

Universidad Nacional de Rosario  
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Escuela de Posgrado y Educación Continua  
Maestría en Didáctica de las Ciencias con mención en Matemática



Tesis de Maestría

Maestría en Didáctica de las Ciencias

Mención Matemática

**Uso del Tangram como recurso didáctico en la  
formación inicial de Profesores en Matemática.  
El caso de la UNR**

Prof. Eliana Dominguez

Director: Dra. Natalia Sgreccia

Enero 2021

*En todo este proceso que culmina con esta Tesis, me han acompañado muchas personas, tanto a nivel personal como profesional, en todo este camino y en parte de él.*

*Quiero comenzar agradeciendo a Natalia, que no solo fue mi directora sino que me acompañó de forma integral en todo momento.*

*Mi familia que siempre me alienta y enseña a seguir adelante, todos mis compañeros colegas y amigas de la vida que con algún gesto, una pregunta, una palabra, estuvieron atentos y han valorado el esfuerzo que lleva poder cerrar esta etapa.*

*Todo esto no hubiera sido posible sin el acompañamiento del cuerpo docente que conforma la Maestría. Desde los distintos seminarios, talleres y tutorías, me motivaban a seguir y a mirar el vaso medio lleno, la comprensión y el seguimiento constante en mi caso me permitió seguir en camino y poder concluirlo de la mejor manera.*

*Por último agradecer a los participantes del estudio (estudiantes de PEII) que con excelente predisposición han realizado cada una de las actividades propuestas.*

*Gracias a todos los que formaron parte...*

# Índice

---

<b>Resumen</b> .....	<b>6</b>
<b>Capítulo 1. Presentación</b> .....	<b>7</b>
1.1. Planteamiento del problema.....	7
1.2. Objetivos.....	9
1.2.1. Objetivo general.....	9
1.2.2. Objetivos específicos.....	10
1.3. Estado del arte.....	10
1.4. Estructura de la tesis.....	17
<b>Capítulo 2. Marco Teórico Referencial</b> .....	<b>19</b>
2.1. Educación Matemática Realista.....	19
2.1.1. Grupo Patagónico en Didáctica de la Matemática.....	26
2.1.2. Visualización y demostración.....	27
2.1.3. Fenomenología didáctica.....	28
2.2. Recursos didácticos en Matemática.....	28
2.2.1. El Tangram.....	29
2.2.2. El Juego.....	30
2.3. Diseño Curricular Jurisdiccional.....	31
2.3.1. Aspectos generales.....	31
2.3.2. Particularidades del área Matemática.....	32
2.3.2.1. Fundamentos.....	32
2.3.2.2. Metodología.....	34
2.3.2.3. Contenidos.....	34
<b>Capítulo 3. Metodología de la Investigación</b> .....	<b>38</b>
3.1. Enfoque, alcance y tipo.....	38
3.2. Participantes de la investigación.....	39
3.3. Contexto institucional.....	40
3.4. Gabinete de recursos didácticos.....	41
3.5. Diseño de la investigación.....	44
3.6. Técnicas de recolección de la información.....	48
3.7. Procesamiento de la información.....	50
3.8. Sistema de categorías de análisis.....	51
<b>Capítulo 4. Resultado</b> .....	<b>54</b>
4.1. Interacciones iniciales en clase.....	54
4.2. Producciones de los participantes.....	71
4.2.1. Planificación grupal de actividades.....	71
4.2.2. Actividades propuestas por los estudiantes.....	87
4.2.2.1. Tangram de Brügner (G1).....	87

4.2.2.2. Tangram Cardiotangram (G1) .....	98
4.2.2.3. Tangram Pentagonal (G2) .....	103
4.2.2.4. Tangram de Lloyd (G2) .....	112
4.2.2.5. Tangram Stomachion (G3) .....	115
4.2.2.6. Tangram Pitagórico (G3) .....	130
4.2.2.7. Tangram de Fletcher (G4) .....	136
4.2.2.8. Tangram Ovoide (G4) .....	144
4.2.2.9. Tangram Triangular (G5) .....	149
4.2.2.10. Tangram Hexagonal (G5) .....	159
4.2.3. Contenidos de las actividades .....	164
4.3. Consideraciones relativas a la experiencia .....	166
4.3.1. Conocimientos previos relativos al Tangram .....	166
4.3.2. Acciones para la elaboración de actividades .....	168
4.3.3. Dificultades .....	171
4.3.4. Aspectos sorprendentes .....	172
4.3.5. Potencialidades .....	173
4.3.6. Significación del trabajo grupal .....	175
<b>Capítulo 5. Conclusiones .....</b>	<b>178</b>
5.1. Dimensiones de análisis .....	178
5.1.1. Dimensión 1. Resolución de actividades .....	178
5.1.2. Dimensión 2. Diseño de actividades .....	180
5.1.2.1. Contenidos/ejes .....	180
5.1.2.2. Pasos/materiales .....	181
5.1.2.3. Consultas/comentarios .....	182
5.1.3. Dimensión 3. Actividades propuestas y micro-clases .....	183
5.1.3.1. Contenidos/ejes .....	184
5.1.3.2. Principios de la EMR .....	186
5.1.3.3. Tipos de actividad .....	188
5.1.4. Dimensión 4. Reflexión sobre la experiencia .....	190
5.1.4.1. A priori .....	191
5.1.4.2. In situ .....	191
5.1.4.3. A posteriori .....	192
5.2. Respuestas a los interrogantes de la investigación .....	193
5.3. Reflexiones finales .....	196
<b>Referencias Bibliográficas .....</b>	<b>201</b>

## Índice de Figuras

---

Figura 1.1. Tangram Chino.....	8
Figura 1.2. Puzle con forma de casa y sus piezas (Rupérez y García, 2013, p.184)...	10
Figura 1.3. Algunos tipos de Tangrams (Villarroel y Sgreccia, 2011, p.84).....	11
Figura 1.4. Tangrams con deformaciones (Rupérez y García, 2014): a) Chino (p.140); b) Japonés (p.142).....	12
Figura 1.5. Relación parte-todo de los elementos del Tangram (Rodríguez y Sarmiento, 2002, p.90).....	13
Figura 2.1. Conceptos clave de la EMR.....	22
Figura 2.2. Niveles de Matematización (Bressan et al., 2016).....	24
Figura 2.3. Contenidos del eje Álgebra y Funciones.....	35
Figura 2.4. Contenidos del eje Geometría y Medida.....	36
Figura 2.5. Contenidos del eje Números y Operaciones.....	36
Figura 2.6. Contenidos del eje Probabilidad y Estadística.....	37
Figura 4.1. Resolución de la primera consigna por parte de A5.....	56
Figura 4.2. Resolución de la primera consigna por parte de A9.....	57
Figura 4.3. Imágenes para armar con el Tangram Chino: a) casa; b) pato; c) chino sentado; d) gato; e) vela.....	58
Figura 4.4. Resolución de la segunda consigna por parte de A1 y A12.....	59
Figura 4.5. Imágenes para armar con el Tangram Chino: a) cuadrado; b) rectángulo; c) paralelogramo.....	62
Figura 4.6. Resolución de la tercera consigna por parte de A5.....	62
Figura 4.7. Resolución de la tercera consigna por parte de A10 y A13.....	63
Figura 4.8. Resolución de la cuarta consigna por parte de A5.....	65
Figura 4.9. Resolución de la cuarta consigna por parte de A9.....	65
Figura 4.10. Resolución de la quinta consigna por parte de A3 y A15.....	66
Figura 4.11. Resolución de la quinta consigna por parte de A10 y A13.....	66
Figura 4.12. Proceso de elaboración de propuestas de G5.....	76
Figura 4.13. Proceso de elaboración de propuestas de G4.....	78
Figura 4.14. Proceso de elaboración de propuestas de G3.....	80
Figura 4.15. Simulación de alumnos en clase de G1.....	90
Figura 4.16. Simulación de alumnos en clase de G2.....	109
Figura 4.17. Simulación de alumnos en clase de G3.....	118
Figura 4.18. Simulación de docente en clase de G3.....	125
Figura 4.19. Simulación de alumnos en clase de G4.....	137
Figura 4.20. Simulación de docente en clase de G4.....	139
Figura 4.21. Simulación de alumnos en clase de G5.....	152
Figura 5.1. Síntesis Dimensión 1.....	180
Figura 5.2. Síntesis Dimensión 2.....	183
Figura 5.3. Síntesis Dimensión 3.....	190
Figura 5.4. Síntesis Dimensión 4.....	193

## Índice de Tablas

---

Tabla 3.1. Composición del Eje Integrador del PM.....	40
Tabla 3.2. Descripción de las piezas que conforman a los tipos de Tangrams.....	42
Tabla 4.1. Clasificaciones de las piezas del Tangram Chino por parte de los estudiantes.....	57
Tabla 4.2. Términos utilizados por los estudiantes en la cuarta consigna.....	65
Tabla 4.3. Temas asociados al eje Geometría y Medida.....	68
Tabla 4.4. Temas asociados a los ejes Álgebra y Funciones, Números y Operaciones, Probabilidad y Estadística.....	69
Tabla 4.5. Tangrams y estudiantes correspondientes por grupo.....	71
Tabla 4.6. Asuntos a los que aluden los grupos de estudiantes durante la segunda consigna.....	74
Tabla 4.7. Instancias en la elaboración de actividades durante la segunda consigna.....	79
Tabla 4.8. Socialización de contenidos durante la segunda consigna.....	85
Tabla 4.9. Uso del Tangram de Brügner y Cardiotangram.....	103
Tabla 4.10. Contenidos asociados al Tangram Stomachion.....	130
Tabla 4.11. Contenidos asociados al Tangram Pitagórico.....	135
Tabla 4.12. Contenidos asociados a cada Tangram.....	165
Tabla 4.13. Conocimientos previos relativos al Tangram.....	167
Tabla 4.14. Frecuencia absoluta de los contenidos abordados en PEI.....	168
Tabla 4.15. Acciones para la elaboración de actividades.....	169
Tabla 4.16. Dificultades en la elaboración de actividades.....	171
Tabla 4.17. Aspectos sorprendentes en el uso del Tangram.....	173
Tabla 4.18. Potencialidades reconocidas en los Tangrams designados.....	174
Tabla 4.19. Significación del trabajo grupal.....	176

## Resumen

En la tesis se propone analizar las posibilidades como recurso didáctico que puede ofrecer el empleo del Tangram cuando estudiantes avanzados del Profesorado en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario diseñan grupalmente propuestas de enseñanza basándose en tipos específicos de este puzle. También se indaga sobre experiencias anteriores en relación con este rompecabezas así como la valoración de lo vivenciado a través del presente estudio.

La fundamentación teórica que sustenta la tesis es la Educación Matemática Realista, corriente con base en principios e ideas centrales acordes a los procesos de matematización que se despliegan. A su vez, los temas involucrados en las actividades diseñadas por los estudiantes del Profesorado se enmarcan en el Diseño Curricular establecido por el Ministerio de Educación de Santa Fe -MESF- (2014) para el área Matemática en el Nivel Secundario, en correlato con los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios (Ministerio de Educación de la Nación, 2012).

En términos metodológicos, se adopta un enfoque cualitativo, con alcance descriptivo en una investigación de tipo transversal y diseño de estudio de caso. Las categorías de análisis responden a los cuatro roles que asumen los estudiantes en este trabajo: mediante la posición de ellos como estudiantes, a través del trabajo con pares en la elaboración de propuestas, como futuros docentes en el desarrollo de las simulaciones de clases y en un proceso de metacognición de lo vivido.

En los Resultados se detallan las propuestas diseñadas por los futuros profesores en Matemática participantes del estudio, contemplándose además las interacciones previas que se produjeron en un encuentro inicial así como los testimonios puntuales sobre la experiencia compartida.

Entre los principales hallazgos se reconocen contenidos que se presentan más propensos de trabajar con un determinado Tangram a partir de sus características, potenciándolo en este sentido. También se subraya la versatilidad del recurso, en cuanto a su posible uso en los diferentes Ciclos que conforman el Nivel Secundario así como el abordaje de diversos bloques temáticos de manera integrada. Se destaca que las ideas centrales y principios de la Educación Matemática Realista se han logrado evidenciar mediante acciones concretas en las propuestas y en concordancia con los lineamientos curriculares a nivel jurisdiccional.

# Capítulo 1

## Presentación

---

En este primer capítulo se comparten los diferentes aspectos que involucran la elección del tema de esta tesis. Inicialmente se delimita la problemática que motivó esta investigación (apartado 1.1) y se distinguen los objetivos que han orientado el trabajo (apartado 1.2). Luego se presenta el estado de conocimiento sobre investigaciones relacionadas que han dado cuenta de diversidad de abordajes en algún aspecto de la temática (apartado 1.3) y, finalmente, se indica brevemente la estructura organizativa del documento en su conjunto (apartado 1.4).

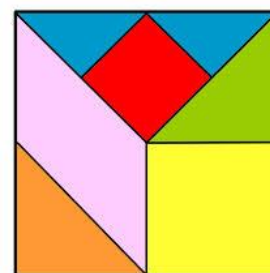
### 1.1. Planteamiento del problema

Existen muchos, variados y dispersos recursos didácticos, que se pueden distinguir según si son concretos o digitales, los costos, el nivel de acceso, etc. Frente a ellos, suelen reconocerse dos posiciones extremas que tienen los docentes (Uicab, 2009). Una es la confianza total en el recurso, al pensar que la mera presentación del mismo va a lograr los objetivos buscados en los alumnos. La otra restringe su uso por el descreimiento, al sostener que el contenido es lo único importante para que el alumno aprenda. Se considera que el desafío está en lograr docentes con criterios que puedan mantener un equilibrio entre ambos extremos, al reflexionar en cuanto a qué, cuándo, por qué y para qué de la utilización de un recurso didáctico (Flores, 2006). Teniendo en cuenta el proceso reflexivo que implica el uso de un recurso, la formación inicial y continua de los profesores influye fuertemente en las posturas que se adopten (Perrenoud, 2006). Si bien en las instituciones formadoras se nombra a los recursos didácticos en reiteradas ocasiones, no siempre se trabaja con ellos como foco o se hace uso de los mismos en vinculación con otras tareas; en ocasiones se utilizan en situaciones diferenciadas del juego no integrado a la Matemática escolar. Asimismo, ese “hacer uso” desde la formación de grado es un asunto que le compete a la Educación Matemática en conjunción con prácticas concretas que procuren consolidar criterios de enseñanza de la Matemática a partir del aprovechamiento del potencial del recurso en cuestión.

En la experiencia personal de la tesista, como profesora en Matemática, no había hecho tal “uso” (ni, menos aún, se había detenido a pensar al respecto) hasta que se involucró como extensionista en actividades de vinculación universidad-escuela media. Desde este

lugar advirtió que el aprovechamiento de recursos didácticos en Matemática no era solo una inquietud de ella, sino también de sus compañeros y docentes en ejercicio. Todos se encontraban en una situación similar: qué recursos hay y cómo usarlos en el aula.

Con esto no necesariamente se hace referencia a los recursos relativamente novedosos, de la mano de las Tecnologías de la Información y la Comunicación, sino a recursos concretos que existen incluso desde hace miles de años, como es el caso de un tipo particular de rompecabezas denominado Tangram. En particular, suele haber un desconocimiento generalizado de los distintos tipos de Tangrams, hasta del Chino -que es el más



*Figura 1.1.  
Tangram Chino*

convencional (Fig. 1.1)- e incluso por parte de personas que podrían considerarse calificadas en el tema -como lo son los profesores en Matemática-. Se trata de un recurso que cuenta con distintas bondades: es accesible para su fabricación (costo, diseño), fácil de ubicar y transportar (aspecto no menor en las instituciones educativas), puede vincularse con una variedad considerable de contenidos (en cuanto a lo prescripto en el currículum de Matemática en la escuela obligatoria) y porta una historia consigo (fortaleza desde un aspecto cultural).

Además, cabe advertir que desde hace tiempo se reconoce la necesidad de una transformación en la manera de enseñar Matemática que se diferencie de la enseñanza tradicional, en la que el docente tiene el rol principal, explica y expone sus conocimientos, y luego los alumnos reproducen. Tratar de “romper” con ese molde invita a pensar en corrientes de la Educación Matemática que han surgido a través de la historia y que han ido aproximando respuestas al respecto. Entre ellas, puede mencionarse a la Educación Matemática Realista (EMR).

Por otro lado, el MESF (2014) propone, dentro de sus fundamentos del área Matemática para el Nivel Secundario, que el trabajo en las aulas sea de modelización impulsado por la resolución de problemas. Entiende que la modelización se caracteriza por reconocer y recortar una problemática de una determinada situación, tener en cuenta las relaciones entre las variables, elegir una teoría para abordar la cuestión y luego producir conocimientos nuevos sobre dicha problemática. De este modo permite una mirada integradora de la actividad matemática, donde la resolución de problemas se desarrolla de manera transversal; no solo al final -si es que aparece- para aplicar lo enseñado (como lo es en la concepción tradicional). El documento ministerial también sugiere que, para lograr desnaturalizar tal concepción tradicional fuertemente arraigada en

muchos docentes, se procure cambiar el modelo didáctico del profesor explicador y de un grupo de alumnos que solo mira, escucha, copia, reproduce y aplica.

En este sentido, cabe señalar que los recursos didácticos (entre ellos el Tangram) son considerados una herramienta potente para la tarea docente, altamente factibles de ser incluidos en la resolución de problemas, ya sea por afinidad temática con un contenido matemático o procedimental con el desarrollo de estrategias (Uicab, 2009).

Por lo expuesto, se considera que en la actualidad existe una demanda por parte de las escuelas medias como instituciones, y de los docentes en Matemática en particular, en cuanto al empleo de recursos didácticos de manera integrada a los procesos habituales de enseñanza y aprendizaje. En este punto es ineludible el protagonismo que adquiere la formación docente específica y se constituye, de esta forma, en una situación de interés en la carrera Profesorado de Matemática (PM) de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (FCEIA) de la Universidad Nacional de Rosario (UNR), de la cual la tesista es egresada y docente.

Ante este panorama, en el contexto del PM, interesa estudiar: ¿Qué posibilidades como recurso didáctico para trabajar en Matemática en el Nivel Secundario de educación son reconocidas en el Tangram por parte de estudiantes<sup>1</sup> que se encuentran avanzados en la carrera? Esta indagación, a su vez, se ubica tanto antes como durante y después de llevar a cabo una experiencia intencionalmente diseñada.

Específicamente, a priori de la experimentación, se procura conocer:

- ¿Qué tipos de Tangrams conocen los estudiantes avanzados del PM?, ¿qué usos han hecho de ellos?, ¿cómo se enteraron de su existencia?

Luego, a partir del trabajo con grupos específicos, se focaliza la mirada en:

- ¿Qué actividades con Tangrams proponen los estudiantes avanzados del PM?, ¿cómo se plasman los Principios de la EMR en sus propuestas?

## **1.2. Objetivos**

### **1.2.1. Objetivo general**

Analizar las posibilidades del Tangram como recurso didáctico reconocidas por estudiantes avanzados del PM.

---

<sup>1</sup> En la presente tesis se alude con el término “estudiantes” a los que están cursando PEII y con el término “alumnos” a los del Nivel Secundario de educación.

### 1.2.2. Objetivos específicos

A priori:

- Identificar los tipos de Tangrams que los estudiantes avanzados conocen.
- Indagar acerca de los usos que han hecho de los mismos así como de los canales mediante los cuales se enteraron de su existencia.

A partir del trabajo con grupos específicos:

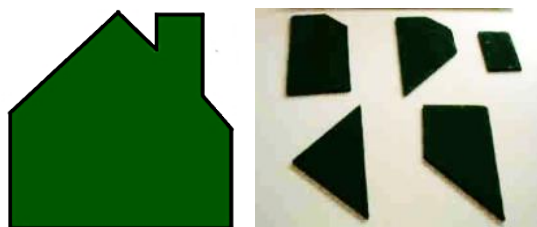
- Caracterizar las actividades con Tangram propuestas por estudiantes avanzados del PM.
- Describir los Principios de la EMR plasmados en tales propuestas.

### 1.3. Estado del arte

Para la elaboración del estado del arte se han consultado publicaciones en español del año 2010 al presente, disponibles en revistas iberoamericanas especializadas de acceso abierto.

En la bibliografía especializada relevada se distinguen tópicos tales como: presentación de los distintos tipos de Tangrams junto con algunas características y actividades concretas que los involucran; reconocimiento del Tangram como recurso didáctico asociado a contenidos específicos; tratamiento particular desde lo histórico; importancia de su incorporación en la formación inicial y continua de profesores.

Al comenzar a indagar sobre este tipo particular de rompecabezas, se pueden encontrar otros con similares características. Rupérez y García (2013) presentan un tipo de puzle de ensamblaje bidimensional que surge de la disección de una representación plana de una casa.



*Figura 1.2. Puzle con forma de casa y sus piezas (Rupérez y García, 2013, p.184)*

Muestran las distintas posibilidades para el armado de la casa y enfatizan la importancia de la instancia de prueba y error por parte de los alumnos, dado que les permite identificar los detalles pertinentes de la pieza a armar (Fig. 1.2).

Al igual que este rompecabezas, pueden obtenerse otros que surjan de diseccionar una silueta conocida en piezas geométricas con ciertas características. Al focalizar la búsqueda en el Tangram, Villarroel y Sgreccia (2011) reconocen a este peculiar rompecabezas o puzzle como parte de uno de los siete grupos de recursos didácticos, por ellas reconocidos, para la enseñanza de la geometría en primer año de la escuela secundaria. En sus hallazgos identifican 12 tipos de Tangrams: Chino, Fletcher, Cardiotangram, Hexagonal, Pentagonal, Triangular, Lloyd, Pitagórico, Brügger, Stomachion, Ovoide y Espacial (se presentan en este orden en la Fig. 1.3).

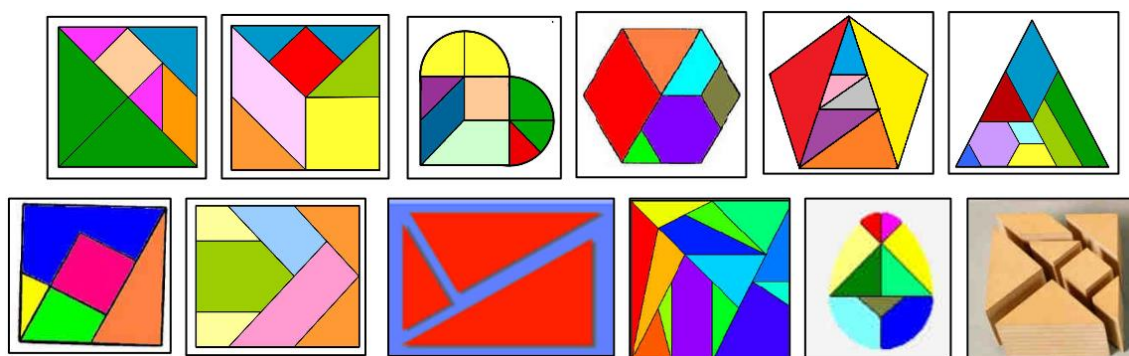


Figura 1.3. Algunos tipos de Tangrams (Villarroel y Sgreccia, 2011, p.84)

Adoptan como marco de referencia la corriente EMR, comparten posibles actividades con el Tangram Chino y reconocen habilidades geométricas cuyo desarrollo es factible fomentar. Concluyen que los recursos didácticos concretos identificados, entre ellos el Tangram, son potentes para poner en práctica los Principios de la EMR respecto a viabilidad, flexibilidad y enraizamiento en contextos realistas. Finalmente se preguntan qué instancias de formación de profesores se requieren para contribuir a un uso intencional y responsable de los materiales didácticos concretos; como así también por qué a veces no son utilizados en las clases, pese a conocer sus beneficios y contar la institución con ellos.

Los tipos de Tangrams presentados en este artículo constituyeron una inspiración para que docentes y estudiantes avanzados del PM construyeran 11 de los 12 que componen la Fig. 1.3, a excepción del Tangram Espacial (última imagen). Actualmente estos Tangrams, junto a otros materiales, forman parte del gabinete de recursos didácticos del Profesorado.

Otro de los tipos de Tangrams encontrado es el Tangram Japonés, con el cual han trabajado Rupérez y García (2014). Proponen actividades concretas para su uso, que son replicadas también con el Tangram Chino, ambos formados por siete piezas. Realizan deformaciones de tres tipos, como producto de alterar el largo, el ancho o la diagonal

del cuadrado original (figura de la cual surge la disección de ambos) al multiplicar la longitud por un número irracional ( $\sqrt{2}$  o  $\sqrt{3}$ ). Analizan las propiedades de las piezas obtenidas así como de las posibles nuevas figuras para armar con esas piezas (Fig. 1.4).

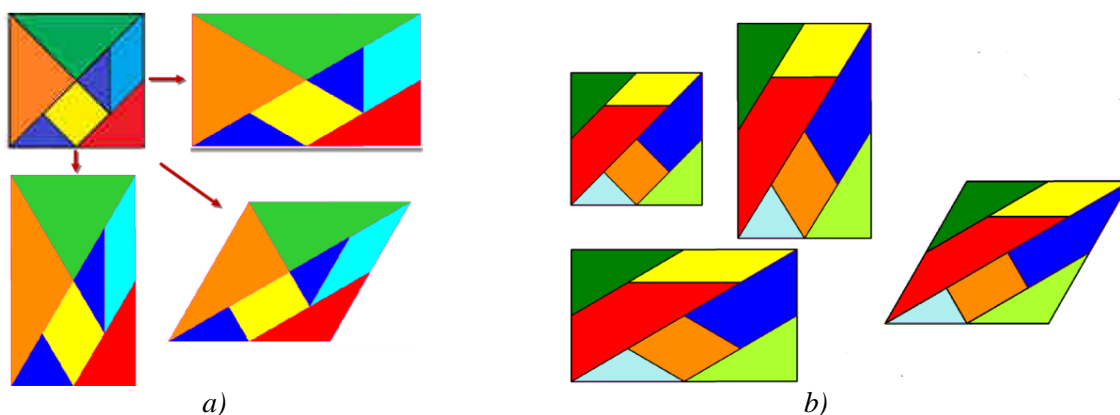


Figura 1.4. Tangrams con deformaciones (Rupérez y García, 2014): a) Chino (p.140); b) Japonés (p.142)

Se observa que no abundan artículos referidos a aspectos significativos de los tipos de Tangrams, pero sí pueden encontrarse otros específicos referidos al Tangram Chino. Vale aclarar que en algunos de ellos se utiliza simplemente el nombre Tangram para hacer referencia al Tangram Chino. En esta línea, los autores Maz-Machado et al. (2018) reconocen en el Tangram Chino múltiples formas de explorarlo en el ámbito educativo. Puntualmente se detienen en la relación de área y perímetro. Desde las normativas educativas (Educación Secundaria Obligatoria de la Comunidad Autónoma de Andalucía), que enmarcan sus prácticas, se explicita el uso del Tangram para la enseñanza y el aprendizaje en contextos geométricos (cálculo de longitudes y áreas) y lo reconocen como potenciador del aprendizaje de expresiones algebraicas (en fórmulas de área y volumen). Bajo estas consideraciones caracterizan al Tangram Chino como un juego matemático recreativo con jugadores que componen una figura similar a la de una silueta dada y utilizan todas las piezas del juego. Incluso lo denominan rompecabezas de reorganización de piezas; a diferencia de aquellos puzzles de piezas dentadas que solamente encajan en una posición. Entre su potencial, con base en otros investigadores, subrayan la promoción de la creatividad, el dominio matemático de las fracciones y, de manera destacada, los contenidos de geometría. Dentro de la propuesta presentada se remarca a partir de la relación que se establece entre los lados del Tangram, la independencia de abstracción de medidas o expresiones para observar las relaciones pretendidas entre ellos, con posibilidad de acceso para alumnos de primaria (últimos años) y de secundaria. Las primeras actividades propenden hacia una familiarización

con las piezas y para ello se plantea la construcción de figuras y se efectúa la medición de perímetros y áreas de las piezas componentes (tans), para avanzar luego en la medición de perímetro y área de otras figuras que se van formando, con todas o algunas piezas. Los autores concluyen que el hecho de manipular, observar y realizar mediciones facilita la comprensión e interiorización de los conceptos puestos en acción, con posibilidad de extender este mismo uso a otros tipos de Tangrams.

Entre las actividades planteadas por Aznarte y Ramírez (2018), con foco en propuestas de aula así como las reportadas por Maz-Machado et al. (2018), se encuentran tres secuencias concretas, una por cada ciclo del Nivel Primario, que utilizan al Tangram Chino como material didáctico en cada una de ellas. En concordancia con otros autores, sostienen que este rompecabezas favorece la enseñanza de la geometría, principalmente el desarrollo del sentido espacial, además de contribuir a motivar a los alumnos. Entre sus conclusiones se resalta la articulación vertical de los contenidos que se lograron establecer en el Nivel Primario y la versatilidad del Tangram como recurso didáctico.

Se puede evidenciar que mayoritariamente las actividades están asociadas a contenidos geométricos. Villarroel y Sgreccia (2012), además de explicitar el interés didáctico-matemático del Tangram -en los distintos tipos contemplados (Fig. 1.3)-, puntualizan en contenidos geométricos de secundaria que pueden ser abordados, habilidades geométricas, niveles de razonamiento geométrico y fases de enseñanza. Las autoras reconocen versatilidad del recurso respecto a la adaptación a diferentes contenidos geométricos a otros ejes del área Matemática y a otros niveles de escolaridad. Asimismo, destacan la importancia del conocimiento por parte del profesor de este tipo de caracterizaciones de los recursos didácticos, para nutrir el espectro de alternativas didácticas para la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática.

Entre los contenidos pertenecientes a otros ejes del área Matemática que pueden abordarse con el Tangram, se encuentra la fracción propia. Rodríguez y Sarmiento

(2002) presentan una propuesta en este sentido, ubicada previamente al trabajo detenido sobre el tema. En particular, hacen un recorrido por las distintas formas en que se puede

Fichas	Parte del área del cuadrado unidad
Triángulo grande	1/4
Triángulo mediano	1/8
Triángulo pequeño	1/16
Paralelogramo	1/8
Cuadrado pequeño	1/8

*Figura 1.5. Relación parte-todo de los elementos del Tangram (Rodríguez y Sarmiento, 2002, p.90)*

abordar el concepto de fracción y las dificultades que presenta en los alumnos. Bajo una

de las interpretaciones que puede darse en este concepto, como es la relación parte-todo, se distingue como “el todo” al cuadrado que se forma con las siete fichas del Tangram y como “las partes” a cada una de las siete fichas que lo componen (la relación puntual parte-todo se muestra en la Fig. 1.5). También presentan algunas ventajas y limitaciones del Tangram como recurso didáctico en relación con el tratamiento del contenido al implementarse en el Nivel Primario. En cuanto a ventajas, mencionan que permite dividir la unidad en partes separables que se pueden manipular fácilmente, trabajar con la unión de ellas e indicar la fracción propia que representa cada una. Acerca de las desventajas, limitaciones o advertencias, señalan que no contribuye con la visualización de cualquier fracción propia y que se necesita tener una comprensión aceptable acerca del concepto de área al momento de manipular las piezas.

El contexto histórico también es un aspecto remarcado cuando se utilizan los Tangrams. Villarroel y Sgreccia (2012) dan una breve reseña de su historia junto a las características generales de los Tangrams y la composición de las piezas que conforman los distintos tipos. Por otro lado, Micelli y Crespo (2012) indagan sobre las figuras de análisis y su significado en la cultura china, donde las demostraciones tenían un carácter visual, lo cual, indican las autoras, se contrapone al legado de la cultura occidental. Caracterizan a las demostraciones chinas por estar basadas primordialmente en la disección geométrica de la figura y el posterior movimiento de sus partes y reubicación para construir una nueva silueta, todas ellas de igual área. Esto refleja el empleo y la importancia que se les daba en China a las figuras de análisis, de manera que no hacían falta palabras para avalar las propiedades que se ponían en acción en el proceso de seccionar la imagen y recomponerla de forma distinta a la dada.

En particular, Meavilla y Oller (2013) presentan algunos ejemplos de figuras de análisis extraídas de textos antiguos. Entre sus bondades mencionan la posibilidad de mostrar las interrelaciones entre diversas ramas de la Matemática, presentar a la Matemática como fuente de aplicaciones prácticas interesantes e, incluso, con un punto de vista experimental. Así se fomenta la percepción de una Matemática próxima a la realidad, más inductiva, más cercana al quehacer del matemático. Concluyen acerca del especial interés del trabajo de este tipo con maestros y profesores de secundaria en formación.

Luego de este recorrido sobre las valoraciones de los distintos tipos de Tangrams como recurso didáctico, dentro de propuestas concretas y con relación a contenidos matemáticos, se indaga sobre el uso de los mismos en instancias de capacitación de docentes en ejercicio o en formación. Particularmente se destaca un seminario realizado

por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, comunicado por Canalejas y Navas (2017). Si bien no es específico de Tangram, sí lo es del grupo de recursos del que él forma parte. Se subrayan los beneficios y las dificultades de llevar a la práctica el uso de materiales manipulativos (no digitales) para abordar contenidos geométricos. Específicamente se reconoce que ayuda a los alumnos a desarrollar la capacidad geométrica en conexión intrínseca a cómo se aprende, favorece la resolución de problemas, comunicación y representación, desarrolla el razonamiento manual, mental y verbal como así también la competencia social mediante el trabajo en equipo, y ayuda a identificar, clasificar, estimar, indagar y comprobar. Frente al cuestionamiento del porqué no se utilizan de manera suficiente estos materiales en las aulas, se plantean posibles respuestas: supone mayor planificación, implica adoptar el trabajo en grupo por parte de los alumnos, duda de los beneficios de manipular materiales, insuficiente tratamiento en la formación inicial y permanente de los profesores, y por último, desconocimiento de los materiales y de su uso adecuado.

En esta línea se encuentra el taller realizado por Fresneda y Martínez (2015) con un enfoque teórico-práctico para docentes, donde el objetivo es proporcionar herramientas que contribuyan al desarrollo del pensamiento espacial, con el Tangram como recurso didáctico. Durante el taller se contextualiza acerca del desarrollo del pensamiento espacial y se marca la necesidad de emplear materiales didácticos para generar cambios en los procesos desarrollados en el aula de clase. También se explora el Tangram mediante una actividad de creación de una figura libre que posibilita la comunicación y luego se trabajan, a partir de una guía estructurada, las nociones topológicas, proyectivas y métricas. Finalmente se reflexiona acerca de los niveles de pensamiento espacial de van Hiele en el marco de las actividades efectuadas y se socializan las producciones. Las autoras distinguen aspectos favorables de este tipo de actividades para los procesos de enseñanza y aprendizaje. Particularmente las lúdicas generan interés y motivación, donde la propuesta se convierte en una herramienta útil para desarrollar habilidades como la resolución de problemas, la argumentación, el razonamiento, la comunicación, la modelización y el poder de abstracción de ideas matemáticas. Todo ello privilegia, a su vez, la construcción activa de conocimiento antes que la memorización de fórmulas, definiciones y axiomas matemáticos.

Los momentos distinguidos en el seminario y el taller presentados y lo abordado en ellos han sido de interés para la investigación en el marco de la tesis, donde se han realizado encuentros con futuros docentes involucrando al Tangram.

Por su parte, Santa y Jaramillo (2015), también a partir de experiencias con docentes en formación continua, concluyen que la producción de conocimiento está mediada, inicialmente, por las interacciones de los maestros entre ellos mismos y con actividades concretas (como lo es el doblado de papel), de los procesos de visualización y experimentación que se den dentro del colectivo docente, del uso específico del recurso involucrado como así también del lenguaje verbal y no verbal.

También, la falencia del uso de recursos didácticos tangibles durante la formación es analizada en algunos artículos. En particular, Rodríguez (2012) marca la necesidad de realizar actividades en los programas de formación docente relativas a la documentación de experiencias significativas, dado que hay un vacío en la competencia profesional de formulación e identificación de problemas didácticos relativos al conocimiento escolar. Manifiesta, además, que una experiencia significativa que es sistematizada se convierte, a su vez, en un recurso que puede ponerse a disposición de una comunidad de docentes, que tienen la posibilidad de adaptarla e implementarla en otro contexto distinto para el que inicialmente fue diseñada.

Otros autores como Guerrero (2017) se basan en el diseño de entornos de aprendizaje (Llinares, 2014; citado en Guerrero, 2017) para apoyar la formación inicial del docente de Matemática y su aprendizaje. En este sentido, en el diseño de los entornos de aprendizaje se consideran tres aspectos que contribuyen al desarrollo de la mencionada competencia docente. El primero tiene que ver con resolver tareas profesionales, mediante el uso de herramientas teóricas generadas y proporcionadas por la investigación en Didáctica de la Matemática. El segundo aspecto está relacionado con las formas de participación y los procesos de construcción de conocimiento del estudiante para profesor que se generan en los entornos. Finalmente, consideran a la interactividad que se fomenta mediante tareas en las que los estudiantes buscan información, argumentan sus puntos de vista frente a la opinión de otros y usan las herramientas teóricas para interpretar situaciones relativas a la enseñanza de la Matemática.

En referencia a los tópicos relevados en este apartado, en el marco de los proyectos de investigación y extensión que integra la tesista, se ha producido con relación al tema de interés, en términos tanto de los recursos didácticos en general como del Tangram en particular, en la formación inicial y continua de profesores en Matemática. Entre las publicaciones, se encuentra la de Alegre et al. (2018), donde se distinguen dos tipos de recursos didácticos (tangibles y digitales) y se comparte una serie de consideraciones a

tener en cuenta desde la docencia a la hora de utilizar un recurso didáctico. Se explicitan, además, los tipos de Tangrams con los que cuenta el gabinete de recursos didácticos del PM y se encuadra conceptualmente desde la línea teórica que sustenta esta tesis: la EMR.

Se han realizado, además, otros trabajos con carácter de divulgación, con el objetivo de hacer conocer el trabajo con recursos (entre ellos se encuentran los tipos de Tangrams) en instituciones de distintos niveles educativos, sus procesos de elaboración y posibles secuencias. Con esta misma impronta se ha participado en jornadas, algunas con carácter de taller, donde se ha problematizado y pensado en posibles actividades que involucran a los tipos de Tangrams.

En los artículos consultados es posible advertir las bondades del Tangram como recurso didáctico, principalmente asociado a contenidos geométricos. Muchas de las publicaciones le dan un marco al uso del Tangram en actividades concretas, pero carecen de una investigación formal del tema. Sobre todos los tipos de Tangrams que se mencionan, se remarca un tratamiento mayor sobre el Tangram Chino; como así también la necesidad de incursionar al respecto en la formación inicial y continua de profesores.

#### **1.4. Estructura de la tesis**

La organización de esta investigación está secuenciada en cinco capítulos. El primero de ellos contempló la problemática detectada que llevó a plantear interrogantes y objetivos, además del estado de situación de la bibliografía especializada que se encontró relacionada al tema de interés de la tesis. El segundo capítulo, titulado Marco Teórico Referencial, detalla los aportes teóricos tomados en esta investigación. Entre ellos se encuentran: la corriente EMR, la cual aporta una mirada superadora de prácticas habituales o tradicionales y está compuesta por Principios e ideas centrales; la concepción de recursos didácticos y su puesta en juego en una situación educativa focalizada en el Tangram en particular; y, por último, la normativa Jurisdiccional del Ministerio de la Provincia de Santa Fe que enmarca las propuestas de los estudiantes avanzados del PM. El capítulo 3 muestra la metodología empleada con categorías de análisis estipuladas según los objetivos previstos, se detallan las técnicas aplicadas, el diseño del estudio así como el contexto institucional. El capítulo de Resultados comprende el análisis descriptivo-interpretativo del trabajo realizado en los distintos

encuentros con los participantes, donde puede observarse a los estudiantes en distintos roles y a los diferentes tipos de Tangrams en una situación concreta de enseñanza. Para concluir y cerrar la tesis, en el último y quinto capítulo, se recorren exhaustivamente las categorías de interés mediante un análisis integral, con una aproximación de respuestas a las preguntas que orientaron la tesis.

## **Capítulo 2**

### **Marco Teórico Referencial**

---

Este capítulo está conformado por tres apartados, que procuran delimitar el posicionamiento teórico adoptado para la investigación, en lo concerniente a la corriente de la Educación Matemática a la que se adscribe así como a la noción de recurso didáctico en Matemática y las prescripciones curriculares específicas del área Matemática en el Nivel Secundario.

#### **2.1. Educación Matemática Realista**

Las actividades efectuadas en esta tesis se enmarcan en la corriente de la Educación Matemática Realista (EMR). El Dr. Hans Freudenthal (1905-1990) es considerado el fundador de esta corriente didáctica, desarrollada en Holanda desde fines de los años 1960 y conocida como *Realistic Mathematics Education* (en inglés). Surge como reacción al movimiento de la Matemática Moderna o conjuntista de la década de 1960, generalizado por ese entonces en las escuelas, y al enfoque mecanicista de la enseñanza de la Matemática (Bressan, 2005).

Freudenthal fue matemático y educador de creencia judía, nacido en Alemania, donde realizó todos sus estudios. Desarrolló su carrera académica y sus teorías pedagógicas en Holanda, país al cual tuvo que emigrar por la llegada de los nazis al poder en 1933.

Se lo reconoce como propulsor de un cambio en la enseñanza tradicional de la Matemática, fue fundador e integrante activo en grupos tales como el Grupo Internacional de Psicología y Educación Matemática y la Comisión Internacional para el Estudio y Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática, donde se trataban las corrientes pedagógico-didácticas e innovaciones en la enseñanza de la Matemática que se propiciaban a mediados del siglo pasado. En esas reuniones Freudenthal manifestaba su oposición ante los tests estructurados de evaluación, la investigación educativa estandarizada, la aplicación directa del estructuralismo y el constructivismo de Piaget en el aula, y la Matemática Moderna en la escuela (Bressan et al., 2004). Freudenthal fundó en la década de 1970 el Instituto de Desarrollo de la Educación Matemática (*Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs - IOWO*) en la Universidad de Utrech, renombrado en 1991 como Instituto Freudenthal, y sentó las bases sobre las que hoy trabaja la EMR. El hecho de entender a esta corriente como actividad humana permite considerarla como una teoría en progreso, en constante movimiento, crecimiento y renovación desde hace

50 años. Esto se ve reflejado en su encuadre conceptual, en el que se han puesto en relevancia diferentes aspectos que han guiado las investigaciones y el desarrollo de la Educación Matemática (van den Heuvel-Panhuizen, 2001). En efecto, inicialmente el enfoque de la EMR estaba constituido por cinco características:

el lugar predominante de los problemas en contexto; la gran atención puesta en el desarrollo de modelos; las contribuciones de los estudiantes por medio de sus propias producciones y construcciones; el carácter interactivo del proceso de aprendizaje y la interconexión entre los ejes de aprendizaje (Treffers y Goffre, 1985; citado en van den Heuvel-Panhuizen, 2001, p.26).

Estas características han evolucionado hasta convertirse en un conjunto de cinco Principios que guiaron el proceso de matematización definido en un primer momento por Freudenthal, pero que luego adoptó la distinción entre horizontal y vertical a partir de Treffers, dándole el papel clave que hoy tiene dentro de la EMR.

Actualmente esta corriente didáctica constituye una teoría que se estructura en seis *Principios*, los cuales se basan en las siguientes *ideas centrales*:

La primera consiste en pensar a la Matemática como una actividad humana con la finalidad de organizar el mundo que nos rodea e incluir a la propia Matemática (*matematización*). En palabras de Freudenthal (1991/2012), “En Matemática (...) organizar y reorganizar es una tarea continua, y las formas de organización recién adquiridas pueden transformarse en contenido en el sentido de tema a tratar como tal” (p.13). Su fundador sostiene la importancia de generar algún acercamiento con el quehacer matemático a todos los alumnos, reconociendo a la Matemática como una actividad que todos los seres humanos tienen a su alcance y posibilita la organización de la matematización (Freudenthal, 1973, 1991; citado en Bressan et al., 2016). Sobre esta última palabra, en una de sus obras afirma:

Yo mismo insisto en incluir en este único término toda la actividad de organización del matemático, ya sea que afecte el contenido y la expresión de la Matemática, o la expresión más intuitiva, digamos, vivida, expresada en el lenguaje cotidiano (Freudenthal, 1991/2012, p.33).

Como queda explícito, el proceso de matematización contempla diferentes acciones. Entre ellas está la de reconocer en contextos planteados aquellas características consideradas esenciales de la situación particular y a su vez comunes a otras. Con la posibilidad de que puedan aparecer nuevos objetos mentales, operaciones y estrategias que inicialmente desde el descubrimiento y la ejemplificación pueden esquematizarse,

para luego partir de un trabajo desde la reflexión y llegar a formalizarlas (Freudenthal, 1991; citado en Bressan et al., 2016).

La segunda idea clave que caracteriza a la EMR es la de comprender que el desarrollo de la Matemática pasa por distintos niveles, a través de un proceso didáctico denominado reinención guiada, en un ambiente donde los contextos y modelos tienen un papel relevante, en el marco de una heterogeneidad cognitiva. Los *modelos* son herramientas que surgen de los alumnos en el quehacer matemático frente a una situación dada (Bressan, 2005). “Un modelo es justamente el, a veces indispensable, intermediario mediante el cual una realidad o una teoría compleja es idealizada o simplificada para lograr ser accesible a un tratamiento matemático más formal” (Freudenthal, 1991/2012, p.36).

Frente a la posibilidad que brinda esta herramienta, Bressan (s.f.) presenta dos componentes esenciales de un modelo: surge en un contexto realista e imaginable para el alumno y resulta cercano a él por ser protagonista de su creación y re-inención. Estos componentes, a su vez, denotan viabilidad del modelo, ya que el mismo se origina a partir de estrategias informales del alumno como participante activo de su proceso de aprendizaje.

La segunda particularidad tiene que ver con la flexibilidad del modelo en cuanto posibilita llegar a niveles superiores, como así también contar con la suficiente movilidad que permite recorrer los distintos niveles, incluyendo a los inferiores hasta llegar a la raíz de ese modelo.

Esto significa que el término “modelo” no está tomado en sentido literal (como ejemplo de algo) o solamente involucrando objetos y simbolismo matemático puro, sino que materiales, bosquejos visuales, situaciones paradigmáticas, esquemas, diagramas, y aun símbolos pueden servir de modelos (Bressan, s.f., p.3).

Esta variedad es reconocida por la autora a partir de la indagación en diferentes trabajos realizados en el marco de esta corriente. A su vez, progresivamente esos modelos adoptados se van despegando de la situación particular, como “modelos de”, hasta adquirir el carácter de modelos formales y generales, pasando a ser “modelos para”, aplicables a otros contextos y situaciones intra y extra matemáticos.

Estas concepciones de *matematización* y de *modelos* son tomadas por los seis *Principios* que caracterizan la EMR (Fig. 2.1), todos ellos relacionados entre sí. Se detallan a continuación cada uno de los Principios.



*Figura 2.1. Conceptos clave de la EMR*

**Principio de Actividad.** La Matemática debe ser pensada como una actividad humana, accesible y cercana a todas las personas, la cual se aprende mejor haciendo. Los alumnos son tratados como participantes activos en el proceso educativo, en el cual desarrollan por sí mismos herramientas y discernimientos matemáticos (Bressan, 2005).

La Matemática como una actividad es un punto de vista bastante distinto de la Matemática impresa en libros y grabada en mentes. Sin duda, la Matemática es un cofre del tesoro lleno de herramientas, valiosas para aquellos que les pueden dar un buen uso (Freudenthal, 1991/2012, p.17).

Esta concepción de la Matemática como actividad constituye una de las primeras visiones de Freudenthal (1968; citado en van den Heuvel-Panhuizen, 2001) donde se destaca la conexión de esta disciplina con la realidad, permitiéndole ser relevante para la sociedad y constituirse en un valor humano. La presencia de alumnos activos implica organización y reinvención constante (proceso de matematización), en contraposición a la idea de la Matemática como un sistema cerrado. De esta manera la clase no se piensa de manera homogénea en cuanto a los trayectos de aprendizaje de cada alumno, sino considerando personas que siguen senderos propios. Las situaciones-problema son un claro ejemplo a partir del cual los alumnos pueden comenzar a construir modelos y herramientas que favorecen el aprendizaje, con base en un modo informal de trabajar.

**Principio de Realidad.** La matematización de la realidad implica no solo mantener a esta disciplina conectada al mundo real o existente sino también a lo realizable, imaginable o razonable para los alumnos (Bressan, 2005). En la misma línea, van den Heuvel-Panhuizen (2001) describe que el nombre EMR tuvo su origen al considerar como contextos realistas a todo aquello que hace hincapié en que lo real se encuentre en la mente del alumno. Por lo tanto, no solo son las situaciones derivadas de la vida diaria o fantasía, sino que pueden encontrarse en la Matemática misma e incluso en la formalidad de la disciplina. Esta forma de trabajo propicia el uso de métodos matemáticos desde la experiencia del alumno, en un primer momento conectado al contexto, para luego hacerse más general y adquirir de alguna forma el carácter de modelo.

Zolkower et al. (2006; citado en Bressan, 2016) distinguen a los contextos realistas que han sido seleccionados adecuadamente como motivadores para los alumnos y como puntos de partida en su proceso de matematización, pudiendo seguir hacia mayores niveles de conceptualización. Para ello se requiere que sean abiertos y potentes en su uso exhaustivo. Este Principio presenta un carácter relativo en cuanto a que depende de ciertas condiciones que tenga el alumno, como la experiencia previa y/o de su capacidad para imaginar o visualizar un contexto determinado.

**Principio de Niveles.** A partir de los procesos llevados a cabo por el alumno en su organización matemática, desde contextos cotidianos de manera informal y con una entrada progresiva a un plano de mayor formalización, Bressan et al. (2016) distinguen niveles de comprensión, o matematización, que se van produciendo. Cada uno de ellos involucra diversidad de estrategias mentales y lingüísticas, sin un orden estructurado. Particularmente destacan cuatro niveles: situacional, referencial, general y formal, que poseen cierto dinamismo y movilidad, de manera que en cada nivel se incorpora lo trabajado en los anteriores.

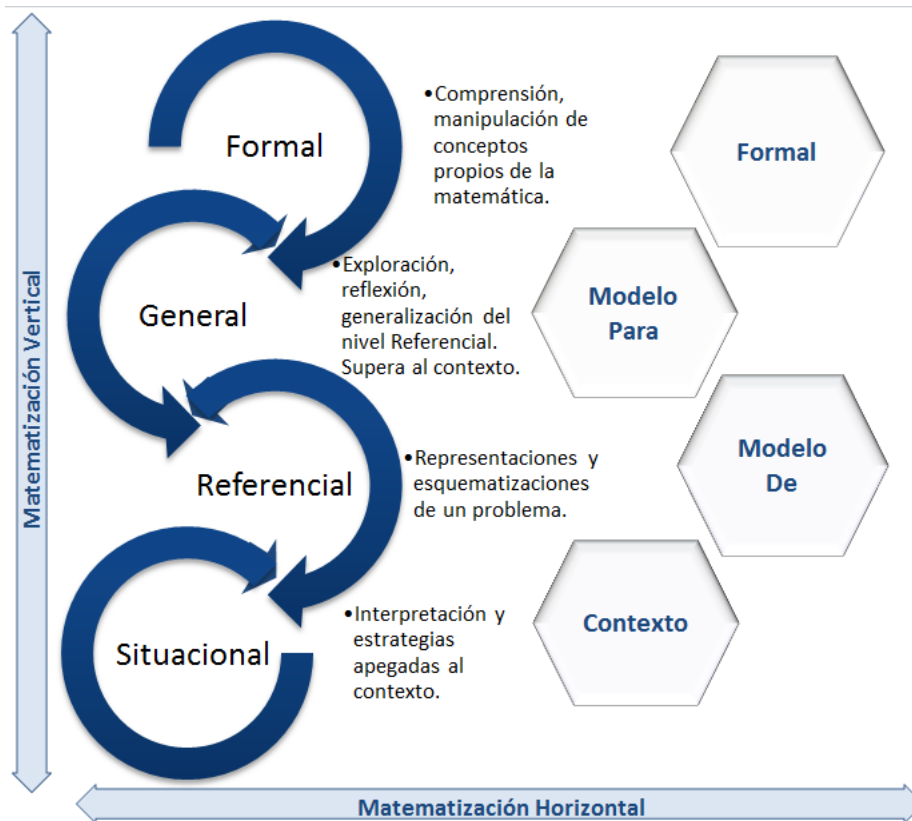


Figura 2.2. Niveles de Matematización (Bressan et al., 2016)

Streefland, (1991; citado en Bressan et al., 2016) realiza un agrupamiento de niveles a partir de la distinción de los procesos de matematización horizontal y vertical. En él detalla:

Comenzando desde la realidad, los alumnos pueden cruzar la frontera a la Matemática por sí mismos, aprendiendo a estructurar, organizar, simbolizar, visualizar, esquematizar y mucho más. En resumen, estructurando el proceso de matematización horizontal por sí mismos. Pero también, sea simultánea o posteriormente, ellos pueden progresar en su tratamiento del material matemático dentro de la Matemática misma, incrementando su eficiencia de procedimientos, aplicación de abreviaturas, reemplazando el lenguaje relativo a la propia lengua por el lenguaje convencional de símbolos y variables, en otras palabras, por abstraer, generalizar, unificar y cuando sea necesario especificar (p.8).

Este último proceso se denomina matematización vertical, del cual forman parte los tres niveles no apegados a la situación inicial. Transversalmente, se considera a la reflexión como aquella actividad que favorece el paso de niveles. En particular, en la Fig. 2.2 se asocian características de cada nivel de comprensión como así también de

matematización. Los modelos adoptados en cada nivel permiten reconocer el nivel del alumno y seguir avanzando en el proceso de aprendizaje.

**Principio de Reinención guiada.** Los profesores y los programas educativos desempeñan un papel importante en los procesos de aprendizaje. Asimismo los alumnos necesitan también de espacio para construir herramientas y discernimientos matemáticos por su propia cuenta. Los docentes proporcionan un ambiente de aprendizaje en el cual pueda surgir el proceso de construcción y anticipar los desempeños de los alumnos, en pos a lograr escenarios factibles de funcionar como palancas para favorecer la comprensión estudiantil (Bressan, 2005).

El docente no es el centro dentro del proceso educativo sino el guía y organizador de las interacciones entre los alumnos y las situaciones problemáticas involucradas, entre los mismos alumnos, y por último entre las producciones informales de los alumnos y las herramientas formales institucionalizadas de la Matemática. Dentro de este proceso constructivo de aprendizaje participan elementos como la negociación explícita, intervención, discusión, cooperación y evaluación que conllevan que los métodos informales sean base para el desarrollo de los formales (Bressan et al., 2016).

**Principio de Interrelación.** Se espera que la Matemática como asignatura escolar trascienda contenidos estancos. En efecto, negar la conexión que existe entre los diferentes conocimientos que la componen sería negar la propia historia de la Matemática donde se necesitó de la integración para llegar a abordar situaciones problemáticas. Sobran los escenarios en los que se puede utilizar una gran variedad de contenidos matemáticos interrelacionados para trabajarlos.

Este Principio tiene coherencia con la posición tomada por la EMR, en cuanto a no realizar profundas distinciones entre los ejes curriculares de la Matemática. Esto proporciona un mayor abanico de posibilidades de matematización bajo distintos modelos y lenguajes diferentes entre sí, pero con ciertos puntos de contacto.

La interrelación mencionada en el Principio se encuentra de alguna manera en las conexiones establecidas en la secuenciación de los contenidos, tanto en las diferentes unidades de la asignatura como en las distintas partes de una misma unidad, y la aplicación de un amplio rango de comprensiones y herramientas matemáticas (Bressan, 2005; Bressan et al., 2016).

**Principio de Interacción.** El aprendizaje de la Matemática es una actividad social donde existen interacciones entre los distintos actores intervinientes. Por un lado, están las interacciones entre el docente y los alumnos llamadas verticales y, por otro, aquellas

entre los propios alumnos denominadas interacciones horizontales. Estas distinciones mencionadas por Bressan et al. (2016) juegan un papel central y provocan que los alumnos tengan un rol activo a la hora de explicar, justificar, acordar o disentir en el proceso educativo, y que sean convocados a cuestionar alternativas y reflexionar sobre situaciones realistas planteadas. Por ejemplo, alumnos que dan a conocer sus estrategias y producciones, y en el intercambio toman ideas para mejorar sus estrategias. Esto favorece la reflexión para lograr alcanzar un nivel más elevado de comprensión.

Este principio procura mantener una organización de clase conjunta, pero con momentos en donde el trabajo en grupos más pequeños heterogéneos se efectivice, en contraposición a una disposición única en base a ritmos y procesos similares (Freudenthal, 1983, 1991; citado en Bressan et al., 2016). Esta forma de trabajo en el aula favorece el tratamiento de problemas así como el despliegue de soluciones que se enriquecen con los diferentes niveles de comprensión que tienen los integrantes de los grupos.

### **2.1.1. Grupo Patagónico en Didáctica de la Matemática**

Actualmente muchas teorías didácticas han repensado y adquirido las ideas originales de la EMR para formar parte de ellas, además de integrar las bases de los currículos de países como Estados Unidos, Japón, Indonesia, Gran Bretaña, Alemania, Dinamarca, España, Portugal, Sudáfrica, Brasil, Puerto Rico, entre otros (Bressan et al., 2016).

En Argentina, se reconoce al Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática (GPDM<sup>2</sup>) como referente en el desarrollo de esta corriente en la región. Fue creado en el año 2000 en el marco de la Fundación Grupo de Educación Bariloche (FGEB) por la Dra. Betina Zolkower y la Prof. Ana María Bressan. Desde sus inicios se constituyó como una red de docentes heterogéneos en cuanto al nivel educativo en el que se desempeñan, formación inicial y continua, y también contextos en los que trabajan. El Grupo está convocado a estudiar, investigar y difundir el enfoque de la EMR a través de cursos, publicaciones, experiencias y materiales para el aula.

En el sitio web <http://gpdmatematica.org.ar> se puede encontrar información al respecto. Específicamente una de las secciones del sitio está destinada a los puzles e imágenes, donde la mayoría son rompecabezas geométricos.

---

<sup>2</sup> El GPDM está ubicado en la región Patagónica de la República Argentina, en la ciudad de San Carlos de Bariloche.

### **2.1.2. Visualización y demostración**

Entre los aportes realizados por el GPDM, se encuentran los de Rabino y Bressan (2018) en cuanto a la importancia del papel que cumplen la visualización y demostración en Matemática, en conjunción con el razonamiento visual. En un recorrido sobre el reconocimiento de la utilización de imágenes durante la historia, se distinguen distintos tipos de aportes, tales como grandes avances en Matemática a partir de la concreción de ideas que surgieron de la visualización o, en contraposición, algún estancamiento del razonamiento o conjeturas erróneas. Bajo estas delimitaciones y bajo la perspectiva de la EMR, se considera a la visualización como base de toda actividad matemática y, por lo tanto, una herramienta que favorece el desarrollo de la intuición en el contexto de una clase.

Se distinguen dos tipos de uso de una figura:

En la enseñanza es importante diferenciar entre utilizar una figura, manipularla en búsqueda de nuevas ideas y de comprensión, o utilizarla como esquema, como apoyo del proceso deductivo que se sigue. Es decir, en una situación la figura sirve para razonar, para generar nuevas ideas, para inventar, crear. En la otra, la imagen tan solo tiene un papel explicativo, está subordinado a lo formal (Rabino y Bressan, 2018, p.3).

Según las autoras, estos tipos de usos desarrollados en una clase permiten a los alumnos optar por diferentes caminos y formas de conceptualización de un tema con algún nivel de complejidad. De esta manera se superan las intuiciones generadas en el enfoque tradicional donde las visualizaciones son explicadas y no se prioriza que sea el propio alumno quien las descifre.

Al reconocer la presencia de los distintos Principios de la EMR en el desarrollo de las visualizaciones en una situación de clase, se puede destacar con mayor fuerza el concepto de modelo matemático, una de las ideas centrales de esta corriente. A su vez, la intuición desarrollada a partir del trabajo con imágenes permite representar la realidad en forma esquemática y se constituye en un modelo mental o gráfico de un contexto dado que lo hace más comprensible. La apertura de diferentes caminos y el camino hacia conceptos más complejos ejercitan la posibilidad de incluir situaciones problemáticas diversas con mayor nivel de dificultad y potencian el grado de generalización en el que se encuentra el alumno.

El GPDM reconoce que la demostración formal recobra valor con este tipo de procesos en los cuales se promueve un pensamiento inductivo y deductivo tendiente a lograr una

gradual rigurosidad matemática, siendo en un primer momento las ideas visuales las que se manejan para luego generalizar, conjeturar, inducir, analizar, abstraer y formalizar.

### **2.1.3. Fenomenología didáctica**

Partir de la matematización como idea central de la EMR y como una actividad organizadora propia del alumno, posibilita pensar en las acciones llevadas a cabo por los docentes que forman parte del proceso. Precisamente el campo de la didáctica permite reconocer dos niveles de organización: la matematización horizontal y la matematización vertical (Bressan et al., 2016).

Freudenthal (1991/2012) reconoce y caracteriza ambos niveles de organización:

La matematización horizontal lleva del mundo de la vida al mundo de los símbolos. En el mundo de la vida uno vive, actúa (y sufre); en el otro, los símbolos son formados, reformados y manipulados mecánicamente, comprensivamente, reflexivamente; esto es la matematización vertical. El mundo de la vida es lo que se experimenta como realidad (en el sentido en el que usé la palabra<sup>3</sup> antes), como es el mundo de los símbolos respecto de su abstracción (p.44).

El límite sobre el comienzo de uno de los niveles y el siguiente depende de la situación planteada, del alumno involucrado y del contexto en el cual se trabaja. De esta manera puede decirse que las fronteras entre los niveles no están rígidamente delimitadas.

## **2.2. Recursos didácticos en Matemática**

Se entiende por recursos didácticos a “todos aquellos objetos, aparatos o medios de comunicación que pueden ayudar a describir, entender y consolidar conceptos fundamentales en las diversas fases de aprendizaje” (Alsina et al., 1988, p.13). Además, los recursos didácticos se pueden utilizar con diversos objetivos: consolidar conceptos o ejercitar procedimientos; modelizar ideas y conceptos matemáticos; plantear problemas. Para asegurar un uso adecuado de los recursos didácticos en el aula de Matemática, sin caer en el error de sobrevalorar las potencialidades de los mismos, resulta interesante como docentes reflexionar acerca de: el grado de sofisticación del recurso didáctico; la distancia entre el recurso didáctico y el concepto matemático; la eventual adición y

---

<sup>3</sup> Se hace referencia al Principio de Realidad desarrollado en la EMR.

dependencia al recurso didáctico; las posibilidades de manipulación del recurso didáctico; el diseño y re-diseño de las tareas que con ellos se prevén (Flores, 2006).

Para Bressan (s.f.) -integrante del GPDM-, un recurso didáctico establece una correspondencia isomorfa entre los conceptos y estructuras matemáticas, y las ideas mentales de los alumnos. De este modo, el recurso se convierte en un modelo realista. A su vez, la autora hace una distinción entre recurso estructurado y no estructurado, de acuerdo a la intención con la que fue creado el recurso: si está asociado a algún contenido particular o no. Finalmente manifiesta que contar con un recurso del primer grupo, predestinado a un uso concreto, no garantiza la correspondencia entre lo que se quiere enseñar y lo que realmente está en la estructura mental del alumno.

### **2.2.1. El Tangram**

El Tangram es un tipo de recurso didáctico; en particular, se trata de un rompecabezas formado por un conjunto de piezas conocidas con el nombre de tans, que se obtienen al diseccionar una figura plana. Entre sus finalidades se encuentra la disposición de las piezas para formar diferentes siluetas, que se conocen con el nombre de tangramas. Al formarlas, las piezas no deben superponerse entre sí y deben utilizarse en su totalidad. Los distintos tipos de Tangrams pueden variar en cuanto a su forma y a la cantidad de piezas que contienen.

Los rompecabezas o puzzles son recursos valorados dentro de la EMR y se reconoce que su uso favorece el pensamiento geométrico de los alumnos. Van Hiele (1999/2009), en esta línea, integra al Tangram al conjunto de los puzzles mosaicos: bloques con un patrón o cerámicos con un diseño. Particularmente, este autor se focaliza en la enseñanza de la geometría y reconoce niveles de pensamiento geométrico (visual, descriptivo, de deducción no formal). Los alumnos pasan por estos niveles en su proceso de aprendizaje, por ejemplo mediante la utilización de estos tipos de puzzles. Entre las ventajas que se le reconocen a la utilización de rompecabezas geométricos, se encuentra la capacidad que brinda a los alumnos el trabajo visual con los objetos. Las acciones puestas en juego sobre las piezas y el hecho de compartirlas con otros, favorecen el enriquecimiento de las estructuras mentales de visualización y abren camino al desarrollo de conocimiento matemático.

