido $u_i = u(\mathbf{x}_i)$ será

$$u_i = \sum_{j=1}^n \alpha_j \tilde{h}_{ij} + \sum_{j=1}^m \beta_j \tilde{g}_{ij} + \tilde{f}_i, \quad (3.63)$$

donde α_j y β_j provienen de las ecuaciones (3.60) y (3.61).

Los coeficientes \tilde{h}_{ij} , \tilde{g}_{ij} y \tilde{f}_i serán de la forma

$$\begin{cases} \tilde{h}_{ij} = \int_{\Gamma_i} Q(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \varphi_j(\mathbf{x}) d\Gamma_{\mathbf{x}}, & (3.64a) \\ \tilde{g}_{ij} = \int_{\Omega_i} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \chi_j(\mathbf{x}) d\Omega_{\mathbf{x}}, & (3.64b) \\ \tilde{f}_i = \int_{\Omega_i} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) f(\mathbf{x}) d\Omega_{\mathbf{x}}, & (3.64c) \end{cases}$$

siendo su forma discretizada

$$u_i = \tilde{\mathbf{h}}_i^T \boldsymbol{\alpha} + \tilde{\mathbf{g}}_i^T \boldsymbol{\beta} + \tilde{f}_i, \quad (3.65)$$

donde $\boldsymbol{\alpha} = [\dots, \alpha_j, \dots]^T \in \mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{\beta} = [\dots, \beta_j, \dots]^T \in \mathbb{R}^m$ son los vectores columnas con los coeficientes de interpolación, $\tilde{\mathbf{h}}_i = [\dots, \tilde{h}_{ij}, \dots]^T \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{\mathbf{g}}_i = [\dots, \tilde{g}_{ij}, \dots]^T \in \mathbb{R}^m$ son vectores columnas con los coeficientes de influencia y $\tilde{f}_i \in \mathbb{R}$ un escalar dato. Todas las integrales anteriores son regulares, dado que los puntos de colocación están dentro de la subregión de integración Ω_i y son calculadas numéricamente por cuadratura. Los coeficientes de interpolación α_j y β_j que corresponden a la interpolación de u y b están dados en términos

de los valores nodales del campo en los estenciles $\Theta_{\mathbf{x}}^i$ y $\Theta_{\mathbf{y}}^i$ respectivamente.

De la interpolación (3.60) y por la fórmula de reconstrucción (3.30), obtenemos

$$u_i = u(\mathbf{x}_i) = \Phi^T(\mathbf{x}_i)\alpha, \quad (3.66)$$

donde $\Phi^T(\mathbf{x}_i)$ está dado por la ecuación (3.31). Del sistema

$$\mathbf{A}_i\alpha = \mathbf{d}_i \quad (3.67)$$

surge el vector α

$$\alpha = \mathbf{A}_i^{-1}\mathbf{d}_i. \quad (3.68)$$

Las componentes de la matriz de interpolación resultan $(\mathbf{A}_i)_{jk} = \varphi_k(\mathbf{x}_j)$ para $j, k = 1, \dots, n$, y el vector \mathbf{d}_i puede ser descrito en términos de los valores nodales desconocidos del vector \mathbf{u} y los valores de las condiciones de contorno conocidas del vector $g(\mathbf{u}_b)$ vistas en la sección 3.2.4.

De la interpolación (3.61) y por la fórmula de reconstrucción (3.30), obtenemos

$$\tilde{b}(u(\mathbf{x}_i), \nabla u(\mathbf{x}_i)) = \chi^T(\mathbf{x}_i)\beta, \quad (3.69)$$

donde $\chi^T(\mathbf{x}_i)$ está dado por la ecuación (3.31). Del sistema

$$\tilde{\mathbf{A}}_i\beta = \tilde{\mathbf{b}}_i \quad (3.70)$$

surge el vector β

$$\beta = \tilde{\mathbf{A}}_i^{-1}\tilde{\mathbf{b}}_i. \quad (3.71)$$

Las componentes matriciales son $(\tilde{\mathbf{A}}_i)_{jk} = \chi_k(\mathbf{y}_j)$ para $j, k = 1, \dots, m$, donde también $\tilde{\mathbf{b}}_i$ puede escribirse como una función del vector \mathbf{d}_i , dado que, por la ecuación (3.58), las componentes son de la forma

$$\left(\tilde{\mathbf{b}}_i\right)_j = \tilde{b}(u(\mathbf{y}_j), \nabla u(\mathbf{y}_j)) = \tilde{b}\left(\Phi^T(\mathbf{y}_j)\alpha, \nabla\Phi^T(\mathbf{y}_j)\alpha\right) \quad (3.72)$$

$$= \tilde{b}\left(\Phi^T(\mathbf{y}_j), \nabla\Phi^T(\mathbf{y}_j)\right)\alpha, \quad (3.73)$$

para $j = 1, \dots, m$.

Por tanto,

$$\boldsymbol{\beta} = \tilde{\mathbf{A}}_i^{-1} \tilde{\mathbf{b}}_i = \tilde{\mathbf{A}}_i^{-1} (\mathbf{A}_{\tilde{b}_i} \boldsymbol{\alpha}) = \tilde{\mathbf{A}}_i^{-1} (\mathbf{A}_{\tilde{b}_i} \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{d}_i) \quad (3.74)$$

siendo $\mathbf{A}_{\tilde{b}_i} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ como la matriz correspondiente al cálculo del vector $\tilde{\mathbf{b}}_i$ cuyos coeficientes matriciales son de la forma $(\mathbf{A}_{\tilde{b}_i})_{jk} = \tilde{b}(\varphi_k(\mathbf{y}_j), \nabla \varphi_k(\mathbf{y}_j))$ para $j = 1, \dots, m$ y $k = 1, \dots, n$.

Finalmente, reemplazando las ecuaciones (3.68) y (3.74) en la ecuación (3.65), podemos escribir esta en términos de \mathbf{d}_i . La forma matricial para u_i está dada por

$$u_i = \left(\tilde{\mathbf{h}}_i^T (\mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{d}_i) + \tilde{\mathbf{g}}_i^T (\tilde{\mathbf{A}}_i^{-1} \mathbf{A}_{\tilde{b}_i} \mathbf{A}_i^{-1}) \mathbf{d}_i \right) + \tilde{f}_i \quad (3.75)$$

$$= \left(\tilde{\mathbf{h}}_i^T \mathbf{A}_i^{-1} + \tilde{\mathbf{g}}_i^T \tilde{\mathbf{A}}_i^{-1} \mathbf{A}_{\tilde{b}_i} \mathbf{A}_i^{-1} \right) \mathbf{d}_i + \tilde{f}_i, \quad (3.76)$$

que, calculada en cada punto de colocación de cada estencil, forma un ensamblado de una matriz rala a resolver por un método numérico específico.

En la Figura 3.8 se puede observar una representación esquemática del cálculo de la fórmula matricial (3.76).

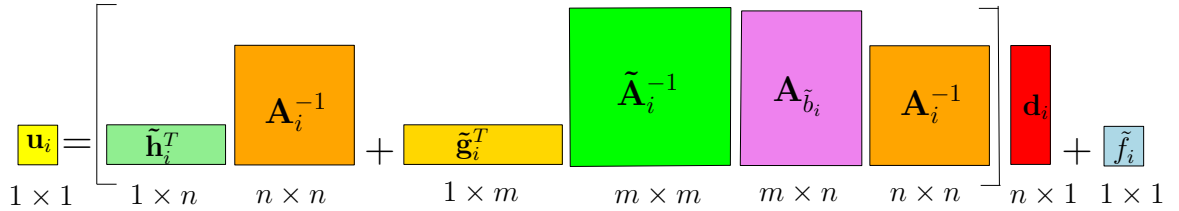


Figura 3.8: Esquema matricial en el MILFD de la ecuación (3.76).

Si tomamos las mismas bases de FBR $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ y $\{\chi_j\}_{j=1}^m$ para $m = n$, las matrices de interpolación $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\tilde{\mathbf{A}}_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ son idénticas en estenciles de interpolación interiores a Ω , no obstante, en estenciles sobre la frontera Γ la matriz \mathbf{A}_i se define por su correspondiente matriz de interpolación de acuerdo a las condiciones de borde, mientras que la matriz $\tilde{\mathbf{A}}_i$ es exactamente la matriz de interpolación de FBR-Directa (ver en la sección 3.2.4).

3.3.3 Procedimiento algorítmico en la resolución numérica de los SEL locales con FBR

Para resolver numéricamente estos SEL en los métodos locales integrales existen dos grandes categorías de métodos: los métodos directos y los métodos iterativos. Los métodos directos obtienen la solución exacta, salvo errores de redondeo, en un número finito de pasos y son apropiados para sistemas chicos y densos. En estos casos, se obtienen factorizaciones matriciales para resolver el sistema como la descomposición de Cholesky para matrices simétricas y definida positivas, la descomposición LU o la factorización QR , entre otras. Debido al costo computacional y de uso de memoria, obtener la solución por métodos de factorización puede ser demasiado costoso cuando el sistema es grande, además de que estos métodos pueden ser numéricamente inestables. En el método de eliminación Gaussiana necesitamos almacenar n^2 entradas de la matriz y realizar $2n^3/3 + O(n^2)$ operaciones aritméticas.

Como fue mostrado en [32, 33] para el caso del MILFD, el procedimiento algorítmico para evitar el cálculo numérico de las inversas de las matrices \mathbf{A}_i^{-1} y $\tilde{\mathbf{A}}_i^{-1}$ provenientes de los SEL de las interpolaciones con FBR surge de reescribir la expresión (3.76) de la siguiente manera

$$u_i = \mathbf{z}^T \mathbf{d}_i + \tilde{f}_i, \quad (3.77)$$

donde

$$\mathbf{z}^T = \tilde{\mathbf{h}}_i^T \mathbf{A}_i^{-1} + \tilde{\mathbf{g}}_i^T \tilde{\mathbf{A}}_i^{-1} \mathbf{A}_{b_i} \mathbf{A}_i^{-1}. \quad (3.78)$$

Entonces, el procedimiento algorítmico para resolver la ecuación (3.76) evitando el costo computacional del cálculo de las inversas es el siguiente:

Paso 1. Resolver $\tilde{\mathbf{A}}_i \tilde{\mathbf{w}} = \tilde{\mathbf{g}}_i$ (puesto que $\tilde{\mathbf{A}}_i$ es simétrica).

Paso 2. Calcular $\mathbf{w} = \tilde{\mathbf{h}}_i + \mathbf{A}_{b_i}^T \tilde{\mathbf{w}}$.

Paso 3. Resolver $\mathbf{A}_i^T \mathbf{z} = \mathbf{w}$.

Paso 4. Desarrollar $u_i = \mathbf{z}^T \mathbf{d}_i + \tilde{f}_i$.

En la Figura 3.9 se muestra un esquema del procedimiento algorítmico eficiente usado en la resolución numérica de los SEL locales con FBR en el MILFD.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \boxed{\chi_k(\mathbf{x}_j)} & \begin{bmatrix} \tilde{w}_j \end{bmatrix} = & \boxed{\tilde{g}_{ij}} \\
 \tilde{\mathbf{A}}_i & \tilde{\mathbf{w}} & \tilde{\mathbf{g}}_i
 \end{array} \\
 \text{Paso 1: Resolver el SEL local} \\
 \text{proveniente de la interpolación} \\
 \text{local (3.61) con FBR } \{\chi_k\} \text{ del} \\
 \text{término no-homogéneo } \tilde{b} \text{ con lado} \\
 \text{derecho dado por los coeficientes} \\
 \text{de influencia } \tilde{g}_{ij} \text{ de (3.64b).}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \begin{bmatrix} w_j \end{bmatrix} = & \boxed{\tilde{h}_{ij}} + & \boxed{\tilde{b}(\varphi_j(\mathbf{x}_k), \nabla \phi_j(\mathbf{x}_k))} \\
 \mathbf{w} & \tilde{\mathbf{h}}_i & \mathbf{A}_i^T \tilde{\mathbf{b}}_i \\
 \tilde{\mathbf{w}} & & \tilde{\mathbf{w}}
 \end{array} \\
 \text{Paso 2: Multiplicación matriz-vector de la matriz del} \\
 \text{término } \tilde{b} \text{ aproximado con la base de FBR } \{\varphi_k\} \text{ por el} \\
 \text{vector } \tilde{\mathbf{w}} \text{ anterior. Sumar los coeficientes de influencia} \\
 \tilde{h}_{ij} \text{ dados por (3.64a).}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \boxed{\varphi_j(\mathbf{x}_k)} & \begin{bmatrix} z_j \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} w_j \end{bmatrix} \\
 \mathbf{A}_i^T & \mathbf{z} & \mathbf{w}
 \end{array} \\
 \text{Paso 3: Resolver el SEL local} \\
 \text{proveniente de la interpolación} \\
 \text{local (3.60) con FBR } \{\varphi_k\} \text{ de la} \\
 \text{incógnita } u \text{ con lado derecho el} \\
 \text{vector } \mathbf{w} \text{ del paso anterior.}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \boxed{u_i} = \begin{bmatrix} z_j \\ \mathbf{z}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_j \\ \mathbf{d}_i \end{bmatrix} + \boxed{\tilde{f}_i} \\
 \text{Paso 4: Multiplicación vector-vector del vector local} \\
 \mathbf{d}_i \text{ dado por (3.28) o (3.29), donde el vector } \mathbf{z} \text{ es del pa-} \\
 \text{so anterior y } \mathbf{d}_i \text{ contiene incógnitas } u_j. \text{ Sumar los va-} \\
 \text{lores } \tilde{f}_i \text{ dados por (3.64c). Esta una ecuación lineal se} \\
 \text{reordena como parte del SEL ensamblado del MILFD.}
 \end{array}
 \end{array}$$

Figura 3.9: Procedimiento algorítmico en la resolución numérica de los SEL locales con FBR del MILFD.

Cuando las FBR dependen del parámetro de forma ε y se hace tender $\varepsilon \rightarrow 0$ para lograr mayor exactitud, en los pasos 1 y 3 es relevante el condicionamiento de los sistemas lineales. Volveremos sobre este punto en el siguiente capítulo.

3.3.4 Ensamblado del SEL disperso

La ecuación del Paso 4 anterior es desarrollada para obtener una ecuación lineal

$$u_i = \mathbf{z}^T \mathbf{d}_i + \tilde{f}_i = \sum_{j=1}^n z_j d_j + \tilde{f}_i \quad (3.79)$$

donde $u_i = u(\mathbf{x}_i)$, $i = 1, \dots, N$ son las variables incógnitas, $\tilde{f}_i \in \mathbb{R}$ es un valor conocido dado por la integral de subdominio (3.64c), $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_n]^T \in \mathbb{R}^n$ son los valores surgidos del procedimiento algorítmico de la subsección anterior y $\mathbf{d}_i = [d_1, \dots, d_n]^T \in \mathbb{R}^n$ es un vector formado por incógnitas o valores conocidos de la frontera dependiendo el tipo de estencil utilizado. Veremos esto en detalle a continuación.

Sea $\Theta = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$ y $\Theta' = \{\mathbf{x}_{N+1}, \dots, \mathbf{x}_{N+N_{fro}}\}$ la discretización del interior del dominio Ω y de su frontera $\Gamma = \partial\Omega$, respectivamente. Sea $\mathbf{x}_i \in \Theta$ un nodo de la discretización interior y sea $\Theta_i = \{\mathbf{x}_{i_1}, \dots, \mathbf{x}_{i_n}\}$ el estencil asociado a dicho nodo \mathbf{x}_i . El conjunto de subíndices $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, N\} \cup \{N+1, \dots, N_{fro}\}$ debido a que los nodos del estencil puede ser nodos tanto del interior del dominio como de su frontera, y donde \mathbf{x}_i es considerado parte del estencil. En nuestro caso, el vector incógnita será $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_N]^T \in \mathbb{R}^N$.

En el caso que el estencil Θ_i sólo contenga nodos interiores como se muestra en la Figura 3.6 (a), los valores del vector \mathbf{d}_i se definen de la forma

$$d_j := u_{i_j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.80)$$

siendo los subíndices $i_j \in \{1, \dots, N\}$. Desarrollando la ecuación (3.79)

$$u_i = z_1 u_{i_1} + z_2 u_{i_2} + \dots + z_n u_{i_n} + \tilde{f}_i, \quad (3.81)$$

o bien

$$z_1 u_{i_1} + z_2 u_{i_2} + \dots + (z_{i_i} - 1) u_i + \dots + z_n u_{i_n} = -\tilde{f}_i, \quad (3.82)$$

que forma una ecuación de nuestro SEL ensamblado final.

Por otro lado, en el caso que el estencil Θ_i contenga una cantidad n_{int} de nodos internos

y una cantidad n_{fro} de nodos frontera como se muestra en la Figura 3.6 (b) o (c), se define

$$\begin{cases} d_j := u_{i_j}, & j = 1, \dots, n_{int}, \\ d_j := g(u_{i_j}), & j = n_{int} + 1, \dots, n, \end{cases} \quad (3.83a)$$

$$(3.83b)$$

siendo $n = n_{int} + n_{fro}$ y los subíndices $i_j \in \{1, \dots, N\} \cup \{N + 1, \dots, N_{fro}\}$. El valor del operador g dependerá de las condiciones de borde que aparece en la ecuación (3.3b) del PVC. Desarrollando la ecuación (3.79) en este caso

$$u_i = z_1 u_{i_1} + \dots + z_{n_{int}} u_{i_{n_{int}}} + z_{n_{int}+1} g(u_{i_{n_{int}+1}}) + \dots + z_n g(u_{i_n}) + \tilde{f}_i, \quad (3.84)$$

o bien

$$z_1 u_{i_1} + \dots + (z_{i_i} - 1) u_i + \dots + z_{n_{int}} u_{i_{n_{int}}} = -\tilde{f}_i - z_{n_{int}+1} g(u_{i_{n_{int}+1}}) - \dots - z_n g(u_{i_n}), \quad (3.85)$$

que forma otra ecuación de nuestro SEL ensamblado final.

Finalmente, reacomodando las ecuaciones (3.82) y (3.85) obtenemos el siguiente sistema lineal ensamblado

$$\mathbf{M}\mathbf{u} = \mathbf{c}, \quad (3.86)$$

donde $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ es la matriz de coeficientes, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^N$ es el vector lado derecho y $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$ es el vector incógnitas para la reconstrucción de la aproximación a la solución $u(\mathbf{x})$ sobre todo el dominio.

Debido a que el tamaño de los estenciles es $n \ll N$ y que los mismos están fuertemente solapados, cada ecuación posee pocas incógnitas y por tanto la matriz \mathbf{M} resulta una matriz dispersa (del inglés, sparse), no así el vector lado derecho \mathbf{c} . La solución numérica de este sistema se realiza con métodos iterativos de tipo Krylov para mejorar el costo computacional.

Capítulo 4

EL MÉTODO INTEGRAL LOCAL DE FRONTERA Y DOMINIO ESTABILIZADO

En este capítulo retomamos los problemas de estabilidad generados con las interpolaciones locales con [FBR](#), introducimos los métodos de estabilidad numérica para [FBR](#) y presentamos el desarrollo de un nuevo método integral de formulación local que utiliza interpolaciones estabilizadas.

En particular, nos concentramos en el [FBR-QR](#) presentado en [\[27, 28, 67\]](#) que abrió la posibilidad de usar esta técnica en métodos que se valgan de aproximantes locales con [FBR](#), tales como los métodos integrales locales que utilizan una formulación con una [EIB](#) [\[15\]](#), en métodos de descomposición de dominio que usan [FBR](#) o en el método de [DF-FBR](#) [\[68, 69\]](#) para la resolución de [EDP](#).

En las siguientes secciones desarrollamos la nueva formulación para el [MILFD-Est](#) que usa la formulación del [FBR-QR](#) para estabilizar el error y mejorar la exactitud de las aproximaciones para este tipo de métodos locales sin malla. El principal objetivo es poder reducir el mal condicionamiento del esquema de interpolación con [FBR-Directo](#) en el caso de [FBR](#) casi planas.

4.1 Métodos estables para Funciones de Base Radial

4.1.1 Breve historia de las FBR

Las FBR fueron introducidas por Hardy en 1971 en el área de la cartografía [51]. En dicho problema, Hardy utilizó las FBR multicuádricas (MQ) para interpolar datos dispersos (distribuidos no uniformemente) para formar una topografía y generar contornos. Fue la primera aplicación de las FBR a un problema real, que rápidamente se expandió a un gran número de aplicaciones, fundamentalmente para interpolaciones de datos dispersos en varias dimensiones [70].

En 1982, Franke popularizó el método de las MQ reportando casos conocidos de interpolaciones y mostrando que estas funcionaban mejor [71]. A su vez, Franke conjeturó la hipótesis de la inversibilidad de la matriz de interpolación asociada con las MQ.

Hacia 1986, Michelli probó este hecho haciendo uso de los trabajos de Schoenberg y Bochner de los años 30 y 40 [72]. Esto justificó su uso y aceleró el desarrollo de métodos numéricos que usaban FBR, así como su aceptación en el ámbito científico.

En los 90, fue Kansa quien introdujo un método de colocación sin malla de forma de resolver EDP de tipo parabólicas, hiperbólicas y elípticas [73, 74]. Este método consistía en construir una interpolante suave con FBR de datos dispersos que se derivaba analíticamente con el fin de aproximar las derivadas parciales. Además, contrariamente a otros métodos como MDF, MEF o MVF, el método era independiente de un mallado y los datos podían estar dispersos sobre un dominio irregular en una o varias dimensiones.

Posteriormente, los trabajos pioneros de Schaback, en los cuales formula el principio de incertidumbre [24, 75], Buhmann [20], Wendland [21] y Fasshauer [1, 2] sientan los fundamentos teóricos y ventajas computacionales para aplicaciones en grandes escalas.

Una de las características prácticas más importantes de las FBR es que la interpolante es una combinación lineal de funciones bases trasladadas que dependen solamente de la distancia euclídea a un centro en \mathbb{R}^n . Esto es, las funciones base son radialmente simétricas respecto a sus centros.

4.1.2 Formulación del problema de interpolación con FBR que dependen de un parámetro de forma

En general, las interpolaciones locales en los métodos sin malla se realizan con una base de estas funciones que dependen de la distancia a un centro $\mathbf{x}_j \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ y, en muchos tipos de FBR, también dependen de un parámetro de forma $\varepsilon > 0$ como mostramos en la Tabla 3.1. Podemos notar, entonces, las FBR de la siguiente manera

$$\varphi_j(\mathbf{x}, \varepsilon) = \phi(r, \varepsilon), \quad r = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (4.1)$$

Dado un conjunto de centros $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ de \mathbb{R}^d distribuidos sobre el dominio en forma dispersa o uniforme de las FBR, como vimos en el Cap. 2 la interpolante será ahora una combinación lineal de funciones que también depende de ε

$$P_f(\mathbf{x}, \varepsilon) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j(\mathbf{x}, \varepsilon), \quad (4.2)$$

donde α_j son los coeficientes de la expansión, $\varphi_j(\mathbf{x}, \varepsilon) = \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|, \varepsilon)$ son las FBR definida como en la Sec. 2.5.2 y $\|\cdot\|$ denota la norma euclídea.

Cuando no son necesarios los polinomios $p(\mathbf{x}) \in \Pi^d$ presentados en (3.21), la matriz de interpolación (3.24) tomará la forma

$$\mathbf{A}(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \phi(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1\|, \varepsilon) & \phi(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|, \varepsilon) & \dots & \phi(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_n\|, \varepsilon) \\ \phi(\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|, \varepsilon) & \phi(\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_2\|, \varepsilon) & \dots & \phi(\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_n\|, \varepsilon) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_1\|, \varepsilon) & \phi(\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_2\|, \varepsilon) & \dots & \phi(\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_n\|, \varepsilon) \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

siendo el SEL a resolver ahora dependiente de ε

$$\mathbf{A}(\varepsilon)\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{f}. \quad (4.4)$$

Una vez halladas los componentes α_j del vector $\boldsymbol{\alpha}$ puede reconstruirse la interpolante $P_f(\mathbf{x}, \varepsilon)$ y su evaluación en otros puntos del dominio Ω o incluso será posible diferenciarla. Estas aproximaciones sirvieron para la solución numérica de EDP como fuera mostrado en los trabajos pioneros de Kansa [73, 74].

4.1.3 Convergencia y exactitud en aproximaciones

Los primeros resultados sobre exactitud de **FBR** fueron puestos en práctica sobre grillas infinitas, aunque estos dominios tienen en algunos casos limitaciones prácticas. Cuando se usan **FBR** independientes de ε , en el caso **1D** es sabido que las **PR** $\phi = r^{2m-1}$ que tienen un salto en su derivada $2m - 1$ construyen una interpolante con exactitud de orden $O(h^{2m})$, siendo h inversamente proporcional a la cantidad de nodos n . La suavidad de la **FBR** es un factor clave en la exactitud de la interpolante. Algunos ejemplos numéricos pueden hallarse en [1].

Es sabido que en la medida en que se aumenta la cantidad de centros de la interpolación n las **FBR** continuas por partes convergen algebraicamente a la función interpolante. Por otro lado, también es conocido que las **PR** no pueden converger espectralmente. En el caso de las **FBR** infinitamente diferenciables que no son polinómicas se produce una convergencia con un orden de $O(e^{-\frac{const}{h}})$, siempre que el fenómeno de Runge no aparezca. Este fenómeno, conocido en el caso de interpolaciones polinomiales, también fue definido en [76] para **FBR** Gaussianas en **1D** y en [77] donde se muestra que las mismas son susceptibles al fenómeno de Runge.

Asumimos que en la medida que aumentamos n en la interpolación global el coeficiente $h \rightarrow 0$. Por ejemplo, las **MQ** y **IMQ** tienen convergencia espectral, mientras que las **FBR** Gaussianas, que son las que nos interesan en esta tesis, producen una convergencia de orden $O(e^{-\frac{const}{(\varepsilon h)^2}})$, conocida como convergencia superespectral (ver [78]).

La convergencia de los métodos que utilizan interpolaciones globales con **FBR** que son ε -dependientes puede estudiarse de forma estacionaria o no estacionaria. En el caso de una aproximación estacionaria, el número total de nodos $n = cte.$ es fijada, mientras que el parámetro de forma ε decrece a cero, generando las **FBR** casi planas. Este tipo de análisis no existe en el caso de interpolaciones que dependen de un polinomio. El caso de la aproximación no estacionaria, se fija el valor del parámetro de forma $\varepsilon = cte.$ y se hace incrementar el número total de puntos globales n , como se hace en métodos basados en interpolaciones polinómicas. En particular, interesa conocer el decrecimiento del error para las **FBR** sua-

ves cuando n crece, esto es, $h \rightarrow 0$. Las formas cerradas conocidas de las expresiones del error muestran cómo el error de diferentes FBR caen en estas tres categorías -algebraica, espectral, superespectral-.

La Figura 4.1 muestra los casos de la FBR Gaussiana $\varphi(r, \varepsilon) = e^{-(r\varepsilon)^2}$ para diferentes valores de ε . Cuando el parámetro de forma se fija como un valor pequeño de las interpolantes como el caso de la subfigura correspondiente a $\varepsilon = 0.1$, las FBR se vuelven casi planas de modo que la combinación lineal de las mismas se vuelve casi linealmente dependiente.

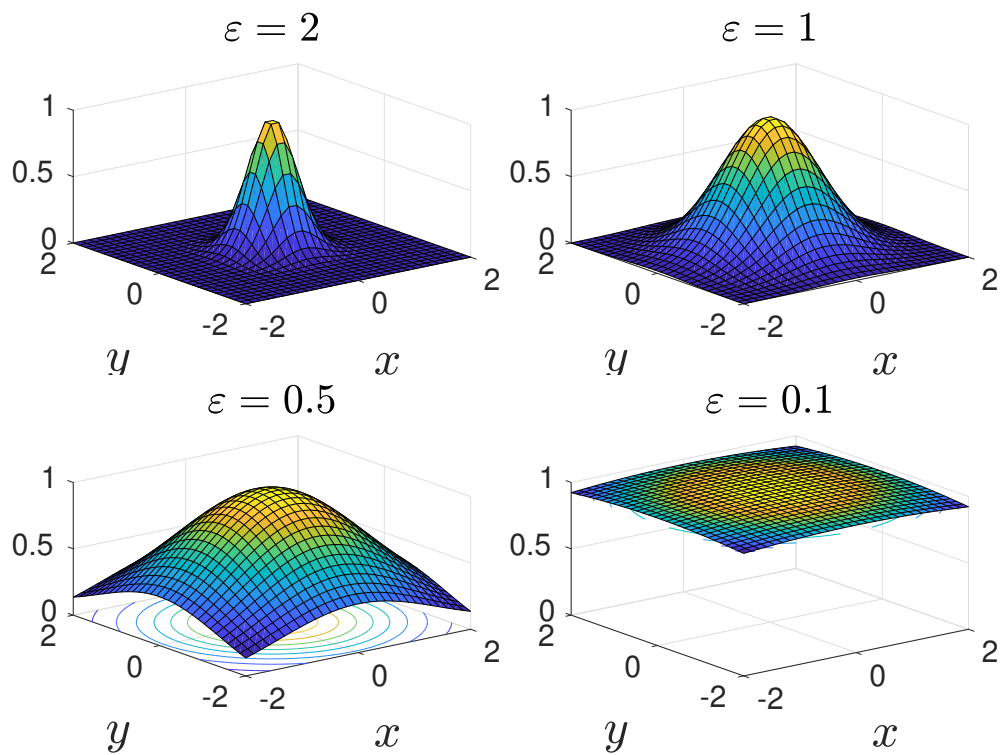


Figura 4.1: Comportamiento de las FBR Gaussianas cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

4.1.4 Condicionamiento de la matriz de interpolación

Un criterio usual para medir la estabilidad numérica de un método de aproximación es el número de condición. En particular, cuando usamos interpolaciones con [FBR](#) miramos el número de condición, $\kappa(\mathbf{A})$, de la matriz de interpolación (4.3) con componentes $\mathbf{A}_{ij} = \varphi(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|, \varepsilon)$ para $i, j = 1, \dots, n$.

Cuando se estudia la perturbación de sistemas lineales aparece la cantidad

$$\kappa(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|, \quad (4.5)$$

que se define como número de condición de la matriz de coeficientes \mathbf{A} del [SEL](#) respecto a la norma $\|\cdot\|$. Este valor es relativo a la norma en cuestión, por tanto cuando se utilizan las p -normas $\|\cdot\|_p, p = 1, \dots, \infty$ es usual hacer referencia a la norma usada.

Cuando se utiliza la norma l_2 en el cálculo del número de condición, resulta

$$\kappa(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_2 \|\mathbf{A}^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{mín}}}, \quad (4.6)$$

donde $\sigma_{\text{máx}}$ y $\sigma_{\text{mín}}$ son los valores singulares más grandes y más pequeños de \mathbf{A} respectivamente.

En el caso de que la matriz \mathbf{A} sea normal, es decir satisfaga que $\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A}$ siendo \mathbf{A}^* la matriz transpuesta conjugada de \mathbf{A} , el número de condición puede calcularse como

$$\kappa(\mathbf{A}) = \frac{|\lambda_{\text{máx}}|}{|\lambda_{\text{mín}}|}, \quad (4.7)$$

donde $\lambda_{\text{máx}}$ y $\lambda_{\text{mín}}$ son los autovalores más grandes y más pequeños de \mathbf{A} respectivamente y las $|\cdot|$ indican el módulo complejo.