El estudio sobre un tipo particular de puzzle, llamado rompecabezas de mosaicos de van Hiele, llevó al autor a profundizar sobre los alcances en un proceso educativo con este tipo de recursos. En particular, reconoce fases que intervienen en la enseñanza y que

posibilitan pasar de nivel. La primera de ellas es la fase indagatoria proporcionada por la exploración y que lleva a descubrir ciertas estructuras. La segunda fase es la orientación directa donde las actividades propuestas por el docente tienen una intención de avanzar gradualmente en la estructura pretendida. La siguiente fase es la explicitación de un vocabulario específico que introduce paulatinamente los diferentes lenguajes que se presenten. En la cuarta fase, denominada orientación libre, las actividades propuestas tienen un cierto grado de libertad y toma de decisión por parte del alumno, orientado a alcanzar un nivel de profundización mayor. Por último, la quinta fase de integración, pretende que el alumno pueda lograr una síntesis de lo realizado y aprendido durante el paso por las fases.

Para llevar adelante este proceso, se espera que el docente acompañe el desarrollo de estas fases a partir de involucrar los diferentes Principios de la corriente EMR. El empleo de los rompecabezas al pasar por las distintas fases y niveles de pensamiento, habilita al juego como una metodología que permite reflexionar, imaginar y desarrollar estructuras mentales.

### **2.2.2. El Juego**

Existen numerosos ejemplos en la historia de la Matemática donde se muestra que, a partir del planteo de un juego sencillo, se han logrado grandes avances en la disciplina (Ramírez, 2019).

Si bien el juego aparece comúnmente integrado con otras áreas en los primeros niveles del sistema educativo (inicial y primario), su incorporación en el proceso de enseñanza de nivel secundario permite reconocer en él múltiples cualidades. García (2019) distingue algunas contribuciones del juego centradas en el alumno, como son la motivación, la toma de decisiones y la anticipación de resultados; y estas dos últimas en particular en estrecha relación con la utilización y análisis de estrategias de resolución de problemas. Otros atributos reconocidos tienen que ver con las relaciones que el juego propende, como por ejemplo la cooperación entre los alumnos. Independientemente de los ritmos que se llevan habitualmente en una clase, el juego propone un nuevo escenario donde la evaluación y la mirada del grupo total no tienen el protagonismo tradicional, y el esfuerzo de cada alumno se traduce en pos de aportar al juego.

El uso del juego en un ámbito educativo, según Ramírez y Flores (2016; citado en Ramírez, 2019) se considera “como una parte insertada en una tarea de enseñanza más completa, donde, tras el juego, se ‘reposan’ los contenidos trabajados” (p.50). Este

aspecto funcional potencia el juego, otorga significatividad en el alumno y una postura activa, no conformándose simplemente con lo anecdótico o divertido de la actividad.

Al momento de implementar un recurso lúdico en el aula, el docente tiene un papel importante pero no central, dado que si bien va a intervenir y mediar en el caso que sea necesario y el alumno lo requiera, lo hará desde un segundo plano. Además, asume proporcionar un clima en la clase que posibilite en los alumnos actuar de forma autónoma. Previamente a su uso es necesario que el docente haya explorado en profundidad el juego y sus reglas, acordándolas de manera explícita con los alumnos junto con el objetivo del juego (García, 2019). En particular, la autora considera a los puzzles como juegos que no requieren de grandes preparaciones para jugarlo, con una posible distribución en pareja para su implementación.

Se reconocen múltiples ventajas en este tipo de recursos lúdicos. Muñoz et al. (2019) distinguen la existencia de una gran variedad de juegos y la versatilidad que tienen muchos de ellos en cuanto a su adaptación a un determinado contexto, como así también la capacidad de integrarlos en cualquier momento del proceso educativo.

### **2.3. Diseño Curricular Jurisdiccional**

El Nivel Medio de Educación de la Provincia de Santa Fe está organizado según la normativa del Diseño Curricular Jurisdiccional establecida por el MESF (2014) a partir de la promulgación de la Ley N°26206 de Educación Nacional. A continuación se detalla la estructura y los lineamientos generales que conforman el Nivel y aquellos particulares del área Matemática.

#### **2.3.1. Aspectos generales**

El proyecto provincial ofrece una Educación Secundaria Orientada organizada en dos Ciclos: el Básico, conformado por primer y segundo años, donde se cimientan las bases comunes para el nivel; el Orientado, constituido por tercero a quinto años, cuyos espacios curriculares dependen de la orientación en la que se encuentren. Se mencionan a continuación las orientaciones ofrecidas por el Sistema Educativo de la provincia: Agro y Ambiente; Arte; Artes Audiovisuales; Artes Visuales; Arte-Danza; Arte-Música; Arte-Teatro; Ciencias Naturales; Ciencias Sociales; Ciencias Sociales y Humanidades; Comunicación; Economía y Administración; Educación Física; Informática; Lenguas;

Turismo. En el Diseño Curricular se presenta una fundamentación, se proponen estrategias y se detallan los contenidos mínimos para todo el nivel.

El presente documento explicita de forma general la concepción de educación y de aprendizaje a la que adhiere, además del rol docente y su tarea de enseñar con un alcance mayor del área específica donde se desempeña. Con relación al primero de los conceptos, la educación es pensada como:

lugar de encuentro con el otro para explorar posibilidades y contribuir a los sentidos compartidos, siendo ésta una de las herramientas para propiciar apropiación creativa y transformadora de la cultura, la igualdad de oportunidades en la sociedad y asegurar la horizontalidad y democratización del conocimiento y de los bienes simbólicos y materiales -concepción que posibilita comprender que no hay verdades absolutas, ni conocimientos neutrales, ni procesos lineales, ni posibilidades de avanzar en soledad (MESF, 2014, p.11).

En este encuadre, el aprendizaje es pensado como un proceso que posibilita la resolución de problemas, en un contexto en donde todos los actores involucrados sean beneficiados, bajo un encuadre ético. Por su parte, en el docente se conjugan elementos del orden socio-afectivos y comunicacionales que lo atraviesan y que se ponen en juego en el proceso de enseñanza cuando:

se compromete con un entramado vincular acompañando a los estudiantes en el aprendizaje de la autonomía, la solidaridad, la apropiación de saberes y herramientas para trazar cursos de acción que les permitan encontrar o hacer algo de su interés favoreciendo de ese modo sus trayectorias escolares (MESF, 2014, p.12).

### **2.3.2. Particularidades del área Matemática**

Para cada espacio curricular, en particular los del área Matemática, se presentan los fundamentos que lo sostienen dentro del sistema educativo, enfoques metodológicos que pueden ser tomadas como herramientas para el docente y los contenidos sugeridos para cada año del Nivel Secundario.

#### **2.3.2.1. Fundamentos**

En particular en el área de Matemática se exponen los mismos fundamentos para los Ciclos Básico y Orientado. En ellos se hace alusión a la concepción matemática que se

adopta y las nociones claves que se pretenden como la modelización y la validación, todas entramadas en el acto educativo.

Se considera a la Matemática en estrecha relación con diferentes situaciones cotidianas y con otras ciencias (problemas extramatemáticos), adquiriendo relevancia también los problemas intramatemáticos. En ambos casos se procura dar respuestas a estos problemas, convirtiéndose los alumnos en productores de conocimientos. En esta línea, se caracteriza a la Matemática “como un producto cultural y social, atravesada por las concepciones sociales y las decisiones de la comunidad matemática” (MESF, 2014, p.47). De este modo, el trabajo del alumno consiste en *hacer Matemática*, impulsado por la resolución de problemas y la modelización.

Desde los fundamentos del área, la modelización está pensada como una actividad matemática integradora que permite particularizar una situación, trabajarla y generar conocimiento. Durante el proceso de modelización se ponen en práctica diferentes componentes del haber Matemática: “problemas, técnicas, representaciones, demostraciones, evitando la preeminencia de una sobre las otras” (MESF, 2014, p.47) o, incluso, una visión segmentada. Un segundo concepto abordado desde el Diseño Curricular y centrado en el alumno, es la validación (valor de verdad) de una respuesta y su evolución en el proceso educativo. Se reconocen al menos dos instancias bien diferenciadas: la primera vinculada a la experimentación, con argumentaciones imprecisas y poco nivel de formalidad, y la segunda aproximada a la generalización que avanza con respecto al contexto inicial.

Los problemas y sus resoluciones también son reconocidos como propuesta que posibilita la construcción de conocimiento. Se propone que el problema pueda anclarse en conocimientos y experiencias anteriores, pero que a partir de su propia actividad y en conjunto con compañeros, le signifique un desafío que le permita generar otros nuevos. Estas concepciones delimitadas deben ponerse en juego en el desarrollo de la clase, como una micro-sociedad científica donde el alumno tenga la posibilidad de problematizar; esto es:

interpretar información, establecer relaciones, conjeturar, elegir y construir un modelo para resolver los problemas, comunicar en forma oral y escrita, argumentar acerca de la validez de los procedimientos y resultados, elaborar conclusiones, de modo que posibilite la producción de conocimientos (MESF, 2014, p.48).

### **2.3.2.2. Metodología**

Dentro del enfoque metodológico se puntualiza en el aprendizaje del alumno, la propuesta se basa en la conformación de pequeños grupos que no solo estimulan el trabajo colaborativo, sino que refuerzan la responsabilidad, la confianza y habilidades vinculadas a la resolución de problemas. De esta manera se genera el proceso de aprendizaje con alto nivel de conciencia por parte del alumno en el nivel de desarrollo alcanzado.

Se espera que el abordaje de los problemas se diferencie de los tradicionales (se presenta la información y luego se aplica); es decir, que al alumno le implique “conjeturar, aplicar información, descubrir, inventar y comunicar ideas, así como probar esas ideas a través de la reflexión crítica y la argumentación” (MESF, 2014, p.134).

Existen otros aspectos metodológicos que son específicos de cada Ciclo. En el primero de ellos (Ciclo Básico), se recomienda que las situaciones emprendidas estén caracterizadas por la simpleza y la pertenencia a un contexto cercano, aproximándose al desarrollo de un modelo. Los juegos ligados a contenidos matemáticos o desarrollos de estrategia son considerados en los dos primeros años como situaciones problemáticas, incluidos entre ellos los “elementos manipulativos simples y tradicionales, facilitadores de la entrada a la producción y al desafío intelectual desde un sentido cooperativo y no competitivo” (MESF, 2014, p.50).

En el Ciclo Orientado, por su parte, se propone abordar situaciones problemáticas vinculadas con la terminalidad del Ciclo en las que se avance en complejidad año tras año (contextos extramatemáticos integrados). Se pretende que el alumno pueda, entre otras habilidades, diseñar un plan de trabajo y seleccionar estrategias acordes y un modelo representativo, con miras a relacionar modelos de diferentes situaciones. En estos últimos años del Nivel Secundario el juego proporciona el puntapié a un aprendizaje estimulante de la Matemática y supera la idea de solo despertar un interés.

### **2.3.2.3. Contenidos**

El espacio curricular de Matemática, según la normativa de la Provincia de Santa Fe, está organizado en cuatro ejes conceptuales: *Álgebra y Funciones*, *Geometría y Medida*, *Números y Operaciones*, y *Probabilidad y Estadística*. A priori no se establece ningún orden entre ellos; es el docente el que organiza y secuencia, y a su vez promueve, la interrelación e integración entre los contenidos que comprende cada eje. En cada uno se explicitan los contenidos propuestos para cada Ciclo del Nivel, particularizándolo por

año escolar. Se hace a continuación un recorrido sobre los contenidos nodales en el Nivel Secundario.

Entre los aspectos didácticos para el eje Álgebra y Funciones, se pretende que se fomente la exploración, formulación y validación de conjeturas, no solo relacionadas con los contenidos del propio eje sino en vinculación con lo aritmético y lo geométrico. La generalización es uno de los caminos propuestos como inicio en este eje. En la Fig. 2.3 se reconocen los contenidos centrales detallados por año; algunos de los cuales se retoman en años consecutivos, donde se procura ahondar en el tratamiento respecto a la gradualidad del contenido, la conexión con otros temas y las habilidades a desarrollar. Se puede observar que la noción y el trabajo con funciones se desarrollan durante todo el Nivel, mientras que el trabajo intenso con ecuaciones se concentra en los primeros años del Ciclo Orientado.

1er Año	2do año	3er año	4to año	5to año
Procesos recursivos.			Sucesiones.	
Relaciones entre variables.	Funciones lineales, no lineales y cuadráticas.		Funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.	Funciones parte entera, valor absoluto, seno, coseno y tangente.
Ecuaciones lineales con una y dos variables.		Ecuaciones de segundo grado incompletas y completas.		
		Sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Inecuaciones lineales con una y dos variables.		

Figura 2.3. Contenidos del eje Álgebra y Funciones

Respecto al eje Geometría y Medida, se distingue como objetivo que los alumnos puedan explorar, construir, analizar y modelizar a partir de situaciones intra y extramatemáticas en vinculación con los contenidos del eje. En la Fig. 2.4 se resaltan, por un lado, los objetos geométricos y los contenidos relacionados a medidas que se plantean en el Ciclo Básico -se encuentran sobre la circunferencia y en su interior-, y por otro, los que se abordan en el Ciclo Orientado -por fuera de la circunferencia- los cuales están en estrecha vinculación y profundizan los del Ciclo anterior. El quiebre entre los dos primeros años y los últimos tres del nivel se encuentra, además de la profundidad de los contenidos, en el tipo de actividades que se pretenden. Se procura en los dos primeros años trabajar a partir de la observación, manipulación, con aproximaciones a lo que se pretende en los últimos, que consiste en fomentar la conjeturación, argumentación y validación a partir de razonamientos deductivos.

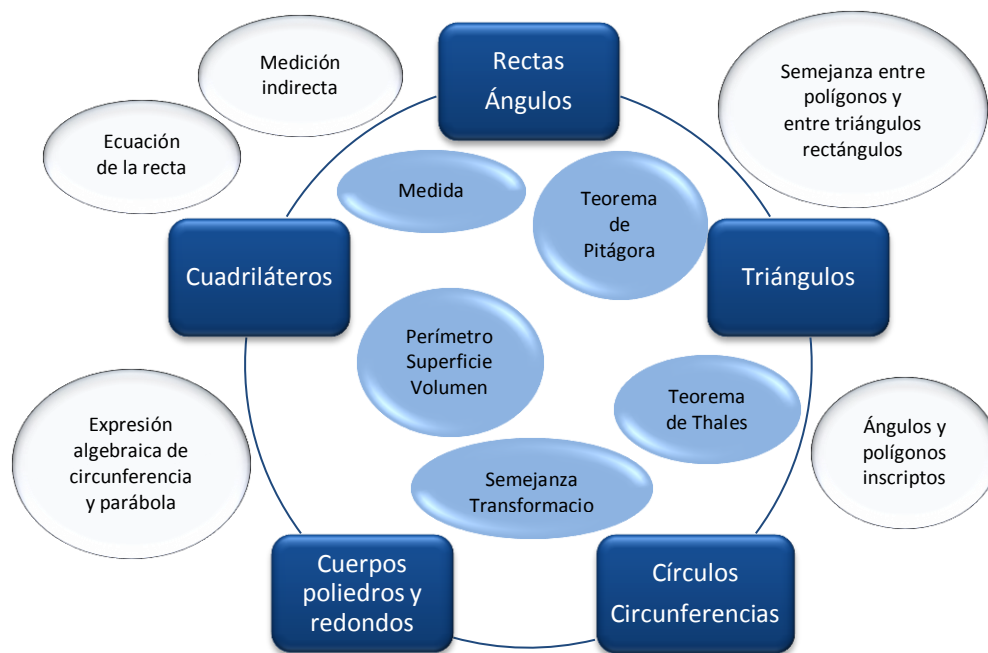


Figura 2.4. Contenidos del eje Geometría y Medida

En el eje Números y Operaciones se reconocen en primer lugar los conjuntos numéricos a partir de la detección de la necesidad de ampliación del anterior, como así también las propiedades y las operaciones como extensión de las ya vistas (Fig. 2.5). Así mismo, se puede evidenciar que el conjunto de los números racionales es propuesto como anclaje (racionales positivos) al inicio del trabajo de los números en el Nivel Secundario y, a su vez, es bisagra entre los dos Ciclos. Entre los objetivos que se esperan del eje se describen: reconocer, utilizar y modelizar a partir de situaciones problemáticas.

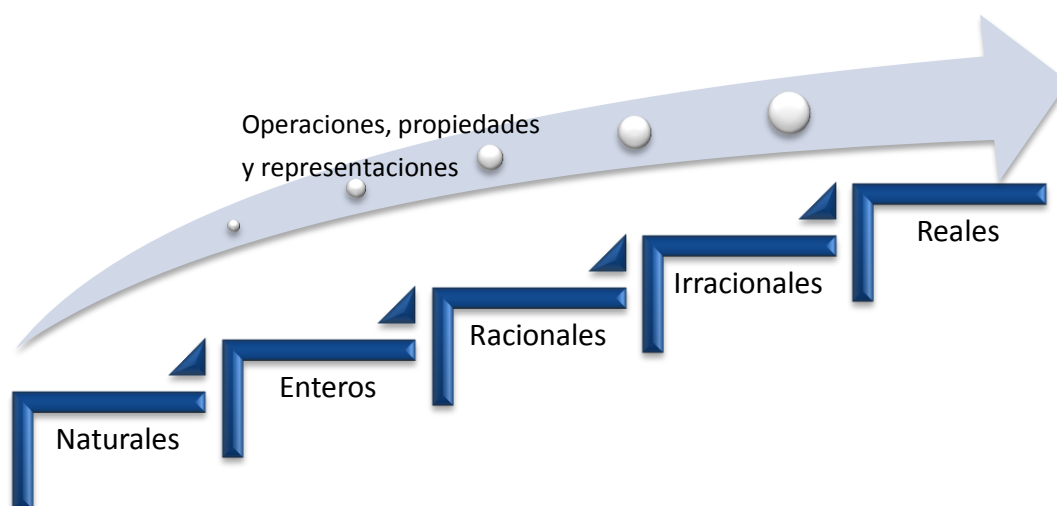
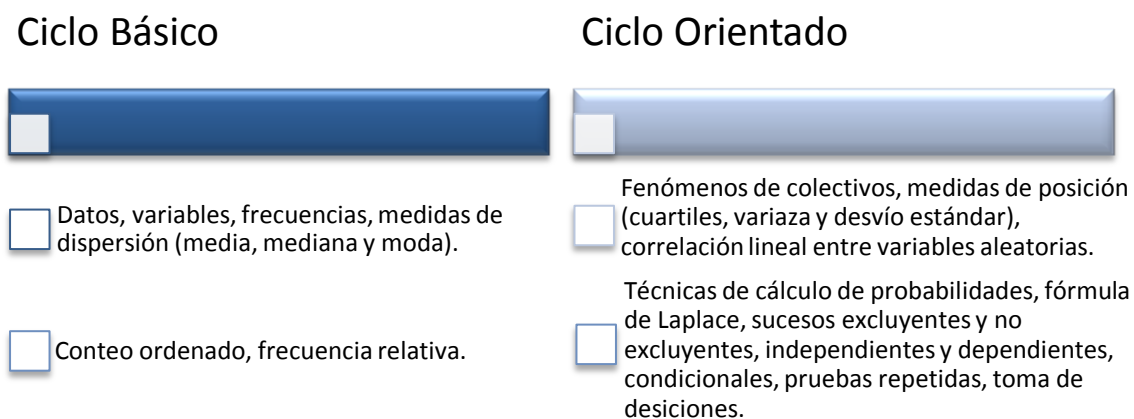


Figura 2.5. Contenidos del eje Números y Operaciones

Los ejes explicitados hasta el momento proponen situaciones problemáticas tanto intra como extramatemáticas. En particular, en el eje Probabilidad y Estadística se orientan sus contenidos a situaciones principalmente extramatemáticas y sus objetivos cambian

según el Ciclo del Nivel en el que se encuentren los alumnos. Específicamente en el Ciclo Básico se pretende que los alumnos puedan interpretar y elaborar información, mientras que en el Orientado se pretende que los alumnos puedan modelizar, interpretar y comunicar.

En la distinción de los contenidos para cada año escolar, en la Fig. 2.6 pueden remarcarse claramente aquellos asociados a Estadística -primeros ítems de cada Ciclo- y los correspondientes a Probabilidad -segundos ítems de cada Ciclo-.



*Figura 2.6. Contenidos del eje Probabilidad y Estadística*

Finalmente, cabe señalar que los conceptos desarrollados en el presente capítulo amalgaman conceptualmente las categorías de análisis del estudio que, articuladas con los objetivos específicos (apartado 1.2) y como parte del encuadre metodológico, se presentan en el próximo capítulo.

## Capítulo 3

### Metodología de la Investigación

---

En este capítulo se presenta la estructura y los fundamentos que sustentan la metodología de esta tesis. En primer término se recorren aspectos de encuadre tales como el enfoque, alcance y tipo de investigación. Posteriormente se particulariza en las características de los sujetos involucrados (estudiantes del PM) y el contexto de interés, como es la asignatura en la que se lleva adelante la investigación y su ubicación en el plan de estudios de la carrera. Finalmente se detalla el diseño de la investigación así como las técnicas empleadas y el sistema de categorías de análisis del estudio.

#### 3.1. Enfoque, alcance y tipo

El *enfoque* metodológico que se adopta en esta investigación es cualitativo, ya que interesa comprender de manera profunda las posibilidades del recurso en cuestión que puedan reconocer estudiantes avanzados del PM, sin pretensión de generalizaciones ni mediciones numéricas (Rodríguez et al., 1999). Básicamente se trata de:

una categoría de diseños de investigación que extraen descripciones a partir de observaciones que adoptan la forma de entrevistas, narraciones, notas de campo, grabaciones, transcripciones de audio y video (...), registros escritos de todo tipo, fotografías o películas y artefactos (LeCompte, 1995; citado en Rodríguez et al., 1999, p.34).

Wolcott (1992; citado en Rodríguez et al., 1999) concibe a las estrategias cualitativas:

como un árbol que hunde sus raíces en la vida cotidiana, y parte de tres actividades básicas: experimentar/vivir, preguntar y examinar. A partir de estas raíces brotarán las diferentes “ramas” y “hojas” de la investigación cualitativa, entre las que el investigador debe elegir para realizar su trabajo (p.39).

Bajo las particularidades de este enfoque, se determina un *alcance* descriptivo dado que se propende a caracterizar lo que los participantes involucrados conocen y pueden llegar a construir en tanto propuestas de enseñanza que emplean el Tangram.

El *tipo* de investigación es transversal, por recoger los datos en tres momentos puntuales sin priorizar la evolución temporal del fenómeno, si bien se realiza una comparación global con respecto a los sucesivos usos del Tangram durante la formación inicial. Según Hernández et al. (2010), un estudio transversal descriptivo posibilita tener una perspectiva de la situación de las variables del objeto de estudio determinado. En este

caso se trata de los estudiantes avanzados del PM puestos en situación de desarrollar una serie de actividades intencionalmente diseñadas, en el marco de los Principios de la EMR como disparador del trabajo. Se establece, de esta forma, un estudio cuasi experimental.

De este modo, con el foco puesto en el trabajo con estudiantes del PM de la FCEIA de la UNR, esta investigación se constituye en un *estudio de caso*. La elección de la institución se debe a que en ella surge la problemática planteada (apartado 1.1) y también se cuenta en la actualidad con conocimiento y acceso a los materiales que forman parte del gabinete de recursos didácticos del Profesorado. En este contexto, como se menciona en el subapartado 1.2.1, interesa:

Analizar las posibilidades del Tangram como recurso didáctico reconocidas por estudiantes avanzados del PM.

Con miras en este objetivo principal, se presentan las características de componentes constitutivos del caso, como son los participantes y el contexto en el cual se lleva a cabo el trabajo de campo.

### **3.2. Participantes de la investigación**

Los participantes de la investigación son estudiantes que, al momento de realizar el trabajo de campo, cursan la asignatura Práctica de la Enseñanza II (PEII) correspondiente al quinto semestre del PM (de ocho que tiene la carrera). Se considera fructífero focalizar en este grupo de estudiantes por encontrarse en un momento bisagra del trayecto del Profesorado, dado que están culminando con la formación básica en los distintos campos que integran la carrera y comenzando a profundizar los mismos en los últimos dos años. De este modo, en esta etapa los estudiantes tienen un recorrido académico suficientemente nutrido (en cantidad y diversidad de materias que ya transitaron) que les permite profundizar en el trabajo con recursos didácticos que dispone el PM y poner en juego criterios didácticos específicos. De allí el tributo de *estudiantes avanzados*. Puntualmente se trata de 15 estudiantes (A1 a A15).

El contacto con los estudiantes se gestiona durante la tercera semana del cursado de PEII (entre 16 semanas de cursado total), para garantizar la continuidad de ellos en las actividades que realizarían. En la quinta semana, se les anticipa las tareas que llevarán adelante, la cantidad de encuentros previstos, los tiempos destinados a las actividades, los plazos de entrega (que se amoldan a los de la asignatura) y el eje temático que se

abordará (recursos didácticos) según el programa de la materia, sin anticipar mayores detalles. Se comienza con el trabajo de campo en la sexta semana del cursado de la asignatura.

### 3.3. Contexto institucional

La carrera PM se crea en el año 1988 en el Departamento de Matemática de la Escuela de Ciencias Exactas y Naturales de la FCEIA de la UNR. En esta Escuela existen en la actualidad otras cuatro carreras: Licenciatura en Matemática, Licenciatura en Ciencias de la Computación, Profesorado y Licenciatura en Física.

En el año 2002 empieza a implementarse un segundo plan de estudios del PM (Res. C.S. 217/02), que rigió hasta fines del 2017. En el 2018 comienza a ejecutarse el tercer plan de la carrera (Res. C.S. 027/18). Específicamente, el plan 2002 -al que pertenece la actividad curricular donde se efectúa el trabajo de campo- tiene una duración de cuatro años y consta de 25 asignaturas (16 cuatrimestrales y 9 anuales). Comprende tres Campos de Formación (General Pedagógica -4 asignaturas-, Especializada -2- y Orientada -16-) y un Eje Integrador -3-. En particular, el Eje Integrador (innovación del plan 2002) propone una articulación teórico-práctica de los contenidos de los tres Campos de Formación, que propician estimular prácticas educativas originales y la reflexión crítica tanto en el ejercicio de la docencia como en la enseñanza de la Matemática. En la Tabla 3.1 se presentan algunas características de las asignaturas que forman este Eje.

*Tabla 3.1. Composición del Eje Integrador del PM*

Materia	Régimen de cursado	Ubicación en la carrera	Carga horaria	Correlativas
Práctica de la Enseñanza I	Anual	Primer año	60 hs.	-
Práctica de la Enseñanza II	Cuatrimstral	Tercer año, primer cuatrimestre	30 hs.	Álgebra Geometría I Práctica de la Enseñanza I Pedagogía Cálculo II
Práctica de la Enseñanza III	Cuatrimstral	Tercer año, segundo cuatrimestre	30 hs.	Práctica de la Enseñanza I Pedagogía Matemática Discreta Probabilidad y Estadística

En particular, PEII constituye un espacio propicio para el trabajo con estudiantes, pues la serie de actividades intencionalmente diseñadas puede incluirse dentro de las

programadas de la asignatura, dado que responde a los objetivos, contenidos y metodología de la misma. Sucintamente PEII se caracteriza por promover actividades diseñadas para la reflexión y el estudio de los diversos componentes de la docencia en Matemática, con el desarrollo del criterio docente como uno de los puntapiés para gestionar las prácticas de enseñanza. Se trabaja sobre diferentes ejes de contenidos de la Educación Secundaria de la Provincia de Santa Fe y la modalidad de cursado es la de taller.

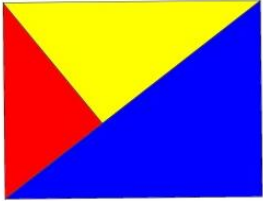

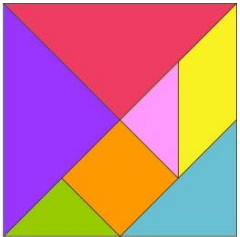
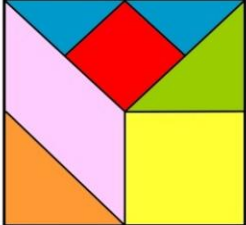
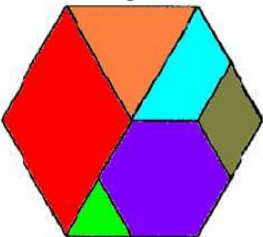
Se combinan actividades grupales, elaboración individual y socialización en el grupo-clase. La cátedra cuenta con una plataforma virtual institucional, como repositorio de material (bibliografía de la asignatura y producciones de los estudiantes) y con un porcentaje establecido de asistencia (75%) por la modalidad implementada (taller).

### **3.4. Gabinete de recursos didácticos**

En el Profesorado se han explorado e incorporado diferentes tipos de recursos y secuencias relacionadas a los mismos a partir del desarrollo de tesis (de grado y posgrado), investigaciones (becas y proyectos) e iniciativas de integrantes del PM. Este material se encuentra a disposición de los docentes y estudiantes de la carrera. Alegre et al. (2018) los reconocen e identifican como manipulativos tangibles (constituidos por juegos tradicionales y recursos específicamente diseñados), distinguidos de otros como los audiovisuales (dentro de los que mencionan un Directorio web institucional). Particularmente, en el primer grupo se encuentran los 11 tipos de Tangrams (Cardiotangram, Chino, Brügger, Fletcher, Lloyd, Hexagonal, Ovoide, Pentagonal, Pitagórico, Triangular, Stomachion) los cuales son puestos en consideración en las investigaciones de Villarroel y Sgreccia (2011, 2012), como se describe en el apartado 1.3. En la Tabla 3.2 se muestra una breve descripción de cada uno de los tipos de Tangrams con los que cuenta el gabinete del PM junto con la imagen de la figura patrón del cual surge su disección.

Los materiales empleados para su fabricación son accesibles y livianos (cartón y goma eva) proporcionándole al recurso características como manipulable, durable, económico, liviano, de fácil traslado y poco volumen de guardado. Al momento de la tesis se cuenta con 18 ejemplares (15 de cartón y 3 de goma eva) del Tangram Chino y 3 ejemplares (de goma eva) de cada uno de los 10 tipos de Tangrams restantes.

Tabla 3.2. Descripción de las piezas que conforman a los tipos de Tangrams

Tangram	Características de las piezas
<p data-bbox="507 286 603 320"><b>Brügger</b></p> 	<p data-bbox="762 367 1050 400">Está formado por 3 piezas:</p> <ul data-bbox="762 412 1059 445" style="list-style-type: none"><li data-bbox="762 412 1059 445">• 3 triángulos rectángulos</li></ul>
<p data-bbox="467 568 651 602"><b>Cardiotangram</b></p> 	<p data-bbox="762 591 1050 624">Está formado por 9 piezas:</p> <ul data-bbox="762 636 1193 826" style="list-style-type: none"><li data-bbox="762 636 922 669">• 1 cuadrado</li><li data-bbox="762 669 979 703">• 1 paralelogramo</li><li data-bbox="762 703 906 736">• 1 trapecio</li><li data-bbox="762 736 1043 770">• 1 triángulo rectángulo</li><li data-bbox="762 770 1193 826">• 5 sectores circulares de dos tamaños diferentes (3 de 90° y 2 de 45°)</li></ul>
<p data-bbox="523 882 603 916"><b>Chino</b></p> 	<p data-bbox="762 904 1050 938">Está formado por 7 piezas:</p> <ul data-bbox="762 949 1241 1117" style="list-style-type: none"><li data-bbox="762 949 922 983">• 1 cuadrado</li><li data-bbox="762 983 979 1016">• 1 paralelogramo</li><li data-bbox="762 1016 1241 1117">• 5 triángulos rectángulos isósceles de tres tamaños diferentes (2 pequeños, 1 mediano y 2 grandes)</li></ul>
<p data-bbox="507 1173 603 1207"><b>Fletcher</b></p> 	<p data-bbox="762 1218 1050 1252">Está formado por 7 piezas:</p> <ul data-bbox="762 1263 1225 1397" style="list-style-type: none"><li data-bbox="762 1263 979 1296">• 1 paralelogramo</li><li data-bbox="762 1296 1139 1330">• 2 cuadrados de distinto tamaño</li><li data-bbox="762 1330 1225 1397">• 4 triángulos rectángulos (2 a 2 de igual tamaño)</li></ul>
<p data-bbox="496 1487 624 1520"><b>Hexagonal</b></p> 	<p data-bbox="762 1509 1050 1543">Está formado por 6 piezas:</p> <ul data-bbox="762 1554 1193 1722" style="list-style-type: none"><li data-bbox="762 1554 1011 1588">• 1 hexágono regular</li><li data-bbox="762 1588 906 1621">• 1 trapecio</li><li data-bbox="762 1621 1107 1655">• 2 rombos de distinto tamaño</li><li data-bbox="762 1655 1193 1722">• 2 triángulos equiláteros de diferente tamaño</li></ul>

---

### Lloyd

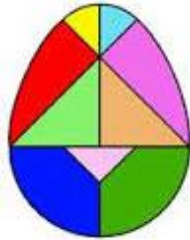


Está formado por 5 piezas:

- 1 cuadrado
- 1 hexágono cóncavo
- 1 trapecio
- 2 triángulos rectángulos de distinto tamaño

---

### Ovoide

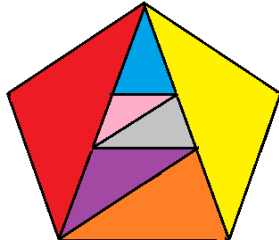


Está formado por 9 piezas:

- 1 triángulo rectángulo pequeño
- 2 trapecios curvos
- 2 triángulos isósceles curvos
- 2 triángulos rectángulos curvos
- 2 triángulos rectángulos grandes

---

### Pentagonal

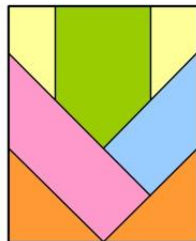


Está formado por 7 piezas:

- 3 triángulos isósceles acutángulos
- 4 triángulos isósceles obtusángulos (2 de igual tamaño)

---

### Pitagórico

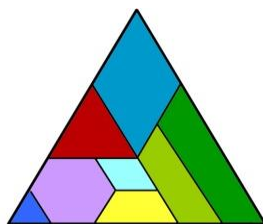


Está formado por 7 piezas:

- 1 pentágono
- 2 triángulos rectángulos de igual tamaño
- 4 trapecios rectángulos (2 pequeños congruentes entre sí, 1 mediano y 1 grande)

---

### Triangular

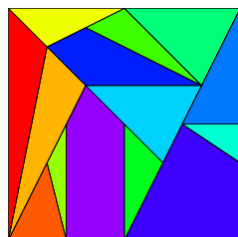


Está formado por 8 piezas:

- 1 hexágono regular
- 2 rombos
- 2 triángulos equiláteros
- 3 trapecios isósceles

---

### Stomachion



Está formado por 14 piezas:

- 1 pentágono
  - 2 cuadriláteros
  - 11 triángulos
-

Mencionada la postura metodológica adoptada junto con el contexto en que se lleva a cabo el trabajo de campo, se detalla a continuación el diseño que estructura la recolección de los datos.

### **3.5. Diseño de la investigación**

El trabajo con los 15 participantes se ubica en tres encuentros quincenales presenciales de dos horas de duración cada uno, en el horario habitual de clases de la asignatura PEII. En cada encuentro los estudiantes trabajan en diferentes situaciones. En el primero resuelven actividades propuestas por la tesista, en el segundo se focalizan en la producción grupal de actividades y en el tercero son puestos en situación de simulación de clases (o micro-clases) donde todos asumen roles de docentes y de alumnos de manera intercalada. En todos ellos se toman notas manuales de campo y se recogen registros fotográficos así como de audio. A continuación se discriminan los encuentros y los momentos que marcan las distintas dinámicas.

#### **Encuentro 1**

Se desarrolla en una de las aulas que cuenta con una pizarra y fibrones, además de mesas rectangulares con bancos alargados en donde pueden sentarse aproximadamente tres estudiantes. El encuentro consta de tres momentos:

E1.1. Se realiza una puesta en común relativa a la corriente de Educación Matemática adoptada (EMR), con previo envío a los estudiantes de una carilla como material de lectura que sintetiza las ideas centrales y los Principios de la corriente - que se transcribe a continuación-. Duración: 30 minutos.

#### **Educación Matemática Realista**

El Dr. Hans Freudenthal (1905-1990) es el fundador de esta corriente didáctica, desarrollada en Holanda desde fines de los años 1960 y conocida como *Realistic Mathematics Education* (Educación Matemática Realista - EMR). Surge como reacción al movimiento de la Matemática Moderna y al enfoque mecanicista de la enseñanza de la Matemática, generalizado en ese entonces en las escuelas holandesas.

La EMR es una teoría que se basa en las siguientes ideas centrales:

- Pensar la Matemática como una actividad humana con la finalidad de organizar el mundo que nos rodea incluyendo a la propia Matemática (matematización).
- Comprender que el desarrollo de la Matemática pasa por distintos niveles, a través de un proceso didáctico denominado reinención guiada, en un ambiente donde los contextos y modelos tienen un papel relevante, en el marco de una heterogeneidad cognitiva.
- Lograr la reinención guiada de la Matemática, como actividad de matematización, requiere de la búsqueda de contextos y situaciones de la realidad que generen la necesidad de ser organizados matemáticamente, siendo

la historia de la Matemática, las invenciones y producciones matemáticas espontáneas de los alumnos algunas de las fuentes principales.

Existen seis Principios que caracterizan la EMR, todos ellos relacionados entre sí:

- **Principio de Actividad.** La Matemática debe ser pensada como una actividad humana, accesible a todas las personas, la cual se aprende mejor haciendo. Los alumnos son tratados como participantes activos en el proceso educativo, en el cual desarrollan por sí mismos herramientas y discernimientos matemáticos. Las situaciones-problema son un claro ejemplo a partir del cual los alumnos pueden comenzar a construir modelos y herramientas que favorecen el aprendizaje, con base en un modo informal de trabajar.
- **Principio de Realidad.** La matematización (organización) de la realidad implica no solo mantener a esta disciplina conectada al mundo real o existente sino también a lo realizable, imaginable o razonable para los alumnos. La EMR propone partir de contextos ricos que demanden una organización matemática promoviendo el uso del sentido común y de sus estrategias informales, permitiéndoles a los alumnos avanzar por sí mismos hacia niveles de mayor formalización.
- **Principio de Niveles.** En el aprendizaje de la Matemática, los alumnos van pasando por distintos niveles de comprensión: situacional, referencial, general y formal. Para lograr pasar de nivel es necesario tener la capacidad de reflexionar sobre las actividades realizadas, siendo los modelos un importante recurso para salvar esta distancia. Para que los modelos logren ser puentes entre los niveles informal y formal, deben pasar de un “modelo de” una situación concreta a un “modelo para” todo tipo de otras situaciones equivalentes. La garantía de que un modelo funcione está relacionada con el hecho de que esté arraigado a una situación concreta, lo suficientemente flexible para ser utilizado en niveles más altos de actividades matemáticas.
- **Principio de Reinención guiada.** Los profesores y los programas educativos desempeñan un papel importante en los procesos de aprendizaje. Pero estos necesitan también de espacio para construir herramientas y discernimientos matemáticos por su propia cuenta. Los docentes deben proporcionar un ambiente de aprendizaje en el cual pueda surgir el proceso de construcción, previendo anticipar los desempeños de los alumnos, en pos a lograr escenarios que puedan funcionar como palancas para favorecer la comprensión estudiantil.
- **Principio de Interrelación.** La Matemática como asignatura escolar debería trascender contenidos estancos; sobran las situaciones en las que se puede utilizar una gran variedad de contenidos matemáticos para abordarlas. La interrelación se encuentra de alguna manera en la coherencia de la secuenciación de los contenidos, tanto en las diferentes unidades de la asignatura como en las distintas partes de una misma unidad.
- **Principio de Interacción.** El aprendizaje de la Matemática es una actividad social teniendo en cuenta la relación que puede establecerse entre los alumnos, por ejemplo, cuando dan a conocer sus estrategias e inventos y toman ideas para mejorar sus estrategias. Esto permite la reflexión para lograr alcanzar un nivel más elevado de comprensión. Le incumbe la enseñanza en un grupo-clase, considerando a su vez las individualidades en el aprendizaje.

E1.2. Se aplican, mediante modalidad taller, cinco actividades -se comparten sus enunciados a continuación, con aclaraciones entre paréntesis- intencionalmente diseñadas para el Nivel Secundario empleando el Tangram Chino. La primera de ellas se realiza de forma individual y las cuatro restantes, en grupos elegidos

espontáneamente por los estudiantes. Sobre el final de la serie de actividades, se recorre su vinculación con los Principios de la EMR. Duración: 80 minutos.

- Anotar las características de las figuras que lo forman.  
(Se distinguen 2 triángulos rectángulos isósceles grandes, 1 triángulo rectángulo isósceles mediano, 2 triángulos rectángulos isósceles pequeños, 1 cuadrado y 1 paralelogramo).
- Ubicar las piezas del Tangram de manera que permitan formar las siguientes figuras.  
(Se utilizan todas las piezas sin superponerlas).



(Se indaga acerca de las dificultades y las certezas en el armado, preguntando cómo comenzaron el armado, en qué parte de la figura les resultó fácil identificar las piezas y cómo les resultó el hecho de tener que usar todas las piezas).

- Construir las figuras geométricas.  
(Se utilizan todas las piezas sin superponerlas).



(Se indaga cómo resultó el armado de estas figuras, se solicita compararlo con la construcción de las figuras anteriores y se pregunta si la posibilidad de armado es única o no).

- Trabajar con cada pieza que forma el Tangram.  
(Se indaga cuántos triángulos pequeños se necesitan para cubrir<sup>4</sup> el cuadrado, el triángulo mediano, el paralelogramo y uno de los triángulos grandes).
- Relacionar el área entre:
  - \* triángulo pequeño – triángulo mediano
  - \* triángulo mediano – triángulo grande
  - \* triángulo pequeño – triángulo grande
  - \* triángulo pequeño – cuadrado
  - \* triángulo pequeño – paralelogramo
  - \* cuadrado – paralelogramo
  - \* cuadrado – triángulo mediano
  - \* triángulo pequeño – figura completa

E1.3. Los participantes se distribuyen en cinco grupos constituidos por tres estudiantes y a cada grupo, le toca al azar dos tipos de Tangrams (hay 10 tipos, además del Chino, en el gabinete de recursos didácticos del PM). Duración: 10

<sup>4</sup> En el sentido de cubrimiento matemático.

minutos. Los grupos y los Tangrams asignados a cada uno de ellos quedan determinados de la siguiente manera:

Grupo 1 (G1). Estudiantes A1, A5 y A12. Tangrams Cardiotangram y Brügger.

Grupo 2 (G2). Estudiantes A2, A4 y A8. Tangrams Pentagonal y Lloyd.

Grupo 3 (G3). Estudiantes A3, A9 y A14. Tangrams Pitagórico y Stomachion.

Grupo 4 (G4). Estudiantes A6, A10 y A13. Tangrams Fletcher y Ovoide.

Grupo 5 (G5). Estudiantes A7, A11 y A15. Tangrams Triangular y Hexagonal.

Finalizado el primer encuentro, los estudiantes llevan los Tangrams a sus hogares para explorarlos.

## **Encuentro 2**

Se focaliza en el planeamiento y diseño de las actividades que los grupos desarrollarían en un par de clases con alumnos de la escuela secundaria. Utilizan, para ello, los dos tipos de Tangrams que les corresponden por grupo, designados en el E1.3. Este segundo encuentro se desarrolla en uno de los laboratorios de informática de uso habitual de la materia, el cual cuenta con una computadora por estudiante y acceso a Internet. Se trabaja hacia el interior de los grupos, con intercambios entre sus miembros en base a dos consignas dadas de forma oral.

E2.1. Cada grupo dispone del Diseño Curricular del MESF (2014) -entre los materiales básicos de la actividad curricular- y de la incipiente exploración de cada tipo de Tangram (en el E1.3 cada estudiante se llevó consigo un ejemplar de cada Tangram de su grupo para explorarlo). Se pide que se expliciten contenidos del Nivel Secundario que identifican como factibles de abordarse con los Tangrams que cuentan, acompañando con un breve ejemplo. Duración: 45 minutos.

E2.2. A partir del insumo generado de la consigna anterior, se propone elaborar actividades específicas que integren la propuesta de los dos tipos de Tangrams, de manera de potenciar su uso. Deben entregar la propuesta por escrito y seleccionar algunas actividades de uno de los tipos de Tangrams para simular una parte de una clase en el tercer encuentro. Duración: 75 minutos.

## **Encuentro 3**

Se lleva a cabo en el salón donde se había desarrollado el primer encuentro, por contar con el espacio y mobiliario necesarios para las implementaciones en aula. Se distinguen dos momentos:

E3.1. Cada grupo propone resolver las actividades elegidas al resto de los grupos, mediante una simulación de clase donde intercaladamente algunos son docentes y otros alumnos. Duración: 20 minutos por grupo.

E3.2. Responden de manera individual un cuestionario abierto, con la intención de conocer su trabajo con este recurso antes de participar en esta experiencia y luego de la misma. Duración: 20 minutos.

### **3.6. Técnicas de recolección de la información**

Entre las técnicas de recogida de información empleadas se denotan algunas específicas del tipo de actividad de algún encuentro y otras que se reiteran en todo el trabajo de campo. Básicamente son tres y se las describe a continuación.

#### **Observaciones de clases**

Según Hernández et al. (2010), la observación no puede omitirse de los estudios cualitativos por su carácter formativo. Patton (2002; citado en Hernández et al., 2010) marca como uno de los propósitos de esta técnica “describir contextos, las actividades empleadas, las personas que las llevan a cabo y el significado para ellas” (p.412). En concordancia con estas ideas, se emplea la observación en los tres encuentros que conforman el trabajo de campo, registrada por grabaciones de audio que se dan en el grupo-clase y en los trabajos internos de los sub-grupos conformados, notas de campo y registro fotográfico de las producciones de los estudiantes.

El nivel de participación de la tesista es activo según los parámetros sobre el papel del observador establecido por Hernández et al. (2010), por ser la coordinadora de las actividades propuestas. Al mismo tiempo, no se mezcla con los participantes, al tener diferentes funciones y tareas. Los autores consideran a este tipo de participación resulta favorable para el entendimiento profundo de lo que ocurre en esas situaciones.

Las transcripciones de los audios se distinguen por encuentro y por acto de habla, tanto de cada participante como de la tesista. Además, durante los momentos de trabajo interno de los grupos formados en el segundo encuentro, se registran las conversaciones simultáneas y se indica el número de grupo que conformaban.

#### **Análisis documental**

Las planificaciones de los estudiantes generadas durante el E2.2 e implementadas en clases simuladas en el E3.1 constituyen una base importante de análisis, en cuanto se

trata de una producción propia donde se plasman las actividades y las posibles interacciones que se prevén realizar con cada Tangram.

Estas propuestas pueden clasificarse dentro de *documentos grupales* según Hernández et al. (2010), por tratarse de “documentos generados con cierta finalidad por un grupo de personas” (p.433).

La elaboración de este tipo de documentos no es ajena a los estudiantes, por estar bajo el contexto de la asignatura donde anteriormente han planificado e implementado secuencias con contenidos específicos para el nivel secundario. Acerca de las partes de la planificación, en un principio no se establece ningún parámetro de formato ni de contenido peculiar para esta instancia, siendo análogo a lo establecido en la asignatura en cuanto a la explicitación de las actividades así como de las posibles interacciones entre docentes y alumnos.

En esta producción grupal, Hernández et al. (2010) mencionan la necesidad de efectuar intercambios individuales y focalizan en este caso en la relación y experiencia con el material producido.

### **Cuestionario**

El cuestionario abierto es la técnica adoptada para culminar el trabajo de campo. En esta instancia (último momento del tercer encuentro -E3.2-) se pretende obtener información sobre la experiencia generada a partir de los sucesivos encuentros y previa a este trabajo. Como definen Rodríguez et al. (1999), el cuestionario es un tipo de encuesta “que supone un interrogatorio en el que las preguntas establecidas de antemano (...) se formulan con los mismos términos” (p.186). En particular se establece realizarlo en forma simultánea e individual a los 15 estudiantes participantes en 30 minutos sobre el E3.2. Cada uno recibe una copia impresa con las siguientes seis preguntas:

1. ¿Qué conocías sobre el Tangram antes de trabajarlo en esta materia? ¿En qué instancias lo habías usado? ¿Qué habías hecho con él?
2. ¿Cómo fuiste pensando las actividades: te valiste del Tangram entregado, buscaste otros materiales, pusiste a personas cercanas a explorarlo, repasaste contenidos matemáticos, etc.?
3. ¿Qué cosas te costaron?
4. ¿Qué te sorprendió?
5. ¿Cómo te fuiste dando cuenta cuáles eran las actividades más potentes para realizar con el Tangram designado?
6. ¿Fue significativo trabajar en grupo? ¿Por qué?

En cuanto a la cantidad de preguntas formuladas, está dentro de lo que se reconoce como usual (Rodríguez et al., 1999) en el tiempo destinado. El tipo de preguntas puede

clasificarse como abiertas, con el objetivo de obtenerlas mediante las propias palabras del estudiante y no limitar su respuesta.

El material que se recoge de la aplicación de estas tres técnicas conforma el corpus de análisis de esta tesis. Según Gustafson (1998; citado en Cáceres, 2003) es importante disponer de la mayor cantidad de corpus, de manera de generar un alto nivel de fiabilidad y credibilidad del tema a tratar.

### **3.7. Procesamiento de la información**

La técnica de procesamiento empleada es la de análisis de contenido, que permite estudiar la realidad social de un grupo determinado a partir de las observaciones en contexto y el análisis de documentos creados por los propios participantes (López-Aranguren, 1986; citado en Gómez, 1999).

Como sostiene Landry (1998; citado en Gómez, 1999), no es una técnica que se aplica de la misma manera en todas las investigaciones porque no solo depende del tipo de recolección efectuado sino del análisis e interpretaciones que puedan llevarse a cabo.

El material al cual se le aplica esta técnica es organizado en formatos similares de manera que favorezca su lectura y se realicen las intervenciones e interpretaciones necesarias (Cáceres, 2003). En la transcripción de las observaciones de clases, específicamente de los audios que se obtienen de los tres encuentros explicitados en el apartado 3.5, se emplean códigos para distinguir entre los actos de habla de cada encuentro, los efectuados en las interacciones del grupo-clase y al interior de cada grupo de trabajo.

Como se muestra en el siguiente extracto, cada acto de habla en el grupo-clase (en el ejemplo, de 11 a 14) es precedido por el número del encuentro en que se realiza (1, 2 o 3) y sucedido por la persona que lo efectúa. A su vez, los participantes se nombran con la letra A (A1 a A15 como se detalla en el apartado 3.2) y la tesista con la letra T. Las respuestas en simultáneo se mencionan con A (v).

1-11-T: ¿Qué usaron? ¿Cuáles usaron? ¿Cómo se llamaban? Porque hay distintos tipos.

1-12-A (v): El que tiene triángulo pequeño, el paralelogramo.

1-13-A9: El que tiene un paralelogramo.

1-14-A6: El que tiene el cuadrado (*se refiere a la figura que forma*).

Para la distinción de las conversaciones llevadas al interior de cada grupo de trabajo (G1 a G5) se necesita agregar dos tipos de numeración a la estructura anterior ubicados entre el número de encuentro y la de los actos de habla (31 y 1 en el ejemplo).

2-31-1-3-A5: Del Cardiotangram pudimos hacer...  
2-31-1-4-A1: La circunferencia inscrita.  
2-31-1-5-A5: Tres temas, podemos decir.  
2-31-1-6-A1: Después de inscrita formalizamos lo que era circunferencia y círculo. Y después como queríamos analizar las propiedades del círculo, con lo del punto medio para ver el diámetro, después el radio y después agarrar esta pieza y moverla y ver que el radio equidista de todos los puntos.

De este modo, el segundo número del código (31) corresponde al último acto de habla del grupo-clase previo al trabajo en el interior del grupo, el cual queda fijo hasta que se vuelve al grupo-clase. El tercer número (1) corresponde al grupo en el cual se desarrolla ese diálogo (en este caso G1).

Al contar con el material organizado, se puede distinguir el siguiente paso mencionado por Cáceres (2003) para llevar adelante la metodología de análisis de contenido, que consiste en la definición de las unidades de análisis. Hernández (1994; citado en Cáceres, 2003) reconoce que “las unidades de análisis representan los segmentos del contenido de los mensajes que son caracterizados e individualizados para posteriormente categorizarlos, relacionarlos y establecer inferencias a partir de ellos” (p.61).

El material recogido en el trabajo de campo es organizado a partir de las cuatro actividades realizadas por los estudiantes avanzados con roles distintos en cada una de ellas (en posición de estudiantes E1.2, en elaboración de propuestas con sus pares E2.1 y E2.2, en las micro-clases E3.1 y en el trabajo de reflexión de la experiencia E3.2). En función de las mimas se delimitan unidades de análisis temporales y de base gramatical, según los tipos de unidades de análisis reconocidas por Cáceres (2003). Son consideradas temporales por estar compuestas por acciones llevadas a cabo en un mismo encuentro y en bloques de minutos seleccionados. A su vez, las gramaticales se encuentran delimitadas por frases, párrafos y temas que se desarrollan en el transcurso de la actividad. Como sostiene el autor, el preanálisis de las unidades conformadas constituyen los indicadores que dieron lugar al desarrollo de las categorías.

### **3.8. Sistema de categorías de análisis**

Para organizar la información obtenida, Pinto y Grawitz (1967; citado en Gómez, 1999) sustentan que las categorías deben originarse del propio documento y del conocimiento que se tenga del contexto del cual provienen. Bajo estas ideas, se definen dos niveles de categorías. Aquellas de nivel 1, denominadas Dimensiones, que tienen que ver con los cuatro roles que asumen los estudiantes en este trabajo: la posición de ellos como

estudiantes (E1.2), en el trabajo con pares en la elaboración de propuestas (E2.1 y E2.2), como futuros docentes en el desarrollo de las simulaciones de clases (E3.1) y en un proceso de metacognición de lo vivido (E3.2). El objetivo de este primer nivel de categorías es profundizar en el uso que realizan del Tangram los estudiantes avanzados en las diversas situaciones presentadas. De esta forma se tiene en cuenta lo que será su tarea como futuros profesores y en simultaneidad como estudiantes del PM. En lo que sigue se las detalla.

### **Dimensión 1: Resolución de actividades**

Tiene por finalidad establecer algún tipo de diagnóstico del grupo de estudiantes con relación al uso del Tangram Chino. Se considera necesario poner al estudiante en esta situación en la que, a partir de experimentar ese uso con un tipo particular de Tangram, podrá adentrarse al diseño y posterior implementación con otros tipos (Tabla 3.2). A su vez, se recuperan contenidos abordados en asignaturas correlativas del mismo eje integrador (Tabla 3.1), como es PEI, y se refuerza la metodología de taller implementada en PEII en donde se lleva a cabo este trabajo de campo.

### **Dimensión 2: Diseño de actividades**

Interesa conocer el abordaje que realiza cada uno de los cinco grupos en el diseño de las dos propuestas correspondientes a los Tangrams asignados. Se profundiza el análisis en cada grupo de estudiantes con las siguientes categorías (de nivel 2):

- **Contenidos/ejes.** Posibles temas o ejes seleccionados del Diseño Curricular (MESF, 2014) del Nivel Secundario viables para diseñar actividades con los Tangrams asignados.
- **Pasos/materiales.** Reconocimiento de las diferentes instancias llevadas a cabo en el proceso de elaboración de las propuestas junto con los materiales disponibles y seleccionados.
- **Consultas/comentarios.** Aspectos destacados en este proceso de elaboración de propuestas con los Tangrams involucrados.

### **Dimensión 3: Actividades propuestas y micro-clases**

En cada una de las 10 propuestas diseñadas se reconocen diferentes aspectos que se subdividen en las siguientes categorías de nivel 2. A su vez, en cinco de ellas (una por grupo) se refuerza el despliegue con lo acontecido en la simulación de clase.

- **Contenidos/ejes.** Los temas y ejes pertenecientes al Diseño Curricular (MESF, 2014) que se reconocen explícita o implícitamente en las actividades que forman parte de la propuesta.
- **Principios de la EMR.** Presencia y permanencia de las ideas centrales y los fundamentos que integran el encuadre conceptual de referencia de la presente tesis.
- **Tipos de actividad.** Acciones puestas en juego en las distintas propuestas y nivel de desarrollo de las mismas.

#### **Dimensión 4: Reflexión sobre la experiencia**

A partir de las respuestas individuales de los estudiantes, se profundiza en el reconocimiento y valoración de las actividades realizadas en los diferentes encuentros. Se establecen relaciones con experiencias previas y actuales en el uso del Tangram.

- **A priori.** Las experiencias con usos de Tangrams, previo al trabajo de los tres encuentros en la asignatura PEII.
- **In situ.** Reflexiones sobre el proceso de elaboración de actividades en PEII.
- **A posteriori.** Aspectos destacados de la experiencia transcurrida durante el desarrollo de los tres encuentros.

En el siguiente capítulo se pondrá en evidencia la estructura aquí presentada en lo que respecta al análisis de la información recogida.

## Capítulo 4

### Resultados

---

Este capítulo está conformado por tres apartados, conforme a los tres encuentros acontecidos durante la experiencia. Dos de ellos toman los distintos tipos de Tangrams involucrados; en particular, el primero se ocupa específicamente del Tangram Chino y el segundo, de los 10 Tangrams restantes. Para cada Tangram se muestra la actividad diseñada y se intercalan interacciones producidas en el grupo-clase o las planificadas por cada grupo de estudiantes. El tercer apartado trata, de modo integrador, algunas consideraciones que por escrito hacen los participantes.

#### 4.1. Interacciones iniciales en clase

Como se anunciara en el apartado 3.5, este Tangram (el más popularmente conocido) se emplea a modo introductorio en E1.2 con actividades diseñadas por la tesista en coordinación con la cátedra. En este marco del trabajo con los estudiantes, se destacan y analizan extractos de las interacciones que corresponden a los diferentes momentos establecidos en la planificación de E1.2. Por último, una vez concluida la experiencia con el Tangram Chino, se hace un recorrido de los bloques temáticos y la presencia de los Principios de la EMR, que se desprenden de la secuencia de actividades.

#### Tangram Chino

Previo al comienzo de las actividades planificadas para el E1.2, se realiza en E1.1 una revisión de los Principios de la EMR y se indaga sobre el conocimiento que tienen los estudiantes sobre los Tangrams:

- 1-7-T: [...] la idea es ahora trabajar con un tipo de recurso, que se llama Tangram. ¿No sé si lo conocen?
- 1-8-A (v): Sí.
- 1-9-T: ¿Qué conocen?
- 1-10-A (v): Los que usamos en PEI/En PEI/En PEI **lo usamos** (*PEI remite a Práctica de la Enseñanza I*).
- 1-11-T: ¿Qué usaron? ¿Cuáles usaron? ¿Cómo se llamaban? Porque hay distintos tipos.
- 1-12-A (v): El que tiene triángulo pequeño, el paralelogramo.
- 1-13-A9: El que tiene un paralelogramo.
- 1-14-A6: El que tiene el cuadrado (*se refiere a la figura que forma*).
- 1-15-T: Ahí está. ¿Saben cómo se llama?
- 1-16-A6: No (*responden dos estudiantes*).
- 1-17-T: Tangram Chino se llama ese.
- 1-18-A (v): Ah sí.
- 1-19-T: Está bien. O sea que lo han usado y ¿qué han hecho con esos Tangrams?
- 1-20-A (v): Formas, figuras.

1-22-A1: Y también medíamos el área en base al triángulo, creo que era el triángulo chiquito, que era la unidad y entonces medías cuánto entraba para ver el área.

1-23-A3: Claro.

1-25-A9: Y siempre explicar sobre **cómo enseñar y aprender**.

1-26-A13: Claro, era como una clase en donde trabajábamos eso.

1-27-T: Perfecto, o sea, ya vieron como una introducción de cómo a partir de eso, después a lo mejor pueden continuar con otra cosa o al menos con el cálculo de área. La idea es un poco eso, hacer esas actividades, y no me quiero adelantar tanto, pero después de pensar en base a esta corriente cómo podemos seguir en alguna secuencia didáctica que cada uno arme. Ahora, ¿es el único que vieron o vieron otros más?

1-28-A12: Yo vi uno que tenía la forma de huevo.

1-30-A4: Nos dieron una fotocopia con el dibujito y el nombre de cada uno.

1-31-A (v): Así es el único que trabajamos.

Se evidencia que los estudiantes han trabajado con un tipo particular de Tangram, llamado Tangram Chino, el cual es el mayormente conocido así como disponible comercialmente. A este trabajo lo han realizado en una clase de la asignatura PEI, correspondiente al primer año del PM, donde recuerdan en un primer momento la figura de la cual surge el Tangram Chino y los nombres de algunas de sus piezas. En relación con las actividades realizadas, hacen referencia a la manipulación de piezas y a un contenido particular como el cálculo de área a partir de una unidad no convencional. Se destaca, además, su uso en la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática. Sobre otros tipos de Tangrams mencionan haberlos visto representados gráficamente en formato papel y un estudiante (A12) nombra aparte al Ovoide.

Las actividades diseñadas para el E1.2 están organizadas mediante cinco consignas. Las primeras cuatro son dadas oralmente (con soporte adicional de imágenes impresas en formato papel la segunda y tercera consignas) y la quinta, escrita en el pizarrón. En las actividades propuestas se marcan momentos de producción individual, grupal y del grupo-clase. Los registros tomados de la primera, cuarta y quinta consignas son realizados por todos los estudiantes por pedido explícito de la tesista. El encuentro se lleva a cabo en el aula habitual de clases de PEII, la cual tiene pizarra doble y bancos grupales, con una disposición tradicional. Cada estudiante cuenta con un ejemplar del Tangram Chino, perteneciente al gabinete de recursos didácticos del PM, entregado antes de comenzar con las actividades. Se propone la primera consigna:

- *Anotar las características de las figuras que lo forman.*

La resolución se lleva a cabo con los estudiantes ubicados de forma autónoma en los distintos bancos del salón, lo cual predispone al diálogo y a la posibilidad de compartir las producciones de la consigna. Durante los ocho minutos que dura la resolución, se observa desorientación en el registro de las características de las piezas que forman el

Tangram Chino, principalmente en cómo distinguir cada una. Se proponen opciones como: color, nombre, características particulares de cada pieza, o alguna combinación entre ellas.

- 1-35-A6: Eliana.
- 1-36-T: Sí.
- 1-37-A6: **¿Qué ponemos?** ¿Triángulo celeste?
- 1-38-A3: Sí yo puse así.
- 1-39-T: ¿Qué cosa?
- 1-40-A6: Triángulo celeste, triángulo violeta, así.
- 1-41-T: Las características.
- 1-42-A6: Claro, pero para nombrarlos.
- 1-43-T: Ah bueno, total después lo formalizamos en el pizarrón. Ustedes todo lo que puedan distinguir de eso, lo que puedan anotar. Después vemos si acá hacemos alguna clasificación o algo.

La utilización del color de la pieza, en este caso particular, provoca unicidad en la notación. Se debe tener presente que 15 Tangrams Chinos con los que cuenta el gabinete del PM tienen pintadas del mismo color las piezas homólogas. Si se utilizan las características y el nombre de cada una, se necesita de algún adjetivo para tener unicidad en la nomenclatura. Esto último resulta aplicable a cualquier Tangram, independientemente del color.

- 1-50-T: ¿Tienen dudas?
- 1-51-A4: Es que no sabemos **cómo escribirlo**.
- 1-52-T: Un cuadrado.
- 1-53-A4: Ah (*risas*).
- 1-54-A6: ¿Ponemos las características de un cuadrado?
- 1-55-T: No, no, ya lo saben (*risas*). Igual ahora comparamos y cualquier cosa las decimos.

En las resoluciones entregadas, el orden de la información presentada fue por agrupamientos, según la clasificación decidida por cada uno, con un predominio de formato coloquial. Se muestran a continuación ejemplos de dos resoluciones que seleccionan distinto tipo de clasificación.

	cant. lados	Nombre Figura	Tamaño relativo	Otras propiedades
similares	3	Triángulo rectángulo	Grande	isósceles
	3	Triángulo rectángulo	Grande	isósceles
	3	Triángulo rectángulo	Mediano	isósceles
	4	cuadrado	Mediano	
similares	4	Paralelogramo	Mediano	
	3	Triángulo rectángulo	Chico	isósceles
	3	Triángulo rectángulo	Chico	isósceles

Figura 4.1. Resolución de la primera consigna por parte de A5

El tangram está compuesto por 7 figuras de distinto color:  
 • Cinco triángulos rectángulos e isósceles: Dos grandes iguales, uno mediano y dos más pequeños e iguales.  
 • Un cuadrado y un paralelogramo.