En particular, las matrices simétricas son normales y debido a que una matriz definida positiva (como vimos sucede en la sección 3.2.3 con la matriz de interpolación de las [FBR Gaussianas](#)) es simétrica, resulta que dicho número de condición puedo calcularlo como

$$\kappa(\mathbf{A}) = \frac{\lambda_{\text{máx}}}{\lambda_{\text{mín}}}, \quad (4.8)$$

debido a que todos sus autovalores son reales y positivos.

A su vez, usando el teorema de Gershgorin en la matriz (4.3), puede verse que

$$|\lambda_{max} - A_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |A_{ij}|,$$

para todo $i = 1, \dots, n$. Por tanto,

$$\lambda_{max} \leq n \max_{i,j=1,\dots,n} |A_{ij}| = n \max_{i,j=1,\dots,n} |\varphi(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|, \varepsilon)|.$$

Como nuestra $\varphi(r, \varepsilon) = e^{-r^2\varepsilon^2}$ es estrictamente definida positiva, se puede mostrar que estas funciones son acotadas y $\varphi(\mathbf{x}, \varepsilon) \leq \varphi(\mathbf{0}, \varepsilon)$ (consultar [1]). Por tanto $\lambda_{m\acute{a}x}$ está acotado por

$$\lambda_{m\acute{a}x} \leq n\varphi(0, \varepsilon). \quad (4.9)$$

Es decir, es de orden $O(n)$, siendo n la cantidad de centros de la interpolación. Por tanto, si n no es demasiado grande, el autovalor máximo se vuelve aceptable, especialmente cuando la dimensión del problema, d , no es grande.

Para investigar la estabilidad numérica del SEL (4.4), se realizan perturbaciones en dicho sistema. Schaback [79] analizó el condicionamiento de las matrices surgidas de interpolaciones con FBR con total generalidad y obtuvo una cota del error relativo en un análisis de estabilidad. Siguiendo este trabajo, en el cual se estudia las cotas del condicionamiento, el error relativo de los coeficientes de dicho sistema para las FBR estrictamente definidas positivas como las Gaussianas, se tiene la siguiente cota

$$\frac{\|\Delta\boldsymbol{\alpha}\|_2}{\|\boldsymbol{\alpha}\|_2} \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| \frac{\|\Delta\mathbf{f}\|_2}{\|\mathbf{f}\|_2} = \kappa(\mathbf{A}) \frac{\|\Delta\mathbf{f}\|_2}{\|\mathbf{f}\|_2} = \frac{\lambda_{m\acute{a}x}}{\lambda_{m\acute{i}n}} \frac{\|\Delta\mathbf{f}\|_2}{\|\mathbf{f}\|_2}. \quad (4.10)$$

Por tanto, el condicionamiento de este tipo de problema está dado por $\kappa(\mathbf{A})$, donde la estabilidad es dominada por $\lambda_{m\acute{i}n}$ en el caso de FBR que generen matrices definidas positivas.

Buhman [20], Wendland [21] y Fasshauer [1, 2] han hecho una revisión completa de teoremas con cotas del número de condición para distribuciones de nodos regulares y dispersas. En particular, en el caso de la FBR Gaussiana que depende del parámetro de forma ε , la

cota inferior para el λ_{\min} viene dada por

$$\lambda_{\min} \geq \frac{C_d e^{-40,71d^2/(\varepsilon q_\Theta)^2}}{(\sqrt{2}\varepsilon q_\Theta)^d}, \quad (4.11)$$

donde $q_\Theta = \frac{1}{2} \min_{i \neq j} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_2$ es conocida como la distancia de separación entre los centros de datos y C_d es una constante que depende de la dimensión d (consultar [1]).

Por un lado, en el caso estacionario cuando se fija la cantidad de puntos n de la interpolación o bien se fija h , mientras se hace $\varepsilon \rightarrow 0$, la cota inferior de λ_{\min} crece exponencialmente cuando la distancia de separación decrece. Entonces, como $\kappa(\mathbf{A})$ depende del cociente entre los autovalores máximo y mínimo, siendo que el λ_{\max} es de orden n , $\kappa(\mathbf{A})$ también crece exponencialmente. Incrementar ε puede servir para mejorar el número de condición, aunque a expensas de pérdida de la exactitud.

Por otro lado, en el caso no estacionario para un parámetro de forma fijo ε , aumentando la cantidad de puntos n de la interpolación o bien disminuyendo h , vemos que el número de condición crece exponencialmente con la distancia de separación. Desde el punto de vista práctico, si se agregan puntos sobre el dominio Ω para mejorar la exactitud, el problema se vuelve extremadamente mal condicionado.

La experimentación numérica ha mostrado un salto cuantitativo significativo entre las cotas de dichos teoremas y los órdenes encontrados para los números de condición. En general se han encontrado comportamientos asintóticos cuando se estudia el condicionamiento de las matrices de interpolación para las distintas FBR y distribuciones de nodos sobre dominios en distintas dimensiones.

Otro enfoque es el estudio del caso límite ($\varepsilon \rightarrow 0$) desde el punto de vista analítico. Este enfoque es de particular interés y se han realizado grandes esfuerzos en mostrar la convergencia analítica en estos casos en los trabajos [22, 23, 68, 80]. En [81] se realizan estudios del caso límite del parámetro de forma para las FBR Gaussianas y IMQ.

4.1.5 Estabilidad computacional en interpolaciones

La estabilidad es un tema de investigación cuando se interpola con **FBR**, incluso si la inversibilidad de la matriz de interpolación está asegurada como el caso de las Gaussianas, **MQ**, **IMQ**, **IQ**, entre otras. Como se dijo en la sección anterior, cuando el parámetro de forma ε tiende a cero, el error de interpolación decrece hasta que se vuelve inestable para valores bajos si se resuelven los sistemas surgidos de la interpolación con **FBR-Directo** [22, 24]. Esto se debe a que la matriz de interpolación (4.3) se vuelve extremadamente mal condicionada, los coeficientes de la expansión α_j se vuelven grandes en magnitud y la oscilación numérica causa errores de cancelaciones. Suele decirse que las **FBR** constituyen una base mal condicionada en un buen espacio de aproximación.

Varios trabajos de experimentación numérica han sido desarrollados sobre el estudio de las **FBR** casi planas [80, 82, 83]. En [84] se hace un estudio de la **MQ** variando el parámetro de forma con distribuciones fijas de puntos usando precisión aritmética arbitraria.

Fornberg y Zuev [85] estudiaron experimentalmente estos números de condición de la matriz de interpolación **A** con las **FBR** Gaussianas cuando el parámetro de forma $\varepsilon \rightarrow 0$, mientras que Boyd y Gildersleeve [86] experimentaron numéricamente sobre el condicionamiento de esta matriz cuando la cantidad de puntos $n \rightarrow \infty$ en grillas uniformes. En [85] se mostraron la cantidad de autovalores en distintas dimensiones y distribuciones, algunas de las cuales se reproducen en la Tabla 4.1

Nro. autovalores de	$O(1)$	$O(\varepsilon^2)$	$O(\varepsilon^4)$	$O(\varepsilon^6)$	$O(\varepsilon^8)$...
Caso 2D	1	2	3	4	5	...
Caso 3D	1	3	6	10	15	...

Tabla 4.1: Caso de una distribución no regular para GA ($\varphi(r) = e^{-(\varepsilon r)^2}$), MQ ($\varphi(r) = \sqrt{1 + (\varepsilon r)^2}$), IMQ ($\varphi(r) = 1/\sqrt{1 + (\varepsilon r)^2}$) y GIMQ ($\varphi(r) = 1/(1 + (\varepsilon r)^2)$).

Estos estudios basados en la experimentación computacional muestran que si se utiliza el **FBR-Directo** en la resolución del **SEL** (4.4) existe un conflicto en la exactitud posible y la estabilidad numérica.

Las cotas del error de la interpolación para problemas usando **FBR** infinitamente diferenciables muestran que este error decrece exponencialmente cuando decrece la distancia de separación entre nodos para distribuciones que están bien distribuidas sobre el dominio. Pero esto último implica que el número de condición de la matriz de interpolación crece exponencialmente. Esto conlleva a inestabilidades numéricas que hacen imposible obtener resultados exactos como las cotas teóricas de error.

Análogamente, si usamos el parámetro de forma ε para aumentar la exactitud según la cota del error de [87] entonces el número de condición de A crece exponencialmente, dado que las **FBR** se asemejan a una función constante y, por tanto, las filas y columnas de la matriz se asemejan volviendo la matriz no inversible, aun cuando los centros de las **FBR** están distanciados.

Esto fue enunciado por Schaback en [24] como el principio de incertidumbre

- Para tener buena exactitud en la aproximación necesitamos una distancia de llenado h chica ($h \searrow 0$) y/o un parámetro de forma chico ($\varepsilon \searrow 0$).
- Para tener buen condicionamiento necesitamos una distancia mínima de separación grande ($q_\Theta \nearrow \infty$) y/o un parámetro de forma grande ($\varepsilon \nearrow \infty$).

Ambas situaciones no pueden ocurrir simultáneamente. Es decir, en métodos de aproximación con **FBR** no podemos tener al mismo tiempo buena exactitud y buen condicionamiento.

En la Figura 1.2 del Cap. 1 se muestra la inestabilidad numérica producida en el comportamiento del error norma L_2 en un problema de interpolación global sobre un círculo con **FBR-Directo**. Este principio ha derivado en que se busque un valor del parámetro de forma óptimo, es decir aquel que obtenga la mejor exactitud mientras haya estabilidad numérica. En [88] se estudia la elección del parámetro de forma óptimo para la solución de **EDP**.

Pero también, este principio de Schaback ha contribuido a una concepción equivocada de que el espacio de funciones con **FBR** no es bueno debido al mal condicionamiento, asumiendo que la resolución de los **SEL** generados deben resolverse en forma directa. Por eso, desde la primer década del milenio, se han desarrollado distintas técnicas numéricas para estabilizar el comportamiento del error en interpolaciones globales cuando ε es chico.

4.1.6 Desarrollo de métodos de estabilidad para FBR en interpolaciones globales

Como mencionamos anteriormente, los núcleos de interpolación con FBR Gaussianas llevan a matrices $A(\varepsilon)$ muy mal condicionadas cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, esto es, la base $\{e^{-\varepsilon^2 \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|^2} : j = 1, \dots, n\}$ se vuelve numéricamente linealmente dependiente, por lo tanto, numéricamente inestable limitando el uso de las Gaussianas. Sin embargo, estas FBR tienen tasa de convergencia superespectral. La dependencia de la estabilidad de los valores del parámetro de forma se ha estudiado sistemáticamente en los trabajos de Driscoll y Fornberg [68], Fornberg y Wright [25] y Larsson y Fornberg [23].

Al momento de escritura de esta tesis, en el caso de interpolaciones globales, existen cuatro diferentes técnicas numéricas para evitar el mal condicionamiento y ampliar el rango de utilidad práctica de ε mejorando así el error numérico. Estos son, en orden desde su primer aparición en la literatura científica, los siguientes:

- El método C-Padé [25]
- El método FBR-QR [26–29]
- El método Gauss-QR [29]
- El método FBR-GA [30]
- El método FBR-RA [31]

La primera de estas herramientas fue desarrollada en [25, 69] para trabajar con MQ con bajo parámetro de forma asumiendo que $\varepsilon \in \mathbb{C}$. Este enfoque fue llamado el método C-Padé y se limitaba a un número bajo de puntos en la interpolación.

Una segunda herramienta surgida de una observación del principio de incertidumbre estableció que la base usual de FBR no es una buena base y que podía evitarse el mal condicionamiento cambiando la base. Esta idea comenzó a gestarse en los trabajos [26, 27, 89], en los cuales se desarrolló el método FBR-QR en casos especiales de problemas en la esfera. Posteriormente, en [28] se presentó FBR-QR para problemas de interpolación en 2D

con expansiones de las Gaussianas. Finalmente, en [67] se presentó la extensión del FBR-QR para problemas diferenciales.

En [90] se obtuvieron aplicaciones del FBR-QR a problemas de Stefan a dos fases, en [91] se introduce el FBR-QR en el método de soluciones fundamentales para PVC en EDP, en [92] se lo aplica en soluciones numéricas de EDP fraccionarias dependientes de espacio-tiempo y recientemente en [93] se aplica al cálculo de la divergencia con FBR en el caso límite.

Otra interpretación motivada del método FBR-QR fue realizada por Fasshauer y McCourt en [29] usando expansiones de Hilbert-Schmidt (o de Mercer) de núcleo definidos positivos como las FBR Gaussianas. Este nuevo algoritmo fue llamado Gauss-QR.

El método FBR-GA desarrollado en [30] fue otro algoritmo que evita el truncamiento de series infinitas usando la implementación computacional de la función Gamma.

Uno de los últimos desarrollos, presentado por Fornberg y Wright en [31] para estabilizar el error numérico de FBR casi planas, es el FBR-RA que utiliza una aproximación racional vectorizada como una mejora al algoritmo C-Padé.

Otros métodos de estabilidad se presentaron en [94], donde utilizan *descomposición en valores singulares (DVS)* ponderados, en [95], donde un nuevo enfoque de FBR chatas basado en el cálculo numérico de series de Laurent de la inversa de la matriz de interpolación, en [96], donde presentan un nuevo método estable exacto basado en partición de la unidad usando el teorema de Mercer, y en [97], en donde se propone un método estabilizado de DF-FBR para sobrellevar el problema de los MDF en mallas regulares utilizando un núcleo generado con un híbrido de FBR Gaussianas y PR cúbicas.

Sin embargo, la aplicación de estas técnicas en métodos locales integrales es un campo abierto. Estos métodos de estabilidad abrieron nuevas posibilidades para métodos locales integrales que no dependen de un mallado y que interpolan localmente con una base de FBR que dependen del parámetro de forma.

En la Figura 1.2 del Cap. 1 se ilustra el efecto de estabilizar con FBR-QR el comportamiento del error en norma L_2 en un problema de interpolación sobre un círculo con nodos distribuidos en el interior del mismo.

4.2 Expansión de las FBR Gaussianas

La FBR Gaussiana $\varphi(r) = e^{-\varepsilon^2 r^2}$ centrada en $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^d$ es de la forma

$$\phi_k(\mathbf{x}) = \varphi_k(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|) = e^{-\varepsilon^2 \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|^2} \quad (4.12)$$

$$= e^{-\varepsilon^2 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)} = e^{-\varepsilon^2 (\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{x})} e^{-\varepsilon^2 (\mathbf{x}_k^T \cdot \mathbf{x}_k)} e^{2\varepsilon^2 (\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{x}_k)}, \quad (4.13)$$

donde solo el último término depende de \mathbf{x} y \mathbf{x}_k . Haciendo el desarrollo de Taylor de este término resulta

$$e^{2\varepsilon^2 (\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{x}_k)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\varepsilon^2)^n}{n!} (\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{x}_k)^n, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (4.14)$$

En particular, en el caso $d = 2$ la FBR Gaussiana centrada en (x_k, y_k) es de la forma

$$\phi_k(x, y) = e^{-\varepsilon^2 (x^2 + y^2)} e^{-\varepsilon^2 (x_k^2 + y_k^2)} e^{2\varepsilon^2 (xx_k + yy_k)}. \quad (4.15)$$

Expandiendo el último factor dependiente de (x, y) y (x_k, y_k) por Taylor

$$e^{2\varepsilon^2 (xx_k + yy_k)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\varepsilon^2)^n}{n!} (xx_k + yy_k)^n, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (4.16)$$

Entonces, teniendo en cuenta el término $e^{-\varepsilon^2 (x^2 + y^2)}$, tenemos que la FBR Gaussiana depende de la base de funciones

$$e^{-\varepsilon^2 (x^2 + y^2)} \{ \{1\}, \{x, y\}, \{x^2, xy, y^2\}, \{x^3, x^2y, xy^2, y^3\}, \dots \}. \quad (4.17)$$

Se puede ver que en este caso la cantidad de potencias del parámetro de forma ε con la cantidad de monomios en su desarrollo como se muestra en la Tabla 4.2.

Cantidad de potencias de ε	0	2	4	6	8	...
Cantidad de monomios adicionales	1	2	3	4	5	...

Tabla 4.2: Relación en el caso 2D de la cantidad de potencias de ε y de monomios adicionales en la expansión de FBR Gaussianas.

Esta cantidad de monomios adicionales coincide además con la cantidad de autovalores λ_j de la matriz de interpolación de las FBR Gaussianas para una distribución no regular que aparecen con orden ε^j como se muestra en la Tabla 4.3.

Orden de ε	$O(1)$	$O(\varepsilon^2)$	$O(\varepsilon^4)$	$O(\varepsilon^6)$	$O(\varepsilon^8)$...
Cantidad de autovalores	1	2	3	4	5	...

Tabla 4.3: Relación en el caso 2D de la cantidad de autovalores y el orden del parámetro de forma ε en la matriz de interpolación de FBR Gaussianas para una distribución no regular.

Muchos monomios de la base (4.17) se vuelve linealmente dependientes cuando aumenta el grado. Entonces, la Gaussiana se expresa en coordenadas polares $\phi_k(x, y, x_k, y_k) \rightarrow \Phi_k(r, \theta, r_k, \theta_k)$ quedando de la forma

$$\phi_k(r, \theta, r_k, \theta_k) = e^{-\varepsilon^2 r^2} \cdot e^{-\varepsilon^2 r_k^2} \cdot e^{2\varepsilon^2 r_k r \Theta_1} \quad (4.18)$$

siendo $\Theta_1 = \cos(\theta_k) \cos(\theta) + \text{sen}(\theta_k) \text{sen}(\theta)$.

Haciendo la expansión de Taylor del último término de (4.18) resulta

$$\phi_k(r, \theta, r_k, \theta_k) = 2e^{-\varepsilon^2 r^2} \cdot e^{-\varepsilon^2 r_k^2} \cdot \left[(\varepsilon^2 r_k r)^0 \left(\frac{1}{2} \frac{1}{0!0!} \Theta_0 \right) \right] \quad (4.19)$$

$$+ (\varepsilon^2 r_k r)^2 \left(\frac{1}{2} \frac{1}{1!1!} \Theta_0 + \frac{1}{2!0!} \Theta_2 \right) \quad (4.20)$$

$$+ (\varepsilon^2 r_k r)^4 \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2!2!} \Theta_0 + \frac{1}{3!1!} \Theta_2 + \frac{1}{4!0!} \Theta_4 \right) \quad (4.21)$$

$$+ \dots \quad (4.22)$$

$$+ (\varepsilon^2 r_k r)^1 \left(\frac{1}{2} \frac{1}{1!0!} \Theta_1 \right) \quad (4.23)$$

$$+ (\varepsilon^2 r_k r)^3 \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2!1!} \Theta_1 + \frac{1}{3!0!} \Theta_3 \right) \quad (4.24)$$

$$+ (\varepsilon^2 r_k r)^5 \left(\frac{1}{2} \frac{1}{3!2!} \Theta_1 + \frac{1}{4!1!} \Theta_3 + \frac{1}{5!0!} \Theta_5 \right) \quad (4.25)$$

$$+ \dots \quad (4.26)$$

siendo $\Theta_m = \cos(m\theta_k) \cos(m\theta) + \text{sen}(m\theta_k) \text{sen}(m\theta)$.

Tenemos, entonces, la nueva base en polares

$$e^{-\varepsilon^2 r^2} \{1\}, \quad (4.27)$$

$$r\{\cos(\theta), \text{sen}(\theta)\}, \quad (4.28)$$

$$r^2\{1, \cos(2\theta), \text{sen}(2\theta)\}, \quad (4.29)$$

$$r^3\{\cos(\theta), \text{sen}(\theta), \cos(3\theta), \text{sen}(3\theta)\}, \quad (4.30)$$

$$r^4\{1, \cos(2\theta), \text{sen}(2\theta), \cos(4\theta), \text{sen}(4\theta)\}, \quad (4.31)$$

$$r^5\{\cos(\theta), \text{sen}(\theta), \cos(3\theta), \text{sen}(3\theta), \cos(5\theta), \text{sen}(5\theta)\}, \dots \}. \quad (4.32)$$

El término $e^{-\varepsilon^2 r^2} \rightarrow 1$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ para un r fijo, entonces la nueva base se aproxima a los monomios $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, \dots\}$. Si bien esta expresión de la nueva base resuelve el problema vinculado a ε debido a que las funciones trigonométricas dan independencia en la dirección de θ , surge el problema concentrado ahora en r y vinculado a que los monomios de alto grado hacen nuevamente una base mal condicionada. Esto sucede porque para potencias altas de r^p , estos monomios se comportan muy similarmente y por tanto una combinación lineal de los mismos tiende a ser linealmente dependiente. Por ejemplo, si tomamos $r \in (0, 1)$, los valores de los monomios con grados altos serán casi nulos y difieren en las cercanías de $r = 1$ por tanto estaríamos usando funciones casi planas e iguales para combinarlas linealmente, lo cual trae aparejado el problema del mal condicionamiento de la sección 4.1.3 cuando las FBR Gaussianas son casi planas para $\varepsilon \rightarrow 0$ (ver Figura 4.1).

Los polinomios de Chebyshev ayudan a mejorar esta situación como se muestra en el desarrollo de [28]. Una base más atractiva que los monomios de r se puede hallar usando estos polinomios de Chebyshev $T_n(r)$ a partir de la relación

$$r^{2j+p} = \sum_{l=0}^j b_l T_{2l+p}(r), \quad (4.33)$$

donde $p \in \{0, 1\}$ y $j \in \mathbb{N}_0$ (b_l también dependen de j y p).

Entonces de la base en trigonométrica que teníamos en (4.27-4.32), excluyendo el término $e^{-\varepsilon^2 r^2}$, resulta la Tabla 4.4 que muestra la relación entre las potencias de ε y la base de potencias pares e impares de r .

Potencias ε	Potencias pares r		
ε^0	r^0		
ε^4	r^2	$r^2\{\cos(2\theta), \text{sen}(2\theta)\}$	
ε^8	r^4	$r^4\{\cos(2\theta), \text{sen}(2\theta)\}$	$r^4\{\cos(4\theta), \text{sen}(4\theta)\}$
\vdots	\vdots		
Potencias ε	Potencias impares r		
ε^2	$r^1\{\cos(\theta), \text{sen}(\theta)\}$		
ε^6	$r^3\{\cos(\theta), \text{sen}(\theta)\}$	$r^3\{\cos(3\theta), \text{sen}(3\theta)\}$	
ε^{10}	$r^5\{\cos(\theta), \text{sen}(\theta)\}$	$r^5\{\cos(3\theta), \text{sen}(3\theta)\}$	$r^5\{\cos(5\theta), \text{sen}(5\theta)\}$
\vdots	\vdots		

Tabla 4.4: Relación entre las potencias de ε y la base de potencias pares e impares de r .

Factorizando la menor potencia de r en cada columna anterior y usando los polinomios de Chebyshev para convertir las demás potencias resulta la Tabla 4.5 que muestra la relación entre las potencias de ε y el nuevo conjunto de funciones base.

Potencias ε	Potencias pares r		
ε^0	$T_0(r)$		
ε^4	$T_2(r)$	$r^2T_0(r)\{\cos(2\theta), \text{sen}(2\theta)\}$	
ε^8	$T_4(r)$	$r^2T_2(r)\{\cos(2\theta), \text{sen}(2\theta)\}$	$r^4T_0(r)\{\cos(4\theta), \text{sen}(4\theta)\}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
Potencias ε	Potencias impares r		
ε^2	$T_1(r)\{\cos(\theta), \text{sen}(\theta)\}$		
ε^6	$T_3(r)\{\cos(\theta), \text{sen}(\theta)\}$	$r^2T_1(r)\{\cos(3\theta), \text{sen}(3\theta)\}$	
ε^{10}	$T_5(r)\{\cos(\theta), \text{sen}(\theta)\}$	$r^2T_3(r)\{\cos(3\theta), \text{sen}(3\theta)\}$	$r^4T_1(r)\{\cos(5\theta), \text{sen}(5\theta)\}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Tabla 4.5: Relación entre las potencias de ε y el nuevo conjunto de funciones base.

Encontramos, entonces, la nueva base de funciones

$$T_{j,m}^{\cos}(\mathbf{x}) = e^{-\varepsilon^2 r^2} r^{2m} T_{j-2m}(r) \cos((2m+p)\theta), \quad (2m+p) \neq 0, \quad (4.34)$$

$$T_{j,m}^{\text{sen}}(\mathbf{x}) = e^{-\varepsilon^2 r^2} r^{2m} T_{j-2m}(r) \text{sen}((2m+p)\theta), \quad (2m+p) \neq 0, \quad (4.35)$$

donde $\{T_{j-2m}(r)\}$ son los polinomios de Chebyshev, $j \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq m \leq \lfloor j/2 \rfloor$, $p = 0$ si j par y $p = 1$ si j impar.

La nueva expansión de la [FBR](#) Gaussiana es de la forma

$$\varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\lfloor j/2 \rfloor} d_{j,m} c_{j,m}(\mathbf{x}_k) T_{j,m}^{cos}(\mathbf{x}) \quad (4.36)$$

$$+ \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=1-p}^{\lfloor j/2 \rfloor} d_{j,m} s_{j,m}(\mathbf{x}_k) T_{j,m}^{sen}(\mathbf{x}) \quad (4.37)$$

donde $p = 0$ si j es par y $p = 1$ si j es impar. Los llamados factores de escala tienen orden $O(\varepsilon^{2j})$ y son de la forma

$$d_{j,m} = \frac{\varepsilon^{2j}}{2^{j-2m-1} \left(\frac{j+2m+p}{2}\right)! \left(\frac{j-2m-p}{2}\right)!} \quad (4.38)$$

donde $p = 0$ si j es par y $p = 1$ si j es impar y los coeficientes $c_{k,l}, s_{k,l}$ de orden $O(1)$ vienen dados por

$$c_{j,m}(\mathbf{x}_k) = b_{2m+p} t_{j-2m} e^{-\varepsilon^2 r_k^2} r_j^k \cos((2m+p)\theta_k) {}_1F_2(\alpha_{j,m}; \beta_{j,m}; \varepsilon^4 r_k^2), \quad (4.39)$$

$$s_{j,m}(\mathbf{x}_k) = b_{2m+p} t_{j-2l} e^{-\varepsilon^2 r_k^2} r_j^k \sin((2m+p)\theta_k) {}_1F_2(\alpha_{j,m}; \beta_{j,m}; \varepsilon^4 r_k^2), \quad (4.40)$$

donde $b_0 = 1, b_j = 2, \forall j > 0, t_0 = 1/2, t_j = 1, \forall j > 0$ y (r_k, θ_k) las coordenadas polares del nodo \mathbf{x}_k . La función ${}_1F_2$ es la función hipergeométrica con parámetros

$$\alpha_{j,m} = \frac{j - 2m + p + 1}{2}$$

y

$$\beta_{j,m} = \left[j - 2m + 1, \frac{j + 2m + p + 2}{2} \right],$$

siendo $\varepsilon^4 r_k^2$ la variable de dicha función.

La Figura [4.2](#) muestra cuatro niveles de funciones de expansión usadas para generar $T_{j,m}^{cos}$ y $T_{j,m}^{sen}(\mathbf{x})$ para un parámetro de forma chico ($\varepsilon=0.1$). En la misma se puede observar la independendencia lineal entre la nueva base de funciones.

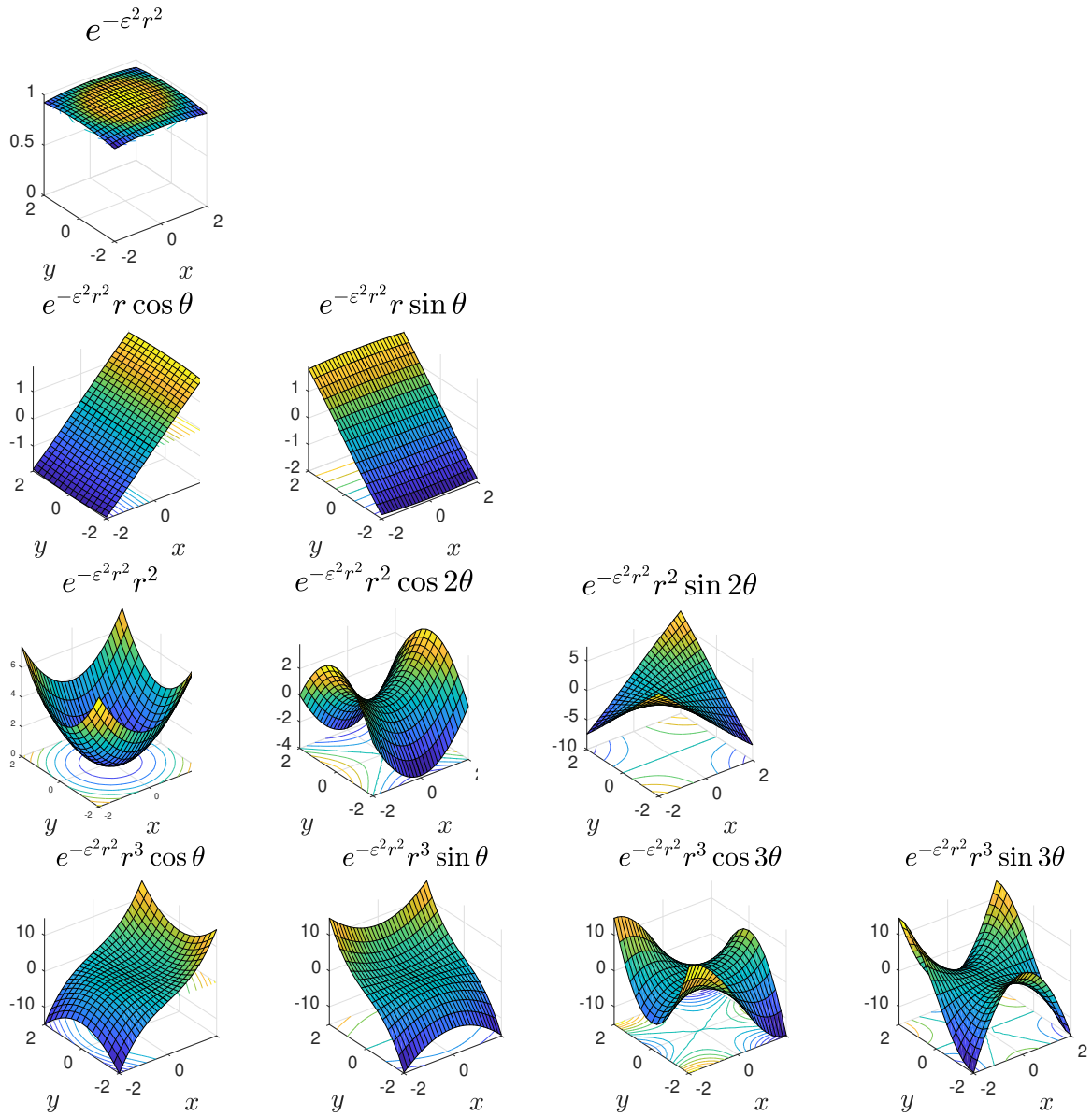


Figura 4.2: Algunas expansiones de las funciones (4.34) y (4.35) usadas para representar las FBR Gaussianas cuando $\epsilon = 0.1$.