Figura 4.2. Resolución de la primera consigna por parte de A9

Por un lado, en la Fig. 4.1, luego de la clasificación por *color*, se mencionan características de las siete piezas (tales como cantidad de lados, nombre de las figuras geométricas, tamaño relativo y clasificación según sus lados) y se destaca en el cuadro una similitud entre dos pares de figuras congruentes. En la Fig. 4.2, por su parte, el estudiante clasifica por *figura geométrica* y *tamaño*, y se distinguen dos niveles. En el primer nivel se establecen tres grupos (triángulos, cuadrado y paralelogramo) de acuerdo a las *figuras geométricas* que lo forman. En un segundo nivel, a uno de los grupos lo subdivide en tres, con relación al *tamaño* (pequeño, mediano y grande) de las piezas.

El resto de las resoluciones presentan clasificaciones similares a las exhibidas en las Fig. 4.1 y 4.2. La Tabla 4.1 muestra las clasificaciones efectuadas por los estudiantes (mediante una cruz).

Tabla 4.1. Clasificaciones de las piezas del Tangram Chino por parte de los estudiantes

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15
<b>Color</b>	X			X	X	X				X		X	X		
<b>Figura geométrica</b>	X	X	X	X		X	X	X	X		X	X		X	X
<b>Tamaño</b>	X	X	X	X		X	X	X	X		X	X		X	X

En general, todos los estudiantes distinguen tres tipos de caminos (*color* y/o *figura-tamaño*). En efecto, tres estudiantes hacen referencia solo al *color* de las piezas, ocho utilizan solo la *figura geométrica* y el *tamaño*, y cuatro toman las dos distinciones simultáneamente.

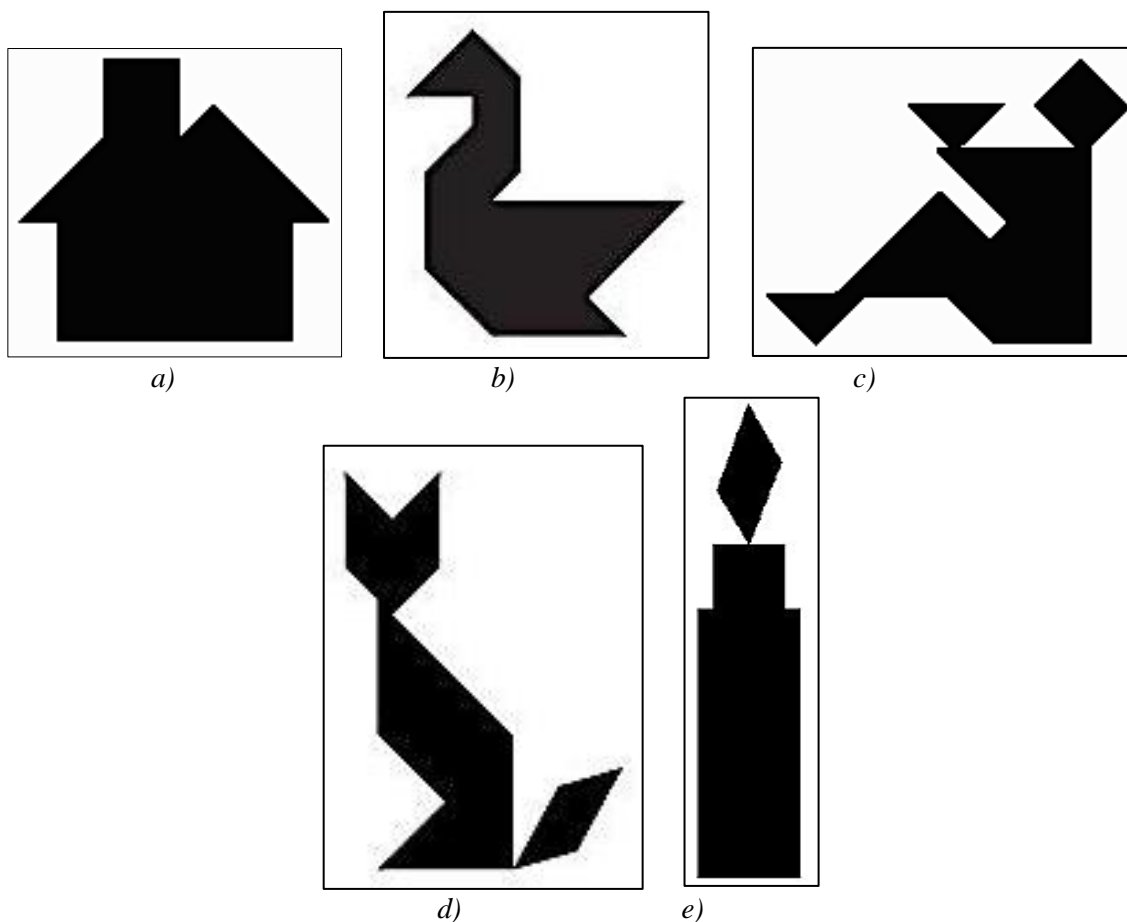
Luego de las resoluciones efectuadas se realiza una puesta en común de forma oral acordando una manera de registro. Se identifican las piezas cuadrado y paralelogramo como los únicos dos cuadriláteros, y los restantes cinco triángulos semejantes entre sí, con un adjetivo que da alusión a la comparación de tamaños entre ellos:

*Distinguimos: 2 triángulos rectángulos isósceles grandes, 1 triángulo rectángulo isósceles mediano, 2 rectángulos isósceles, 1 cuadrado, 1 paralelogramo.*

A continuación la tesista comenta brevemente la historia de este Tangram, acorde a lo planificado (apartado 3.5) y se anuncia la segunda consigna:

- ***Ubicar las piezas del Tangram de manera que permitan formar las siguientes figuras (utilizar todas las piezas sin superponerlas).***

A los estudiantes dispuestos en un mismo banco que conforman grupos se les entrega una imagen de las que se encuentran en la Fig. 4.3 y se propone un intercambio de las mismas, con otros grupos a medida que las vayan obteniendo.



*Figura 4.3. Imágenes para armar con el Tangram Chino: a) casa; b) pato; c) chino sentado; d) gato; e) vela*

Se destinan 12 minutos para la resolución de la actividad y se posibilita el armado de al menos una de las imágenes presentadas en la Fig. 4.3. Cada grupo comienza con una figura distinta y continúa con aquella que algún otro grupo le facilita luego de haber logrado la imagen. No existe un orden predeterminado, en cuanto a qué imagen debe estar antes o después en cada grupo. A modo de ejemplo se presenta la resolución del grupo conformado por A1 y A12 registrada por los propios estudiantes (Fig. 4.4).

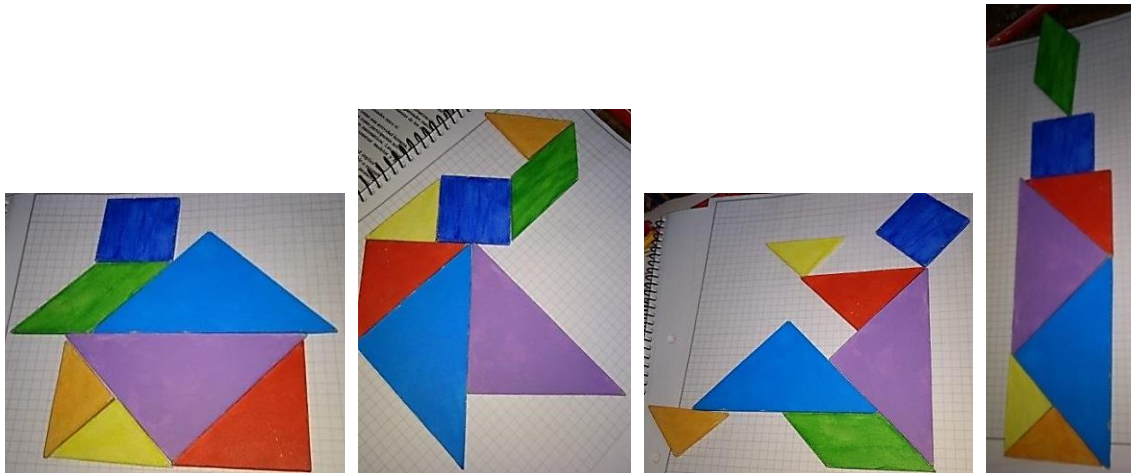


Figura 4.4. Resolución de la segunda consigna por parte de A1 y A12

Durante el proceso de resolución de la segunda consigna, se observa que el tiempo destinado al armado de cada figura depende de la figura que le toca armar en ese momento. Como cada una requiere diferente tiempo de armado, no todos los grupos han construido la misma cantidad de figuras.

Con el propósito de obtener sugerencias para la construcción de figuras por parte de los estudiantes, se propone realizar una puesta en común en el grupo-clase sobre la resolución de la segunda consigna a partir de preguntas disparadoras:

*Comentar las dificultades y las certezas en el armado. Preguntas guía: ¿cómo comenzaron el armado?, ¿en qué parte de la figura les resultó fácil identificar las piezas?, ¿cómo les resultó el hecho de tener que usar todas las piezas?*

Del intercambio grupal se destacan cuestiones que tienen que ver con la *proporción* y *estructura* de la imagen y la *utilización de todas las piezas* del Tangram en el armado.

En el reconocimiento de la construcción correcta de una figura, se ponen en juego las *proporciones* de la imagen con la figura armada. Se destaca la existencia de imágenes que pueden construirse cumpliendo con el objeto que representan, pero no con las proporciones de la misma, como es el caso de la Fig. 4.3 e). Con las mismas piezas que forman el cuerpo de la vela (rectángulo mayor), se pueden construir al menos dos rectángulos con distintas dimensiones, manteniendo el objeto “vela” conservado, pero no así las proporciones con la silueta dada.

1-105-T: [...] Primero, ¿cómo anduvieron con el armado de la figura que les tocó?

1-106-A6: Nos tocó la más difícil.

1-107-T: ¿Todos las armaron así de entrada? ¿Hubo problemas, no hubo problemas? ¿Qué les tocó primero a ustedes? (*pregunta dirigida a estudiantes que trabajaron con la misma imagen*).

1-108-A1: Una vela, y era como más larga la parte de abajo. Esa (*se refiere a la figura de la vela mostrada por otros estudiantes*). Nosotras **habíamos hecho el rectángulo de abajo más ancho y más corto**.

1-109-T: Como más peticito.

1-110-A11: Claro.  
 1-111-A6: ¿Cómo lo hicieron?  
 1-112-A (v): Ah...  
 1-113-T: ¿La tienen ahí? (*hace referencia al armado correcto de la figura de la vela*). Los chicos también creo que la tienen armada.  
 1-114-A7: Nosotros la tenemos armada.  
 1-115-A (v): Ah...  
 1-116-T: Fíjense cómo está dispuesto. Bueno las chicas qué habían hecho, habían hecho la base, digamos como más petisa y más gordita. Pero si uno mira la figura es más alargada. ¿Era una opción? Sí, era una opción. Pero si yo me quiero acercar a la figura que les había mostrado no era la correcta.  
 1-117-A1: Era así la base anterior (*se muestra el armado de la vela que no correspondería*).  
 1-118-A (v): Claro.  
 1-119-T: Usando las mismas piezas [...].

Las *estructuras* de las imágenes que presentan los estudiantes tienen algún nivel de dificultad. Por ejemplo, la Fig. 4.3 a) es señalada por algunos estudiantes que expresan encontrar cierta complejidad en el armado de la figura al no distinguir las subdivisiones de los tans que se utilizan en cada sector.

1-120-A8: A nosotras el gato.  
 1-121-T: Pero la casa, ¿a quién más le había tocado la casa?  
 1-122-A (v): A nosotras.  
 1-123-T: A ustedes. ¿Cómo resultó esa casa?  
 1-124-A6: Más difícil.  
 1-125-A (v): Mas fácil a nosotras/Fácil.  
 1-126-T: Fácil. ¿A ustedes chicas?  
 1-127-A6: No, no pudimos (*risas*).  
 1-128-T: No importa, no importa. ¿Y en dónde habrá estado la dificultad si es que encontraron alguna?  
 1-129-A4: Acá.  
 1-130-A6: No sabemos.  
 1-131-T: ¿En dónde, ahí?  
 1-132-A4: Por ahí en **distinguir en lo que había que usar**.  
 1-133-A6: En los techos, para que quede así, cruzado.

Por otro lado, todos coinciden en que aquellas figuras en donde se pueden distinguir algunas piezas que forman ciertos sectores, permiten mayor rapidez en la construcción. En la Fig. 4.3 c) la ubicación de varias piezas reduce las posibilidades de intentos con el resto de las piezas para completar la imagen.

1-134-T: ¿Qué otra figura había? Ahora vamos a comparar distintas figuras (*bullicio fuerte*). El chinito sentado, ¿cómo resultó? ¿A quién le había tocado?  
 1-135-A (v): A nosotras...  
 1-136-T: ¿Cómo resultó? ¿Fue fácil, difícil?  
 1-137-A (v): Bien/Fue fácil/Fue más fácil.  
 1-138-T: Fue más fácil. ¿Fue fácil de identificar qué pieza iba en cada parte? Por ejemplo en la cabeza, va esto, en esto va esto.  
 1-139-A11: Algunas sí se veían, pero después en la parte del cuerpo a veces tenías que intercalar.  
 1-140-T: Ah... Por ahí en las figuras que eran más...  
 1-141-A1: Es como (...) en la figura sobre el contorno es más difícil, porque un rectángulo lo podés formar distinto, como nos pasó a nosotras con la vela, **cuando es todo separado es fácil porque son pocas piezas**.

El hecho de explicitar en la consigna la *utilización de todas las piezas* del Tangram, y que durante la construcción sobren piezas, es un indicador de que la figura no es correcta. Ocurre en algunos casos que se puede generar (depende la imagen) una figura semejante a la original utilizando menos piezas, con lo cual no sería la imagen correcta porque no se cumple con uno de los puntos de la consigna, acorde a las demostraciones originales chinas. Es decir, no solo es un pedido de la consigna en el marco de esta tesis, sino que se encuentra en la génesis o nacimiento del juego (apartado 1.3).

1-142-T: De las figuras que vimos, que eran el gato, la vela, el chino, la casa y el cisne, o un pato, no sé. ¿Cuál les parece que sale más fácil?

1-143-A (v): A nosotras la casa/A nosotras la vela nos salió rápido.

1-144-A11: El gato.

1-145-T: ¿Podemos sacar alguna conclusión? ¿Y decir será fácil por tal cosa?

1-146-A11: Porque tienen piezas con puntas unidas.

1-147-T: A lo mejor, el hecho de que las piezas sean así, que la figura sea más alargada, que pueda ver las formas de las piezas, por ahí me posibilita darme cuenta rápido con qué piezas formarla. Y, como las chicas acá decían, o ahí también, en las figuras más compactas o más cerradas, como hay varias formas de llegar al mismo cubrimiento de esa parte, se puede dificultar.

1-148-A3: Por ejemplo en el chinito, te das cuenta que acá iba el cuadrado, acá el triángulo chiquito, entonces te quedaban menos piezas para usar.

1-149-T: Exacto. El hecho de tener que usar todas las piezas, ¿se dificulta?, ¿no se dificulta?, ¿lo podrían haber armado con menos piezas a lo mejor?

1-150-A (v): Puede ser/Para mí no. No sé.

1-151-A6: Y pónelo, yo acá esto (*señalando alguna parte de la figura que formaron*).

1-152-A1: Capaz que con tanto detalle no.

1-153-A6: Capaz que esto lo podría hacer.

1-154-A5: Cambiaba la figura.

1-155-T: Cambiaba un poco la figura, pero se podría haber armado aproximadamente.

1-156-A6: Pero era lo mismo y le sacás un triángulo.

1-157-A4: Y en la casa cuando queríamos armar el cuadrado para ahí.

1-158-A6: También, sobraba.

1-159-T: ¿Dificulta el hecho de que haya que usar todas las piezas? ¿O no?

1-160-A6: Sí.

1-161-A4: Para mí sí.

1-162-A6: Para mí también.

1-163-T: Bueno.

1-164-A6: Porque **a nosotras nos quedaba mal y nos sobraban piezas** (*risas*).

1-165-T: ¿Les sobraban piezas? Y después se daban cuenta que había que usar esas y había que reubicar todas.

1-166-A6: Sí.

Se continúa con la construcción de tres nuevas figuras que forman parte de la tercera consigna. A diferencia de las imágenes anteriores, estas son pegadas en el pizarrón para ser visualizadas por todos los estudiantes del grupo-clase en simultáneo. El tiempo destinado para el desarrollo de esta actividad es de 16 minutos. Durante ese lapso de tiempo la tesista realiza intervenciones a los estudiantes que se encuentran trabajando en conjunto.

- **Construir las figuras geométricas (utilizar todas las piezas del Tangram sin superponerlas).**

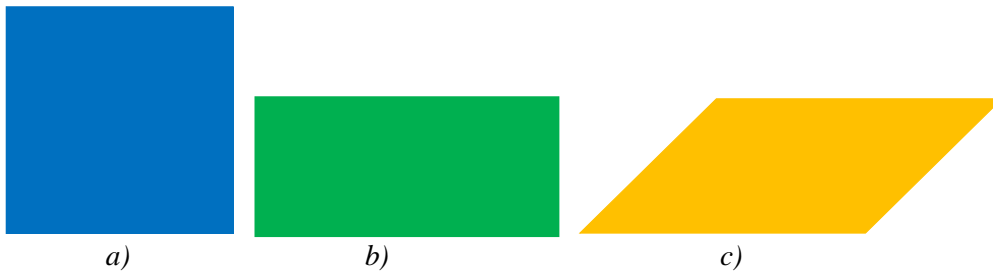


Figura 4.5. Imágenes para armar con el Tangram Chino: a) cuadrado; b) rectángulo; c) paralelogramo

Observa, por un lado, desconfianza en la figura construida, donde las propiedades de las piezas que la conforman pueden ser un vehículo para la fundamentación del armado. Por otro lado, amerita trabajar la adopción de un tipo de registro para poder armar y desarmar alguna figura sin necesidad de recordar la ubicación de las piezas.

- 1-181-T: ¿Y cómo va saliendo?
- 1-182-A6: Y antes nos salió este. **Ahora no nos sale.**
- 1-183-A13: No sé qué estoy intentando, pero algo estoy intentando, algo (*risas*).
- 1-184-A7: ¿Se puede formar un rectángulo usando todas?
- 1-185-T: Todas las piezas (*risas*).
- 1-186-A5: **¿Ahí está bien formado?**
- 1-187-T: Sí.
- 1-188-A5: Porque queda como...

Las resoluciones son registradas en formato papel (a partir de un bosquejo de la ubicación de las piezas) y fotográfico. La Fig. 4.6 muestra la construcción de A5, donde las imágenes a) y c) son similares a las obtenidas por el resto de los estudiantes.

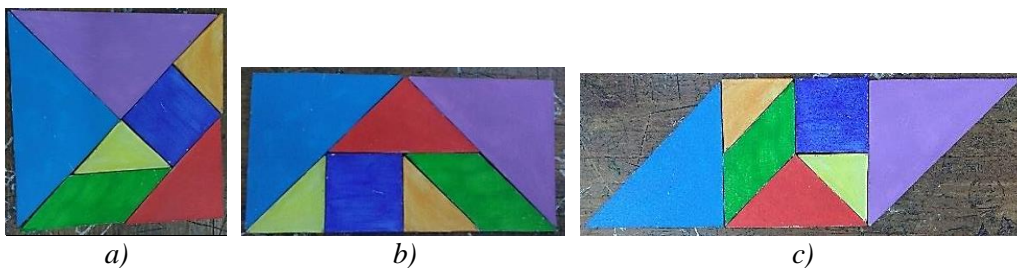


Figura 4.6. Resolución de la tercera consigna por parte de A5

Al igual que las consignas anteriores, luego de la resolución de la actividad se realiza una puesta en común en el grupo-clase:

*¿Cómo resultó el armado de estas figuras? Comparamos con la construcción de las figuras anteriores. ¿Hay una única posibilidad de armado? ¿Por qué?*

En comparación con la resolución de la segunda consigna, se proponen tres imágenes (o sea, dos menos) con algunos minutos más destinados al armado de las figuras, indicando un trabajo un tanto más demandante.

1-196-T: Bueno, la mayoría terminó aunque sea alguna de las tres o las tres. ¿Cómo resultaron estas con respecto a las anteriores?

1-197-A (v): Re difícil/Muy difícil/Difícil.

1-198-T: ¿Qué les pareció a simple vista? Cuando las vieron, ¿pensaron que les iban a resultar difíciles? ¿Se veían venir esta dificultad?

1-199-A (v): Sí/No (*un estudiante dijo "Sí", tres estudiantes "No"*).

1-200-A14: Para mí nos llevó más el rectángulo.

1-201-T: Les llevó más el rectángulo.

1-202-A3: A mí el cuadrado.

1-203-T: ¿Y por qué será que fueron más difíciles estas que las anteriores?

1-204-A9: Porque **son más enteras**.

1-205-T: Porque son todas enteras. ¿Qué pasaba? Vieron que distinguimos en algunas de las otras figuras dónde estaba la complicación que podíamos llegar a ver, algunos no, algunos sí. Pero en general dónde estaba la complicación en las figuras anteriores.

1-206-A (v): En las partes que tenían toda entera/Toda alisada.

1-207-T: Exacto. ¿Y acá qué pasa con estas tres?

1-208-A (v): También/Son así.

1-209-T: Parecen figuras simples. Digo, "a un cuadrado lo voy a hacer en poco tiempo". Es más, yo creo que apenas les di los Tangrams muchos armaron el cuadrado, como acá, y después no se acordaban cómo era.

1-210-A11: Sí, mal.

1-211-A6: Nosotras primero en realidad hicimos el rectángulo y nos acordábamos cómo era.

1-212-T: Y después ahora que lo tenían que armar, no era tan fácil digamos.

1-213-A3: Yo estuve, desde que nos diste las piezas hasta recién (*risas*) tratando de armar el cuadrado.

Como se señala, la respuesta a "¿Cómo resultaron estas con respecto a las anteriores?" es "Re difícil/Muy difícil/Difícil". De acuerdo a lo que se observa en la actividad 2 sobre la estructura de la figura, se concluye que la simplicidad de la silueta o la familiaridad, por ser figuras geométricas elementales, no garantiza que se logre de manera ágil el armado.

En el diálogo con los estudiantes se reconocen que dos figuras están armadas de la misma manera si por medio de una rotación o reflexión se puede obtener la misma disposición que un armado particular, indistintamente de los colores utilizados. Como ocurre comparando las resoluciones a) de las Fig. 4.6 y 4.7.

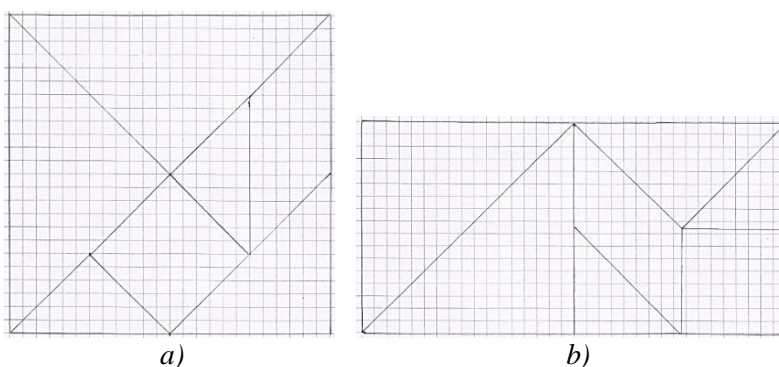


Figura 4.7. Resolución de la tercera consigna por parte de A10 y A13

En otros casos, como ocurre con el rectángulo b) de la Fig. 4.5, la imagen se puede armar al menos de dos formas distintas, como por ejemplo las presentadas en el inciso b) de las Fig. 4.6 y 4.7.

- 1-214-T: Y ahora, vi que algunos, por ejemplo, había rectángulos... Esto es un tipo de rectángulo, no sé si lo llegan a ver todos. Bueno y allá...
- 1-215-A1: Ah, parecido.
- 1-216-A6: **Acá tenemos uno distinto.**
- 1-217-T: Es... A ver, es el mismo me parece.
- 1-218-A12: **Es el mismo.**
- 1-219-T: Y acá habías armado... ¿Lo tenés ahí al rectángulo tuyo?
- 1-220-A6: No, no es el mismo (*bullicio*).
- 1-221-T: A ver...
- 1-222-D: Lo tendríamos que tener con imanes, para poder después mostrarlo.
- 1-223-T: Sí. Tenés el tuyo (*pregunta dirigida a otro estudiante que también armó el rectángulo*).
- 1-224-A5: ¿Lo armo?
- 1-225-T: ¿Te animás?
- 1-226-A5: Lo muestro en la foto si no (*se muestra la Fig. 4.6 b) al grupo-clase*).
- 1-227-T: Ahí está. Miren ese.
- 1-228-A (v): Ah/Qué copado (*risas*).
- 1-229-T: Es el mismo tamaño, la misma área, el mismo perímetro, pero las figuras están dispuestas distintas. Con el cuadrado, no sé pero me parece que todos armaron el mismo, pero con el cuadrado también pasa. Entonces, ¿qué pasa con estas figuras en comparación con las anteriores? En estas a lo mejor está la posibilidad de armar de distintas formas la misma figura. Y eso, ¿tendrá algún nivel de dificultad? ¿Afectará en algo? Si es que se puede sacar alguna conclusión o no. Las anteriores, por lo que vimos, ¿por qué no se podrán armar de una sola forma?, perdón, ¿por qué no se podrán armar de más de una forma?
- 1-230-A11: Porque habían muchas que ya eran inmóviles.
- 1-231-T: Claro, había fijas.
- 1-232-A9: Como ya están fijas, entonces...
- 1-233-T: Había menos posibilidad de andar haciendo tanto movimiento. En cambio acá al ser figuras más compactas y, por las características que tiene esta figura, de que no son cualquier triángulo, son triángulos rectángulos, hay cuadrados, las figuras se prestan para que una misma se pueda armar de diferentes formas.
- 1-234-A11: Sí, sí.

Se concluye que esta posible movilidad de las piezas se debe a la característica del Tangram Chino con respecto a las formas geométricas que surgen de su disección y al cubrimiento que proporciona en el plano.

En la cuarta consigna se propone trabajar con la superposición de piezas, acción utilizada en la mayoría de los Tangrams para encontrar relaciones entre las piezas.

- **Trabajar con cada pieza que forma el Tangram: ¿cuántos triángulos pequeños se necesitan para cubrir<sup>5</sup> el cuadrado, el triángulo mediano, el paralelogramo y uno de los triángulos grandes?**

Las Fig. 4.8 y 4.9 muestran los registros de dos estudiantes en donde predomina el formato coloquial, como es adoptado por el resto de los estudiantes. Solo tres de ellos

---

<sup>5</sup> En el sentido de cubrimiento matemático.

acompañan al lenguaje coloquial con una representación gráfica de las piezas subdivididas en los triángulos pequeños.

¿Cuántas veces entra un triángulo chico en el resto de los tams?		
Figura celeste :	4 veces	} Triángulos grandes
Figura violeta :	4 veces	
Figura roja :	2 veces	→ Triángulo mediano
Figura azul :	2 veces	→ cuadrado
Figura verde :	2 veces	→ paralelogramo
Figura amarilla :	1 vez	} Triángulos chicos
Figura naranja :	1 vez	

Figura 4.8. Resolución de la cuarta consigna por parte de A5

Los términos que se utilizan para responder a la consigna son *cantidad de veces* que entra el triángulo chico en el resto de las piezas; *cantidad de triángulos* pequeños que entran en cada pieza; y *doble/cuádruple* que representa cada pieza en relación con el triángulo chico.

La figura más chiquita entra dos veces en el cuadrado, dos veces en el paralelogramo, dos veces en el triángulo mediano y cuatro veces en cada uno de los triángulos grandes.

Figura 4.9. Resolución de la cuarta consigna por parte de A9

La Tabla 4.2 muestra la cantidad de estudiantes que adoptan cada uno de los términos, los cuales son en su mayoría *cantidad de veces* y *de triángulos*; solo dos estudiantes (A4 y A6) mencionan *doble/cuádruple*. Se puede observar que solo dos estudiantes utilizan la pieza mayor entre dos que se comparaban.

Tabla 4.2. Términos utilizados por los estudiantes en la cuarta consigna

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	Total
<b>Cantidad de veces</b>		X	X		X			X	X		X				X	7
<b>Cantidad de triángulos</b>	X						X	X		X		X	X	X		6
<b>Doble/cuádruple</b>				X		X										2

La quinta consigna del E1.2 pretende establecer relaciones de área entre todas las piezas del Tangram, incluyendo la figura de la cual surge su disección (cuadrado que contiene a las siete piezas, Fig. 4.6 a)). La expresión de vinculación entre las piezas dependerá de la elección de los estudiantes. A continuación, siguiendo la planificación de la tesista, se detallan las ocho relaciones que integran la consigna, donde la primera pieza nombrada tiene un área menor o igual a la nombrada en segundo lugar.

- **Relaciona el área entre:**
  - \* **triángulo pequeño – triángulo mediano**
  - \* **triángulo mediano – triángulo grande**
  - \* **triángulo pequeño – triángulo grande**
  - \* **triángulo pequeño – cuadrado**
  - \* **triángulo pequeño – paralelogramo**
  - \* **cuadrado – paralelogramo**
  - \* **cuadrado – triángulo mediano**
  - \* **triángulo pequeño – figura completa**

Las relaciones que se establecen en las resoluciones son a partir de un número expresado como fracción propia (Fig. 4.10) o como natural (Fig. 4.11), bajo la dependencia del orden en que se relacionan las figuras (menor con mayor o viceversa). Son tres estudiantes los que optan por la primera opción, siete los que eligen la segunda y cinco los que combinan las dos alternativas.

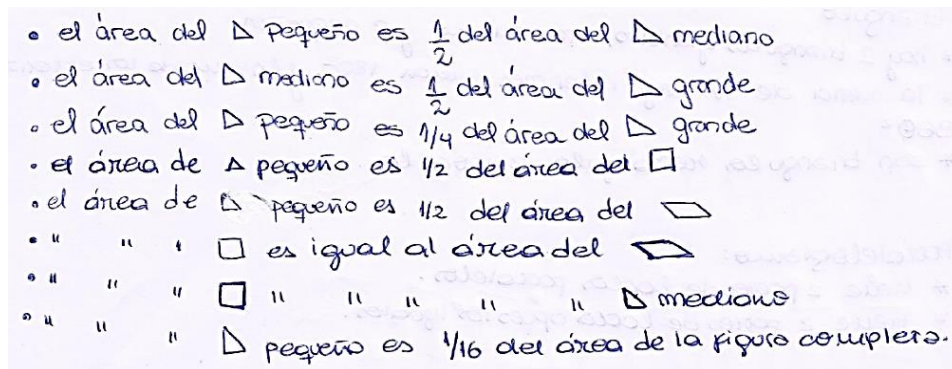


Figura 4.10. Resolución de la quinta consigna por parte de A3 y A15

En estas resoluciones predomina el lenguaje coloquial. Entre todos los estudiantes, se destacan ocho que además combinan este lenguaje con uno más reducido, codificado, aproximándose al tipo simbólico para expresar la relación entre las piezas (Fig. 4.11). El soporte gráfico es utilizado únicamente para representar la pieza del Tangram que se referencia, como se puede observar en las resoluciones de las Fig. 4.10 y 4.11.



Figura 4.11. Resolución de la quinta consigna por parte de A10 y A13

A continuación se propone a los estudiantes imaginar estas actividades con un grupo de alumnos del Nivel Secundario y, teniendo presente los lineamientos del MESF (2014), pensar en posibles temas que puedan abordarse a partir de las actividades implementadas.

- 1-298-A (v): Área (*mencionado por dos estudiantes*)/Figuras/Semejanza de triángulos.  
1-299-T: ¿Qué otra cosa? Con esta actividad y con lo que venimos trabajando, o algo que me di cuenta mientras estaba armando.  
1-300-A1: Con ángulos interiores.  
1-301-T: Puedo trabajar con los ángulos interiores.  
1-302-A9: Propiedad de las figuras.  
1-303-A (v): Claro.  
1-304-T: ¿Qué cosa?  
1-305-A9: **Propiedad de las figuras geométricas.**  
1-306-T: Analizar las propiedades. Hasta puedo trabajar ángulos internos de cuadriláteros a partir de la deducción de la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero, conociendo la de los triángulos por ejemplo.  
1-307-A13: No sé si es, yo me acuerdo de PEI, tratar de hacer una figura que no tiene forma geométrica, tratar de calcularle el área con formas geométricas.  
1-308-A1: Es lo que hicimos con el triangulito.  
1-309-T: Exactamente, de ahí se desprende eso también. ¿Qué otros contenidos podemos también trabajar? Fíjense que también hicimos cubrimiento en el plano.  
1-310-A1: También la diferencia entre la misma área pero distinto perímetro de los distintos rectángulos, por ejemplo que hicimos con la vela nosotras, el área era la misma pero no era la misma figura...  
1-311-T: Sería la independencia entre lo que es el perímetro y lo que es el área. Perfecto. Otra cosa que podamos trabajar... Que también lo estuvimos nombrando cuando dijimos “ah es el doble, pero también esto es un medio de esto”.  
1-312-A (v): Proporciones.  
1-313-A3: Ah, nosotras pusimos así un medio porque empezamos a escribir siempre desde la chiquita.  
1-314-A6: Nosotras también.  
1-315-T: Entonces, ¿qué podemos trabajar?  
1-316-A9: Fracciones.  
1-317-T: Podemos empezar con la idea de fracciones o no, por ejemplo esto es tantas veces esto, representación de fracciones. ¿Qué otra cosa?  
1-318-A5: Combinatoria, también en el cuadrado y el rectángulo que había distintas formas para hacerlo.  
1-319-T: Y también combinatoria porque puedo preguntar ¿de cuántas formas o de cuántos colores distintos puedo disponer las piezas para armar el cuadrado?

Los temas nombrados tienen que ver con lo experimentado en el E1.2, con conocimientos previos relacionados a la asignatura PEI y con lo que proyectan como futuros docentes, a partir de sus experiencias como estudiantes. Por ejemplo, los primeros temas que surgen vinculados con la secuencia pertenecen al eje Geometría y Medida, específicamente a los dos primeros años del Nivel Secundario (Ciclo Básico). La Tabla 4.3 muestra los tópicos mencionados por los estudiantes junto con cada contenido referente dentro del Diseño Curricular del MESF (2014) (como fuera presentado en la Fig. 2.4).

Tabla 4.3. Temas asociados al eje Geometría y Medida

Temas nombrados por estudiantes	Contenidos del Diseño Curricular	Año escolar
Área: cálculo en figuras no geométricas. Perímetro: independencia entre perímetro y área.	Perímetro y superficie: comparación usando equivalencias entre figuras. Análisis de las relaciones entre perímetro y superficie.	1
Figuras: propiedades de triángulos. Ángulos interiores.	Polígonos: triángulos. Exploración de propiedades.	
Figuras: propiedades cuadriláteros. Ángulos interiores.	Polígonos: cuadriláteros. Exploración de propiedades a partir de regularidades y demostraciones sencillas.	2
Cubrimiento en el plano.	Transformaciones isométricas.	
Semejanza: triángulos.	Triángulos semejantes. Exploración de las condiciones necesarias y suficientes.	

Entre los aspectos didácticos propios del eje Geometría y Medida se sugiere “profundizar la producción y análisis de construcciones geométricas” (MESF, 2014, p.51) como así también “decidir si [...] el procedimiento utilizado para obtenerla, son válidos” (p.51). Estos aspectos son contemplados en el momento de manipulación del Tangram Chino, donde las piezas en sí son figuras geométricas y su composición forma otras.

El análisis y la validación están presentes en las resoluciones de todas las actividades trabajadas. Así mismo en algunos casos surgen dudas en cuanto al armado de figuras como se puede observar en los actos de habla comprendidos entre 1-181 y 1-188 (resolución de la tercera consigna), “donde la prueba empírica debe favorecer la entrada de la argumentación deductiva” (MESF, 2014, p.52).

Por su parte en el Ciclo Orientado en el eje Geometría y Medida se profundiza el enfoque del Ciclo Básico, implicando tener disponible las propiedades para argumentar y validar a partir de ellas. “Se potenciará la actividad de justificar las producciones mediante razonamientos deductivos con procesos de validación [...] a través de argumentos encadenados y basados en conceptos y propiedades conocidos” (MESF, 2014, p.137). Bajo estas consideraciones sobre los últimos años del Nivel Secundario, el Tangram Chino puede ser un punto de inicio para profundizar en este eje y constituirse en un punto de contacto entre ambos Ciclos.

En una segunda instancia, a partir de la reiteración de la consigna y de la evocación de frases de los estudiantes, surgen otros contenidos (Tabla 4.4) en correspondencia con cada uno de los restantes ejes que forman parte del Nivel Secundario: Álgebra y Funciones, Números y Operaciones, Probabilidad y Estadística (Fig. 2.3, 2.5 y 2.6).

Las Tablas 4.3 y 4.4 se complementan y registran el 100% de los contenidos detectados por los estudiantes durante toda la actividad del E1.2. Son mayormente evidentes

aquellos vinculados con el eje Geometría y Medida, pero con presencia de al menos un contenido en los restantes ejes.

Tabla 4.4. Temas asociados a los ejes Álgebra y Funciones, Números y Operaciones, Probabilidad y Estadística

Tema nombrado por estudiantes	Contenidos del Diseño Curricular	Eje	Año escolar
Proporciones	Relaciones entre variables: proporcionalidad directa e inversa. Modelización según distintos modos de representación: coloquial, tablas, gráficos y fórmulas.	Álgebra y Funciones	1
Números racionales (representación de números fraccionarios)	Números racionales positivos en su expresión fraccionaria y como número decimal para ciertos cocientes, los argumentos sobre su equivalencia, y decisiones sobre la representación más conveniente en relación con el problema a resolver.	Números y Operaciones	1 y 2
Combinatoria (conteo)	Probabilidad: determinación empírica incluyendo casos sencillos que involucren un conteo ordenado sin necesidad de usar fórmulas.	Probabilidad y Estadística	1

Sobre el final del E1.2 se reconocen los Principios de la EMR en la secuencia simulada, los cuales fueron presentados al comienzo (E1.1). Se destacan algunas frases y palabras de los estudiantes que hacen alusión a los mismos. Los Principios se recorren en el orden en que surgen.

#### *Principio de Actividad*

1-320-A2: Era accesible para todos.

[...]

1-322-A6: **Activos**.

La accesibilidad del Tangram permite la participación de los estudiantes en el proceso educativo, como así también pensar a la Matemática como una actividad humana y cercana. El término activo da cuenta de que son los propios estudiantes los que establecen las relaciones pretendidas en la planificación de esta propuesta.

#### *Principio de Realidad*

1-324-A (v): Poder asociarlo a algo cercano.

[...]

1-326-A6: [...] cuando construimos las diferentes figuras.

[...]

1-328-A2: [...] por ejemplo el cuadrado, vos dijiste “hagan un cuadrado”, un rectángulo, entonces como que uno **ya lo tiene en mente**.

La manipulación de las distintas piezas permite partir de un contexto concreto y avanzar, por ejemplo, en la construcción de las distintas figuras. Esto posibilita el uso de estrategias para comenzar a moverse gradualmente en otros contextos matemáticos.

#### *Principio de Reinención guiada*

1-330-A12: De construir el conocimiento.

[...]

1-334-A6: Y sí, vos **nos ibas dando cosas**.

[...]

1-336-A (v): En el transcurso de la clase.

Se destaca una predeterminada intencionalidad del uso del Tangram desde el momento en que se planifica la secuencia para el grupo particular de estudiantes y los tipos de actividades, los momentos establecidos y el auspicio de un clima de trabajo acorde, son algunas de las interpretaciones que se pueden mencionar.

#### *Principio de Interrelación*

1-338-A (v): De **relacionar** algunos contenidos.

[...]

1-342-A (v): **Trabajar en grupo**/El trabajo en grupo.

[...]

1-344-A3: En cada grupo, ella (*refiriéndose a una compañera*) que hizo un cuadrado diferente a otros, cada uno tenía su (...) cómo lo hizo.

[...]

1-345-A11: Se podía expresar.

La variedad de contenidos pertenecientes a los distintos bloques temáticos y las relaciones que pueden darse entre ellos en una misma actividad son características resaltadas por los estudiantes. Además, se mencionan los aportes grupales en cuanto a formas diferentes de resolver una misma actividad que se van retroalimentando.

#### *Principio de Interacción*

Como puede observarse en los actos de habla 1-342, 1-344 y 1-345 (referido al *Principio de Interrelación*), el trabajo que se comparte con otros estudiantes dispuestos en forma cercana es valorado como un aporte a las propias producciones individuales. El hecho de destacar la presencia de al menos dos Principios en una misma actividad, da la pauta de la relación y coherencia que existen entre los seis Principios y las ideas centrales que sustentan esta corriente (apartado 2.1).

#### *Principio de Niveles*

1-347-A1: Al principio era hacerlos reconocer y después calcular el área, **iba pasando, y después la relación...**

1-348-A (v): Hubiera costado más.

1-349-A4: Sí, pero a lo mejor no, teníamos que terminar haciendo el mismo trabajo y costaba más.

La gradualidad presentada en el diseño de las actividades evidencia el paso de un nivel a otro donde los modelos se van adaptando, con posibilidad de ir de estrategias apegadas a un contexto concreto (como se observa en el *Principio de Realidad*) a propias representaciones, que a su vez permiten volver siempre a la situación inicial.

En este recorrido se percibe no solo la presencia de los Principios sino de las ideas centrales de la EMR. La detección de todos los bloques temáticos establecidos por el MESF (2014) en esta secuencia especialmente diseñada, da cuenta de la cantidad y diversidad de contenidos, la multiplicidad y la interrelación que pueden establecerse entre ellos mediante un modelo tan simple como es el Tangram Chino.

En E1.3 se conforman los grupos de estudiantes (G1 a G5) para trabajar en las propuestas de los próximos dos encuentros.

## 4.2. Producciones de los participantes

Dentro del segundo y tercer encuentros presentados en el apartado 3.5, se registran las producciones de cada grupo de estudiantes con los dos Tangrams asignados. Entre las acciones que se realizan, se destaca en el segundo encuentro el planeamiento (E2.1) y diseño (E2.2) de las actividades para los Tangrams con posterior entrega de planificación. En el E3.1, la implementación de dichas actividades a modo de simulación de clase con alumnos del Nivel Secundario (pero que eran los demás estudiantes de PEII).

### 4.2.1. Planificación grupal de actividades

Hacia el final del primer encuentro (E1.3), se forman cinco grupos de tres estudiantes cada uno. Cada grupo toma al azar dos tipos de Tangrams entre los diez tipos (excluyendo al Tangram Chino) con que cuenta el gabinete del PM. En la Tabla 4.5 se resume, como fuera anunciado en el apartado 3.5, la composición de cada grupo (G1 a G5).

*Tabla 4.5. Tangrams y estudiantes correspondientes por grupo*

<b>Grupo</b>	<b>Tangram</b>
G1 (A1, A5, A12)	Brügger
	Cardiotangram
G2 (A2, A4, A8)	Pentagonal
	Lloyd
G3 (A3, A9, A14)	Stomachion
	Pitagórico
G4 (A6, A10, A13)	Fletcher
	Ovoide
G5 (A7, A11, A15)	Triangular
	Hexagonal

Además, se les comunica globalmente el trabajo que se va a realizar en los próximos encuentros como así también se les indica que inicien una exploración de los dos tipos de Tangrams entregados.

El trabajo grupal que se lleva a cabo en el segundo encuentro se organiza en dos consignas dadas en forma oral, con el propósito de marcar dos etapas en la planificación. Por un lado, asociar temas que se pueden abordar con los Tangrams asignados y, por otro, concretar las actividades que formen la secuencia para cada tipo de Tangram.

Se comienza anunciando la primera consigna:

2-3-T: [...] Hoy, con los Tangrams que tiene cada grupo, que son dos por equipo, piensen más o menos hasta las dos y media (*se refiere a la hora que se terminaría la actividad, comenzando la misma a las 13:45 hs.*) **qué temas pueden tomar de la secundaria con ese Tangram**, ¿sí? Barro con todos los contenidos de la secundaria, con los dos Tangrams. Y no solamente decir “puedo usar área”, sino dar un ejemplo concreto. Eso vamos a tratar que sea en la primera parte de la clase, más o menos hasta las dos y media. Y después la idea es armar una secuencia didáctica con cada Tangram, para simular después con sus compañeros, ¿sí? [...]

Cada grupo trabaja en la consigna durante 45 minutos. Entre los materiales con que dispone cada equipo se puede mencionar el Diseño Curricular del MESF (2014) de los dos Ciclos que componen el Nivel Secundario (Básico y Orientado) y tres ejemplares de cada tipo de Tangram.

Durante esta etapa, se destacan comentarios que hacen referencia a la *accesibilidad* del Tangram, a los *contenidos* asociados, a la *versatilidad* de actividades y al *material* encontrado.

La *accesibilidad* de los diferentes tipos de Tangrams se debe, en parte, a la diversidad de personas que puede manipularlo, por ejemplo en el armado de figuras. Comprende un amplio rango de edades y niveles educativos de los participantes. Se establecen de esta manera diferentes alcances como lo explicita van Hiele (1999/2009) al describir las cinco fases que se distinguen en el proceso de enseñanza con este tipo de puzle (subapartado 2.2.1), lo cual muestra la adaptabilidad de este recurso a diversos contextos.

2-8-1-1-A12<sup>6</sup>: Yo se lo hice hacer a toda mi familia, creo.

A su vez, se encuentra en concordancia con las consideraciones metodológicas para Matemática del currículum prescripto, que le otorgan relevancia a los juegos, dado que

---

<sup>6</sup>Código empleado para el trabajo simultáneo de grupos de estudiantes, oportunamente detallado en el apartado 3.7.

están “estrechamente relacionados con un contenido matemático o con el desarrollo de estrategias, pudiendo incluir elementos manipulativos simples y tradicionales, son facilitadores de la entrada a la producción y al desafío intelectual desde un sentido cooperativo no competitivo” (MESF, 2014, p.50).

Esta accesibilidad que se observa se traslada a los *contenidos* asociados a las actividades. Se expresan dudas que aluden, por un lado, a la diversidad y cantidad en relación con distintos ejes conceptuales (MESF, 2014), lo que resulta propicio para una articulación de contenidos dentro de la Matemática como lo establece el *Principio de Interrelación* de la EMR. De este modo se le atribuye al Tangram una considerable *versatilidad* de contenidos con los que se puede trabajar. Por otro lado, también se consultan sobre la instancia de aprendizaje en la que se encontrarían los alumnos destinatarios de la actividad, como puede ser introductoria, de exploración, de refuerzo, de problematización, de elaboración de conclusiones.

- 2-8-4-3-A13: ¿Pero, podemos juntar **varios contenidos** en una misma actividad?
- 2-8-4-4-T: Sí, y vieron que nosotros en una misma actividad pudimos ver varias cosas.
- 2-8-4-5-A10: Porque nosotras, por ejemplo, para utilizar números racionales y área hacer...
- 2-8-4-6-T: Sí, pueden pensarla en la misma actividad o mismo ejercicio, como para empezar.
- 2-8-4-7-A10: Claro, decir “el triangulito chiquito es un medio de otra pieza”.
- 2-8-4-8-A6: Como hicimos la clase pasada.
- 2-8-4-9-T: Sí, está bien. Porque esto les va a servir de insumo para después.
- 2-8-4-10-A6: Y por ejemplo, pensamos en semejanza de triángulos, ¿podríamos poner tipo *múltiple choice*, o algo así?
- 2-8-4-11-T: Sí, porque son actividades que ustedes pueden hacer, con ese contenido.
- 2-8-4-12-A13: Pero no es para dar ningún tema, supuestamente ellos ya lo vieron, y nosotras lo **afianzamos** o...

Otro tipo de *versatilidad* que se observa en este recurso es la que tiene que ver con las actividades, en el sentido que consignas similares pueden ser reutilizadas o adaptadas a los diferentes tipos de Tangrams. Por ejemplo, pueden tomarse las realizadas en el E1.2, quedando pendiente analizar cuál/es potencia/n de manera significativa a cada Tangram.

- 2-8-5-14-A11: Lo que pasa es que ahora les estaba diciendo, de **ver alguna actividad que surja, habíamos dicho del Tangram Chino**, a ver si la podemos pasar ahí, eso es lo que queríamos hacer.
- 2-8-5-15-T: Sí, sí.
- 2-8-5-16-A11: Basarlo en lo que queremos, y bueno ver eso.

Internet es la fuente utilizada por la mayoría de los estudiantes para la búsqueda de *materiales*, previo al E2.1.

- 2-8-5-7-T: ¿Trajeron material?
- 2-8-5-8-A11: Sí, yo ya lo tenía todo, pasa que lo tenía en un Google Drive y acá no hay Internet, entonces lo estaba mirando del celular.
- 2-8-5-9-T: Ah, está bien. ¿Y tienen actividades? ¿En dónde buscaron?
- 2-8-5-10-A11: Sí, sí.

- 2-8-5-11-A15: En **Internet**, yo puse Tangram Triangular y después se la mandé a ella (*se refiere a A11*) y ella las puso todas en un Drive.  
 2-8-5-12-T: Está bien. O sea que encontraron material.  
 2-8-5-13-A15: Sí había.

Luego de culminar con el recorrido de los temas del Diseño Curricular (MESF, 2014) que pueden trabajarse con cada tipo de Tangram, se pasa a una segunda instancia, en lo que se deben efectivizar las actividades específicas para cada tipo de Tangram. Se comparte la segunda consigna:

- 2-9-T: [...] Entonces, en esta otra parte tratemos de armar, utilizando el insumo que ustedes ya fueron generando, dos secuencias, una para cada Tangram. Que tengan entre cuatro y seis actividades, cada uno verá la cantidad, para la próxima clase. [...]  
 [...]
 2-20- T: Traten de que sean actividades donde puedan lucirse lo máximo posible los Tangrams.

Se puntualiza en la consigna que se visualice, en la medida de lo posible, la potencialidad del Tangram dado, en el sentido de hacer explícitas y viables las peculiaridades de cada rompecabezas en términos matemáticos.

Durante la hora que se le destina al trabajo grupal en este segundo momento, la tesista realiza intervenciones de forma particular en los diferentes grupos. Se indaga sobre las siguientes cuestiones: *búsqueda* de materiales, *consultas* emergentes, *proceso de elaboración* de las actividades, *socialización* parcial de las posibles actividades, *conocimientos previos* acerca de los Tangrams y *curiosidades* detectadas. Se obtiene, de este modo, un panorama del estado de situación del diseño de actividades durante el desarrollo del E2.2. En la Tabla 4.6 se sintetizan los tipos de cuestiones que se fueron dando en cada grupo.

Tabla 4.6. Asuntos a los que aluden los grupos de estudiantes durante la segunda consigna

Cuestión	G1	G2	G3	G4	G5
Búsqueda	X		X	X	X
Consultas		X		X	X
Proceso de elaboración	X	X	X	X	X
Socialización	X	X	X		X
Conocimientos previos	X	X			
Curiosidades		X	X		

La fuente adoptada por los grupos que expresan haber realizado alguna *búsqueda* de materiales es Internet, sin explicitar el detalle de cada sitio web. Se pueden distinguir dos tipos de materiales: vinculado a las actividades (tres grupos de estudiantes) así como al surgimiento del Tangram (un grupo).

2-31-1-9-T: Bueno, ¿y cómo les resultó la actividad? Esto de diseñar actividades en función de los contenidos en secundaria, ¿fue difícil?, ¿fue fácil? ¿Por dónde empezaron? ¿Primero miraron el Tangram o el Diseño Curricular? ¿Qué hicieron primero?  
2-31-1-10-A12: Nosotras **buscamos en Internet un par de ideas**.  
2-31-1-11-T: Ah.  
2-31-1-12-A1: Lo de la circunferencia...  
2-31-1-13-T: ¿De este había en particular en Internet?  
2-31-1-14-A1: Sí, de los dos había.  
2-31-1-15-A5: Sí, de este fue el que encontramos (*se señala el Tangram de Brügger*).  
2-31-1-16-T: Que parece tan simple.  
2-31-1-17-A1: Sí es re interesante.

2-31-3-27-T: Y cuando la clase pasada les dimos los Tangrams, ¿qué hicieron primero?  
2-31-3-28-A3: Yo quise buscar la historia de cada uno, pero no me apareció. **Me apareció la historia del Tangram en general**, la del Chino, cómo surgió y todo eso.  
[...]  
2-31-3-57-A14: Sigo con la duda. Este sí, se llama Stomachion por, ¿cómo era el nombre?... Arquímedes.  
2-31-3-58-A9: Arquímedes.  
2-31-3-59-A14: Pero **no vi nada que dijera por qué se llama Pitagórico**.  
2-31-3-60-A3: Una pregunta (*dirigida a la tesista*). ¿Por qué se llama Pitagórico? Porque no lo encontramos.

Las actividades que pueden encontrarse son específicas del tipo de Tangram buscado y exploratorias en cuanto al análisis de piezas y a la formación de figuras, semejantes a las realizadas en el E1.2 con el Tangram Chino.

2-31-5-59-T: Está bien. ¿Y qué hicieron primero? Lo exploraron, buscaron en Internet... ¿qué hicieron primero?  
2-31-5-60-A11: Yo lo armé primero.  
2-31-5-61-T: ¿Y después?  
2-31-5-62-A15: Yo también, lo armé, y después busqué en Internet.  
2-31-5-63-T: ¿Encontraron en Internet?  
2-31-5-64-A11, A15: Sí.  
2-31-5-65-T: ¿Encontraron actividades concretas? ¿Figuras para armar?  
2-31-5-66-A15: Sí, mucho de lo que hicimos la clase pasada, que **te daban figuras**, eh, dibujitos y después algo de Matemática.  
2-31-5-67-T: Y ejemplo de algo concreto ¿sí?  
2-31-5-68-A11: Sí, yo **encontré una página que había bastante**, que creo que vamos a sacar bastantes actividades de ahí. Lo que pasa es que ahí se mezclaba al Tangram Chino y... Pero lo que pasa es que por ejemplo del Hexagonal no hay cinco (*se refiere a la cantidad de actividades*), hay una, entonces...  
2-31-5-69-T: Claro, sí, sí. O sea que empezaron armando la figura que formaban las piezas, y hoy, ¿exploraron las piezas o directamente fueron al contenido?  
2-31-5-70-A11: Primero nos fijamos en el Diseño Curricular, a ver qué temas se trataban. Porque por ahí veíamos que decía “simetría”, pero eso no se daba en el secundario.  
2-31-5-71-T: Claro.  
2-31-5-72-A11: Y cuando vimos la propiedad de los triángulos dijimos bueno “Triangular”, “propiedad de los triángulos”, algo íbamos a hacer.  
2-31-5-73-T: Claro.  
2-31-5-74-A15: Después para el Hexagonal, pensamos en, primero con una ficha, después con dos, después con tres, que vayan armando distintos triángulos y viendo...  
2-31-5-75-A11: Viendo la semejanza.  
2-31-5-76-A15: Comparando las semejanzas que tienen.  
2-31-5-77-A11: Claro, es llegar a ver que son semejantes.  
2-31-5-78-A15: Que vayan viendo lo que comparten.  
2-31-5-79-A11: Lo que tienen en común.



Figura 4.12. Proceso de elaboración de propuestas de G5

El grupo que realiza la búsqueda sobre la historia del Tangram obtiene información sobre uno de los dos tipos que posee. Este material puede dar un encuadre a las actividades que se propongan a partir de ese Tangram particular conjugando los *Principios de Realidad e Interrelación*, que consideran a la historia como un contexto posible donde puede verse la conexión con otros contenidos (apartado 2.1).

En el siguiente extracto se advierte el uso de un tipo de Tangram potenciado con un recurso tecnológico como es el software GeoGebra. Se reconoce que posibilita en una primera instancia de exploración del recurso, la manipulación digital de las piezas y el cálculo de diferentes medidas de las mismas.

- 2-31-4-66-T: En el material que trajeron, ¿está el Diseño? (*se refiere al Diseño Curricular*).
- 2-31-4-67-A6, A10, A13: Sí.
- 2-31-4-68-T: ¿Tiene de los dos Ciclos?
- 2-31-4-69-A6, A10, A13: Sí.
- 2-31-4-70-T: ¿Y material para las actividades, dónde buscaron?
- 2-31-4-71-A10: En Internet.
- 2-31-4-72-T: ¿Buscaron en algún sitio en particular?
- 2-31-4-73-A6: No.
- 2-31-4-74-A10: Pusimos en Google y fuimos buscando.
- 2-31-4-75-T: Y veo que también encontraron en GeoGebra.
- 2-31-4-76-A6, A10, A13: Sí.
- 2-31-4-77-A6: Que eran las construcciones de las figuras que se pueden dar, **moviendo con el GeoGebra**.
- 2-31-4-78-T: Ah.
- 2-31-4-79-A13: O sea, hacen la **construcción de las piezas**, como lo voy a hacer yo ahora. Y después lo mueven de la figura y ven las medidas, todo ahí.
- 2-31-4-80-A10: Eso también está bueno.
- 2-31-4-81-T: Sí, sí.
- 2-31-4-82-A13: Eso era lo que yo quería preguntar.
- 2-31-4-83-T: Sí, sí, y es más exacto, porque sale de la construcción.
- 2-31-4-84-A10: Ya tiene las medidas.
- 2-31-4-85-T: Bueno entonces están, más o menos. Con uno, ya lo tienen casi concretado, y con este les falta ahí cerrar.
- 2-31-4-86-A6: Sí, nos falta hacer la actividad concreta.

Las *consultas* que se realizan son a pedido de los grupos de estudiantes que lo manifiesten. Si se tiene en cuenta que los recursos didácticos “pueden ayudar a describir, entender y consolidar conceptos fundamentales en las diversas fases de

aprendizaje” (Alsina et al., 1988, p.13), se destacan en este aspecto las consultas de dos grupos (G2 y G5) de los tres mencionados en la Tabla 4.6. Las mismas tienen que ver con el uso del recurso en una instancia posterior al desarrollo del tema. Se observa que en ellos está presente la idea de formalización de conceptos como una instancia posterior al uso del recurso, pero como sostienen Alsina et al. (1988), los mismos pueden utilizarse con diversos objetivos: consolidar conceptos o ejercitar procedimientos; modelizar ideas y conceptos matemáticos; plantear problemas (apartado 2.2).

2-31-2-1-A2: Eliana, te queremos hacer una consulta. Nosotras por ejemplo en este Tangram.

2-31-2-2-T: ¿Cuál les tocó?

2-31-2-3-A2: El Pentagonal. Pensamos en dar congruencia y semejanza de triángulos.

2-31-2-4-T: Sí.

2-31-2-5-A2: Que vimos que, por ejemplo, estos son semejantes (*refiriéndose a piezas del Tangram Pentagonal*).

2-31-2-6-T: Son todos triángulos, ¿o no?

2-31-2-7-A2: Son todos triángulos. Bueno, el tema es que no sabemos si, **a partir del Tangram nosotros tenemos que llegar a generar el contenido semejanza o si podemos dar por dado...**

2-31-2-8-T: Como ustedes vean la mejor forma de usar el Tangram con ese contenido. Si ustedes creen que lo mejor es antes, será antes, si es después que le van a sacar más provecho, será después. Eso depende de cómo ustedes vean la mejor forma de usar ese Tangram, donde se le saca más el jugo. Por ejemplo “esto la verdad que si uso el Tangram es mejor que si lo trabajo desde el pizarrón con solo el fibrón”. Eso decídanlo ustedes.

2-31-2-9-A2: Gracias.

2-31-5-23-A15: Y la actividad que nosotras elegimos, ¿es como **para introducir el tema?** ¿O puede estar en cualquier lugar?

2-31-5-24-T: Puede estar en cualquier momento, chicas.

2-31-5-25-A15: Bueno.

2-31-5-26-A11: Podemos, por ejemplo, hacer que hagan una conjetura base para trabajar con el Tangram solamente.

En este sentido resulta trascendente la reflexión del futuro profesor y las decisiones que van tomando dado que constituyen, como sostiene Bressan (2005), un espacio para construir herramientas y discernimientos matemáticos por su propia cuenta, brindándole al futuro profesor la posibilidad de considerar posibles escenarios que favorezcan la comprensión a quienes serán sus alumnos (*Principio de Reinención guiada*, apartado 2.1). En particular esta práctica promueve una actividad que desarrolla criterio docente en los estudiantes del PM, que van a desempeñarse como docentes (como uno de los objetivos de la asignatura PEII, apartado 3.3). Este nivel de reflexión con relación al recurso didáctico acerca del grado de sofisticación, del acercamiento al contenido matemático, del propio diseño y re-diseño de actividades, entre otras, según Flores (2006), propicia un buen uso del mismo (apartado 2.2).

En esta misma línea, la integración de diferentes temas en una misma actividad es motivo de una nueva *consulta* por parte de G5, en cuanto a la cantidad y diversidad de tópicos que pueden trabajarse correspondientes a los distintos ejes del Diseño Curricular (MESF, 2014).

2-31-5-36-A15: Sí, pero lo que ella me decía es que nosotras les estamos dando las propiedades y ellos las tienen que demostrar. Si está bien, que nosotras les demos las propiedades o ellos lo descubran solos.

2-31-5-37-T: Y depende el momento, a ver, vayamos primero a lo más plausible que ustedes consideran y después cuando uno se anima y lo pule puede decir “también podría hacer tal cosa”.

2-31-5-38-A11: O algunas actividades, que hagan, y llegar a eso.

2-31-5-39-A7: De ángulos, ¿puede ser?

2-31-5-40-A11: Igual acá sería también las partes de fracciones y área.

2-31-5-41-T: Se ve que los contenidos no son estancos, es palpable que los contenidos no son estancos. Es una frase que uno dice mucho. Y acá lo estamos palpando. Ustedes traten de hacer explícitos todos los contenidos.

2-31-5-42-A11: Claro, por eso como que **se mezclan todos los temas**.

2-31-5-43-T: “Nombre todo lo que se pueda” (*refiriéndose a lo solicitado en la consigna*).

Si bien la *consulta* de G4 (actos de habla comprendidos entre 2-8-4-3-A13 y 2-8-4-12-A13, p.73) tiene otro carácter a las realizadas por G2 y G5 (conforman los tres grupos que participaron en *consultas*, Tabla 4.6) en esta instancia, durante la primera consigna la cantidad y la diversidad de tópicos fue un tema planteado por el grupo. En este tramo, la duda de G4 es en torno a la fundamentación de propiedades a partir de la manipulación de las piezas del Tangram Ovoide.

2-31-4-1-A10: Eliana, una pregunta. Nosotras acá construimos una elipse.

2-31-4-2-T: Sí.

2-31-4-3-A10: Y esta sería otra, así, media.

2-31-4-4-A13: Porque por ahí encontramos que dice que con este tenemos dos medias elipses, en las cuales el eje menor de la más grande, este que está acá, es el mayor de la más pequeña, que sería este.

2-31-4-5-T: Ah.

2-31-4-6-A6, A13: Pero no queda bien.

2-31-4-7-A10: **No sabemos si realmente es así.**

2-31-4-8-T: Si será una cuestión de piezas.

2-31-4-9-A10: Claro, porque no queda, sobresale.

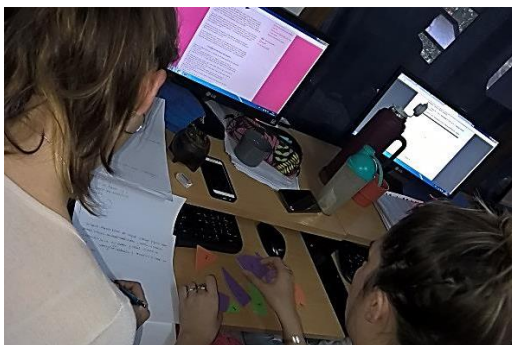


Figura 4.13. Proceso de elaboración de propuestas de G4

Las dos terceras partes de las nueve piezas que lo conforman presentan lados curvos. La existencia de estas piezas distintivas podría presentar dificultad al no poder asociar todos sus lados directamente con una figura geométrica conocida.

Durante el *proceso de elaboración* de actividades, transcurrido desde el momento de la entrega de los 10 tipos de Tangrams (últimos minutos del E1.3) hasta la finalización del E2.2, se observan distintos niveles de avances y diversidad en cuanto al recorrido realizado. La Tabla 4.7 muestra las acciones reconocidas en el proceso de elaboración de cada grupo de estudiantes en los pasos realizados. En aquellas celdas donde se distinguen dos acciones, corresponde a un orden establecido por el grupo, pero a su vez existe una retroalimentación entre ellas. La palabra “búsqueda” utilizada por los estudiantes hace referencia a fuentes externas, sin una preselección por parte de los estudiantes. En todos los casos, esa búsqueda es posteriormente procesada.