4.2.1 Forma matricial de FBR-QR en 2D

Matricialmente, la base de FBR Gaussianas $\Phi(\mathbf{x}) = [\phi_1(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{x}), \dots, \phi_n(\mathbf{x})]^T$ viene dada por

$$\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{x}), \quad (4.41)$$

donde $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times \infty}$ contiene los coeficientes de la expansión $c_{j,m}$ y $s_{j,m}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{\infty \times \infty}$ contiene los factores de escala $d_{j,m}$ y $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ contiene las funciones $T_{j,m}^{cos}(\mathbf{x})$ y $T_{j,m}^{sen}(\mathbf{x})$ expresadas con polinomios de Chebyshev. Esto es,

$$\begin{bmatrix} \phi_1(\mathbf{x}) \\ \phi_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \phi_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & c_{j,m} & \dots \\ \cdot & s_{j,m} & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddots \\ \cdot \\ \cdot \\ \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{j,m} \\ \cdot \\ \cdot \\ \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{0,0}^{cos}(\mathbf{x}) \\ T_{1,0}^{cos}(\mathbf{x}) \\ T_{1,0}^{sen}(\mathbf{x}) \\ T_{2,0}^{cos}(\mathbf{x}) \\ T_{2,1}^{cos}(\mathbf{x}) \\ T_{2,1}^{sen}(\mathbf{x}) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

donde habrá que truncar el índice j para algún j_{max} en la implementación numérica.

En [27] se establecieron criterios de truncamiento para el cálculo eficiente de j_{max} de modo de asegurar que la nueva base sea obtenida en precisión máquina (16 cifras significativas). A su vez, la fórmula presentada en [28] establece una dependencia entre el número M de columnas de la matriz \mathbf{C} y el índice j_{max} como

$$M = \binom{j_{max} + d}{d},$$

siendo d la dimensión del problema. Los algoritmos de implementación puede consultarse en el apéndice de este último trabajo donde también se muestran resultados sobre la variación del número M como función de la cantidad de funciones n de la base y del parámetro de forma ε estableciendo la validez numérica de la elección de dicho j_{max} .

Haciendo, entonces, la factorización matricial QR, $\mathbf{C} = \mathbf{Q}\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times j_{max}}$ con $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ unitaria y $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times j_{max}}$ triangular superior, tenemos

$$\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{C}.\mathbf{D}.\mathbf{T}(\mathbf{x}) \quad (4.43)$$

$$= \mathbf{Q}.\mathbf{R}.\mathbf{D}.\mathbf{T}(\mathbf{x}) \quad (4.44)$$

$$= \mathbf{Q}[\mathbf{R}_1 \mid \mathbf{R}_2] \begin{bmatrix} D_1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & D_2 \end{bmatrix} \mathbf{T}(\mathbf{x}) \quad (4.45)$$

$$= \mathbf{Q}[\mathbf{R}_1\mathbf{D}_1 \mid \mathbf{R}_2\mathbf{D}_2] \mathbf{T}(\mathbf{x}), \quad (4.46)$$

donde $\mathbf{R}_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es triangular superior, $\mathbf{R}_2 \in \mathbb{R}^{n \times j_{max}}$ un bloque matricial, $\mathbf{D}_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\mathbf{D}_2 \in \mathbb{R}^{j_{max} \times n}$ son submatrices diagonales, y $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ es el vector de j_{max} funciones $T_{j,m}^{cos}(\mathbf{x})$ y $T_{j,m}^{sen}(\mathbf{x})$.

Premultiplicando por $\mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{Q}^T$ a la vieja base $\Phi(\mathbf{x})$ de la ecuación (4.46) resulta

$$\mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{Q}^T\Phi(\mathbf{x}) = \left[\mathbf{I} \mid \mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{R}_2\mathbf{D}_2 \right] \mathbf{T}(\mathbf{x}) \quad (4.47)$$

$$= \left[\mathbf{I} \mid \tilde{\mathbf{R}} \right] \mathbf{T}(\mathbf{x}), \quad (4.48)$$

donde $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{R}_2\mathbf{D}_2$ se conoce como matriz de corrección y solo contiene las potencias no-negativas de ε debido al ordenamiento de sus factores de escala (4.38).

Entonces, la nueva base $\Psi(\mathbf{x}) = [\psi_1(\mathbf{x}), \psi_2(\mathbf{x}), \dots, \psi_n(\mathbf{x})]^T$ resulta

$$\Psi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \psi_1(\mathbf{x}) \\ \psi_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \psi_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \left[\mathbf{I} \mid \tilde{\mathbf{R}} \right] \begin{bmatrix} T_{0,0}^{cos}(\mathbf{x}) \\ T_{1,0}^{cos}(\mathbf{x}) \\ T_{1,0}^{sen}(\mathbf{x}) \\ T_{2,0}^{cos}(\mathbf{x}) \\ T_{2,1}^{cos}(\mathbf{x}) \\ T_{2,1}^{sen}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ T_{j_{max}}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}. \quad (4.49)$$

Para interpolar en los puntos de $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^d$ tenemos que resolver el sistema lineal

$\mathbf{B}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{f}$ para $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \dots, \lambda_m]^T$, siendo \mathbf{f} dato. Trasponiendo lo anterior tenemos

$$\mathbf{B} := [\Psi(\mathbf{x}_1) \dots \Psi(\mathbf{x}_m)]^T \quad (4.50)$$

$$= [\mathbf{T}(\mathbf{x}_1) \dots \mathbf{T}(\mathbf{x}_m)]^T \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \tilde{\mathbf{R}}^T \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

$$= \mathbf{T}_1^T + \mathbf{T}_2^T \tilde{\mathbf{R}}^T. \quad (4.52)$$

Finalmente, evaluamos la aproximante $P_f(\mathbf{x}, \varepsilon)$ como

$$P_f(\mathbf{x}, \varepsilon) = \Psi(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\lambda}. \quad (4.53)$$

4.3 El MILDF estabilizado

El objetivo de un algoritmo estable de [FBR](#) consiste en poder evaluar las interpolantes de forma que se mantengan bien condicionadas numéricamente, aun en el caso de que el parámetro de forma tienda a cero. En nuestro caso consideramos las [FBR Gaussianas \(GA\)](#) $\phi(r, \varepsilon) = e^{-(r\varepsilon)^2}$ para las interpolaciones locales del campo u y del término no homogéneo \tilde{b} . Seguiremos las ideas soslayadas en el método de [FBR-QR](#) de forma que en el caso límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ podamos sustituir la base de las [FBR Gaussianas](#) mal condicionadas $\{\phi_j\}$ por otra bien condicionada que expanda exactamente el mismo espacio de funciones. Esto es posible de hacer sin que involucre cancelaciones numéricas [\[27, 28\]](#).

Para evitar el mal condicionamiento que se presenta con las interpolaciones locales de u y de la densidad \tilde{b} , cambiamos las bases tal como fue desarrollado en [\[28\]](#) para [2D](#).

4.3.1 Formulación del MILDF estabilizado

El propósito del algoritmo [FBR-QR](#) es usar una mejor base de funciones basados en la expansión de las [FBR Gaussianas](#) y la condición de conteo presentados en la sección anterior. Estas expansiones son conocidas explícitamente solo para las Gaussianas y las [FBR](#) de Bessel. Encontrar expansiones alternativas para las cuales la condición de conteo valga para otras distribuciones de puntos y dimensiones no es un problema trivial [\[28\]](#) y excede los objetivos de esta tesis.

El aporte de esta tesis es el uso de una técnica de estabilidad como **FBR-QR** para calcular las interpolantes con **FBR** de forma estable en un método local integral para la solución numérica de **PVC**.

En nuestra nueva formulación del **MILFD** en vez de tomar como base las **FBR** Gaussianas que dependen del parámetro de forma ε , el campo u ahora es calculado numéricamente con la nueva base $\{\psi_j\}_{j=1}^n$ con centros $\{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^n$ que forman el estencil Θ_i solapado sobre cada subregión de integración Ω_i y su correspondiente frontera Γ_i ,

$$u(\mathbf{x}) \approx \sum_{k=1}^n \gamma_k \psi_k(\mathbf{x}). \quad (4.54)$$

Sin pérdida de generalidad, suponemos que también el término no homogéneo \tilde{b} es interpolado usando la misma base con los mismos centros como en la ecuación (3.61)

$$b \approx \sum_{k=1}^n \lambda_k \psi_k(\mathbf{x}), \quad (4.55)$$

donde los nuevos coeficientes $\{\gamma_k\}_{k=1}^n$ y $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$, son expresados en términos de los valores nodales del vector \mathbf{u} y los datos en la frontera $g(\mathbf{u}_b)$.

Obtenemos, entonces, de (3.59) la siguiente formulación integral local

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{\xi}) &= \sum_{j=1}^n \gamma_j \left\{ \int_{\Gamma_i} Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \psi_j(\mathbf{x}) d\Gamma_{\mathbf{x}} \right\} + \sum_{j=1}^n \lambda_j \left\{ \int_{\Omega_i} G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \psi_j(\mathbf{x}) d\Omega_{\mathbf{x}} \right\} \\ &+ \int_{\Omega_i} G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) f(\mathbf{x}) d\Omega_{\mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (4.56)$$

donde la base $\{\psi_j\}_{j=1}^n$ que depende de la expansión de las funciones que son las combinaciones de potencias polinómicas, polinomios de Chebyshev y funciones trigonométricas vistas en la sección anterior. Para simplificar la notación usada en la sección anterior llamaremos a esta base $\{V_k\}_{k \geq 1}$.

4.3.2 Expresión matricial discretizada del MILDF estabilizado

En forma matricial, esta nueva base $\{\psi_j\}$ viene dada de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} \psi_1(\mathbf{x}) \\ \psi_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \psi_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} := \mathbf{D}_1^{-1} \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{Q}^T \begin{bmatrix} \varphi_1(\mathbf{x}) \\ \varphi_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \varphi_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \approx \left[\mathbf{I}_n \mid \tilde{\mathbf{R}} \right] \begin{bmatrix} V_1(\mathbf{x}) \\ V_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ V_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}. \quad (4.57)$$

Estas fueron truncadas en cierto $j_{max} = m \geq n$ basados en el tamaño del desarrollo. Los criterios para un truncamiento eficiente de este índice fueron establecidos en la sección 4.2.1.

La matriz $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es ortogonal, $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ es triangular superior y $\mathbf{I}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

La matriz \mathbf{R} se particiona como $[\mathbf{R}_1 | \mathbf{R}_2]$, donde \mathbf{R}_1 es triangular superior y contiene las primeras n columnas de \mathbf{R} , mientras que \mathbf{R}_2 es un bloque de orden $n \times (m - n)$. Consecuentemente, la matriz de escalamiento \mathbf{D} se particiona en \mathbf{D}_1 , un bloque diagonal $n \times n$ y en \mathbf{D}_2 , otro bloque de orden $(m - n) \times (m - n)$.

La matriz de corrección se define como $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{D}_1^{-1} \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{R}_2 \mathbf{D}_2$, la cual contiene las potencias no-negativas de ε debido al ordenamiento de los coeficientes de escala que generan matrices de interpolación locales mejor condicionadas.

Similarmente al MILFD presentado en la sección 3.3.1, tenemos la matriz de interpolación para u y el término \tilde{b} . Estas matrices pueden obtenerse usando la nueva base. Denotaremos a estas nuevas matrices como \mathbf{B}_i y $\tilde{\mathbf{B}}_i$ cuando la colocación de (4.56) sea en el nodo \mathbf{x}_i de la discretización del dominio.

Para estenciles internos, estas matrices serán iguales y de la forma $(\mathbf{B}_\psi^i)_{jk} = \psi_k(\mathbf{x}_j)$ para $j, k = 1, \dots, n$. Transponiendo la ecuación (4.57), obtenemos la nueva matriz

$$\mathbf{B}_\psi^i = \mathbf{V} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n \\ \tilde{\mathbf{R}}^T \end{bmatrix}, \quad (4.58)$$

donde la matriz \mathbf{V} tiene elementos $v_{jk} = V_k(\mathbf{x}_j)$.

Para las FBR Gaussianas, la matriz de interpolación es siempre invertible para distintos distribuciones de nodos [1, 3], sin embargo, esta propiedad no se traslada automáticamente

a las bases generadas por el [FBR-QR](#). Para que el cambio de bases sea válido, necesitamos que la matriz \mathbf{R}_1 de (4.57) sea invertible. Esto es posible si las primeras n columnas de la matriz de coeficientes \mathbf{C} son linealmente independientes. En [67], los autores implementaron una estrategia selectiva de pivoteo en el algoritmo [FBR-QR](#) para superar el aspecto de la dependencia lineal o de las columnas nulas de \mathbf{C} . Esta estrategia de pivoteo permite obtener un algoritmo estable y en determinados casos permite obtener el caso límite para las [FBR Gaussianas](#) cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

La matriz \mathbf{B}_i , correspondiente a los estenciles fronteras, se define de acuerdo a las condiciones de contorno del problema. Para nodos con condiciones de Dirichlet, la nueva base es evaluada como \mathbf{B}_ψ^i , y para nodos con condiciones de Neumann es necesario calcular las derivadas parciales de la nueva base.

De la ecuación (4.57) podemos observar que las funciones $\{\psi_k\}$ dependen linealmente de la expansión de las funciones $\{V_k\}$, por tanto, las derivadas parciales de un operador lineal \mathcal{B} puede calcularse de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} \mathcal{B}\psi_1(\mathbf{x}) \\ \mathcal{B}\psi_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \mathcal{B}\psi_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \approx \left[\mathbf{I}_n \mid \tilde{\mathbf{R}} \right] \begin{bmatrix} \mathcal{B}V_1(\mathbf{x}) \\ \mathcal{B}V_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \mathcal{B}V_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}. \quad (4.59)$$

La matriz local matriz de interpolación \mathbf{B}^i para los estenciles frontera se compone de dos bloques

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_\psi^i \\ \mathbf{B}_{\mathcal{B}\psi}^i \end{bmatrix}, \quad (4.60)$$

donde el bloque \mathbf{B}_ψ^i tiene coeficientes $(\mathbf{B}_\psi^i)_{jk} = \psi_k(\mathbf{x}_j)$ para $j = 1, \dots, n_i$ (nodos interiores) y $k = 1, \dots, n$ (nodos frontera), y de otro bloque $\mathbf{B}_{\mathcal{B}\psi}^i$ con coeficientes $(\mathbf{B}_{\mathcal{B}\psi}^i)_{jk} = \mathcal{B}\psi_k(\mathbf{x}_j)$ para $j = n_i + 1, \dots, n$ y $k = 1, \dots, n$. Las derivadas parciales para los nodos en el contorno correspondiente a las condiciones de Neumann fueron evaluados a través del código de MATLAB `RBF_QR_diffmat_2D` del sitio de E. Larsson [98]. La fórmula exactas para el

cálculo simbólico de las derivadas de las funciones $\{V_k\}$ figuran en el apéndice de ese trabajo.

Las ecuaciones (4.55) y (4.56) se reescriben en términos de los nuevos coeficientes de interpolación

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{d}_i \quad (4.61)$$

y

$$\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\mathbf{B}}_i^{-1} \left(\mathbf{f}_i + \mathbf{B}_{b_i} \mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{d}_i \right), \quad (4.62)$$

donde $(\mathbf{B}_{b_i})_{jk} = b(\psi_j(\mathbf{x}_k), \nabla \psi_j(\mathbf{x}_k))$ para $j, k = 1, \dots, n$.

La ecuación discretizada de esta nueva formulación ahora toma la forma

$$u_i = \sum_{k=1}^n \gamma_k l_{ik} + \sum_{k=1}^n \lambda_k \tilde{l}_{ik} + \tilde{f}_i, \quad (4.63)$$

donde \tilde{f}_i , l_{ik} y \tilde{l}_{ik} son de la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} l_{ij} = \int_{\Gamma_i} Q(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \psi_j(\mathbf{x}) d\Gamma_{\mathbf{x}}, \\ \tilde{l}_{ij} = \int_{\Omega_i} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \psi_j(\mathbf{x}) d\Omega_{\mathbf{x}}, \\ \tilde{f}_i = \int_{\Omega_i} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) f(\mathbf{x}) d\Omega_{\mathbf{x}}. \end{array} \right. \quad (4.64a)$$

$$\quad (4.64b)$$

$$\quad (4.64c)$$

Estas integrales de contorno y dominio son calculadas numéricamente con cuadraturas.

Similarmente a la ecuación (3.76), obtenemos una forma matricial para el campo desconocido u en cada nodo interno como

$$u_i = \left(\mathbf{l}_i^T \mathbf{B}_i^{-1} + \tilde{\mathbf{l}}_i^T \tilde{\mathbf{B}}_i^{-1} \mathbf{B}_{b_i} \mathbf{B}_i^{-1} \right) \mathbf{d}_i + \tilde{f}_i, \quad (4.65)$$

donde los vectores columnas son $\mathbf{l}_i = [\dots, l_{ik}, \dots]^T$ y $\tilde{\mathbf{l}}_i = [\dots, \tilde{l}_{ik}, \dots]^T$.

Para evitar la evaluación de las matrices llenas inversas \mathbf{B}_i^{-1} y $\tilde{\mathbf{B}}_i^{-1}$, seguimos el mismo procedimiento algorítmico presentado en la sección 3.3.3.

Este método fue presentado en [32] como el Método Integral Local Estabilizado de Frontera y Dominio (MILFD-Est), el cual tiene dos ventajas principales comparado con el MRD-RL: el esquema de interpolación local es estable para valores chicos de ϵ y no hay necesidad de usar la solución particular a las bases $\{\psi_k\}$ como en el MRD.

Capítulo 5

RESULTADOS NUMÉRICOS

En este capítulo presentamos resultados numéricos calculados con el [MILFD](#) y el [MILFD-Est](#) para [PVC](#) de diferentes [EDP](#) tipo elípticas. La precisión y la eficiencia de este método es observado a través del desempeño numérico en diversos ejemplos. Los mismos están ordenados en las siguientes tres secciones: ecuaciones de Poisson, ecuaciones de convección-difusión y ecuaciones elípticas. En la primer sección estudiamos tres ecuaciones de Poisson en [2D](#): una con condiciones de frontera mixtas sobre un dominio cuadrado, otra con condiciones de Dirichlet también sobre un cuadrado y una tercera con condiciones de Dirichlet sobre un dominio circular. En la segunda sección estudiamos ecuaciones de convección-difusión [1D](#) y [2D](#) con condiciones de borde mixtas: la primera es un caso conocido y estudiado en la literatura científica, y la segunda es el caso de la capa límite térmica termal estacionaria sin solución analítica.

5.1 Objetivos

El objetivo de este capítulo es mostrar la buena performance de la exactitud numérica en la aproximación de soluciones del método MILFD-Est en distintos problemas diferenciales sobre diversos dominios. Además, se realizaron comparaciones con resultados publicados en [15, 37, 99] para las mismas ecuaciones obteniéndose mejoras a los resultados reportados.

Los resultados numéricos obtenidos fueron comparados con sus correspondientes soluciones exactas en los casos conocidos. Los distintos errores reportados en el trabajo de esta tesis son el error norma L_2 (Error- L_2), el error norma L_2 porcentual (Error- L_2 %) y el **error cuadrático medio (ECM)**:

$$\text{Error-}L_2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (u_i^{exac} - u_i^{aprox})^2}{\sum_{i=1}^N (u_i^{exac})^2}}, \quad (5.1)$$

$$\text{Error-}L_2 \% = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (u_i^{exact} - u_i^{aprox})^2}{\sum_{i=1}^N (u_i^{exac})^2}} 100 \%, \quad (5.2)$$

$$\text{ECM} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (u_i^{exac} - u_i^{aprox})^2}{N}}, \quad (5.3)$$

donde u_i^{exac} es el valor en el nodo \mathbf{x}_i de la solución exacta y u_i^{aprox} es el valor correspondiente de la aproximación. También fue estudiado el error norma L_∞ pero no fue reportado.

Los resultados numéricos fueron estudiados sobre distintas distribuciones de nodos sobre el dominio y la frontera, esto es, uniformes, de tipo Halton, cuasi-uniforme y distribución dispersa repelente. Una disquisición sobre las distribuciones de los nodos se presenta en la sección 5.2 sobre discretizaciones del dominio.

En algunos casos, también fueron comparados tiempos computacionales para evaluar la eficiencia de un método local integral al introducir una técnica de estabilidad numérica cuando se interpola localmente con FBR.

Las implementaciones y los experimentos numéricos fueron realizados usando el software de cálculo numérico MATLAB en una PC con 7,5 GB de RAM y un procesador AMD Phenom (tm) II X6 1090T corriendo a 804 MHz.

5.2 Discretización del dominio

Tradicionalmente, las discretizaciones para EDP se basan en mallas estructuradas. Sin embargo, de los métodos locales integrales, el MILFD en particular es considerado un método sin malla en el que la discretización del dominio Ω está basada en las distintas distribuciones de nodos sobre este, por tanto, no son necesarias las relaciones de conectividad entre nodos o elementos, como en el caso de MEF.

Los métodos conocidos en la literatura sobre distribuciones de nodos se clasifican en dos grandes categorías: los métodos iterativos generados a partir de un algoritmo recursivo de forma de llenar el dominio, y los métodos de avance, que comienzan con una distribución de nodos sobre la frontera Γ y van avanzando hasta llenar el dominio.

Los algoritmos usados en esta tesis para generar distribuciones de nodos son de ambas categorías mencionadas anteriormente, en particular, en casos 2D donde fueron implementados en MATLAB a partir de algoritmos propios o modificaciones de algoritmos existentes. Por otra parte, no se modificaron las implementaciones para realizar una variación de la densidad de nodos en distintas partes del dominio para mejorar la efectividad, dado que esto excedía los objetivos de esta tesis. Otras opciones para crear distribuciones de nodos 2D pueden encontrarse en [100] y sobre adaptividad de los mismos en la solución numérica con FBR de problemas de Poisson con condiciones de Dirichlet en [101].

En esta tesis, los dominios rectangulares fueron discretizados generando nodos de tipo:

- Distribuciones uniformes.
- Distribuciones de tipo Halton [102].
- Distribuciones cuasi-uniformes [36].
- Distribuciones de tipo repelente [37].

En la Figura 5.1 se muestran ejemplos de distribuciones de nodos uniformes, de tipo Halton y cuasi-uniformes para el cuadrado $\Omega = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$. A continuación, desarrollamos brevemente algunos de estos tipos de distribuciones.

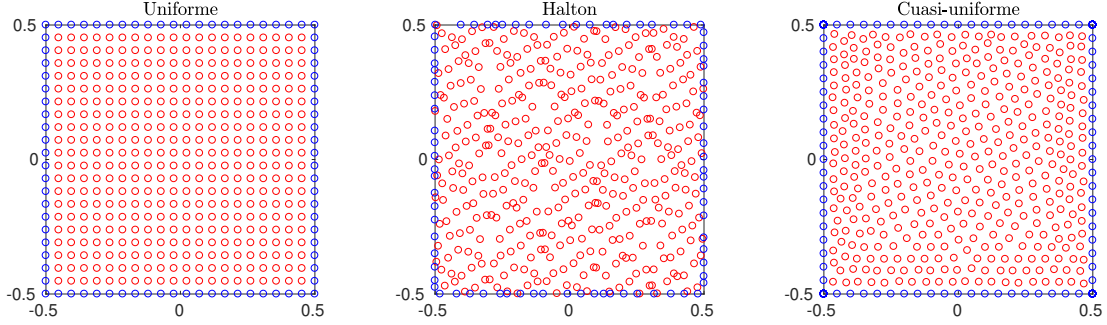


Figura 5.1: Discretizaciones del dominio usando diferentes distribuciones de nodos. Uniforme: $N = 400$ nodos interiores + 84 nodos frontera. De tipo Halton: $N = 400$ nodos interiores + 80 nodos frontera. Cuasi-uniformes: $N = 401$ nodos interiores + 76 nodos frontera.

5.2.1 Distribuciones de tipo Halton

La construcción de los puntos Halton [102] está basada en un método iterativo determinístico. Estos nodos son creados a partir de la sucesión de van der Corput tomando un número primo como su base y generando puntos bien distribuidos en el intervalo $(0, 1)$. Para generar los puntos de Halton en el cuadrado $(0, 1)^2$, creamos cada coordenada con un número primo base distinto. Luego, se traslada y se escala al dominio rectangular de \mathbb{R}^2 mediante una transformación lineal. Los nodos distribuidos en los contornos de la frontera también se generaron como puntos de Halton pero de una dimensión.

Estas distribuciones se usaron en las EDP de las secciones 5.4.2 y 5.4.3 para abordar problemas de Poisson con condiciones mixtas y de Dirichlet, respectivamente. También se usaron en la ecuación de convección-difusión de la sección 5.5.1. En el Apéndice B se puede consultar las cantidades de nodos utilizadas en cada caso.

5.2.2 Distribuciones cuasi-uniformes

Las distribuciones cuasi-uniformes fueron desarrolladas por Fornberg y Flyer en [36] para 2D. Estas distribuciones fueron creadas con un método de avance que genera un conjunto de nodos a partir de una función de densidad que comienza desde la frontera hacia el interior del dominio.

Estas distribuciones se usaron en las EDP de las secciones 5.4.2, 5.4.3, 5.5.1 y 5.5.2. En el Apéndice B se pueden consultar las cantidad de nodos utilizados en cada caso, tanto en el interior como en la frontera de cada dominio.

5.2.3 Distribuciones repelentes

El dominio circular fue discretizado usando el algoritmo repelente citado anteriormente. El propósito de este algoritmo es incrustar el círculo en un cuadrado 2D y discretizarlo usando nodos estructurados equiespaciados con un determinado espaciamiento h e ir descartando aquellos nodos que estén a determinada distancia de la frontera circular. Luego se va aplicando a cada nodo interior un desplazamiento ligeramente aleatorio en la dirección de una fuerza de repulsión dada por $\vec{F}(x, y) = \sum_{i=1}^n \frac{\vec{r}_i}{\|\vec{r}_i\|_2^3}$, donde $\vec{r}_i = (x - x_i, y - y_i)$ y n es el número de nodos cercanos al i -ésimo nodo (x_i, y_i) . La frontera $\partial\Omega$ se discretiza con una cantidad fijada de nodos equiespaciados. Estas distribuciones se usaron en la sección 5.5.1.

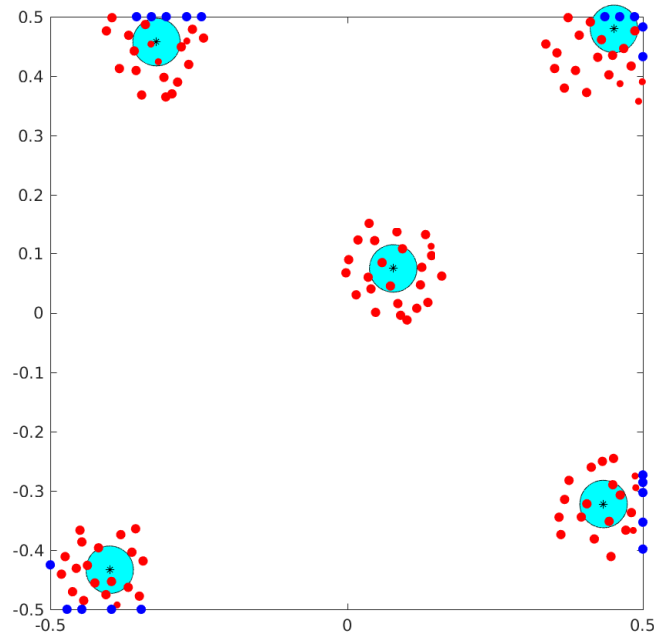


Figura 5.2: Diferentes tipos de estenciles: subregión de integración (círculo verde), punto de colocación (asterisco), punto interior (rojo) y nodo frontera (azul).

Para la construcción de los estenciles locales, definimos para cada dominio una región fija cercana a la frontera donde, si el punto de evaluación del punto de colocación es ubicado dentro de esta región, el estencil local Θ_i encierra n_i nodos interiores y n_b nodos sobre la frontera. En el otro caso, el estencil solo encierra nodos interiores. Ejemplos de diferentes tipos de estenciles dependiendo de su posición se muestran en la Figura 5.2. Los resultados numéricos de las subsecciones 5.4.1, 5.4.2, 5.4.3, 5.5.1 y 5.5.2 fueron corridos con una cantidad fija de estenciles de $n = 25$ mientras que los ejemplos de las subsecciones 5.4.4 y 5.6.1, se consideraron estudios sobre la cantidad de estenciles, que varían entre 10 y 100 nodos.

5.3 Implementación numérica para el MILFD-Est

En esta sección explicamos paso por paso el procedimiento algorítmico para resolver numéricamente un PVC con su correspondiente EDP y condiciones de borde usando el esquema del MILFD-Est. Los pasos de la implementación pueden describirse como:

1. Discretización del dominio y de su frontera del PVC.
2. Construcción de los estenciles locales.
3. Definición de las subregiones de integración.
4. Cálculo por cuadraturas de las integrales de frontera y dominio.
5. Resolución de los SEL locales provenientes de las interpolaciones con FBR.
6. Resolución del sistema lineal ensamblado.
7. Reconstrucción de la solución aproximada.

Discretización del dominio y de su frontera del PVC

El MILFD-Est es un método local sin malla con el cual, a partir de la discretización uniforme o dispersa del dominio Ω (denominaremos Θ) con N nodos interiores y N_{fro} nodos en la frontera Γ , se obtienen matrices locales de interpolación llenas de dimensión menor n dependiente del tamaño de los estenciles locales. El procedimiento algorítmico presentado

en la sección 3.3.3 establece los $2N$ SEL a resolver numéricamente. La resolución numérica de cada uno de estos sistemas permite armar una ecuación de un solo sistema más grande de tamaño $N \times N$ con una matriz rala a resolver.

El primer paso en un método sin malla es crear los nodos internos del dominio computacional. En la sección anterior se describen algunas de las discretizaciones creadas haciendo algunos arreglos matemáticos en dominios 2D. No obstante, un método sin mallado trabaja bien con cualquier distribución random o manual por el usuario.

Construcción de los estenciles locales

Como el MILFD-Est es un esquema sin malla, el siguiente paso es definir una estrategia para seleccionar un número finito de puntos para conformar los estenciles Θ_i de cada nodo interior. Estos nodos serán los centros de las FBR elegidas para las interpolaciones locales. En esta tesis usamos dos alternativas para definir la cercanía a la frontera. Por un lado, en los dominios poligonales definimos una banda cercana a la frontera para la selección de nodos frontera según una cantidad de nodos frontera fija a elegir. Por otro, se utilizó la estrategia de usar el criterio de los puntos más cercanos al punto de colocación.

Definición de las subregiones de integración

Para calcular las integrales de frontera y dominio es necesario definir la subregión de integración Γ_i . En esta tesis usamos la FGD definida sobre un círculo de radio inversamente proporcional a la cantidad de puntos internos del dominio. Una vez definida la ecuación discretizada del MILFD-Est, es necesario calcular numéricamente por cuadraturas las integrales de frontera y dominio.

Dos posibles esquemas de integración numérica para realizar este cálculo son la regla del trapecio y la cuadratura de Gauss-Legendre. En esta tesis se optó por esta última. En el Apéndice A mostramos la relación existente entre la integración numérica de las integrales de frontera y dominio y la exactitud del error para el MILFD y el MILFD-Est.

Resolución de los SEL locales

Una vez generadas las matrices de interpolación locales de dimensión dependiente de la cantidad de puntos de los estenciles locales, se utilizó el procedimiento algorítmico presentado en la sección 3.3.3 para resolver estos SEL. El reemplazo de la buena base con FBR Gaussianas por la base generada por las combinaciones de funciones de Chebyshev y trigonométricas del FBR-QR para valores bajos del parámetro de forma mejora el condicionamiento y, por tanto, su resolución numérica.

Los sistemas lineales planteados en la sección 3.3.3 son pequeños, llenos y mejor condicionados, por tanto su resolución numérica se realiza con métodos directos para SEL. Estos solvers aprovechan las ventajas de simetrías en los problemas usando el solver adecuado según la matriz de coeficientes a resolver para minimizar el tiempo computacional (LU solver, LDL solver, Cholesky solver). En el caso que estas sean hermitianas definidas positivas, se resuelvan por el método de Cholesky.

Resolución del sistema lineal ensamblado

El sistema lineal ensamblado se resolvió usando el método iterativo de tipo Krylov llamado *generalized minimal residual (GMRES)* (conocido en español como método residual mínimo generalizado) con y sin técnicas de preconditionamiento. Este método aproxima el vector solución en un subespacio de Krylov con residuo mínimo y usando la iteración de Arnoldi. La tolerancia para este esquema residual fue seteada en 1×10^{-9} , el vector inicial $\mathbf{ones}(N, 1)$, la dimensión del espacio de búsqueda $\lfloor N/10 \rfloor$ y el máximo número de iteraciones igual a N , siendo N la cantidad de nodos internos del dominio. Para mayores detalles de este método consultar [13]. En esta tesis no se utilizaron técnicas de reordenamiento de la matriz de ensamblado dispersa como el algoritmo de Cuthill-McKee.

El MILFD-Est recorre cada uno de los nodos interiores \mathbf{x}_i de la discretización del dominio y para cada punto usamos la ecuación (4.65) en términos de los valores desconocidos $u_i = u(\mathbf{x}_i)$ y los valores $u_j = u(\mathbf{x}_j)$, donde \mathbf{x}_j pertenece al estencil local de interpolación Θ_i . La i -ésima ecuación del SEL ensamblado y disperso se calcula haciendo el procedimiento

similar al presentado en la sección 3.3.3. Los elementos del vector \mathbf{z} correspondientes a los valores desconocidos u_j que forman parte de los elementos del vector \mathbf{d}_i son parte de la matriz dispersa, mientras que los elementos restantes de \mathbf{z} junto con la data de frontera $g(\mathbf{x}_j)$ (también elementos del vector \mathbf{d}_i) son usados para calcular la i -ésima entrada del lado derecho del sistema ensamblado.

En la Figura 5.3 mostramos el patrón de esparcidad para la ecuación unidimensional de convección-difusión tratada en esta tesis usando una distribución de nodos uniformes con $N = 2000$ puntos interiores y un estencil de tamaño $n = 25$. En cada fila se tiene poca cantidad de coeficientes no nulos (en azul) mientras que una gran cantidad de coeficientes nulos (en blanco) por fila dan la característica de una estructura de matriz dispersa. A su vez, la construcción de esta matriz iterativamente y su ensamblado, le dan estructura de matriz en banda. En este caso, la cantidad de elementos no nulos es $nz = 50000$, apenas el 1.25 % de la cantidad de coeficientes totales de la matriz ensamblada.

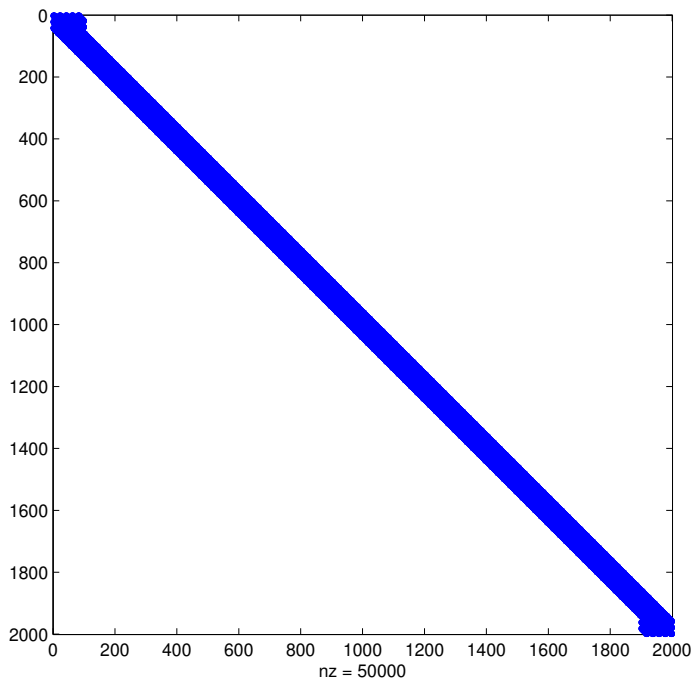


Figura 5.3: Patrón de esparcidad de la matriz ensamblada del problema 1D de la ecuación de convección-difusión.

Precondicionamiento de la matriz de ensamblado

Para resolver el sistema lineal ensamblado también se testeó el método de [GMRES](#) con precondicionamiento directo e inverso [[13](#), [14](#)]. Se precondicionó este sistema (3.86) mediante una premultiplicación o posmultiplicación por una matriz no singular \mathbf{N} llamada precondicionador, transformándolo en un sistema equivalente mejor condicionado para que el esquema iterativo converja con mayor rapidez. Se implementaron precondicionadores de tipo directo ($\mathbf{N} \approx \mathbf{M}$) y de tipo inverso ($\mathbf{N} \approx \mathbf{M}^{-1}$).

Entre las técnicas de precondicionamiento directo, se utilizó un precondicionador en banda debido al patrón de esparcidad de la matriz de ensamblado. También, se testearon las técnicas de [Factorización LU Incompleta \(ILU\)](#) (del inglés, incomplete LU factorization preconditioner), con y sin llenado. Entre las técnicas de precondicionamiento inverso, se utilizaron las técnicas de [aproximación dispersa de la inversa \(SPAI\)](#) (del inglés, sparse approximate inverse preconditioner) y [aproximación factorizada de la inversa \(AINV\)](#) (del inglés, approximate inverse preconditioner).

En [[33](#)] se mostraron las tasas de convergencia, condicionamiento y tiempos computacionales de estas técnicas de precondicionamiento aplicados al [MRD-RL](#). Los resultados mostraron que si bien cuando las técnicas de precondicionamiento implementadas permitieron resolver el sistema ensamblado alcanzando la tolerancia deseada, los errores numéricos totales del método integral local no mejoraban.

5.4 Resolución numérica de EDP tipo Laplace y Poisson con el MILFD-Est

En esta sección mostramos los resultados numéricos en distintos problemas de valores de contorno de Laplace y Poisson con distintas condiciones de borde en [2D](#). En las experimentaciones abordamos primeramente una [EDP](#) de Laplace con condiciones de borde de Dirichlet y problemas de Poisson con condiciones mixtas de Dirichlet y de Neumann. El dominio es cuadrangular o bien el círculo unitario con distintos tipo de distribuciones de nodos como uniformes, de tipo Halton, cuasi-uniformes y repelentes en su interior y frontera.

5.4.1 EDP de Laplace y Poisson en casos simples

Consideramos PVC en 2D sobre el dominio $\Omega = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = b(x, y), \\ u(x, y) = u_0(x, y). \end{cases}$$

Se testaron casos de Laplace y Poisson con condiciones de borde de Dirichlet en $\Gamma = \partial\Omega$.

Los casos estudiados fueron con fuente $b = 0$, $b = cte. \neq 0$ y $b = b(x)$.

- $\Delta u(x, y) = 0$. Exacta: $u(x, y) = 10x - \frac{1}{2}y$.
- $\Delta u(x, y) = 4$. Exacta: $u(x, y) = x^2 + y^2$.
- $\Delta u(x, y) = -x^2$. Exacta: $u(x, y) = -\frac{1}{246} (50x^2 - 8y^2 + 33,6) \left(\frac{x^2}{4} + y^2 - 1\right)$.

En la Figura 5.4 se muestran las soluciones exactas de cada uno de estos casos. Las condiciones de borde vienen dadas por las soluciones exactas en cada caso. Las distribuciones sobre el dominio usadas fueron de puntos uniformes y tipo Halton con $N = 400, 900, 1600$.

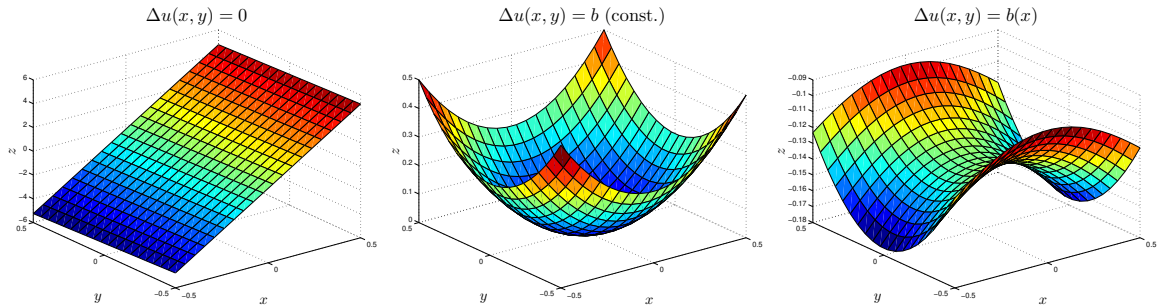
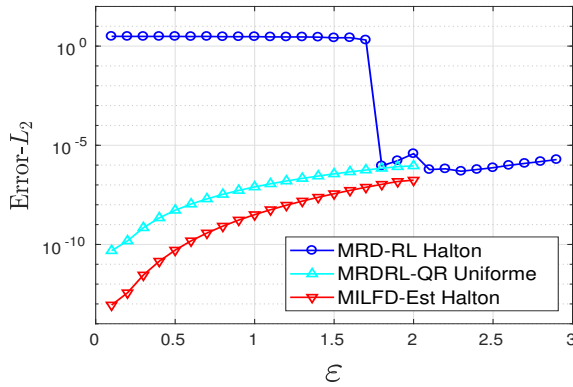


Figura 5.4: Soluciones exactas.

Se estudió la performance del MILFD usando FBR Gaussianas y del MILFD-Est para analizar la estabilidad numérica del error total utilizando un rango bajo del parámetro de forma $\varepsilon \in (0, 3)$. También comparamos los resultados usando con el MRD-RL o su versión con el esquema local de FBR-QR que denominamos MRDRL-QR. Los resultados muestran la mejora lograda del MILFD-Est en estos casos simples.

Para obtener estos valores del error en los casos del MILFD, MRD-RL y MRDRL-QR no se utilizaron algoritmos de optimización del parámetro de forma ε de la FBR Gaussiana. Algunas estrategias para encontrar el parámetro óptimo pueden consultarse en el libro de Fasshauer [1], como por ejemplo la herramienta estadística de validación cruzada (del inglés, leave-one-out cross validation (LOOCV)) presentada en [103] para interpolaciones. Posteriormente, en [88] se estudia un criterio de elección de parámetros de forma óptimos para la resolución numérica de EDP con métodos espectrales que utilizan FBR. En esta tesis usamos la estrategia más simple debido a que en la mayoría de los casos testeados conocemos la solución exacta. Es decir, repetimos una serie de experimentos numéricos variando el parámetro de forma y elegimos aquel para el cual se obtiene el mejor error. Esta forma de prueba y error si bien nos permite encontrar el menor error numérico en cada caso tiene la desventaja de necesitar de varias corridas del método hasta alcanzarla. Volveremos sobre este punto más adelante cuando hablemos de tiempos computacionales.



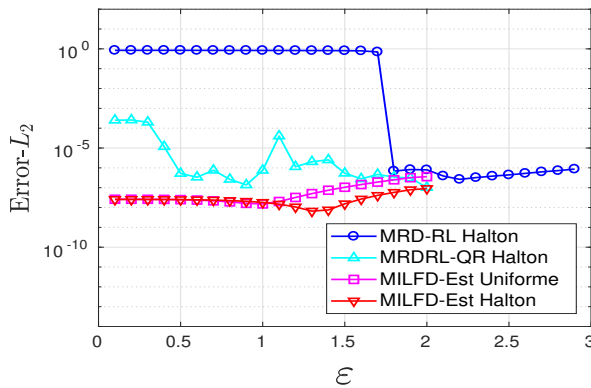
N	$\Delta u = 0$	
	MRD-RL	MILFD-Est
400	7.33E-07	5.95E-14
900	5.42E-07	7.77E-14
1600	4.90E-07	6.98E-14

Tabla 5.1: Error- L_2 en Laplace para distribuciones de tipo Halton.

Figura 5.5: Error- L_2 para $N = 1600$ ($b = 0$).

En la Figura 5.5 se observa que cuando se resuelve este problema de Laplace con el MRD-RL sin estabilizar, este no resulta estable para valores del parámetro de forma cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ (línea azul). La estabilidad del error es lograda en valores de $\varepsilon < 2$ para la versión de MRD-RL con el método de FBR-QR (notada como MRDRL-QR) en una distribución

uniforme (línea cian) y para el MILFD-Est en una de tipo Halton (línea roja) con $N = 1600$ puntos internos del dominio. Los mejores los errores se presentan para este último método cuando la técnica de estabilidad FBR-QR se aplica localmente. La Tabla 5.1 recoge los mejores resultados en cada caso de $N = 400, 900, 1600$ del Error- L_2 para puntos de Halton del MILFD-Est (columna derecha), los cuales alcanzan errores del orden 1×10^{-14} casi del orden epsilon máquina en MATLAB. Estos resultados son comparados con el MRD-RL (columna izquierda) usando FBR Gaussianas en la interpolación local del término u (en este caso $b = 0$), siendo en este caso siete órdenes mayores. Estos resultados reportados en la tabla son para el valor del parámetro de forma que tiene el mejor error numérico (denotamos ε_{opt}).



N	$\Delta u = cte.$		
	MRD-RL	MRDRL-QR	MILFD-Est
400	1.73E-06	5.16E-07	2.53E-08
900	8.66E-07	8.87E-08	2.55E-08
1600	2.63E-07	2.10E-07	5.92E-09

Tabla 5.2: Error- L_2 en Poisson para distribuciones de tipo Halton.

Figura 5.6: Error- L_2 para $N = 1600$ ($b = cte.$).

En la Figura 5.6 se observa un comportamiento similar de estabilidad del error numérico para el MILFD-Est sobre una distribución uniforme y dispersa tipo Halton con $N = 1600$ (líneas magenta y roja respectivamente). El método MRD-RL (línea azul) se desestabiliza a partir de valores menores a $\varepsilon = 1.7$, mientras que la versión del MRD-RL con FBR-QR (MRDRL-QR) también se desestabiliza desde el mismo valor (línea cian). En la Tabla 5.2 se muestra, además, que el MILFD-Est supera en un orden de magnitud al MRD-RL para $N = 900$ y en dos órdenes para $N = 400, 1600$. A su vez, el MILFD-Est supera en un orden al MRDRL-QR para el caso $N = 400$ y en dos órdenes para $N = 1600$. Todos estos resultados reportados son para el valor del parámetro de forma óptimo ε_{opt} .

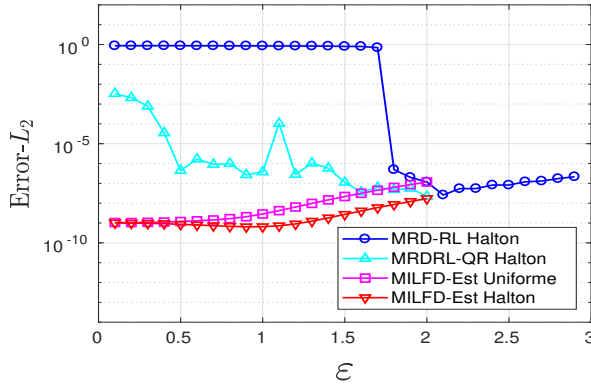


Figura 5.7: Error- L_2 para $N = 1600$ ($b = b(x)$).

N	$\Delta u = b(x)$		
	MRD-RL	MRDRL-QR	MILFD-Est
400	4.00E-08	7.41E-08	3.76E-08
900	4.13E-07	1.73E-08	9.95E-10
1600	5.41E-08	2.20E-08	6.47E-10

Tabla 5.3: Error- L_2 en Poisson para distribuciones de tipo Halton.

Finalmente, en este último caso simple de un problema de Poisson, en la Figura 5.7 se muestra nuevamente la estabilidad numérica lograda para el método desarrollado en esta tesis en los dos tipos de distribuciones, uniforme y dispersa (líneas magenta y roja respectivamente). Desde $\varepsilon = 2$ tanto el MRD-RL como la versión con FBR-QR, MRDRL-QR, se vuelven inestables (líneas azul y cian respectivamente). La Tabla 5.3 muestra que usando el ε_{opt} el MILFD-Est alcanza errores del orden de 1×10^{-10} para los casos de Halton con $N = 900, 1600$ superando por hasta tres órdenes los otros dos métodos. Además, la columna de la derecha refleja que, en la medida en que la cantidad de nodos de la discretización N crece, disminuye el error numérico.

Estos resultados preliminares se reportaron en [35].

5.4.2 EDP de Poisson con condiciones mixtas

Consideramos el siguiente problema elíptico: una EDP de Poisson donde el término no-homogéneo es producto de funciones trigonométricas sobre el dominio cuadrado centrado en el origen $\Omega = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2 \subset \mathbb{R}^2$. La ecuación gobernante es de la forma

$$\Delta u(x_1, x_2) = -\frac{5}{4}\pi^2 \text{sen}\left(\frac{\pi x_1}{2}\right) \cos(\pi x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (5.4)$$

y las condiciones de frontera mixtas son

$$(CB) \begin{cases} u(-0,5, x_2) & = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\pi x_2), \\ u(0,5, x_2) & = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\pi x_2), \\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, -0,5) & = \pi \text{sen}\left(\frac{\pi x_1}{2}\right), \\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, 0,5) & = -\pi \text{sen}\left(\frac{\pi x_1}{2}\right). \end{cases} \quad (5.5)$$

La solución exacta de este problema viene dada por $u(x_1, x_2) = \text{sen}\left(\frac{\pi x_1}{2}\right) \cos(\pi x_2)$.

Para este ejemplo, consideramos distribuciones uniformes, de tipo Halton y cuasi-uniformes cuyas cantidades de puntos se muestran en el Apéndice B. En el caso de las distribuciones uniformes, discretizamos con una distribución inicial de $N = 400$ subregiones de integración y aumentamos hasta una cantidad más densa de $N = 2500$.

La ecuación matricial (4.65) es aplicada a cada punto interior sobre cada correspondiente subregión de integración. En esta tesis, N denota el número total de puntos internos, que coincide con el número total de subregiones de integración. La Figura 5.8 muestra el ECM para una distribución uniforme con $N = 1600$, como una función del parámetro de forma para MRD-RL, MILFD y MILFD-Est.

Los tres métodos muestran el mismo comportamiento para el parámetro de forma en el rango $2.5 < \varepsilon < 4.0$, donde el ECM decrece un orden de magnitud desde 1×10^{-5} a 1×10^{-6} . Sin embargo, para $\varepsilon < 2.5$ el ECM del MRD-RL y del MILFD se desestabilizan, dando un salto significativo, mientras que el error del MILFD-Est decrece, alcanzando valores del orden de 1×10^{-8} . Esto es una mejora numérica en exactitud de dos órdenes. Este mismo comportamiento fue encontrado discretizando con nodos de Halton y cuasi-uniformes.

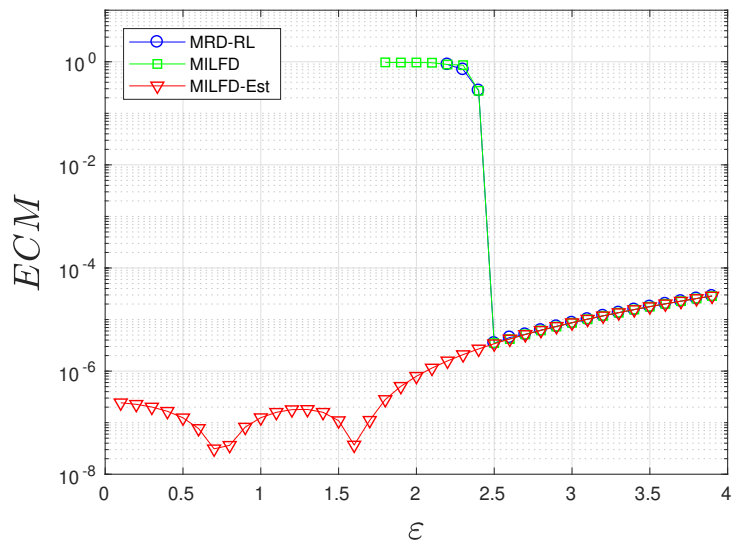


Figura 5.8: Comparación entre MRD-RL, MILFD y MILFD-Est con FBR Gaussianas para $N = 1600$ nodos interiores.

Este problema numérico fue corrido para cuatro discretizaciones uniformes del dominio con $N = 400, 900, 1600, 2500$ para hacer un estudio no estacionario sobre la cantidad de puntos interiores al dominio. Los resultados numéricos están mostrados en la Tabla 5.4. Leyendo la tabla por columnas observamos que la exactitud crece con las discretizaciones del dominio para el MILFD-Est alcanzando un orden de 1×10^{-8} mientras que para el MRD-RL y el MILFD se mantienen en el mismo orden de magnitud 1×10^{-6} . Cuando leemos la tabla por filas notamos el efecto beneficioso del nuevo método MILFD-Est, dado que, para $N = 900, 1600, 2500$ el ECM decrece por un orden de magnitud para $N = 900$ y por dos órdenes para $N = 1600$ y 2500 .

N	MRD-RL			MILFD			MILFD-Est (1er salto)		
	ϵ_{opt}	ECM	tiempo	ϵ_{opt}	ECM	tiempo	ϵ_{opt}	ECM	tiempo
400	1.60	1.15E-06	15.1	1.60	1.12E-06	16.6	1.60	1.12E-06	32.7
900	1.90	1.62E-06	34.1	1.90	1.61E-06	37.3	1.60	1.53E-07	71.9
1600	2.50	3.50E-06	61.0	2.50	3.48E-06	65.6	1.60	3.69E-08	126
2500	2.90	4.19E-06	94.0	2.90	4.31E-06	102	1.60	2.33E-08	190

Tabla 5.4: ECM y tiempo computacional (en segundos) para diferentes N en el caso de distribuciones uniformes.

Al igual que en los experimentos simples de la subsección anterior, en este caso se usó el parámetro de forma óptimo por prueba y error que se reporta en la Tabla 5.4. Si bien el aumento de la cantidad de nodos en el interior del dominio N debería mejorar el ECM, esto no sucede en los casos del MRD-RL y del MILFD debido a las inestabilidades producidas cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. El mejor error es elegido en una región que se vuelve inestable debida al mal condicionamiento local de las matrices de interpolación. Al cambiar localmente las bases con FBR-QR, reducir el condicionamiento del problema y estabilizar el error, es posible aumentar N reduciendo el ECM como sucede con el MILFD-Est.

A su vez, en dicha tabla se muestra el tiempo computacional total (en segundos) de cada método para alcanzar dicho ECM con dicho ε_{opt} . En todos los casos, los tiempos muestran un leve aumento entre el MRD-RL y el MILFD, esto se debe a que este último calcula una integral sobre una región circular mientras que en el primero solo se calculan integrales de frontera. A su vez, el tiempo computacional es duplicado aproximadamente entre el MILFD y el MILFD-Est, esto es debido a que este último conlleva un cambio de base cuyo cálculo numérico principal es una factorización matricial QR. Esto podría llevar a la conclusión errónea que el MRD-RL o bien el MILFD son más eficientes para alcanzar un error determinado, sin embargo es necesario remarcar que para obtener el parámetro de forma óptimo fueron necesaria una serie de corridas sobre un rango determinado para luego encontrar el mejor error. En cambio, el MILFD-Est alcanza un valor estable a partir de ciertos valores chicos del ε con una sola corrida. Por ejemplo, en la Figura 5.8 se observa que para valores de $\varepsilon < 1.6$ el ECM oscilará con órdenes entre 1×10^{-7} y 1×10^{-8} .

El fenómeno de Runge para interpolaciones con FBR en el MILFD

Como es bien sabido, el fenómeno de Runge (FR) puede aparecer cuando se interpola con polinomios en distribuciones uniformes de puntos. Esto es, para tener exactitud en la interpolación en el interior del dominio del problema en estudio, podemos generar oscilaciones cerca de las fronteras. Considerando valores bajos del parámetro de forma ε , el mal condicionamiento del método FBR-Directo puede ser significativo, incluso cuando hay métodos estables de resolución numérica el FR para aproximaciones con FBR puede aparecer en el

límite $\varepsilon \rightarrow 0$. Fornberg y Zuev en [85] mostraron experimentalmente cómo el FR para las interpolaciones con FBR Gaussianas surgen si ε es suficientemente pequeño. Aun cuando una mejor exactitud pueda alcanzarse, el FR la interrumpe cuando el ε decrece.

Existe una conexión de este fenómeno con las interpolantes basadas en FBR infinitamente suaves, como las Gaussianas [80]. En varios casos, las interpolantes con FBR convergen a interpolantes polinomiales cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Decrecer ε produce FBR Gaussianas chatas que generan interpolantes más exactas hasta que el FR emerge. Esta fuente de error numérico para valores pequeños del parámetro de forma aparece cuando la exactitud es óptima. Cuando se analizan los factores que determinan una buena elección del parámetro de forma, el FR debe considerarse como una nueva fuente de error.

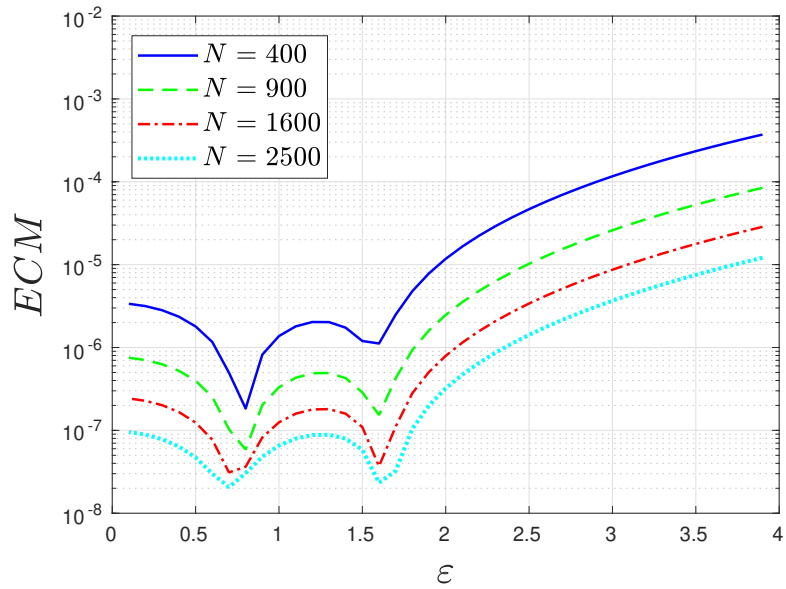


Figura 5.9: Fenómeno de Runge en la comparación del ECM entre diferentes distribuciones de nodos uniformes para el MILFD-Est y $\varepsilon \in [0.1, 4.0]$.

En la Figura 5.9 se muestra el ECM versus diferentes valores de ε y para diferentes distribuciones uniformes de puntos sobre el dominio. Podemos observar que, mientras N crece, el error numérico decrece en las diferentes curvas de la figura. Además, fijando una curva de una discretización, se observa primero el error decreciente cuando ε decrece de $\varepsilon = 4$

a $\varepsilon \approx 1.6$ y alcanza un mínimo local (primer salto). Luego, este error crece alcanzando un segundo mínimo local para $\varepsilon \approx 0.8$ (segundo salto). Nótese que la ubicación de los saltos de las curvas son independientes de N (i.e. 400, 900, 1600, 2500) dado que corresponden a los mismos valores de ε . Por tanto, podemos afirmar que en este ejemplo, si bien se ha logrado alcanzar una buena exactitud, el FR se introdujo en todos los casos cuando ε es suficientemente pequeño.

Si bien en esta tesis no abordamos el tratamiento del FR, Fornberg y Zuev sugirieron en [85] que puede ser ventajoso que el parámetro de forma varíe espacialmente, en vez de fijarse a un valor para evitar el error producido por el FR. A su vez, en [76] Boyd desarrolló seis estrategias sobre una grilla uniforme de un intervalo finito cuyo objetivo era pasar por alto el FR generado por las FBR Gaussianas en 1D. De estas estrategias, solo tres resultaron exitosas aunque dos de ellas convergieron muy lentamente según sus resultados experimentales. En [104] Piret continuó un estudio similar a la mejor estrategia presentada por Boyd usando extensiones de Fourier y obteniendo un método numérico para eludir el FR sin la necesidad de usar una mayor densidad de nodos en la cercanías de los bordes del dominio que puede extenderse a mayores dimensiones.