*Tabla 4.7. Instancias en la elaboración de actividades durante la segunda consigna*

Grupo	Primera instancia	Segunda instancia	Tercera instancia
G1	Búsqueda de contenidos. Detección de nuevos contenidos.	Elección de contenidos de la primera instancia.	Diseño de actividades. Secuenciación de contenidos.
G2	Búsqueda de contenidos.	Manipulación del Tangram. Surgimiento de nuevos contenidos.	Diseño de actividades. Surgimiento de nuevos contenidos.
G3	Manipulación del Tangram.	Búsqueda de contenidos.	Diseño de actividades.
G4	Búsqueda de contenidos.	Diseño de actividades.	-
G5	Búsqueda de contenidos y actividades. Manipulación del Tangram.	Ratificación de los contenidos en el Diseño Curricular.	Diseño de actividades.

La manipulación que se realiza con los tans es en algunos grupos efectuada hacia el interior de los mismos como en G2 y G5 (actos de habla comprendidos entre 2-31-5-59 y 2-31-5-79, p.75) y en otros, por personas externas como familiares y conocidos a modo de juego (G3). En este último caso el estudiante se encuentra en un papel de observador, obteniendo sugerencias para el diseño de las actividades.

2-31-2-112-A4: Ya pensamos todos los temas pero no las actividades.

2-31-2-113-T: ¿Cómo les resultó esto de armar actividades con los dos?

2-31-2-114-A4: Al principio no arrancábamos.

2-31-2-115-T: Se complicó.

2-31-2-116-A4: Después lo vas llevando.

2-31-2-117-A2: Sí, cuando empezamos a **observar bien las figuras, ver las relaciones** que tienen, encontramos que había un montón de temas. Es más, por ejemplo, en el del Pentágono, habíamos anotado algunas cosas y cuando empezamos a armar las actividades vimos que podíamos dar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo da 180.

2-31-2-118-T: O sea otras cosas a partir de eso. Pero tuvieron que hacerlo, digamos.  
 2-31-2-119-A2: Cuando empezamos a pensar en las actividades, **descubríamos más cosas** todavía.  
 2-31-2-120-T: Y el hecho de buscar todos los contenidos de secundaria que podían abordar con cada uno, ¿cómo empezaron?, ¿buscaron el contenido?, ¿miraron el Tangram?, ¿qué podían hacer?  
 2-31-2-121-A4: Sí, siempre arrancando con el Tangram.  
 2-31-2-122-A2: Ver qué se podía hacer.  
 2-31-2-123-T: ¿Después fueron a ver qué contenidos había? ¿Así? ¿O a la par?  
 2-31-2-124-A2: No, no nos fijamos qué contenidos había, porque elegimos semejanza de triángulos, congruencia, que ya sabemos que están. No nos fijamos.  
 2-31-2-125-A8: En realidad no verificamos si están (*risas*).  
 2-31-2-126-A4: Ay, es verdad.  
 2-31-2-127-T: No pero, ¿están en los contenidos de secundaria?  
 2-31-2-128-A2, A4, A8: Sí.  
 2-31-2-129-A2: Es más, habíamos pensado...  
 2-31-2-130-T: O sea que no miraron casi el Diseño Curricular.  
 2-31-2-131-A2: Habíamos pensado en los criterios de congruencia y semejanza, pero después dijimos, ¿lo habrán dado o no? Al final no nos fijamos porque decidimos no ponerlo.



Figura 4.14. Proceso de elaboración de propuestas de G3

2-31-3-20-T: ¿Y qué les pareció esta actividad? De armar actividades con estos dos Tangrams.  
 2-31-3-21-A9: Difícil.  
 2-31-3-22-A3: Porque **no se nos ocurre más allá de área, perímetro, lados, ángulos...**  
 2-31-3-23-T: Como que es lo primero que a uno se le ocurre.  
 2-31-3-24-A9: Geometría es lo primero que a uno se le ocurre.  
 2-31-3-25-T: Pero **después explorando un poco...**  
 2-31-3-26-A14: Se pueden ver varias cosas.  
 [...]
 2-31-3-29-A9: Yo lo primero que hice fue **intentar armarlo, y darle a la gente para que lo arme** (*risas*).  
 2-31-3-30-T: A ver qué pasa con la gente.  
 2-31-3-31-A9: Sí.  
 2-31-3-32-T: Y ahora, ¿cuándo tuvieron que ver esto?, ¿fueron primero a los contenidos?, ¿fueron al Tangram?, ¿o pensaron en el potencial y después lo hicieron?  
 2-31-3-33-A3: No, primero fuimos a los contenidos y nos fijamos qué se podía hacer con el Tangram.  
 2-31-3-34-T: Ah.  
 2-31-3-35-A9: Claro, **en los contenidos íbamos viendo qué se nos ocurría**, si se nos ocurría. Algunos decíamos “y por ahí se nos va a complicar, lo dejamos y de última después si se nos ocurre alguna actividad volvemos”.  
 2-31-3-36-A3: **Hay contenidos que se pueden utilizar pero no sería “el contenido”.**  
 2-31-3-37-A14: El fuerte.  
 2-31-3-38-T: Claro, lo podría hacer con otra cosa también, digamos.

- 2-31-3-39-A3: No, o como que está también en la actividad, pero no sería, en base a ese.
- 2-31-3-40-A14: El tema central.
- 2-31-3-41-A3: Claro, el tema central.
- 2-31-3-42-T: ¿Y pudieron encontrar bastantes contenidos, o no?
- 2-31-3-43-A3, A9: Sí.
- 2-31-3-44-T: ¿Pudieron pensar en cosas concretas?
- 2-31-3-45-A3: Bien, bien, analizamos primero y segundo (*se refiere a los dos primeros años del Nivel Secundario*) porque no terminamos. Pero bueno, de primero...
- 2-31-3-46-T: ¿De primero y segundo años?
- 2-31-3-47-A3: Porque se nos terminó el tiempo pero bueno, después seguimos. De Geometría y Medida, todos estos (*se muestra la enumeración de los contenidos detectados en cada eje*), después de Álgebra, de Funciones. Y en segundo, estos.
- 2-31-3-48-T: Sí, sí, sí.
- 2-31-3-49-A9: En Probabilidad tuvimos ese.
- 2-31-3-50-A3: Que no sabíamos.

Durante el proceso, G3 manifiesta dificultad en encontrar contenidos que no pertenezcan al eje Geometría y Medida para ambos tipos de Tangrams. En este caso, las actividades diseñadas a partir de ese eje, si bien son posibles a incorporar en la secuencia, no estaría enfatizando la potencialidad del Tangram, porque pueden implementarse con otros tipos de Tangrams. Este planteo tiene concordancia con lo ocurrido al final del E1.2, cuando al indagar sobre los posibles temas que se pueden abordar a partir de la secuencia simulada del Tangram Chino, los primeros contenidos son vinculados al eje Geometría y Medida, y constituyen en total aproximadamente las tres cuartas partes de los contenidos mencionados. Por su parte, G5 también hace referencia a la potencialidad del Tangram, al mostrar inseguridad en la presencia de esa cualidad en el diseño de las actividades.

- 2-31-5-46-A11: **Con el Triangular encontramos otras cosas** que...
- 2-31-5-47-A15: Del Triangular anotamos, semejanza de triángulos, propiedades de los triángulos, área y perímetro, fracciones.
- 2-31-5-48-T: Ah bueno, bastante.
- 2-31-5-49-A15: Sí, tendríamos que armar alguna actividad para cada uno.
- 2-31-5-50-T: Claro. ¿Pensaron ejemplos concretos?
- 2-31-5-51-A11: Sí. Pensamos en el Triangular, que verifique la propiedad de que los ángulos interiores de un triángulo forman  $180^\circ$ . Para que lo muevan y se den cuenta.
- 2-31-5-52-A15: Para que demuestren con las piezas.
- 2-31-5-53-T: Listo. ¿Y cómo resolvieron el hecho de tener que pensar actividades para los Tangrams? Sea para uno o sea para otro. ¿Se les dificultó? ¿No se les dificultó? ¿Por dónde empezaron?
- 2-31-5-54-A15: **No sabemos si le estamos sacando bien el jugo**, como nos dijeron, al Tangram.

Las actividades realizadas en el E1.2 en base al Tangram Chino (tales como la exploración y la construcción de figuras) son tomadas y adaptadas en el inicio de sus secuencias al menos por tres grupos (G1, G4 y G5), para favorecer el reconocimiento y la manipulación de las piezas que componen cada tipo de Tangram.

- 2-31-1-18-T: O sea que primero buscaron material y trajeron.

2-31-1-19-A1, A5, A12: Sí.

2-31-1-20-T: ¿Después cómo siguieron?

2-31-1-21-A1: Y después elegimos, entre lo que se nos había ocurrido con lo que habíamos encontrado en Internet.

2-31-1-22-A5: Una vez que focalizamos qué tema se podía desarrollar y a medida que íbamos haciendo las actividades veíamos que podíamos secuenciar los temas.  
[...]

2-31-1-32-T: Entonces, buscaron en Internet, después buscaron los contenidos y ahí empezaron a explorar un poco más las fichas.

2-31-1-33-A1, A5, A12: Sí.

2-31-1-34-A12: Y un par de actividades también se nos ocurrió a nosotras.

2-31-1-35-T: ¿Y les sirvió un poco lo que hicimos el encuentro pasado? Como modelo.

2-31-1-36-A5: Sí, porque en algunas actividades pensamos que primero puedan trabajar...

2-31-1-37-A1: Que exploren.

2-31-1-38-A5: Claro, que agarren y que hagan por ejemplo con este (*haciendo referencia al Cardiotangram*), **se interioricen con las piezas** y bueno después seguimos trabajando.

2-31-4-43-A6: O sea, más o menos del Fletcher ya están las actividades, pero de este (*se refiere al Tangram Ovoide*) queríamos trabajar con cónicas.

2-31-4-44-T: Ven que la parte curva es la más potente.

2-31-4-45-A6: Sí, pero **no sabemos qué hacer**.

2-31-4-46-T: ¿Cómo les resultó esto, respecto a las actividades que habíamos hecho con el Tangram Chino?

2-31-4-47-A6: Más difícil.

2-31-4-48-T: Pero, ¿pudieron guiarse?

2-31-4-49-A6: Porque, mirá, acá tenemos una parábola.

2-31-4-50-T: Sí.

2-31-4-51-A6: Después teníamos otra parábola, ah no, esta era una media circunferencia.

2-31-4-52-A10: Se formaba una media circunferencia.

2-31-4-53-A6: Con estas formábamos una elipse. Y bueno, la hipérbola que también la podíamos formar.

2-31-4-54-T: Sí, sí.

2-31-4-55-A10: Y también eso podemos poner.

2-31-4-56-A13: **El hecho de observar**.

2-31-4-57-A6: No se nos ocurre una actividad para hacer...

2-31-4-58-T: Concreta.

2-31-4-59-A6: Nosotras sabemos que podemos trabajar con cónicas y todo, pero...

2-31-4-60-T: Ustedes, ahora, ¿qué están haciendo? Uno la puede ir reforzando. ¿Qué están haciendo?

2-31-4-61-A6: Construcción.

2-31-4-62-T: Bueno, eso lo pueden poner, como para empezar, se puede hacer.

2-31-4-63-A10: Claro, y **después analizar propiedades**.

2-31-4-64-T: Al principio uno se siente perdido, pero después va surgiendo la idea de cómo puedo continuar. Pero bueno es distinto a los otros.

Los integrantes de G4 encuentran en la segunda instancia del proceso de elaboración (Tabla 4.7) inconvenientes en efectivizar actividades concretas a partir de los contenidos disponibles para abordar con el Tangram Ovoide, lo cual había emergido entre las *consultas* de este mismo encuentro a partir de las características de las piezas (actos de habla comprendidos entre 2-31-4-1 y 2-31-4-9, p.78).

Luego de transcurrida buena parte del proceso de elaboración de actividades, se realiza una *socialización* parcial de lo elaborado hasta el momento. En ella se remarcan los contenidos que se proyectan utilizar con cada tipo de Tangram.

2-31-1-3-A5: Del Cardiotangram pudimos hacer...

2-31-1-4-A1: La circunferencia inscrita.

2-31-1-5-A5: Tres temas, podemos decir.

2-31-1-6-A1: Después de inscrita formalizamos lo que era circunferencia y círculo. Y después como queríamos analizar las **propiedades del círculo**, con lo del punto medio para ver el diámetro, después el radio y después agarrar esta pieza y moverla y ver que el radio equidista de todos los puntos.

2-31-1-7-T: Listo.

2-31-1-8-A1: Después para otro tema íbamos a pensar solo con la circunferencia, los ángulos y arcos de circunferencia. O sea cuanto más grande es el ángulo, mayor es el arco de circunferencia

[...]

2-31-1-29-A1: Lo vimos por el lado, de bueno para, si lo dejábamos de lado ¿qué pasa? Y de este (*haciendo referencia al Tangram de Brügner*) estamos haciendo lo de  **semejanza**. Eso sí se nos había ocurrido y...

2-31-1-30-A5: **Concavidad y convexidad**.

2-31-1-31-A1: Que a mí no se me había ocurrido, pero lo encontramos.

Los contenidos mencionados por G1 y G2 en esta etapa están relacionados a las características de los tans del Tangram que les tocó a cada grupo. En particular el primer grupo (G1) asoció al Cardiotangram al bloque temático que comprende círculos y circunferencias (subapartado 2.3.2.3) y al Tangram de Brügner con los polígonos; mientras que G2 trabajó con el bloque temático de triángulos sobre el Tangram Pentagonal.

2-31-2-39-A2: Lo que estábamos viendo..., nosotras vimos, o sea pensamos en hacer, bueno primero ver que son todos isósceles.

2-31-2-40-A4: Que son triángulos.

2-31-2-41-A2: Que son isósceles, que hay cuatro que son obtusángulos, tres que son acutángulos y después armar una tablita donde relacionamos “cómo son los lados y los ángulos de esos dos respectivamente”, iguales.

2-31-2-42-T: Claro.

2-31-2-43-A2: Y de estos, los lados son todos diferentes, pero los ángulos son los tres iguales.

2-31-2-44-T: A veces uno le dice “de estas piezas” o a veces dice “encuentren o armen pares de triángulos congruentes”, no le dice “mirá tales”.

2-31-2-45-A8: Ah.

2-31-2-46-A2: Nosotras lo que tratamos fue de armar una tablita donde hacían la relación de un par aparte, digamos un triángulo aparte, nada más de lados y de ángulos. Y después si era, observando los **triángulos**, ver cuáles son congruentes y porqué.

2-31-2-47-T: ¿Este tiene la particularidad de estar formado solo con triángulos?

2-31-2-48-A2, A4, A8: Sí.

2-31-2-49-T: ¿No hay otro tipo de figura?

2-31-2-50-A2: Y ahí, estos dos son congruentes y vos podés decir “porque los convencimos y son iguales”, y a su vez en la tablita se ve que los tres ángulos son iguales y los tres lados son iguales, por ejemplo. Y lo mismo pasa con estos dos, que son los únicos congruentes. Como ellos ya saben lo que es congruencia, la idea es nada más que encuentren cuáles son congruentes.

2-31-2-51-T: En esto tenés semejanza, ¿no?

2-31-2-52-A2: Y esto es semejanza. Pero lo que no sabemos es cómo aplicarlo.

2-31-2-53-A8: Y ejemplificar tomando dos pares de triángulos semejantes entre sí, por ejemplo, ¿o no?

2-31-2-54-A4: Ah, podríamos decir así.

2-31-2-55-T: Claro.

2-31-2-56-A2: Y que lo justifiquen.

2-31-2-57-A8: Y a su vez, podés decirle “de uno de esos pares se puede encontrar un tercero”.

2-31-2-58-A2: Y acá, decíamos transitividad, porque si este es semejante con este, y este es semejante con este, entonces este es semejante con este.

[...]

2-31-2-106-A2: Y también lo que encontramos fue, hacer que con tres triángulos cualesquiera, sabiendo cuáles son los ángulos que miden lo mismo, mostrar que la suma de los ángulos interiores es  $180^\circ$ .

Por su parte, se denota en la socialización de G3 y G5 que algunos de los contenidos son pensados para los dos Tangram asignados a cada grupo, como es la variable estadística considerada por G3, y fracciones y área por G5. A su vez, se hace explícito por parte de uno de los grupos que al poder llevarse a cabo un mismo tipo de actividad en ambos Tangrams no se estaría potenciando su uso.

2-31-3-1-A3: Eliana una pregunta. A nosotros se nos ocurrió hacer una actividad que por ejemplo, armen una figura del Tangram en 15 minutos; que cada uno arme la figura contando el tiempo que tardó en hacerla.

2-31-3-2-T: Una posible actividad.

2-31-3-3-A3: Sí, después...

2-31-3-4-A9: Usar ese tiempo para el **eje Probabilidad y Estadística**. O sea que ese tiempo sea la variable.

2-31-3-5-A14: Que diga cuántas personas estarán en tal intervalo de tiempo, en este, en este, en este.

2-31-3-6-A3: En la actividad, no sé si se luciría tanto el Tangram, pero está buena.

2-31-3-7-T: Claro.

2-31-3-8-A9: Ese es el tema.

[...]

2-31-3-14-T: Chicos.

2-31-3-15-A3: Armamos dos solamente.

2-31-3-16-T: Dos actividades ¿con uno solo o los dos? (*se refiere a los Tangrams que cada grupo tiene*).

2-31-3-17-A9: Con el Pitagórico. Igual la primera es una **exploración de piezas que se podría aplicar a los dos**.

2-31-3-18-T: O sea que lo pueden poner en juego con los dos Tangrams.

2-31-3-19-A3: Y esta es con el Pitagórico, sabiendo que un lado del trapecio se puede sacar el perímetro de las otras figuras.

Surge en los comentarios de G5 la necesidad de considerar y poner en valor las distintas representaciones de los números racionales. Particularmente considerar a las fracciones como “partes de” permite la vinculación de dos ejes de contenido (Números y Operaciones con Geometría y Medida) dando lugar en este sentido a la interrelación de los contenidos, manifestado tanto desde el MESF (2014) como del *Principio de Interrelación* de la EMR.

2-31-5-1-A15: Eliana, una pregunta. Nos pasa **con el Triangular y el Hexagonal, que no salimos de área**.

2-31-5-2-T: Están con áreas.

2-31-5-3-A15: No salimos de área.

2-31-5-4-T: ¿Nada más?

2-31-5-5-A11: Semejanza también ya pusimos.

2-31-5-6-A7: Con el Triangular, pero el Hexagonal se nos complicó.

- 2-31-5-7-T: ¿El Hexagonal se complicó?  
 2-31-5-8-A11: Eh, pensamos en propiedades de los triángulos también.  
 2-31-5-9-T: Y acá (*señalando la hoja*) fracciones chicas, ¿pensaron algo?  
 2-31-5-10-A11: Fracciones también.  
 2-31-5-11-T: Tienen un montón ya, son los contenidos troncales de la secundaria.  
 2-31-5-12-A11: Sí, sí.  
 2-31-5-13-A15: **Pero, fracciones relacionadas con el área.**  
 [...]  
 2-31-5-29-A15: Yo por ejemplo les decía a ellas, con el Triangular, viste que nosotros le damos la propiedad de que la suma de los ángulos internos da  $180^\circ$ , que ellos demuestren con las piezas del Tangram, que suman  $180^\circ$ .  
 2-31-5-30-A11: Que vale eso.  
 2-31-5-31-T: Vieron que nosotras no les dimos armaditos en un triángulo, ni tampoco el dibujito de que esto armaba un triángulo.  
 2-31-5-32-A11: Claro.  
 2-31-5-33A7: Ni de qué tipo era.

Se constituye la Tabla 4.8 a partir de las intervenciones de G1, G2, G3 y G5 (G4 no realizó comentarios al respecto), en las que se recorre lo realizado para uno (G2 y G3) o ambos Tangrams (G1 y G5) por grupo.

Tabla 4.8. Socialización de contenidos durante la segunda consigna

Grupo	Tangram	Contenidos
G1	Cardiotangram	Circunferencia inscrita. Formalización de circunferencia y círculo. Análisis de las propiedades del círculo, diámetro, radio. Relación entre ángulos y arcos de circunferencia.
	Brügner	Semejanza entre triángulos rectángulos. Concavidad y convexidad de polígonos.
G2	Pentagonal	Características de los triángulos, específicamente isósceles, obtusángulos y acutángulos. Congruencia y semejanza de triángulos. Propiedad transitiva. Suma de ángulos interiores de un triángulo.
G3	Pitagórico	Exploración de piezas. Variables estadísticas. Perímetro de polígonos a partir de una unidad no convencional.
	Stomachion	Variables estadísticas. Exploración de piezas.
G5	Triangular	Área. Fracciones (“partes de”). Semejanza de triángulos. Propiedad de los triángulos. Suma de ángulos interiores (demostración).
	Hexagonal	Área. Fracciones (“partes de”).

En la indagación de los *conocimientos previos* respecto a los tipos de Tangrams en los estudiantes, coinciden en reconocer al popular Tangram Chino, como fue expresado al inicio del E1.2.

Solo dos estudiantes expresan conocer (sin hacer uso) otro tipo de Tangram distinto al popular destacando su forma particular: “corazón” asociado al Cardiotangram y “huevo” asociado al Ovoide.

2-31-1-39-T: ¿Y ya lo conocían a estos? Antes que se los presentemos en el encuentro pasado.  
2-31-1-40-A1: Al del **corazón** yo sí lo conocía, pero a este (*haciendo referencia al Tangram de Brügger*) no.  
2-31-1-41-A12: No, yo al que conocía era al del **huevo**.  
2-31-1-42-T: Es la primera vez que lo vieron.  
2-31-1-43-A5: Yo cuando lo vi dije **¿tres piezas?**  
2-31-1-44-A1: No sabíamos cómo armarlo, si tenía alguna figura... Como que este era un corazón ya.

2-31-2-134-T: Y estos ¿ya los conocían? (*haciendo referencia a los diferentes tipos de Tangrams*).  
2-31-2-135-A2, A4, A6: No.  
2-31-2-136-T: Ah, no. El Chino sí, estos no.  
2-31-2-137-A4: **El Chino nada más.**

Las *curiosidades* que se presentan son, por un lado, en torno a la variabilidad de la cantidad de piezas que conforman los distintos tipos de Tangrams. Los que pertenecen al gabinete del PM están compuestos desde una cantidad mínima de tres piezas (Brügger) hasta 14 piezas (Stomachion). En un primer momento, esto presenta sorpresa en los estudiantes y también desorientación, al contrastarlo con el usual (Chino, de siete piezas).

2-31-2-138-T: ¿Y el tema de las piezas? ¿Les dificultó las piezas?  
2-31-2-139-A8: Yo cuando vi esto (*se refiere al Tangram de Lloyd*), como que digo “**¿qué voy a hacer con esto?**”. No sé, no se me ocurría nada.  
2-31-2-140-T: ¿Y el otro cuál es?  
2-31-2-141-A2, A4: El Pentagonal.  
2-31-2-142-A2: Que el Pentagonal son todos triángulos.  
2-31-2-143-T: Nada que ver uno con otro.  
2-31-2-144-A2: El otro, parece tener más relaciones, todas las figuras están relacionadas, son isósceles, hay acutángulos, hay obtusángulos. Acá como que dijimos, “¿qué hacemos con esto?”, hasta que...  
2-31-2-145-A8: En este no veíamos nada.

Por otro lado, la cantidad de temas que se pueden abordar con los Tangrams y la exploración en cada uno de ellos produce la sensación de ser un recurso inagotable, con múltiples proyecciones, con alta versatilidad y posibilidad de integración de diversidad de contenidos.

2-31-2-12-A4: No, **hay un montón de cosas para ver**. Podemos estar todo el año (*risas*).  
2-31-2-13-A8: Lo podemos usar toda la vida.  
2-31-2-14-A4: Me llevo el Tangram y estoy recibida.

El proceso de producción generado en este encuentro a partir de las consignas presentadas inicialmente, lleva a obtener los diseños de actividades por parte de los grupos de estudiantes relativas a los dos tipos de Tangrams por grupo, que se simularán en implementaciones áulicas en el E3.1.

## 4.2.2. Actividades propuestas por los estudiantes

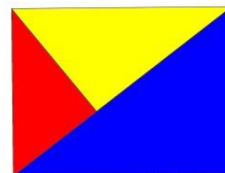
Entre el segundo y tercer encuentro, los estudiantes entregan las actividades diseñadas para los dos tipos de Tangrams por grupo. En el marco del E3.1, cada grupo de estudiantes implementa en micro-clases una selección de actividades (hecha por ellos mismos) respecto de uno de los dos tipos de Tangrams en un tiempo estipulado de 20 minutos aproximadamente. En la Tabla 4.5 se encuentra la composición de cada grupo y a los dos tipos de Tangrams por grupo. Cabe advertir que, en cada caso, el primer Tangram nombrado corresponde al que se emplea en la micro-clase.

A partir de aquí (subapartados 4.2.2.1 a 4.2.2.10) se recorren las planificaciones de los 10 tipos de Tangrams según el orden establecido en la Tabla 4.5. Se incluyen en cinco de los Tangrams (los primeros de cada grupo) las interacciones registradas durante la micro-clase, en momentos específicos de la planificación.

Cabe recordar que cada grupo tiene a disposición tres ejemplares de cada tipo de Tangram pertenecientes al gabinete de recursos didácticos del PM (apartado 3.4). En función de esta cantidad, los grupos deciden formar tres equipos de alumnos (sus compañeros de PEII) para trabajar grupalmente, cuando así lo requiera la dinámica planteada. También cabe recordar que en el momento de la implementación existen roles simulados: por un lado, los integrantes del grupo que actúan como “docentes” y, por otro, el resto de los estudiantes que actúan como “alumnos”. De este modo en el análisis interpretativo de las planificaciones e intervenciones se usarán esos términos para distinguir a los diferentes actores. Los miembros del grupo, a su vez, intercambian sus roles en un tiempo prudencial de manera que todos puedan pasar por la experiencia de ser “docentes” en la simulación.

### 4.2.2.1. Tangram de Brügger (G1)

En la propuesta se utilizan códigos de colores y tipografías de letras para indicar tanto los diferentes momentos de la planificación como la participación de los diferentes actores involucrados.



Referencias:

**Negrita:** tema que desarrolla la actividad.

Times New Roman: acciones del profesor.

*Cursiva:* preguntas y diálogo del profesor.

*Azul cursiva:* posibles respuestas de los alumnos.

Los contenidos que los estudiantes encuentran como posibles a abordar con el Tangram de Brügger se ven reflejados con al menos una actividad en la secuencia planteada.

#### Contenidos que se pueden desarrollar

- Semejanza de triángulos.
- Concavidad y convexidad de polígonos.
- Número de Oro.

En el desarrollo de lo simulado durante la clase, se pueden reconocer diferentes actividades:

- a) Clasificación de piezas.
- b) Semejanza entre piezas a partir del movimiento de las mismas. Características.
- c) Armado de figuras.
- d) Identificación de polígonos cóncavos y convexos en figuras armadas con el Tangram.
- e) Construcción de la figura patrón del Tangram.
- f) Demostración de la razón áurea.

En la micro-clase llegan a recorrer todas las actividades planificadas para el Tangram de Brügger, algunas completas (b, d y e), otras de forma parcial (a y f) y una de ellas solo comentándola (c).

A continuación, se analizan las actividades propuestas por G1 para el Tangram de Brügger.

La primera, bajo el título “Semejanza de triángulos”, comienza con una guía para la observación y manipulación de las piezas, junto a la distinción de características.

- *Describan lo mejor que puedan las figuras del Tangram y clasifíquenlas.*

El profesor guiará la actividad con las siguientes preguntas:

- *¿Qué tienen en común?*
- *Son triángulos.*
- *Tienen tres lados.*
- *Si superponemos las figuras, ¿qué podemos observar?*
- *Que son de distinto tamaño.*
- *Que los triángulos son parecidos pero de distinto tamaño.*
- *¿Hay una única manera de superponerlas?*
- *Se pueden superponer sobre distintos lados de los triángulos.*
- *¿Qué se puede observar con respecto a sus ángulos?*
- *Que son iguales.*
- *Que todos tienen un ángulo recto.*
- *Se puede aplicar Pitágoras.*
- *Que en cada triángulo, los tres ángulos son iguales a los de los otros triángulos.*
- *¿Y con respecto a sus lados?*
- *Son distintos triángulo a triángulo.*
- *Son unos más grandes que otros.*
- *En un mismo triángulo, son distintos.*
- *Son escalenos.*
- *Para ordenar la información recogida, elaboren una tabla.*

Durante la implementación de esta primera propuesta, se observa la necesidad de nombrar a las piezas para distinguirlas entre sí, como así también acordar una notación para los vértices que forman cada triángulo. Las piezas son nombradas por la docente (comienza con ese rol A1), mientras que los vértices son consensuados entre alumnos y docente. En comparación con los nombres asignados a los triángulos que componen al Tangram Chino durante el E1.2, se toma al tamaño como adjetivo que los distingue.

- 3-146-A1: Bueno chicos, les vamos a repartir este Tangram y van a tener que ir clasificando las piezas que tiene cada uno, y las propiedades.
- 3-147-A5: Júntense en tres grupos (*las integrantes de G1 reparten los tres Tangrams*).
- 3-148-A1: Vayan viendo qué tienen en común; cómo son los lados, los triángulos; si encuentran algunas propiedades.
- 3-149-A (v): Hay triángulos rectángulos/**Hay tres triángulos rectángulos**.
- 3-150-A1: Entonces son tres triángulos rectángulos.
- 3-151-A3: Sí.
- 3-152-A1: ¿Y ven alguna otra cosa más, aparte de que los tres triángulos sean rectángulos?
- 3-153-A (v): **Son semejantes/Son de distintos colores y tamaños**.
- 3-154-A9: ¿Son semejantes?
- 3-155-A1: ¿Y los ángulos?, ¿los lados?
- 3-156-A11: Tienen ángulos agudos.
- 3-157-A1: ¿Chicos, los están viendo ustedes también? (*dirigiéndose a otro grupo*).
- 3-158-A (v): Sí, sí.
- 3-159-A1: **¿Quieren que nombremos a los triángulos?**, ¿los vértices? **Dicen que son parecidos los triángulos**, este grupo por acá. Los nombramos a todos, al grande le ponemos “triángulo grande”, al mediano “triángulo mediano”, y al otro “chiquito”. Y nombramos a todos los vértices iguales. Por ejemplo al triángulo grande, no sé ¿cómo quieren nombrar a los vértices?
- 3-160-A (v): “A”, “B”, “C”.
- 3-161-A1: Bueno, entonces, a este triángulo grande para denotarlo le vamos a poner en los vértices “A” sub “g”, “B” sub “g” y “C” sub “g” (*se escribe en el pizarrón*). Y así hacemos con el resto de los triángulos. Y les parece que con todo lo que ustedes mencionaron, rectángulo, acutángulo... construimos una tabla, así organizamos la información, ¿les parece que lo hagamos?
- 3-162-A (v): Sí.

Con la información relativa a las piezas, la docente propone confeccionar una tabla para organizar la información obtenida, sin dar indicios de su construcción. Luego de este análisis de piezas se continúa con un procedimiento específico guiado hacia el concepto de semejanza y aplicado a los tres triángulos.

- *Ahora, de a uno, realicen el siguiente procedimiento. Tomen el triángulo grande y el mediano. Pónganlos delante de su vista a los dos triángulos de modo que el grande quede más alejado y justo detrás del mediano. Luego cierren (o tapen) uno de sus ojos y observen qué pasa cuando dejan un triángulo fijo, y acercan o alejan el otro.*
- *Realicen el procedimiento con el triángulo chico y el mediano.*

La exploración realizada es puesta en común con el resto del grupo a partir de preguntas-guía del docente contempladas desde la planificación y que se complementan

en la simulación de implementación de clase a partir de respuestas reales obtenidas de los alumnos.

El profesor preguntará:

- *¿Qué es lo que sucede con las figuras del Tangram en el primer procedimiento?*
- *En cierto punto son iguales.*
- *Se superpone el mediano sobre el grande perfectamente.*
- *El mediano parece siempre más chico hasta que en un momento queda igual que el grande.*
- *¿Pasa lo mismo con el triángulo chico y el mediano?*
- *Sí.*

3-163-A1: Bueno ahora lo resolverían y pasarían lo anterior a esa tabla de los alumnos (*son acciones que se comentan pero no se realizan por el tiempo de duración de la actividad*). Y partiendo de la idea que se quiere llegar de semejanza, les proponemos que hagan un procedimiento. Agarren el triángulo grande, de a uno lo van haciendo, y el mediano, entonces se tapan un ojo o lo giñan si es que saben guñarlo, entonces dejan uno fijo y el otro lo van moviendo, y observan qué pasa entre los dos triángulos (*se muestra físicamente*).

3-164-A6: Ahí lo tapa entero.

3-165-A1: Uno lo dejan fijo atrás...

3-166-A10: ¿El grande atrás y el chico adelante?

3-167-A1: Y lo vamos moviendo.

3-168-A7: ¿Hasta que lo tape al grande?

3-169-A1: Y vemos qué pasa.

3-170-A7: Ahí lo tapa entero.

*Murmullo.*



Figura 4.15. Simulación de alumnos en clase de G1

*Intercambio de roles, A5 cumple el papel de la docente.*

3-171-A5: Bueno, entonces, ¿qué es lo que pueden ver?

3-172-A6: Que en un punto lo tapa entero.

3-173-A5: Bien, en un punto lo tapa entero, ¿allá?

3-174-A14: Sí, también lo tapa.

3-175-A5: **¿Y qué es lo que pasa cuando lo tapa?**

3-176-A (v): Son iguales.

3-177-A5: O sea, parecen iguales. Cuando uno los quiere superponer con la proyección de la vista, pareciera que son iguales.

3-178-A2: Sí.

3-179-A5: Pero nosotros ¿qué podemos ver en los triángulos?, ¿qué habíamos visto recién?

3-180-A10: Que son de diferentes tamaños.

3-181-A5: Bien, son de diferentes tamaños. **¿Y los ángulos?, ¿cómo son?**

3-182-A (v): Iguales.

3-183-A5: Son iguales triángulo a triángulo, tienen los tres ángulos iguales. Esto de que **parecen iguales, pero no lo son tiene un nombre**. Vemos que los triángulos, como dijimos recién, tienen los ángulos iguales, pero los lados son distintos, en cierto punto parece que son iguales. A estos triángulos se los llama semejantes. Entonces decimos que

“dos triángulos son semejantes si tienen sus ángulos respectivamente iguales”. Esto lo conceptualizamos acá.

Del intercambio realizado en el grupo-clase, se desprende la formalización del concepto mediante la institucionalización del concepto de semejanza.

Dos triángulos son **semejantes** si tienen sus ángulos respectivamente iguales.

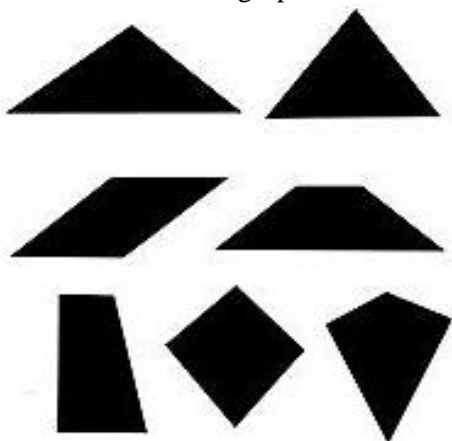
El profesor aclara que la semejanza viene dada porque los triángulos tienen la misma forma pero distinto tamaño.

Las actividades diseñadas en esta primera propuesta son introductorias al concepto de semejanza de triángulos. Las mismas se pueden realizar con otras figuras planas y con otros Tangrams. Este contenido está contemplado en segundo año del Nivel Secundario dentro del Diseño Curricular (MESF, 2014).

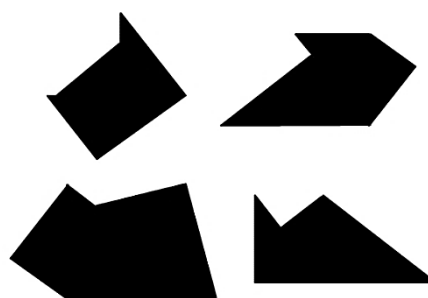
En una segunda actividad se trabaja con la concavidad y convexidad. Estas propiedades podrían ubicarse en el Ciclo Básico del Nivel Secundario, teniendo en cuenta que los lineamientos del MESF (2014) focalizan en las propiedades de los cuadriláteros en segundo año. Al comienzo de la actividad se entrega a cada alumno una copia que contiene dos grupos intencionalmente prefijados de figuras planas para armar, con el implícito de no superponer piezas o dejar huecos.

Construyan las siguientes figuras con todas las piezas del Tangram.

Primer grupo



Segundo grupo



A continuación, se trabaja sobre las figuras entregadas en papel, con un procedimiento específico.

*Ahora elijan distintos pares de puntos sobre las figuras y tracen el segmento que los une.*

La consigna propuesta por el docente es reiterada en algunas oportunidades por pedido de los alumnos, al no comprender el procedimiento que deben llevar a cabo. Esta

dificultad puede estar asociada a que los alumnos no hayan realizado previamente este procedimiento para distinguir las figuras cóncavas y convexas, o a la falta de hábito sobre la manipulación de objetos al igual que ocurrió en el E1.2 al momento de describir las características de las piezas. En la simulación de esta actividad se refleja lo planificado por el grupo en las diferentes preguntas propuestas, y también se amplía con otras para obtener características comunes entre las figuras de un mismo grupo. En lo que sigue se efectúa el último intercambio de roles: A12 asume el papel de docente.

3-184-A12: Ahora les voy a repartir dos grupos (*se refiere a dos grupos de figuras para armar*). Acá se supone que los alumnos hacen las figuritas. Ahora se les va a pedir que tomen dos puntos cualesquiera del primer grupo y dos puntos cualesquiera del segundo grupo y marquen el segmento que los une. Hagan esto varias veces, a ver qué pasa.

3-185-A11: **¿Cómo?** ¿Cómo?

3-186-A12: Tomen dos puntos del primer grupo, o sea tomás una figurita del primer grupo y tomás dos puntos y unan el segmento, dibujen si quieren arriba del papel.

3-187-A8: No entendí.

3-188-A1: Dos puntos interiores de la figura.

3-189-A4: Sí.

3-190-A1: Los que ustedes quieran. Pueden ser muchos pares para probar. Tracen el segmento que une esos puntos cualesquiera y vayan viendo qué pasa con ese segmento en cada grupo de figuras.

3-191-A5: ¿Se entendió?

3-192-A6: Sí (*murmullo*).

3-193-A5: Ustedes tienen dos grupos de figuras, siete figuras en uno y creo que cuatro en el otro. De cada una de esas figuras, que en total hay 11, tomen puntos de adentro de la figura, de a dos, y únanlos.

3-194-A11: Ahí está.

3-195-A5: **Prueben a ver qué pasa cuando unen puntos de adentro de esas figuras.**

*Murmullo.*

3-196-A12: Bueno qué pasa con las figuras del primer grupo, con los segmentos que tomaron en cada figura.

3-197-A11: El segmento está dentro de la figura.

3-198-A12: Quedan todos adentro de la figura. ¿Y en el segundo grupo?

3-199-A (v): No/Algunos se salen.

3-200-A12: Algunos se salen. ¿Y con los ángulos interiores de cada figura? ¿Cómo son con respecto a  $90^\circ$ ? ¿Son más chicos, son más grandes?

3-201-A6: Algunos son más grandes.

3-202-A2: ¿El interior o exterior?

3-203-A6: Este (*señalando un ángulo cóncavo*) es más grande por ejemplo, en el segundo grupo.

3-204-A12: Bueno. O sea que vemos en el segundo grupo hay ángulos que son más grandes de  $90^\circ$ .

3-205-A15: En el primero también.

3-206-A3: Sí.

3-207-A2: Hay ángulos que son más grandes que  $180^\circ$ .

3-208-A12: **¿Y con respecto a  $180^\circ$  entonces?**

3-209-A6: Este mirá, es más grande.

3-210-A12: Ah.

3-211-A (v): El último/En el segundo grupo tienen ángulos más grandes.

3-212-A12: O sea que, más grandes a  $90^\circ$  hay en los dos grupos, ¿y más de  $180^\circ$ ?

3-213-A (v): En el segundo/Solo en el segundo grupo.

3-214-A12: Solo en el segundo grupo. Bueno, todos los polígonos del primer grupo tienen un nombre y los polígonos del segundo grupo tienen otro nombre. Entonces acá escribo la definición en el pizarrón, que sería “un polígono convexo es aquel que tiene todos sus

ángulos internos menores a  $180^\circ$  (se lee la definición que se escribiría en el pizarrón).

¿Quién sería acá?

3-215-A10: Este.

3-216-A12: Claro.

3-217-A7: Los del primero.

3-218-A12: Y si se unen dos puntos cualesquiera queda adentro de la figura. O sea que las del primer grupo de figuras son convexas. Y cóncavas son los que tienen al menos un ángulo mayor a  $180^\circ$ .

- ¿Qué pueden observar en el primer grupo de figuras con los segmentos trazados?

- Algunos segmentos se intersecan.

- Los segmentos no se intersecan.

- Los segmentos quedaron siempre dentro de la figura.

El profesor hace énfasis sobre este último aspecto:

- ¿Y en el segundo? ¿Pasa lo mismo?

- Sí pasa lo mismo, porque algunos segmentos quedaron adentro de la figura.

- No pasa lo mismo porque algunos segmentos no quedaron completamente dentro de la figura.

Se destaca en las intervenciones que la institucionalización de los conceptos se desprende de los intercambios entre el docente y los alumnos a partir de las preguntas relacionadas a la observación de los ángulos interiores de las figuras, que son tenidas en cuenta al momento de la formalización.

Aquí el docente institucionaliza los conceptos de concavidad y convexidad.

Un polígono **convexo** es aquel en el que todos sus ángulos internos son menores a  $180^\circ$ . Si se unen dos puntos cualesquiera interiores al polígono mediante un segmento, este estará contenido en él.

Un polígono **cóncavo** es aquel en el que al menos uno de sus ángulos interiores es mayor a  $180^\circ$ .

La tercera y última propuesta es referida al contenido números irracionales, específicamente en un número particular como es el de Oro (o razón áurea). Este conjunto numérico está propuesto en los tres años que forman el Ciclo Orientado del Nivel Secundario, tratado con mayor detenimiento en cuarto y quinto años.

**Número áureo. “Un rectángulo casi de oro”**

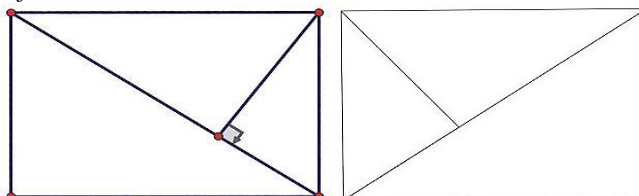
Formen con las piezas del Tangram el siguiente rectángulo.



A su vez, el tratamiento del Número de Oro se plantea como un contenido integrador de los ejes del área Matemática como así también con otros espacios curriculares en las orientaciones con modalidad de Arte y de Ciencias Naturales.

Dado que se cuenta con la experiencia previa de la segunda actividad (concavidad y convexidad) de esta propuesta, se prevé que la construcción del rectángulo resulte relativamente ágil para los alumnos, como una actividad secundaria necesaria dentro de una más general. Se supone encontrar distintas disposiciones en las resoluciones. Se remarcan las diferencias encontradas, pero a su vez se observan sus similitudes en cuanto a rotaciones o reflexiones realizadas de uno de los rectángulos para llegar a otros.

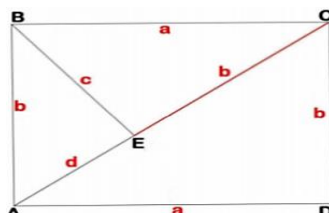
- *¿Cómo está formado?*



- *O también lo podemos seguir rotando.*
- *Para que sea más fácil referirnos al rectángulo tomaremos la segunda forma de armarlo.*
- *¿Cómo se les ocurre que podrían construirlo en papel?*
- *Construimos un rectángulo y trazamos una diagonal. Después trazamos la perpendicular a la diagonal que pasa por uno de los vértices del rectángulo.*
- *¿Por cualquier vértice?*
- *No, por el de arriba a la izquierda.*

Para trabajar con cada triángulo se requiere de una notación para los vértices y los lados de cada uno de ellos. Se acuerda una disposición para continuar trabajando sobre un rectángulo común y se propone utilizar la misma tipografía para nombrar a los lados congruentes.

- *Muy bien. Ahora nombremos los vértices y los lados. Si superponemos EC y DC vemos que son iguales, así que los marcamos con la misma letra.*



Durante la implementación, se deja libertad en la elección de las letras utilizadas, acordando un estilo de notación convencional que mantiene las mismas letras mayúsculas en los vértices y minúsculas en los lados. Se observa que ese grado de

libertad y el hecho de que los triángulos están concatenados, trae confusión cuando el docente propone nombrar a los lados congruentes de la misma forma.

- Además, como vimos antes, los triángulos ADC, CEB y BEA son semejantes.
- Y también rectángulos.
- Excelente recordarlo. Ahora les propongo que calculemos el cociente a/b.
- ¿Por qué?
- Nos va a dar un número muy particular.
- ¿Qué podemos hacer? ¿Qué datos nos aporta que los triángulos sean semejantes?
- Los ángulos son iguales.
- Los lados son proporcionales.

$$\begin{aligned} \hat{C}AD &= \hat{A}BE = \hat{B}CE \\ \hat{A}DC &= \hat{C}EB = \hat{B}EA \\ \hat{D}CA &= \hat{E}BC = \hat{E}AB \\ \hline \frac{b+d}{a} &= \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} \end{aligned}$$

- Trabajemos con estas igualdades y pensemos en el Teorema de Pitágoras...

Desde el momento de la formalización de la notación, la propuesta de trabajo es algebraica y se independiza de las piezas del Tangram (tans).

El profesor va guiando los siguientes pasos de la demostración:

$\hat{C}AD = \hat{A}BE = \hat{B}CE$   
 $\hat{A}DC = \hat{C}EB = \hat{B}EA$   
 $\hat{D}CA = \hat{E}BC = \hat{E}AB$

$\frac{b+d}{a} = \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$

(1)

De (1) tenemos que:  $(b+d) \cdot b = a^2$  (2)

Por Pitágoras en ADC:  $a^2 + b^2 = (b+d)^2$   
 $\sqrt{a^2 + b^2} = b+d$  (3)

Reemplazando 3 en 2:  $\sqrt{a^2 + b^2} \cdot b = a^2$  } elevando a cuadrado  
 $(a^2 + b^2) b^2 = a^4$  } distributiva  
 $a^4 - a^2 b^2 - b^4 = 0$   
 $\frac{a^4}{b^4} - \frac{a^2}{b^2} - 1 = 0$  } dividimos por  $b^4$ .

Si calculamos los valores de la ecuación obtenemos

$\frac{a^2}{b^2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

El profesor aclara que se toma la expresión  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  debido a que el cociente es positivo y la solución  $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$  es negativa.

- A este número (señalando al resultado de  $\frac{a^2}{b^2}$ ) lo denominamos Número de Oro y lo notamos  $\Phi$ .
- Entonces el cociente  $a/b$  es la raíz cuadrada de  $\Phi$ .

En el desarrollo (“demostración” por G1) mediante el que se llega a la expresión del Número de Oro, no se explicitan posibles interacciones con los alumnos, pero sí se observa un seguimiento detallado de los pasos algebraicos realizados. Puede sospecharse que subyace en este sentido que “a las demostraciones las realiza el profesor”.

También se encuadra brevemente el concepto tanto en términos históricos para dar indicios de su génesis así como en vinculación con objetos (naturales o contruidos por el hombre). Esto también había sido destacado en la cuestión *búsqueda* durante la ejecución de la segunda consigna del E2.2 referido al Tangram Chino -subapartado 4.2.1-. Se denota así la presencia de los *Principios de Realidad e Interrelación* de la EMR en tanto que ambos permiten anclar en un hecho concreto y cercano en relación con lo cotidiano y otras áreas. Se observa que si bien es el docente el que brinda información al respecto, se puede considerar la alternativa que sean los alumnos los que lo lleven a cabo.

- *Se trata de un número algebraico irracional que posee muchas propiedades interesantes y que fue descubierto en la antigüedad, no como una expresión aritmética, sino como relación entre dos segmentos de una recta, es decir, una construcción geométrica. Esta razón se encuentra tanto en algunas figuras geométricas como en la naturaleza: en las nervaduras de las hojas de algunos árboles, en el grosor de las ramas, en el caparazón de un caracol, en los flósculos de los girasoles, etc. Asimismo, se atribuye un carácter estético a los objetos cuyas medidas guardan la razón áurea. A lo largo de la historia, se ha atribuido su inclusión en el diseño de diversas obras de arquitectura y otras artes. Una de sus propiedades aritméticas más curiosas es que su cuadrado ( $\Phi^2 = 2,61803398874988\dots$ ) y su inverso ( $1/\Phi = 0,61803398874988\dots$ ) tienen las mismas infinitas cifras decimales.*

El **Número de Oro o áureo** es el valor numérico de la razón que guardan entre sí dos segmentos de recta  $a$  y  $b$  ( $a$  más largo que  $b$ ), que cumplen la siguiente relación:

La longitud total, suma de los dos segmentos  $a$  y  $b$ , es al segmento mayor  $a$ , lo que este segmento  $a$  es al menor  $b$ .

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

3-276-A5: Es por eso que a este rectángulo se lo llama “de oro” porque la razón es..., perdón. Esta relación que vemos acá, esta razón, tiene un nombre y es “Número áureo” o “de Oro”. Este es un número muy particular, es irracional como vemos acá. Se descubrió hace mucho tiempo y se puede encontrar tanto en figuras geométricas como en la

naturaleza, caracoles, en hojas de árboles, en sus ramas. Y se utiliza mucho en lo que es arquitectura, en las artes porque le da un aspecto como de...

3-277-A1: De belleza. **Es una concepción matemática de lo que sería la belleza.**

3-278-A5: Exacto.

3-279-A3: Eso, ¿puede ser que se vaya viendo con un espiral?, algo de eso.

3-280-A1: Sí muchos de los espirales son así.

3-281-A11: La tarjeta de colectivo también, tiene proporción áurea.

3-282-A1: Sí, porque dicen que a simple vista es más lindo ver cosas que tengan esta proporción.

Se vuelve al rectángulo inicial de esta propuesta y se rescata esa misma proporción entre otros lados de los triángulos que forman parte de él. Los pasos algebraicos necesarios son similares a los realizados en la “demostración” del Número de Oro. No se detalla si se propondría como actividad para los alumnos, como construcción conjunta o contada por el docente.

- *Profe, ¿vale esto para el segmento  $b + d$ ?*
- *¿Qué te parece?*
- *No sé.*
- *Intentemos probarlo.*

$\hat{C}AD = \hat{A}BE = \hat{B}CE$   
 $\hat{A}DC = \hat{C}EB = \hat{B}EA$   
 $\hat{D}CA = \hat{E}BC = \hat{E}AB$

$$\frac{b+d}{a} = \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$$

(1)                      (4)

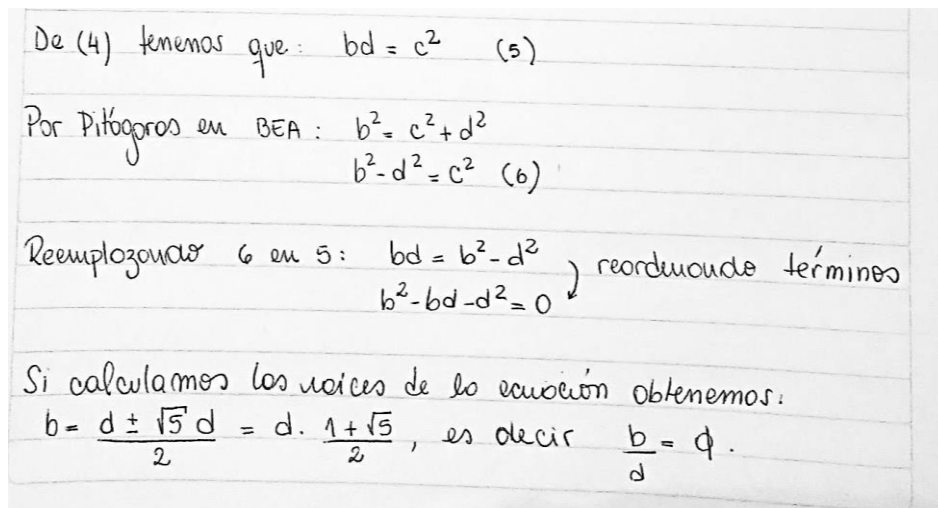
De (1) tenemos que:  $(b+d) \cdot b = a^2$  (2)

Por Pitágoras en  $\hat{A}BC$ :  $a^2 + b^2 = (b+d)^2$   
 $\sqrt{a^2 + b^2} = b+d$  (3)

Reemplazando 3 en 2:  $\sqrt{a^2 + b^2} \cdot b = a^2$   
 $(a^2 + b^2) b^2 = a^4$  } elevando al cuadrado  
 $a^4 - a^2 b^2 - b^4 = 0$  } distributiva  
 $\frac{a^4}{b^4} - \frac{a^2}{b^2} - 1 = 0$  } dividimos por  $b^4$ .

Si calculamos las raíces de la ecuación obtenemos:

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$



- Igual profe, eso nos sirvió para ver que la razón era  $\Phi$ , pero la igualdad de la definición la podemos ver por la semejanza de triángulos.  $\frac{CA}{DC} = \frac{BA}{EA}$  que es lo mismo que  $\frac{b+d}{b} = \frac{b}{d}$

Se logra, en diferentes momentos de la planificación, conectar los contenidos trabajados, como semejanza y razón áurea más allá que curricularmente estén en diferentes Ciclos del Nivel Secundario. Todos los contenidos propuestos son trabajados partiendo de la manipulación de las piezas en grado creciente en el avance de las propuestas. Se destaca en una primera instancia el análisis de las piezas (necesario para introducir el concepto de semejanza) y en una segunda instancia el armado de otras figuras planas con características particulares entre sí (necesarias para introducir el concepto de concavidad y convexidad como también el armado posterior de nuevas formas).

La figura de la cual surge la disección del Tangram es utilizada en una de las actividades propuestas (Número de Oro), cobrando valor la disección y las posiciones de las piezas.

La propuesta sobre el Número de Oro resulta novedosa para el resto de los estudiantes de PEII; algunos de ellos manifiestan no conocer este número y otros que solo les han hecho mención durante la formación.

#### 4.2.2.2. Tangram Cardiotangram (G1)

El formato que se utiliza responde a las referencias indicadas en el Tangram de Brünger, e incluye aquellas que tienen que ver con la tipografía utilizada en cada momento de la planificación.



Los temas seleccionados como posibles para trabajar con el Tangram forman parte de la planificación y son institucionalizados por el docente. Todos ellos pertenecen al eje Geometría y Medida, ubicados en primer año del Nivel Secundario.

Contenidos que se pueden desarrollar

- Circunferencia.
- Círculo.
- Radio.
- Diámetro.
- Arcos de circunferencia y sectores circulares.

Se distinguen en la propuesta cuatro actividades. En cada una de ellas se involucra al menos uno de los contenidos mencionados.

En la primera se parte de concepciones previas que tienen los alumnos para luego definir el concepto de circunferencia y círculo.

**Circunferencia y círculo**

- *¿Qué figura o figuras conocidas se pueden formar con las piezas curvas?*
- *Un redondel.*
- *Un círculo.*
- *La mitad de un círculo.*
- *Y con las restantes piezas, ¿qué figura o figuras geométricas conocidas pueden formar?*
- *Un cuadrado.*
- *No sabemos.*
- *No logramos formar una figura conocida.*

En caso de que no logren formar el cuadrado, el profesor pregunta:

- *¿Se podrá formar con estas piezas un cuadrado?*

Se denota en la primera manipulación de las piezas una clasificación entre las que tienen al menos un borde curvo de aquellas que representan un polígono. No necesitan entre estas últimas una subclasificación. Esto puede asociarse a que entre los polígonos se encuentra un triángulo y tres cuadriláteros distinguibles entre sí, mientras que entre las piezas curvas hay congruencias. En esta actividad se pone en juego la manipulación en el armado de figuras sin conocer previamente la silueta a armar, lo que posibilita cierto grado de libertad en la ubicación de las piezas.

Acorde al *Principio de Niveles* de la EMR, se denota una gradualidad creciente en la manipulación de los tans. Se comienza comparando los bordes de las mismas para continuar con comparaciones de área, no de una pieza con otra sino entre figuras armadas.

El docente dejará que los alumnos intenten formarlo. Una vez que lo logren, preguntará:

- *Ahora, si superponemos las figuras que logramos armar (círculo y cuadrado), ¿qué podemos observar?*
- *El círculo entra justo en el cuadrado.*
- *El círculo es más chico que el cuadrado.*
- *¿Los bordes de las figuras se tocan en algún punto?*
- *Sí, los cuatro lados del cuadrado tocan al borde del círculo en algunas partes.*

En esta interacción planificada se pone en juego el contenido “circunferencia inscrita” el cual no es formalizado, pero sí observado por los alumnos al distinguir las características en la superposición del círculo y el cuadrado.

Los conceptos que se formalizan pueden distinguirse en el círculo armado por los alumnos y a su vez posibilita nuevas relaciones con otros temas (por ejemplo la característica de equidistante) que involucra la manipulación de piezas para así deducir el concepto de circunferencia.

Aquí el docente institucionalizará los conceptos de circunferencia y círculo.

Una **circunferencia** es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo.

Un **círculo** es una superficie plana limitada por una circunferencia.

En la segunda actividad el contenido puesto en juego es el diámetro de una circunferencia. Durante el desarrollo se focaliza en la observación del círculo armado en la actividad anterior y en la inclusión de otros elementos para la identificación de segmentos, como por ejemplo marcadores o elementos de medición convencional o no convencional.

### **Diámetro**

- *Unamos ahora los puntos opuestos (respecto del centro) y observemos el segmento que se forma.*
- *Si tomamos dos puntos cualesquiera de la circunferencia, ¿existirá un segmento de mayor longitud que el anterior?*
- *No sé.*
- *Creo que no.*
- *Parece que no.*
- *¿E igual?*
- *Parece que sí.*
- *No sé.*
- *Sí, si tomo los otros dos puntos opuestos.*

Aquí el docente institucionaliza el concepto de diámetro.

El **diámetro** es el segmento de recta que pasa por el centro y une dos puntos opuestos de una circunferencia.

Están presentes desde el comienzo las concepciones de los alumnos, por ejemplo la de “puntos opuestos” a partir de un punto dado y “segmentos congruentes”, como ideas que construyen y sostienen el concepto. Pensar en brindar estas herramientas a partir de las cuales los alumnos pueden construir y modelar situaciones es lo que plantea el *Principio de Actividad* de la EMR. El mismo se puede apreciar en la institucionalización del diámetro, el segmento de recta que une puntos opuestos de la circunferencia es condición suficiente para distinguirlo.

En la tercera actividad se retoma la manipulación de los tans para comparar longitudes de segmentos, opción no adoptada en el trabajo con el diámetro.

### **Radio**

- *¿Podemos encontrar “a simple vista” el punto medio del diámetro?*

En caso de que se dificulte, el docente guía a los alumnos a quitar dos piezas del círculo para que puedan superponer el cuadrado formado en la primera actividad y observar que el lado de la pieza cuadrada del Tangram es la mitad del diámetro.

- *Ese punto se llama “centro del círculo” o “centro de la circunferencia”. Superpongan una pieza del círculo con la pieza cuadrada. ¿Qué pueden observar con respecto a ese lado?*
- *El lado del cuadrado es igual al lado de la porción del círculo. Vemos que esa longitud es la mitad del diámetro.*
- *Si tomamos la pieza más pequeña del círculo, cuyo lado representa la mitad del diámetro, y la rotamos sobre el centro del círculo, superponiéndola sobre él, ¿qué podemos observar entre el centro y los puntos de la circunferencia?*
- *Que todos los puntos del borde del círculo (circunferencia) tienen la misma distancia al centro.*
- *Que están unidos por el lado de la pieza pequeña del círculo.*

El <b>radio</b> de una circunferencia es cualquier segmento cuyos extremos unen el centro y cualquier punto de dicha circunferencia.
--

En la última actividad propuesta se hace necesaria la subclasificación de los tans con algún borde curvo y la comparación entre ellas respecto al tamaño.

### **Arcos de circunferencia y sectores circulares**

- *Ahora trabajemos solo con las piezas que forman el círculo. Clasifiquen y comparen las piezas de acuerdo a su tamaño, y anoten la cantidad de veces que entran las más pequeñas en las más grandes y en el círculo. Con esta información realicen un cuadro.*

No se profundiza sobre el cuadro pedido el cual puede ordenar la información. Es una actividad valorada por G1 por integrar las propuestas de los dos tipos de Tangrams.

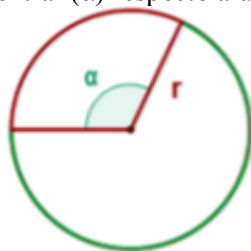
Realizamos una puesta en común.

- *¿Qué tamaños de piezas hay?*
- *Pequeñas y grandes.*
- *¿Se repiten las pequeñas? ¿O son distintas?*
- *Se repiten.*

- *Son dos iguales.*
- *Son dos iguales pero de distinto color.*
- *Tomando una de las piezas pequeñas, ¿cuántas veces vemos que entra en una de las grandes?*
- *Dos veces.*
- *¿Y en el círculo?*
- *Ocho veces.*
- *Y las grandes, ¿se repiten? ¿O son distintas?*
- *Sí, se repiten.*
- *Son tres iguales.*
- *Son tres iguales pero de distinto color.*
- *Tomando una de las piezas grandes, ¿cuántas veces vemos que entra en el círculo?*
- *Cuatro veces.*
- *¿Conocemos cuánto mide el ángulo central de la circunferencia? ¿Es algún ángulo conocido?*
- *Sí, un giro completo. O sea que mide  $360^\circ$ .*
- *Entonces, si la pieza grande entra cuatro veces en el círculo, ¿podemos saber cuánto mide el ángulo de esa pieza?*
- *Sí,  $90^\circ$ .*
- *Usamos regla de tres y obtenemos que nos da  $90^\circ$ .*
- *¿Podemos ver alguna relación entre los ángulos y la porción que ocupa la pieza respecto al círculo?*
- *Sí, es la misma.*
- *Si la pieza ocupa un cuarto de círculo, entonces el ángulo de dicha pieza también es un cuarto del ángulo central.*
- *¿Ocurre lo mismo con la pieza pequeña?*
- *Sí, la pieza pequeña entra ocho veces en el círculo, entonces el ángulo de dicha pieza es  $45^\circ$ .*
- *Muy bien. ¿Qué podemos observar con relación al tamaño de las piezas y sus ángulos?*
- *Si la pieza es más chica, el ángulo también.*
- *Estas piezas se llaman sectores circulares si nos referimos al círculo, y arcos de circunferencia si nos referimos a la circunferencia. Dependen del ángulo, y cuanto mayor sea, mayor es el sector circular o arco.*

Entre los conocimientos de soporte que se puedan detectar en esta última actividad, se destacan “relaciones entre ángulos” y “ángulo central”. Antes de la institucionalización se mencionan algunas relaciones entre arco de circunferencia, ángulo central y sector circular.

Se denomina **arco de circunferencia** a la porción de circunferencia delimitada por un ángulo central ( $\alpha$ ) respecto a un radio.



Se denomina **sector circular** a la porción de círculo delimitada por un ángulo central respecto a un radio.

A partir de una mirada global de las acciones llevadas a cabo por G1 en las actividades de cada propuesta, se confecciona la Tabla 4.9 donde se detalla en orden secuencial el uso del Tangram en cada momento dentro de cada planificación. En la misma se distinguen acciones que se reiteran en ambas propuestas marcadas con el mismo color (sin incluir el color negro) y en cursiva se denotan los distintos usos referentes a una misma acción.

Tabla 4.9. Uso del Tangram de Brügnier y Cardiotangram

Brügnier	Cardiotangram
Clasificación de piezas y distinción de las características de cada una.	Clasificación de piezas en dos grupos, sin distinción de cada uno.
Movimientos de piezas para la deducción de un concepto.	Construcción de figuras sin silueta previa.
Construcción de figuras con siluetas dadas.	Superposición de figuras.
Incorporación de elementos extras para la observación de figuras.	Incorporación de elementos extras para la observación de figuras.
Armado y utilización de la figura patrón.	Movimiento de piezas para el reconocimiento de elementos de la figura.
Abstracción a partir de una figura armada.	Subclasificación de un grupo particular de piezas, distinguiendo las características de cada una.