En la Figura 5.10 mostramos el comportamiento del ECM para diferentes tipos de distribuciones (uniforme, Halton y cuasi-uniforme) cuando el parámetro de forma decrece. En esta figura se observa el beneficio de incrementar la cantidad de puntos de la discretización del dominio y, a la vez, la distribución cuasi-uniforme muestra el mejor error (subfiguras para $N = 1600$ y 2500). La distribución uniforme muestra en todas las subfiguras de 5.10, el comportamiento del FR comentado anteriormente, mientras que, en la medida en que N crece, la distribución de nodos tipo Halton y cuasi-uniforme muestran un comportamiento estable cuando ε decrece (ver subfiguras $N = 1600$ y $N = 2500$). Sin embargo, es la distribución cuasi-uniforme la que alcanza el mejor resultado estable para valores pequeños del parámetro de forma ε con un ECM de $2.18\text{E-}08$ y $2.47\text{E-}08$ para $N = 1600$ y $N = 2500$, respectivamente, en $\varepsilon = 0.1$. Si bien el orden del error es el mismo, este aumento en la cantidad de nodos internos de 1600 a 2500 permite ampliar el rango útil del parámetro de forma que llega a este orden del error. Por ejemplo, en el caso de la distribución Halton

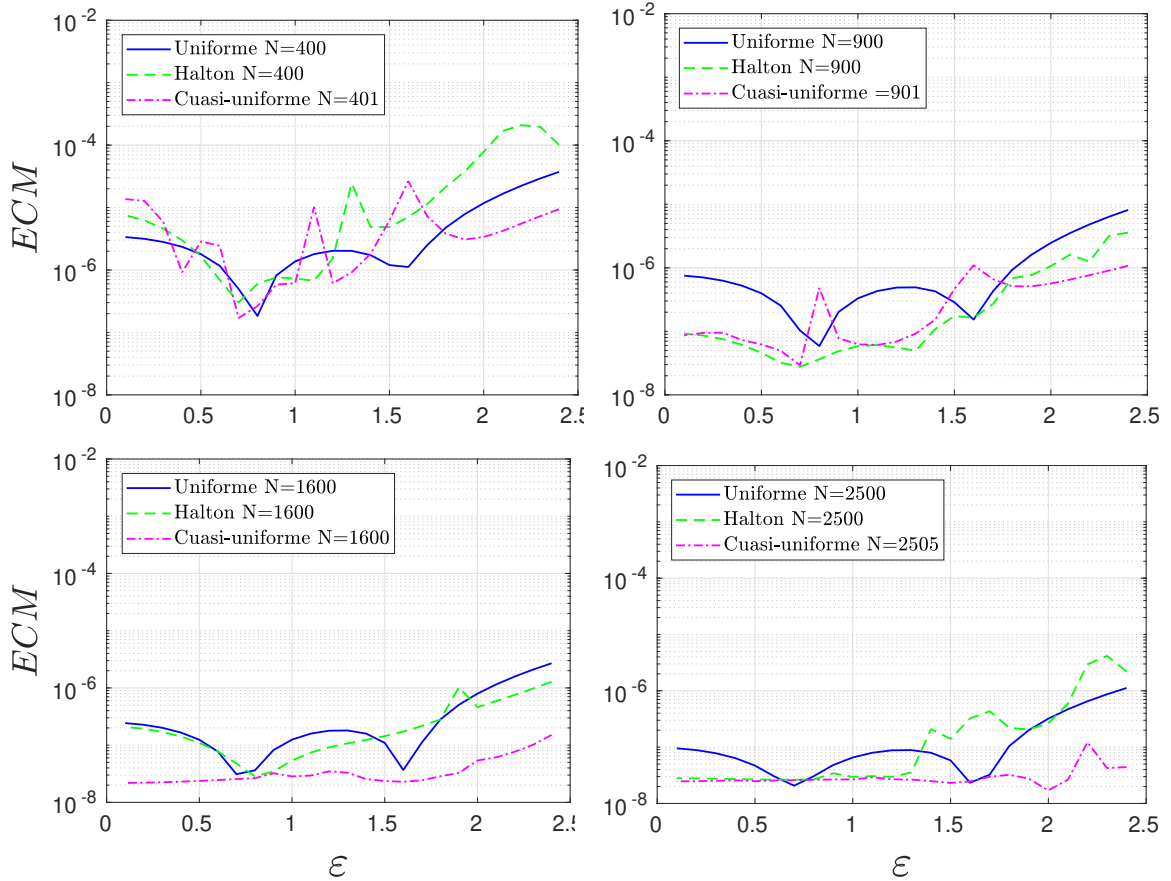


Figura 5.10: Comparación del ECM entre distribuciones de nodos uniformes, tipo Halton y cuasi-uniformes para diferentes valores de N .

para $N = 1600$ se observa se alcanza el menor error en un pico debido al FR mientras que cuando se aumenta a $N = 2500$ el intervalo de ε donde se alcanza el menor error se extiende de 0.1 a 1.3.

Por lo tanto, se necesita una estrategia combinada para mejorar los resultados numéricos: por un lado incrementar N para tener una distribución más densa sobre el dominio, y, por otro, disminuir el parámetro de forma.

5.4.3 EDP de Poisson con condiciones de Dirichlet

Consideremos la siguiente ecuación de Poisson definida en el dominio $\Omega = [1, 2]^2 \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) = & - \frac{751}{144} \pi^2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} x \right) \operatorname{sen} \left(\frac{7}{4} \pi x \right) \operatorname{sen} \left(\frac{3}{4} \pi y \right) \operatorname{sen} \left(\frac{5}{4} \pi y \right) \\ & + \frac{7}{12} \pi^2 \cos \left(\frac{\pi}{6} x \right) \cos \left(\frac{7}{4} \pi x \right) \operatorname{sen} \left(\frac{3}{4} \pi y \right) \operatorname{sen} \left(\frac{5}{4} \pi y \right) \\ & + \frac{15}{8} \pi^2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} x \right) \operatorname{sen} \left(\frac{7}{4} \pi x \right) \cos \left(\frac{3}{4} \pi y \right) \cos \left(\frac{5}{4} \pi y \right), \end{aligned} \quad (5.6)$$

con condiciones de contorno de Dirichlet dadas por

$$(CB) \begin{cases} u(x, 1) = -\frac{1}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} x \right) \operatorname{sen} \left(\frac{7\pi}{4} x \right), \\ u(x, 2) = -\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} x \right) \operatorname{sen} \left(\frac{7}{4} y \right), \\ u(1, y) = -\frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{sen} \left(\frac{3\pi}{4} y \right) \operatorname{sen} \left(\frac{5\pi}{4} y \right), \\ u(2, y) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{3\pi}{4} y \right) \operatorname{sen} \left(\frac{5\pi}{4} y \right). \end{cases} \quad (5.7)$$

La solución analítica de este problema es: $u(x, y) = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} x \right) \operatorname{sen} \left(\frac{7}{4} \pi x \right) \operatorname{sen} \left(\frac{3}{4} \pi y \right) \operatorname{sen} \left(\frac{5}{4} \pi y \right)$, la cual resulta muy oscilante sobre su dominio y dificulta su aproximación numérica.

Los resultados numéricos obtenidos con el [MILFD-Est](#) fueron comparados con los resultados del [MRD-RL](#), los cuales fueron comparados con los publicados por Ooi y Popov [99] usando el [Método de Ecuación Integral con FBR \(MEIFBR\)](#), cuyas siglas en inglés son RBIEM (Radial Basis Integral Equation Method), otro método local integral reportado en la literatura científica. Para realizar la comparación, en este caso reportamos el Error- L_2 para la variable u y estudiamos siete discretizaciones del dominio con distribuciones uniformes de nodos para $N = 400, 900, 1600, 2500, 3600, 4900, 6400$ nodos interiores, de forma de alcanzar los valores tomados en [15] y en [99]. A su vez, testeamos para cada N un conjunto discreto de valor del parámetro de forma $\varepsilon=0.1:0.1:2.0$.

En la Figura 5.11 presentamos un análisis de convergencia para el [MEIFBR](#), el [MRD-RL](#) y el [MILFD-Est](#). Podemos observar que el [MRD-RL](#) mejora los resultados del [MEIFBR](#) por un orden de magnitud desde $N = 1600$ en adelante y alcanza un Error- L_2 de 6.50E-04 para $N = 6400$, mientras que en el [MEIFBR](#) el error reportado es del orden de 8.00E-03. La performance del [MILFD-Est](#) se muestra en los valores del error para

$\varepsilon = 0.1$ (línea rojo con triángulos) y para un parámetro de forma optimizado ε_{opt} (línea magenta con diamantes) en dicha Figura. Para el primero, con $\varepsilon = 0.1$, los errores norma L_2 son: 2.18E-03, 2.89E-04, 7.11E-05, 2.35E-05, 8.85E-06, 3.97E-06 y 3.28E-06 para $N = 400, 900, 1600, 2500, 3600, 4900, 6400$ respectivamente, mientras que, para el último, los errores presentados con ε_{opt} son: 2.46E-04 (para $\varepsilon=1.5$), 3.69E-05 ($\varepsilon=1.4$), 1.03E-05 ($\varepsilon=1.3$), 4.54E-06 ($\varepsilon=1.2$), 3.48E-06 ($\varepsilon=1.1$), 3.24E-06 ($\varepsilon=0.7$), 3.29E-06 ($\varepsilon=0.1$) para $N = 400, 900, 1600, 2500, 3600, 4900, 6400$ respectivamente. Estos errores en norma L_2 son tres órdenes de magnitud menos en seis de los siete casos que los reportados en el MRD-RL. En esta figura las integrales de frontera y dominio fueron evaluadas numéricamente usando 50 y 2500 (50×50) puntos de cuadratura Gaussiana respectivamente.

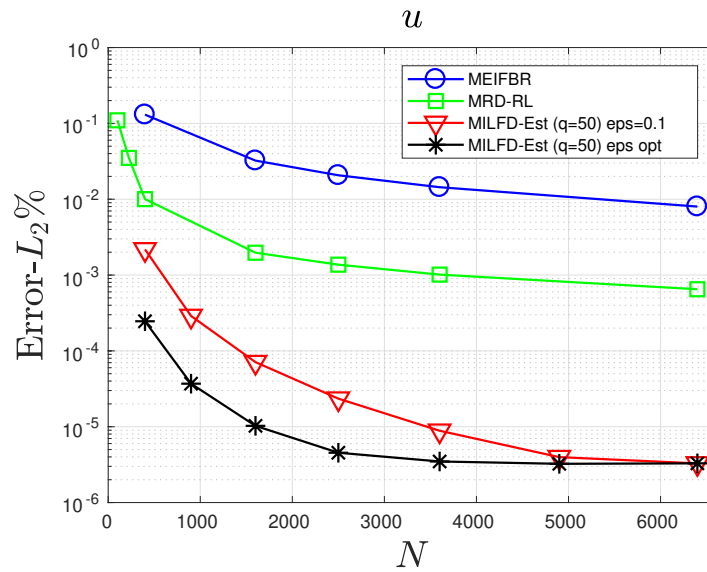


Figura 5.11: Comparación del error L_2 % entre MEIFBR, MRD-RL, MILFD-Est para un conjunto uniforme de nodos. N es el número de nodos interiores en el dominio.

Para $N = 6400$, el mejor error en el rango estudiado del parámetro de forma fue obtenido en $\varepsilon = 0.1$, entonces estudiamos el comportamiento del error para resolver un problema de Poisson para un bajo rango de $\varepsilon \in \{1 \times 10^{-2}, 1 \times 10^{-3}, 1 \times 10^{-4}, 1 \times 10^{-5}\}$ en el caso límite. Por otro lado, cuando incrementamos N para valores grandes ($N = 8100, 10000, 22500$) y

aumentamos los puntos de cuadratura de $q = 40 : 5 : 80$, observamos que el error decrece hasta $N = 8100$ y crece levemente para $N = 22500$, pero aun así se mantiene estable en el mismo orden de magnitud. El error- L_2 % obtenido se muestra en Tabla la 5.5 con siete cifras significativas de modo de poder notar las diferencias entre los errores. Similarmente a la sección 5.4.2, podemos afirmar que con un número creciente de puntos interiores en la discretización del dominio se puede alcanzar muy buenos resultados con valores pequeños del ε siendo altamente oscilante el comportamiento de la solución numérica del problema diferencial.

ε	MILFD-St Error- L_2 %					
	$N = 3600$ ($q = 40$)	$N = 4900$ ($q = 50$)	$N = 6400$ ($q = 55$)	$N = 8100$ ($q = 60$)	$N = 10000$ ($q = 60$)	$N = 22500$ ($q = 65$)
1×10^{-2}	6.604455E-06	4.014382E-06	3.089683E-06	2.999104E-06	3.177822E-06	5.999833E-06
1×10^{-3}	6.604586E-06	4.014650E-06	3.089796E-06	2.999142E-06	3.177826E-06	5.999836E-06
1×10^{-4}	6.604568E-06	4.014653E-06	3.089793E-06	2.999125E-06	3.177834E-06	5.999841E-06
1×10^{-5}	6.604584E-06	4.014651E-06	3.089794E-06	2.999135E-06	3.177824E-06	5.999842E-06

Tabla 5.5: Comparación del error- L_2 % para el MILFD-Est con un rango bajo del parámetro de forma en el caso uniforme.

No se observan diferencias significativas en el error- L_2 cuando se integran numéricamente las fronteras de borde de los subdominios usando cuadratura Gaussiana y la fórmula del trapecio, aunque se observa una variación de error- L_2 % porcentual en términos de la cantidad de puntos de la cuadratura Gaussiana (ver Apéndice A).

Cuando esta técnica de integración fue usada variando el número de puntos de Gauss q , el error decreció alcanzando un mínimo local para un parámetro de forma fijo. Estos resultados obtenidos sugieren que gran parte del error total en MILFD-Est es causado por el decrecimiento del parámetro de forma y el mal condicionamiento de las matrices locales de interpolación, aun cuando se usa localmente la colocación con FBR-QR.

Similarmente al ejemplo anterior, el MILFD-Est fue testeado para diferentes tipos de distribuciones de nodos. La convergencia del MILFD-Est para este tipo de distribuciones diferentes (uniforme, Halton y cuasi-uniforme) se muestra en la Figura 5.12.

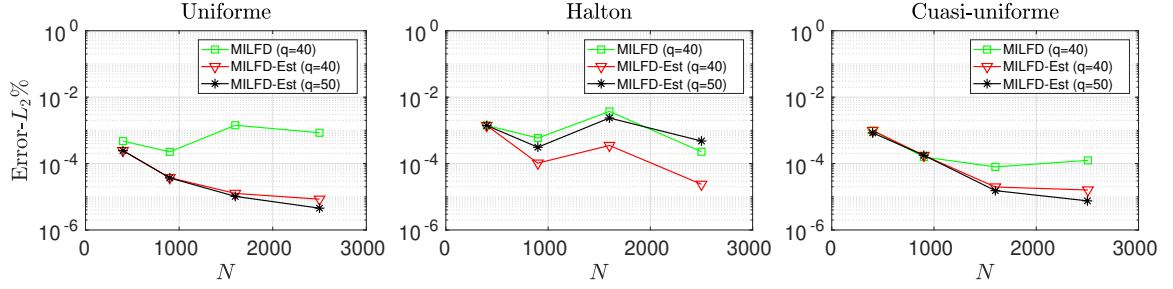


Figura 5.12: Error- L_2 % versus N para distribuciones uniformes, Halton y cuasi-uniformes.

En cada subplot de la figura presentamos resultados para el MILFD y el MILFD-Est. Se puede observar la mejora en la estabilidad numérica y la exactitud del MILFD-Est cuando N crece para distribuciones de nodos uniformes y cuasi-uniformes. Los mejores resultados se obtuvieron para la distribución de nodos uniforme, los cuales alcanzaron para $N = 2500$ un Error- L_2 de $8.47E-06$ (para $\varepsilon = 1.1$), mientras que la distribución cuasi-uniforme muestra un error de $1.60E-05$ (para $\varepsilon = 1.9$). La distribución tipo Halton no muestra una convergencia monótona. Es decir que para esta EDP de Poisson la distribución uniforme es la mejor tipo de distribución para un régimen del ε decreciente. Los casos de Halton no muestran convergencia uniforme en cualquiera de los métodos.

5.4.4 EDP de Poisson sobre un disco

En esta sección consideramos una EDP de Poisson con condiciones de borde de Dirichlet. La ecuación está definida sobre un dominio circular $\Omega = \{(x, y)/x^2 + y^2 \leq 1\}$ de la siguiente manera

$$\begin{cases} \Delta u = -200 \text{sen}[10(x + y)] & (x, y) \in \Omega, \\ u = \text{sen}[10(x + y)] & (x, y) \in \partial\Omega \quad (CB). \end{cases} \quad (5.8)$$

Este problema diferencial fue resuelto numéricamente por Bayona, Flyer, Fornberg y Barnett en el trabajo [37] usando el método de DF-FBR, combinándolo con FBR de tipo splines poliarmónicas (PHS) $\phi(r) = r^{2m-1}$, $m \in \mathbb{N}$ aumentado con polinomios.

Este ejemplo numérico fue resuelto para tres tipos de discretizaciones del dominio, una basada en el algoritmo repelente mencionado en la sección 5.2.3, para $h = 0.05$, otro para

$h = 0.025$ y un tercero para $h = 0.01$. Estos resultados son para $N = 1185, 4880$ nodos interiores, y $N_b = 125, 251$ nodos fronteras respectivamente. La subfigura de la izquierda en la Figura 5.13 muestra la distribución de la discretización repelente de nodos para $h = 0.05$; siendo similar la estructura de la discretización para $h = 0.025$ pero más densa. La subfigura de la derecha de la Figura 5.13 muestra el comportamiento oscilatorio de la gráfica del campo solución de la ecuación (5.8) sobre el disco unitario.

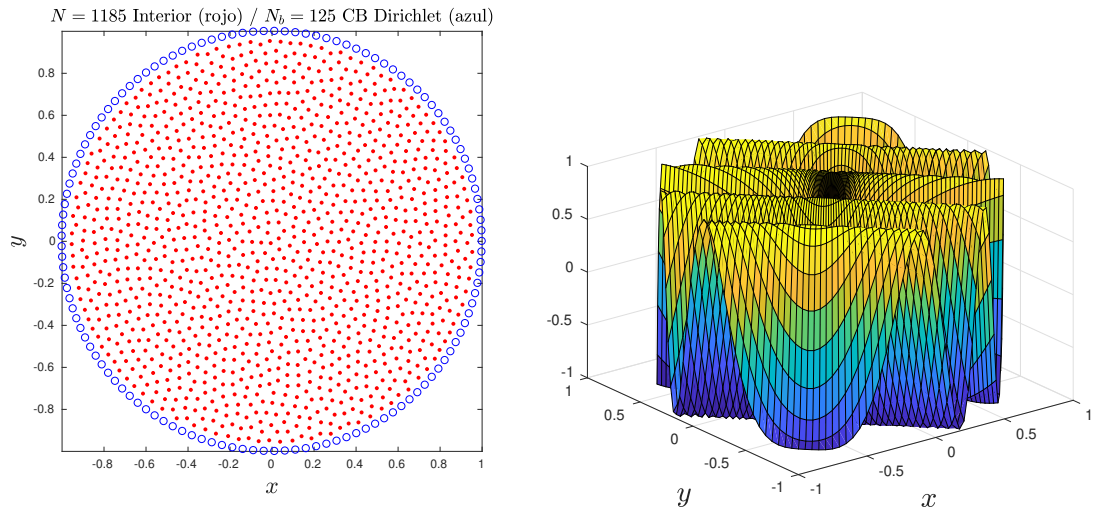


Figura 5.13: Distribución de nodos con estructura equiespaciada (izq.) y solución exacta (der.).

El objetivo en esta sección de la tesis es hacer un análisis estacionario y no estacionario simultáneamente explorando los efectos del crecimiento del número de nodos en los estenciles desde $n = 10$ a $n = 100$ con un salto de 10 y, a la vez, una variación del rango de $\varepsilon=1:10$.

La Figura 5.14 muestra las isóneas de exactitud como función del tamaño del estencil local n y el parámetro de forma ε para el MILFD (subplots de la columna izquierda) y para el MILFD-Est (subplots de la columna derecha).

La primer fila de subplots de la Figura 5.14 corresponde a la exactitud para $N = 1185$. Cuando miramos el subplot de la izquierda que corresponde al MILFD, resaltamos los problemas de estabilidad numérica que se extiendan desde la esquina superior izquierda

para valores pequeños de $\varepsilon < 4$ y valores grandes de $n > 50$. Sin embargo, en el subplot de la derecha, observamos que estas inestabilidades desaparecen para el [MILFD-Est](#) y se alcanzan mejores resultados de exactitud para valores de $\varepsilon < 4$ y para estenciles con un $n > 70$. La isolínea de exactitud es del orden de 1×10^{-5} aunque es importante remarcar que la región interior limitada por esta isolínea contiene valores del orden de 1×10^{-6} . En adelante llamaremos la región de estabilidad de orden η del [MILFD-Est](#) siendo $\eta \in \mathbb{Z}$ a la región determinada por el interior de la curva de nivel de menor orden de error numérico que aparece en el gráfico.

La segunda fila de la Figura 5.14 presenta los resultados para $N = 4880$. Los resultados de exactitud para el [MILFD](#) vuelvan a mostrar problemas de inestabilidades en toda la región de triangular que se extiende desde la esquina superior izquierda del subplot izquierdo. En la región triangular que se extiende desde la esquina inferior derecha hay errores numéricos de orden menores a 1×10^{-5} ; estos errores están debajo de la diagonal del gráfico y están marcados por dos curvas de nivel cerradas, dentro de las cuales el error es del orden de 1×10^{-6} . Una de las isolíneas de error- L_2 igual a 1×10^{-5} corresponde a valores de $n > 40$ y valores de $\varepsilon > 6$, mientras la otra isolínea del error- L_2 corresponde a valores de $n < 40$ y valores de $3 < \varepsilon < 6$. En el caso del subplot derecho con el [MILFD-Est](#) es importante resaltar un comportamiento análogo al caso anterior: la región de estabilidad de orden $\eta = -6$ se extiende ampliamente alcanzando un error de orden 1×10^{-7} dentro de esta región.

Finalmente, la última fila de la Figura 5.14 corresponde a los resultados para $N = 9639$. Similarmente a los dos casos anteriores con el [MILFD](#) en el subplot izquierdo, el error- L_2 se desestabiliza extendiendo la región triangular inestable, mientras que en cambio en la subfigura derecha el [MILFD-Est](#) extiende ampliamente la región de estabilidad de orden $\eta = -6$ y con errores de orden 1×10^{-7} en su interior.

Cuando miramos los subplots del [MILFD-Est](#) por fila, observamos que los problemas de estabilidad desaparecen y se puede obtener regiones de estabilidad para valores pequeños de ε llegando a regiones de estabilidad de orden $\eta = -6$ y con error- L_2 de orden 1×10^{-7} en su interior. Estos resultados son significativos porque muestran la convergencia del [MILFD-Est](#)

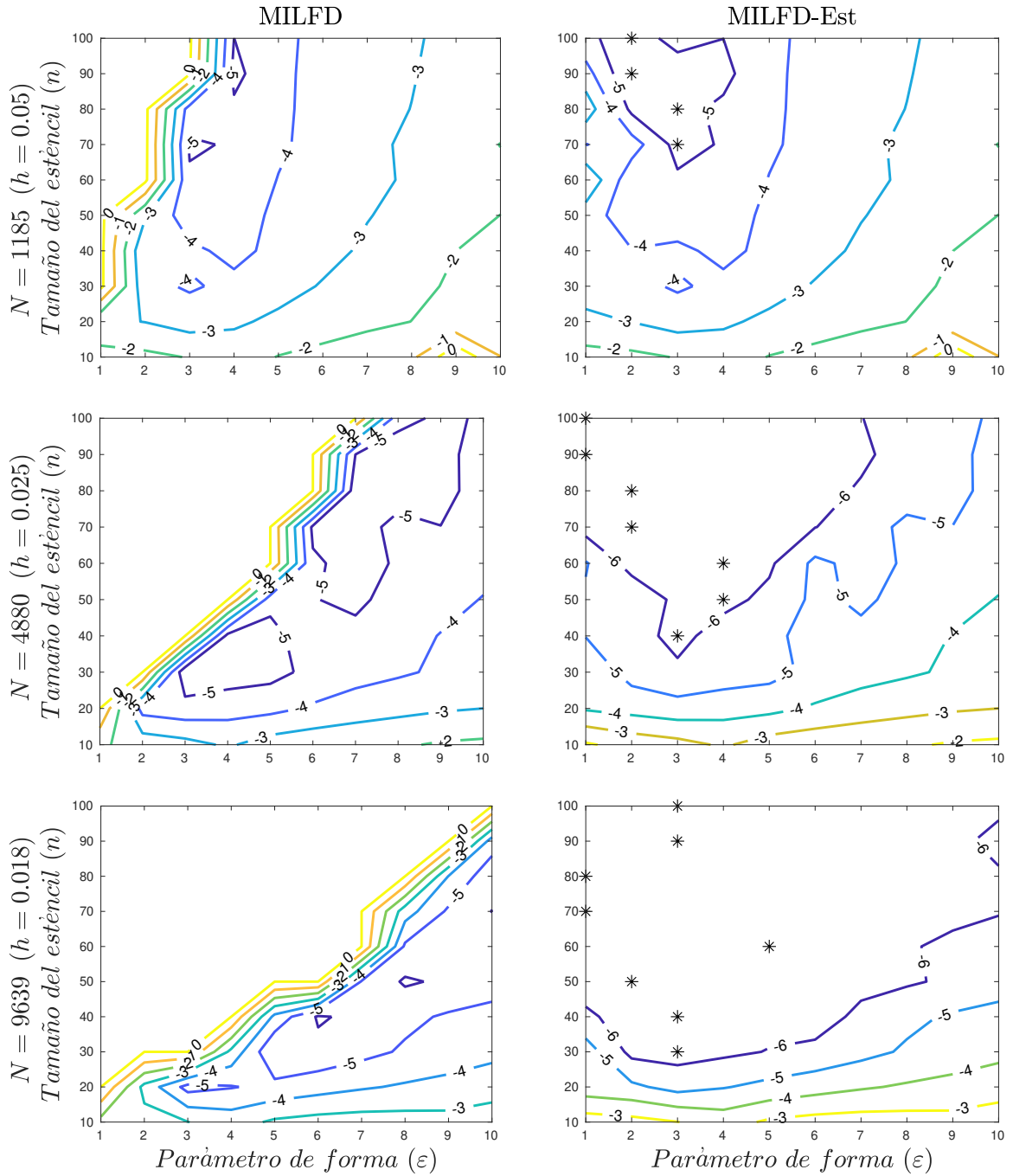


Figura 5.14: Isolneas de exactitud ($\log_{10}(\text{Error-}L_2)$) usando FBR Gaussianas como función del tamaño del estencil n y del parámetro de forma ϵ para distribuciones de nodos dispersas repelentes con $N = 1185, 4880, 9639$ usando los métodos MILFD y MILFD-Est.

tanto cuando el número de nodos de la discretización total del dominio N crece como cuando crece el número de nodos de los estenciles locales n . Es decir, que el aumento de la cantidad de nodos interiores N sobre el dominio circular definido conlleva a que los nodos de los estenciles estén más cercanos generando de esta manera matrices de interpolación local peores condicionadas, el **MILFD-Est** permite estabilizar el error y ampliar la región de estabilidad en la medida que N se incrementa.

Comparando los resultados obtenidos del **MILFD-Est** con los obtenidos por Bayona, Flyer, Fornberg y Barnett en [37], podemos mencionar que en ese trabajo, para una discretización de $N = 1885$ con un parámetro $h = 0.05$ de la distribución repelente, obtuvieron una exactitud para un orden del error de orden 1×10^{-5} para un tamaño de stencil de $55 < n < 95$, con PHS r^7 y un grado de polinomio $p \approx 9$ (ver la esquina derecha del subplot izquierdo para el caso ideal en la primer fila, Figura a, pág. 262 del trabajo citado). El mismo orden de exactitud fue obtenido con el **MILFD** para $30 < n < 100$ y $3 < \varepsilon < 5$. Además, en su versión estabilizada, el **MILFD-Est** supera el rendimiento de los resultados del **DF-FBR** en una región mayor para dicho orden, alcanzando una exactitud del error de orden de 1×10^{-5} para $n > 30$ y $1 < \varepsilon < 5$. Más aun, logramos una región de estabilidad de orden $\eta = -5$ y alcanzamos una exactitud del orden 1×10^{-6} para $n > 70$ y $2 < \varepsilon < 3$ (en el subplot se marcan con asterisco los valores menores de error- L_2 obtenidos para del **MILFD-Est** para cada n fijado y con $N = 1185$).

Para una discretización del dominio de $N = 4880$ con parámetro de discretización $h = 0.025$, los autores reportaron una exactitud de orden 1×10^{-6} para $n > 45$, con **FBR** PHS r^7 con un polinomio de grado $p \approx 8$ (ver la esquina derecha del subplot para el caso ideal en la segundo fila, Figura 2, pág. 262 de [37]), mientras que el **MILFD-Est** obtiene el mismo orden de exactitud para $30 < n < 100$ y $\varepsilon < 8$. Es decir, el **MILFD-Est** mejora **DF-FBR** por un orden de magnitud y alcanza una exactitud del orden 1×10^{-7} para $40 < n < 100$ y $1 < \varepsilon < 4$ (en el subplot se marcan con asterisco los valores menores de error- L_2 del **MILFD-Est** para cada n fijado y con $N = 4880$).

Al igual que en las subfiguras anteriores de la columna izquierda de la Figura 5.14, las marcas de asteriscos alcanzadas para una discretización del dominio de $N = 9639$ y

parámetro de discretización de $h = 0.018$ muestran los valores menores de error- L_2 del MILFD-Est. Se observa que en la medida que aumenta $N = 1885, 4880, 9639$ los mejores errores se ubican en la región de estabilidad para valores chicos del parámetro de forma de la FBR Gaussiana. Esta es una característica notable del MILFD-Est.

Siguiendo este análisis, la Figura 5.15 muestra las isolíneas de $\log_{10}(\text{error-}L_2)$ como función del parámetro de forma ε y del tamaño del estencil cuando crece N para valores grandes, 19816 ($h=0.0125$) y 30976 ($h=0.01$), de la distribución de nodos repelentes usando el MILFD-Est. Observamos que la región de estabilidad se extiende alcanzando un orden de error de 1×10^{-7} .

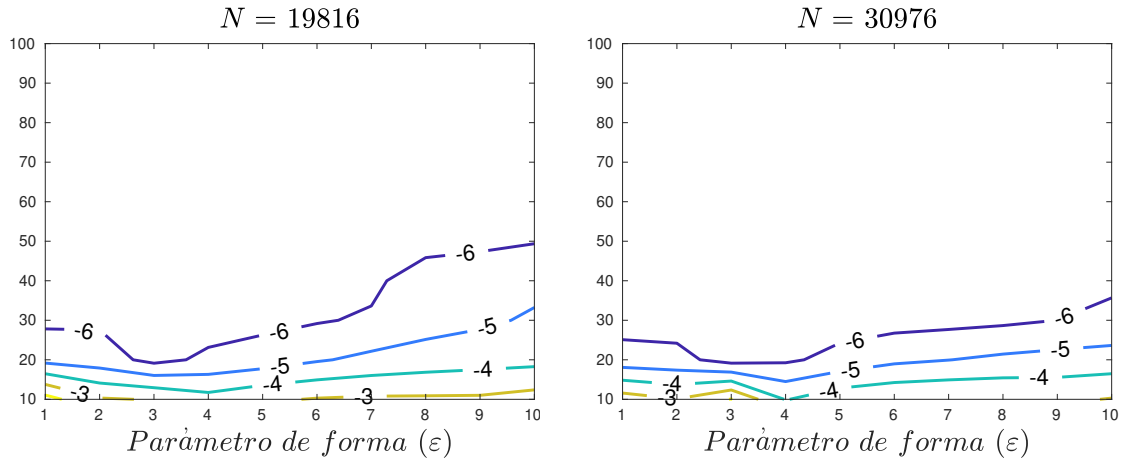


Figura 5.15: Isolíneas de exactitud ($\log_{10}(\text{Error-}L_2)$) usando el MILFD-Est para grandes valores de $N = 19816, 30976$ como función del tamaño del estencil n y del parámetro de forma ε para distribuciones de nodos dispersas repelentes.

Número de condición para la EDP de Poisson sobre el disco unitario

Consideramos el PVC presentado en (5.8), y lo resolvemos con el MILFD y el MILFD-Est para analizar el comportamiento del condicionamiento del problema. La Figura 5.16 muestra los contornos del orden del número de condición para un problema de Poisson sobre una distribución de nodos no uniforme sobre un dominio circular que toma una cantidad de puntos interiores $N = 1185, 4880, 9639$ usando estos métodos.

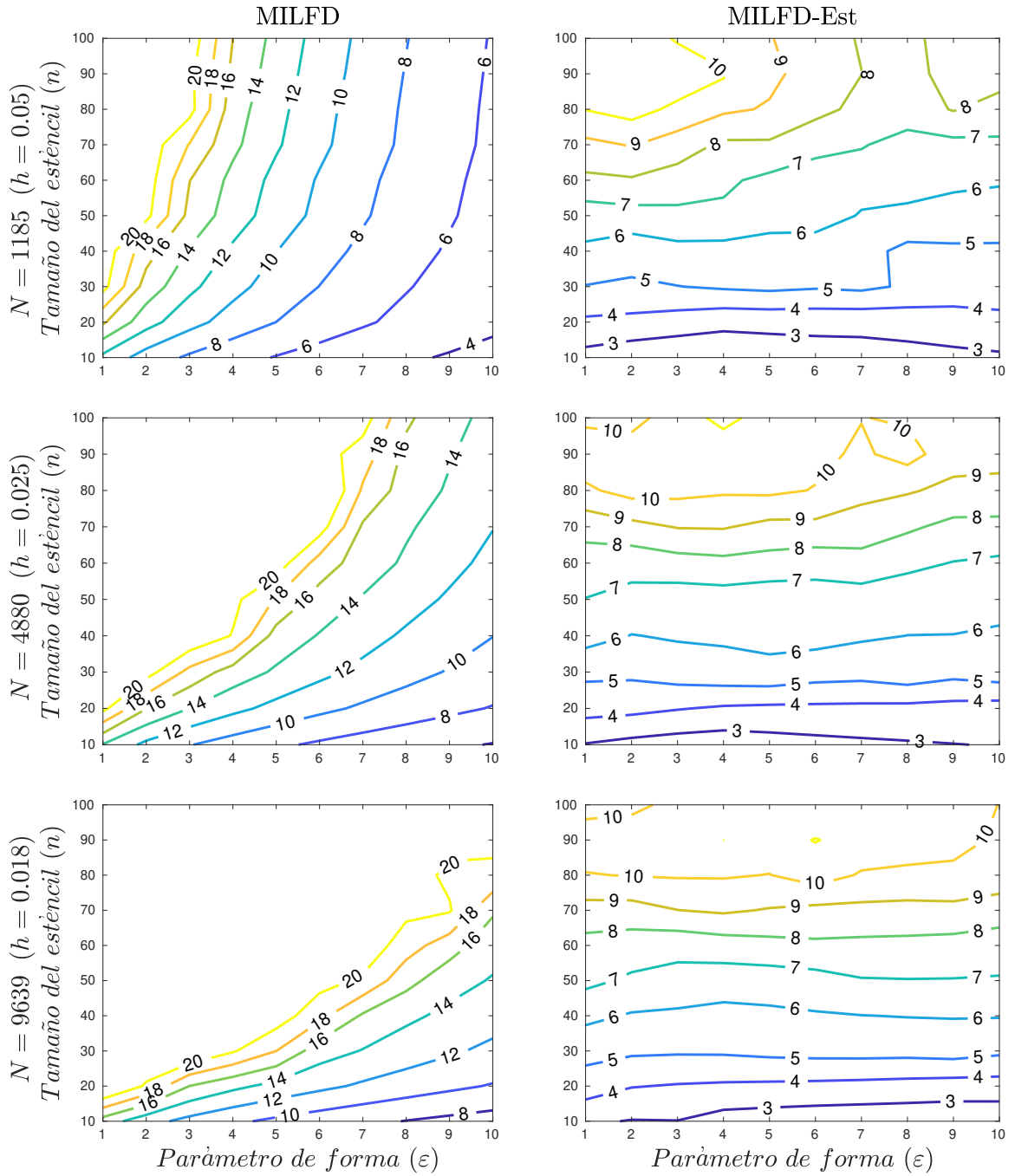


Figura 5.16: Isolíneas del condicionamiento ($\log_{10}(\kappa(\mathbf{A}_i))$) para las matrices de interpolación local de u con FBR Gaussianas, como función del tamaño del estencil n y del parámetro de forma ϵ para distribuciones de nodos dispersas repelentes con $N = 1185, 4880, 9639$ usando los métodos MILFD y MILFD-Est.

Para el caso del primer método en las subfiguras de la columna izquierda observamos que, cuando se reduce el parámetro de forma ε o bien se agranda el tamaño de los estenciles locales n , el número de condición $\kappa(\mathbf{A}_i)$ de la matriz de interpolación local de u con **FBR** Gaussianas respectivas vista en la ecuación (3.67) se agranda alcanzando un orden de 1×10^{20} . La región con este contorno se extiende desde la esquina superior izquierda y aumenta conforme crece N . Un comportamiento semejante se observa para el número de condición $\kappa(\tilde{\mathbf{A}}_i)$ de la matriz de interpolación local del término \tilde{b} vista en la ecuación (3.70). El aumento de N de 1185 a 9639 conlleva a una mayor cercanía de los nodos y por tanto el empeoramiento de los números de condición de ambas matrices por la construcción de estas con las **FBR** Gaussianas.

En cambio, en el caso del segundo método estabilizado en las subfiguras de la columna derecha vemos que se llega a obtener un orden de 1×10^{10} , la mitad que el anterior, mientras que la región con este contorno es menor. A su vez, es remarcable que si bien el incremento de N empeora el condicionamiento, esto no es notorio. Se observa que en el caso de $N = 9639$ las isolíneas son horizontales casi paralelas, es decir, hay una tendencia a independizarse del valor del parámetro de forma ε y solo empeora el número de condición cuando aumenta la cantidad de puntos del estencil.

Tiempo computacional para la EDP de Poisson sobre el disco unitario

En la Figura 5.17 ploteamos el tiempo de la CPU para distribuciones de nodos internos de $N = 1185, 4880$ y parámetro de forma de valores $\varepsilon = 2, 3, 6$. Leyendo la fila superior, observamos que el tiempo computacional para el **MILFD** crece para valores grandes del número de estenciles n cuando el parámetro de forma ε decrece. Por otro lado, el tiempo para el **MILFD-Est** se mantiene constante para distintos valores de ε . Más aún, para valores pequeños de ε y valores grandes de n , el **MILFD-Est** mejora al **MILFD**. En la última fila, con $N = 4880$, el tiempo para el **MILFD-Est** es mayor que el **MILFD**, pero para los estenciles más grandes la diferencia es de menos de un orden de magnitud.

Cuando leemos la Figura 5.17 por columna, observamos que el tiempo computacional para el cálculo de **MILFD** crece en la medida que n aumenta de 1185 a 4880, sin embargo,

el tiempo de **MILFD-Est** se mantiene constante independientemente de la variación del parámetro de forma.

Es un hecho que el uso local del algoritmo de **FBR-QR** permite lograr estabilidad numérica cuando se interpola con **FBR** a costo de tiempo computacional. No obstante, el efecto de introducir esta técnica de estabilidad en un método local integral como el **MILFD** es una mejora sustancial. La versión estabilizada de este, llamada **MILFD-Est**, mantiene casi constante el tiempo de la CPU cuando el parámetro de forma decrece y alcanza mejor exactitud que **MILFD** o **MRD-RL**.

En las subfiguras se observa que el **MILFD** tiene mejor performance que el **MILFD-Est** para estenciles de tamaño de hasta 50-60 nodos. Para estenciles más grandes, el tiempo computacional de la corrida total es levemente mejor en el **MILFD-Est**.

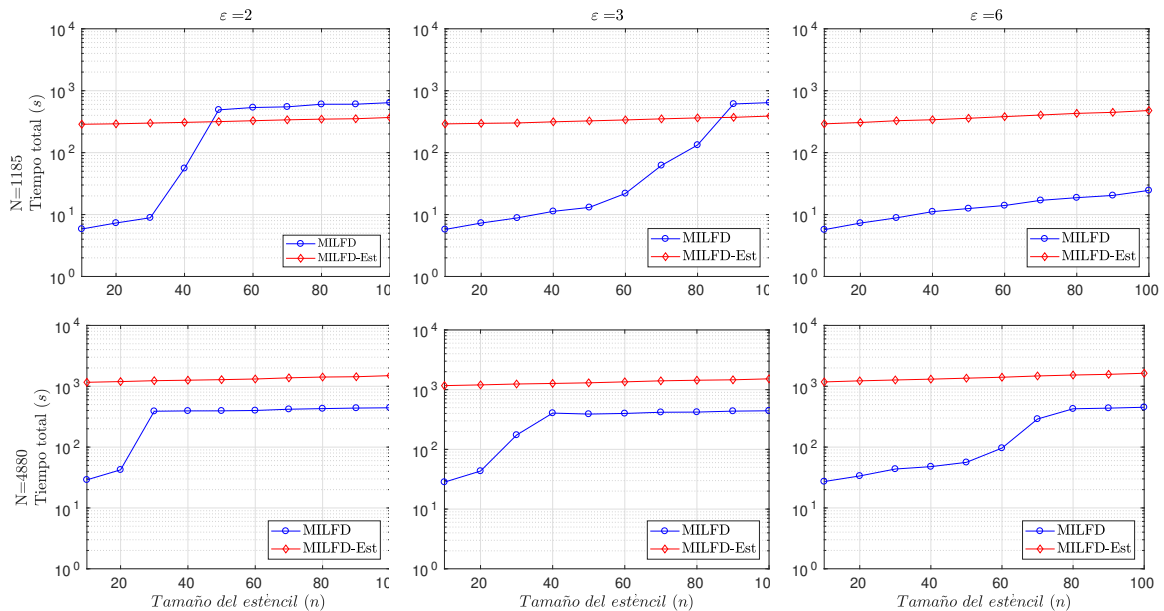


Figura 5.17: Tiempo computacional (en segundos (s)) usando el **MILFD** (línea círculo azul) y el **MILFD-Est** (línea roja diamantes) como función del tamaño de estencil n para distribuciones de nodos repelentes de $N = 1185, 4880$ y $\epsilon = 2, 3, 6$.

5.5 Resolución numérica de EDP tipo convección-difusión con el MILFD-Est

En esta sección se resolvieron numéricamente problemas de aplicaciones de la ingeniería como la ecuación de convección-difusión con término de reacción y campo de velocidad variable en [2D](#).

5.5.1 Ecuación de convección-difusión unidimensional

Para testear la exactitud y la robustez del método estabilizado [MILFD-Est](#) propuesto en esta tesis en problemas diferenciales que provienen de aplicaciones, consideramos una ecuación de convección-difusión estacionaria con campo de velocidad variable que ha sido usada ampliamente en la literatura científica con otros métodos (incluyendo el [MRD-RL](#), el [MRD-MD](#), el [MEIFBR](#) y el [MEF](#)). Ver trabajos [[7](#), [9](#), [15](#), [62](#), [105](#)] respectivamente. Así como también se aborda el problema de la capa límite termal en un canal bidimensional con diferencia de temperaturas en sus paredes sin solución analítica explícita. Estas ecuaciones se resolvieron sobre dominios rectangulares con distribuciones de nodos uniformes, de tipo Halton y cuasi-uniformes.

Esta ecuación está dada por

$$D\Delta u(\mathbf{x}) - \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \nabla u(\mathbf{x}) - ku(\mathbf{x}) = 0, \quad (5.9)$$

con campo de velocidad convectivo dado por

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (v_1(\mathbf{x}), v_2(\mathbf{x})) = \left(\ln \left(\frac{U_1}{U_0} \right) + k \left(x_1 - \frac{1}{2} \right), 0 \right), \quad (5.10)$$

siendo $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Este campo corresponde al flujo de un hipotético fluido compresible con una variación de densidad inversamente proporcional al campo de velocidad y concentraciones fijas en los extremos dadas por U_0 y U_1 .

Para la solución numérica a este problema 1D (visto como un problema 2D), se define un dominio rectangular $\Omega = [0, 1] \times [-0,1, 0,1]$ sujeto a las siguientes condiciones de frontera:

$$(CB) \begin{cases} u(0, x_2) = U_0, \\ u(1, x_2) = U_1, \\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, -0.1) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, 0.1) = 0. \end{cases} \quad (5.11)$$

El dominio Ω es discretizado usando distribuciones de nodos uniformes, tipo Halton y cuasi-uniformes. El tamaño del estencil es fijo ($n = 25$) y se estudia la variación del parámetro de forma $\varepsilon \in [1, 20]$.

La solución analítica del PVC anterior para un coeficiente de difusión $D = 1$ es conocida

$$u(\mathbf{x}) = U_0 \exp \left\{ \frac{k}{2} x_1^2 + \left(\ln \frac{U_1}{U_0} - \frac{k}{2} \right) x_1 \right\}. \quad (5.12)$$

Esta solución es constante en la variable x_2 , por eso se lo suele referir al mismo como unidimensional. De todas formas, el algoritmo debe predecir que en la dirección de la variable y el potencial es constante para un x fijado (es decir, $u(\mathbf{x}) = u(x)$) y que el flujo es cero en esta dirección. Este ejemplo numérico es interesante porque el campo de velocidad cambia dentro del dominio.

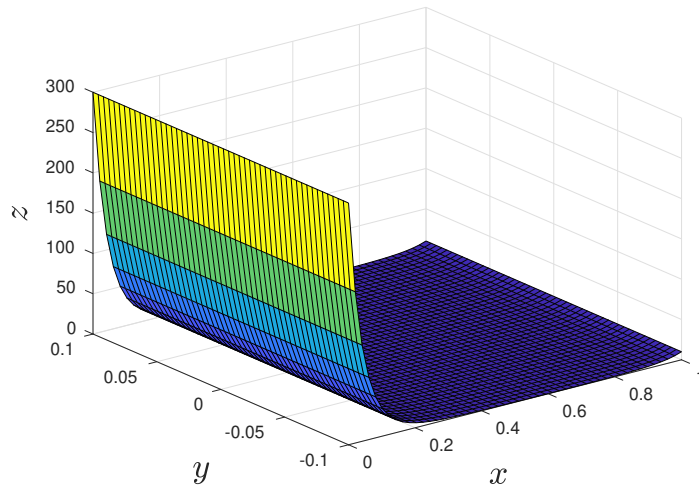


Figura 5.18: Solución exacta del problema de convección-difusión para $k = 40$.

La Figura 5.18 muestra la formación de estructuras de salto (shock) en los bordes. Para analizar la performance del esquema numérico MILFD-Est, se consideran diferentes valores del parámetro k en la velocidad convectiva, donde los mayores valores de k corresponden a “saltos” más fuertes en la estructura, como se muestra en la frontera de la solución.

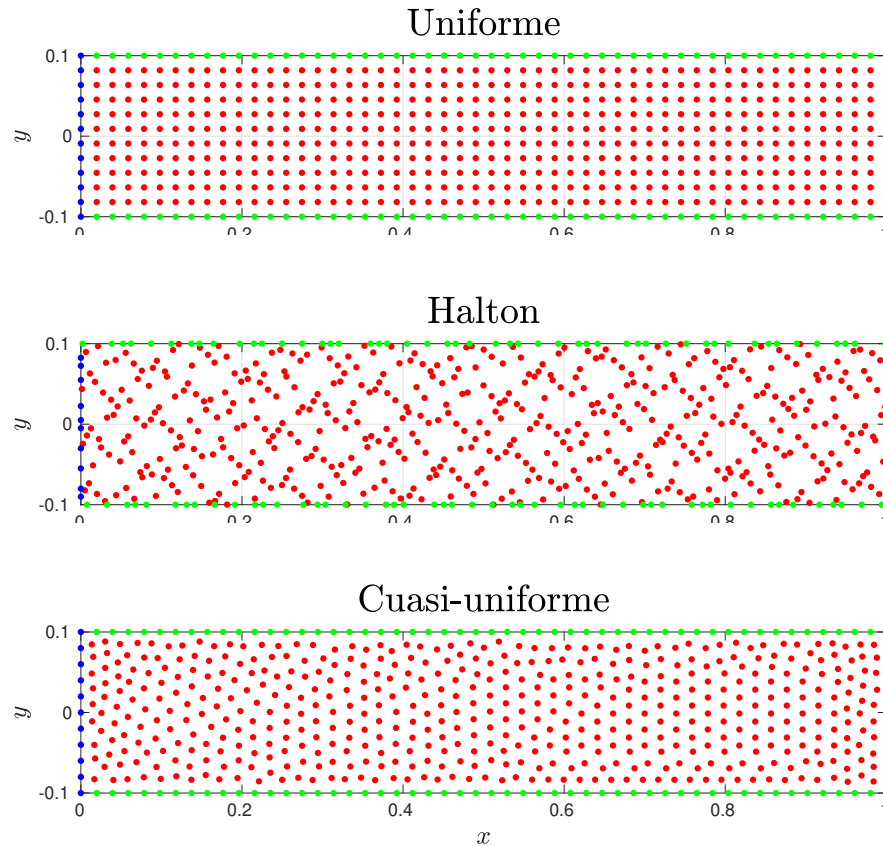


Figura 5.19: Discretización del dominio $\Omega = [0, 1] \times [-0.1, 0.1]$ de tipo uniforme, Halton y cuasi-uniforme para $N = 500$ puntos interiores.

En este problema, comparamos el desempeño del MILFD-Est con los errores obtenidos para el MRD-RL con estenciles de 25 puntos (presentado en [15, 56] con diferentes FBR) cuando el parámetro de forma decrece, similarmente a los realizados en las secciones 5.4.2 y 5.4.3. El objetivo de esta sección es mostrar cómo el MILFD-Est provee una mejora sustancial comparada con otros esquemas locales integrales, incluso cuando se consideran distintos tipos de discretizaciones (ver Figura 5.19) con una cantidad de puntos de la discretización N bajo. También se varía el coeficiente k para generar un “salto” mayor que dificulte la resolución numérica del problema diferencial.

Para el análisis de este problema en 1D, primero consideramos el caso $k = 40$ con valores potenciales $U_0 = 300$ y $U_1 = 10$ respectivamente y luego hicimos una comparación del Error- L_2 % entre diferentes distribuciones de nodos uniformes, de tipo Halton y cuasi-uniformes con distinto N en un rango de $\varepsilon \in [0.1, 20]$. En la Figura 5.20 se muestra que, en la medida en que el parámetro de forma tiende a cero, los errores decrecen casi uniformemente, siendo la distribución de puntos cuasi-uniforme la que muestra la mejor performance.

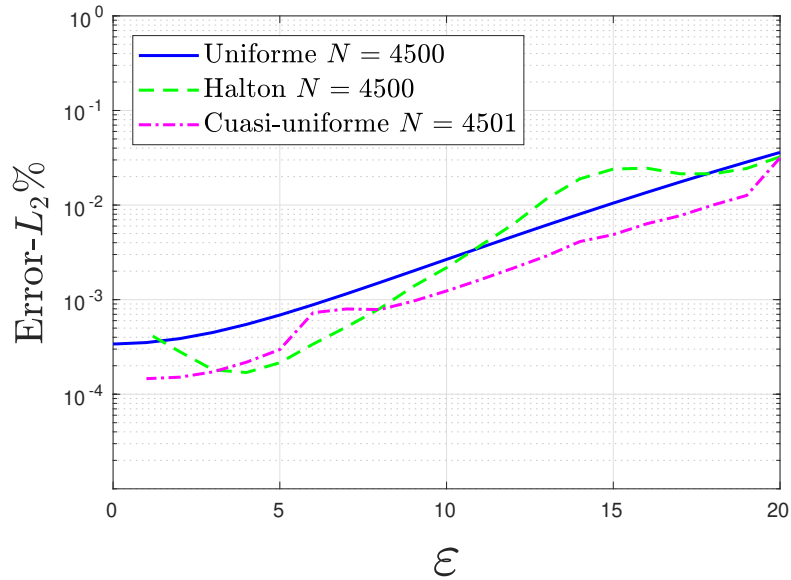


Figura 5.20: Comparación del Error- L_2 % entre diferentes distribuciones de nodos uniformes, de tipo Halton y cuasi-uniformes con $N = 4500$ para el MILFD-Est y $\varepsilon \in [0.1, 20]$.

La diferencia entre el MILFD-Est con distribución cuasi-uniforme y el MRD-RL para la distribución uniforme reportada con FBR TPS, MQ1 y MQ2 se muestra en la Figura 5.21 y en la Tabla 5.6. En esta última se observa que la performance del método estabilizado para el caso $k = 40$ de la ecuación de convección-difusión supera en un orden de magnitud el error para los N fijados en el caso uniforme, mientras que en los casos Halton (para $N = 2000$) y cuasi-uniforme (para $N = 7987$) los supera en dos órdenes.

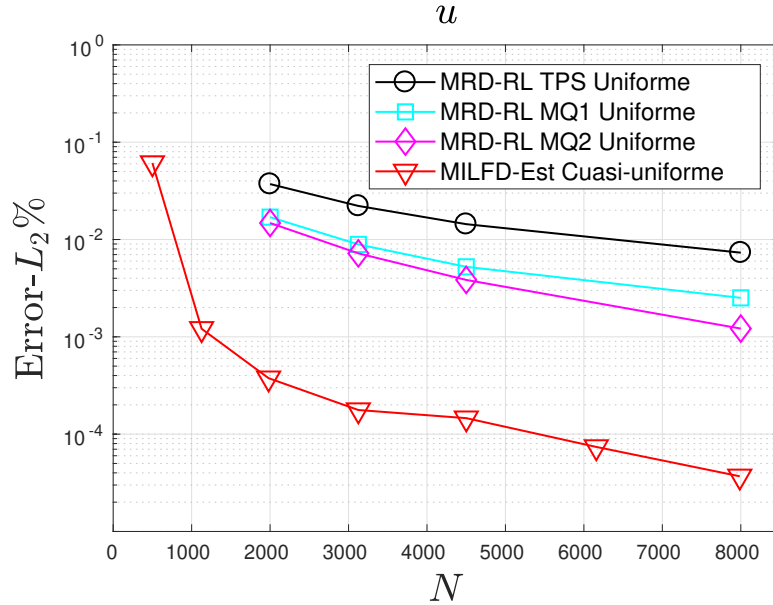


Figura 5.21: Comparación del error- L_2 % entre diferentes métodos locales integrales y distintas distribuciones para el caso $k = 40$ de la ecuación de convección-difusión.

MRD-RL c /MQ2		MILFD-Est c /Gaussianas					
Uniforme		Uniforme		Halton		Cuasi-uniforme	
N	Error- L_2 %	N	Error- L_2 %	N	Error- L_2 %	N	Error- L_2 %
2000	1.48E-02	2000	2.01E-3	2000	9.78E-4	1981	3.76E-4
3125	7.21E-03	3125	7.42E-4	3125	4.02E-4	3125	1.77E-4
4500	3.84E-03	4500	3.40E-4	4500	1.70E-4	4501	1.46E-4
8000	1.22E-03	8000	9.40E-4	8000	1.49E-4	7987	3.69E-5

Tabla 5.6: Comparación del Error- L_2 % para el MRD-RL y el MILFD-Est en distintas distribuciones para el caso $k = 40$ de la ecuación de convección-difusión.

La comparación para diferentes distribuciones uniformes, de tipo Halton y cuasi-uniformes también se muestra en la Figura 5.22 para $k = 40, 100, 200$. Si comparamos estas distribuciones, observamos en todos los subplots que el mejor resultado se obtiene para los puntos cuasi-uniformes. Para $k = 40$, con MILFD-Est en las distribuciones uniforme y Halton, el Error- L_2 % decrece de $N = 500$ a $N = 6125$ y alcanza los mejores valores de errores en $1.72E-04$ y $7.13E-05$ para $N = 6125$ respectivamente. Con la distribución cuasi-uniforme, el error continúa decreciendo hasta alcanzar un error de $3.69E-05$ para $N = 7987$ puntos internos.

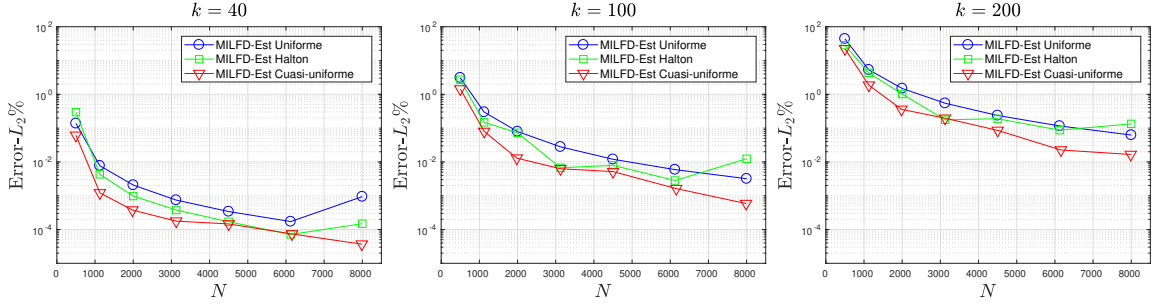


Figura 5.22: Análisis de convergencia para el MILFD-Est para valores de $k = 40, 100, 200$ de la ecuación de convección-difusión.

La Tabla 5.7 muestra la comparación para distintas distribuciones y diferentes valores de k . Podemos decir que los resultados para el MILFD-Est comparados con los casos $k = 40$ y $k = 100$ del MRD-RL con $N = 20480$ puntos interiores uniformes requieren menos de la tercera parte de esos puntos para alcanzar la mejora de un orden de magnitud en el error. Para el caso más complicado de $k = 200$, se alcanza el mismo orden que el MRD-RL con $N = 20480$ puntos interiores pero usando $N = 8000, 6125, 7987$ para las distribuciones uniformes, Halton y cuasi-uniformes respectivamente. El MILFD-Est con $N = 7987$ nodos cuasi-uniformes alcanza un error de $1.66E-02$, que es menor que el valor de $3.44E-02$ con $N = 20480$ puntos uniformes para el MRD-RL.

k	MRD-RL $c/ MQ2$		MILFD-Est $c/ Gaussianas$					
	Uniforme		Uniforme		Halton		Cuasi-uniforme	
	N	Error- L_2 %	N	Error- L_2 %	N	Error- L_2 %	N	Error- L_2 %
40	20480	6.83E-04	6125	1.72E-04	6125	7.13E-05	7987	3.69E-05
100	20480	4.32E-03	6125	1.17E-04	6125	2.82E-03	7987	5.86E-04
200	20480	3.44E-02	8000	6.24E-02	6125	8.71E-02	7987	1.66E-02

Tabla 5.7: Comparación del Error- L_2 % para el MRD-RL y el MILFD-Est para diferentes valores de k de la ecuación de convección-difusión.

Exactitud del MEIFBR, MRD-MD, MEF Galerkin y MILFD-Est

Resolvimos el problema presentado en la ecuación (5.9) con campo de velocidad convectivo (5.10) y condiciones de borde (5.11). Las concentraciones en los extremos están dadas como antes por $U_0 = 300$ y $U_1 = 10$. La solución analítica sobre el dominio rectangular $\Omega = [0, 1] \times [-0,1, 0,1]$ para el coeficiente $D = 1$ está dado como en la ecuación (5.18).

El dominio Ω es discretizado usando $N = 185$ puntos interiores cuasi-uniformes (como se muestra en la Figura 5.23) y un tamaño de estencil local de $n = 25$. El parámetro de forma de la FBR Gaussianes está fijado en un valor bajo de $\varepsilon = 0.1$.

En Tabla 5.8 se muestran los resultados del error porcentual en los nodos. Estos resultados muestran que el MILFD-Est supera a los otros métodos integrales, como el MEIFBR (presentado [62]) y el MRD-MD con subdominios solapados. Estos esquemas numéricos usan tres ecuaciones por nodos. Una comparación adicional se hace con el MEF Galerkin, el cual es un esquema numérico distinto a los anteriores por su dependencia de un mallado.

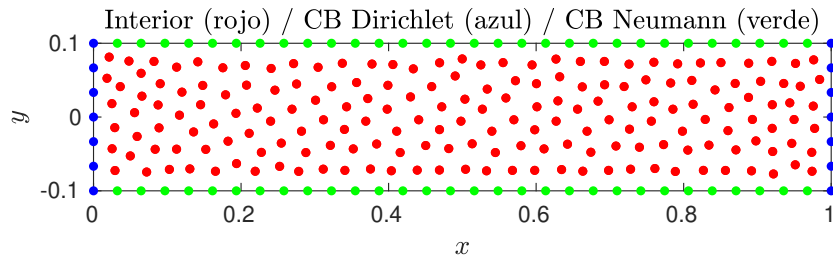


Figura 5.23: Discretización con $N = 185$ internos nodos cuasi-uniformes.

x Uniforme	MEIFBR Error (%)	MRD-MD Error (%)	MEF Galerkin Error (%)	x Cuasi-uniforme	MILFD-Est Error (%)
0.00	0.00000	0.00000	0.00000	0.0000	0.00000
0.02	5.45668	0.93093	0.90054	0.0212	0.10683
0.04	2.56934	2.04848	1.69814	0.0362	0.03398
0.07	1.75382	2.93691	4.11598	0.0720	0.02105
0.10	0.37164	2.72869	6.09828	0.1029	0.00290
0.14	1.69740	0.48519	9.93769	0.1414	0.03763
0.19	3.19192	5.10446	15.42395	0.1931	0.04795
0.25	4.36701	14.41637	21.39718	0.2523	0.08302
0.32	3.69001	25.54530	26.13824	0.3211	0.18088
0.40	4.60394	34.33515	28.03575	0.3991	0.39813
0.56	7.38737	35.25292	22.10643	0.5590	0.20276
0.75	8.09956	25.47853	11.15552	0.7488	0.03603
0.85	2.24756	20.63368	6.66810	0.8506	0.00341
0.93	4.94376	13.70113	3.39957	0.9356	0.03341
1.00	0.00000	0.00000	0.00000	1.0000	0.00000

Tabla 5.8: Resultados obtenidos con el MEIFBR, MRD-MD, MEF Galerkin y MILFD-Est.

5.5.2 Capa límite térmica en un canal bidimensional

Consideremos un flujo estacionario en [2D](#) entrando en un canal paralelo con diferentes temperaturas en sus paredes. La ecuación gobernante es:

$$\Delta T(x_1, x_2) - PeV(x_2) \frac{\partial T}{\partial x_1} = 0, \quad (5.13)$$

donde la distribución de velocidad es una parábola dada por $V(x_2) = 4x_2(x_2 - 1)$ y Pe es el número de Péclet. El dominio computacional es $\Omega = [0, 1]^2$ y las siguientes condiciones de borde mixtas de Dirichlet y Neumann son impuestas por:

$$\begin{cases} T(x_1, 0) = 1 & 0 \leq x_1 \leq 1, \\ T(x_1, 1) = 0 & 0 \leq x_1 \leq 1, \\ T(0, x_2) = 0 & 0 \leq x_2 \leq 1, \\ \frac{\partial T}{\partial x_1}(1, x_2) = 0 & 0 \leq x_2 \leq 1. \end{cases} \quad (5.14)$$

No existe solución analítica conocida para esta [EDP](#).

El objetivo de esta experiencia fue obtener aproximaciones numéricas para valores bajos del parámetro de forma ε para diferentes distribuciones de nodos cuasi-uniformes. También se consideran tres valores del número de Péclet global (Pe).