Los contenidos involucrados y lo que se pretende desarrollar de ellos, da lugar al orden de las acciones en cada propuesta, marcan distintas intencionalidades y evidencian en cada Tangram un uso particular. Esto materializa indicios relativos a la categoría *tipos de actividad* referida a la *Dimensión 3*.

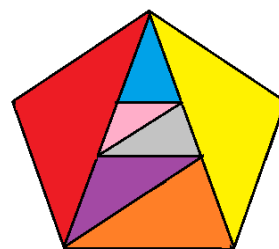
Las actividades diseñadas y las implementaciones de las micro-clases evidencian el rol activo que se espera del alumno (*Principio de Actividad*) marcado en todo momento por el hacer al interior de cada grupo como en los intercambios del grupo-clase.

Si bien la manipulación de los tans aparece en la mayoría de las acciones de la Tabla 4.9, se observa que el nivel de manipulación de piezas está en estrecha relación con lo pedido en la actividad anterior y/o posterior (*Principio de Niveles*).

Las figuras patrón en ambos Tangrams son distintivas y dan lugar a la presencia de contenidos específicos según el MESF (2014) (categoría *contenidos/ejes* relativa a la *Dimensión 3*). Solo por nombrar algunos: en el Tangram de Brügnier es posible encontrar proporciones áureas, mientras que en el Cardiotangram se puede deducir la construcción de un círculo inscripto en un cuadrado.

#### 4.2.2.3. Tangram Pentagonal (G2)

Al comenzar la planificación y previo a indicar las actividades pensadas para el Tangram Pentagonal, se mencionan las



habilidades destacadas por G2 que se prevén relativamente desarrolladas en los alumnos, tomando a todas ellas como punto de partida.

### Contenidos previos

El análisis y construcción de figuras, argumentando en base a propiedades, en situaciones problemáticas que requieran:

- argumentar sobre condiciones necesarias y suficientes para la congruencia de triángulos;
- construir polígonos a partir de diferentes informaciones, y justificar los procedimientos utilizados en base a los datos y/o a las propiedades de las figuras;
- analizar afirmaciones acerca de propiedades de las figuras y argumentar sobre su validez, reconociendo los límites de las pruebas empíricas;
- identificar las condiciones necesarias y suficientes de semejanza entre triángulos;
- interpretar las condiciones de aplicación del Teorema de Thales e indagar y validar propiedades asociadas;
- formular conjeturas sobre propiedades de las figuras (en relación con ángulos interiores y lados) y producir argumentos que permitan validarlas.

Para llevar adelante la micro-clase se distinguen en la propuesta los momentos de la misma, los cuales se indican con diferentes tipografías.

### Referencias

- Times New Roman: gestión de la clase.
- Courier New: intervenciones orales.
- *Cambria Math cursiva: aclaraciones entre paréntesis.*

Los temas posibles a desarrollar con este tipo de Tangram pertenecen al eje Geometría y Medida del Nivel Secundario. Seis de los contenidos se encuentran en el Ciclo Básico del Nivel y específicamente razón áurea en el Ciclo Orientado según el Diseño Curricular (MESF, 2014).

### Posibles temas a trabajar con el Tangram

- figuras regulares e irregulares;
- trapecio escaleno e isósceles;
- razón áurea;
- Teorema de Thales;
- triángulos obtusángulos, acutángulos e isósceles;
- congruencia y semejanza de triángulos;
- propiedad de suma de ángulos interiores de cualquier triángulo.

Entre los temas seleccionados para desarrollar con el Tangram, se involucran a través de las actividades diseñadas: clasificación de triángulos según sus lados y ángulos; comparación de medidas de longitud y de ángulo; construcción de un pentágono regular; semejanza de pentágonos; semejanza de triángulos; suma de los ángulos

interiores de un triángulo y congruencia de triángulos. Al mismo tiempo, como acciones asociadas se destacan:

- a) observación y clasificación de piezas;
- b) construcción de la figura patrón;
- c) distinción y justificación de figuras semejantes en pentágonos regulares y triángulos;
- d) comprobación de la suma de los ángulos interiores de un triángulo;
- e) identificación de triángulos congruentes.

Se comienza el desarrollo de las actividades con la organización de los grupos de alumnos según la cantidad de ejemplares del Tangram (tres) que se encuentran a disposición. Las consignas de las actividades se entregan en formato papel a cada grupo. Esta disposición inicial se mantiene en toda la propuesta.

El docente entra al aula y saluda a los alumnos.

-Docente: buen día chicos, para la clase de hoy les traje un Tangram para que trabajemos con él en grupos. Formen tres grupos y le voy a entregar un Tangram a cada grupo.

El docente entrega un Tangram a cada grupo junto con la fotocopia de la actividad 1.

La primera actividad está centrada en el reconocimiento del Tangram y la caracterización de las piezas que lo componen. Se clasifican los triángulos según sus lados y ángulos, en una etapa de reconocimiento de esas características, como parte de los conocimientos previos de los alumnos.

### **Actividad 1**

Observar qué figuras componen a nuestro Tangram. Y clasificarlas según sus lados y según sus ángulos.

-Docente: Observen qué figuras componen a nuestro Tangram y clasifíquenlas según sus lados y según sus ángulos. Les doy unos minutos así lo piensan y después lo compartimos entre todos.

*Por si alguno no entendió la consigna o si necesita orientación, el docente pasa por los bancos atento a los grupos.*

Se distingue el accionar y la orientación docente (*Principio de Reinvención guiada* de la EMR) en función de la necesidad detectada en los alumnos y se atiende a las particularidades de cada grupo.

Desde la consigna queda abierto el tipo de registro asumido por cada grupo.

Luego de unos minutos se pasa a la puesta en común.

-Docente: Bueno, cuéntenme cómo los clasificaron.  
 Posible respuesta de alumnos: Según sus lados todos son isósceles.  
 -Docente: ¿Por qué?  
 -Posible respuesta de alumnos: Porque cada triángulo tiene dos lados iguales.  
 -Docente: ¿Y según sus ángulos?  
 -Posible respuesta de alumnos: Podemos clasificarlas en triángulos acutángulos (triángulos de color verde, lila y rosa) y triángulos obtusángulos (triángulos de color azul, naranja, celeste y amarillo).

*En caso que no recuerden los nombres de dichos triángulos el docente recordará que los triángulos acutángulos son aquellos cuyos tres ángulos internos son agudos y los obtusángulos son los que tienen uno de sus ángulos internos obtuso.*

Durante la caracterización en el grupo-clase de las piezas, no se necesita una distinción de cada una, pero sí un agrupamiento por compartir particularidades, aunque el docente (asumido por A2) utiliza los colores de cada pieza para distinguir las individualidades. La cantidad de piezas que forman el Tangram es considerada en la micro-clase y no así en la planificación.

3-387-A2: ¿Arrancamos?  
 3-388-T: Sí.  
 3-389-A2: ¿Cada grupo tiene el Tangram?  
 3-390-A (v): Sí.  
 3-391-A2: Bueno, lo primero que vamos a hacer es observar las figuras, **qué cantidad hay, qué tipos de figuras son.**  
 3-392-A (v): Triángulos.  
 3-393-A2: ¿Cuántos son?  
 3-394-A3: Siete.  
 3-395-A2: ¿Y qué pueden ver, según los lados y los ángulos?  
 3-396-A1: ¿Cómo, perdón?  
 3-397-A2: Según los lados y los ángulos.  
 3-398-A6: Acutángulos.  
 3-399-A1: No, obtusángulos.  
 3-400-A2: Algunos acutángulos, otros obtusángulos, ¿y según los lados?  
 3-401-A (v): Y **este parecería ser isósceles**/Tienen pinta de ser isósceles/Este también.

Al conocer que todas las piezas del Tangram Pentagonal son triángulos isósceles, se propone una notación general para todos los triángulos, previo a la actividad 2.

-Docente: Ahora sabiendo que los triángulos son isósceles llamemos a cada triángulo ABC, siendo AB y BC los lados congruentes de cada triángulo, completen la siguiente tabla que les voy a repartir con "iguales" o "distintos". (Actividad 2)

El tema que se aborda en la segunda actividad es la comparación de las medidas de los lados y los ángulos homólogos de todos los triángulos que forman el Tangram. Dicha

comparación de piezas puede llevarse a cabo a partir del acercamiento y/o superposición entre ellas.

### Actividad 2

Sean AB y BC los lados congruentes de cada triángulo, completar la siguiente tabla con “iguales” o “distintos”.

Los triángulos comparados son divididos en dos grupos (acutángulos y obtusángulos), con pares posibles de ellos, identificados con los colores de cada pieza.

El docente reparte la fotocopia con la tabla a completar.

Triángulos acutángulos						
Triángulos	Lados			Ángulos		
	AB	BC	CA	A	B	C
Lila y rosa	Iguales <sup>7</sup>	Iguales	Iguales	Iguales	Iguales	Iguales
Rosa y verde	Distintos	Distintos	Distintos	Iguales	Iguales	Iguales
Triángulos obtusángulos						
Triángulos	Lados			Ángulos		
	AB	BC	CA	A	B	C
Naranja y azul	Iguales	Iguales	Iguales	Iguales	Iguales	Iguales
Naranja y celeste	Distintos	Distintos	Distintos	Iguales	Iguales	Iguales
Celeste y amarillo	Distintos	Distintos	Distintos	Iguales	Iguales	Iguales
Amarillo y naranja	Distintos	Distintos	Distintos	Iguales	Iguales	Iguales

Luego de un rato pregunta a la clase si terminaron y pide que alguien lea cómo la completó. Se compara si todos completaron con lo mismo, hasta llegar a la respuesta correcta en todos los casos.

En la simulación de clase, esta actividad es nombrada pero no implementada en el aula. Se presenta en sus argumentos la independencia del resto de las actividades respecto a la tabla. Esta reflexión es elaborada luego de pensar en las actividades concretas.

3-430-A4: Y una actividad que habíamos propuesto pero que no la hicimos por el tiempo, porque no sabíamos si nos iba a alcanzar, era completar un cuadro para que comparen los lados de ciertos triángulos y se den cuenta...

3-431-A2: Los lados y los triángulos. La idea era que esa tabla la hiciéramos al principio para después con esa ayuda, más rápido buscar lo que seguía. **Pero nos parecía después con el tiempo que no era tan importante eso, si lo podían hacer igual.** Así que la sacamos.

La tercera actividad se enfoca en la figura patrón de este Tangram (pentágono regular), con la distinción de dos instancias: la construcción del pentágono y la semejanza.

### Actividad 3

Formar primero con todas las piezas un pentágono regular. Luego con cuatro piezas, un pentágono semejante al formado con la totalidad de las piezas.

<sup>7</sup>Las celdas con fuente de color gris fueron completadas por la tesista.

Durante el primer momento se pone en juego el armado de una figura específica, como única actividad en la que se realiza esta acción en la propuesta. Si bien la condición de “utilizar todas las piezas del Tangram” no resulta necesaria ser aclarada, como en esta instancia se pide a su vez otra construcción con menos cantidad de tans (cuatro), no estaría redundando la aclaración.

Se reparte la fotocopia de la actividad 3 y, luego de unos minutos, el profesor pasa por los grupos para ver qué figura formaron.

Posible resolución de alumnos:

Con todas las piezas:



La regularidad del pentágono se refuerza durante la implementación de la actividad realizando algún intercambio entre el docente y cada grupo de alumnos.

3-402-A2: [...] Bueno, la primera actividad que vamos a hacer es obviamente armar el pentágono que se forma con todas las figuras del Tangram. Acá alguien ya se adelantó, muy bien (*murmullo bajo, risas*). **El pentágono es regular** chicos.

3-403-A5: ¿Qué?

3-404-A2: Es regular el pentágono (*murmullo bajo, A2 pasa por los diferentes grupos para ver la construcción*) [...].

En una segunda instancia se trabaja la semejanza de figuras apelando al concepto previo de los alumnos, con la complejidad de la reducción en la cantidad de piezas a utilizar.

Con cuatro piezas:



La justificación sobre la semejanza de ambos pentágonos construidos es requerida durante la simulación. El desarme de la primera figura (pentágono regular patrón) lleva a tener que registrar las medidas necesarias para establecer la semejanza entre los pentágonos.

3-404-A2: [...] Ahora que los tres grupos pudieron armar el pentágono grande, vamos a hacer un pentágono semejante a este utilizando cuatro de las piezas, y como pistas les voy decir que son cuatro piezas chicas.

3-405-A (v): Bueno.

*Murmullo bajo.* A2 consulta con los grupos sobre el armado.

3-406-A2: Bueno, ya está, **ahora tienen que probar que son semejantes**, que los lados son proporcionales (*se dirige al segundo grupo que realizó la construcción*). ¿Y, qué pasa acá? (*risas*), las chicas ya hicieron toda la actividad, ese grupo y ese grupo ya verificaron que eran semejantes.



Figura 4.16. Simulación de alumnos en clase de G2

En conexión con lo realizado recientemente, la actividad 4 trabaja la semejanza de triángulos. A partir de ella se logra visibilidad de esta característica entre las piezas que componen el Tangram y no entre figuras armadas por las piezas.

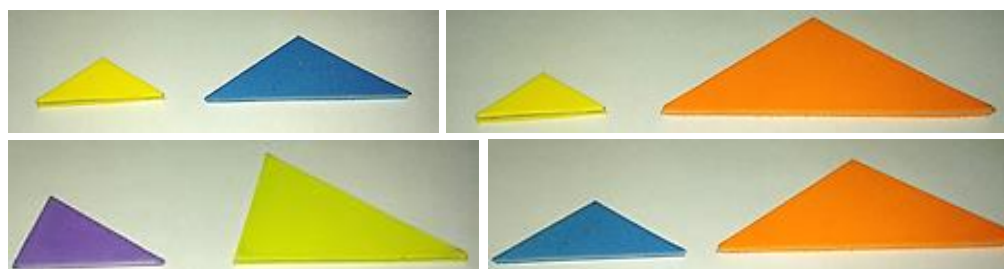
#### Actividad 4

Mostrar cuatro pares de triángulos semejantes.

Se otorga a los alumnos una fotocopia de la actividad 4.

El profesor pide que le muestren qué triángulos concluyeron que son semejantes.

Posible resolución de alumnos:



Si bien no se detallan interacciones en la planificación, durante la micro-clase se especifica la intención de la actividad con aquellos contenidos considerados previos y también posibles temas que se desprenden de la actividad.

*Intercambio de roles, A4 cumple el papel de la docente.*

3-407-A4: Bueno, pasando a otra actividad, les voy a pedir que busquen cuatro pares de triángulos semejantes (*murmullo bajo*). ¿El grupo de atrás escuchó la actividad?

3-408-A9: ¿Cuatro pares?

3-409-A1: ¿Cuatro pares distintos?

3-410-A4: Cuatro pares de triángulos semejantes.

3-411-A8: Pueden usar las mismas piezas.

3-412-A2: Acá, ¿encontraron los cuatro pares?

3-413-A4: Bueno, la idea de este ejercicio es que **primero sea más o menos a ojo semejantes y después pueden usar ciertos criterios de semejanza** que se supone que ellos ya saben. Por ejemplo el criterio de “ángulo, ángulo, ángulo”, y ven que los tres ángulos son respectivamente congruentes, u otro criterio, ¿cuál? Recuerden que estos triángulos habíamos visto al principio que eran isósceles y este ángulo va a ser igual a este, y este también va a ser isósceles. Cuando quieran hacer la razón, o sea la división de la longitud de este lado con la de este lado, va a ser la misma que la división de este lado con la longitud de este lado, y ahí tenemos también otro criterio de “lado, ángulo, lado” y comprobamos que son semejantes.

3-414-A2: También **se puede ver el Teorema de Thales** con esos mismos triángulos viendo o trazando las paralelas.

3-415-A3: ¿Así?

3-416-A2: Claro. Lo mismo con el pentágono grande y el chico midiendo los ángulos y la relación de los lados vieron que eran semejantes.

3-417-A4: Claro, como los pentágonos son regulares también la razón va a ser siempre la misma y nos quedan proporcionales los lados.

Se pretende en esta instancia de proceso de justificación, no solo verificar la relación de todos los lados y ángulos entre cada par de triángulos, sino utilizar las condiciones suficientes (criterios de semejanza) que garantizan la semejanza.

En la quinta actividad la manipulación tiene que ver con el movimiento de las piezas, cobrando valor la comparación de ángulos establecida en las actividades 2 y 4. El contenido que se trabaja es suma de ángulos interiores de un triángulo, donde se dejan explícitas desde la planificación las interacciones, que indican que los alumnos ya reconocen la propiedad.

### Actividad 5

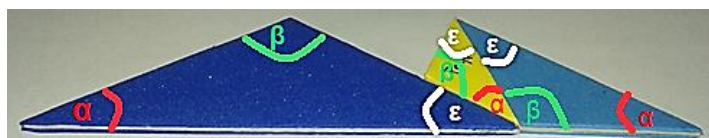
Con los triángulos y las relaciones de sus respectivos ángulos, mostrar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a un llano. Dibujar la forma obtenida.

Desde la consigna se invita a combinar el objeto concreto con su registro gráfico. Esto posibilita mayor perdurabilidad de la construcción realizada, al fijarla en papel (a diferencia de solo armarla con el rompecabezas).

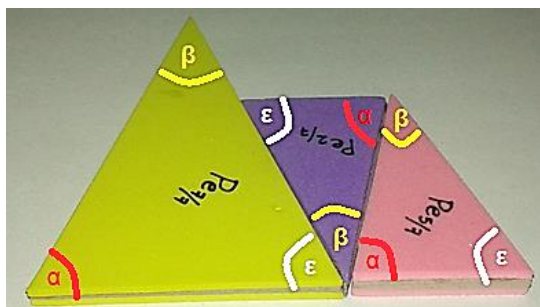
Se reparte la fotocopia de la actividad 5.

-Docente: Cuéntenme qué pudieron armar.

-Posible resolución de alumnos: Sabemos que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es  $180^\circ$  y, además, los tres triángulos (azul, amarillo y celeste) tienen los ángulos iguales uno a uno. Uniendo los tres triángulos uno al lado del otro en un mismo vértice de tal manera que queden juntos los tres ángulos que componen al triángulo, se forma un ángulo llano.



Otra posible respuesta se da análogamente con los triángulos verde, violeta y rosa.



Se pueden distinguir como contenidos esenciales en la actividad la congruencia de ángulos y semejanza de triángulos, también presentes en otras actividades en esta misma propuesta. Es una peculiaridad de este Tangram tener diferentes grupos de triángulos semejantes entre sí con al menos tres triángulos en cada grupo. Esto permite corroborar en dos triángulos diferenciados la propiedad pedida (suma de ángulos interiores), dejando en evidencia la independencia de la propiedad con respecto a los tipos de triángulos.

*Intercambio de roles, A8 cumple el papel de la docente.*

3-418-A8: Bueno, ahora vamos a la actividad 3 que con algunos triángulos (...) y también las propiedades que ustedes pudieron observar de esos ángulos, de los ángulos de esos triángulos. Tienen que mostrar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es un llano y dibujar la forma en la hoja.

3-419-A2: Fíjense de usar los triángulos que tengan lados iguales para poder completar la suma.

3-420-A (v): ¡Ángulos!/ **Ángulos iguales** (corrigiendo el comentario de A2 anterior).

3-421-A2: Ángulos (risa).

*Murmullo bajo. Comienzo del trabajo grupal durante 2 minutos.*

La última actividad aborda la congruencia de triángulos con un trabajo previo sobre congruencia de segmentos y de ángulos. En el desarrollo de la actividad se parte del reconocimiento de las condiciones que poseen dos piezas triangulares con esta característica.

### Actividad 6

Observar cuáles de los triángulos son congruentes. Pueden utilizarse como ayuda los datos obtenidos en la tabla de la actividad 2.

Se reparte la actividad 6.

El docente pregunta a los grupos qué obtuvieron y los mismos le muestran qué triángulos son congruentes.

Posible resolución de los alumnos:



-Docente: ¿Cómo se dieron cuenta que estos pares de triángulos son congruentes?

-Posible respuesta de los alumnos: Porque al superponer uno con otro vemos fácilmente que son iguales.

-Docente: Bien. Entonces para que dos triángulos sean congruentes, ¿qué se debe cumplir?

-Posible respuesta de los alumnos: Que los tres lados y los tres ángulos de los triángulos, sean respectivamente iguales.

Los triángulos congruentes pueden determinarse con las relaciones establecidas en las actividades previas, también a partir de la observación o superposición de piezas. Se construyen las primeras ideas del concepto de figuras congruentes, abriendo la posibilidad de profundizar en los criterios que establecen las condiciones suficientes de congruencia en triángulos.

3-425-A2: Bueno, hacemos otra actividad más. Vamos a ver cuáles de los triángulos son congruentes, comparándolos (*algunos segundos en silencio*).

3-426-A8: ¿Qué pueden observar, ahí que son iguales? ¿Por qué?

3-427-A11: **Porque se superpone...**

3-428-A3: Son los tres ángulos iguales y los tres lados iguales.

3-429-A8: Ajá.

*Murmullo bajo. Los miembros de G2 pasan por los grupos.*

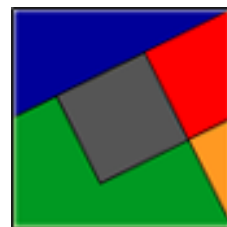
Cinco de las seis actividades propuestas se simularon en la clase, brindando un panorama ampliado del objetivo en cada actividad.

En todas las actividades se parte desde lo concreto (las piezas del Tangram) contextualizado en las habilidades previstas por G2. Se hacen visibles los *Principios de Realidad y Actividad*, en tanto que se propone un marco donde el alumno puede actuar. Con centro en las actividades, es posible realizar una distinción en cuanto al tipo de manipulación: la figura patrón del Tangram es utilizada en una de las actividades planificadas, como la única actividad que propone ese tipo de manipulación de piezas y en el resto de la propuesta se establecen relaciones entre las piezas.

#### 4.2.2.4. Tangram de Lloyd (G2)

Los contenidos previos que se indican para esta segunda propuesta por parte de G2, coinciden con los del Tangram Pentagonal.

Entre los temas explorados en la instancia del E2.1 entre estudiantes, se asocian a este Tangram algunos pertenecientes al Ciclo Básico del Nivel Secundario en dos de los ejes establecidos por el Diseño Curricular (MESF, 2014): Geometría y Medida, y Números y Operaciones. Los contenidos *figuras cóncavas y convexas* y *polígonos regulares e irregulares* pueden ser abordados en los dos años que forman el



Ciclo, mientras que el resto de los contenidos está ubicado en primer año del Secundario.

#### Posibles temas a trabajar con el Tangram

- Figuras cóncavas y convexas.
- Polígonos regulares e irregulares.
- Área de figuras irregulares a partir de la suma del área de figuras regulares.
- Porcentaje.
- Figuras de igual área y distinto perímetro (relación entre área y perímetro, figuras equivalentes).
- Fracción como “parte de”.

Al respecto se realizan actividades relacionadas con la distinción de figuras, semejanza de figuras, unidad de área no convencional, polígonos regulares y relación entre perímetro y área. La propuesta recorre cuatro actividades, donde en cada una de ellas hay al menos un contenido central y otros que se activan en el desarrollo de la misma.

En la primera actividad se distinguen dos consignas concatenadas entre sí con cierto grado de libertad. En la primera, la observación no se limita a ningún aspecto particular del Tangram y puede implicar por parte de los alumnos clasificar las piezas según los lados o ángulos o según concavidad y convexidad. En la segunda parte, si bien se determina la cantidad y los tipos de polígonos (triángulos y cuadriláteros) para mostrar la semejanza, es necesario armar figuras utilizando algunas o todas las piezas del Tangram. En este punto cobran sentido las características observadas en la primera parte.

#### **Actividad 1**

Observar qué figuras componen a nuestro Tangram. Mostrar tres triángulos semejantes, dos cuadrados semejantes y dos trapecios isósceles semejantes.

La justificación para asegurar la semejanza entre figuras (contenido de segundo año según el MESF, 2014) puede ser un implícito de la actividad, siempre que previamente hayan sido trabajadas las condiciones necesarias de semejanza entre figuras. Al mismo tiempo, los tipos de polígonos pedidos pueden ser un puntapié para la indagación sobre la semejanza de polígonos regulares independientemente de su construcción, como ocurre con el cuadrado, y no así con todos los tipos de triángulos y trapecios isósceles.

La siguiente actividad pone en juego la manipulación de tans a partir de la superposición y comparación entre ellos. Se genera desde el cálculo de área con una unidad no convencional, como es una de las piezas del Tangram. Resulta similar a una de las actividades realizada en el E1.2 utilizando el Tangram Chino, donde se elige la pieza de menor área como unidad de medida.

## Actividad 2

Usando como unidad de medida el triángulo pequeño de color azul (T), completar cuántas veces entra T en las demás figuras.

Figura	T
Triángulo rectángulo (azul)	
Cuadrado	
Trapezio rectángulo	
Triángulo rectángulo (celeste)	
Figura cóncava de 6 lados	

Otro contenido que se puede trabajar, tomando como base los posibles temas considerados por el grupo, es números racionales positivos pensando a las cantidades de triángulo unidad como partes de un entero (cada figura del Tangram).

Seguidamente, luego de trabajar con una unidad no convencional de área, en la tercera actividad se utilizan medidas no convencionales de longitud, con el objetivo de determinar polígonos regulares.

## Actividad 3

Observando las figuras del Tangram, sin utilizar la regla, mostrar qué polígono es regular y cuál no.

Se conjugan en esta actividad los tanteos y comprobaciones parciales obtenidas de la exploración de la primera parte de la propuesta (actividades 1 y 2), como por ejemplo las relaciones entre los ángulos y lados de los tans. Se puede notar en estas tres primeras actividades, que cada una tiene un objetivo y una acción particular a realizar que se va completando y complejizando con las posteriores, sostenida con un contenido matemático. Estas cualidades permiten caracterizar a esta propuesta como una instancia lúdica dentro de un proceso de enseñanza (García, 2019).

En la cuarta y última actividad se propone, por segunda vez, la construcción de figuras sin una silueta dada previamente, donde pareciera que no hace falta mencionar las condiciones básicas que se deben tener en cuenta para el armado de figuras con el rompecabezas. Se solicita vincular sus medidas de perímetro y área que, en este caso, son variable y constante respectivamente.

## Actividad 4

Utilizando las cinco piezas del Tangram formar diferentes figuras y relacionar perímetro y área.

Por las características de la disección del Tangram de Lloyd se pueden establecer distintas unidades de longitud (tomando cualquier lado de los tans) que permiten medir el resto de las piezas y representarse esta medida con un número racional positivo.

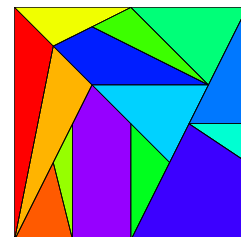
La manipulación de las piezas está presente en todas las actividades planificadas en este Tangram, e involucran diferentes *relaciones* entre ellas y *condiciones* en cada momento. En las actividades 2 y 3 se establecen *relaciones* de diferentes aspectos entre las piezas en función al área (superponiendo piezas) y al perímetro (encimando piezas). En las actividades 1 y 4 donde se construyen nuevas figuras sin una silueta específica, se observan distintas *condiciones*: en la primera se conoce el tipo de polígono a construir pero se deja librada la cantidad de piezas involucradas, mientras que en la cuarta actividad se conoce la cantidad de piezas pero no hay restricciones sobre el polígono a construir. En ambas se puede generar la figura patrón del Tangram sin darle mayor relevancia a la misma.

Como punto de encuentro entre las planificaciones elaboradas por G2 (Tangram Pentagonal y Tangram de Lloyd), las actividades no son introductorias al tema central que tratan sino que lo refuerzan. Desde este planteo, se disparan posibles profundizaciones de ese mismo ( semejanza de polígonos regulares en ambos Tangrams) o nuevos contenidos (no necesariamente pertenecientes al mismo bloque temático del tema central).

Con relación al tipo de actividad de cada propuesta, la manipulación entre las piezas está presente en todas las actividades de los dos tipos de Tangrams y marca la fuerza que tienen la *visualización* y *demonstración* en Matemática. Rabino y Bressan (2018), en el marco de la EMR, le atribuyen a la promoción de la visualización desde la enseñanza la posibilidad de constituirse en un apoyo. Las imágenes generadas con los tans de cada Tangram comprenden esquemas base con carácter explicativo pero con algún nivel de complejidad para el alumno, de modo de superar el enfoque tradicional donde la explicación de lo que se presenta viene dada de manera completa por el docente.

#### 4.2.2.5. Tangram Stomachion (G3)

En el desarrollo de esta propuesta se identifican a los actores involucrados con su letra inicial (D y A), las acciones que ellos realizan con formatos diferenciados y las actividades que la conforman.



Referencias:

En **negrita** las intervenciones del docente.

En *cursiva* aclaraciones.

D: Docente.

A: Alumno.

Actividades: Cambria.

*En la secuencia se trabaja en grupos de tres o cuatro alumnos.*

Se menciona en la propuesta que se promoverá el trabajo en pequeños grupos. Además se explicita la intencionalidad de cada actividad planificada a partir de observaciones que se intercalan. Esta manifestación de G3 se asocia al *Principio de Reinención guiada* (EMR) donde las acciones como docentes que se llevan a cabo en el aula son pensadas y delimitadas previamente.

Los contenidos trabajados en el desarrollo de las actividades pertenecen al eje Geometría y Medida del Ciclo Básico del Nivel Secundario. Entre ellos se menciona el Teorema de Pick, el cual, si bien no figura explícitamente en el Diseño Curricular, está asociado al cálculo de área a partir de la representación de una figura geométrica que es un contenido trabajado en el Ciclo.

Contenidos específicos

Polígonos: características y propiedades, área (con mediciones indirectas, Teorema de Pick).

En la micro-clase y previo al comienzo de las actividades se remarca la cantidad de piezas (14) como característica que tiene este Tangram respecto a los otros que integran el gabinete del PM. Además, se hace entrega de los enunciados de las actividades que se realizarán en formato papel a cada uno de los alumnos.

3-291-A3: Bueno, ese a diferencia del otro tiene muchas más piezas (*risas*).

3-292-A5: ¿Cómo se llama?

3-293-A3: Bueno la bolsa que les repartió A14... Stomachion.

3-294-A9: Stomachion.

3-295-A3: Lo que les repartió A14 son actividades que ahora vamos a tratar de hacerlas. El Tangram que les repartimos se llama Stomachion. **Como ven tiene 14 piezas diferentes.** Bueno, la primera actividad dice “describir las piezas del Tangram y enunciar por lo menos una propiedad de cada una de ellas”. Si quieren pueden ir diciéndolo oralmente así lo hacemos más...

De las cinco actividades planificadas, las primeras tres son implementadas de forma completa, mientras que la cuarta es realizada parcialmente y la quinta no se desarrolla en clase, por superar el tiempo destinado al trabajo con ese Tangram.

En la primera actividad se realiza una exploración del Tangram, se destacan las características de los tans y se establecen clasificaciones en cuanto a sus lados y ángulos. No se solicita un registro particular de la caracterización pedida.

### Actividad 1:

Describir las piezas del Tangram y enunciar por lo menos una propiedad de cada una.

**D: ¿Cuántas piezas tiene?**

A: 14.

**D: ¿Qué tipos de figuras son?**

A: Hay 11 triángulos, la mayoría distintos, dos cuadriláteros y un pentágono.

**D: Muy bien, ¿qué propiedades tienen esas figuras?**

A: De los triángulos, hay dos rectángulos, seis obtusángulos y los otros tres acutángulos; el pentágono tiene dos ángulos rectos, uno de los cuadriláteros tiene un ángulo recto y el otro tiene dos obtusos y dos agudos.

**D: Bien, esa es la clasificación por sus ángulos, ¿y por sus lados?**

A: Los triángulos son todos escalenos, el pentágono tiene dos lados iguales y los cuadriláteros tienen todos sus lados distintos.

**D: Muy bien, ¿las demás figuras qué propiedades tienen?**

A: El pentágono tiene dos lados iguales y los cuadriláteros tienen todos sus lados distintos.

*El docente también puede preguntar por otras propiedades de las figuras, como por ejemplo, cuánto suman los ángulos interiores de cada pieza, o cuánto miden los ángulos de cada pieza.*

Se proyectan en esta primera actividad posibles temas para trabajar que involucran a los ángulos interiores de polígonos y sus regularidades. A su vez, durante la simulación de clase surge la noción de congruencia entre las piezas, como tema para trabajar luego de esta actividad.

3-296-A9: ¿Qué tipos de figuras son?

3-297-A3: ¿Qué tipos de figuras son?

3-298-A8: Un triángulo, con ángulo obtuso.

3-299-A3: Bien, ¿y qué más?

3-300-A9: ¿Y cómo se llaman esos triángulos?

3-301-A10: Triángulo obtusángulo.

3-302-A3: Y con respecto a los lados, ¿qué podemos decir?

3-303-A (v): Que son todos distintos.

3-304-A3: ¿O sea?

3-305-A (v): Escaleno.

3-306-A9: ¿Todos están escuchando?

3-307-A6: No.

3-308-A3: Que ellas tomaron un triángulo.

3-309-A9: Tomaron este. ¿Qué pueden decir de este triángulo?

3-310-A10: Obtusángulo.

3-311-A9: ¿Y por sus lados?

3-312-A (v): Escaleno.

3-313-A3: Bien.

3-314-A9: A ver, ¿qué otra figura tenemos?

3-315-A1: Este es un cuadrilátero.

3-316-A5: Este es un equilátero.

*Murmullo bajo. Se comparten en simultáneo las características de las figuras en cada grupo de trabajo. Cada integrante de G3 está en algún grupo de alumnos y comentan las características.*

3-317-A3: ¿Qué son la mayoría de las piezas?

3-318-A (v): Triángulos.

3-319-A3: Triángulos. Y generalmente son todos obtusángulos.

3-320-A (v): Sí.

3-321-A9: Y escalenos.

3-322-A3: Ese es rectángulo.  
 3-323-A9: **¿Encontraron algún par de piezas iguales?**  
 3-324-A6: No.  
 3-325-A5: Sí.  
 3-326-A3: ¿Cuáles?  
 3-327-A5: Los triángulos naranjas.  
 3-328-A11: ¿Qué naranjas?  
 3-329-A9: Los triángulos naranjas.  
 3-330-A6: Esto no es rectángulo.  
 3-331-A3: Ah, ese no.  
 3-332-A9: Acutángulo.  
 3-333-A6: Ese, sí.

Se destaca en la micro-clase la presencia de dos tipos de intervenciones docentes: por un lado, con el grupo-clase (en concordancia con lo planificado) y, por otro, en el interior de cada grupo de alumnos.

La segunda actividad profundiza la manipulación de piezas en la formación de imágenes particulares, siendo un trabajo característico con los distintos tipos de Tangrams, en particular también para este.

Actividad 2:

En grupos de cuatro integrantes, con las 14 piezas del Tangram formar las siguientes figuras:



*Esta actividad está pensada para que los alumnos exploren con el Tangram y se familiaricen más con las piezas y sus propiedades. El docente pasa por los bancos preguntado cómo van pensando la actividad y guiando en caso de ser necesario.*

La utilización de todas las piezas que integran el Tangram es marcada como condición para la resolución de la actividad, no así la condición de no superposición de piezas o la de dejar huecos.



*Figura 4.17. Simulación de alumnos en clase de G3*

3-335-A14: Bueno, como **ya estuvieron mirando un poco las piezas**, vamos a la actividad dos que dice “en grupos de a cuatro, **con las catorce piezas del Tangram**, forma las siguientes figuras”. Ven que ahí (*se hace referencia a la fotocopia entregada a cada grupo de alumnos*) hay una figura, acá hay otra, un triángulo, esto es una “corona” dice.  
 3-336-A3: O tratemos de formar alguna en el tiempo que tenemos y vemos.

*Murmullo bajo. Se trabaja grupalmente en el armado de las figuras.*


3-337-A14: Chicos vamos cerrando la actividad.

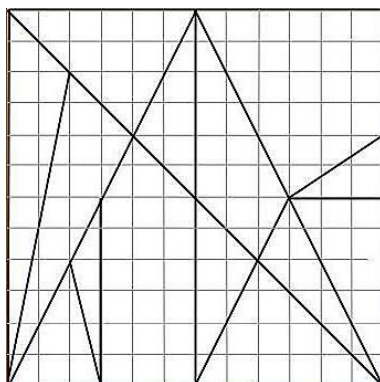
3-338-A3: Quedan cinco minutos en total.

3-339-A9: Sí, vamos a la actividad tres.

La tercera actividad utiliza la figura patrón del Tangram dispuesto en una grilla dada en formato papel con la intencionalidad de trabajar el cálculo de áreas a partir de unidades no convencionales, como es un cuadrado unidad.

### Actividad 3:

Calcular el área de cada figura del Tangram dispuesto en la cuadrícula tomando como unidad el siguiente cuadrado: 



*Esta actividad está destinada para que los alumnos trabajen con unidades de medición distintas a las que se usan habitualmente -metro cuadrado o centímetro cuadrado-. Como se desconocen las medidas de los lados de cada figura y se presentan, muchas de ellas, en posiciones que no son verticales ni horizontales requerirá del ingenio del alumno para la resolución. Mientras los alumnos trabajan en grupos el docente pasa por los bancos viendo qué estrategias usan o ayudando a elaborarlas. Luego se hará una puesta en común.*

*Pueden surgir diferentes estrategias: Contar la cantidad de cuadraditos completos que hay en la figura, y con las partes incompletas ir formando cuadraditos completos ya que las áreas de cada figura son números enteros de cuadraditos. Utilizar el lado del cuadradito como unidad de longitud, en base a eso utilizando Pitágoras por ejemplo, calcular los lados de las figuras y usar las fórmulas de área de cada figura, y para los cuadriláteros y el pentágono dividirlos en figuras en las cuales conocemos sus fórmulas de áreas.*

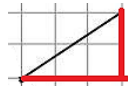
Se distinguen distintas estrategias para la resolución de la actividad. Por un lado, se apela al registro gráfico, en cuanto a la descomposición de figuras y congruencia entre ellas, y por otro, al registro simbólico para el cálculo de área mediante fórmulas conocidas o la aplicación de la relación pitagórica en figuras geométricas. En el desarrollo de una posible intervención se muestran las interacciones para seis piezas del Tangram: tres triángulos (rectángulo, acutángulo y obtusángulo), un pentágono y dos cuadriláteros. En cada ejemplo se brindan una o dos alternativas de descomposición de figuras.

**D: Bueno, ¿cómo hicieron para calcular las áreas, por ejemplo, de los triángulos?**

*Como hay 11 triángulos, el alumno puede tomar diferentes tipos de triángulos para responder la pregunta del docente; vamos a considerar un caso particular de respuesta, todas las demás tendrán un argumento similar.*

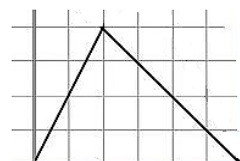
A: Por ejemplo, el triángulo rectángulo más pequeño vi que en la base, el lado del cuadrado chico entraba tres veces y para la altura entraba dos veces por lo tanto su área es tres por el área del cuadrado.

*El docente realiza un dibujo para representar la situación.*



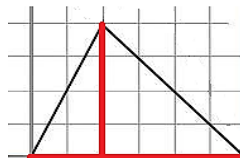
A: Y para este triángulo.

*El alumno señala el siguiente triángulo.*



A: En su base entran seis veces el lado del cuadrado y en su altura cuatro veces, por lo que su área es 12 por el área del cuadrado.

*El docente realiza el siguiente dibujo.*



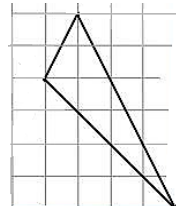
En estos primeros dos ejemplos (triángulo rectángulo y acutángulo) se hace hincapié en el cálculo de área a partir del uso de la fórmula. La ubicación de las piezas en la grilla favorece la identificación directa (desde la observación) de las medidas necesarias para su cálculo. En la resolución del tercer tipo de triángulo (obtusángulo) la disposición inicial no permite obtener de forma inmediata la longitud de sus lados en función a los cuadrados tomados como unidad. Se presentan, entonces, posibles descomposiciones en sub-figuras que sí cumplen con la condición antes mencionada (identificación directa de las longitudes de los lados). De este modo se contempla variedad de situaciones y resoluciones.

A: Pero hubo otros que estaban en una posición difícil que tuvimos que dividirlos en dos triángulos.

**D: A ver, ¿un ejemplo?**

A: Este.

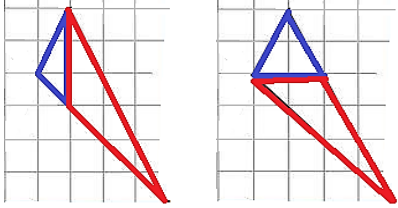
*El alumno señala el siguiente triángulo.*



**D: ¿Cuáles son los triángulos en que lo dividiste?**

A: Estos son.

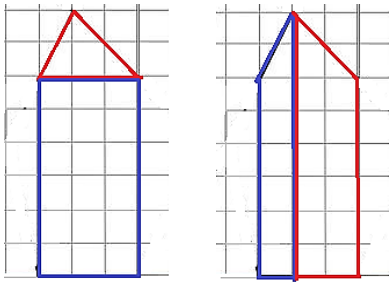
*El alumno puede considerar al menos las dos siguientes formas para dividir el triángulo, donde calcula que el área total del triángulo es seis veces el área del cuadrado.*



A continuación se muestra una posible resolución del único pentágono que forma parte de este Tangram. Si bien no presenta regularidades o condiciones para el cálculo de su área mediante fórmula de manera inmediata, su disposición en la cuadrícula (lados coincidentes con lados de los cuadrados unidad) permite descomponerla en triángulos y cuadriláteros donde sí es posible hacerlo.

**D: ¿Y para obtener el área del pentágono?**

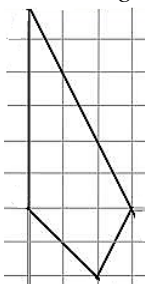
*El alumno puede calcular el área de dos formas diferentes. Una es dividiendo al pentágono en un triángulo y en un rectángulo y otra es dividirlo en dos trapecios. Se obtiene que su área es 21 por el área del cuadrado.*



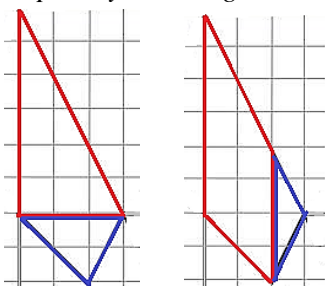
Una opción alternativa para el cálculo de área es contar los cuadrados o partes de ellos que se encuentran dentro del polígono. La misma surge principalmente de tener ubicados los polígonos en una grilla y resulta más cercana a lo que se trabajará luego. Al igual que lo realizado con el pentágono, los cuadriláteros que se presentan en la próxima interacción son los dos únicos que integran el Tangram. Pertenecen a la familia de los trapecoides con posibles descomposiciones en triángulos y cuadriláteros.

**D: ¿Y los demás cuadriláteros?**

*Para el siguiente cuadrilátero existen dos formas de dividirlo.*

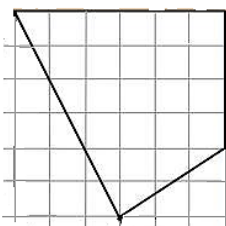


La primera es dividir la figura en dos triángulos y la segunda es dividirlo en un trapecio y un triángulo.



Su área total es 12 por el área del cuadrado.

Y el último cuadrilátero tendrá al menos tres formas diferentes de descomponerlo.



Se muestran dos maneras de dividirlo en un trapecio y un triángulo. Y la última forma es dividirlo en dos triángulos y un cuadrado.



El área total del cuadrilátero es 24 por el área del cuadrado.

Las seis piezas presentadas en las intervenciones desde la planificación son una muestra representativa de las 14 piezas del Tangram (en cuanto a diversidad). En efecto, el pentágono y los cuadriláteros son todos los existentes, mientras que los tres triángulos son representantes de la clasificación establecida según sus ángulos.

En esta actividad se prescinde de las piezas tangibles del Tangram y se comienza a utilizar el registro gráfico de las mismas dispuestas sobre una cuadrícula. Desde este registro se establecen nuevas conexiones entre las piezas y figuras, además de estrategias para el cálculo de área.

3-340-A9: Chicos, vamos a seguir con la actividad 3. Ahora vamos a ver cómo hicieron algunas. Bueno, la actividad 3, si ven en la fotocopia que tienen, están dispuestas las piezas del Tangram formando un cuadrado.

3-341-A3: En la cuadrícula.

3-342-A9: En una cuadrícula, les proponemos que calculen el área de cada pieza utilizando esa cuadrícula, con cada cuadrado como unidad (*murmullo bajo*). Fíjense que pueden usar alguna fórmula de área, **pueden pensar en alguna estrategia**.

3-343-A (v): Ah.

3-344-A9: Si quieren, acá tienen una tablita que pueden ir llenando.

3-345-A (v): Bueno.

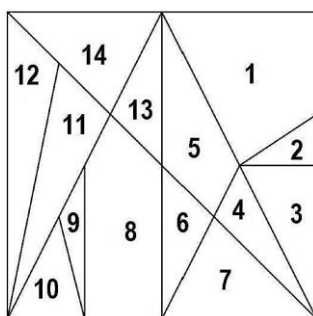
*Murmullo bajo. Los integrantes de G3 interactúan con los diferentes grupos de alumnos.*

Desde la simulación de clase se destaca una vinculación entre las actividades 3 y 4 en cuanto al registro que se emplea (representación gráfica de piezas así como de la figura patrón), y la utilización y organización de los resultados que se obtienen del uso de la tabla.

En la cuarta actividad se trabaja el proceso de conjetura de un teorema particular, además los conceptos de interior y frontera de una figura geométrica a partir del reconocimiento de puntos en una grilla, y también el recuento de dichos puntos. Se pueden distinguir tres momentos: de exploración, de conjeturación y de formalización. Al igual que la actividad 3, se prescinde del uso de las piezas tangibles del Tangram.

**Actividad 4:**

Teniendo en cuenta la siguiente numeración de las figuras y utilizando la cuadrícula anterior, completar la tabla:



En la tabla se reúne información de la actividad 3 (columna “Área”) junto con la cantidad de puntos frontera (columna “B”) e interiores (columna “I”) pedidas en esta actividad, permitiendo a su vez en cada fila establecer relaciones entre esas cantidades (los registros de las columnas deberían coincidir “Área” e “ $I + \frac{B}{2} - 1$ ”).

Figura	Área	B	I	$I + \frac{B}{2} - 1$
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				

Siendo:

B: Cantidad de puntos de la cuadrícula que coinciden con el borde de la figura.

I: Cantidad de puntos de la cuadrícula que están dentro de la figura.

Durante la simulación de clase, esta actividad se implementa para las primeras cinco figuras que presenta la tabla.

3-346-A9: Chicos para ir agilizando, vean la tabla que sigue en la hoja siguiente a la actividad. Y para las primeras cinco figuras vamos a calcular el área, que ya venían calculando, vamos a calcular el número “B” y el número “I”, donde “B” va a ser el número de puntos de la cuadrícula que coinciden con el borde de cada figura, por ejemplo, bueno ahí...

3-347-A3: Yo te lo voy dibujando.

3-348-A9: Está bien, dale. Y el “I” va a ser el número de puntos de la cuadrícula que sean interiores a la figura. ¿Se entendió, qué es “B” y que es “I”?

3-349-A (v): Sí.

3-350-A9: “B” va a ser la cantidad de puntos de la cuadrícula que coincidan con el borde de la figura y el número “I” va a ser la cantidad de puntos de la cuadrícula interiores a la figura. Y vamos a completar esa tabla para las primeras cinco figuras.

3-351-A3: Por ejemplo, si esta es la figura, el “B” son estos puntos, o sea todos los puntos que están sobre el borde, y el “I” son los puntitos que están dentro.

3-352-A (v): Ah, bueno.

3-353-A11: Y, **¿tenemos que contar la cantidad de puntos que tienen?**

3-354-A9: Sí.

3-355-A3: Claro, sí, de cada una de las figuras. Hagamos las primeras cinco figuras, así se hace más rápido.

3-356-A (v): ¿Las primeras cinco?

3-357-A3: Sí.

*Murmullo bajo. Trabajo grupal.*

En la socialización de lo que se registra en la tabla, específicamente en las coincidencias que se observan en los valores hallados en la segunda y última columnas, los alumnos se sorprenden ante esta alternativa de obtener el área a partir de puntos en una grilla, estrategia desconocida por ellos hasta ese entonces.

3-358-A9: Bueno un minutito para poner en común los números. A ver el área de la figura 1 ¿cuánto les dio?

3-359-A5: 24.

3-360-A9: ¿El “B” de la figura 1?

3-361-A5: No lo anotamos.

3-362-A9: Chicas los puntos del borde de la figura 1, ¿cuánto les dio?

3-363-A2: 6.

3-364-A9: 6, ¿los interiores?

3-365-A6: No chicas, no. Son todos.

3-366-A3: Son todos los que forman el borde, de la figura 1.

3-367-A7: 14.

3-368-A3: ¿14?, bien.

3-369-A2: 14, ah ahora sí.

3-370-A9: ¿Los interiores?

3-371-A (v): 18.

3-372-A9: ¿Y cuánto les da esta cuenta? “I” más “B” sobre 2.

3-373-A6: 18 más 7.

3-374-A1: ¿Por qué, más 7?

3-375-A6: 14 dividido 2.

3-376-A1: Ah.

3-377-A9: Fíjense es 18, más...

- 3-378-A6: 25 menos uno, 24.  
 3-379-A9: Más 14 dividido 2, menos 1.  
 3-380-A1: **Ah, ¡el área!**  
 3-381-A (v): Ah (*suspiros*).  
 3-382-A9: Bueno, muy bien. Eso es lo que se conoce como el Teorema de Pick.  
 3-383-A3: O como la fórmula de Pick.  
 3-384-A9: Bueno por tiempo no llegamos, pero en realidad la idea es hacerlo con todas las figuras y ver que en la tabla se verifica que esas dos cosas son iguales.



Figura 4.18. Simulación de docente en clase de G3

G3 reconoce en este Tangram particular la comprobación del Teorema de Pick. Esto puede deberse al número de piezas con que dispone para realizar la actividad (permitiendo mayor generalidad) y la distribución de la misma en la grilla.

Luego de la observación de la regularidad presente en los datos de la tabla, se encamina el proceso hacia la enunciación de la propiedad. A continuación se muestra el enunciado del teorema (si bien la intención no es mostrarlo directamente a los alumnos, según las referencias utilizadas en el comienzo de la simulación).

**Teorema de Pick:** Sea un polígono simple sobre una cuadrícula. Si B es el número de puntos de la cuadrícula que coinciden con los lados del polígono e I el número de puntos en el interior del polígono, entonces el área (A) del polígono se puede calcular con la fórmula:

$$A = I + \frac{B}{2} - 1$$

Usando como unidad el cuadrado que determina la cuadrícula.

En la intencionalidad de la actividad se prevé la dificultad en el reconocimiento de los puntos interiores y exteriores, que también pudo observarse durante la socialización de lo registrado en la tabla (actos de habla comprendidos entre 3-358-A9 y 3-384-A9, p.124).

*La intención de esta actividad es que los alumnos conjeturen la fórmula de Pick, que es una forma no convencional para calcular el área de figuras.*

*En esta actividad puede haber una complicación en entender cuáles son los números B e I. El docente deberá aclararlo bien. Puede ser realizando un ejemplo en el pizarrón de un polígono cualquiera con sus vértices sobre los puntos de una grilla y contar junto a los alumnos los números B e I para ese caso.*

*Después de completar la tabla se realizarán las siguientes preguntas para ayudar a los alumnos en la conjetura del teorema.*

La conjeturación del teorema va pasando por distintos niveles según lo establecido por Bressan et al. (2016). Se parte de un nivel *situacional* apegado a la grilla, pasando por el *referencial* al observar una regularidad, y llegando al *general* planteando el teorema para rectángulos cualesquiera. En esta evolución que se espera del alumno, se hace presente el proceso de *matematización vertical*. El docente en todo momento es la guía que provoca las intervenciones de los alumnos.

**D: ¿Hay algo que les llamó la atención?**

**D: ¿Qué pasa con las columnas del área y la última?**

A: Son iguales.

**D: Sí, son iguales, ¿por qué les parece que es así?**

A: Tendrá que ver con que estamos contando los puntos interiores y exteriores de la figura.

*Si no surge esa respuesta de los alumnos el docente podrá preguntar “¿Qué es lo que estamos contando en cada figura?”.*

**D: Sí, ¿recuerdan qué hicieron para obtener las áreas de cada polígono?**

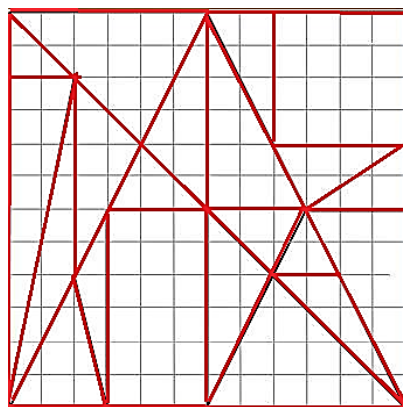
A: A algunas las obtuvimos directamente utilizando la fórmula de sus áreas y a otras las dividimos en varias figuras.

**D: ¿En qué figuras las dividieron?**

A: En trapecios, rectángulos, triángulos y triángulos rectángulos.

**D: Prueben dividir cada figura en rectángulos y triángulos como hicieron antes.**

*Una forma de división sería la siguiente.*

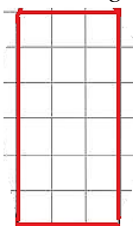


La disección de la figura patrón en otras más simples como rectángulos y triángulos permite inferir en esta primera instancia la preparación del escenario para comenzar con el análisis de casos particulares.

En este primer nivel de generalización se trabaja sobre uno de los rectángulos (una de las figuras más sencillas para lo que se está realizando) que se obtuvo de la subdivisión de la figura, haciendo foco en la obtención y conteo de los puntos para hallar los valores de B e I.

**D: Bueno veamos este rectángulo.**

*El rectángulo que señala el docente es el siguiente.*



**D: ¿Qué pueden decir de su área?**

A: En su base entra tres veces el cuadrado y en su altura seis veces, por lo que su área es 18 por el área del cuadrado.

**D: ¿Y cuántos puntos tiene en total?**

A: 28 puntos.

**D: ¿Cómo hicieron para saber la cantidad?**

*Los alumnos pueden contestar que contaron todos los puntos o vieron que, como la base es tres y la altura es seis, sumaron uno a cada uno y obtuvieron que el producto de cuatro por siete es 28; si surge la primera respuesta el docente puede decir: “Bueno, pero si vemos la base, ¿cuántos puntos tiene?”, el alumno contesta cuatro, “¿y su altura?”, luego dice siete, “entonces podemos multiplicar la cantidad de puntos que hay en la base y en la altura para obtener el total sin necesidad de contar todos los puntos”.*

**D: ¿Y cuántos puntos hay en la frontera?**

A: En dos de sus lados hay cuatro puntos y en los otros dos siete, por lo tanto hay 22 puntos.

**D: Bueno pero fijate que estás contando dos veces los puntos que están en los vértices del rectángulo, por lo que habría que restar cuatro.**

A: Entonces hay 18 puntos en la frontera.

**D: Exacto, ahora tenemos la cantidad total de puntos y la cantidad de puntos en la frontera, ¿podemos obtener la cantidad de puntos interiores?**

A: Sí, restamos la cantidad total por la cantidad de puntos en la frontera, obtenemos que hay 10 puntos interiores.

**D: Muy bien, entonces tenemos los números de B e I, si reemplazamos estos valores en la fórmula que se presenta en la última columna, ¿qué obtenemos?**

A: Nos da 18.

**D: Muy bien, ¿y qué más podemos ver?**

A: Que es igual a su área.

*El docente escribirá todo lo que estuvieron analizando los alumnos en el pizarrón.*

Al comprobar la igualdad de las áreas con todo el análisis realizado, se puede indagar sobre la relación de los valores de B e I que se pretende desde el teorema. Uno de los caminos es hacer alusión a la correspondencia biunívoca que existe entre uno de los vértices de los cuadrados unidad con los mismos cuadrados y así permitir acercarse a una posible interpretación de la fórmula de Pick.

Se continúa en la actividad con un rectángulo de dimensiones desconocidas y se lleva adelante un segundo nivel de generalización.

**D: Bueno, veamos qué pasa con un rectángulo de medidas m y n, ¿podemos calcular la cantidad total de puntos?**

*Aquí los alumnos pueden tener conflicto, el docente les recordará qué tuvieron en cuenta para el caso del rectángulo particular.*

A: Sí, en la base tenemos  $m+1$  y en la altura  $n+1$  por lo tanto hay  $m+1$  por  $n+1$  puntos en total.

**D: Muy bien, ¿y puntos en la frontera?**

A: Sería dos veces  $m+1$  más dos veces  $n+1$  menos cuatro porque estamos contando dos veces los vértices.

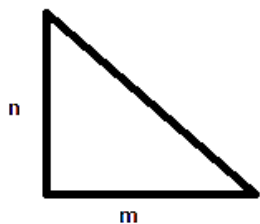
**D: Muy bien y si hacemos la resta entre el total y la cantidad de puntos de la frontera obtenemos la cantidad de los puntos interiores, entonces reemplazamos estos valores con los que aparece en la fórmula de la última columna.**

*El docente escribe en el pizarrón los valores de  $B$  e  $I$ , luego la fórmula y junto con los alumnos resuelven hasta obtener que sea igual a  $m$  por  $n$ , que es la fórmula del área del rectángulo.*

En esta instancia interviene un trabajo algebraico de las expresiones dadas en la tabla y se comienza con las medidas que puede tomar un rectángulo ( $m$  y  $n$ ). Se particulariza en las posibles piezas que se pueden obtener de la disección del cuadrado patrón del Tangram, como por ejemplo un triángulo rectángulo.

**D: Entonces acabamos de demostrar que la fórmula sirve para obtener el área de un rectángulo, ¿qué sucedería con un triángulo rectángulo por ejemplo de base  $m$  y altura  $n$ ?**

*El docente realiza el siguiente dibujo.*



**D: ¿Cuántos son los puntos de la frontera?**

A:  $n+1$  más  $m+1$  más los puntos que estén en la diagonal.

**D: Bien, pero recuerden que hay que restarle uno pues al vértice que une los lados de medidas  $m$  y  $n$  lo estamos contando dos veces y que solo sumemos los puntos que están en la diagonal que no sean los dos extremos.**

*El docente escribe estos datos en el pizarrón.*

**D: ¿Y cuántos son los puntos interiores?**

*Aquí el alumno puede contestar directamente que es la mitad de los puntos interiores del rectángulo de medidas  $m$  y  $n$ , o el docente tiene que recordarles que cuentan con la cantidad de puntos interiores de un rectángulo, esperando que ellos quieran dibujar el rectángulo para deducir la respuesta.*

*Luego el docente escribe la fórmula reemplazando por los valores que obtuvieron, determinando que el resultado es igual a la fórmula del área de un triángulo.*

A: Entonces para los otros triángulos podríamos hacer algo similar.

En un tercer nivel de generalización se prescinde del trabajo algebraico y de la contabilización de los puntos. Esto permite, bajo las condiciones propuestas, validar el Teorema de Pick.

**D: Muy bien, fíjense que a todas las figuras las habíamos dividido en rectángulos y triángulos, entonces podríamos obtener los puntos interiores y de la frontera de los cuadriláteros y del pentágono sumando los puntos**

**interiores y de la frontera de cada una de las divisiones restando los puntos que repetimos. Entonces, ¿qué podemos deducir de esta fórmula?**

A: Que sirve para obtener el área de una figura en las condiciones dadas.

La actividad concluye con la conjetura y formalización del teorema, con un análisis de las condiciones necesarias que deben cumplir los polígonos, poniendo en juego el concepto de polígono simple (sus lados no contiguos no se intersecan). Este concepto puede ser abordado a partir de esta secuencia.

**D: Entonces, si tuviéramos que escribir una conjetura de esta fórmula, ¿cómo sería?**

*Los alumnos podrían estar un poco confundidos en cómo escribir la conjetura, el docente realiza las siguientes preguntas para orientarlos.*

**D: Recuerden que para realizar todo este análisis que hicimos tuvimos en cuenta los puntos, entonces ¿sobre qué estructura están escritos estos polígonos?**

A: Sobre una cuadrícula.

**D: Muy bien, ahora estos polígonos, triángulos, cuadriláteros, pentágono, ¿qué tipo de polígonos son?**

A: Simples.

**D: Bien, entonces podríamos utilizar estos datos para iniciar a escribir esta conjetura.**

A: Sea un polígono simple sobre una cuadrícula.

**D: Muy bien, y podríamos ya definir a B e I.**

A: B es la cantidad de puntos de la cuadrícula que coinciden con el lado del polígono e I es la cantidad de puntos de la cuadrícula que están dentro del polígono.

**D: Bueno, acá ya tenemos nuestra hipótesis, podríamos ya escribir la tesis.**

A: Entonces el área del polígono se puede calcular con la siguiente fórmula y ahí escribimos la fórmula.

*A medida que los alumnos van armando la conjetura, el docente la plasma en el pizarrón.*

**D: Bueno, esta conjetura en realidad es un teorema conocido como Teorema de Pick, ya estuvimos viendo algunas demostraciones de este teorema, la clase próxima vamos a profundizar más en él.**

En la última actividad planificada se integran los contenidos trabajados, se retoma la manipulación de piezas del Tangram para el armado de figuras, combinado con las áreas obtenidas de cada pieza.

#### Actividad 5:

Utilizar las 14 piezas del Tangram para formar tres polígonos de manera que sus áreas sean tres números múltiplos de 12.

*Esta actividad está destinada a que los alumnos aprecien las distintas posibles combinaciones que hay para formar polígonos con las características pedidas; la intención es que los alumnos utilicen como datos la información obtenida en las actividades anteriores.*

En el desarrollo de las actividades se reconocen contenidos que fueron explicitados desde el comienzo de la planificación, otros sugeridos como posibles temas para

continuar trabajando y algunos que se destacan al adentrarse en cada actividad. A continuación se presenta en la Tabla 4.10 un relevamiento de los contenidos mencionados y el eje al que pertenecen.

Tabla 4.10. Contenidos asociados al Tangram Stomachion

Eje	Contenidos
Geometría y Medida	<p>Ángulos interiores de un polígono.</p> <p>Cálculo de área a partir de unidades no convencionales y uso de fórmulas.</p> <p>Clasificación y propiedades de polígonos.</p> <p>Interior y frontera de un polígono.</p> <p>Polígono simple.</p> <p>Representación gráfica de polígonos.</p>
Álgebra y Funciones	<p>Procesos recursivos: exploración y análisis de regularidades para la producción de fórmulas.</p>

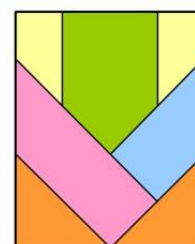
En similitud a lo ocurrido con el Tangram Chino, si bien se puede evidenciar mayor presencia en uno de los ejes (Geometría y Medida) del Diseño Curricular (MESF, 2014), los otros aparecen en integración con él y no de forma aislada (*Principio de Interrelación*). El Teorema de Pick es el contenido que permite abordarse desde múltiples aristas.

El uso del Tangram vinculado a contenidos geométricos, permite distinguir en esta secuencia las características y ventajas que posee un puzle geométrico reconocidas por van Hiele (1999/2009). Entre ellas se pueden nombrar las fases que posibilitan pasar de un nivel a otro, el enriquecimiento de las estructuras visuales y mentales, entre otras (subapartado 2.2.1).

#### 4.2.2.6. Tangram Pitagórico (G3)

Los tipos de letras utilizados en cada momento de la propuesta coinciden con los mencionados por el grupo en el subapartado 4.2.2.5 (Tangram Stomachion).

La forma de trabajo adoptada está predeterminada desde el comienzo de las actividades.



*En la secuencia se trabaja en grupos de tres o cuatro alumnos.*

Los contenidos propuestos en las distintas actividades pertenecen al eje Geometría y Medida del Ciclo Básico del Nivel Secundario. Si se tiene en cuenta que el MESF (2014) propone para primer año focalizar en las propiedades de los triángulos y en segundo año en las de los cuadriláteros, dadas las particularidades de las piezas del Tangram Pitagórico, puede trabajarse en ambos años del Ciclo Básico.

### Contenidos específicos:

- Polígonos: características y propiedades, perímetro y área (con mediciones indirectas).

En las cuatro actividades que integran esta planificación se detallan las posibles intervenciones entre el docente y los alumnos (no simuladas en la clase de PEII), donde el docente es quien realiza las preguntas y guía el proceso.

En la consigna de la primera actividad se pretende un primer acercamiento a las piezas desde la observación y la manipulación. Los contenidos involucrados son las propiedades de las figuras geométricas que representan sus piezas.

### Actividad 1

Describir las piezas del Tangram y enunciar por lo menos una propiedad de cada una.

En las interacciones, además de particularizar las características de cada pieza, se menciona la cantidad total de ellas que posee el Tangram. Para la distinción entre las piezas semejantes se hace referencia al tamaño de ellas.

**D: ¿Cuántas piezas tiene?**

A: Siete.

**D: ¿Qué tipo de figuras son?**

A: Hay dos triángulos iguales, cuatro trapecios, dos más chiquitos que son iguales, uno mediano y otro más grande, y un pentágono.

**D: Muy bien. ¿Qué propiedades tienen esas figuras?**

A: Los triángulos son rectángulos.

**D: Bien. Esa es la clasificación por sus ángulos. ¿Y por sus lados?**

A: Son isósceles.

**D: Muy bien. ¿Las demás figuras qué propiedades tienen?**

A: Los trapecios son rectángulos.

**D: ¿Por qué son rectángulos?**

A: Porque tienen un par de ángulos rectos.

**D: Muy bien. ¿Y del pentágono qué pueden decir?**

A: El pentágono es irregular, pero tiene tres lados iguales, y los otros dos iguales entre sí. Dos ángulos obtusos y tres rectos.

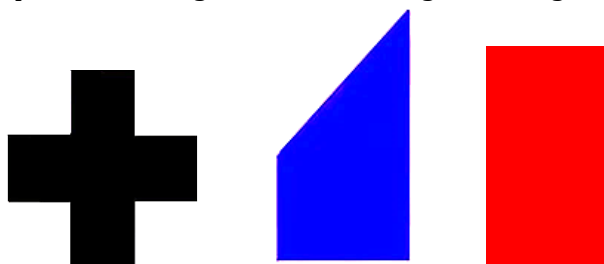
Se proponen otras vías de trabajos posibles a partir del desarrollo de esta primera actividad, pertenecientes también al Ciclo Básico del Nivel Secundario.

*El docente también puede preguntar por otras propiedades de las figuras, como por ejemplo, cuánto suman los ángulos interiores de cada pieza, o cuánto miden los ángulos de cada pieza.*

En la segunda actividad, la manipulación tiene un rol central a partir de la formación de imágenes utilizando todas las piezas del Tangram. Se destaca en la tercera imagen (rectángulo) la figura patrón de este Tangram.

### Actividad 2

Con las siete piezas del Tangram formar las siguientes figuras:



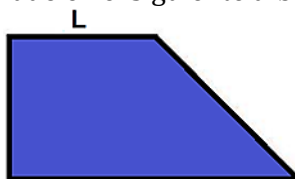
Desde las posibles acciones del docente, se puede reconocer el lugar brindado a los intercambios grupales entre los alumnos (*Principio de Interacción*), previsto desde un comienzo.

*Esta actividad está pensada para que los alumnos exploren con el Tangram y se familiaricen más con las piezas y sus propiedades. El docente pasa por los bancos preguntado cómo van pensando la actividad y guiando en caso de ser necesario.*

La tercera actividad combina tipos de registros (gráfico, simbólico) de cada una de las piezas tangibles del Tangram a partir de la representación de las longitudes de los lados de cada pieza desde una medida no convencional.

### Actividad 3

Calcular el perímetro de todas las figuras tomando como unidad el lado más pequeño del trapecio señalado en el siguiente dibujo:



Para encontrar el valor del perímetro se valen de las relaciones y herramientas analizadas previamente, como es la comparación entre los lados y las características de cada tans. En cada paso se va complejizando la obtención de las distintas longitudes. A lo largo de las intervenciones de esta actividad se reconoce que los alumnos pueden pasar por tres niveles propuestos por la EMR (*Principio de Niveles*), entre ellos el nivel situacional, referencial y general, teniendo en cuenta que el nivel alcanzado depende del desarrollo del alumno. Se muestran a continuación aquellas intervenciones que se podrían realizar con la pieza que contiene a la longitud unidad.

**D: ¿Qué quiere decir que la unidad sea L?**

A: Quiere decir que vamos a comparar todas las longitudes de los lados con L.

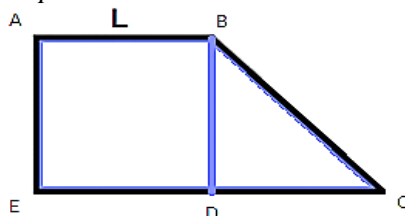
**D: Muy bien. Por ejemplo, ¿cuánto mide el lado opuesto al lado L?**

*Los alumnos deben pensar una estrategia para medir la longitud que se pide, como por ejemplo, tomar el otro trapecio pequeño, igual al dado, y ver cuántas veces entra el lado L en el lado que se quiere medir.*

*El docente puede guiar con preguntas como: ¿Cómo pueden medirlo sin utilizar regla? ¿Pueden tomar la longitud  $L$  utilizando alguna de las otras figuras?*

En un primer momento no se aclara acerca del modo de medición para encontrar las demás medidas, pero luego se da indicios de utilizar las congruencias entre los lados de las piezas. Estas primeras situaciones se pueden obtener desde la manipulación y las relaciones encontradas entre las piezas (nivel situacional). Además, se presentan otras situaciones que combinan lo anterior con un trabajo algebraico (nivel referencial); por ejemplo, la aplicación del Teorema de Pitágoras. Justamente este Tangram particular (que lleva el nombre del Teorema) cumple con la condición de que todos sus tans, en al menos uno de los lados, surgen de una relación pitagórica a partir de los otros lados.

*Otro punto de conflicto se puede dar cuando los alumnos tengan que usar el Teorema de Pitágoras para calcular la longitud del lado entre el ángulo obtuso y el ángulo agudo ( $BC$ ). El docente ayudará realizando el siguiente dibujo, trazando la paralela a  $AE$  que pasa por  $B$  e interseca a lado  $EC$  en  $D$ :*



**D: ¿Cómo es el ángulo BDC?**

A: Recto.

**D: ¿Por qué?**

A: Porque si considero las paralelas  $AE$  y  $BD$  cortadas por  $ED$ , los ángulos  $AED$  y  $BDC$  son correspondientes, por lo tanto son iguales.

**D: Entonces, ¿qué figura es el polígono BCD?**

A: Un triángulo rectángulo.

**D: Bueno y ¿cuál es la longitud del lado  $BD$  y  $DC$ ?**

*Los alumnos pueden responder que el lado  $BD$  mide  $L$  porque utilizaron el otro trapecio igual para medir sus lados o porque  $ABDE$  es un cuadrado y el lado  $BD$  va a medir lo mismo que el lado  $AE$ . Y con respecto al lado  $DC$ , tomaron la medida anteriormente del lado  $EC$  que medía dos  $L$  y, como  $ED$  mide  $L$ , también lo va a medir  $DC$ .*

A: Miden los dos  $L$ .

**D: Muy bien, sabiendo todos esos datos, ¿cuánto mide el lado  $BC$ ?**

A: Aplicando el Teorema de Pitágoras el lado  $BC$  mide  $\sqrt{2}L$ .

En esta situación aparece el conjunto numérico de los Irracionales, con posibilidad de realizar un primer acercamiento a los mismos, explorar sus características, o utilizar una aproximación y trabajar sobre el conjunto de los Racionales.

Se observa en las distintas interacciones que se van abordando diferentes temas de los distintos ejes como son el de Geometría y Medida, Álgebra y Funciones, y Números y Operaciones. A su vez se van integrando a medida que se avanza en la resolución de la

actividad dando cuenta del *Principio de Interrelación* que existe entre los bloques temáticos de los ejes.

Las justificaciones de cada valor encontrado son puestas en común y trabajadas en conjunto con el grupo-clase (nivel general).

*A partir de la intervención del docente, se les da un tiempo para trabajar en los grupos, con el docente recorriendo los bancos.*

**D: ¿Qué estrategias usaron para calcular la longitud de las demás figuras?**

A: Para los otros trapecios hicimos lo mismo que con el más chico, para los triángulos medimos los catetos con la medida L dada y vimos que su longitud era 2L y luego aplicamos el Teorema de Pitágoras para ver el valor de la hipotenusa.

**D: ¿Y con el pentágono?**

A: Con la medida L del trapecio más chico fuimos midiendo la longitud de sus lados.

**D: Muy bien, ¿alguien lo hizo diferente?**

A: Nosotros los trapecios y el pentágono los medimos igual, pero los triángulos medimos sus catetos con la longitud L y su hipotenusa vimos que era igual a dos veces  $\sqrt{2}L$ .

**D: Muy bien.**

El análisis presentado es representativo para el resto de las piezas. La expresión final del perímetro puede trabajarse también desde el conjunto de los Irracionales o de los Racionales. Si se opta por considerar este último conjunto numérico, también se puede desarrollar el reconocimiento de la inexactitud en la forma de expresar un resultado como contenido propuesto para el primer año del Nivel Secundario.

La última actividad prevista se trabaja, por un lado, con el perímetro de las piezas y, por otro, con el área de manera separada. Permite cierta vinculación entre ambas magnitudes, pero a su vez remarca sus diferencias, de modo de entenderlas como independientes entre sí, cuya concepción contraria está fuertemente arraigada.

#### Actividad 4

Teniendo en cuenta la actividad anterior:

- Ordenar de menor a mayor las figuras según su perímetro.
- Calcular el área de cada una de ellas.
- Ordenar de menor a mayor las figuras según su área.

*En una primera instancia los alumnos trabajarán con sus grupos.*

En el ejercicio de ordenar de menor a mayor los perímetros y las áreas de las piezas, se desprende la relación de independencia entre ambas magnitudes y la relación entre ambas en cada pieza del Tangram.

Para hallar el área de las diferentes piezas, se propone un trabajo similar al realizado para encontrar el perímetro, mediante la subdivisión en figuras más sencillas. Esta

estrategia tiene puntos de contacto con la diseñada por G3 para el Tangram Stomachion para el cálculo de área utilizando el Teorema de Pick.

**D: ¿Cómo hicieron para calcular el área de las distintas piezas?**

*Los alumnos pueden utilizar distintas estrategias para el cálculo de área:*

- *Para los triángulos utilizar su fórmula.*
- *Para los trapecios utilizar su fórmula o dividirlos en un rectángulo y un triángulo y calcular sus áreas por separado.*
- *Para el pentágono pueden dividirlo en un rectángulo y en un triángulo y calcular sus áreas por separado; dividirlo en cinco triángulos y calcular el área de cada uno de ellos, u otra forma, dividir el pentágono en dos trapecios rectángulos y calcular el área de ellos respectivamente.*

Se recopilan en la Tabla 4.11 diferentes temas reconocidos en las actividades que se trabajan en la secuencia o que disparan sus posibles desarrollos, distinguidos según los ejes determinados por el MESF (2014).

La exploración y manipulación de las piezas fue en grado creciente (actividades 1 y 2). Se emplean registros gráfico y simbólico (actividades 3 y 4) que fueron implicando un nivel de representación y esquematización de los polígonos vinculados a dichas piezas. Se marca la presencia en este sentido del *nivel referencial*, dentro de aquellos que conforman el proceso de *matematización vertical* (Fig. 2.2) donde la reflexión es provocada desde la consigna y preguntas-guía del docente.

*Tabla 4.11. Contenidos asociados al Tangram Pitagórico*

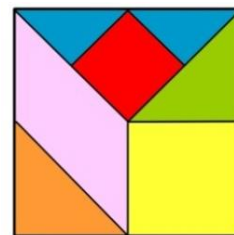
Eje	Contenidos
Álgebra y Funciones	Procesos recursivos: transformaciones de expresiones algebraicas en otras equivalentes a partir de las definiciones y propiedades de las operaciones.
Geometría y Medida	Polígonos: características y propiedades, perímetro y área (mediciones directas e indirectas), ángulos interiores, reconocimiento de la inexactitud del proceso de medición como contenido, representación gráfica. Teorema de Pitágoras.
Números y Operaciones	Números irracionales. Números racionales.

Si bien la figura patrón es utilizada en la segunda actividad de este Tangram, no hay un tratamiento particular por sobre las otras figuras.

En los dos Tangrams explorados por G3, se realiza un recorrido similar en cuanto al tipo de acciones y complejidad pedida en cada actividad. Se comienza con una exploración y caracterización de los tans. Se sigue con el armado de figuras utilizando todas las piezas y luego se lleva a la necesidad de adquirir otro tipo de registro para continuar profundizando el análisis de las piezas y desarrollando otros contenidos. Es posible advertir en estas acciones, en ambas propuestas, el *Principio de Niveles*.

#### 4.2.2.7. Tangram de Fletcher (G4)

Los seis contenidos que se abordan en esta planificación pertenecen a los ejes Álgebra y Funciones (uno), Geometría y Medida (cuatro) y Números y Operaciones (uno).



Contenidos involucrados:

- Área y perímetros de figuras planas.
- Semejanza de triángulos.
- Números fraccionarios.
- Características de figuras planas (ángulos, lados).
- Proporcionalidad.
- Teorema de Pitágoras.

Durante la micro-clase, se llevan adelante las actividades 1, 2 y 4, en las cuales se pueden observar las siguientes acciones:

- a) Observación y características de las figuras.
- b) Comparación de áreas de las distintas piezas.
- c) Construcción de figuras semejantes (cuadrado y paralelogramo).
- d) Cálculo de la razón de semejanza a partir de un valor dado.
- e) Cálculo de área y perímetro a partir de análisis previos.
- f) Surgimiento de distintos tipos de resoluciones.

Emplean un código de colores y tipografía presentes en toda la propuesta, que señalan los diferentes momentos de la misma.

#### Referencias

Guía de actividades: negro

Aclaraciones sobre el abordaje de la propuesta: **negrita**

Diálogo del profesor: *cursiva*

Resolución actividades: rojo

Posibles intervenciones de los alumnos: *verde cursiva*

Se detalla la forma de trabajo adoptada durante la secuencia y se entrega a cada grupo un ejemplar del Tangram de Fletcher.

**El profesor pide que formen grupos de tres o cuatro personas, y le entrega a cada grupo un Tangram.**

Sin enmarcarlo en una actividad concreta, se propone un primer nivel de exploración de las piezas que conforman el Tangram, a partir de la observación como acción principal.

*-¿Qué podemos observar en este Tangram? ¿Cómo está formado? ¿Qué características tienen sus piezas?*

*-Está formado por siete piezas.*

*-Dos pares de triángulos iguales, dos cuadrados y un paralelogramo.*

*-Hay dos triángulos pequeños y dos triángulos grandes.*

- Los triángulos son todos triángulos rectángulos e isósceles.
- Los cuadrados son uno más grande que el otro.

Caracterizar las piezas implica distinguir los tamaños de las mismas. De las siete piezas que se disponen hay un paralelogramo, dos cuadrados (semejantes) y cuatro triángulos rectángulos isósceles (congruentes dos a dos y semejantes).

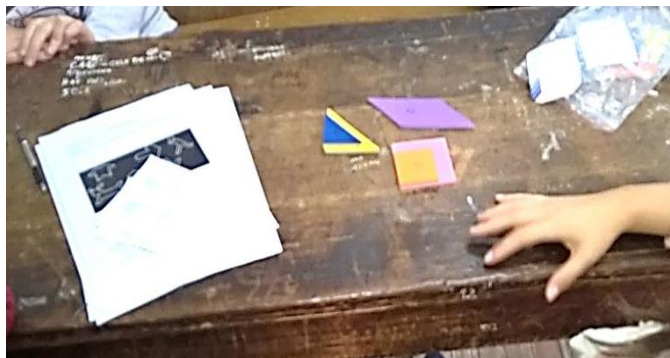


Figura 4.19. Simulación de alumnos en clase de G4

3-432-A10: Bueno, buenas tardes, vamos a trabajar con el Tangram Fletcher. Yo les voy a repartir, vamos a hacer grupitos, tres grupitos, y les voy a repartir los Tangrams. La idea primero es que observen un poquito cómo está formado este Tangram, cuáles son sus figuras, qué características tienen esas figuras y vamos charlándolo, ¿qué pueden observar?

3-433-A15: Hay cuatro triángulos.

3-434-A5: Dos cuadrados.

3-435-A10: Bien.

3-436-A11: Un paralelogramo.

3-437-A10: Bien. Y entre por ejemplo, **¿los cuadrados?**

3-438-A (v): Uno es más grande que el otro.

3-439-A3: Hay dos pares de triángulos iguales.

3-440-A10: Bien. **¿Y esos triángulos?**

3-441-A (v): Rectángulos e isósceles.

3-442-A10: Perfecto, hay dos pares de triángulos rectángulos e isósceles, los dos, ¿lo ven todos?

3-443-A (v): Sí.











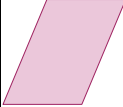
A partir de la distinción entre las piezas, se comienza con las actividades propuestas. En particular en la primera actividad, antes del enunciado, se encuadran algunos tipos de acciones manipulativas que pueden realizar con las piezas para resolverla. De esta manera se da indicios de la dirección pretendida en la actividad.

**Una vez que los grupos exploran el Tangram, se aborda la siguiente actividad para trabajar área de figuras planas.**

*-La idea de esta actividad es que puedan comparar las áreas entre las distintas figuras del Tangram, superponiendo las fichas o manipulándolas de las maneras que mejor consideren.*

#### Actividad 1

Comparar el área de cada figura que se encuentra en la columna con respecto al área de cada figura que se encuentran en la fila de la siguiente tabla:

					
	1	2	2	4	4
	$\frac{1}{2}$	1	1	2	2
	$\frac{1}{2}$	1	1	2	2
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1

Para distinguir las distintas piezas en la tabla se utiliza la representación gráfica de cada una respetando las proporciones observadas en la primera manipulación. Solo se representan las piezas no congruentes entre sí.

**El profesor deja unos minutos para que cada grupo piense y resuelva la actividad. Luego, realiza la puesta en común en el pizarrón y, además, cuenta al resto de los compañeros cómo resolvieron la actividad.**

**En la siguiente actividad, se trabaja con semejanza de figuras planas y con el Teorema de Pitágoras.**

Durante la micro-clase, la tabla se confecciona en el pizarrón y se explica lo que indica la primera columna junto con la primera fila. Se construye entre todos los alumnos y se recorre por fila. En cada celda se representa un número entero o racional (representado como fracción) que es plasmado por el docente. El mismo orden en la ubicación de las piezas permite observar regularidades en la matriz de valores que queda determinada en ella: la diagonal formada por 1 y cada celda y su traspuesta son inversas entre sí. En esta observación se da lugar a un trabajo con este tipo de estructura (matriz) que organiza dichos valores.

3-444-A10: Vamos a comenzar con la primera actividad, vamos a trabajar con el área de estas figuras, ¿sí? Vamos a hacer una tablita (*se construye la tabla en el pizarrón*), vamos a comparar las áreas de las figuras entre sí. Tenemos el triángulo chiquito, hay dos triángulos...

3-445-A (v): Iguales.

3-446-A10: Iguales. El más grande. Luego tenemos el cuadrado pequeño, el cuadrado más grande y el paralelogramo (*se van dibujando las piezas en la primera columna de la tabla*). Bueno y de este lado, vamos a volver a repetir las figuras (*se dibujan en la primer fila de la tabla*). Lo que vamos a hacer entonces, como dijimos, es comparar las áreas, por ejemplo, tomamos el triángulo chico, y lo comparamos con cada una de las otras figuras. Entonces, con el triángulo chico, ¿cómo son las áreas?

3-447-A (v): Iguales.

3-448-A10: Son iguales. Es decir, este triángulo si ustedes **lo superponen con el chiquito ven que coinciden**, ¿sí? Bueno, entonces, vamos a ir haciéndolo y registrándolo. Uno, el triángulo chiquito entra una vez en este triángulo. Ahora tomamos el triángulo más grande y comparamos, el triángulo chiquito ¿cómo es con respecto al área del triángulo más grande?

3-449-A11: Dos.

3-450-A10: Entra dos veces, ¿sí? El área del triángulo grande es el doble del chiquito. ¿Estamos bien?

3-451-A15: Sí.

3-452-A10: Y así, ¿quieren ir pensando un poquito, cómo podríamos terminar de completar este cuadro?

3-453-A5: Para abajo también tendríamos que completarlo, ¿no?

3-454-A10: Claro, después tomo el triángulo este y voy comparando nuevamente.

3-455-A (v): Ah.

3-456-A11: Bueno para seguir un orden...

3-457-A10: Por ejemplo este ¿cuántas veces entra en este?

3-458-A (v): **La mitad/Un medio.**

3-459-A10: Entonces este es la mitad de uno chiquito. Y así con todos. Quieren ir haciéndolo y después compartimos, a ver si coinciden (*murmullo bajo*). ¿Quieren ir diciéndome?

3-460-A1: Sí, dos.

3-461-A (v): Dos, dos, cuatro, cuatro.

3-462-A10: ¿Estamos todos de acuerdo? Fueron superponiendo y en este caso vemos que el triángulo chico entra cuatro veces en el cuadrado grande y cuatro veces en el paralelogramo. Podemos concluir que estos dos tienen igual área y el triángulo grande con el cuadrado también, fíjense que este triángulo entra la misma cantidad de veces en las dos figuras. ¿Sí, pasamos a este?

3-463-A (v): Un medio.

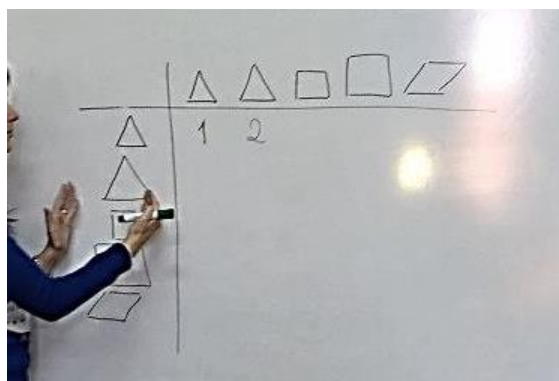


Figura 4.20. Simulación de docente en clase de G4

Una vez completas varias de las celdas se comienzan a establecer relaciones directas entre diferentes piezas a partir de valores obtenidos; por ejemplo, el mismo par de piezas tienen valores inversos y se ubican en celdas traspuestas entre sí.

3-465-A (v): Uno.

3-466-A5: **En sí mismo entra una vez.**

3-467-A10: Sí.

3-468-A5: En el cuadrado también uno.

3-469-A10: Bien, tienen la misma área, el triángulo más grande con el cuadrado chico tienen la misma área.  
 3-470-A11: Después, dos y dos.  
 3-471-A10: Perfecto. ¿Qué más? ¿El cuadrado en el triángulo chiquito?  
 3-472-A2: Un medio. Eh, con el triángulo grande, uno.  
 3-473-A14: Uno, dos y dos.  
 3-474-A11: No, uno, dos, dos.  
 3-475-A10: ¿Ahí? ¿El cuadrado grande con respecto al triángulo chiquito?  
 3-476-A (v): Un cuarto.  
 3-477-A10: **Un cuarto, entra cuatro veces el triángulo chico en el cuadrado grande.**  
 Bien, ¿con el triángulo más grande?  
 3-478-A (v): Un medio.  
 3-479-A10: ¿El cuadrado pequeño?  
 3-480-A (v): Un medio.  
 3-481-A10: Un medio, ¿y si lo superponen? Fíjense que no...  
 3-482-A11: No podemos.  
 3-483-A10: Tenemos que trabajar con los triángulos chiquitos, ¿no es cierto? Bien, dos.  
 3-484-A (v): Un medio.  
 3-485-A10: Perdón. Cuadrado grande y cuadrado grande, uno.  
 3-486-A (v): Uno.  
 3-487-A5: Y el paralelogramo también.  
 3-488-A10: También, tienen la misma área, cómo habíamos visto acá. ¿Y el último?  
 3-489-A (v): Un cuarto, un medio.  
 3-490-A10: Claro, **va a ser el mismo que esta fila, digamos.**  
 3-491-A (v): Sí.  
 3-492-A10: Porque el paralelogramo y el cuadrado grande...  
 3-493-A (v): Tienen la misma área.  
 3-494-A10: Tienen la misma área. Bueno.

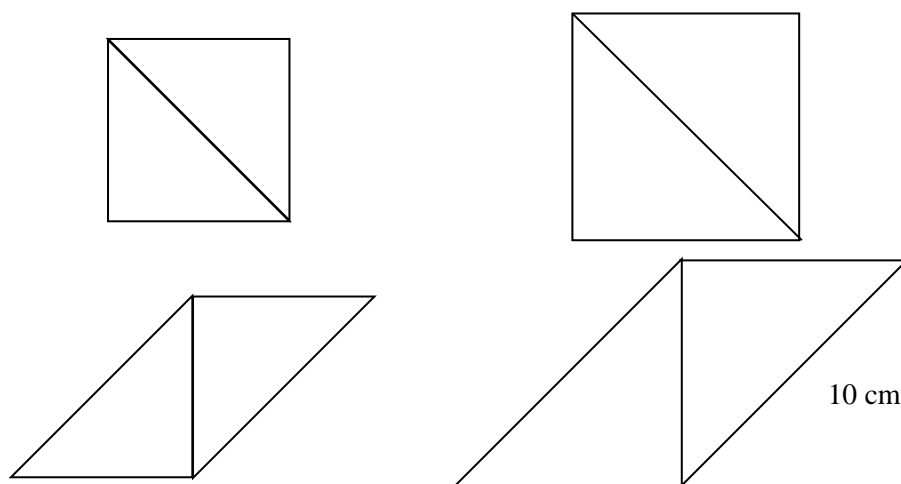
En la segunda actividad se invita a la construcción de pares de figuras geométricas, semejantes entre sí y con piezas determinadas.

### Actividad 2

Utilizando los triángulos del Tangram, construir dos cuadrados y dos paralelogramos semejantes respectivamente y hallar su razón de semejanza, sabiendo que la hipotenusa del triángulo grande mide 10 cm.

Se propone desde la consigna hacer una suposición sobre la medida de uno de los lados de la pieza “triángulo grande”, involucrada en la construcción de dos de las figuras.

3-495-A6: Bueno, ahora vamos a realizar otra actividad en la cual se pide que con los triángulos, con los cuatro triángulos del Tangram se construyan dos cuadrados y dos paralelogramos semejantes.  
 3-496-A2: ¿Semejantes?  
 3-497-A6: Sí, solo con los triángulos.  
 3-498-A2: Bueno (*murmullo bajo. Trabajo grupal*).  
 3-499-A6: **No es necesario que usen las cuatro fichas.**  
 3-500-A (v): Ah.  
 3-501-A6: Pueden usar menos.  
 3-502-A11: ¿Cómo?, ¿cómo es?  
 3-503-A6: Pueden usar menos fichas.  
 3-504-A (v): Dos cuadrados y dos paralelogramos semejantes.  
 3-505-A6: Dos cuadrados y dos paralelogramos.



La utilización de la medida propuesta para la hipotenusa del triángulo grande evidencia desconcierto entre los alumnos. Esto puede deberse al hecho de que no haya sido una construcción que surgiera de los alumnos mismos (*Principio de Actividad* de la EMR) o a partir de la guía del docente, sino que fue dada previamente al trabajo con la razón de semejanza.

3-506-A6: Bueno, ahora si ustedes miden la hipotenusa de los triángulos mayores van a ver que dan más o menos 10 centímetros. Vamos a acordar que miden 10 centímetros las hipotenusas de los triángulos grandes, ¿entienden?

3-507-A (v): **Sí/No** (*se duda al responder*).

3-508-A6: Vamos a acordar que miden 10 y sabiendo lo que mide eso, sin medir las otras vamos a calcular la razón de semejanza de los paralelogramos y los cuadrados, ¿se entiende?

3-509-A: Sí.

3-510-A6: **Teniendo solo ese dato, ¿cómo podemos calcular la razón de semejanza entre los cuadrados y los paralelogramos?**

3-511-A11: Sí.

3-512-A6: ¿Se entiende?

*Murmullo bajo. Se repregunta la consigna y se trabaja en la actividad.*

3-513-T: 10 minutos les quedan chicas.

3-514-A6: Bueno. La idea es que vayan calculando con Pitágoras y ahí puedan sacar la razón de semejanza, porque los catetos de los triángulos más grandes miden lo mismo que la hipotenusa del triángulo chiquito. Entonces, en base a eso, es para que apliquen y hagan más cuentas y puedan aplicar más veces Pitágoras.

Se presenta en lo planificado una resolución donde se llega a que la razón de semejanza entre los dos cuadrados y los dos paralelogramos es la misma. Si bien esta es una resolución posible, si se considera que previamente se conoce la relación entre las áreas de dos figuras semejantes, se puede obtener la razón entre ellas y luego al saber que, la razón entre las áreas es el cuadrado de la razón entre las longitudes de sus lados, concluir su valor. La acción implementada para resolver la actividad depende del contexto realista del alumno, la misma se alcanza a observar en los métodos matemáticos a los que puede acudir (*Principio de Realidad*). Al igual que lo que ocurre

en la micro-clase, desde las interacciones planificadas se da lugar al trabajo en grupo y la socialización de lo trabajado con el grupo-clase.

**Se deja trabajar a cada grupo y, antes de realizar la puesta en común, el profesor hará las siguientes preguntas:**

*-¿Cómo construyeron los cuadrados de manera que sean semejantes? ¿Y los paralelogramos?*

*-Nos ayudamos con el cuadrado pequeño y el cuadrado grande.*

*-Porque el triángulo pequeño y el grande son triángulos semejantes, tienen los tres ángulos iguales, entonces construimos con los triángulos chiquitos un cuadrado, y con los grandes el otro cuadrado. Lo mismo con el paralelogramo.*

*-Con el dato que les da la actividad, ¿basta para poder calcular la medida de los restantes lados?*

*-Sí. Utilizamos Pitágoras, y además el cateto del triángulo grande es igual a la hipotenusa del triángulo pequeño.*

**Seguido a este diálogo, se procederá a la corrección de la actividad, donde cada grupo aportará sus distintas ideas de resolución.**

Aplicar el Teorema de Pitágoras implica poner en juego un registro simbólico adoptado por cada alumno, no indicado previamente desde la consigna. Otro de los contenidos que se desprende de esta actividad es el trabajo con la aproximación de las medidas (redondeo de números), según el campo numérico con el que se esté trabajando.

La tercera actividad, si bien no es implementada durante la simulación de clases, tiene la misma temática que la anterior: construcción de figuras semejantes y cálculo de la razón de semejanza, con la intencionalidad de hacer uso del Teorema de Pitágoras.

**En la siguiente actividad, también se abordará semejanza y Pitágoras, pero en lugar de utilizar las figuras del Tangram, se construirán nuevas figuras a partir de una.**

### Actividad 3

Construir tres triángulos semejantes al triángulo pequeño y hallar su razón de semejanza.

**La resolución depende de cada alumno.**

*-¿Cómo pensaron esta actividad? ¿De qué manera construyeron los triángulos?*

*-Tomé el triángulo pequeño, lo dibujé en mi carpeta y extendí los catetos, de manera que siga siendo isósceles el triángulo. Así con tres medidas diferentes.*

*-Dibujé tres triángulos isósceles, los tres con lados de distintas longitudes.*

*-Dibujé los tres ángulos, superponiendo los del triángulo pequeño, y luego marqué los lados.*

**Luego que cada grupo dé su explicación, pasa un alumno a resolver la actividad, mientras los demás compañeros participan en la resolución aportando sus ideas.**


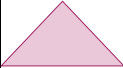



Desde la consigna no se exige el uso de las piezas del Tangram y, a partir de las posibles resoluciones de alumnos que presentan en la planificación, se estaría focalizando en el dibujo sobre papel. Como se prevé que las resoluciones de los alumnos puedan tener múltiples variantes, se propone compartirlas con el grupo-clase.

La siguiente actividad utiliza los resultados obtenidos en las dos primeras actividades, donde se combina la relación entre las piezas con las medidas obtenidas de otras.

**La idea de la siguiente actividad es que puedan relacionar las actividades anteriores, sin tener que realizar nuevamente todos los cálculos.**

Actividad 4

Usando los datos obtenidos en las actividades 1 y 2 completar el siguiente cuadro:

	Perímetro	Área
	17,07	12,5
	24,14	25
	20	25
	28,28	50
	34,14	50

- ¿Podemos concluir algo acerca de la relación entre área y perímetro de figuras?
- Observamos que distintas figuras geométricas pueden tener igual área, pero sus perímetros no siempre son iguales.
- Nunca coinciden perímetro y área.
- El cuadrado grande y el paralelogramo parecían tener igual perímetro, pero haciendo los cálculos observamos que no.

Se utiliza la razón de semejanza (actividad 2) para hallar el perímetro y la relación entre áreas (actividades 1 y 2) para encontrar el área de cada figura. Se observa que desde las interacciones planificadas entre alumnos-docente, se orienta el trabajo hacia la relación entre el perímetro y el área como magnitudes independientes. El *Principio de Interacción* se pone de manifiesto al provocar el propio docente un rol activo en los alumnos, por ejemplo en los momentos de explicar o justificar. Por su parte, en la micro-clase, el trabajo se centra en la obtención de los diferentes valores, con base en distintos caminos.

- 3-515-A13: Bueno, ahora vamos a hacer la actividad 3, que es en base a la actividad 1 y la actividad 2. Vamos a ir completando el cuadrito, parecido a este. Entonces, tenemos, el triángulo chico, el grande, el cuadrado y lo que tenemos que calcular es el área y el perímetro, ¿sí?
- 3-516-A11: ¿Pero sabiendo qué?
- 3-517-A13: En base al ejercicio 1 y 2. Ustedes ya hicieron todos los cálculos para calcular el área y el perímetro.
- 3-518-A9: Claro.
- 3-519-A6: Claro, en la actividad 2 calcularon cuánto medía cada cateto.
- 3-520-A13: En base a esas dos, pueden calcular el área y el perímetro de este, de este y de este, ¿por qué? (*algunos segundos de silencio*).

- 3-521-A5: Si nos pide el área sabemos que son iguales.  
 3-522-A13: ¿Pero, por qué pueden calcular el área de este, sabiendo este y este?  
 3-523-A12: Uno es el doble del otro.  
 3-524-A11: Por la semejanza.  
 3-525-A13: Por este cuadrado.  
 3-526-A11: Claro.  
 3-527-A13: Calculando el área del primero y el segundo ya está. **¿Y otra forma?**  
 3-528-A12: Del primero, con el área del primer triangulito ya podría.  
 3-529-A1: Es más fácil con los dos grandes que con los chicos.  
 3-530-A13: O sea, tienen estos dos o estos dos y pueden hacer todo. **¿Y otra forma de calcular el área sin usar la tablita?**  
 3-531-A3: Con el ejercicio de recién vos ya sabés cuánto valen los lados.  
 3-532-A9: Tenés que ir viendo cuánto mide cada lado, para cada figura, y hacer la fórmula.  
 3-533-A13: Bueno la idea es esa, que los alumnos, porque cuando yo lo resolví, lo resolví con el ejercicio 2, y recién las chicas lo hicieron en base a ese, calcularon el primero y después vieron que el más grande era dos veces el chiquito, y lo calcularon en base a ese. Entonces la idea de esa actividad era...  
 3-534-A10: Relacionar los ejercicios.  
 3-535-A13: El primero con el segundo y ver que lo podíamos hacer de dos maneras diferentes.  
 3-536-A10: Y no hacer todas las cuentas.  
 3-537-A13: Que también haciendo la actividad 2 te salía que **uno de los lados era 7,07**, del triángulo chico, entonces iban a quedar todas áreas y perímetros con coma.  
 3-538-A11: Claro.  
 3-539-A13: Era más que nada eso, la idea de ver las dos formas de hacerlo.

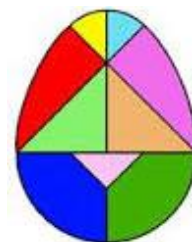
En un análisis de la propuesta en general, el nivel de manipulación del Tangram fue mermando, reduciéndose, e incrementándose correlativamente la presencia de nuevos registros con base en las piezas del Tangram. Desde la metodología propuesta por el MESF (2014), se plantea que la utilización y el pasaje de distintos tipos de registros proporcionan diferentes estrategias que le permiten al alumno resolver y llegar a la solución de una situación problemática.

La figura patrón del Tangram fue utilizada, pero no recibió un trato particular respecto a otras trabajadas en la propuesta.

Surgen como contenidos no explícitos de la planificación: la regularidad de valores dispuestos en forma matricial, la estimación y cálculo de cantidades, y la inexactitud de medición empírica, los tres pertenecientes al primer año del Nivel Secundario. Mientras que la semejanza entre polígonos (cuadriláteros) y la relación entre la razón de semejanza y los perímetros y áreas están contemplados en tercer año de dicho Nivel.

#### 4.2.2.8. Tangram Ovoide (G4)

Se destacan a continuación los contenidos que se abordan en la secuencia. Los cuatro primeros corresponden a secciones cónicas con elementos definidos a partir de ellas, del Ciclo Orientado del Nivel Secundario. Los últimos tres tienen que ver con polígonos y conceptos



aplicados a ellos; dos pertenecientes al Ciclo Básico del Nivel y el de “figuras semejantes”, al Ciclo Orientado.

Contenidos involucrados:

- Circunferencia.
- Circunferencia inscrita y circunscripta.
- Ángulos inscritos y ángulos centrales en una circunferencia.
- Elipse.
- Área de figuras planas.
- Figuras semejantes.
- Teorema de Pitágoras.

Las referencias que se utilizan coinciden con las presentadas por G4 en el Tangram de Fletcher (subapartado 4.2.2.7).

Al igual que la propuesta anterior, la caracterización de las piezas no es incluida en una de las actividades diseñadas, sino como una acción inicial a toda la planificación presentada.

**El profesor pide que formen grupos de tres o cuatro personas, y le entrega a cada grupo un Tangram.**

*-¿Qué podemos observar en este Tangram? ¿Cómo está formado? ¿Qué características tienen sus piezas?*

*-Está formado por nueve piezas.*

*-Dos triángulos isósceles curvos, dos triángulos rectángulos curvos, dos triángulos rectángulos grandes, un triángulo rectángulo pequeño, dos trapecios curvos.*

En la caracterización de las piezas se necesita distinguir aquellas con algún borde curvo de las que representan polígonos. Para dar nombre a las piezas se combinan los nombres de cada polígono, el tamaño y otras características de la pieza; por ejemplo, el nombre de “triángulo rectángulo curvo” o “triángulo isósceles curvo”.

Se puede observar desde la consigna de la actividad 1 que los elementos de la circunferencia (centro, radio, diámetro, ángulo central, área y longitud) son contenidos previos (sin detenimiento en esos conceptos), acorde al año escolar en que se puede enmarcar esta propuesta. Con “figuras 1 y 2” se refieren a las dos piezas curvas triangulares isósceles congruentes. Las correspondencias entre los números de las figuras con las piezas del Tangram no son indicadas explícitamente, con lo cual se las irán mencionando cada vez que se haga referencia a ellas en alguna actividad.

**Una vez que los grupos exploran el Tangram, se aborda la siguiente actividad:**

Actividad 1

Construir una circunferencia utilizando las figuras 1 y 2, y luego completar:

Área figura 1 =  $\frac{1}{8}$  área circunferencia

$$\text{Área figura 1} = \frac{\pi}{8} \cdot r^2 = \frac{\pi}{8} \cdot (4 \text{ cm})^2 \simeq 6,28 \text{ cm}^2$$

$$\text{Longitud circunferencia} = \pi \cdot \text{diámetro} = \pi \cdot 8 \text{ cm} \simeq 25,1 \text{ cm}$$

-¿Cómo construyeron la circunferencia?

-Utilizando los triángulos curvos pequeños. Fuimos rotándolos y dibujando la circunferencia en nuestra carpeta.

Se emplea el concepto de área para establecer relaciones entre partes de un total y como registro simbólico. Se combina en esta actividad la medición y las unidades reales de las piezas particulares involucradas.

Las piezas “triángulo rectángulo pequeño” (figura 9) y los dos “trapezios curvos” congruentes (figuras 7 y 8) se utilizan en la segunda actividad con los respectivos nombres de figuras.

**Luego se procede a la siguiente actividad:**

#### Actividad 2

Utilizando las figuras 7, 8 y 9 calcular el área de la figura 7 sabiendo que el cateto del triángulo menor mide 4 cm.

**Al igual que las actividades anteriores, el profesor deja unos minutos para que los alumnos resuelvan la actividad mientras va pasando por sus bancos y ayudando.**

Se propone una posible resolución para la actividad mencionada, donde el registro simbólico utilizado implica un mayor manejo de las operaciones algebraicas involucradas hasta el momento. Se combinan mediciones reales de las piezas con las obtenidas en los diferentes cálculos.

Llamemos:

$C$ : media circunferencia.

$F7$ : figura 7.

$F8$ : figura 8.

$F9$ : figura 9.

Las figuras 7,8 y 9 forman una media circunferencia. Luego, el área de la media circunferencia formada es igual a la suma de las áreas de las figuras 7,8 y 9, es decir:

$$\text{área } C = \text{área } F7 + \text{área } F8 + \text{área } F9$$

Las figuras 7 y 8 son iguales, con lo cual podemos notar:

$$\text{área } C = 2 \cdot \text{área } F7 + \text{área } F9, \text{ y así resulta: } \text{área } F7 = \frac{\text{área } C - \text{área } F9}{2}$$

Sabemos que la figura 9 es un triángulo rectángulo isósceles, calculamos su área:

$$\text{área } F9 = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{4 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm}}{2} = \frac{16 \text{ cm}^2}{2} = 8 \text{ cm}^2$$

El diámetro total de la media circunferencia es  $3 \cdot C = 12 \text{ cm}$ , ya que los lados de las figuras 7 y 8 que coinciden con parte del diámetro miden lo mismo que  $C$ . Luego, el radio de la media circunferencia es  $6 \text{ cm}$  y notamos  $r = 6 \text{ cm}$ .

El área total de la media circunferencia es:

$$\text{Área } C = \frac{\pi}{2} \cdot r^2 = \frac{\pi}{2} \cdot 36 \text{ cm}^2 \approx 56,5 \text{ cm}^2$$

$$\text{Calculamos } \text{área } F7 = \frac{\text{área } C - \text{área } F9}{2} = (56,5 \text{ cm}^2 - 8 \text{ cm}^2) \cdot \frac{1}{2} = 226 \text{ cm}^2$$

**Luego de realizar la corrección de la actividad en el pizarrón mediante la participación de los alumnos se sigue con la siguiente actividad:**

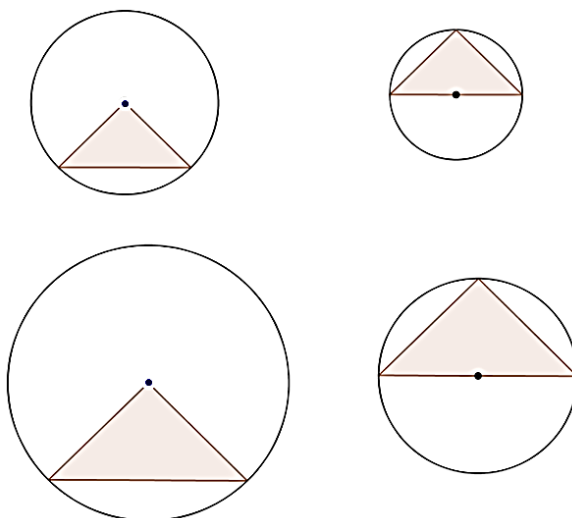
La tercera actividad incluye los conceptos de circunferencia inscrita y circunscrita en triángulos con distintas características, además de ángulos inscritos y centrales de una circunferencia.

### Actividad 3

- Construir una circunferencia inscrita a cada triángulo, una circunferencia circunscrita de radio igual al cateto de cada triángulo y una circunferencia circunscrita de diámetro igual a la hipotenusa de cada triángulo.
- Marcar los ángulos inscritos y centrales según corresponda a los ángulos del triángulo inscripto.

Desde la consigna no se involucra a las piezas circulares del Tangram, pero sí a los dos tipos de triángulos que lo conforman. A continuación, se mencionan dos posibles interacciones abarcando las dos construcciones pedidas en el primer apartado. En la primera de ellas, se observan distintas resoluciones (correctas o no) para la construcción de circunferencias circunscritas a los triángulos rectángulos.

- ¿Cómo construyeron la circunferencia circunscrita a los triángulos?  
 -Nosotros tomamos el lado más grande y con el compás trazamos la circunferencia.  
 -Y nosotros, tomamos la medida del cateto del triángulo como radio y trazamos la circunferencia.  
 -Bueno ahora pase un representante de cada grupo y dibuje lo que hicieron.



-Veamos las dos circunferencias de la izquierda, ¿los triángulos están inscriptos?

-Sí, están inscriptos.

-¿Cómo te diste cuenta?

-Porque todos los vértices del triángulo están dentro de la circunferencia.

-Ahora vamos a leer la definición de la clase anterior. Según nuestra definición, ¿los triángulos de la columna izquierda están inscriptos en la circunferencia?

-No, porque hay un vértice que no toca a la circunferencia.

-Muy bien, ahora escribamos debajo de la columna de la izquierda que los triángulos no están inscriptos en la circunferencia.

-¿Y los de la derecha?

-Sí, porque todos los vértices tocan a la circunferencia.

-Muy bien, entonces escribamos abajo de la columna de la derecha que los triángulos están inscriptos.

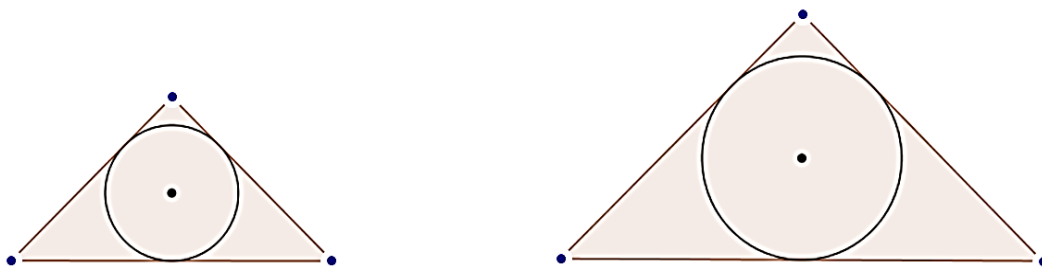
Se plantean preguntas que orientan al alumno a indagar sobre la resolución realizada, sea que haya sido correcta o no, sin profundizar demasiado en las propiedades empleadas en esa construcción. En la segunda interacción se hace referencia a posibles resoluciones sobre circunferencias inscriptas en los dos tipos de triángulos rectángulos que representan las piezas del Tangram.

-Ahora veamos cómo construyeron las circunferencias inscriptas en los triángulos.

-Nosotros fuimos tratando con diferentes radios hasta que logramos que tocara los lados del triángulo.

-Nosotros trazamos las bisectrices de los ángulos y donde se cruzaban era el centro de la circunferencia, después con el compás trazamos la circunferencia con ese centro y el radio como la distancia del centro a uno de los lados.

-Muy bien ambos grupos.



En las resoluciones presentadas una de las opciones utiliza “el tanteo” como estrategia para encontrar el radio y centro de la circunferencia buscada, en cambio en la segunda opción se ponen en juego las propiedades que sustentan esta construcción.

Sobre el segundo apartado (b) no se muestra una posible resolución.

**b) La resolución depende de cada alumno.**

Recorriendo las actividades que integran esta planificación se observa un uso de las piezas que se complementa con nuevos registros, con diferentes piezas protagonistas de

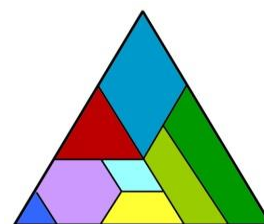
una a otra actividad. En ningún momento se utiliza la figura patrón del Tangram, proveniente su nombre de esa forma.

Todos los contenidos involucrados están vinculados a circunferencia y círculo, dando la pauta de ser el eje central y el potencial de este Tangram. A raíz de esto se puede ubicar esta secuencia en un tercer año del Nivel Secundario (Ciclo Orientado). Se destaca a la elipse y la semejanza de figuras como posibles contenidos a desarrollar con el Tangram Ovoide, mencionados por el grupo, pero no abordados en las actividades.

En las dos propuestas elaboradas por G4, las operaciones numéricas cobran valor a partir de la unidad de medida dada a uno de los lados de alguna de las piezas. Combinan en un primer momento a las piezas y a las operaciones, y luego continúan con la representación gráfica de las mismas. Esto da indicios de la presencia del *Principio de Interrelación*, donde se están integrando en una misma actividad el eje Geometría y Medidas y, Álgebra y Funciones.

#### 4.2.2.9. Tangram Triangular (G5)

Al comenzar la propuesta se hace referencia al código de colores que se utiliza en la secuencia en función de los dos actores presentes (docente y alumno).



*Nota 1:* Con letra color rojo se especifica lo dicho por la docente y en color violeta lo dicho por los alumnos.

Los contenidos que se abordan explícitamente corresponden a los ejes Geometría y Medida y Números y Operaciones, de los primeros tres años del Nivel Secundario.

Posibles temas para abordar con el Tangram Triangular:

- Semejanza de triángulos.
- Propiedades de los triángulos (ejemplo: suma de ángulos interiores).
- Área.
- Perímetro.
- Fracciones.

G5 marca aquellas actividades que se consideran importantes para compartir con el resto de sus compañeros.

*Nota 2:* Por cuestión de tiempo de exposición, notaremos en letra *cursiva* a las actividades que se realizan en clase.

De las cinco actividades planificadas, la tercera se implementa parcialmente y la quinta no se llega a trabajar durante la clase; el resto se desarrolla de forma completa. Entre las acciones llevadas a cabo en la micro-clase se destacan:

- a) Exploración inicial.
- b) Armado de figuras.
- c) Cálculo de área con diferentes unidades no convencionales.
- d) Construcción de figuras semejantes.
- e) Relación de área y perímetro en figuras semejantes.
- f) Formalización de conjeturas.

Cada actividad planificada tiene un objetivo que se explicita previo a la consigna de la misma.

- Objetivo: Familiarizarse con las piezas del Tangram.

#### **Actividad 1**

*¿Qué formas tienen las ocho piezas del Tangram? Estudia sus características y propiedades.*

La caracterización de las piezas se va profundizando: en un primer nivel se realiza una clasificación según la cantidad de lados, luego se avanza en un agrupamiento de acuerdo a la primera clasificación según la cantidad de piezas y, por último, se atiende a la regularidad de los lados y la relación de semejanza.

Posibles preguntas que el docente puede realizar para guiar la clase:

- ¿Qué figuras geométricas podemos distinguir?

Hay triángulos, paralelogramo (rombo), un hexágono, trapecios.

- ¿Hay figuras que se repiten? ¿Cuántas veces?

Sí, hay dos triángulos, tres trapecios y dos paralelogramos.

- ¿Qué característica tiene cada figura?

El triángulo grande y el pequeño son equiláteros y de distintos colores.

El hexágono es regular.

Los trapecios son semejantes y de distintos colores.

Los paralelogramos son rombos semejantes entre ellos.

Durante la simulación se reparten todas las consignas previstas y los tres ejemplares del Tangram con los que cuenta G5. A partir de la lectura de la consigna, se mencionan con el grupo-clase las distintas características de las piezas. Si bien se sigue el orden planificado, no se presenta la necesidad de la distinción de los tamaños entre las piezas.

*Comienzo de la simulación de G5. A11 cumple el papel de la docente.*

3-20-A11: Bueno, buen día, buenas tardes. Les voy a repartir las actividades así empezamos con el siguiente Tangram. Ah, les tengo que repartir los Tangrams (*los alumnos forman tres grupos según la disposición de las mesas y la cantidad de Tangrams para trabajar. Se reparten las consignas en fotocopia y tres Tangrams*). Bueno, la primera actividad...dice. Primero abran los Tangrams, fíjense. Bueno, la primera pregunta es “¿qué características le ven a las figuras que tienen los Tangrams?”.

3-21-A6: ¿Cómo?

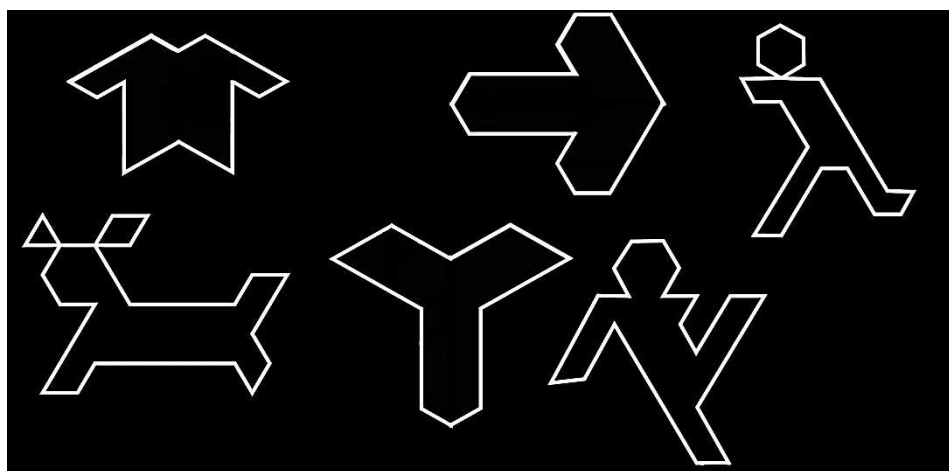
3-22-A11: ¿Qué propiedades tienen? ¿En qué se diferencian unas de las otras?

3-23-A3: **No tienen ninguna curva.**

- 3-24-A11: Perfecto.  
 3-25-A9: ¿Cómo?, ¿cómo dijo?  
 3-26-A11: ¿Hay figuras geométricas? Que no tienen ninguna curva dijo.  
 3-27-A (v): Hay trapecios/Triángulos/Hay tres rombos, ¿no?/Hexágono.  
 3-28-A11: Perfecto.  
 3-29-A (v): **Son dos rombos.**  
 3-30-A11: Dos rombos.  
 3-31-A9: **Hay trapecios isósceles.**  
 3-32-A3: Un hexágono.  
 3-33-A11: Un hexágono.  
 3-34-A13: ¿Cómo sabés que son isósceles?  
 3-35-A11: ¿Cómo?  
 3-36-A13: ¿Cómo sabés que son isósceles?  
 3-37-A11: (risas).  
 3-38-A15: Al parecer.  
 3-39-A9: Hay lados iguales también, por ejemplo este lado es el mismo que este.

El objetivo de la segunda actividad, si bien no está explicitado, puede asociarse con el de la primera actividad, porque la manipulación planteada permite seguir familiarizándose con las piezas.

*Actividad 2: Utilizando todas las piezas del Tangram, forma las siguientes figuras.*



El docente recorre los bancos observando lo que realizan los alumnos y, en caso de ser necesario, puede brindar ayuda si a algún grupo se le dificulta armar la figura.

Este tipo de actividad es una de las más habituales o reconocidas popularmente para cualquier tipo de Tangram, donde se representan objetos y situaciones cotidianas. No está, entre las figuras a representar, la figura patrón.

- 3-40-A11: Perfecto. Bueno, vamos a seguir explorándolo. Les voy a repartir (*pasa por los diferentes grupos dándoles a elegir una figura*). Saquen, **saquen una figura para que todo el grupo la arme**. Si ven en la fotocopia, también tienen otras figuras.  
 3-41-A (v): Ah.  
*Bullicio bajo. Trabajo grupal.*  
 3-42-A13: ¡La armamos!  
 3-43-A11: Perfecto. ¿Quieren otra?  
 3-44-A10: Sí, dale.  
*All pasa por los grupos a ver si salieron las figuras entregadas.*



Figura 4.21. Simulación de alumnos en clase de G5

Se continúa con este tipo de manipulación en la tercera actividad, pero ahora se independizan del modelo de las figuras a armar únicamente con la indicación del nombre de ellas (triángulo y paralelogramo). Se utiliza la representación gráfica de la figura armada.

- **Objetivo:** Relacionar las distintas formas de las figuras con la de la figura resultante, comparando sus respectivos lados.

Notar que figuras distintas pueden tener la misma área, y hallar el área y perímetro de cada figura en función del área y perímetro de la más pequeña.

Esta actividad no es implementada en su totalidad sino en uno de sus ítems. Se encuentra dividida en tres apartados (“a”, “b” y “c”) donde el primero de ellos tiene que ver con la construcción de figuras, a su vez subdividido en los puntos 1 (construcción de triángulo) y 2 (construcción de paralelogramo). El apartado “b” requiere el cálculo de lados de las figuras anteriores y en el ítem “c” se analiza la relación entre áreas y perímetros de las piezas involucradas, también subdividido en dos apartados (puntos 1 y 2 respectivamente). Luego de cada apartado se muestra desde la planificación una posible interacción entre el docente y los alumnos.

### Actividad 3

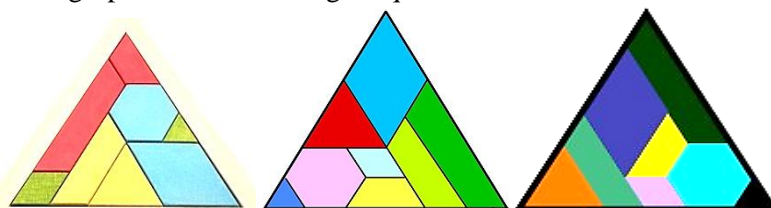
a) Construye con todas las piezas del Tangram las siguientes figuras y dibújalas en una hoja:

1. Un triángulo.

- ¿Cómo construyeron el triángulo? ¿Todos ubicaron las figuras de igual manera?

Armamos el triángulo de la siguiente manera:

Cada grupo muestra el triángulo que formó.



- ¿Qué tipo de triángulo les quedó formado?

Un triángulo equilátero.

En este primer intercambio se pone en juego la figura patrón representativa del nombre que recibe el Tangram y sus posibles formas de armarla. Cabe advertir que el triángulo equilátero es el único triángulo construible, debido a que todos los ángulos interiores de las piezas valen  $60^\circ$  o  $120^\circ$ , lo cual permite concluir que no existe ninguna combinación de las piezas que pueda ser ángulo interior si uno de ellos mide  $120^\circ$  y los demás no son menores a  $60^\circ$ . Se requiere, entonces, que los ángulos interiores del triángulo buscado midan  $60^\circ$  cada uno.

2. Un paralelogramo cuya altura sea la mitad que la del triángulo del ítem anterior.

- ¿Cómo construyeron el paralelogramo?



En este segundo punto se exige una relación particular entre las alturas de ambos polígonos del apartado “a”. Se pueden obtener del anterior (punto 1) las piezas necesarias para la altura pedida.

- b) Si el triángulo formado con todas las piezas tiene lado 12 cm, ¿cuánto mide la base del paralelogramo del apartado anterior?

La base del paralelogramo mide 12 cm.

- ¿Por qué? ¿Cómo lo pensaron?

Como formamos las dos figuras con las mismas piezas, tienen la misma área y como el área del triángulo es  $\frac{b \cdot h}{2}$  y la del paralelogramo es  $B \cdot H$ , entonces como la altura del paralelogramo es la mitad de la del triángulo tenemos que  $H = \frac{h}{2}$ . Luego  $\frac{b \cdot h}{2} = B \cdot \left(\frac{h}{2}\right)$ , entonces  $b = B$ . Por lo tanto la base del paralelogramo mide 12 cm.

La resolución presentada está basada en un trabajo algebraico a partir del despeje de términos en ecuaciones que surgen de la utilización de las fórmulas de área. Teniendo en cuenta que hasta el momento ya hay un cierto nivel de exploración de las piezas, otra posible vía de resolución puede darse a partir de la comparación entre los bordes de las piezas.

- c) Si el área y el lado de la pieza más pequeña son las respectivas unidades:

1. ¿Cuál es el área de las siete restantes?
2. Calcula los perímetros de cada pieza.

- Si el área del triángulo chico mide 1u, ¿cuál es el área de, por ejemplo, el trapecio chico?

El área es 3u.

- ¿Cómo lo pensaste?

El triángulo chiquito entra tres veces en el trapecio chico.

El docente continúa con preguntas análogas hasta completar todas las piezas.

- Si el lado del triángulo chico mide 1u, ¿cuánto mide el perímetro de, por ejemplo, el trapecio chico?

El perímetro mide 5u.

- ¿Cómo lo pensaste?

Conté cuántas veces entra el lado del triángulo chiquito en cada lado del trapecio chico y luego los sumé.

El punto 1 del apartado “c” fue el desarrollado en la micro-clase, mediante un trabajo similar al realizado con el Tangram Chino en el marco del E1.2.

3-45-A15: Bueno chicos, vamos a pasar a otra actividad, por el tiempo.

3-46-A7: La idea ahora es ir viendo, más o menos ustedes vieron las formas que tienen las distintas piezas, ¿cuál es la pieza más pequeña de todas las que tienen?, ¿la más chiquita? (*murmullo bajo*).

3-47-A (v): El triángulo.

3-48-A7: Bien... “triángulo chico” vamos a llamarlo (*se escribe en el pizarrón*). Vamos a decir que tiene unidad 1, una unidad vale 1, bien. Entonces la pregunta es ¿cuál es el área de las otras figuras restantes? Teniendo en cuenta que este triángulo tiene 1 unidad. Entonces, ¿qué otras figuras hay?

3-49-A5: El rombo.

3-50-A7: ¿Cuántos rombos hay?

3-51-A5: Dos.

3-52-A7: Dos. Entonces vamos a llamar uno más chiquito y el otro más grande. Entonces vamos a poner el “rombo chico” (*se escribe en el pizarrón*), ¿cuánto vale su área?

3-53-A9: Dos.

3-54-A7: Diría 2 unidades del triángulo chiquito. ¿Qué otras figuras hay?

3-55-A9: Algunas más.

3-56-A3: Trapecio (*se escribe la palabra en el pizarrón*).

3-57-A7: ¿Cuántos trapecios hay?

3-58-A3: Dos.

3-59-A9: Tres.

3-60-A (v): Tres hay.

3-61-A7: Entonces **vamos a anotar “C” al chico... “M” al mediano y “G” al grande, ¿sí?** (*se escriben en el pizarrón las tres letras*). Entonces **el trapecio chico ¿cuánto mide respecto al triángulo?**

3-62-A5: Dos, tres... tres, tres.

3-63-A7: ¿El mediano?

3-64-A9: Cinco.

3-65-A (v): Siete/Y el otro siete.

3-66-A7: ¿Y el grande? Siete.

3-67-A5: Sí.

En esta primera parte de la interacción con el grupo-clase aparece una clasificación con relación a los tamaños de aquellas piezas semejantes, que se produce a partir de la necesidad de poder diferenciarlas. Esta clasificación, si bien había sido prevista en la primera actividad de esta propuesta, en la micro-clase es utilizada en la tercera actividad, cuando se encontró necesario.

3-68-A7: Bien, ¿qué otra figura hay?

3-69-A3: El hexágono.

3-70-A7: El hexágono (*se escribe la palabra en el pizarrón*), ¿cuánto tiene?

3-71-A12: Seis.

3-72-A7: ¿Falta alguna otra figura?

- 3-73-A5: El triángulo grande.  
 3-74-A6: Triángulo grande y el paralelogramo grande.  
 3-75-A7: El triángulo grande (*se escribe en el pizarrón*), ¿cuánto mide?  
 3-76-A (v): Cuatro.  
 3-77-A7: Bien, ¿y cuál otro falta?  
 3-78-A (v): El paralelogramo grande (*segundos de silencio*).  
 3-79-A7: Vamos a ponerlo acá arriba, “**paralelogramo grande**” (*se escribe en el pizarrón*), y **¿cuánto mide?**  
 3-80-A (v): Ocho.  
 3-81-A7: Bien, entonces vemos que todos tienen una cierta unidad respecto del triángulo chico. [...]

Los valores obtenidos de las diferentes áreas son registrados en el pizarrón sin un cuadro o tabla que los organice.

De acuerdo al objetivo de la cuarta actividad, la misma se desglosa en cuatro partes (ítems “a” y “b”, la tabla y el punto “c”) contempladas desde la consigna. Se procura establecer una guía y concatenación de las acciones que se van necesitando de las previamente desarrolladas. Esta organización en apartados permite reconocer los diferentes niveles por los que deben pasar los alumnos para llegar al objetivo determinado (*Principio de Niveles*).

- Objetivo: Hallar la regularidad que hay entre la razón de triángulos semejantes con el área y perímetro de los mismos.

#### **Actividad 4**

*Partimos del triángulo más pequeño:*

- a) *Obtén con dos piezas, un triángulo semejante a él, de razón  $\frac{1}{2}$ .*

- ¿Cuántas veces está contenido el triángulo pequeño en el otro?

El triángulo chiquito entra cuatro veces.

- b) *Obtén de todas las formas posibles, triángulos semejantes al pequeño, de razón  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$  y  $\frac{1}{6}$ .*

- ¿Cuántas veces está contenido el triángulo pequeño en cada caso?