Las Figuras 5.24, 5.25 y 5.26 muestran los resultados para $Pe = 2, 5, 50$ y 125 respectivamente. Los resultados fueron obtenidos con distribuciones de nodos cuasi-uniformes. Todas las figuras muestran las soluciones numéricas obtenidas. En la primera columna se muestran las graficas de las soluciones, donde se observa el salto abrupto en la solución debido a la discontinuidad en los datos de frontera. En la segunda y tercera columna se muestran distintas secciones para la temperatura. En este caso para la reconstrucción de las soluciones se usaron splines biarmónicas (biharmonic spline), que son una interpolación bidimensional para los nodos irregulares en 2D obtenidos del método integral. Esta superficie de interpolación es una combinación lineal de funciones de Green centradas en cada punto dato (ver [106, 107]).

De todos los valores estudiados para los números de Peclet con el MILFD-Est, los resultados numéricos estables sin oscilaciones fueron obtenidos para un valor bajo del parámetro de forma ($\varepsilon = 0.1$). Para mantener la estabilidad numérica de la solución aproximada cuando $\varepsilon = 0.1$, se necesitaron $N = 901$ puntos cuasi-uniformes en el caso $Pe = 2, 5$ y $Pe = 50$, mientras que se necesitaron $N = 2505$ para $Pe = 125$. Estos son los valores mostrados en las Figuras 5.24, 5.25 y 5.26.

Cuando consideramos el MILFD, obtenemos que para parámetros de forma $\varepsilon < 1$ las aproximaciones numéricas presentan oscilaciones en todos los casos. Esto es debido a que los órdenes del número de condición de las matrices locales de interpolación oscila entre 1×10^{17} y 1×10^{21} .

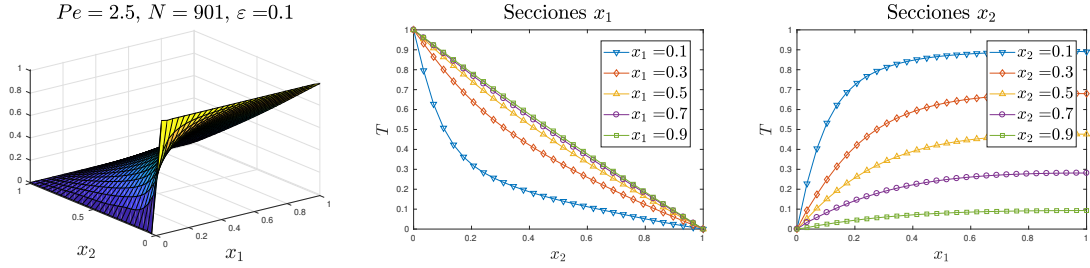


Figura 5.24: Superficie solución (der.), sección x_1 (centro) y sección x_2 (izq.) para el MILFD-Est con $Pe=2.5$, $N = 901$ y $\varepsilon = 0.1$.

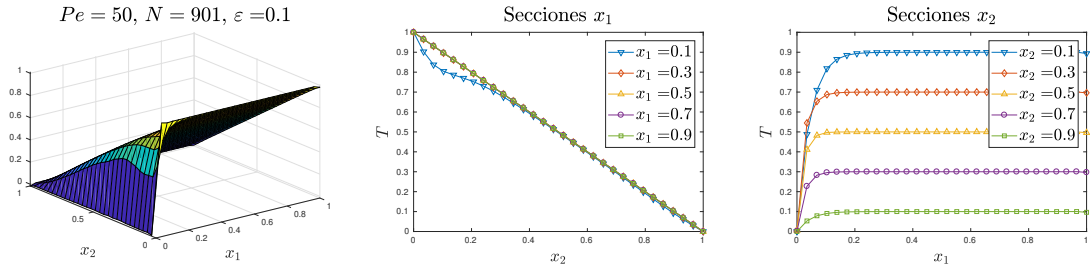


Figura 5.25: Superficie solución (der.), sección x_1 (centro) y sección x_2 (izq.) para el MILFD-Est con $Pe = 50$, $N = 901$ y $\varepsilon = 0.1$.

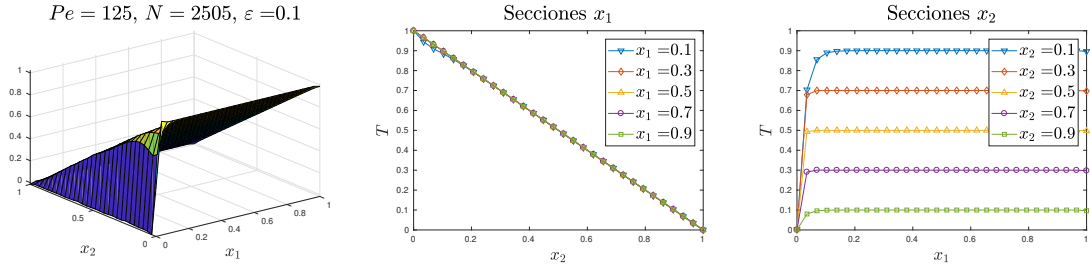


Figura 5.26: Superficie solución (der.), sección x_1 (centro) y sección x_2 (izq.) para el MILFD-Est con $Pe = 125$, $N = 901$ y $\varepsilon = 0.1$.

5.6 Resolución numérica de EDP elípticas con el MILFD-Est

En esta última sección estudiamos la performance del MILFD-Est en una ecuación diferencial de tipo elíptica general con coeficientes variables y condiciones de borde de Dirichlet. Este caso muestra la robustez y la versatilidad del método integral local sin malla para adaptarse a dominios generales, en este caso con un hueco y puntas.

5.6.1 EDP elíptica sobre un dominio irregular 2D

Como experiencia numérica final, exploramos la exactitud de [MILFD-Est](#) cuando se resuelve numéricamente la siguiente [EDP](#) elíptica con coeficientes variables y condiciones de Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta u + \alpha(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + \beta(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma(x, y)u = f(x, y) & \text{en } \Omega, \\ u(x, y) = g(x, y) & \text{sobre } \partial\Omega \text{ (CB)}, \end{cases} \quad (5.15)$$

sobre una región irregular $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ con agujero y picos en la frontera mostrados en la [Figura 5.27](#). Las fronteras internas y externas en coordenadas polares vienen dadas por $r_{int}(\theta) = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} \cos(\theta) + \frac{3}{20} \text{sen}(5\theta)$ y $r_{ext}(\theta) = 1 + \frac{1}{5} \cos(\theta) + \frac{3}{20} \text{sen}(4\theta)$ respectivamente.

Los coeficientes variables oscilantes en la ecuación [\(5.15\)](#) vienen dados por

$$\alpha(x, y) = e^{-y^2 + \cos(4\pi x) \text{sen}(3\pi y)}, \quad (5.16)$$

$$\beta(x, y) = -y \text{sen}(4\pi x), \quad (5.17)$$

$$\gamma(x, y) = x^2 y. \quad (5.18)$$

Las funciones $f(x, y)$ y $g(x, y)$ se obtienen asumiendo que la solución exacta al problema es: $u(x, y) = \text{sen}(2\pi y^2 + 3\pi x) - \cos(\pi y - 2\pi x^2)$.

El dominio se discretiza con el algoritmo repelente presentado en la sección [5.4.4](#) y en [\[37\]](#) para el parámetro $h \in \{0.1, 0.071, 0.05, 0.036, 0.025, 0.018, 0.0125, 0.01\}$. En dicho trabajo, los autores resuelven un [PVC](#) semejante sobre la misma región usando [DF-FBR](#) con [FBR](#) poliarmónicas aumentada con polinomios. En la [Figura 5.27](#) se muestra la discretización del dominio con nodos repelentes para $N = 2217$ puntos interiores y $N_{fro} = 296$ con condiciones de Dirichlet.

Este algoritmo para generar distribuciones de nodos interiores a un dominio de dimensión arbitraria tiene algunas propiedades deseables, como por ejemplo, permitir discretizar dominios irregulares como el nuestro solamente discretizando una región rectangular que contenga la región irregular y luego descartando los nodos que estén fuera de nuestra dominio a cierta distancia fijada. A su vez, la discretización de la frontera es equiespaciada

y permite trabajar con nodos fantasmas (o ficticios) como se muestra en el trabajo citado para resolver problemas diferenciales. Estos nodos tienen la propiedad de poder evitar el uso de estenciles de un solo lado de la frontera mejorando el exactitud y estabilidad de las aproximaciones, aunque último no será abordado en esta tesis.

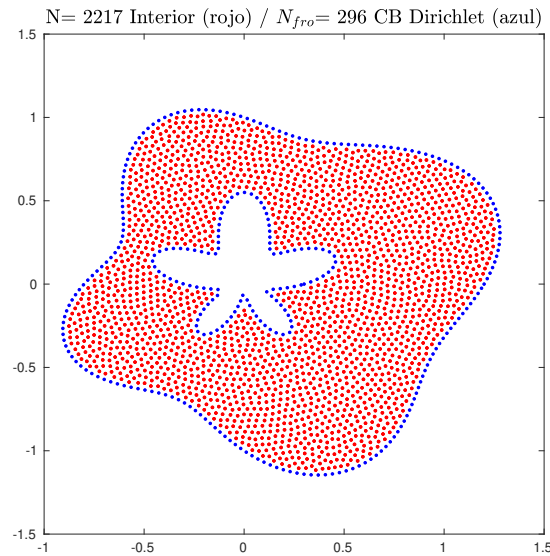


Figura 5.27: Discretización del dominio Ω para $h = 0.036$ con el algoritmo repelente.

Resolvimos el problema diferencial elíptico usando el [MILFD-Est](#) con $N = 280, 569, 1146, 2217, 4610, 8927, 18546, 28981$ puntos repelentes (ver Apéndice B) para estudiar la estabilidad para valores grandes de N . En este ejemplo, estudiamos la exactitud del método usando el Error- L_2 como función del tamaño del estencil n para distintos ε .

La Figura 5.28 muestra el Error- L_2 como función de \sqrt{N} para tres tamaños de estenciles, $n = 21, 36, 55$. En cada subfigura observamos que cuando disminuye ε el Error- L_2 decrece como se esperaba hasta cierto valor. Observamos también que, cuando se incrementa el número de nodos interiores repelentes N de la discretización, el error decrece y alcanza valores de $4.45\text{E-}07$ para $n = 21$, de $3.80\text{E-}07$ para $n = 28$, $3.65\text{E-}07$ para $n = 36$ y $3.55\text{E-}07$ para $n = 55$.

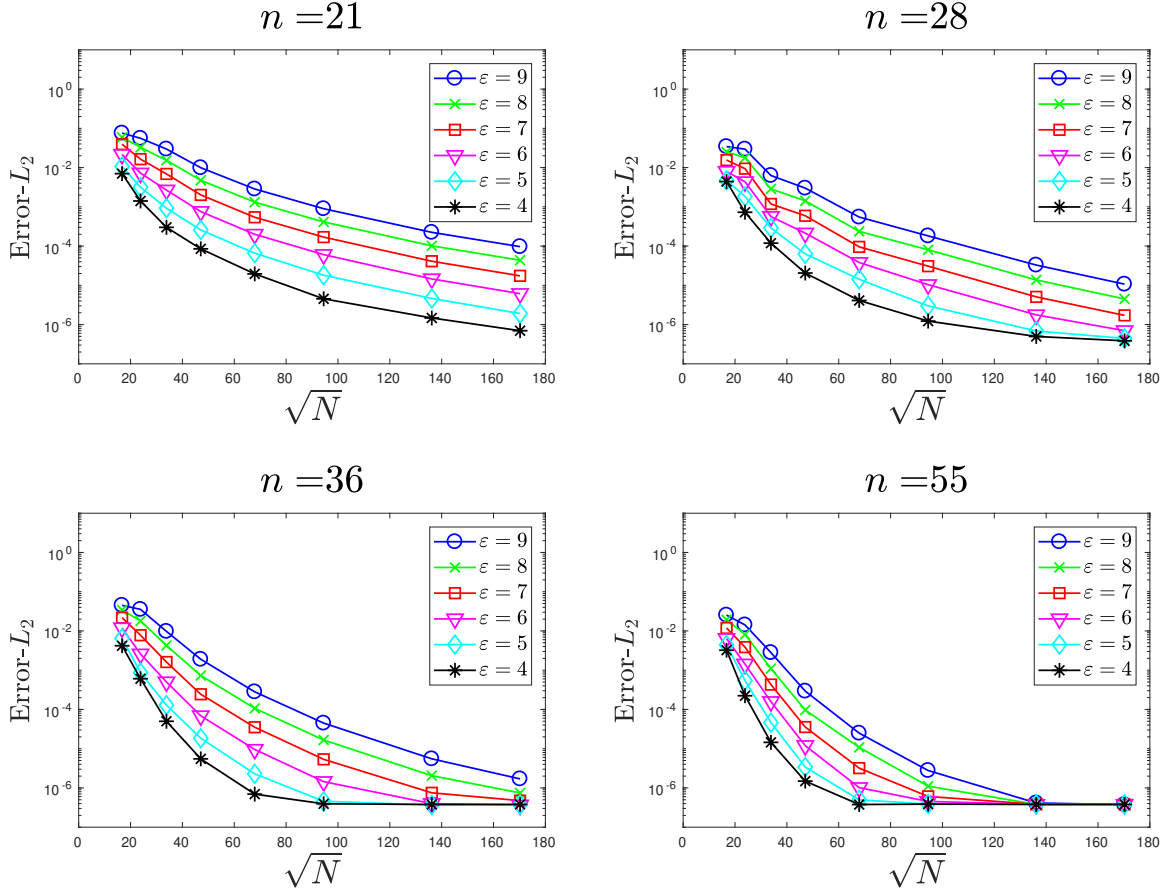


Figura 5.28: Error- L_2 como función del número de nodos \sqrt{N} usando estencil local de tamaño $n = 21, 28, 36, 55$ con MILFD-Est para $\varepsilon \in [4, 9]$.

La Figura 5.28 también muestra que el error del MILFD-Est se estanca para cierto valor grande de N . Si bien en el caso del estencil de $n = 21$ y $n = 28$ esto no sucede, las curvas del error se pegan para $n = 36$ y $n = 55$, y alcanzan un orden de error de 1×10^{-7} . Este mismo fenómeno se observa en la Tabla 5.5 y la Figura 5.11 en el ejemplo de la sección 5.4.3. Incluso cuando el número de condición de la matriz local de interpolación crece con n , el mejor error es alcanzado en el rango de $\varepsilon \in [4, 9]$ estudiado en los cuatro estenciles. Como se observa en [28], puede aumentarse la precisión aritmética del computador para mitigar los efectos del mal condicionamiento.

Capítulo 6

CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

6.1 Resultados de MILFD-Est

En esta tesis se presentó y desarrolló un nuevo método basado en un esquema local integral que considera interpolaciones con [FBR](#) Gaussianas mejorando la estabilidad del error numérico con el objetivo de alcanzar mayor exactitud en un rango bajo del parámetro de forma ε . En primer lugar se propuso una técnica denominada Método Integral Local de Frontera y Dominio ([MILFD](#)) que se inspira en formulaciones locales del Método Elementos de Contornos ([MEC](#)) y otras técnicas preexistentes. En segundo lugar, se propuso el denominado Método Integral Local de Frontera y Dominio-Estabilizado ([MILFD-Est](#)) para remarcar su carácter fuertemente estable. La robustez del nuevo [MILFD-Est](#) fue evaluada para diferentes [EDP](#) de tipo elípticas con condiciones de borde de Dirichlet y/o Neumann sobre diferentes dominios bidimensionales.

A su vez, los buenos resultados se obtuvieron sobre distintas discretizaciones de los dominios usados en esta tesis. Se utilizaron distribuciones de nodos tanto uniformes como dispersas de tipo Halton, algoritmos repelentes o de tipo cuasi-uniformes. Esto muestra el carácter fuertemente independiente de un mallado del método integral local desarrollado.

Como se expuso a lo largo de esta tesis, la exactitud y robustez del [MILFD-Est](#) se han mostrado aplicándolo a problemas de Laplace, Poisson en [2D](#) y de convección-difusión para los cuales la solución exacta es conocida. También se resolvió un problema de capa límite termal sin solución conocida y una ecuación diferencial general de tipo elíptica con coeficientes variables. Su eficiencia ha quedado demostrada frente a los exhaustivos análisis de

los distintos errores calculados, cuando se ha contado, en la mayoría de los casos, con soluciones exactas. Asimismo, se han comparado los resultados del [MILFD-Est](#) con el [MRD-RL](#) desarrollado por Caruso, Portapila y Power en [15] debido a ser el método integral local reciente con mayor analogía a esta tesis. También se comparó con el [MEIFBR](#) desarrollado por Ooi y Popov en [99], con el [DF-FBR](#) usado por Bayona, Flyer, Fornberg, y Barnett en [37], con el [MRD-MD](#) analizado por Portapila y Power en [8, 9] y con el [MEF](#) de Galerkin ya establecido. Los resultados de exactitud logrados en los casos de estudio mejoraron los métodos mencionados.

Se utilizó además la correspondiente función de Green en subregiones de integración circulares, en lugar de aplicar la solución fundamental del laplaciano en la formulación integral. La característica principal de este nuevo esquema es que siempre se anula el término integral con el potencial de capa simple, lo cual simplifica de manera significativa la implementación numérica y acelera su cálculo. Cabe destacar que para dicho esquema deja de ser necesario que el punto fuente esté ubicado en el centro de la región circular.

En los casos sencillos de Laplace y Poisson con condiciones de borde Dirichlet sobre un cuadrado de la sección 5.4.1 se observa que el nuevo método presentado logra estabilizarse para valores bajos del parámetro de forma en distribuciones uniformes y dispersas. Las comparaciones iniciales en estos casos simples al usar el [MRD-RL](#) con Gaussianas muestran que el [MILFD-Est](#) lo supera en hasta siete órdenes de magnitud en el caso de Laplace y en hasta tres órdenes en el caso de Poisson. A diferencia de los otros métodos que se vuelven inestables numéricamente, la estabilidad del error del nuevo método lograda en estos ejemplos permitiría un rango bajo útil del parámetro de forma, por ejemplo en casos de estudio de simulaciones numéricas para aplicaciones ingenieriles o de otra índole.

En el problema presentado en la sección 5.4.2 (una [EDP](#) de Poisson con condiciones de borde mixtas sobre un cuadrado) se muestra un comportamiento similar al usar los métodos [MRD-RL](#), [MILFD](#) y [MILFD-Est](#) para valores del parámetro de forma mayor que 2.5, mientras que para $\varepsilon < 2.5$ solo el [MILFD-Est](#) muestra una buena performance. Usando una distribución uniforme de $N = 400$ puntos se logró mejorar un orden de magnitud respecto al [MRD-RL](#) con [FBR](#) Gaussianas. También para $N = 900, 1600, 2500$ y $\varepsilon < 1$

se lograron mejoras. Para estas distribuciones uniformes puede verse cómo el fenómeno de Runge actúa en cada una de las interpolaciones locales con FBR del MILFD-Est con bajo parámetro de forma, y termina trasladándose al error total del método. La comparación de tiempos computacionales permite concluir que, al ser el MILFD-Est un método estable, son necesarias pocas experimentaciones numéricas con valores bajos del parámetro de forma para alcanzar un error aceptable, mientras que con los demás métodos habría que realizar varias experiencias computacionales de modo de obtener un ε_{opt} o bien introducir alguna técnica de optimización lo cual incrementaría aún más el tiempo computacional.

En el ejemplo presentado en la sección 5.4.3 (una EDP de Poisson con condiciones de borde de Dirichlet) se logran mejorar por tres órdenes los resultados presentados para el MEIFBR y al menos por dos órdenes para los resultados del MILFD. Además, los tests numéricos para grandes discretizaciones de $N = 8000, 10000, 22500$ alcanzaron buena exactitud para FBR casi planas comportándose además de forma estable. Para mitigar los errores de integración numérica producidos por el cálculo de las integrales de frontera y dominio, se varió la cantidad de puntos de la cuadratura Gaussiana reportando el mejor error. Sin embargo, de los resultados provistos se concluye que los errores introducidos por la integración numérica no son la principal componente del error.

Para el problema de Poisson sobre el disco unitario presentado en la sección 5.4.4, el esquema del MILFD-Est mostró una gran área de estabilidad con un error norma L_2 (error- L_2) alcanzando un orden de 1×10^{-6} para $N = 1185$, y 1×10^{-7} para $N = 4880$ y $N = 9639$. Estos resultados se dieron cuando el tamaño del estencil crecía y ε decrecía, mientras que los resultados con el MILFD mostraron una gran región de inestabilidad debido al mal condicionamiento de las matrices de interpolación locales. Se mostró además con el MILFD-Est la mejora del condicionamiento del problema logrando bajar en diez órdenes el número de las matrices locales de interpolación y a su vez, mostrando cierta independencia del parámetro de forma cuando N aumentaba. Todos estos resultados mejoraron el error- L_2 que se presenta al usar el método de DF-FBR con aumento polinomial para el mismo problema. Más aún, incluimos las isolíneas de exactitud para valores grandes de las distribuciones de nodos repelentes ($N = 19816, 30976$) usando el MILFD-Est. En esto último se observó que

la región de estabilidad se extiende hasta alcanzar un error de orden 1×10^{-7} para $n > 30$ y $\varepsilon \in [1, 10]$. Esta mejora se obtuvo con un costo computacional mayor debido al cálculo extra de la factorización QR, pero esta nueva técnica mantiene constante el tiempo computacional cuando decreció el parámetro de forma ε alcanzando la mejor exactitud. Esto es remarcable porque permite tener una noción del tiempo requerido para valores bajos de ε independientemente del tamaño del estencil usado. En cambio, los métodos que se vuelven inestables, si bien tardan menos tiempo, necesitan varias experimentaciones numéricas para obtener un parámetro de forma óptimo.

En el problema de aplicación presentado en la sección 5.5.1 para la ecuación de convección-difusión, testado ampliamente en la literatura científica y que presenta dos “shocks” cerca de las fronteras, el MILFD-Est mejora el error- L_2 por dos órdenes de magnitud al MRD-RL si comparamos los resultados obtenidos con una discretización de $N = 1127$ puntos cuasi-uniformes con los resultados obtenidos para $N = 8000$ puntos uniformes usando el MRD-RL con FBR TPS, MQ1 y MQ2. Además, en el mismo problema pero con $N = 185$ puntos, el MILFD-Est mejora al MEIFBR, al MRD-MD y al MEF de Galerkin, métodos ya establecidos en la literatura científica. Si bien ninguna técnica de adaptividad cerca de la frontera del shock fue utilizada en el caso del MILFD-Est, en este problema proveniente de las aplicaciones es interesante notar que tanto las discretizaciones estructuradas o no estructuradas permitieron encontrar los mejores errores cuando el parámetro de forma disminuye. Sería esperable mejorar estos resultados con técnicas adaptivas y a un bajo rango del parámetro de forma.

El problema sin solución exacta de la capa térmica presentado en la sección 5.5.2 es inestable para valores del número de Péclet más grandes que $Pe = 2$. Este PVC se resolvió numéricamente usando el MILFD-Est con $N=901$ para $Pe=2.5,50$ y con $N=2505$ para $Pe=125$, alcanzando un valor de $\varepsilon = 0.1$. Los resultados obtenidos fueron interpolados con splines biarmónicas, las cuales mostraron buena performance en la reconstrucción de la solución aproximada.

El ejemplo final presentado en la sección 5.6.1 es una EDP elíptica con coeficientes variables y altamente oscilantes sobre un dominio irregular bidimensional con un agujero

y fronteras en pico. Incrementando el número de puntos repelentes en la discretización, los errores decrecen y alcanzan un orden de 1×10^{-7} para diferentes estenciles. Además, el [MILFD-Est](#) se estabilizó para valores grandes de N .

Por todo lo expuesto, puede concluirse que esta nueva técnica estabilizada, el [MILFD-Est](#), es una contribución valiosa al campo específico de los métodos locales integrales y las [FBR](#), que colabora en reducir el error numérico debido a las inestabilidades producidas por el mal condicionamiento de un rango bajo del parámetro de forma de las [FBR](#) Gaussianas interpolantes. A su vez, su eficiencia computacional radica en su estabilidad para valores bajos del parámetro de forma. La aplicabilidad a varios problemas de valores de contorno con diferentes condiciones de borde sobre diferentes dominios en [2D](#) estacionario validan el método, ya que mejoran la exactitud y el condicionamiento numérico con distintos tipos y tamaños de distribuciones de nodos. El método resulta entonces una contribución a temas de interés actuales en el campo de la matemática aplicada.

6.2 Proyectos futuros

Los buenos resultados obtenidos con el nuevo método local integral estabilizado denominado [MILFD-Est](#) permiten concluir que el uso de técnicas de estabilidad actuales para [FBR](#) permite lograr una buena exactitud del error numérico ampliando el rango de utilidad en el caso que estas funciones dependan del parámetro de forma ε .

Desarrollo de nuevos métodos integrales locales estables que usen FBR

Distintas técnicas de estabilidad han sido investigadas y desarrolladas para interpolaciones globales, sin embargo es un área de investigación y desarrollo vacante su formulación en métodos integrales locales, siendo necesario su tratamiento debido a que estas técnicas mejoran el mal condicionamiento de las matrices cuando se interpola con [FBR](#) y abren nuevas posibilidades de desarrollo de nuevos métodos.

Un primer proyecto futuro es la estabilización del error generado por el mal condicionamiento local con otras técnicas de estabilidad numérica para interpolar localmente con

funciones que dependan del parámetro de forma, como por ejemplo [FBR-GA](#) o [Gauss-QR](#) desarrollando así nuevos métodos integrales para resolver [PVC](#). Un primer avance en este sentido se presentó en [\[38\]](#).

A su vez, generar matrices de interpolación local del [MILFD](#) con [FBR](#) que sean independientes de dicho parámetro permitiría incorporar técnicas como [FBR-RA](#) para lograr mayor amplitud en el uso del tipo de función radial a usar dependiendo el problema en estudio. La comparación en exactitud y eficiencia entre estas técnicas de estabilidad de [FBR](#) en problemas diferenciales tanto para funciones que dependan o no del parámetro de forma ε es un trabajo interesante a continuar.

Paralelamente, el uso de interpolaciones locales en el [MILFD](#) con [FBR](#) de tipo splines poliarmónicas aumentadas con polinomios para comparar con el método [DF-FBR](#) es una línea de trabajo a seguir debido a los buenos resultados mostrados con este último método en la resolución de [EDP](#) generales de tipo elípticas sobre regiones irregulares.

Extensión a otras dimensiones y problemas no-estacionarios

Desde el punto de vista de las aplicaciones para obtener una solución numérica precisa y eficiente para problemas, como por ejemplo el de transporte de contaminantes, es necesario contar con un método local integral estabilizado con interpolaciones con [FBR](#) en varias dimensiones, incluso para problemas dependientes del tiempo.

Un segundo proyecto de trabajo es la extensión natural del [MILFD](#) a dimensiones mayores. En principio, lograr formulaciones integrales en [3D](#) y su eficiente integración numérica de las integrales de borde y de frontera de las subregiones. A su vez, habrá que realizar la implementación numérica y el testeo de las técnicas de estabilidad globales en mayores dimensiones para poder incorporar estos esquemas estables para interpolar localmente y resolver [PVC](#) en derivadas parciales. Implementar la nueva formulación estabilizada del [MILFD-Est 3D](#) para ampliar la región de utilidad del parámetro de forma, es un trabajo desafiante. Asimismo, la construcción de las distribuciones de nodos y de los estenciles y subregiones de integración en dimensiones mayores es un tema pendiente.

Paralelamente, en problemas de dinámica de fluidos como el transporte de flujo en

cursos de agua y el transporte de contaminantes en medios porosos, es necesario abordar estos problemas no-estacionarios dependientes del tiempo. Esto también es materia para futuros estudios e investigaciones científicas.

Abordaje de problemas provenientes de aplicaciones con el MILFD-Est

Finalmente, si bien en esta tesis se ha trabajado hasta el momento con el [MILFD-Est](#) aplicado a problemas de transporte lineales y estacionarios, un tercer proyecto de trabajo es lograr abordar [PVC](#) más complicados con [EDP](#) que contengan términos no-lineales y condiciones de borde más generales, incluso sobre dominios más generales. Esto permitiría mostrar la robustez del método desarrollado y su contribución al campo de las simulaciones numéricas.

Un tercer proyecto sería incorporar este método y sus versiones mejoradas en problemas provenientes de aplicaciones de diversas ramas de la ingeniería y las ciencias como aporte de la matemática aplicada.

Apéndice A

INTEGRACIÓN DE FRONTERA Y DOMINIO DEL MILFD-EST

A.1 La EDP de Poisson con condiciones de borde mixtas

Es bien sabido que en integración numérica la regla del trapecio converge geométricamente cuando se aplica a funciones analíticas sobre intervalos periódicos, mientras que la cuadratura de Gauss-Legendre es adecuada en la integración solo sobre segmentos o arcos. Ver [108].

En este apéndice mostramos la relación existente entre la integración numérica de las integrales de frontera y dominio y la exactitud del error para el MILFD y el MILFD-Est. Los dos esquemas de integración numérica que presentamos son la regla del trapecio y la cuadratura de Gauss-Legendre.

Consideramos los diferentes casos estudiados en la sección 5.4.4 del Cap. 5 que usan el método local integral con y sin el solver local FBR-QR variando el número de puntos de integración ($q \in [1, 50]_{\mathbb{N}}$) para ambos métodos. Usamos $N = 1185$ nodos interiores con estenciles de $n = 20, 40, 60$ nodos y parámetro de forma de la FBR Gaussiana de $\varepsilon = 3.0$.

En la Figura A.1 se muestra que el aumento de la cantidad de puntos q de integración de Gauss (línea azul) y del trapecio (línea roja) no mejoran el error numérico total del MILFD (columna izquierda) y del MILFD-Est (columna derecha) para este problema aun cuando se aumenta el estencil de $n = 20$ a $n = 60$. La elección fue fijada en $q = 40$.