En el triángulo de razón  $\frac{1}{3}$ , nueve veces. En el de razón  $\frac{1}{4}$ , 16 veces y en el de razón  $\frac{1}{6}$ , 36 veces.

Se presenta la interacción producida en la clase de los ítems “a” y “b”, donde el último es desarrollado en esta parte de la actividad con solo una de las razones propuestas por la influencia del tiempo destinado a la micro-clase.

*Intercambio de roles, A15 cumple el papel de la docente.*

3-82-A15: Ahora vamos a hacer la siguiente actividad. Como trabajaron con A7, dijimos que al triángulo chico lo vamos a considerar como la unidad. Entonces ahora lo que les voy a pedir es que con dos fichas armen un triángulo semejante al triángulo chico, de razón  $\frac{1}{2}$ .

3-83-A2: ¿ $\frac{1}{2}$ ?

3-84-A15: Sí.

3-85-A9: ¿Con dos fichas?

3-86-A15: Con dos fichas armen un triángulo semejante al chico de razón  $\frac{1}{2}$ .

- 3-87-A9: Bien. **¿Se puede usar el triángulo chico?**  
 3-88-A15: Con dos fichas, cualesquiera.  
*Murmullo bajo. A15 supervisa el trabajo de los distintos grupos durante 20 segundos.*  
 3-89-A15: ¿Cuántas veces entra ese triángulo chico, en ese triángulo semejante que armaron?  
 3-90-A (v): Cuatro.  
 3-91-A15: Muy bien. Bueno, ¿y si yo ahora les pido que armen un triángulo semejante al chico pero de razón  $\frac{1}{3}$ ?  
*Murmullo bajo.*  
 3-92-A (v): Ya está.  
 3-93-A15: ¿Cuántas veces entra?  
 3-94-A (v): Nueve.

Anticipándose a la próxima actividad de la consigna se hace hincapié en el apartado “c” de la tercera actividad, para completar la siguiente tabla.

*Considerando el área del triángulo pequeño como unidad de área y la longitud del lado como unidad de perímetro, completa el siguiente cuadro:*

Dibujo	Razón	Área	Perímetro

Cada fila de la tabla representa uno de los triángulos construidos semejantes al triángulo pequeño. Son cuatro los tipos de triángulos pedidos desde la consigna, con el propio triángulo unidad.

- 3-95-A15: Entonces vamos a ir completando, fíjense que ustedes en la actividad tienen el dibujo de la tabla. El triángulo de razón  $\frac{1}{2}$ , ¿quieren decir con cuáles dos fichas lo formaron?  
 3-96-A (v): Con un trapecio chico y un triángulo.  
 3-97-A15: Bien. Dijimos que era de razón  $\frac{1}{2}$ , ¿y el área, cuántas veces entra en el chico? Sería...  
 3-98-A (v): Cuatro/¿En total?/Cuatro veces.  
 3-99-A15: ¿Y el perímetro? Acuérdense que el chico (*se refiere a la pieza “triángulo chico”*) también es la unidad.  
 3-100-A9: ¿El perímetro del chiquito?  
 3-101-A1: Seis.  
 3-102-A15: Muy bien.  
 3-103-A1: La unidad es el lado del triangulito, ¿no?  
 3-104-A15: Claro. **Y el de razón  $\frac{1}{3}$ , ¿cómo lo formaron?**  
 3-105-A (v): Con el triángulo y el trapecio.  
 3-106-A15: ¿O sea?  
 3-107-A5: Con esos dos y el trapecio (*construcción distinta a la nombrada anteriormente*).  
 3-108-A15: Con el triángulo más grande... De razón, dijimos,  $\frac{1}{3}$ . **¿El área?**  
 3-109-A (v): Nueve.  
 3-110-A15: **¿Y el perímetro?**  
 3-111-A6: ¿Nueve?, no puede ser.  
 3-112-A1: Nueve.  
 3-113-A6: ¿Nueve?  
 3-114-A (v): Tres/Nueve.

- 3-115-A1: No, el perímetro nueve.  
 3-116-A9: Ah, pero no sé cómo usa el...  
 3-117-A5: Con el lado del triángulo.  
 3-118-A15: Claro, entonces, ¿el área?  
 3-119-A (v): También.

La tabla se completa inicialmente con lo obtenido de la actividad hasta el momento. En una segunda instancia se completa con los triángulos semejantes de razón  $\frac{1}{4}$  y  $\frac{1}{6}$  pensados en el apartado “b” desde la planificación, pero construidos en esta parte de la tabla.

- 3-120-A15: Bien. Y si yo ahora les pido razón  $\frac{1}{4}$  (*murmullo*). Tienen que hacer de  $\frac{1}{4}$  y  $\frac{1}{6}$ .  
 3-121-A1: ¿Con dos fichas también?  
 3-122-A15: No, **con las fichas que necesiten** (*cada grupo comienza con la actividad*). Y díganme el de  $\frac{1}{4}$ , el área y el perímetro.  
 3-123-A2: 16 el área.  
 3-124-A15: Bien. ¿Y el perímetro? (*segundos de silencio*). ¿Perímetro?  
 3-125-A1: 13.  
 3-126-A6: No.  
 3-127-A1: 1, 2, 3, 4, 5...  
 3-128-A (v): 12.  
 3-129-A1: Ah bueno, conté mal (*risas*).  
 3-130-A15: ¿Y de  $\frac{1}{6}$ ?, ¿de razón  $\frac{1}{6}$ ? (*murmullo bajo, se construye lo pedido*). ¿Bueno, cuánto tiene de área?  
 3-131-A9: 25.  
 3-132-A (v): 36.  
 3-133-A15: ¿Y el perímetro?  
 3-134-A2: 18.

Una vez completada la tabla se llega a una etapa de conjetura a partir de la observación de los datos, organizados de forma estratégica de modo tal de favorecer la interpretación de lo pedido. Esta secuenciación de la actividad y con objetivos previstos que guían al alumno, dan cuenta del *Principio de Reinención guiada* de la EMR.

El docente completa el cuadro con las respuestas de los alumnos a través del diálogo anterior.

c) ¿Qué relación hay entre el área y la razón? ¿Y entre el perímetro y la razón?

- Mirando la tabla que construimos, ¿qué relación podemos encontrar entre la razón y el área y el perímetro?

El área es el cuadrado del número de abajo de la razón y el perímetro el triple del número de abajo.

El área es el cuadrado del inverso de la razón y el perímetro el triple del inverso.

- Muy bien, entonces si construimos un triángulo de razón  $\frac{1}{n}$ , ¿cuál es su área? ¿Y su perímetro?

El área es  $n^2$  y el perímetro es  $3 \cdot n$ .

A partir de las preguntas planteadas en la consigna del apartado “c”, se observa un mayor nivel de generalización que se desprende de todo el trabajo y análisis realizado hasta este punto, tanto en las interacciones planificadas como en las simuladas en clase.

3-135-A15: Muy bien, bueno. La idea es que ustedes sacaron el área y el perímetro siempre contando cuántas veces entraba la unidad. Al área la sacaron viendo cuántas veces entraba el triángulo chico en el grande y al perímetro contando las unidades de longitud. Pero la idea es que podamos ver cuál es la relación entre la razón y, el área y el perímetro. ¿A nadie se le ocurre?

3-136-A5: El perímetro es el triple del recíproco de la razón.

3-137-A15: Claro. **Vamos a llamar al numerito de acá bajo “n”** (*se marca en el pizarrón*), por ejemplo. Vamos a escribir acá, “el perímetro, y la razón es  $\frac{1}{n}$ ”. ¿Cuánto es el perímetro?

3-138-A6: “n”.

3-139-A (v): “3n”.

3-140-A15: Muy bien. ¿Y el área?

3-141-A6: El cuadrado, “n” al cuadrado.

3-142-A15: Muy bien. Esa era la actividad.

Ese nivel de formalización no se declara en principio desde la consigna, estando en la decisión del docente hasta dónde avanzar en cuanto a la profundidad del contenido (*Principio de Niveles*). Las preguntas del docente favorecen a la reflexión del alumno y promueven el paso de un nivel a otro. Se pueden destacar los primeros tres niveles que forman parte del proceso de matematización vertical: situacional, referencial y general; entrando a un plano de mayor formalización matemática.

La última actividad pensada para simular en clase, no se implementa en la práctica. La figura utilizada particularmente es el triángulo patrón, aunque puede trabajarse con cualquiera de las opciones construidas (considerando todos los triángulos armados en la propuesta, incluso las piezas dadas con forma de triángulo), tratándose todos ellos de triángulos equiláteros.

- **Objetivo:** Dar inicio a la conjetura para la demostración de la siguiente propiedad de los triángulos: “La suma de los ángulos interiores de un triángulo es  $180^\circ$ ”.

#### **Actividad 5**

*Utilizando las piezas del Tangram, ¿podemos afirmar que la suma de los ángulos interiores del triángulo formado por todas las piezas es  $180^\circ$ ?*

Se puede observar que existen diferentes formas de mostrar la conjetura, según las piezas que se utilicen en el armado y las distintas maneras de ubicarlas. En la misma línea de resolución que aparece a continuación, puede utilizarse la congruencia de ángulos para encontrar tres piezas con ángulos congruentes a los ángulos interiores del triángulo patrón y formar entre ellas el ángulo llano.

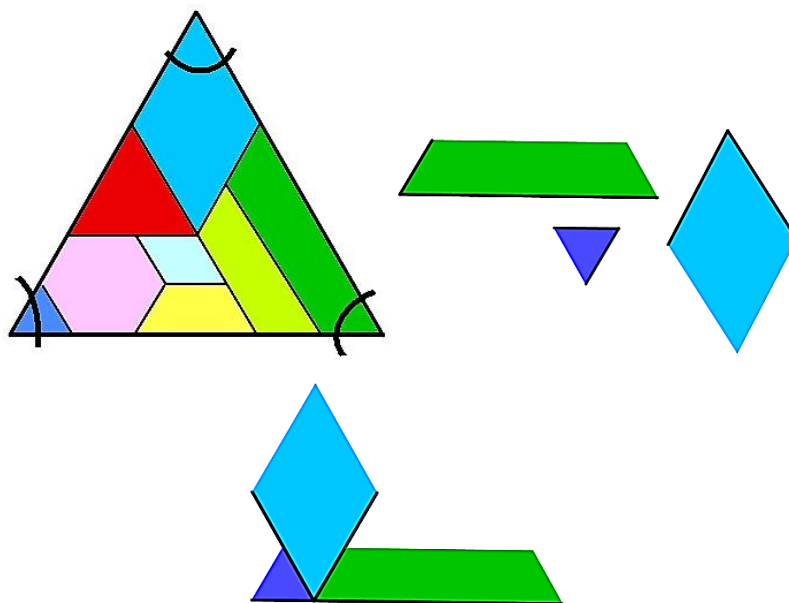
La manipulación y ubicación de las piezas es denotada en la planificación con bordes negros para observar la disposición de los tans. En una posible implementación, solo se contaría con las piezas tangibles del Tangram, teniendo presentes las propiedades de la figura geométrica que representa cada pieza y el valor de sus ángulos interiores.

- Entonces, ¿podemos afirmar que los ángulos interiores del triángulo que formaron suman  $180^\circ$ ?

Sí.

- ¿Cómo hicieron para verificarlo?

Construimos el triángulo con todas las piezas y luego apartamos las figuras que conforman los vértices del triángulo. Después “sumamos” los ángulos juntándolos de la siguiente manera:



El docente, a modo de disparador para demostrar la propiedad, pregunta: ¿Sucederá esto para todos los triángulos?

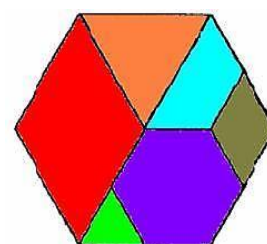
Como aspectos generales de la propuesta, se puede observar en las dos primeras actividades un trabajo destacado en el reconocimiento de todos los tans que integran este Tangram, mientras que en las tres últimas actividades el triángulo (como figura geométrica) fue el centro de análisis a partir de relaciones y propiedades que se desprenden de la figura. Puede considerarse, así, como un aspecto potente del Tangram Triangular.

Las generalizaciones desarrolladas en las últimas actividades convierten al Tangram Triangular en un *modelo* en el marco de la corriente EMR que comenzó con la manipulación de las piezas apegado a una situación particular y llegó a interpretar situaciones intra-matemáticas con distintos niveles intermedios de generalización.

#### 4.2.2.10. Tangram Hexagonal (G5)

Se utiliza el mismo código de colores y organización de las actividades declaradas en el subapartado 4.2.2.9.

Los tres temas que se abordan pertenecen al Ciclo Básico del



Nivel Secundario, particularmente a los ejes Geometría y Medida y Números y Operaciones.

Posibles temas para abordar con el Tangram Hexagonal:

- Área
- Perímetro
- Fracciones

En similitud a lo analizado en la propuesta del Tangram Triangular, las dos primeras actividades tienen el mismo objetivo, que es reconocer los tans que conforman este Tangram.

- Objetivo: Familiarizarse con las piezas del Tangram.

### Actividad 1

¿Qué formas tienen las ocho piezas del Tangram? Estudia sus características y propiedades.

Posibles preguntas que el docente puede realizar para guiar la clase:

- ¿Qué figuras geométricas podemos distinguir?

Hay triángulos, paralelogramos (rombos), un hexágono y un trapecio.

- ¿Hay figuras que se repiten? ¿Cuántas veces?

Sí, hay dos triángulos y dos paralelogramos.

- ¿Qué característica tiene cada figura?

El triángulo grande y el pequeño son equiláteros y de distintos colores.

El hexágono es regular.

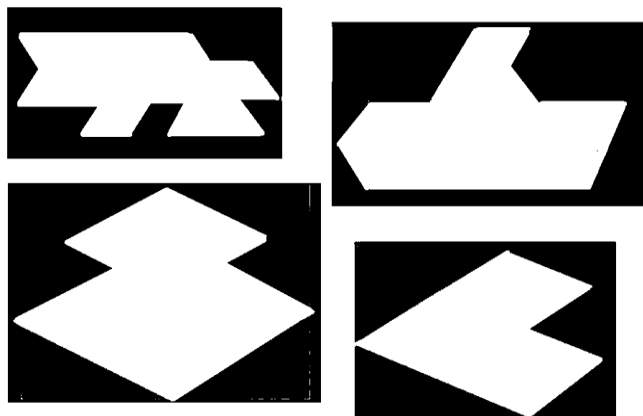
Los paralelogramos son rombos semejantes entre ellos.

La clasificación de las piezas es orientada por el docente en cuanto a la distinción de las figuras geométricas encontradas, a la cantidad de figuras semejantes a cada una de ellas y, por último, a la distinción de tamaños y regularidades.

Para la segunda actividad, no es necesario explicitar desde la consigna la posición que deben tener las piezas en cuanto a la no superposición y no dejar huecos.

### Actividad 2

Utilizando todas las piezas del Tangram, forma las siguientes figuras:



El docente recorre los bancos observando lo que realizan los alumnos y, en caso de ser necesario, puede brindar ayuda si a algún grupo se le dificulta armar la figura.

Cabe advertir que entre las figuras presentadas no está la figura patrón.

La tercera actividad continúa con el armado de figuras, las cuales son, a su vez, piezas del Tangram.

- Objetivo: Mejorar la ubicación espacial.

### Actividad 3

¿Qué combinación de piezas dan como resultado otra pieza del Tangram?  
Encuentra todas las alternativas posibles.

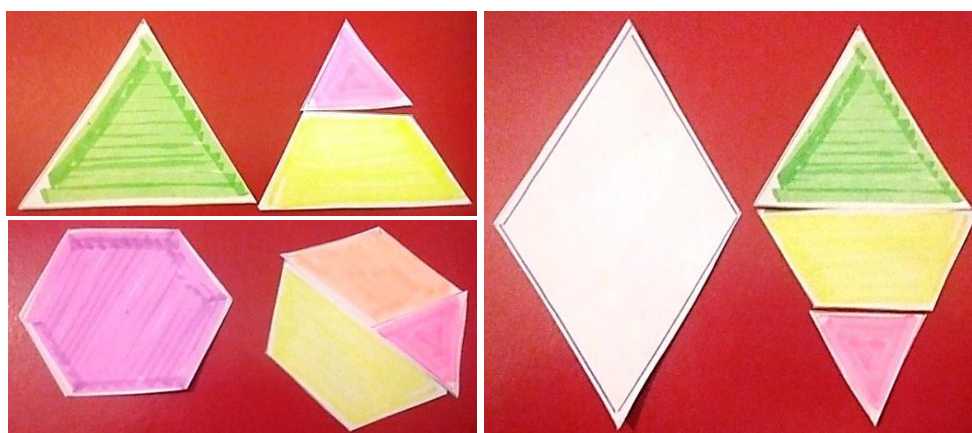
El docente guía una exposición oral en donde los distintos grupos muestran las figuras que formaron y las anota en el pizarrón para llevar un orden.

Cuatro de las seis piezas que forman el Tangram pueden construirse con las restantes, con excepción del triángulo pequeño y del rombo pequeño. Esto fortalece la flexibilidad, en tanto se puede obtener una misma figura de distintas maneras. Estas nuevas relaciones favorecen al objetivo de la actividad y aportan a lo que es la visualización en Matemática (Rabino y Bressan, 2018); no solo porque pueden ayudar a comprender y generar ideas sino ser también punto de apoyo de algún proceso posterior.

- Comencemos con el trapecio más chiquito, ¿con qué combinación de figuras del Tangram formamos esta?



La superposición de piezas es una posible forma de encontrar la combinación para formar el resto de las piezas de mayor superficie que integran al Tangram. Las construcciones establecidas son únicas por la posición y la cantidad de piezas que involucran.



En esta última actividad se integran los tres contenidos mencionados en la propuesta, desarrollados a lo largo de tres apartados.

- **Objetivo:** Relacionar las áreas de las figuras y sus perímetros.

#### Actividad 4

a) Si el área de la pieza más pequeña es la unidad, ¿cuál es el área de las restantes?

¿Y del Tangram completo?

- Si el área del triángulo chico mide 1u, ¿cuál es el área de, por ejemplo, el hexágono?

El área es 6u.

- ¿Cómo lo pensaste?

El triángulo chiquito entra 6 veces en el hexágono.

El docente continúa con preguntas análogas hasta completar todas las piezas.

- ¿Y el área del hexágono formado por todas las piezas?

El área total es 24u.

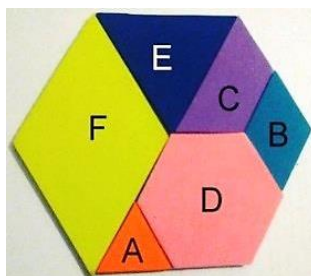
- ¿Cómo lo pensaste?

Sumamos el área de todas las figuras.

Este primer apartado permite el cálculo de área a partir de una unidad no convencional designada desde la consigna, al igual que lo realizado en el E1.2 con el Tangram Chino y similar a la actividad 3 (ítem “c”) propuesta por G5 para el Tangram Triangular. No se detalla algún tipo de registro específico.

b) Considerando el lado del hexágono formado por todas las piezas como unidad de longitud y el área del hexágono pequeño como unidad de área, completa la siguiente tabla:

Establecer una convención para la identificación de las piezas previamente de esta manera:



En el segundo apartado se determina una unidad de longitud no convencional y se cambia la unidad de área utilizada en el apartado “a” a partir de considerar el hexágono pequeño. Esto permite representar a las cantidades con números mayores y menores a 1. Los datos obtenidos son organizados en una tabla y representados en tres tipos de registros que pueden utilizarse en el conjunto de los números racionales.

Perímetro			
Piezas	Fracción	Decimal	Porcentaje
A	$\frac{1}{2}$	0,5	50%
B			
C			
D			
E			
F			

Área			
Piezas	Fracción	Decimal	Porcentaje
A	1/6	0,16	16%
B			
C			
D			
E			
F			

A modo de ejemplo se muestra una posible interacción a partir de completar la tabla con la pieza triángulo pequeño nombrada con la letra “A”.

- ¿Cuál es el perímetro como fracción de la pieza A?

Es 1/2.

- ¿Cómo lo pensaste?

Porque el lado del hexágono grande es dos veces el lado de la pieza A.

- ¿Cuál es el perímetro como decimal de la pieza A?

Es 0,5.

- ¿Cuál es el perímetro como porcentaje de la pieza A?

Es 50% porque  $0,5 \cdot 100 = 50$ .

- ¿Cuál es el área como fracción de la pieza A?

Es 1/6 porque el área del hexágono chico es seis veces el área de la pieza A.

- ¿Cuál es el área como decimal de la pieza A?

Es aproximadamente 0,16.

- ¿Cuál es el perímetro como porcentaje de la pieza A?

Es 16% porque  $0,16 \cdot 100 = 16$ .

Con preguntas análogas el docente guía a los alumnos para completar los cuadros.

La aproximación de las medidas a números racionales también es puesta en juego a la hora de escribir los valores en la tabla. Se convierte en este sentido un posible contenido a abordar contemplado en segundo y tercer años, como contenido común de ambos Ciclos del Nivel Secundario.

En el tercer punto de la actividad se combina la información anterior para analizar la independencia de las magnitudes área y perímetro, resignificando la equivalencia de los registros tomados de dichas cantidades.

- c) Encuentra la relación que tienen áreas y perímetros de las figuras halladas en la actividad 3.

Si bien la propuesta general no utiliza particularmente a la figura patrón del Tangram, el hexágono toma un valor protagónico en la cuarta actividad a partir de considerar algunos de sus elementos como unidades no convencionales. Las primeras tres actividades permiten llegar a esta cuarta actividad con un valor creciente de exploración y manipulación de las piezas. Esa gradualidad planificada posibilita poner en manifiesto tanto el *Principio de Niveles* como el *Principio de Reinención guiada*, observados también en la propuesta anterior del mismo grupo.

En particular se destaca en los Tangrams analizados por G5, que el Tangram Hexagonal está contenido en el Tangram Triangular (se puede visualizar por los tans que conforman a ambos); vale aclarar que la diferencia son los trapecios mediano y grande. Se posibilita de esta forma poder trabajar con la propuesta del Tangram Hexagonal utilizando el Tangram Triangular.

Con respecto al diseño de las actividades, todas ellas parten de un trabajo manipulativo con las piezas del Tangram, implicando en un primer momento estar apegadas al contexto real del alumno (*Principio de Realidad*) como punto de partida, formando parte del proceso de *matematización horizontal*.

#### **4.2.3. Contenidos de las actividades**

En referencia a los *contenidos/ejes* que forman parte de la *Dimensión 3*, se reúnen en la Tabla 4.12 los contenidos explícitos mencionados en cada una de las 10 propuestas (4.2.2.1 a 4.2.2.10) diseñadas por los cinco grupos de estudiantes, reflejados en actividades específicas. Se agregan en una última columna aquellos contenidos detectados por la tesista que se desarrollan de forma implícita, además de aquellos nombrados por el grupo pero que no se reflejan en una actividad particular, con la posibilidad de seguir ahondando al respecto.

Los contenidos son distinguidos según su pertenencia a los ejes *Álgebra y Funciones*, *Geometría y Medida*, *Números y Operaciones*, *Probabilidad y Estadística* establecidos por el MESF (2014) y ordenados de forma creciente según el año del Nivel Secundario que corresponda (indicado el mismo entre paréntesis delante del contenido).

Los términos utilizados para nombrar a cada tema expresado en la planificación son los propios del Diseño Curricular del MESF (2014). No son contemplados en la tabulación aquellos contenidos considerados como previos a los explicitados por el grupo o la tesista, porque no están pensados directamente al Tangram involucrado.

Se puede observar que al menos dos de los ejes del Diseño Curricular están presentes en nueve de los 10 Tangrams. Todos ellos pueden ser utilizados en el Ciclo Básico, mientras que nueve de los 10 en el Ciclo Orientado. La presencia de más de un eje y de distintos años escolares en un mismo Tangram, presentándose justamente no de forma aislada, sino la mayoría integrados en una misma actividad, da cuenta de una de las ideas centrales de Freudenthal: trascender los contenidos estancos (*Principio de Interrelación*) y favorecer el proceso de *matematización*.

Tabla 4.12. Contenidos asociados a cada Tangram

Tangram	Contenidos explícitos	Contenidos implícitos
<b>Brügger</b>	(2)Concavidad y convexidad de polígonos. (2)Semejanza de triángulos. (4)Número de Oro.	(2)Transformaciones isométricas (rotación y reflexión). (4)Ecuaciones completas de segundo grado y expresiones algebraicas.
<b>Cardio</b>	(1)Circunferencias; círculos; radios; diámetros; arcos de circunferencia; sectores circulares.	(1)Superficies y longitudes con unidades no convencionales. (3)Circunferencias inscritas en polígonos.
<b>Pentagonal</b>	(1)Triángulos: clasificación; congruencia; propiedad de suma de ángulos interiores. (2)Clasificación de trapezios. Pentágonos regulares. (2)Semejanza de triángulos. (3)Semejanza de pentágonos.	(1)Cálculo de longitudes y ángulos con unidades no convencionales. (2)Teorema de Thales. (4)Número de Oro.
<b>Lloyd</b>	(1)Polígonos: superficie de polígonos irregulares a partir de suma de polígonos regulares; análisis de las relaciones entre perímetro y superficie. (2)Polígonos: concavidad y convexidad; regulares e irregulares.	(1)Cálculo de longitud y superficie con unidades no convencionales. (1)Números racionales: fracciones como “parte de”; porcentajes. (2)Semejanza de triángulos. (3)Semejanza de polígonos.
<b>Stomachion</b>	(1)Cálculo de superficies de polígonos con unidades no convencionales y uso de fórmulas (Teorema de Pick). (2) Polígonos: características y propiedades.	(2)Procesos recursivos: exploración y análisis de regularidades para la producción de fórmulas. (2)Polígonos: ángulos interiores; regulares e irregulares; interior y frontera; congruencia; polígono simple; representación gráfica.
<b>Pitagórico</b>	(2)Polígonos: características y propiedades. (2)Superficie y perímetro (con unidades no convencionales) de polígonos.	(1)Procesos recursivos. Transformaciones de expresiones algebraicas en otras equivalentes. (1)Reconocimiento de la inexactitud del proceso de medición. (1)Teorema de Pitágoras. (2)Polígonos: ángulos interiores y representación gráfica. (3)Números racionales. (4)Números irracionales.
<b>Fletcher</b>	(1)Triángulos: características de triángulos (ángulos, lados). (1)Perímetros y superficies de triángulos y cuadriláteros. (1)Teorema de Pitágoras. (2)Cuadriláteros: características. (2)Semejanza de triángulos. (2)Números racionales.	(1)Proporcionalidad. (1)Aproximación de medidas. (2)Regularidades numéricas (matrices). (3)Semejanza de polígonos. Relación entre la razón de semejanza y los perímetros y las áreas.
<b>Ovoide</b>	(1)Teorema de Pitágoras. (1)Superficies de polígonos. (3)Circunferencias: inscritas y circunscriptas; ángulos inscritos y centrales.	(2)Ecuaciones con una y dos variables. (2)Expresiones algebraicas. (3)Polígonos semejantes. (5)Elipses.
<b>Triangular</b>	(1)Triángulos: propiedad de suma de ángulos interiores. (1)Perímetros y superficies de polígonos con unidades convencionales y no convencionales. (2)Semejanza de triángulos. (2)Números racionales: expresión fraccionaria. (3)Relación entre la razón de semejanza, perímetros y áreas.	(2)Polígonos: características; construcción; identificación de sus elementos y medidas. (2)Procesos recursivos: exploración y análisis de regularidades. (2)Ecuaciones con una y dos variables. Expresiones algebraicas.
<b>Hexagonal</b>	(1)Perímetros y superficies de polígonos. (2)Números racionales: expresión fraccionaria.	(2)Polígonos: clasificación y características. (2) Números racionales: expresión decimal. Aproximación. (3)Números racionales: expresión como razón

Ambas ideas van de la mano junto con el resto de los Principios de la EMR, a través de una actividad matemática que contempla diferentes acciones como la de trabajar a partir de contextos con características particulares y comunes a la vez, con un alumno activo que pueda generar nuevas ideas y estrategias a partir de la diversidad de temas que puede encontrar en una misma propuesta.

Los Tangrams contemplados, en su conjunto, pueden emplearse para trabajar cualquier contenido del eje Geometría y Medida de los tres primeros años del Nivel Secundario. Con respecto al eje Números y Operaciones, por su parte cabe advertir que los distintos subconjuntos de los reales positivos (naturales, racionales positivos e irracionales positivos) se hacen presentes.

### **4.3. Consideraciones relativas a la experiencia**

Sobre el final del tercer encuentro (E3.2) los estudiantes responden de forma individual (en 30 minutos aproximadamente) a un cuestionario conformado por seis cuestiones referidas a sus experiencias anteriores con el recurso así como a sus apreciaciones sobre el diseño y simulación de las actividades planificadas. En lo que sigue se recorren los seis asuntos de interés (4.3.1 a 4.3.6) mediante ejemplos ilustrativos de las respuestas de los estudiantes, agrupamientos y modalidades emergentes que refieren a esta instancia de síntesis integral de la experiencia.

#### **4.3.1. Conocimientos previos relativos al Tangram**

En las respuestas a los tres interrogantes que componen la primera pregunta del cuestionario (*¿Qué conocías sobre el Tangram antes de trabajarlo en esta materia? ¿En qué instancias lo habías usado? ¿Qué habías hecho con él?*), se distinguen tres tipos de modalidades que tienen que ver con vivencias previas a lo desarrollado en la actividad propuesta en esta tesis. La primera de ellas se refiere al *conocimiento* (M1) que tenían del Tangram, la segunda hace mención a las *experiencias* (M2) relacionadas con los Tangrams y la tercera al *contexto* (M3) en que se dieron M1 y/o M2. En la Tabla 4.13 se muestran con diferentes colores las palabras o frases clave que dan indicio de la activación de las modalidades en los participantes (se indica con una cruz X) de acuerdo a los grupos (Gi) formados durante los dos últimos encuentros.

Todos mencionan una experiencia de aprendizaje con el Tangram Chino (M1) en la asignatura correlativa PEI (M3), anual de primer año de la carrera.

Tabla 4.13. Conocimientos previos relativos al Tangram

Gi	Respuesta	M1	M2	M3
	A1: Conocía la existencia del <b>Tangram Chino</b> o de siete piezas por <b>juegos online</b> y también porque lo trabajamos en <b>PEI</b> . Además conocía que existen <b>otros Tangrams</b> pero nunca los había usado. Antes de verlo en PEI, donde nos enseñaron a <b>construirlo y observar relaciones de área y perímetro</b> , en los juegos <b>online construía diferentes figuras cada vez más difíciles</b> .	X	X	X
G1	A5: No conocía ningún Tangram, solo el <b>Chino</b> que lo trabajamos en <b>PEI</b> . Habíamos hecho muchísimas actividades de <b>armado de figuras</b> , de trabajo de <b>área</b> y de <b>perímetro</b> .		X	
	A12: Sobre el Tangram antes de trabajarlo en la materia ya conocía el <b>Chino</b> y el del <b>huevo</b> . Del Tangram Chino en <b>PEI</b> ya lo habíamos trabajado y conocía posibles actividades sobre él, por ejemplo <b>hacer una tabla</b> , cómo <b>calcular el área y el perímetro de las piezas tomando una como base</b> . Y del Tangram del huevo, como estaba en <b>mi casa</b> , cuando era chica jugaba a <b>armar las distintas figuras</b> .	X	X	X
	A2: Antes de trabajarlo en esta materia, lo había visto en <b>PEI</b> , fue la primera vez que lo vi, solo nos enfocamos en el <b>Tangram Chino</b> , vimos que existían <b>otros tipos</b> más pero solo por imágenes. Con el Tangram Chino trabajamos en el comienzo de la materia, <b>observamos las diferentes figuras que se podían formar</b> además del cuadrado y lo utilizamos para <b>introducir la fórmula del área de diferentes figuras geométricas tales como: triángulo, cuadrado, rectángulo, rombo, romboide, paralelogramo y trapecio</b> .	X	X	
G2	A4: Conocía el <b>mito de cómo surge</b> , la <b>variedad de Tangrams</b> que existen y la <b>gran cantidad de temas que se pueden abordar</b> , lo usamos en <b>PEI</b> . Habíamos <b>hecho distintas formas</b> y algunas <b>actividades de área</b> , entre otras que se podían llevar a cabo con el <b>Tangram Chino</b> .	X	X	
	A8: Lo conocí en el primer año de la carrera en <b>PEI</b> , solo dimos el <b>Tangram Chino</b> . Lo dimos como una <b>herramienta didáctica</b> para usar en las clases que en un futuro daremos. Esto lo dieron a principio de año. Lo que hicimos fue <b>hacer distintas figuras</b> .		X	
	A3: Trabajé con el <b>Tangram Chino</b> en <b>PEI</b> . Sabía que se podía <b>trabajar áreas, perímetros, armar figuras</b> . En PEI realizamos actividades con el Tangram Chino, en las cuales había que <b>calcular el área de las figuras</b> y algo más que no recuerdo.	X	X	
G3	A9: Conocía el <b>Tangram Chino</b> , lo había usado <b>recreativamente</b> sabiendo que hay que armar un cuadrado con todas las piezas. En <b>PEI</b> también lo utilizamos como <b>recurso para enseñar Matemática</b> , en particular hicimos una unidad para <b>abordar el área de figuras</b> .		X	
	A14: La primera vez que usé el <b>Tangram</b> (específicamente el <b>Chino</b> ) fue cuando tenía <b>ocho años</b> , que fue un <b>regalo</b> de mis padres para <b>jugar</b> , luego en la clase de <b>PEI</b> en el primer año de cursado de la carrera que nos mostraron una secuencia de actividades para dar los <b>contenidos de área y perímetro</b> .		X	X
	A6: Antes de trabajarlo conocía el <b>Tangram Chino</b> , el cual lo conocí en <b>PEI</b> . Este fue utilizado para mostrar diferentes <b>actividades con las cuales trabajar en el Ciclo Básico</b> .		X	
G4	A10: El único Tangram que conocía era el <b>Tangram Chino</b> , sabía <b>cómo estaba formado y las características de sus piezas</b> . Lo utilicé en primer año de la Facultad en la materia <b>PEI</b> . Hicimos <b>actividades que involucraban contenidos posibles para abordar en la escuela</b> .		X	
	A13: Cuando trabajé con el Tangram fue en <b>PEI</b> en primer año. Trabajamos los <b>mismos conceptos que trabajamos acá</b> .			
	A7: Antes de trabajar el Tangram en esta materia, había conocido solo el <b>Tangram Chino</b> . Lo utilizamos en la materia <b>PEI</b> para ver una <b>manera didáctica de introducir el tema áreas de cuadriláteros a partir del área de un triángulo al que llamamos triángulo unidad</b> .		X	
G5	A11: Conocía el <b>Tangram Chino</b> porque lo vimos en una de las actividades de <b>PEI</b> . La actividad no la recuerdo.			
	A15: Antes de trabajarlo en esta materia conocía solo el <b>Tangram Chino</b> . Lo trabajé en <b>PEI</b> . La profesora nos trajo actividades para que las realicemos utilizándolo, en las cuales teníamos que <b>caracterizar las piezas, y hallar áreas y perímetros</b> .		X	

En particular, cuatro estudiantes (A1, A9, A12 y A14) aluden además a otras experiencias (M2), de tipo recreativas, tres de ellos emplearon Tangrams especificando dos contextos (M3) puntuales, tales como sitios de Internet (A1) y ámbitos familiares (A12, A14). Los restantes 11 no mencionan otras experiencias pero sí distinguen los tópicos abordados o tipos de actividades en la asignatura PEI.

En la Tabla 4.14 se muestran las frecuencias de los tópicos que se enmarcan dentro de cada contenido mencionado.

Tabla 4.14. Frecuencia absoluta de los contenidos abordados en PEI

Contenidos	Frecuencia
Área (cálculo; introducción de fórmulas; unidad no convencional)	10
Polígonos (observación de piezas; caracterización de piezas; construcción de figuras)	6
Perímetro (cálculo; unidad no convencional)	5
Tablas (elaboración)	1

De acuerdo a las consideraciones curriculares y didácticas presentadas por el MESF (2014), los tres primeros contenidos de la Tabla 4.14 corresponden al eje Geometría y Medida, mientras que el cuarto contenido está presente en el eje Álgebra y Funciones. Todos ellos se mencionan explícitamente en el Ciclo Básico del Nivel Secundario, con relevancia además en el Ciclo Orientado. Al considerar uno de los objetivos de la Matemática que es lograr las capacidades y destrezas necesarias para aprender a llevar a cabo los procesos que se requieren en la resolución de problemas (MESF, 2014), son los propios contenidos un vehículo para lograrlo.

Entre las actividades realizadas (M2), hay cinco estudiantes (A6, A7, A8, A9 y A10) que reconocen en el Tangram una herramienta didáctica para el desarrollo de la Matemática escolar.

El conocimiento (M1) sobre otros tipos de Tangrams en los estudiantes (A1, A2, A4 y A12) no implicó un uso de ellos, salvo A12 que armó figuras con el Tangram Ovoide.

#### 4.3.2. Acciones para la elaboración de actividades

Se distinguen diferentes acciones reconocidas por los estudiantes a la hora de elaborar las actividades (cuando se les preguntó *¿cómo fuiste pensando las actividades: te valiste del Tangram entregado, buscaste otros materiales, pusiste a personas cercanas a explorarlo, repasaste contenidos matemáticos, etc.?*), a partir de las cuales se crean cuatro modalidades.

Tabla 4.15. Acciones para la elaboración de actividades

Gi	Respuesta	M1	M2	M3	M4
	A1: Las actividades las pensé en base a lo que podía observar de los Tangrams, busqué información en Internet y jugué con mis hermanos en casa viendo qué figuras armaban y qué podían observar ellos.	X	X		X
G1	A5: En primera instancia se lo mostré a mi familia y vi qué hacían con los Tangrams. Luego exploré de qué se trataban, qué actividades se podrán realizar con ellos, qué temas se podrían introducir, figuras que se podrían armar, etc. Una vez encaminado el trabajo, conllevó una etapa de repaso de conceptos y también de afianzamiento de otros poco (por no decir nulo) conocidos: el Número de Oro.		X	X	X
	A12: Cuando me entregaron el Tangram lo primero que hice fue poner a personas cercanas a explorarlo y a armarlo, luego busqué información y posibles actividades en Internet.	X	X		
G2	A2: Como no conocía los dos Tangrams que nos tocaron, lo primero que hice fue tratar de armar la figura principal, uno con su nombre ya sabíamos que se formaba un pentágono, el otro, el Tangram de Lloyd tuve que buscar en libros para ver de qué se trataba. Observando cada Tangram en particular, comparando sus figuras, comenzamos a pensar qué temas podíamos abordar, en el caso del Tangram de Lloyd verifiqué en los contenidos matemáticos para ver si los temas pensados eran acordes a los niveles, no así con el Tangram Pentagonal, ya que nos enfocamos en trabajar temas que ya sabíamos que se encontraban en los NAP. Una vez que supimos qué temas dar, comenzamos a redactar las actividades.	X	X	X	X
	A4: Tuve que repasar algunos contenidos que tenía dudas, se lo di a mi mamá para que explore y para ver si se le ocurría algún otro tema que podamos trabajar, también observando el Tangram que nos tocó y las figuras que lo componen.		X	X	
	A8: Las actividades las pensé valiéndome del Tangram entregado y repasé algunos contenidos matemáticos.			X	X
	A3: Con los Tangrams entregados fuimos buscando qué contenidos se podían dar, y de acuerdo con eso fuimos pensando actividades para secundaria que sean ágiles y traten de lucir al Tangram. Repasamos contenidos matemáticos también.			X	X
G3	A9: Lo primero que hice fue explorarlo y pasarlo a conocidos para que intenten armarlo. Después para las actividades buscamos algunas propuestas en Internet que quizás eran para otros Tangrams y había que modificarlas para adaptarlas.	X	X		X
	A14: Al principio para armar las actividades busqué información por Internet para ayudarme a pensar, luego probé hacer jugar un rato a mi familia y por último entre los integrantes del grupo fuimos dando ideas.	X	X		
	A6: Para pensar las actividades fui explorando el Tangram entregado y pensando qué figuras se podrán armar con él. En base a esto fui pensando actividades que las involucren y los conceptos relacionados para poder introducirlos.		X	X	X
G4	A10: Primero pensé en los contenidos matemáticos que se podían abordar con dicho Tangram. Busqué en Internet actividades para realizar con él y que requieran de una interacción entre alumno-docente.	X		X	X
	A13: En el caso del Tangram Ovoide hicimos el dibujo en GeoGebra.		X		
	A7: Al pensar las actividades, fuimos buscando distintas actividades que se podían hacer con él a través de Internet, ya que no conocíamos el Tangram ni para qué temas podía ser beneficioso utilizarlo.	X			X
G5	A11: Primero intenté armarlo yo y luego reté a mi familia a que lo armara. Además busqué contenidos y actividades en Internet para guiarme y adaptar actividades de otros Tangrams a los que nos había tocado. Repasamos contenidos con el Diseño Curricular para buscar alguna actividad que contenga o desarrolle alguno de ellos.	X	X	X	X
	A15: Las actividades las pensé en función del Tangram entregado, buscando en Internet su historia y el contenido que más se relacionara con él y también busqué posibles actividades para realizar con el Tangram Chino que es el más conocido y luego lo traté de adaptar.	X			X

La primera de ellas, denominada *búsqueda de materiales* (M1), hace referencia a la fuente de información para el armado de las actividades. La segunda modalidad es *exploración sensorial* (M2) y engloba aquellas acciones de manipulación a través de los sentidos sobre las piezas del Tangram. La siguiente refiere a los *contenidos matemáticos* (M3), procura constatar si son consultados y en qué momento del diseño de la actividad. La última modalidad, llamada *Tangram inicial* (M4), pretende conocer en cuál de los tipos de Tangrams se basaron para pensar las actividades. En la Tabla 4.15 se muestran los indicios de estos tipos de acciones en cada una de las respuestas.

La búsqueda de materiales (M1) es destacada por nueve estudiantes (A1, A2, A7, A9, A10, A11, A12, A14 y A15), donde Internet es una fuente mencionada por ocho de ellos (todos excepto A2, quien mencionó “libro”).

Entre los 10 estudiantes (A1, A2, A4, A5, A6, A9, A11, A12, A13 y A14) que hacen mención a la exploración sensorial (M2), se destacan acciones como observar, comparar, armar y dibujar en software. Estas habilidades, puestas en juego sobre las piezas de un puzzle como los Tangrams, enriquecen las estructuras mentales y de visualización abriendo camino al desarrollo de conocimiento (subapartado 2.2.1). Los tipos de exploración llevados a cabo son, por un lado, por el propio estudiante de forma individual (A2, A6 y A13) y, por otro, por familiares (A1, A5, A9, A12 y A14) para observar lo que surgía de esa exploración. Además, los estudiantes A4 y A11 hacen mención a los dos tipos de manipulación.

La constatación de los contenidos matemáticos (M3) que se involucran en las actividades se presentan en diferentes momentos: aquellos que deciden consultarlos previo a comenzar la elaboración de actividades (A2, A3 y A10) y otros que toman el camino inverso (A2, A4, A5, A6, A8 y A11), acudiendo a los documentos ministeriales luego de elaborar algunas actividades. Los documentos mencionados son el Diseño Curricular (MESF, 2014) y los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios (Ministerio de Educación de la Nación, 2012).

Ocho de los 11 estudiantes (A1, A2, A3, A5, A6, A7, A8 y A10) que aluden a M4, comienzan a plantear sus actividades con los Tangrams del grupo, otros dos (A9 y A11) hacen referencia a la adaptación de actividades a partir de otro tipo encontrado y el restante (A15) remarca hacer los dos tratamientos mencionados anteriormente a cada uno de los Tangrams asignados.

### 4.3.3. Dificultades

En la Tabla 4.16 se remarcan las dificultades detectadas por los estudiantes en el diseño de las actividades (cuando se les preguntó: *¿qué cosas te costaron?*), donde emergen tres modalidades: *tipo de Tangram* (M1) designado a cada grupo; *contenidos específicos* (M2) asociados a un tipo de Tangram; *destinatario* (M3) de las actividades pensadas.

Los tipos de Tangrams (M1) nombrados por los seis estudiantes (A1, A2, A3, A5, A11 y A12) que presentan dificultades por sus características propias son: Lloyd, Stomachion, Hexagonal, Brügger y Ovoide. Por su parte los Tangrams de Lloyd y Hexagonal contienen algunas piezas particulares como un hexágono no regular y regular respectivamente. Los Tangrams Stomachion y Brügger se distinguen por la cantidad de tans, el primero de ellos conformado por 14 piezas y el segundo solo por tres. Mientras que el Tangram Ovoide tiene las dos terceras partes de sus piezas curvas.

Tabla 4.16. Dificultades en la elaboración de actividades

M1	A1: Me costó pensar una tercera actividad para el Tangram de Brügger (terminó siendo la del Número de Oro) [...].
	A5: Personalmente, y como grupo, me costó pensar en diversidad de actividades para el Brügger, por lo que solo pudimos hacer tres.
	A12: Lo que más me costó fue el pensar posibles actividades para el Brügger.
	A2: Pensar las actividades para abordar los temas del Tangram de Lloyd fue lo que más me costó.
	A3: Con el Tangram Stomachion me costó armar las figuras que se pueden formar porque tiene muchas piezas.
	A13: Me costó la elección de actividades del Ovoide porque podíamos trabajar con figuras cónicas pero los conceptos básicos, es decir, identificar sus elementos.
M2	A11: Costó más el inventar actividades para el Tangram Hexagonal, ya que no había muchos ejemplos [...].
	A4: Una vez que pensamos los temas que se podían trabajar, me costó pensar las actividades en donde se trabajaran esos temas.
	A6: Me costó pensar actividades para un Tangram con el cual se podían formar cónicas, ya que según el Diseño Curricular, la única cónica que se trata en el Ciclo Básico es la circunferencia.
	A10: Me costó (y al resto del grupo) pensar actividades para el Tangram Ovoide, ya que no sabíamos cómo abordar el tema cónicas para el nivel básico de secundaria.
	A7: Me costó más pensar o buscar actividades con los Tangrams que introdujeran temas distintos a la noción de área y perímetro.
M3	A9: Lo que más costó fue hacer la selección de temas a tratar con relación a las actividades que teníamos. Intentamos al principio encontrar temas que no sean el de área y perímetro, pero eso nos restringía las actividades.
	A14: Al principio saber qué contenidos se podían dar con los Tangrams [...].
	A1: Me costó [...] poder transformar una demostración formal en una más didáctica.
M3	A14: [...] qué actividades eran adecuadas para proyectar esos contenidos y que además fueran aptos para alumnos de secundaria.
	A15: Me costó definirle el objetivo a cada actividad.

Los seis estudiantes (A4, A6, A7, A9, A10 y A14) que integran M2 denotan tres tipos de dificultades a la hora de utilizar los Tangrams: pensar en contenidos específicos a partir de una actividad dada, diseñar la actividad para un contenido dado e identificar

contenidos diferentes a los usuales como son perímetro y área. En este último punto cabe señalar que van Hiele (1999/2009) reconoce en estos tipos de rompecabezas el hecho de favorecer la enseñanza de la geometría y del pensamiento geométrico distinguiendo distintos niveles (subapartado 2.2.1). Esta cualidad distinguida por el autor puede ser uno de los motivos por los cuales esos tipos de contenidos (como área y perímetro) puedan adaptarse y utilizarse como primera opción en todos los tipos de Tangrams.

Los destinatarios de las actividades (M3) son considerados por tres estudiantes, y hacen referencia a la dificultad en establecer el objetivo de las actividades pensadas (A15) y su uso didáctico (A1 y A14). Estos forman parte de algunos de los aspectos mencionados por Flores (2006) en los que el docente pueda reflexionar y volver a repensar para el uso adecuado de un recurso.

Adicionalmente, dos estudiantes (A8 y A11) señalan cierta dificultad en características propias de la materia PEII, como es el trabajo en grupo y las consignas abiertas.

#### **4.3.4. Aspectos sorprendentes**

Entre los aspectos que sorprenden a los estudiantes (al indagarse: *¿qué te sorprendió?*) se distinguen dos modalidades. Aquellos referidos al Tangram por la *característica de su composición* (M1) y los referidos al *uso didáctico* (M2) del mismo. Precisamente en la Tabla 4.17 se muestran fragmentos que marcan la presencia de estas dos modalidades.

Aproximadamente la mitad de los estudiantes (A1, A3, A5, A6, A7, A12 y A15) integran la modalidad M1, a los cuales sorprenden las peculiaridades de los Tangrams de Brügger y Cardiotangram; además de los Tangrams en general, la relación de sus lados y sus piezas, las figuras que lo componen, la diversidad en la cantidad de piezas que tiene cada uno y, por último, la variedad de Tangrams que existe.

Todos los estudiantes hacen referencia a la M2 sobre lo sorprendente con relación al uso didáctico del Tangram. Contemplan la cantidad y diversidad de temas, así como aquellos temas no conocidos (Fórmula de Pick) o específicos de cada Tangram. Además, consideran características tales como el aspecto lúdico, entretenido, cercano y tangible para el alumno.

Estos aspectos mencionados por los estudiantes los posicionan de manera favorable a propiciar procesos de enseñanza mediante el uso del Tangram (MESF, 2014).

Tabla 4.17. Aspectos sorprendentes en el uso del Tangram

	<p>A1: Me sorprendió en el Tangram de Brügger la propiedad sobre la razón áurea que se desprende de la relación entre sus lados y en el Cardiotangram que la circunferencia formada estaba inscrita en el cuadrado formado con las piezas restantes [...].</p> <p>A5: En primer lugar me sorprendieron los Tangrams que nos tocaron (Brügger y Cardiotangram), uno por tener solo tres piezas [...].</p>
M1	<p>A12: Lo que más me sorprendió fue, una vez explorado y que encontré información, la cantidad de cosas que se pueden realizar con el Tangram de Brügger que tan solo contiene tres piezas [...].</p> <p>A3: [...] También me sorprendió la cantidad de Tangrams distintos que hay [...].</p> <p>A6: Lo que más me sorprendió es la cantidad de figuras distintas que se pueden armar con ellos [...].</p> <p>A7: Me sorprendió la gran cantidad de Tangrams que existen y desconocemos [...].</p> <p>A15: Me sorprendió la forma en que están hechos los Tangrams, todas sus piezas guardan alguna relación [...].</p>
	<p>A1: [...] Además me sorprendió la gran variedad de temas que pueden desarrollarse.</p> <p>A5: [...] los Tangrams que nos tocaron (Brügger y Cardiotangram) [...] Ambos, por su riqueza para trabajarlos, y por los conceptos y temas importantes que llevan incorporados. También la diversidad de temas que existen, de los cuales desconocía, y lo didáctico que son.</p> <p>A12: [...] lo que más me llamó la atención es que tan interesante es el número áureo y toda su historia, ya que antes no los conocía.</p> <p>A2: Me sorprendió la clase de hoy, al ver la cantidad de temas que se pueden dar con los diferentes Tangrams y la diversidad de actividades que existen, ver cómo un mismo tema se puede dar con actividades tan diferentes.</p> <p>A4: La cantidad de temas y ejercicios que surgen.</p> <p>A8: Me sorprendió la cantidad enorme de actividades que se pueden hacer y los diversos temas que podemos abordar con él.</p> <p>A3: Me gustó mucho la fórmula de Pick, nunca la había escuchado [...] y la variedad de contenidos que se pueden dar.</p>
M2	<p>A9: Para el Stomachion propusimos una actividad para conjeturar el Teorema de Pick, que lo encontramos buscando actividades y no lo conocíamos, o no lo teníamos presente.</p> <p>A14: Me sorprendió que con un poco de ingenio se podían dar varios contenidos y que además había actividades bastantes entretenidas y valiosas para realizar con ellos.</p> <p>A6: Lo que más me sorprendió es [...] la cantidad de contenidos que se pueden enseñar.</p> <p>A10: Me sorprendí cuando surgieron conceptos que no conocía como producto de ciertas actividades con otros grupos (el Número de Oro por ejemplo).</p> <p>A13: Me sorprendió algunas actividades de los otros grupos, en donde aparecieron conceptos nuevos para mí.</p> <p>A7: Me sorprendió [...] todos los temas de Matemática que se pueden introducir a partir de ellos. También me sorprendió que no solo se pueden utilizar para introducir las nociones de área y perímetro de figuras, sino que cada Tangram tiene temas específicos que se pueden llegar a abordar a partir de él.</p> <p>A11: Me sorprendieron el hecho de que con un “juego” se pudieran dar tantos temas de Matemática y variados.</p> <p>A15: Me sorprendió [...] la cantidad de actividades y temas que podemos abordar usándolos como recursos para que los alumnos vean los contenidos de una forma más cercana y tangible.</p>

### 4.3.5. Potencialidades

En el proceso de descubrimiento de las potencialidades de cada Tangram a través de sus actividades (al preguntarles: *¿cómo te fuiste dando cuenta cuáles eran las actividades más potentes para realizar con el Tangram designado?*), se destacan entre los estudiantes aquellas que tienen que ver con el *tratamiento del tema* (M1), otras que realzan alguna *característica del Tangram* (M2), o también cuando la *exploración y manipulación* (M3) se ponen en juego en distintas instancias del diseño de las actividades.

Tabla 4.18. Potencialidades reconocidas en los Tangrams designados

<p><b>M1</b></p>	<p>A1: [...] Por otro lado, había actividades más sencillas (concavidad y convexidad) que permiten desarrollar un concepto importante pero debido a la simpleza puede ser mejor comprendido.</p> <p>A5: Los temas a desarrollar los vi más constructivos y más interesantes con las actividades que terminamos eligiendo. Los Tangrams se prestaban de una forma muy particular y llamativa con dichas actividades y los conceptos que introducían.</p> <p>A2: Las actividades a dar las elegimos considerando cuáles eran las más importantes y con cuáles trabajaríamos de manera más intensa cada tema, esas fueron las que consideramos más potentes, donde notamos que el tema se podía profundizar y que no fuera solo una actividad en el aire.</p> <p>A8: Porque con esas actividades podemos enunciar temas que tal vez con otras actividades solo corroborábamos algo visto.</p> <p>A9: [...] De esa manera se pueden calcular áreas y perímetros utilizando una unidad no convencional utilizando diferentes estrategias. A partir de esa propuesta de la cuadrícula dimos con el Teorema de Pick y decidimos utilizarlo.</p> <p>A10: Elegimos aquellas actividades en donde se abordaban temas muy importantes, por ejemplo área, ya que este es un concepto muy abstracto, y trabajarlo como algo tangible como el Tangram nos resultó potente a la hora de realizar las actividades.</p>
<p><b>M2</b></p>	<p>A4: Tratamos de elegir actividades en donde ciertas propiedades que queríamos trabajar se vean, observen usando las piezas del Tangram.</p> <p>A3: Había actividades que se podían realizar con cualquier Tangram entonces tratamos de buscar aquellas que los Tangram que nos tocaron se destaquen o que las actividades se puedan resolver con estos Tangrams.</p> <p>A9: Para el Stomachion pensamos que es muy interesante colocarlo en una cuadrícula, ya que predominan figuras irregulares que tienen pocas coincidencias entre sí en cuanto a ángulos y longitudes de los lados [...].</p> <p>A11: Intenté preguntarme si podría realizar la misma actividad con otro Tangram, ya que no todos están compuestos por las mismas figuras, en caso de respuesta negativa, podría decir que la actividad era adecuada.</p>
<p><b>M3</b></p>	<p>A1: Lo más sorprendente por un lado me parece lo más potente pues a veces no son relaciones o cosas que se observan a simple vista [...].</p> <p>A12: Me fui dando cuenta cuáles eran las actividades más potentes para realizar con cada Tangram cuando ya teníamos un par de actividades y fuimos seleccionando las que tenían temas de Matemática más interesantes para desarrollar.</p> <p>A14: En el Stomachion la actividad que más potencial tenía era utilizando el Teorema de Pick, y poder visualizar eso me ayudó mucho haber investigado antes. En el Pitagórico, la actividad para obtener el perímetro fue jugando con las piezas, superponiendo unas con otras.</p> <p>A6: Me fui dando cuenta cuáles eran las actividades más potentes cuando empezamos a trabajarlas y resolverlas más en profundidad, ya que en esos momentos me fui dando cuenta de la complejidad de las mismas.</p> <p>A13: Cuando fui investigando las distintas actividades que se podían hacer con el Tangram, me di cuenta que la mayoría de las actividades están destinadas al cálculo de perímetro y área.</p> <p>A7: Mientras más íbamos investigando, buscando en Internet y relacionando y armando figuras con las piezas del Tangram, íbamos encontrando cada vez más características y particularidades de estos Tangrams para poder introducir muchos conceptos de temas dados en la Matemática de Secundaria.</p> <p>A15: Me di cuenta cuál era la actividad más potente para realizar con el Tangram designado cuando me puse en el papel del alumno y resolví todas las actividades y en esa en particular me di cuenta que se aprovechaba mucho el Tangram para poder lograr la relación a la que queríamos llegar (actividad 4), ya que con el Tangram Triangular se pueden construir muchos triángulos semejantes.</p>

La Tabla 4.18 muestra el agrupamiento de las respuestas según estas modalidades. Cabe advertir que cada modalidad agrupa aproximadamente la tercera parte de los estudiantes.

La primera modalidad, referida al tratamiento del tema (M1), cobra relevancia en seis estudiantes (A1, A2, A5, A8, A9 y A10) que ponderan la forma de abordaje de los temas. Valoran la sencillez en el tratamiento de un tema complejo, la manipulación sobre uno considerado abstracto, así como la forma no usual y constructiva e intensificada de desarrollarlo.

Las características del Tangram (M2) son distinguidas por cuatro estudiantes (A3, A4, A9 y A11), donde la mitad de ellos (A3 y A11) aclaran que la potencialidad de una actividad se debe a que no puede aplicarse a cualquier Tangram y la otra mitad (A4 y A9) particulariza en características que tienen las piezas que lo conforman.

La exploración y manipulación (M3) se ve reflejada en siete estudiantes (A1, A6, A7, A12, A13, A14 y A15), donde en cuatro de ellos (A6, A12, A13 y A15) la exploración se observa en el análisis y resolución de las actividades. En los restantes tres estudiantes la modalidad se hace presente cuando mencionan que investigaron distintas fuentes, manipularon el Tangram y obtuvieron relaciones que no son observadas a simple vista.

#### **4.3.6. Significación del trabajo grupal**

Se consultó: *¿fue significativo trabajar en grupo? ¿Por qué?* Se desprenden entre las respuestas tres modalidades: aquellas que consideran el trabajo en grupo como un *aporte colectivo* (M1), otras como un *complemento de partes* (M2) y, por último, las que realizan una *valoración personal* (M3) del trabajo en equipo.

Todos los estudiantes destacan aspectos positivos y significativos en el trabajo en grupo. Seis (A1, A2, A3, A7, A11 y A14) identifican al aporte colectivo (M1) como una fortaleza del trabajo grupal, donde la mayoría sostiene que posibilitó potenciar las actividades diseñadas.

La categoría M2, que distingue al trabajo en grupo como complemento entre partes, es distinguida en nueve estudiantes (A4, A5, A8, A9, A10, A12, A13, A14 y A15), los cuales utilizan palabras como: “complemento”, “intercambio”, “interacciones”, “aporte”, “multiplicación”, “miradas”, “opiniones” y “complejo”.

A excepción de A6, en las respuestas del resto de los estudiantes estuvo presente al menos una de las modalidades M1 y M2.

La valoración personal (M3) sobre el trabajo en grupo es relevada en seis respuestas (A1, A2, A5, A6, A9 y A11), que destacan actitudes positivas y formativas individuales y grupales.

En la Tabla 4.19 se comparten las respuestas de los participantes distribuidos según el grupo de pertenencia (G1 a G5).

Tabla 4.19. Significación del trabajo grupal

Gi	Respuesta	M1	M2	M3
	A1: Fue significativo en la medida que era posible un intercambio a conciencia sobre lo que se buscaba con cada actividad y el compromiso para con el trabajo.	X		X
G1	A5: Sí fue significativo el intercambio de propuestas, el aporte mutuo y las correcciones que nos hacíamos creo que fue importante para poder arribar al trabajo que presentamos, pero también personalmente, para mi crecimiento como futura docente.		X	X
	A12: Sí fue significativo trabajar en grupo, ya que cada una de las integrantes aportaba ideas y actividades que a las demás no se nos había ocurrido.		X	
	A2: El trabajo en grupo creo que fue la clave para llegar a pensar todo de la mejor manera, el primer día que tuve los Tangrams llegué a mi casa y lo primero que hice fue tratar de pensar sola y se me ocurrieron muy pocas, con mi propio grupo vi que el mismo tema lo podíamos dar con muchísimas actividades diferentes. Y en grupo llegamos a ver cuáles nos parecía de mayor importancia para dar.	X		X
G2	A4: Sí, porque nos íbamos complementando. A alguna se le ocurría cierta actividad o tema, a las otras cómo llevarlas a cabo.		X	
	A8: Sí porque aportábamos distintas ideas que juntas formaban algo mejor, que si lo hubiera hecho sola no me había surgido. Lo que yo, tal vez, no me daba cuenta alguna de las chicas sí, y juntas íbamos armándolo.		X	
	A3: Estuvo bueno ya que pudimos entre los tres ir pensando y armando actividades que capaz a una sola persona no se le hubieran ocurrido, hubo interacciones entre nosotros que hicieron a la variedad de actividades.	X		
G3	A9: Sí siempre es mejor trabajar en grupo, ya que se multiplican las ideas y siempre llegamos a acuerdos, nos obliga a argumentar nuestras propias posiciones y también a reconocer cuando se opta por otras. Además al trabajar en grupos hay un compromiso más grande de cada uno para realizar la actividad.		X	X
	A14: Sí, cada uno apostaba una idea y discutiendo entre todos pudimos armar las actividades. Uno buscó información por algún medio, otro fue pensando mientras manipulaba el Tangram, alguno pensaba “podríamos hacer esto” y otro decía “me gusta la idea pero cambiaría tal cosa para que se luzca más” o a veces no estábamos de acuerdo y buscamos otra solución.	X	X	
	A6: En mi opinión, el trabajo en grupo siempre es mejor que el trabajo individual, por eso me parece que es muy significativo trabajar en grupo.			X
G4	A10: Sí, me resultó muy significativo, porque cada una aportaba ideas distintas que podíamos ir complementando. Me parece que el trabajo en grupo resulta muy rico en cuanto al desarrollo del trabajo.		X	
	A13: El trabajo en grupo es siempre más complejo y satisfactorio porque al haber distintos puntos de vista, podemos criticar los ejercicios para mejorarlos.		X	
	A7: Sí fue significativo trabajar en grupo ya que pudimos debatir, conversar, probar, jugar y relacionar entre todas para decidir las actividades más beneficiosas de esos Tangram.	X		
G5	A11: Sí, porque se pueden crear mejores ideas y puntos de vista, se trabaja la comprensión, la paciencia y de una manera más ágil.	X		X
	A15: Sí fue significativo trabajar en grupo porque cada uno aportó su mirada, su opinión y entre todos tratamos de unir lo mejor que cada uno pudo aportar.		X	

En concordancia con el *Principio de Interacción* de la EMR, se valora positivamente en el proceso de aprendizaje la interacción entre pares, pensando a la Matemática como una actividad que se construye socialmente, sin perder lo individual en el proceso.

## **Capítulo 5**

### **Conclusiones**

---

En este capítulo se recorren, en primer lugar, las distintas dimensiones de análisis de interés en términos teórico-metodológicos, haciendo un análisis sucinto de cada una de las categorías que ellas contemplan. En segundo lugar, se responden los interrogantes que dieron origen a los objetivos de la tesis y se culmina con reflexiones finales que recorren de forma integral todo el trabajo de investigación.

#### **5.1. Dimensiones de análisis**

El trabajo de campo es analizado según las cuatro Dimensiones distinguidas en el sistema de categorías (apartado 3.8). Se consideran las distintas intervenciones de los estudiantes en diferentes roles contemplados en los tres encuentros establecidos en esta tesis. En particular, tres de esas cuatro Dimensiones (subapartados 5.1.2, 5.1.3 y 5.1.4) contemplan un segundo nivel de categorización, que profundiza en aspectos y momentos específicos dentro de las acciones realizadas por los estudiantes. Como cierre de cada Dimensión se presenta una síntesis de los tópicos abordados en la misma.

##### **5.1.1. Dimensión 1. Resolución de actividades**

Para el análisis de la primera Dimensión se toma como insumo las interacciones realizadas en el E1.2 (apartado 4.1), donde los estudiantes son puestos en situación de alumnos en la implementación de una propuesta que involucra el uso del Tangram Chino. Se puede notar un trabajo previo con este tipo de Tangram en el marco de la materia PEI (correlativa a la asignatura donde se desarrolla este trabajo de campo). En su mayoría recuerdan no solo características del Tangram físico, como la figura patrón y algunas de sus piezas, sino también tipos de actividades específicas como son la formación de imágenes y el cálculo de áreas a partir de una unidad no convencional.

En la implementación de la actividad propuesta por la tesista, las consignas pueden distinguirse en dos grandes grupos. Por un lado, aquellas que implican acciones manipulativas más exhaustivas que a su vez pueden replicarse a otros tipos de Tangrams, como es el reconocimiento de los tans y la formación de tangramas (figuras que se arman con la totalidad de los tans). Por otro lado, aquellas relacionadas con contenidos matemáticos específicos que pueden aplicarse, o no, según sea considerada una actividad potente para el tipo de Tangram, como sucede por ejemplo con la cuarta

consigna implementada con el Tangram Chino (“¿cuántos triángulos pequeños se necesitan para cubrir el cuadrado, el triángulo mediano, el paralelogramo y uno de los triángulos grandes?”).

En la puesta en marcha de las consignas, se han enfatizado en los estudiantes avanzados dos aspectos: uno tiene que ver con su accionar al momento de llevar adelante la actividad y el otro, con posibles desempeños en la futura tarea docente. En el primer aspecto se destaca el comportamiento durante el desarrollo de la primera consigna de tipo abierta (“Anotar las características de las figuras que lo forman”), la cual provocó incertidumbre en los estudiantes en cuanto a querer conocer cuáles serían finalmente esas características. Se destaca además en la cuarta y quinta consignas (“Relacionar el área entre diferentes piezas y figuras”) la diversidad de representaciones que combinan tipos de lenguajes (coloquial, simbólico y gráfico) y formas dentro del tipo de registro coloquial.

El segundo aspecto es señalado en la segunda y tercera consignas (“Construir figuras cotidianas y geométricas”) donde la experimentación en primera persona con el Tangram Chino lleva a los estudiantes a ser conscientes de las características de los tangramas, como el respetar las proporciones en la estructura, el considerar el nivel de dificultad que involucra el armado, el prever algún registro para ello y el considerar la utilización o no de todas las piezas. Como enfatizan Rupérez y García (2013), la instancia de prueba y error por parte de los que manipulan este tipo de puzle permite identificar detalles pertinentes para posibles construcciones de figuras. Todas estas inquietudes que emergen de los estudiantes avanzados son acciones típicas en el uso del Tangram que implican, como docentes, estar atentos y acompañar el desempeño estudiantil para que vayan progresando gradualmente en la construcción.

Es posible establecer puntos de contacto entre lo desarrollado en el E1.2 con lo trabajado en la asignatura PEI. Esta experiencia previa dota de significatividad el trabajo del E1.2 como así también posibilita profundizar en el uso del Tangram, reconociéndole -los propios estudiantes- al recurso bondades en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática. En concordancia con esta idea, Rodríguez (2012) remarca que cuando este tipo de experiencias son sistematizadas, potencialmente, se convierten en un recurso o herramienta que se encuentra a disposición del futuro docente, con la posibilidad de modificar e implementar en función a los contextos que se le presenten.

Se reconoce como particularidad del Tangram Chino a las distintas alternativas de formar una misma figura debido a la movilidad que puede realizarse de los tans, sus características y las simetrías (rotaciones y reflexiones) que presenta el cuadrado como figura patrón de este Tangram. A su vez, en esta experiencia llevada a cabo por la tesista con relación al Tangram Chino, la identificación de los contenidos del Diseño Curricular (MESF, 2014) y los Principios de la EMR asociados a la propuesta, dotan de significado a los próximos dos encuentros analizados en las restantes tres Dimensiones.

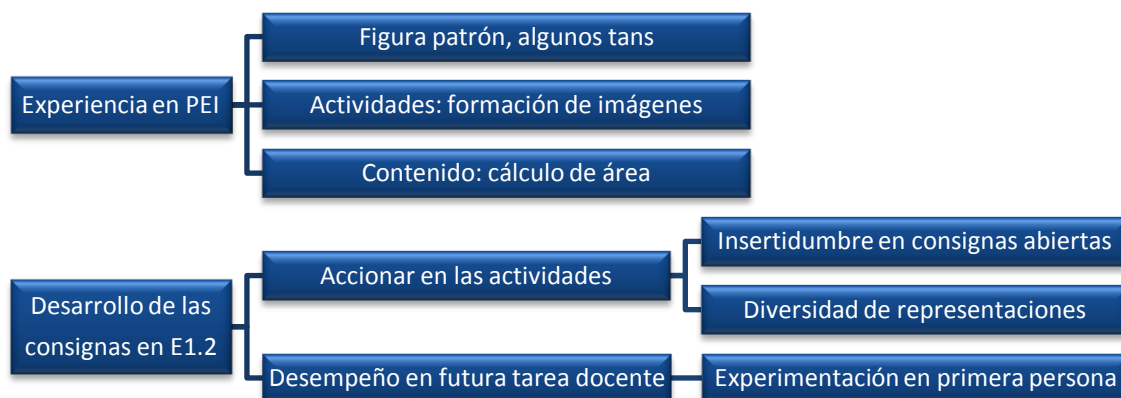


Figura 5.1. Síntesis Dimensión 1

### 5.1.2. Dimensión 2. Diseño de actividades

En el proceso de elaboración de las actividades llevado a cabo en el segundo encuentro, los estudiantes junto con sus pares (agrupados como se muestra en la Tabla 4.5) actúan desde el rol de futuros docentes. En el análisis se prestó especial atención a los temas involucrados bajo el marco del Diseño Curricular (MESF, 2014), a los insumos con los cuales contaban y a consideraciones destacadas en los distintos momentos del diseño de las actividades. Estos temas definen tres categorías de segundo nivel, o subcategorías, que han sido contempladas desde la metodología de la tesis (apartado 3.8) y se recorren a continuación.

#### 5.1.2.1. Contenidos/ejes

Los lineamientos establecidos por el MESF (2014) constituyen uno de los insumos principales a la hora de elaborar una actividad. Tener el Diseño como material disponible para consultar y hacer un uso crítico en situaciones concretas y explícitas, como es la elaboración de la secuencia, es de suma importancia para el futuro docente y, en particular, para la asignatura en donde se enmarca esta tesis (PEII). Con la premisa

de procurar potenciar a cada Tangram desde el diseño de actividades, se ha logrado reconocer contenidos en ambos Ciclos del Nivel Secundario, teniendo presente que el conjunto de actividades diseñadas resultan predeterminadas para la exploración realizada en un período de tiempo. Ampliar estos márgenes posibilitaría mayor exhaustividad al reconocer otros contenidos y relaciones, que a priori no se mencionan. Es resaltado por los propios estudiantes tanto la diversidad como la cantidad de contenidos que se detectan en el proceso de elaboración de actividades. En paralelo, se observa que no se piensa en una integración entre ellos dentro de una misma actividad. Este hecho interpela el *Principio de Interrelación* en el que se ponderan conexiones entre los distintos contenidos dentro de un mismo bloque temático y entre los propios bloques que constituyen los ejes curriculares de la Matemática. Esta relación, en caso de producirse, fortalece al proceso de matematización, como actividad humana, contextualizada y abierta a las situaciones-problema que se puedan abordar. En este caso, si bien se ha detectado el desarrollo de ciertos temas pertenecientes a distintos ejes que pueden abordarse desde una misma actividad, amerita seguir ahondando hacia la explicitación de las vinculaciones entre los contenidos.

#### **5.1.2.2. Pasos/materiales**

En la instancia de búsqueda de material, la fuente mayormente elegida fue Internet, principalmente para encontrar actividades de formación de imágenes, usuales en el empleo del Tangram. En esa búsqueda de materiales llevada a cabo para el diseño de las propuestas, se destaca la *versatilidad* del recurso en cuanto a que permite adaptar una misma actividad a los diferentes tipos de Tangrams. Estas actividades versátiles se pueden observar en todas las propuestas y coinciden con algunas de las realizadas en el E1.2 con el Tangram Chino, sobre todo al inicio, como es la exploración de las piezas y la formación de imágenes, entre otras. Este tipo de propuestas, como afirman Maz-Machado et al. (2018), permiten en primer lugar practicar y familiarizarse con el Tangram, pensándolo como un rompecabezas de reorganización de piezas. Además, de acuerdo con van Hiele (1999/2009), en esas primeras instancias se activa la fase de enseñanza indagatoria, que favorece pasar del nivel de exploración al descubrimiento de estructuras entre los tans (subapartado 2.2.1). Por lo tanto, esas primeras actividades se convierten en insumos para nuevas propuestas.

Otro de los materiales posibles que ha surgido en la búsqueda fue el GeoGebra como herramienta de construcción del Tangram y forma de manipulación digital. En efecto,

entre los recursos disponibles en el sitio, se encuentran varios vinculados con este puzle (<https://www.geogebra.org/search/tangram>). Este software dinámico, más allá de su vinculación con el Tangram, potencia y amplía las posibilidades de explorar y conjeturar por parte de los alumnos (MESF, 2014).

También, la historia del Tangram -Chino en particular así como de los demás tipos- se convierte en material que da un contexto o marco de referencia cargando de sentido a las actividades que integran la propuesta (Anacona, 2003). Una primera búsqueda por la enciclopedia libre Wikipedia arroja información en este sentido (<https://es.wikipedia.org/wiki/Tangram>).

El proceso de elaboración de las propuestas por cada grupo de estudiantes fue distinto en cuanto a los niveles de avances alcanzados en el período de tiempo determinado y en la diversidad de recorridos, como puede observarse en la Tabla 4.7. En ese recorrido, el juego es mencionado en los primeros pasos exploratorios por uno de los grupos, previo al diseño de las actividades. Al momento de “pensar” la propuesta, surge la duda acerca de en qué instancia del aprendizaje abordar un tema, surgiendo como primera opción “introducir un tema”. Se advierte, de este modo, que el hecho de reflexionar sobre estas prácticas relativas al diseño de actividades a partir del uso de un determinado recurso con relación a un contenido favorece el desarrollo de criterios docentes (Flores, 2006).

### **5.1.2.3. Consultas/comentarios**

En las instancias de socialización de la tesista con los diferentes grupos han surgido cuestiones como la *accesibilidad*, la *variabilidad* del recurso y las *amplias posibilidades* de uso, que a su vez están en estrecha relación con otras características del Tangram explicitadas en las anteriores subcategorías en esta misma Dimensión.

Cuando se destaca la *accesibilidad* se hace referencia a la variedad de edades y niveles educativos en que puede utilizarse este mismo recurso. Esta característica es evidenciada por van Hiele (1999/2009) al reconocer en este tipo de puzle geométrico cinco fases, que denotan los alcances y niveles de pensamiento que se evidencian en el proceso de enseñanza, sin limitarlo a un nivel educativo particular. Según el autor, esto habilita un espacio lúdico, como una metodología posible que permite reflexionar, imaginar y desarrollar estructuras mentales. Si bien el juego no es una práctica habitual en el Nivel Secundario, García (2019) le reconoce múltiples cualidades (motivación, cooperación, toma de decisión, anticipación de resultados, análisis de estrategias, cambio de roles y de miradas respecto a los contextos habituales) que son parte de los

lineamientos metodológicos del Diseño Curricular (MESF, 2014) en cuanto al juego en cada uno de los Ciclos del Nivel Secundario.

Otro de los comentarios destacados es la *variabilidad* de la cantidad de piezas con que cuenta cada tipo de Tangram que forman parte del gabinete de recursos didácticos del PM. El dato curioso es que vayan de tres a 14 tans, sin por ello constituirse en un limitante a la hora de utilizar el recurso. Estas características y comentarios, como así también las *amplias posibilidades* de uso que presentan los diferentes tipos de Tangrams, producen en los estudiantes una sensación de recurso inagotable.

A modo de cierre del subapartado 5.1.2, relativo al diseño de actividades, es posible afirmar que la accesibilidad y versatilidad reconocidas en esta Dimensión, junto con la diversidad y la cantidad de temas que se pueden abordar desde los distintos tipos de Tangrams, dotan de flexibilidad al recurso en cuanto a la amplitud de posibilidades en edades, niveles educativos y temas al momento de implementarlo.

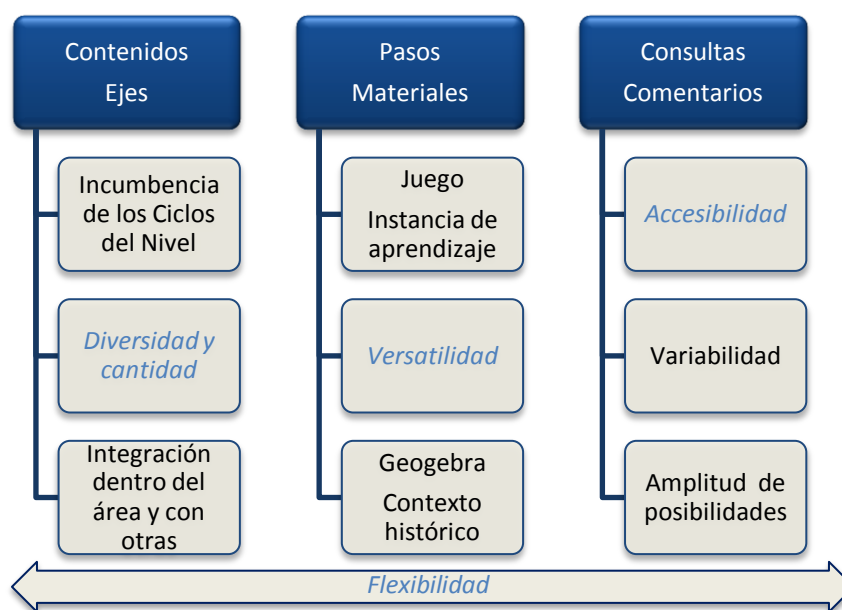


Figura 5.2. Síntesis Dimensión 2

### 5.1.3. Dimensión 3. Actividades propuestas y micro-clases

El análisis de esta Dimensión se realiza considerando las propuestas elaboradas y la implementación de una de ellas por grupo, basándose en los dos tipos de Tangrams entregados a cada grupo de estudiantes. En concordancia con lo realizado en el E1.2 en base al Tangram Chino, se puso el foco en los tipos de contenidos y ejes delimitados por el MESF (2014) reflejados en cada propuesta, como así también los Principios de la EMR que se pueden evidenciar y los tipos de actividades diseñadas. Cada uno de estos

aspectos son parte de una subcategoría de análisis, que se complementa y se relaciona con las primeras dos Dimensiones.

#### **5.1.3.1. Contenidos/ejes**

Los contenidos asociados a cada actividad representan uno de los ejes de análisis tanto en el momento de elaboración de las clases (E2.1 y E2.2) como en la presentación de la propuesta de cada tipo de Tangram (E3.1), contando con un relevamiento de los contenidos en el E1.2 (Tablas 4.3 y 4.4).

Dentro de esta categoría de nivel dos se denotan los contenidos planteados por el Diseño Curricular (MESF, 2014) en las distintas propuestas diseñadas. Particularmente, la integración entre los contenidos no está explícita en la gran mayoría de propuestas presentadas, como puede observarse en la asociación que realiza cada grupo de estudiantes de cada actividad con un único tema. Asimismo, en tres de las 10 propuestas elaboradas por los estudiantes se incluye algún contenido vinculado con más de un eje de los que propone el Diseño Curricular. Incluso dos grupos mencionan un tema específico de su propuesta (Número de Oro por G1 y Teorema de Pick por G3) que tiene carácter integrador dentro de la Matemática.

A partir de los contenidos de la Tabla 4.12, se observa en nueve de las 10 propuestas la presencia de al menos dos ejes del Diseño Curricular, con la inclusión en todas ellas del eje Geometría y Medida, no estableciendo asociaciones respecto al eje Probabilidad y Estadística. El análisis realizado está sujeto a las propuestas de los estudiantes, lo cual no implica que puedan encontrarse otros tipos de conexiones en estas u otras actividades.

El uso del Tangram puede llevarse a cabo en los dos Ciclos que conforman el Nivel Secundario y esto puede observarse en la totalidad de las propuestas, aunque hay mayor presencia del Ciclo Básico. La amplitud que tienen los diferentes tipos de Tangrams en cuanto a los contenidos y Ciclos que pueden ser abordados, se distingue en los bloques temáticos que conforman el eje Geometría y Medida, enfatizado en los primeros tres años del Nivel Secundario, donde puede proyectarse el eje en su totalidad (Fig. 2.4). Lo mismo ocurre con los conjuntos numéricos positivos (incluidos en el eje Números y Operaciones, Fig. 2.5) contemplados en el Nivel Secundario (con siete de los 10 tipos de Tangrams existentes en el PM).

Se destaca la potencialidad de algunos tipos de Tangrams para el desarrollo de ciertos contenidos a partir de las peculiaridades de la figura patrón o de los tans que lo

conforman, en relación con los restantes Tangrams que se encuentran en el gabinete de recursos didácticos en el PM. Entre ellos:

- Brügner: su figura patrón determina un rectángulo de proporciones áureas donde a partir de él puede trabajarse el “Número de Oro”. Este contenido es propuesto como integrador no solo en el aspecto intramatemático, sino extramatemático, en relación con las orientaciones del Ciclo Orientado como Ciencias Naturales y Arte. Incluso este contexto extramatemático es sugerido desde el Diseño Curricular como posibilitador de un trabajo colaborativo interdisciplinario entre los espacios curriculares.
- Cardiotangram: la composición de tans circulares y poligonales permite la construcción de un círculo inscrito en un cuadrado y el reconocimiento de sus propiedades.
- Pentagonal: los tans que lo conforman son dos grupos de tres y cuatro triángulos cada uno, semejantes entre sí. Mediante su uso se puede explorar y conjeturar propiedades de los triángulos, como por ejemplo la suma de sus ángulos interiores, en un primer nivel de generalidad.
- Lloyd: la disección de la figura posibilita tomar al menos cinco unidades de longitud distintas no convencionales, que permiten medir el resto de los tans con un número racional, lo cual lo convierte en potente para trabajar sobre unidades de longitud.
- Stomachion: se destaca la cantidad y diversidad de los tans que lo conforman, lo cual conlleva profundizar en el nivel de generalización y conjeturación al presentar un amplio abanico de casos. Teniendo en cuenta estas valoraciones, se destaca el Teorema de Pick como contenido integrador intramatemático, potente para desarrollar con este tipo de Tangram.
- Pitagórico: tiene la particularidad que en todos sus tans, uno de los lados surge a partir de una relación pitagórica de los otros que lo forman. Se combinan de esta forma los campos numéricos (rationales e irracionales), propiedades geométricas y algebraicas en cada tans (Tabla 4.11) y tangramas. Se vinculan, de este modo, tres de los cuatro ejes propuestos en el Diseño Curricular.
- Ovoide: la composición mayoritaria de piezas curvas abre el camino para el desarrollo de secciones cónicas, puntualizando en circunferencia, como así también de sectores circulares semejantes (construcción de tangramas). El resto de las secciones cónicas pueden explorarse y discutirse.

- Triangular: los valores asumidos por los ángulos interiores de cada uno de los tans permiten la construcción solo de triángulos equiláteros, lo que posibilita analizar este tipo de triángulo en profundidad. Además, un subgrupo de sus piezas conforma a su vez el Tangram Hexagonal, por lo que también se pueden incorporar los contenidos asociados a este último Tangram.
- Hexagonal: se destaca el abordaje de la aproximación del conjunto de los números racionales, con diferentes niveles de profundidad pudiendo ser un anclaje entre los dos Ciclos que conforman el Nivel Secundario, así propuesto en los lineamientos del Diseño Curricular.

Cabe señalar que en todas las propuestas -integradas por estos contenidos que potencian al Tangram involucrado y el resto mencionado en la Tabla 4.12- se ponen en práctica metodologías señaladas como favorables por el Diseño (subapartado 2.3.2.2). Entre ellas se destacan: el manejo de diferentes registros en una misma secuencia de actividades; la gradualidad en el desarrollo de capacidades y destrezas; la posibilidad de inferir, reflexionar y conjeturar; la relación con otras ciencias y hacia el interior de la misma Matemática; el trabajo colaborativo entre los alumnos (MESF, 2014).

### **5.1.3.2. Principios de la EMR**

En las diferentes propuestas de cada tipo de Tangram se han remarcado aquellos Principios que fueron más perceptibles. No significa la ausencia de los otros, sino que subyacen o se entremezclan en lo que sucede en una situación de aula concreta simulada o real.

Se recorren los diferentes Principios a partir de aspectos destacados que resultaron significativos y distintivos en las propuestas.

- *Principio de Actividad*: se subraya el rol activo de los alumnos desde las planificaciones y las micro-clases. Específicamente se piensa en acciones que se lleven a cabo hacia el interior de cada subgrupo de alumnos dentro de la clase y del grupo-clase. A su vez, se enmarca y contextualiza el accionar del alumno (Brünger y Cardiotangram por G1, y Pentagonal por G2).
- *Principio de Realidad*: se lo distingue en diferentes momentos, entre ellos al darle un marco histórico al recurso o al contenido que se emplea. Otro de los momentos se da cuando se continúa trabajando a partir de las resoluciones de los alumnos y se transforma así en un contexto de anclaje para él. El hecho de partir de la

manipulación de piezas concretas implica estar en un contexto cercano del alumno, donde el juego, el recurso y la exploración son situaciones realistas (Brügner por G1, Pentagonal por G2, Fletcher por G4, y Triangular y Hexagonal por G5).

- *Principios de Niveles:* se hace presente en la gradualidad prevista en la manipulación de tans (comparación entre bordes de las piezas, luego entre superficies y por último entre figuras), en la complejidad de los enunciados (actividades que necesitan de las anteriores) y en los alcances de formalidad de un determinado contenido (contemplados en la matematización vertical) (Brügner y Cardiotangram por G1, Stomachion y Pitagórico por G3, y Hexagonal y Triangular por G5).
- *Principio de Reinvención guiada:* se observa en las propuestas el espacio dado a las orientaciones docentes en momentos particulares y a partir de preguntas-guía que se amoldan a las necesidades detectadas en los alumnos o del grupo de alumnos. Todas ellas fueron pensadas y delimitadas previamente, no sujetas a un molde fijo. A su vez, en algunas actividades (subapartado 4.2.2.1) se observa una discontinuidad en la forma de trabajo. Concretamente, se alude al desarrollo de una demostración en la cual pasa a ser el docente el que la expone y la lleva adelante, y el alumno toma un rol pasivo en ese momento central del desarrollo del tema (Pentagonal por G2, Stomachion por G3, y Triangular y Hexagonal por G5).
- *Principio de Interrelación:* en este punto, proporcionar búsquedas que profundicen algún aspecto del tema que se trata muy probablemente posibilite que el alumno establezca relaciones en un contexto extramatemático. Por su parte, lo intramatemático está presente en las relaciones que pueden establecerse entre los diferentes bloques temáticos de un mismo eje de contenido y entre los diferentes ejes que forman el Nivel Secundario. Estas relaciones son detectadas por la tesista en algunas propuestas y/o actividades puntuales. Se destacan contenidos potentes en las planificaciones como el Teorema de Pick y el Número de Oro para trabajar con diferentes áreas del Nivel Secundario (Brügner por G1, Stomachion y Pitagórico por G3, y Ovoide por G4).
- *Principio de Interacción:* el intercambio grupal, sea este a nivel grupo-clase o hacia el interior de los pequeños grupos de trabajo, se ha evidenciado tanto en las propuestas como en las micro-clases (Pitagórico por G3 y Fletcher por G4).

Todos los grupos han puesto de manifiesto algunos de los Principios en sus propuestas. En conexión con ellos se desprende el trabajo sobre conceptos centrales que forman

parte de la EMR: la visualización y la demostración, los procesos de matematización vertical y horizontal, como así también la presencia de los modelos. Incluso en una misma acción (como por ejemplo las actividades 4 y 5 en la propuesta del Tangram Triangular) pueden reconocerse diferentes Principios e ideas centrales de la EMR. Esto muestra la conexión y el proceso integral de los conceptos centrales inherentes a la EMR.

### 5.1.3.3. Tipos de actividad

Cada grupo de estudiantes, en cada Tangram, ha tomado diferentes decisiones en cuanto a cómo desarrollar las distintas actividades en referencia a las *acciones* que involucran, la *interacción* docente-alumno en relación con el tema de desarrollo, la *secuenciación* de las actividades y el *uso* que hacen del Tangram.

Entre las *acciones* llevadas a cabo tanto en la planificación como en las micro-clases se destacan: observar, explorar, clasificar, manipular (a partir del movimiento), distinguir, comparar, armar, identificar, demostrar (formalmente), calcular (numéricamente), registrar, relacionar. En la mayoría de las acciones están implicadas las piezas de los Tangrams, en distinta medida (en ocasiones se apela a los lados o a la superficie; utilizando todos los tans que conforman el rompecabezas o algunos de ellos). Se destaca una gradualidad en el *uso* de las piezas, en cuanto al nivel de manipulación y por estar dentro de un conjunto de actividades que demandan tener a disposición avances anteriores.

Si bien muchas de las *acciones* antes nombradas están presentes en las propuestas analizadas, no siempre se despliega la misma *secuenciación*. Cabe advertir que esto no interfiere en la gradualidad del *uso*, pues no presentan una lógica uniforme. Un ejemplo de ello se evidencia en la Tabla 4.9, donde se puede advertir con los diferentes colores todas las actividades que contemplan acciones reiteradas (con propósitos diversos) en distintas ubicaciones.

La figura patrón (imagen de la cual surge la disección del Tangram) es utilizada en todas las secuencias pero no cobra el mismo valor o protagonismo en cada una de ellas. Por ejemplo, en algunos casos conforma una actividad central de la propuesta (como en el Tangram Stomachion) y en otros se entremezcla con otros tangramas para armar (como en el Tangram Pitagórico). En la mayoría de los casos el nombre del Tangram tiene que ver con la figura patrón. En efecto, se advierte a la secuencia diseñada del Tangram de Brügger como la única que cumple con las condiciones antes mencionadas

(ser central en las actividades y una figura para armar) y resalta, en este sentido, la figura patrón. Se considera que no otorgarle visibilidad a la figura patrón dentro de la planificación puede asociarse a no considerar la génesis de cada Tangram propiamente dicho para enmarcar las actividades.

Se denotan en las *interacciones* desarrolladas en cada propuesta distintas alternativas sobre las modalidades adoptadas. Por ejemplo: hay propuestas en las que desde el intercambio grupo-clase se llega a la formalización (Brügner); es el docente el que institucionaliza (Cardiotangram); en una misma actividad se incluye exploración, conjetura y formalización (Stomachion); hay demostraciones con un seguimiento detallado por parte del docente (Brügner). También se prevén: la variedad de situaciones y resoluciones que pueden presentar los alumnos (Stomachion); las posibles preguntas que guían el proceso de enseñanza (Pitagórico); la valoración de los distintos caminos presentados por los alumnos (Fletcher); las actividades que direccionan las acciones pretendidas (Fletcher).

Se pueden relevar puntos comunes en las tres subcategorías de análisis de esta Dimensión. Entre ellos se encuentran las demostraciones en una propuesta puntual que es llevada adelante por el docente, donde si bien se pretende un tipo de *interacción*, se observa que el alumno está en una actitud pasiva a diferencia del resto de la secuencia (*Principio de Reinención guiada*); las *acciones* detalladas en los tipos de actividades son las que señala el MESF (2014) dentro de sus lineamientos metodológicos (conjeturar, aplicar información, descubrir, inventar y comunicar ideas, reflexionar, argumentar, entre otras); en el *uso* que se le dio a cada tipo de Tangram se aprecia tanto el *Principio de Niveles* como el *Principio de Realidad*; transversalmente, la propia figura patrón y la historia que conlleva cada Tangram pueden relacionarse a contenidos y actividades específicas que le dan sentido a su implementación. En estos puntos comunes y cada subcategoría analizada en esta Dimensión los cinco grupos de estudiantes han mostrado amplitud en cuanto a los contenidos que se detectaron y los Ciclos de incumbencia, en la presencia de los diferentes Principios de la EMR y en aquello que implicó el diseño de las actividades, las cuales enriquecen las alternativas de uso de los tipos de Tangrams.



*Figura 5.3. Síntesis Dimensión 3*

#### **5.1.4. Dimensión 4. Reflexión sobre la experiencia**

Una vez concluida la experiencia llevada a cabo en el primer encuentro como estudiantes y en el segundo y tercer encuentros en la tarea de (futuros) docentes, se pretende repensar a partir de la reflexión lo realizado en ese período. En efecto, el hecho de ser invitados a poner en palabras a partir de un cuestionario abierto habilita a analizar la experiencia en relación con lo que los estudiantes conocían del recurso Tangram, lo puesto en práctica en esta experiencia en PEII y lo que han podido proyectar. Estos asuntos constituyen las subcategorías de análisis de esta Dimensión y promueven en los estudiantes una mirada general como así también propenden a generar cierto criterio sobre este recurso en particular. La reflexión sobre el uso del Tangram es considerada de importancia para ser incorporada como un hábito del estudiante (Flores, 2006).

#### **5.1.4.1. A priori**

En concordancia con lo expresado en el subapartado 5.1.1, todos los estudiantes recuerdan haber trabajado con el Tangram Chino en PEI y mencionan en esa primera experiencia que los tópicos trabajados corresponden al eje Geometría y Medida, habiendo un estudiante que recuerda un tema correspondiente al eje Álgebra y Funciones (subapartado 4.3.1).

Esta experiencia previa le da sentido a la identificación de contenidos realizada por los estudiantes en el proceso de elaboración de las actividades (subapartado 5.1.2.1), donde se resalta la cantidad de contenidos que pueden vincularse con cada tipo de Tangram y se valoriza el trabajo con recursos. Se destaca que la asociación de las actividades al eje de Geometría y Medida también se dio en todas las propuestas presentadas por los estudiantes (subapartado 5.1.3.1).

Esta primera aproximación en PEI a este recurso concreto en su formación inicial como profesores en Matemática, les permite recordar y reconocer en el Tangram una herramienta para el desarrollo de ciertos temas en Matemática, como por ejemplo área, polígonos y perímetro (modalidad “contexto”, subapartado 4.3.1).

#### **5.1.4.2. In situ**

Cada estudiante ha transitado la elaboración de actividades aportando desde su individualidad, pero dentro de un grupo de trabajo. Se resaltan en ese proceso diferentes aspectos que pueden o no coincidir con otros estudiantes y/o con otros grupos. En esta reflexión se intenta indagar sobre las *acciones* llevadas a cabo en esta elaboración, las *dificultades* y las *potencialidades* detectadas por los propios estudiantes, existiendo puntos de contacto entre ellas (subapartados 4.3.2, 4.3.3 y 4.3.5).

En las *acciones* realizadas por los estudiantes se reconocen algunas sobre el *propio Tangram* y otras sobre algún *material externo*. Entre las primeras (sobre el *propio Tangram*) se remarca la exploración sensorial (10 estudiantes) que implica manipular los tans a partir de los sentidos. Esta manipulación conlleva observar, comparar, armar y dibujar (con papel o software), como se indicara entre los tipos de actividades en la tercera Dimensión (subapartado 5.1.3.3). A su vez, ocho de 11 estudiantes mencionan que se basaron exclusivamente en el tipo de Tangram entregado para el diseño de las actividades; mientras que la opción tomada por la minoría de estudiantes (A9, A11 y A15) es adaptar actividades de otro tipo de Tangram (A9 y A11) o combinar ambas alternativas (A15). Si bien la exploración sensorial pudo ayudar en ese diseño, amerita

tener presente también que todos los estudiantes ya tenían una experiencia previa con el Tangram Chino en el E1.2 realizado en el marco de la tesis en PEII, lo que constituye una base para comenzar a diseñar sobre otros puzzles. En esta misma línea centrada en el tipo de Tangram de cada grupo se reconocen *dificultades* que tienen que ver con las características sobre la cantidad de tans (Stomachion y Brügner) y la forma de las piezas (Lloyd, Hexagonal y Ovoide). En este análisis de las acciones y dificultades detectadas surge la *potencialidad* de cada Tangram, ya sea por las actividades que son más susceptibles a realizarse o por las características que tienen las piezas que lo conforman. A la exploración y manipulación se las reconoce como un camino posible para distinguir dichas potencialidades y para observar relaciones que no son explícitas a simple vista. A su vez, estas caracterizaciones del recurso didáctico nutre al futuro docente de alternativas didácticas para la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática (Villarroel y Sgreccia, 2012).

Por otro lado, entre las *acciones* sobre *material externo*, se destaca en la mayor parte de los estudiantes la búsqueda de materiales en Internet y en documentos ministeriales como son el Diseño Curricular (MESF, 2014) y los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios (Ministerio de Educación de la Nación, 2012) para los contenidos específicos. Los documentos fueron consultados mayormente luego de un primer planteo de las actividades pensadas. Este proceso de revisión de contenidos se llevó adelante en un período de tiempo relativamente corto, lo cual pudo ameritar más tiempo para reconocer contenidos y profundizar en otras asociaciones. En este sentido, los estudiantes han manifestado *dificultades* que tienen que ver con establecer relaciones entre actividades y contenidos (modalidad “contenidos específicos” en la Tabla 4.16) así como poder encontrar otros tipos de actividades que no estén asociadas directamente a contenidos específicos vinculados a área y perímetro. Asimismo, en esta búsqueda y diseño de actividades, seis estudiantes observan la *potencialidad* del Tangram (subapartado 4.3.5) al ponderar la forma sencilla de abordaje de temas que son considerados complejos, la manipulación tangible sobre un tema abstracto, la forma no usual y/o constructiva de desarrollarlo; todas ellas reconocidas como propicias por van Hiele (1999/2009) en la utilización de este tipo de puzzle.

#### **5.1.4.3. A posteriori**

Entre los aspectos que resultan sorprendentes hay algunos que recobran especial interés entre las categorías de esta cuarta Dimensión. Se destacan en particular las

peculiaridades de los Tangrams de Brügner y Cardiotangram (la cantidad de tans en Brügner y las relaciones entre los tans de ambos Tangrams que dan origen a contenidos matemáticos específicos), y en general de todos los tipos de Tangrams con respecto a las distintas relaciones que pueden establecerse entre sus piezas, la diversidad y cantidad de piezas y, por último, los distintos tipos de Tangrams existentes.

El uso didáctico también es remarcado, en relación con los distintos tipos de temas que puede reunir una propuesta o una actividad; incluso, entremezclado con lo lúdico, cercano y tangible de las distintas propuestas. Estos son algunos de los aspectos favorables mencionados por Fresneda y Martínez (2015) al momento de optar por el uso del Tangram como recurso didáctico. Agregan, además, que posibilita el desarrollo de habilidades como la resolución de problemas, la argumentación, el razonamiento, la comunicación, la modelización y el poder de abstracción de ideas matemáticas (apartado 1.3).

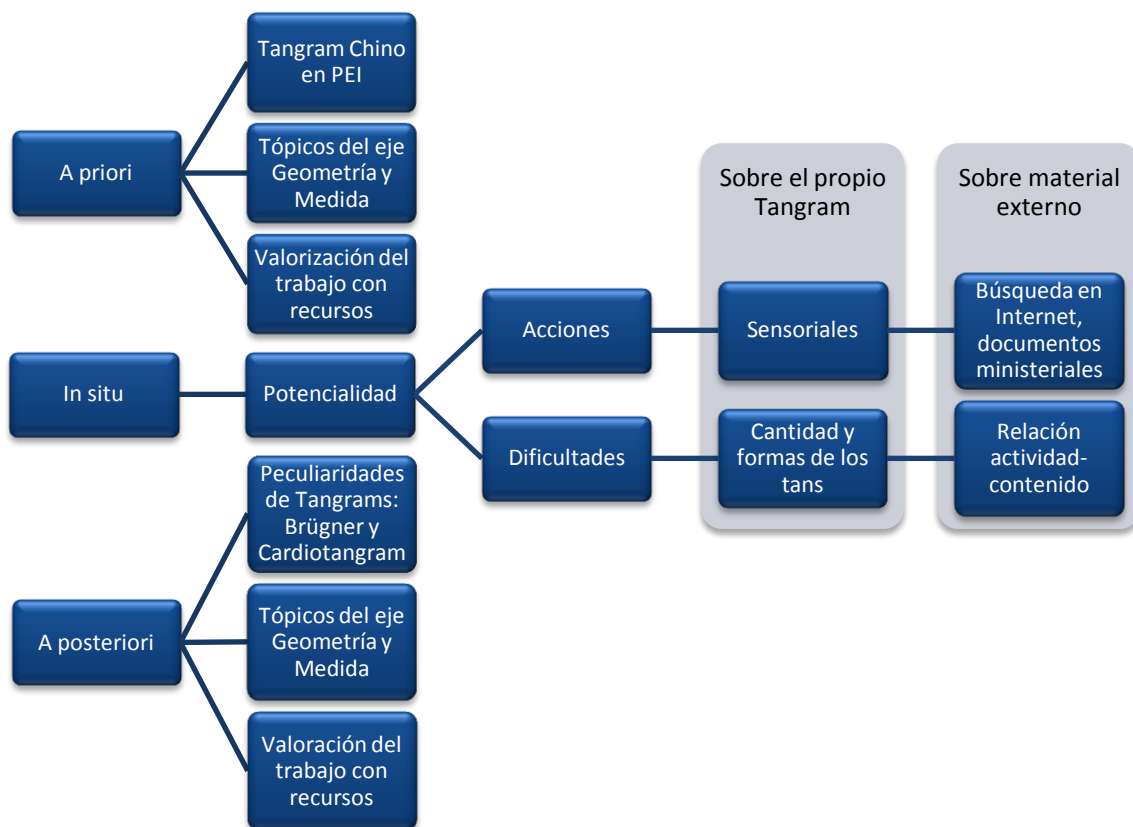


Figura 5.4. Síntesis Dimensión 4

## 5.2. Respuestas a los interrogantes de la investigación

Los objetivos que orientan esta tesis surgen de un conjunto de interrogantes detallados en el apartado 1.1, los cuales pretenden indagar, en un principio y a priori de la

experiencia aquí desarrollada, acerca de los *tipos de Tangrams que estudiantes avanzados de la carrera conocen* así como los *usos que han hecho de ellos y cómo se han enterado de su existencia*. Luego, a partir de la implementación llevada a cabo en PEII, interesa caracterizar las *actividades con Tangrams* que proponen los estudiantes avanzados del PM y analizar *cómo se plasman los Principios de la EMR* en sus propuestas.

En respuesta al primer grupo de interrogantes (a priori de la experiencia), es posible asegurar que la mayoría de los estudiantes han conocido y experimentado por primera vez con el Tangram Chino en PEI, como se puede observar en los actos de habla comprendidos entre 1-7 y 1-19 (p.54), que surgen del E1.2 con estudiantes (apartado 4.1) y de la indagación a partir del cuestionario durante el E3.2 (subapartado 4.3.1). Solo tres de ellos lo conocieron en un ámbito familiar y lúdico, y en particular un estudiante había manipulado el Tangram Ovoide formando tangramas. Algunos estudiantes recuerdan en esa misma experiencia de la asignatura de primer año haber visto en formato papel otros tipos, pero sin una manipulación sobre ellos. El recuerdo no está asociado solo al nombre, sino a la figura patrón y a las características de algunos de sus tans.

La manipulación, al momento de armar y comparar los tans, así como el cálculo de área y perímetro a partir de una unidad no convencional, junto con la introducción de fórmulas, son los usos reconocidos en las instancias que se indagó sobre tales asuntos (Tabla 4.14). Transversalmente los estudiantes le otorgaron valor al recurso como herramienta que favorece a la enseñanza y al aprendizaje en Matemática, que fue retomado desde sus vivencias en PEI.

Con respecto al segundo grupo de preguntas orientadas a lo producido en los encuentros 2 y 3, se puede destacar en cuanto a los objetivos de las actividades, que están predominantemente orientadas hacia un eje de contenido específico (Tabla 4.12), Geometría y Medida, aunque pueden reconocerse en ellas otros contenidos que no han sido explicitados por los estudiantes vinculados en su totalidad al eje Álgebra y Funciones, y en menor medida a Números y Operaciones (como por ejemplo: procesos recursivos, proporcionalidad, ecuaciones, expresiones algebraicas, números irracionales y distintas representaciones de los números racionales).

Algunas de las actividades se ven reflejadas en los distintos tipos de Tangrams en todas las propuestas, como es la exploración de piezas y la formación de tangramas (subapartados 4.2.2.1 a 4.2.2.10). También, entre las actividades se encuentran la

distinción de los tans -presentes en todas las propuestas-, asumida mayormente como una clasificación de las piezas (Brügner, Pentagonal, Stomachion, Fletcher, Ovoide, Triangular y Hexagonal) y en otras (Cardiotangram) se sugiere algún agrupamiento, distinción o particularización (Lloyd y Pitagórico).

En nueve de las 10 propuestas elaboradas por los estudiantes se observan actividades que potencian al Tangram en cuestión, por las características que el mismo posee, sus tans y la figura patrón. Ejemplos en este sentido son el Tangram Stomachion, cuyos tans favorecen el desarrollo del Teorema de Pick poniendo en práctica la observación de regularidades y conjeturación de propiedades, y el Tangram de Brügner, que permite desde su figura patrón trabajar la razón áurea que puede integrar situaciones intra y extramatemáticas (subapartado 5.1.3.1). Por otro lado, en el Tangram de Fletcher todas las actividades presentadas están contempladas en las restantes propuestas, no marcando una diferencia con respecto a los abordajes en los otros Tangrams.

Las acciones llevadas a cabo en cada propuesta son las enumeradas en el subapartado 5.1.3.3; entre ellas se destacan explorar, manipular, comparar, armar, calcular, registrar, relacionar. Estas acciones se despliegan de manera progresiva en su implementación, e incluso de actividad en actividad, con lógicas distintas en cada propuesta en cuanto al momento de tratamiento y en relación con lo desarrollado en las actividades anteriores y posteriores. Transversalmente, está presente la gradualidad de la acción en cuanto a la complejidad de la actividad y a las piezas involucradas, a través de las propuestas diseñadas por los estudiantes de PEII.

Con referencia a los Principios de la EMR, pueden encontrarse con mayor o menor fuerza o énfasis en determinados momentos de cada propuesta (subapartado 5.1.3.2). En efecto, algunos Principios se han presentado de forma similar en las distintas propuestas, como el *Principio de Actividad* (presencia activa de los alumnos en gran parte de la propuesta), *de Interrelación* (a nivel intramatemático con el mismo eje y otros del Diseño Curricular, y extramatemático con otras áreas del Nivel Secundario) y *de Interacción* (intercambio en el grupo-clase y en pequeños grupos). Otros *Principios* se han evidenciado de múltiples formas, como el *de Realidad* (asociado a un contexto histórico y a producciones de los propios alumnos), *de Niveles* (grado de manipulación de los tans, complejidad de las actividades, formalización de los contenidos) y *de Reinención guiada* (el docente guía totalmente el desarrollo o se proponen preguntas a partir de las intervenciones del alumno).

El hecho de reconocer el alcance de las actividades y los Principios de la EMR en cada una de las propuestas, en comparación con lo que los estudiantes conocían a priori, denota el avance en todo el grupo en aspectos como la sofisticación del recurso, la distancia entre el mismo y el contenido matemático, el equilibrio de su uso, posibilidades de manipulación y revisión de las actividades (Flores, 2006), que implican una apropiación pertinente del Tangram.

### **5.3. Reflexiones finales**

En la bibliografía especializada de Iberoamérica de los últimos años, que fue visitada para la elaboración del estado del arte de esta tesis (apartado 1.3), es posible advertir que en general se hace referencia al Tangram Chino y ocasionalmente a algún otro en particular. En este sentido, no abunda material sobre el resto de los tipos de Tangrams que atiendan a cuestiones de implementación en secuencias didácticas con análisis de posibles usos. De este modo, se considera que indagar en este tema permite ampliar la mirada sobre estos y otros puzzles geométricos que en general aparecen asociados a bloques temáticos contemplados en el eje Geometría y Medida.

Como aporte de esta investigación situada con estudiantes avanzados del PM de la UNR, se marcan planteos superadores por parte de los estudiantes al dar indicios sobre cuestionamientos y decisiones tomadas al momento de involucrar un recurso en una situación concreta de aula. Al conjugar las acciones que permitieron dar respuestas a los interrogantes de la investigación (capítulo 4), se valora no solo la posibilidad de invitar a los estudiantes a experimentar distintos tipos de situaciones con un fin concreto, sino también a revisar el aporte de lo vivenciado en PEI de modo retrospectivo.

En este sentido, se puede pensar en profundizar articulaciones dentro de la carrera a partir de situaciones específicas, que encuentran altas chances de viabilidad dados antecedentes previos y el encuadre del plan de estudios vigente (Res. CS 027/2018), en el que se incrementan las horas de este tipo de asignaturas (PE) dispuestas, a su vez, en un campo de formación articulador (Práctica Profesional Docente). Se pueden realizar situaciones que resulten significativas para esa articulación, desde propuestas concretas donde se vea involucrado el uso de un recurso, como en observaciones y el posterior análisis de clases reales como parte del trayecto de salida al terreno, presente en todos los años de formación del PM de la UNR. Esta propuesta de articulación procura continuar reforzando en la formación inicial de profesores, como plantean Meavilla y

Oller (2013), el uso de recursos que interrelacionen las distintas ramas de la Matemática en Profesorados de Nivel Secundario, para contrarrestar el insuficiente trabajo con recursos (siendo el Tangram un caso particular) que señalan Canalejas y Navas (2017) tanto en la formación inicial como continua de profesores en Matemática. El desafío consiste en lograr que el recurso se constituya en una herramienta a disposición del futuro docente y no un mero juego o pasatiempos, sin orientación pedagógica, que se usa eventualmente en situaciones extraordinarias desconectadas del resto de la secuencia didáctica. Específicamente, en esta línea hay propuestas de distintos autores, como Rodríguez (2012) que sugiere realizar experiencias significativas sistematizadas o Guerrero (2017) quien propone abordar tareas profesionales desde la formación.

Estas consideraciones ayudan a trascender una mirada segmentada de la Matemática y a establecer conexiones no solo hacia el interior de la misma secuencia, unidad o bloque temático, sino con anteriores y próximos contenidos a desarrollarse, e incluso con otras áreas. En concreto, esta idea está contemplada en el *Principio de Interrelación* de la EMR, donde se alienta la vinculación de distintos contenidos dentro de la disciplina y con otras disciplinas. La implementación de un recurso como el Tangram posibilita poner en relieve estas conexiones detectadas en las propuestas concretas elaboradas por los estudiantes (subapartados 5.1.3.1 y 5.1.3.2).

Consideraciones aportadas desde la cultura china sobre las denominadas figuras de análisis (Micelli y Crespo, 2012) le dan sentido a la formación de tangramas y refuerzan el poder de la visualización que tiene el Tangram, pero que a su vez no queda solo en lo manipulativo, sino que –como se evidencia en las actividades propuestas por los estudiantes- se puede llegar a mayores niveles de formalización y desarrollar diferentes habilidades matemáticas. A partir de lo detallado, el contexto histórico es un punto a considerar en el uso de este puzle, ya que se lo reconoce como un recurso histórico, con ciertas características (piezas que se obtienen al diseccionar una figura plana) y reglas (las piezas no deben superponerse entre sí y utilizarse en su totalidad) que tienen que ver con su génesis, al igual que su nombre y el surgimiento del mismo. Estos aspectos señalados que enmarcan el uso del Tangram pueden ampliarse a otros recursos y propuestas en general, en el sentido de consideraciones previas al momento de utilizar un recurso.

Las propuestas elaboradas por cada grupo apuntan a una participación activa de los alumnos donde se pondera el trabajo grupal, a poner en contexto cercano -como sus producciones y la manipulación de un rompecabezas- las situaciones que se emprendan,

a atender la complejidad requerida en cada caso, a apelar a otros temas de la misma área u otras, con un docente presente y atento a lo que ocurre en la clase. Todas ellas son consideraciones que están explícitas en alguna medida en el recorrido de cada uno de los Principios de la EMR. Profundizar en estos puntos ayuda a generar estrategias que superan la concepción tradicionalista de la enseñanza de la Matemática, “lo que exige cambiar el modelo didáctico del profesor explicador y de un grupo de estudiantes que mira, escucha, copia, reproduce y aplica” (MESF, 2014, p.47). La posibilidad de ir adquiriendo experiencia sobre estos tipos de recursos que permiten amplitud tanto a nivel intramatemático como extramatemático (demandado desde los diseños educativos) posibilita abrirse a otras experiencias con otros recursos, con la disposición de poder abordarlos y potenciarlos en una situación determinada.

Entre las posibles líneas de trabajo a futuro, se identifican profundizar el análisis de cada tipo de Tangram e indagar sobre otros nuevos. Incluso se puede ampliar el uso de este recurso en otros temas no detectados o no abordados suficientemente durante el trabajo de campo de esta tesis. Otra investigación viable que puede complementar el trabajo presentado con estudiantes avanzados del PM, consiste en realizar la experiencia tanto con egresados como con formadores de formadores de la carrera, e incluso otras carreras afines. De esta manera se pone en valor tanto la formación inicial como continua con respecto al uso de recursos accesibles y versátiles como el Tangram, los docentes (en formación, en ejercicio o formadores) enriquecen sus propias prácticas en el marco de las instituciones de desempeño. Otra de las acciones que se puede emprender consiste en instancias de socialización de experiencias con este tipo de puzle por parte de diversos actores de la Educación Matemática donde, a partir de intercambios intencionados y focalizados, se logre enriquecer las propuestas didácticas y constituir redes temáticas con objetivos comunes. Como última línea de trabajo que puede continuar abordándose el hecho de analizar recursos con estas características que pueden generarse en formato digital. Algunos sitios con propuestas interesantes se encuentran en:

- (<https://www.geogebra.org/m/QFc9jN6P>) Simulador del juego Tangram Chino construido en GeoGebra. Propone el armado de tangramas a partir de la manipulación de piezas, utilizando traslaciones y rotaciones.
- (<https://www.cokitos.com/tag/juegos-de-tangram/>) Juegos online de Tangrams con diferentes objetivos. Conformado por siete juegos que van incrementando el nivel de dificultad a medida que se logra la construcción pedida. Todos tienen diferentes

variantes en cuanto a mostrar la silueta a armar, a formar tangramas o en particular la figura patrón y tipos de Tangrams.

- ([https://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales\\_didacticos/reajuegos-JS/tangram\\_clsico.html](https://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/reajuegos-JS/tangram_clsico.html)) Secuencia didáctica sobre el Tangram Chino. Propuesta compuesta por cinco actividades, donde en algunas se muestran las correcciones de las actividades y en otras una retroalimentación.

Para dar cierre a este capítulo, y con él a la tesis, se retoma el objetivo general de este trabajo:

*Analizar las posibilidades del Tangram como recurso didáctico reconocidas por estudiantes avanzados del PM.*

A través de lo desarrollado, ha sido posible advertir los alcances de las posibilidades de uso del Tangram como recurso didáctico que se han evidenciado en los estudiantes avanzados a partir de sus intervenciones y producciones en los tres encuentros. En primer lugar, la experiencia previa en PEI es relevante en cuanto a que permitió reconocer las actividades típicas que tienen que ver con la génesis del Tangram (reglas para el armado de tangramas) y la asociación al bloque geométrico reconocida en las propuestas de los artículos del estado del arte (apartado 1.3). En segundo lugar, los estudiantes cursantes de PEII cuentan con una visión más amplia y posición más consolidada con relación a los diferentes Campos de Formación de la carrera (General Pedagógica, Especializada y Orientada, apartado 3.3). Esto permite que la nueva experiencia con el Tangram (en tercer año de la carrera) se redimensione en relación con la de PEI (en primer año). Esto se hace palpable a través de las múltiples variantes de las actividades típicas, que se evidencian en la gradualidad y los objetivos que se plantean en las propuestas de todos los Tangrams, y en cuanto a la amplitud de contenidos considerados en relación con un bloque temático. También se detectaron otras relaciones dentro del mismo eje de contenido y con otras áreas del Nivel Secundario que amplían aún más el alcance del Tangram como recurso didáctico. A su vez, la evidencia de los diferentes Principios de la EMR presentes entre las propuestas marca una visión superadora de lo que implica una clase tradicional, dado que el alumno tiene una posición activa (*Principio de Actividad*) con trayectos propios (*Niveles*) y en relación con otros (*Interacción*), que son contemplados y atendidos por el docente (*Reinvención guiada, Realidad, Interrelación*) en el proceso educativo.

Para finalizar, y citando a los propios estudiantes “No, hay un montón de cosas para ver. Podemos estar todo el año (risas)” (acto de habla 2-31-2-12, p.86), se destaca la

capacidad inagotable del Tangram a partir de la exploración en primera persona del mismo por parte del futuro profesor en Matemática. Al indagar desde el hacer y dejarse sorprender en el camino, proporciona mayores herramientas al futuro docente permeable en estas experiencias y con mira en los alumnos que formará. En este sentido recobra valor una de las frases de Hans Freudenthal:

*“Guiar es llegar a un balance delicado  
entre la fuerza de enseñar y la libertad de aprender”.*

## Referencias bibliográficas

---

- Alegre, H., Domínguez, E., Landaluce, N. y Pípolo, S. (2018). Materiales didácticos en la enseñanza de la Matemática. En N. Sgreccia (Coord.), *Procesos de Acompañamiento en la formación inicial y continua de Profesores en Matemática* (pp.153-173). Salamanca: FahrenHouse. <https://www.fahrenhouse.com/omp/index.php/fh/catalog/book/31>
- Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J. (1988). *Materiales para construir la Geometría*. Madrid: Síntesis.
- Anacona, M. (2003). La historia de las matemáticas en la Educación Matemática. *Revista de Educación Matemática EMA*, 8(1), 30-46. <https://core.ac.uk/download/pdf/12341944.pdf>
- Aznarte, M. y Ramírez, R. (2018). Tareas con tangram para favorecer el sentido espacial. *Revista de Educación Matemática Épsilon*, (98), 57-66. [https://thales.cica.es/epsilon/sites/thales.cica.es.epsilon/files/epsilon98\\_5.pdf](https://thales.cica.es/epsilon/sites/thales.cica.es.epsilon/files/epsilon98_5.pdf)
- Bressan, A. (2005). Los principios de la Educación Matemática Realista. En H. Alagia, A. Bressan y P. Sadovsky (2005). *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática* (pp.69-98). Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- Bressan, A. (s.f.). *Representaciones y Modelos en la Educación Matemática Realista*. Recuperado el 29/12/2020 de [http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2015/08/representaciones\\_modelos.pdf](http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2015/08/representaciones_modelos.pdf)
- Bressan, A., Gallego, M.F., Pérez, S. y Zolkower, B. (2016). *Educación Matemática Realista. Bases teóricas*. Recuperado el 29/12/2020 de [http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2016/03/Modulo\\_teor%C3%ADa\\_EMRFinal.pdf](http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2016/03/Modulo_teor%C3%ADa_EMRFinal.pdf)
- Bressan, A., Zolkower, B. y Gallego M.F. (2004). *I Parte: La educación matemática realista. Principios en que se sustenta. Escuela de invierno en Didáctica de la Matemática*. Recuperado el 29/12/2020 de [http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2015/08/articulo\\_escuela\\_invierno2.pdf](http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2015/08/articulo_escuela_invierno2.pdf)
- Canalejas, E. y Navas, J.M. (2017). Seminario federal: Recursos manipulativos y tecnológicos para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. *Revista sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas SUMA*, (85), 113-120. [http://revistasuma.fespm.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/suma\\_85-seminario\\_fespm\\_recursos.pdf](http://revistasuma.fespm.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/suma_85-seminario_fespm_recursos.pdf)
- Cáceres, P. (2003). Análisis cualitativo de contenido: una alternativa metodológica alcanzable. *Psicoperspectivas*, 2(1), 53-82. <https://www.redalyc.org/pdf/1710/171018074008.pdf>
- Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la UNR. *Plan de estudios del Profesorado en Matemática*. (2002). Res. C.S. 217/02. [https://docs.google.com/viewer?url=http://web.fceia.unr.edu.ar/images/PDF/carreras\\_de\\_grado/PlanPM\\_2002\\_FCEIA\\_Rosario.pdf](https://docs.google.com/viewer?url=http://web.fceia.unr.edu.ar/images/PDF/carreras_de_grado/PlanPM_2002_FCEIA_Rosario.pdf)
- Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la UNR. *Plan de estudios del Profesorado en Matemática*. (2018). Res. C.S. 027/18.

[https://www.fceia.unr.edu.ar/ecen/dm/wp-content/uploads/R0933-17CD\\_ANEXO-PM.pdf](https://www.fceia.unr.edu.ar/ecen/dm/wp-content/uploads/R0933-17CD_ANEXO-PM.pdf)

- Flores, P. (2006). Los materiales y recursos didácticos en la formación de profesores de matemáticas. *Revista de Didáctica de las matemáticas Uno*, (41), 77-97.
- Fresneda, E. y Martínez, E. (2015). Tangram: Material didáctico que contribuye al desarrollo de habilidades de pensamiento espacial en la escuela. *Revista Colombiana de Matemática Educativa*, 1(1), 753-758. <http://ojs.asocolme.org/index.php/RECME/issue/view/4/3>
- Freudenthal, H. (1991). Mathematics Phenomenologically. En H. Freudenthal, *Revisiting Mathematics Education. China Lectures*. (pp.1-44). Dordrecht, Boston, Londres: Kluwer Academic Publishers [Traducido por D. Rosenberg, 2012]. [http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2015/08/revisiting\\_mathematics\\_china\\_lectures.pdf](http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2015/08/revisiting_mathematics_china_lectures.pdf)
- García, A. (2019). Matemáticas con juegos: Aprender y disfrutar. *Revista de Educación Matemática Épsilon*, (101), 11-28. <https://thales.cica.es/epsilon/sites/thales.cica.es/epsilon/files/epsilon101.pdf>
- Gómez, M.A. (1999). Análisis de contenido cualitativo y cuantitativo: definición, clasificación y metodología. *Revista Ciencias Humanas*, (20), 103-133.
- Guerrero, O.C. (2017). La formación del profesor de matemática y la competencia “aprender a mirar profesionalmente” la enseñanza de la matemática. *Memorias del II Encuentro Internacional en Educación Matemática* (pp.55-65). Cúcuta: Universidad Francisco de Paula Santander. [https://ww2.ufps.edu.co/public/archivos/oferta\\_academica/8c86ed0111abd2ac61fa2f8fc7d99448.pdf](https://ww2.ufps.edu.co/public/archivos/oferta_academica/8c86ed0111abd2ac61fa2f8fc7d99448.pdf)
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación* (5ta. Ed.). Ciudad de México: McGraw-Hill. [https://www.esup.edu.pe/descargas/dep\\_investigacion/Metodologia%20de%20la%20investigaci%C3%B3n%205ta%20Edici%C3%B3n.pdf](https://www.esup.edu.pe/descargas/dep_investigacion/Metodologia%20de%20la%20investigaci%C3%B3n%205ta%20Edici%C3%B3n.pdf)
- Maz-Machado, A., Argudo, C. y Rodríguez, M. (2018). Explicando la diferencia entre perímetro y área con el tangram. *Revista de Educación Matemática Épsilon*, (99), 55-64. <https://thales.cica.es/epsilon/sites/thales.cica.es/epsilon/files/epsilon99.pdf>
- Meavilla, V. y Oller, A.M. (2013). Ejemplos de visualización y uso de materiales manipulativos en textos matemáticos antiguos. *Revista de Didáctica de las Matemáticas Números*, 82, 89-100. [http://www.sinewton.org/numeros/numeros/82/Articulos\\_06.pdf](http://www.sinewton.org/numeros/numeros/82/Articulos_06.pdf)
- Micelli, M.L. y Crespo, C.R. (2012). Las figuras de análisis en la antigüedad. *Revista de la Sociedad Argentina de Educación Matemática Premisa*, 14(52), 18-29. <http://www.soarem.com.ar/Documentos/52%20Micelli.pdf>
- Ministerio de Educación de Santa Fe. (2014). *Diseño Curricular. Educación Secundaria Orientada Provincia de Santa Fe*. Santa Fe: Ministerio de Educación de Santa Fe. <https://www.santafe.gov.ar/index.php/educacion/content/download/218364/1135170/file/Anexo%20III%20Resol%202630-14.pdf>
- Ministerio de Educación de la Nación. (2012). *Núcleos de Aprendizajes Prioritarios*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación.

<https://www.educ.ar/recursos/150199/coleccion-ncleos-de-aprendizajes-prioritarios-nap>

- Muñoz, J., Hans, J.A. y Fernández-Alisenda, A. (2019). Gamificación en matemáticas, ¿un nuevo enfoque o una nueva palabra? *Revista de Educación Matemática Épsilon*, (101), 29-45. <https://thales.cica.es/epsilon/sites/thales.cica.es.epsilon/files/epsilon101.pdf>
- Perrenoud, P. (2006). *Desarrollar la práctica reflexiva en el oficio de enseñar. Profesionalización y razón pedagógica*. Barcelona: Graó.
- Rabino, A. y Bressan, A. (2018). *Visualizar y Demostrar*. Recuperado el 29/12/2020 de [http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2019/07/visualizacion\\_demostracion.pdf](http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2019/07/visualizacion_demostracion.pdf).
- Ramírez, R. (2019). El juego como tarea de enseñanza: jugar, analizar, rediseñar e inventar. *Revista de Educación Matemática Épsilon*, (101), 47-56. <https://thales.cica.es/epsilon/sites/thales.cica.es.epsilon/files/epsilon101.pdf>
- Rodríguez, C.I. y Sarmiento, A. (2002). El tangram y el plegado: dos recursos pedagógicos para aproximarse a la enseñanza de las fracciones propias. *Revista de Educación Matemática EMA*, 7(1), 84-100.
- Rodríguez, G., Gil, J. y García, E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa*. Sevilla: Aljibe.
- Rodríguez, L. (2012). Recursos pedagógicos y conocimientos geométricos: concepciones de los maestros que participan en el Premio Compartir al Maestro. *Memorias del Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, 13, 561-566. [http://asocolme.org/images/eventos/13/MATEMATICA\\_EDUCATIVA\\_13\\_Encuentro\\_Colombiano%20ECME.pdf](http://asocolme.org/images/eventos/13/MATEMATICA_EDUCATIVA_13_Encuentro_Colombiano%20ECME.pdf)
- Rupérez, J.A. y García, M. (2013). Hexágonos coloreados y Mi casa (Juegos 22). *Revista de Didáctica de las Matemáticas Números*, 83, 179-186. [http://www.sinewton.org/numeros/numeros/83/Juegos\\_01.pdf](http://www.sinewton.org/numeros/numeros/83/Juegos_01.pdf)
- Rupérez, J.A. y García, M. (2014). Más de Poliprismas: SOMA en perspectiva y Derivados de Tangrams. *Revista de Didáctica de las Matemáticas Números*, 87, 137-142. [http://www.sinewton.org/numeros/numeros/87/Juegos\\_01.pdf](http://www.sinewton.org/numeros/numeros/87/Juegos_01.pdf)
- Santa, Z.M. y Jaramillo, C.M. (2015). Colectivo de maestros en formación continua con doblado de papel y su producción de conocimiento geométrico. *Revista Colombiana de Matemática Educativa*, 1(1), 212-217. <http://ojs.asocolme.org/index.php/RECME/issue/view/4/3>
- Uicab, G.R. (2009). Materiales tangibles. Su influencia en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 22, 1007-1013. <https://www.clame.org.mx/documentos/alme22.pdf>
- van den Heuvel-Panhuizen, M. (2001). Educación matemática realista como un trabajo en progreso. En F.L. Lin (Ed.), *Common Sense in Mathematics Education. Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education* (pp.1-43). Taipei: National Taiwan Normal University. [Traducido por M.F. Gallego, s.f.]. [http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2018/02/trad\\_panhuizen\\_EMER\\_trabajo\\_en\\_curso.pdf](http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2018/02/trad_panhuizen_EMER_trabajo_en_curso.pdf)
- van Hiele, P. (1999). Desarrollando el pensamiento geométrico a través de actividades que comienzan como un juego. *Teaching Children Mathematics*, 5(6), 310-316.

[Traducido por Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática, 2009].  
<http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2016/03/Desarrollando-la-geometria-por-Van-Hiele.pdf>

Villarroel, S. y Sgreccia, N. (2011). Materiales didácticos concretos en Geometría en primer año de Secundaria. *Revista de Didáctica de las Matemáticas Números*, 78, 73-94. [http://www.sinewton.org/numeros/numeros/78/Articulos\\_04.pdf](http://www.sinewton.org/numeros/numeros/78/Articulos_04.pdf)

Villarroel, S. y Sgreccia, N. (2012). Enseñanza de la Geometría en Secundaria. Caracterización de materiales didácticos concretos y habilidades geométricas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática Unión*, (29), 59-84. <https://union.fespm.es/index.php/UNION/issue/view/36/35>