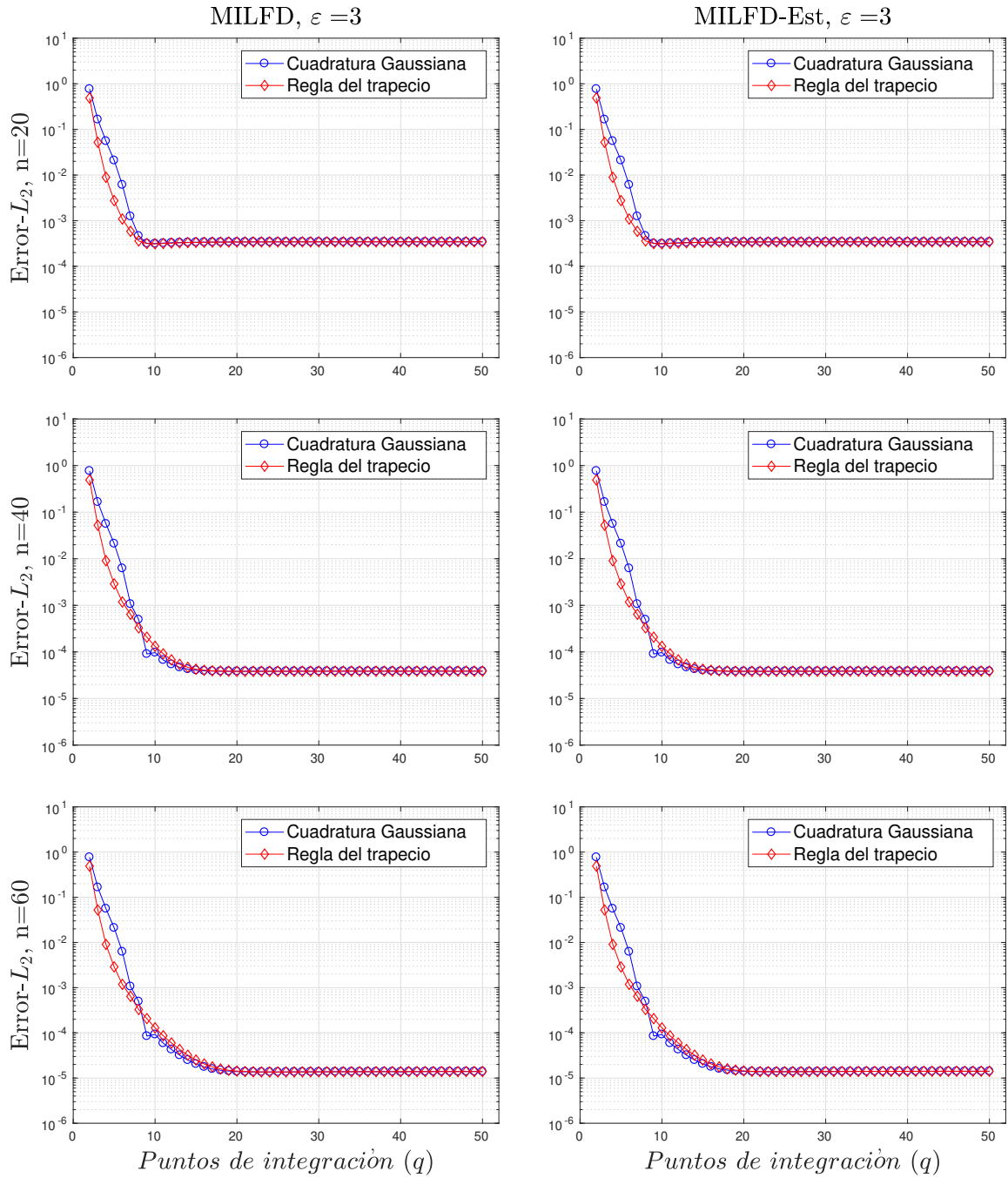


Figura A.1: Comparación del Error- L_2 para cuadratura Gaussiana y la regla del trapecio en el MILFD (columna izq.) y el MILFD-Est (columna der.) con estenciles de $n = 20, 40, 60$ nodos en una discretización repelente de $N = 1185$.

A.2 La EDP de Poisson con condiciones de borde de Dirichlet

Para mostrar el efecto de la exactitud de la cuadratura de Gauss-Legendre en las integrales de frontera y de dominio presentadas en las ecuaciones (4.64a)-(4.64c), incrementamos el número de puntos de Gauss q ($q=40:1:80$) en el problema presentado en la sección 5.4.3 del Cap. 5.

En la Figura A.2 observamos que, para un parámetro de forma fijo ($\varepsilon = 0,1$), el aumento de q es beneficioso hasta alcanzar un mínimo local.

La Figura A.3 muestra el mismo efecto. No profundizamos en este aspecto porque exceden a los objetivos de esta tesis.

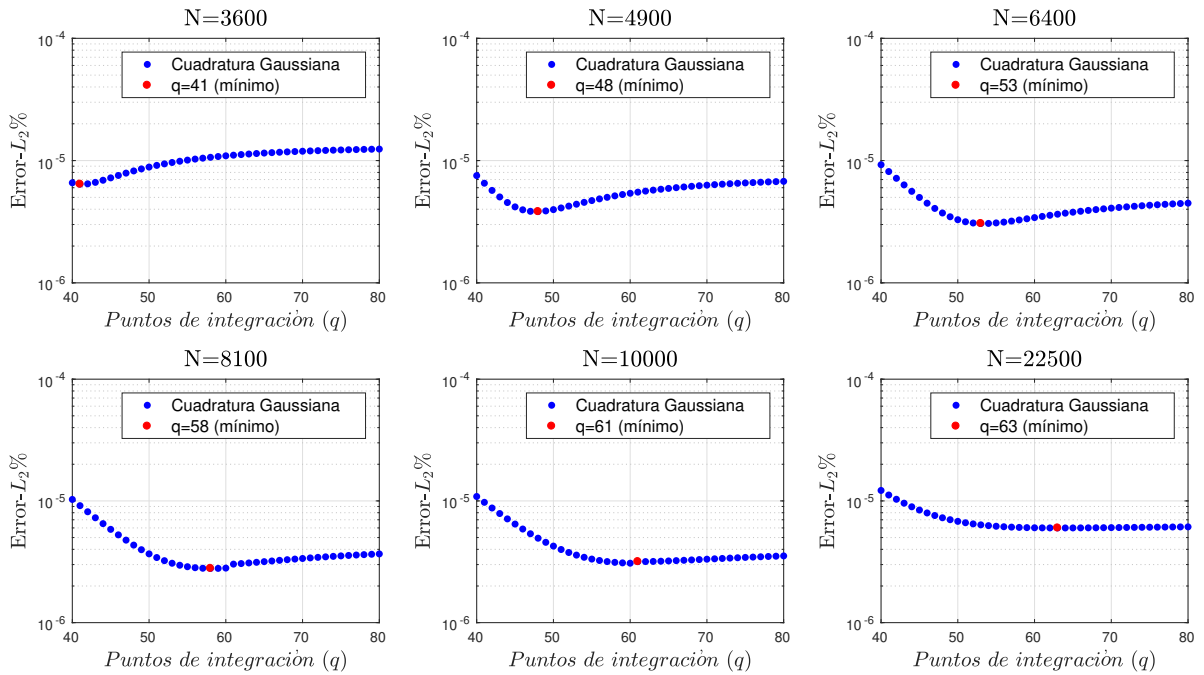


Figura A.2: Error- L_2 % para el MILFD-Est usando distribuciones uniformes de nodos (en cada subplot) y $q \in [40, 80]_{\mathbb{N}}$ para un parámetro de forma de $\varepsilon = 0.1$ fijo.

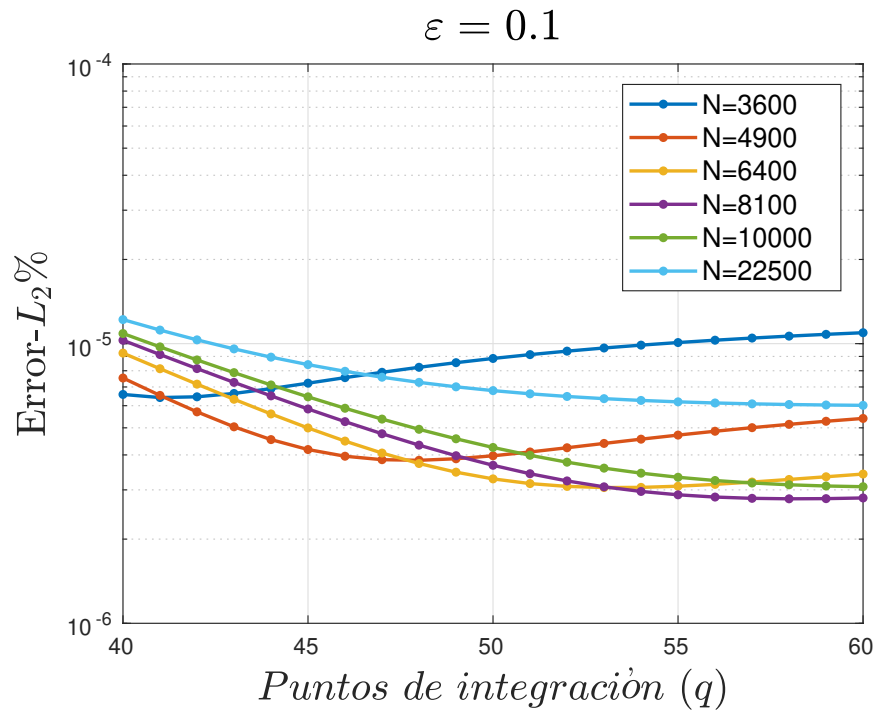


Figura A.3: Error- L_2 % para el MILFD-Est usando distribuciones uniformes de nodos (todas las líneas juntas) y $q \in [40, 60]_{\mathbb{N}}$ para un parámetro de forma de $\varepsilon = 0.1$ fijo.

Apéndice B

DISCRETIZACIONES DE DOMINIOS

B.1 Discretizaciones EDP Laplace y Poisson en casos simples

Uniforme		Halton	
N	N_{Dir}	N	N_{Dir}
400	84	400	80
900	124	900	120
1600	164	1600	160

Tabla B.1: Discretizaciones de las EDP de Laplace y Poisson 5.4 con N nodos internos y N_{Dir} nodos con condiciones de Dirichlet.

B.2 Discretizaciones EDP Poisson con condiciones mixtas

Uniforme			Halton			Cuasi-uniforme		
N	N_{Dir}	N_{Neu}	N	N_{Dir}	N_{Neu}	N	N_{Dir}	N_{Neu}
400	44	40	400	40	40	401	38	38
900	64	60	900	60	60	901	58	58
1600	84	80	1600	80	80	1600	80	80
2500	104	100	2500	100	100	2505	100	100

Tabla B.2: Número de discretizaciones de la EDP de Poisson 5.4.2 con N nodos internos, N_{Dir} nodos con condiciones de Dirichlet y N_{Neu} nodos con condiciones de Neumann.

B.3 Discretizaciones EDP Poisson con condiciones Dirichlet

Uniforme		Halton		Cuasi-uniforme		
N	N_{Dir}	N	N_{Dir}	N	N_{Dir}	r
400	84	400	80	401	80	0.04973
900	124	900	120	901	120	0.03345
1600	164	1600	160	1600	164	0.024852
2500	204	2500	200	2505	204	0.0198294
3600	244	3600	240	3603	240	0.016557
4900	284	4900	280	4508	268	0.0147053
6400	324	6500	320	6580	324	0.012221
8100	364	8000	360	8027	360	0.011085
10000	404	10000	400	10078	400	0.0099585
22500	604	22500	600	22570	600	0.006625

Tabla B.3: Discretizaciones de la EDP de Poisson 5.4.3 con N nodos internos, N_{Dir} nodos con condiciones de Dirichlet y r coeficiente de espaciamento del algoritmo cuasi-uniforme.

B.4 Discretizaciones EDP Poisson sobre un disco

Nodos repelentes		
N	N_{Dir}	h
279	62	0.1
279	64	0.098
566	88	0.071
1185	125	0.050
2362	174	0.036
4880	251	0.025
9639	349	0.018
19816	502	0.0125
30976	628	0.0100

Tabla B.4: Discretizaciones de la EDP de Poisson 5.4.4 con N nodos internos, N_{Dir} nodos con condiciones de Dirichlet y h coeficiente de espaciamento del algoritmo repelente.

B.5 Discretizaciones ecuación convección-difusión

Uniforme			Halton			Cuasi-uniforme		
N	N_{Dir}	N_{Neu}	N	N_{Dir}	N_{Neu}	N	N_{Dir}	N_{Neu}
500	24	100	500	20	100	500	22	100
1125	34	150	1125	30	150	1127	32	150
2000	44	200	2000	40	200	1981	42	198
3125	54	250	3125	50	250	3125	52	250
4500	64	300	4500	60	300	4501	62	300
6125	74	350	6125	70	350	6158	74	352
8000	84	400	8000	80	400	7987	84	404
10125	94	450	10125	90	450	10126	92	450

Tabla B.5: Discretizaciones de la ecuación de convección-difusión 5.5.1 con N nodos internos, N_{Dir} nodos con condiciones de Dirichlet y N_{Neu} nodos con condiciones de Neumann.

B.6 Discretizaciones EDP capa límite térmica en un canal

Cuasi-uniforme		
N	N_{Dir}	N_{Neu}
401	57	19
901	87	29
1600	120	40
2505	150	50
3603	180	60

Tabla B.6: Discretizaciones del problema de la capa límite térmica 5.5.2 con N nodos internos, N_{Dir} nodos con condiciones de Dirichlet y N_{Neu} nodos con condiciones de Neumann.

B.7 Discretizaciones EDP elíptica sobre dominio irregular 2D

Cuasi-uniforme		
N	N_{Dir}	h
280	104	0.1
569	149	0.071
1146	212	0.050
2217	296	0.036
4610	427	0.025
8927	594	0.018
18546	854	0.0125
28981	1070	0.01

Tabla B.7: Discretizaciones de la EDP tipo elíptica 5.6.1 con N nodos internos, N_{Dir} nodos con condiciones de Dirichlet y h coeficiente de espaciamiento del algoritmo repelente.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] G.E. Fasshauer. *Meshfree Approximation Methods with MATLAB*. World Scientific Publishing Co., Hackensack, NJ, USA, 2007.
- [2] G.E. Fasshauer y M.J. McCourt. *Kernel-based Approximation Methods using MATLAB*. World Scientific Publishing Co., Hackensack, NJ, USA, 2015.
- [3] B. Fornberg y N. Flyer. *A Primer on Radial Basis Functions with Applications to the Geosciences*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2015.
- [4] D. Nardini y C.A. Brebbia. A new approach to free vibration analysis using boundary elements. *Applied Mathematical Modelling*, 7:157–162, 1983.
- [5] D. Nardini y C.A. Brebbia. Boundary Integral Formulation of Mass Matrices for Dynamic Analysis (Chapter 7). In C.A. Brebbia, editor, *Topics in Boundary Elements Research*, pages 191–207. Springer-Verlag, Berlin y New York, 1985.
- [6] V. Popov y H. Power. The DRM-MD integral equation method for the numerical solution of convection-diffusion equation. *Transactions on Modelling and Simulation*, 19:67–80, 1998.
- [7] V. Popov y H. Power. The DRM-MD integral equation method: an efficient approach for the numerical solution of domain dominant problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44:327–353, 1999.

- [8] M. Portapila y H. Power. A convergence analysis of the performance of the DRM-MD boundary integral approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 71:47–65, 2007.
- [9] M. Portapila y H. Power. Iterative Solution Schemes for Quadratic DRM-MD. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 24:1430–1459, 2008.
- [10] S.N. Atluri y T. Zhu. A new Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. *Computational Mechanics*, 22:117–127, 1998.
- [11] T. Zhu, J.-D. Zhang y S.N. Atluri. A local boundary integral equation (LBIE) method in computational mechanics, and a meshless discretization approach. *Computational Mechanics*, 21:223–235, 1998.
- [12] L.I.N. Trefethen y D. Bau III. *Numerical Linear Algebra*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 1997.
- [13] Y. Saad. *Iterative methods for sparse linear systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2000.
- [14] K. Chen. *Matrix Preconditioning Techniques and Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, NY, USA, 2005.
- [15] N. Caruso, M. Portapila y H. Power. An efficient and accurate implementation of the Localized Regular Dual Reciprocity Method. *Computers and Mathematics with Applications*, 69:1342–1366, 2015.
- [16] N. Caruso, M. Portapila y H. Power. PDE centres enhancement in the Localized Regular Dual Reciprocity Method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 64:255–266, 2016.
- [17] H. Power, N. Caruso y M. Portapila. A note on the use of the Companion Solution (Dirichlet Green’s function) on meshless boundary element methods. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 75:57–64, 2017.

- [18] W.R. Madych y S.A. Nelson. Multivariate interpolation and conditionally positive definite functions. II. *Mathematics of Computation*, 54:211–230, 1990.
- [19] M. Buhmann y N. Dyn. Spectral convergence of multiquadric interpolation. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 36:319–333, 1993.
- [20] M.D. Buhmann. *Radial Basis Functions: Theory and Implementations*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [21] H. Wendland. *Scattered Data Approximation*. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [22] E. Larsson y B. Fornberg. A Numerical Study of Some Radial Basis Function Based Solution Methods for Elliptic PDEs. *Computers and Mathematics with Applications*, 46:891–902, 2003.
- [23] E. Larsson y B. Fornberg. Theoretical and Computational Aspects of Multivariate Interpolation with Increasingly Flat Radial Basis Functions. *Computers and Mathematics with Applications*, 49:103–130, 2005.
- [24] R. Schaback. Error estimates and condition numbers for Radial Basis Function interpolants. *Advances in Computational Mathematics*, 3:251–264, 1995.
- [25] B. Fornberg y G. Wright. Stable Computation of Multiquadric Interpolants for All Values of the Shape Parameter. *Computers and Mathematics with Applications*, 48:853–867, 2004.
- [26] C. Piret. *Analytical and numerical advances in radial basis functions*. PhD thesis, University of Colorado, 2007.
- [27] B. Fornberg y C. Piret. A stable algorithm for flat radial basis functions on a sphere. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 30:60–80, 2007.
- [28] B. Fornberg, E. Larsson y N. Flyer. Stable Computations with Gaussian Radial Basis Functions. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 33:869–892, 2011.

- [29] G.E. Fasshauer y M.J. McCourt. Stable Evaluation of Gaussian Radial Basis Function Interpolants. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 34:A737–A762, 2012.
- [30] B. Fornberg, E. Lehto y C. Powell. Stable calculation of Gaussian-based RBF-FD stencils. *Computers and Mathematics with Applications*, 65:627–637, 2013.
- [31] G.B. Wright y B. Fornberg. Stable computations with flat radial basis functions using vector-valued rational approximations. *Journal of Computational Physics*, 331:137–156, 2017.
- [32] L. Ponzellini Marinelli, N. Caruso y M. Portapila. A stable computation on local boundary-domain integral method for elliptic PDEs. *Mathematics and Computers in Simulation*, 180:379–400, 2021.
- [33] L. Ponzellini Marinelli, M. Portapila y M.C. Sanziel. Solución numérica de sistemas de ecuaciones lineales provenientes del método MRD-RL para la ecuación de convección-difusión. In *Acta IV Congreso de MACI 2013*, volume 4, pages 299–302. ASAMACI, Buenos Aires, Arg., 2013.
- [34] L. Ponzellini Marinelli, N. Caruso y M. Portapila. Estabilidad numérica del Método de Reciprocidad Dual Regular Local usando FBR-QR. In *Acta VI Congreso de MACI 2017*, volume 6, pages 134–137. ASAMACI, Comodoro Rivadavia, Arg., 2017.
- [35] L. Ponzellini Marinelli, N. Caruso y M. Portapila. Numerical stability of the Localized Regular Dual Reciprocity Method using RBF-QR (poster). In *Workshop Localized Kernel-Based Meshless Methods for Partial Differential Equations*. Institute for Computational and Experimental Research in Mathematics (ICERM), Providence, Rhode Island, US, 2017.
- [36] B. Fornberg y N. Flyer. Fast generation of 2-D node distributions for mesh-free PDE discretizations. *Computers and Mathematics with Applications*, 69:531–544, 2015.
- [37] V. Bayona, N. Flyer, B. Fornberg y G.A. Barnett. On the role of polynomials in RBF-

- FD approximations: II. Numerical solution of elliptic PDEs. *Journal of Computational Physics*, 332:257–273, 2017.
- [38] L. Ponzellini Marinelli y N. Caruso. Estabilidad numérica de un Método Local Integral sin malla usando RBF-GA. In *Acta VII Congreso de MACI 2019*, volume 7, pages 185–188. ASAMACI, Río Cuarto, Arg., 2019.
- [39] G. Green. An Essay on the Application on mathematical Analysis to the theories of Electricity and Magnetism. *T. Wheelhouse: Nottingham*, 1828.
- [40] I. Fredholm. Sur une classe d'équations fonctionnelles. *Acta Mathematica*, 27:365–390, 1903.
- [41] M.A. Jaswon. Integral equation methods in potential theory. i. *Proc. R.Soc. London, Serie A*, 275:23–32, 1963.
- [42] G.T. Symm. Integral equation methods in potential theory. ii. *Proc. R.Soc. London, Serie A*, 275:33–46, 1963.
- [43] M.A. Jaswon y A.R. Ponter. An integral equation solution of the torsion problem. *Proc. R. Soc. London, Serie A*, 273:237–246, 1963.
- [44] M.A. Jaswon y G.T. Symm. *Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics*. Academic Press, Inc, London, UK, 1977.
- [45] G.S. Gipson. *Boundary element fundamentals—Basic concepts and recent developments in the Poisson equation*. Computational Mechanics Publications, Southampton y Boston, 1987.
- [46] C.A. Brebbia y D.J. Dominguez. *Boundary Elements. An Introductory Course. 2nd Ed.* WIT Press, Computational Mechanics Publications, Southampton y Boston, 1998.
- [47] J.T. Katsikadelis. *The Boundary Element Method for Engineers and Scientists. Theory and Applications. Second Edition*. Academic Press, Elsevier, London, UK, 2016.

- [48] S. Ahmad y P.K. Banerjee. Free Vibration Analysis by BEM Using Particular Integrals. *Journal of Engineering Mechanics*, 112:682–695, 1986.
- [49] J.T. Katsikadelis. The analog equation method. a boundary-only integral equation method for nonlinear static and dynamic problems in general bodies. *Theoretical and Applied Mechanics*, pages 13–38.
- [50] P.W. Partridge, C.A. Brebbia y L.C. Wrobel. *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*. Computational Mechanics Publications co-published with Elsevier Applied Science, Southampton Boston, 1992.
- [51] R.L. Hardy. Multiquadric Equations of Topography and Other Irregular Surfaces. *Journal of Geophysical Research*, 76:1905–1915, 1971.
- [52] M.A. Golberg. Recent Developments in the Numerical Evaluation of Particular Solutions in the Boundary Element Method. *Applied Mathematics and Computation*, 75:91–101, 1996.
- [53] P.W. Partridge. Radial basis approximation functions in the boundary element dual reciprocity method. *Transactions on Modelling and Simulation*, 22:325–334, 1999.
- [54] A.H.-D. Cheng. Particular solutions of Laplacian, Helmholtz-type, and polyharmonic operators involving higher order radial basis functions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 24(7):531–538, 2000.
- [55] C.C. Tsai, A.H.-D. Cheng y C.S. Chen. Particular solutions of splines and monomials for polyharmonic and products of Helmholtz operators. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 33(4):514–521, 2009.
- [56] N. Caruso. *Desarrollo de un método numérico basado en una formulación integral y en funciones de base radial. Aplicaciones a problemas de valores de contorno en 1D y 2 D*. PhD thesis, Universidad Nacional de Rosario, 2016.
- [57] A.R. Lamichhane y C.S. Chen. The closed-form particular solutions for Laplace and

- biharmonic operators using a Gaussian function. *Applied Mathematics Letters*, 46:50–56, 2015.
- [58] W. Florez, H. Power y F. Chejne. Multi-domain dual reciprocity bem approach for the navier-stokes system of equations. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 16:671–681, 2000.
- [59] W. Florez y H. Power. DRM multi-domain mass conservative interpolation approach for the BEM solution of the two-dimensional Navier-Stokes equations. *Computers and Mathematics with Applications*, 43:457–472, 2002.
- [60] J. Sladek, V. Sladek y Ch. Zhang. A local BIEM for analysis of transient heat conduction with nonlinear source terms in FGMs. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 28:1–11, 2004.
- [61] E.J. Sellountos, D. Polyzos y S.N. Atluri. A New and Simple Meshless LBIE-RBF Numerical Scheme in Linear Elasticity. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 89:513–551, 2012.
- [62] V. Popov y T.T. Bui. A meshless solution to two-dimensional convection-diffusion problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 34:680–689, 2010.
- [63] J.C. Mairhuber. On Haar’s theorem concerning Chebychev approximation problems having unique solutions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 7:609–615, 1956.
- [64] P.C. Curtis. m-parameters families and best approximations. *Pacific Journal of Mathematics*, 9:1013–1027, 1959.
- [65] N. Flyer, B. Fornberg, V. Bayona y G.A. Barnett. On the role of polynomials in RBF-FD approximations: I. Interpolation and accuray. *Journal of Computational Physics*, 321:21–38, 2016.
- [66] M.D. Greenberg. *Applications og Green’s Functions in Science and Engineering*. Dover Publications, Mineola, New York, 2015.

- [67] E. Larsson, E. Lehto, A. Heryudono y B. Fornberg. Stable Computation of Differentiation Matrices and Scattered Node Stencils on Gaussian Radial Basis Functions. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 35:A2096–A2119, 2013.
- [68] T.A. Driscoll y B. Fornberg. Interpolation in the Limit of Increasingly Flat Radial Basis Functions. *Computers and Mathematics with Applications*, 43:413–422, 2002.
- [69] G.B. Wright. *Radial Basis Function Interpolation: Numerical and Analytical Developments*. PhD thesis, University of Colorado, 2003.
- [70] R.L. Hardy. Theory and applications of the multiquadrics—biharmonic method (20 years of discovery 1968–1988). *Computers and Mathematics with Applications*, 19:163–208, 1990.
- [71] R. Franke. Scattered Data Interpolation: Test of Some Methods. *Mathematics of Computation*, 38:181–200, 1982.
- [72] C.A. Michelli. Interpolation of scattered data: Distance matrices and conditionally positive definite functions. *Constructive Approximation*, 2:11–22, 1986.
- [73] E.J. Kansa. Multiquadrics – A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics – I: Surface approximations and partial derivative estimates. *Computers and Mathematics with Applications*, 19:127–145, 1990.
- [74] E.J. Kansa. Multiquadrics – A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics – II: Solution to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations. *Computers and Mathematics with Applications*, 19:147–161, 1990.
- [75] R. Schaback. Multivariate interpolation and approximation by translates of a basis function. *Approximation Theory VIII*, 1:491–514, 1995.
- [76] J.P. Boyd. Six strategies for defeating the Runge Phenomenon in Gaussian radial basis functions on a finite interval. *Computers and Mathematics with Applications*, 60:3108–3122, 2010.

- [77] R.B. Platte y T.A. Driscoll. Polynomials and potential theory for Gaussian Radial Basis Function interpolation. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 43:750–766, 2005.
- [78] B. Fornberg y N. Flyer. Accuracy of radial basis function interpolation and derivative approximations on 1-D infinite grids. *Advances in Computational Mathematics*, 23:5–20, 2005.
- [79] R. Schaback. Stability of radial basis function interpolants. In C.K. Chui, L.L. Schumaker y J. Stöckler, editor, *Approximation Theory X: Wavelets, Splines, and Applications*, pages 433–440, Nashville, 2002. Vanderbilt Univ. Press.
- [80] B. Fornberg, G. Wright y E. Larsson. Some Observations Regarding Interpolants in the Limit of Flat Radial Basis Functions. *Computers and Mathematics with Applications*, 47:37–55, 2004.
- [81] R. Schaback. Limit problems for interpolation by analytic radial basis functions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 212:127–149, 2008.
- [82] E.J. Kansa y R.E. Carlson. Improved accuracy of multiquadric interpolation using variable shape parameters. *Computers and Mathematics with Applications*, 24:99–120, 1992.
- [83] J. Wertz, E.J. Kansa y L. Ling. The role of the multiquadric shape parameters in solving elliptic partial differential equations. *Computers and Mathematics with Applications*, 51:1335–1348, 2006.
- [84] A.H.-D. Cheng. Multiquadric and its shape parameter—A numerical investigation of error estimate, condition number, and round-off error by arbitrary precision computation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 36:220–239, 2012.
- [85] B. Fornberg y J. Zuev. The Runge phenomenon and spatially variable shape parameters in RBF interpolation. *Computers and Mathematics with Applications*, 54:379–398, 2007.

- [86] J.P. Boyd y K.W. Gildersleeve. Numerical experiments on the condition number of the interpolation matrices for radial basis functions. *Applied Numerical Mathematics*, 61:443–459, 2011.
- [87] W.R. Madych y S.A. Nelson. Multivariate interpolation and conditionally positive definite functions. *Approximation Theory and Its Applications*, 4:77–89, 1988.
- [88] G.E. Fasshauer y J.G. Zhang. On choosing "optimal" shape parameters for RBF approximation. *Numerical Algorithms*, 45:345–368, 2007.
- [89] B. Fornberg y C. Piret. On choosing a radial basis function and a shape parameter when solving a convective PDE on a sphere. *Journal of Computational Physics*, 227:2758–2780, 2008.
- [90] M. Dehghan y M. Najafi. Numerical solution of a non-classical two-phase Stefan problem via radial basis function (RBF) collocation methods. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 72:111–127, 2016.
- [91] P.R. Antunes. Reducing the ill conditioning in the method of fundamental solutions. *Advances in Computational Mathematics*, 44:351–365, 2018.
- [92] S. Kumar y C. Piret. Numerical solution of space-time fractional PDEs using RBF-QR and Chebyshev polynomials. *Applied Numerical Mathematics*, 143:300–315, 2019.
- [93] K.P. Drake y G.B. Wright. A stable algorithm for divergence-free radial basis functions in the flat limit. *Preprint*, 2020.
- [94] Stefano De Marchi y Gabriele Santin. A new stable basis for radial basis function interpolation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 253:1–13, 2013.
- [95] M. Kindelan, M. Moscoso y P. González-Rodríguez. Radial basis function interpolation in the limit of increasingly flat basis functions. *Journal of Computational Physics*, 307:225 – 242, 2016.

- [96] R. Cavoretto, S. De Marchi, A. De Rossi, E. Perracchione y G. Santin. Partition of unity interpolation using stable kernel-based techniques. *Applied Numerical Mathematics*, 116:95–107, 2017.
- [97] P.K. Mishra, G.E. Fasshauer, M.K. Sen y L. Ling. A stabilized radial basis-finite difference (RBF-FD) method with hybrid kernels. *Computers and Mathematics with Applications*, 77:2354–2368, 2019.
- [98] E. Larsson. Homepage. http://it.uu.se/research/scientific_computing/software.
- [99] E.H. Ooi y V. Popov. An efficient implementation of the radial basis integral equation method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 36:716–726, 2012.
- [100] P.O. Persson y G. Strang. A simple mesh generator in MATLAB. *SIAM Review*, 46:329–345, 2004.
- [101] Oleg Davydov y Dang Thi Oanh. Adaptive meshless centres and RBF stencils for poisson equation. *Journal of Computational Physics*, 230(2):287–304, 2011.
- [102] J.H. Halton. On the efficiency of certain quasi-random sequences of points in evaluating multi-dimensional integrals. *Numerische Mathematik*, 2:84–90, 1960.
- [103] S. Rippa. An algorithm for selecting a good value for the parameter c in radial basis function interpolation. *Advances in Computational Mathematics*, 11:193–210, 1999.
- [104] C. Piret. A radial basis function based frames strategy for bypassing the Runge phenomenon. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 38:A2262–A2282, 2016.
- [105] V. Popov y H. Power. The DRM-MD approach for the numerical solution of gas flow in porous media with application to landfill. *Engineering Analysis with Elements*, 23:175–188, 1999.
- [106] D.T. Sandwell. Biharmonic spline interpolation of GEOS-3 and SEASAT altimeter data. *Geophysica Research Letters*, 14:139–142, 1987.

- [107] X. Deng y Z. Tang. Moving surface spline interpolation based on Green's function. *Mathematical Geosciences*, 43:663–680, 2011.
- [108] L.I.N. Trefethen y J.A.C. Weideman. The Exponentially Convergent Trapezoidal Rule. *SIAM Review*, 56:385–458, 2014.