# LAS CONCEPCIONES SOBRE EL NÚMERO REAL EN LOS PROFESORES DE MATEMÁTICA: UN ESTUDIO DE CASO EN ESCUELAS SECUNDARIAS

Por Lucía Florencia Caraballo

Presentado ante la
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
como parte de los requerimientos para la obtención
del grado de Magíster en Didáctica de las Ciencias -Mención en Matemática-
de la
Universidad Nacional de Rosario

Mayo de 2023
Directora: Dra. Daniela Emmanuele

# Resumen

Esta tesis tiene como objetivo describir las concepciones que posee el profesor de matemática sobre los números reales, identificando las tareas que propone para propiciar el uso del número real en el aula y reconociendo características específicas del discurso Matemático Escolar (dME), concepto tomado de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, entendido como los consensos que se realizan a fin de introducir la matemática en el sistema didáctico. Para ello, se ha planteado una metodología cualitativa, descriptiva y transversal, un estudio de caso intrínseco compuesto por tres docentes con título de Profesor/a en Matemática (o equivalente), en ejercicio profesional, que trabajan enseñando números reales en alguna escuela secundaria del departamento Rosario, Santa Fe, Argentina. Entre los resultados se advierte el predominio de la concepción conjuntista de número real, en detrimento de otras concepciones como las referidas a la medición de segmentos o la localización de puntos en la recta, existiendo coherencia con las características del dME que se han reconocido en las clases observadas. Esto se traduce en la ausencia de tareas que propicien la construcción de la recta numérica y la completitud del campo numérico, siendo el aspecto aritmético y algorítmico el que prevalece.

# Abstract

The main objective of this thesis is to describe the conceptions that the mathematics teachers have about the real number, identifying the tasks that they propose to propitiate the use of the real number in their classes and recognizing specific characteristics of the School Mathematical discourse (SMd), understood, according to the Socioepistemological Theory of Educational Mathematics, such as the consensus that are made in order to introduce mathematics into the didactic system. For this, a qualitative, descriptive and transversal methodology has been proposed, an intrinsic case study composed of three teachers with a degree of Professor of Mathematics (or equivalent), in professional practice, who work teaching real numbers in a secondary school in the department of Rosario (Santa Fe, Argentina). Among the results, the predominance of the conception of real number like a set is noted, to the detriment of other conceptions such as those referring to the measurement of segments or the location of points on the line, existing coherence with the characteristics of the SMd that have been recognized in the observed classes. This translates into the absence of tasks that propitiate the construction of the number line and the completeness of the numerical field, with the arithmetic and algorithmic aspect being the one that prevails.

# Agradecimientos


Deseo expresar mi agradecimiento:

- A la Escuela de Posgrado de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura y a la Comisión de la Maestría en Didáctica de las Ciencias por permitirme la realización de esta carrera.
- A mi directora de tesis Daniela Emmanuele quien no solo supo guiarme y acompañarme en este trabajo con dedicación y compromiso, sino que también me ha brindado su conocimiento y su experiencia, alentándome e incentivándome a crecer profesionalmente cada día.
- A las instituciones escolares y, especialmente, a las docentes que integran esta investigación por abrirme las puertas de sus aulas con total generosidad y brindarme su tiempo con excelente predisposición.
- A mis amigos y colegas, por contenerme y aconsejarme en los momentos difíciles de este proyecto.
- A mi mamá, a mi papá, a mis hermanas y a mi pareja por ser el sostén de mi vida. Gracias por apoyarme y acompañarme con cariño en todo lo que hago.

# ÍNDICE GENERAL

# ÍNDICE DE TABLAS

# ÍNDICE DE FIGURAS

# ANEXOS (en versión digital)

# Capítulo 1
# Introducción

## 1.1 PLANTEAMIENTO CONTEXTUALIZADO DEL PROBLEMA

La enseñanza de los números ha sido interés de múltiples investigaciones (Bell, 1986; ; Romero & Rico, 1996; Escolano & Gairín, 2005; Verdún & Caronia, 2010; Carrillo & Rojas, 2013; Reina et al., 2014). Sin embargo, en su mayoría, el foco ha estado puesto en los números enteros, racionales o irracionales. En comparación, el estudio de los números reales en el nivel secundario no ha sido tan estudiado y no abundan investigaciones al respecto.

A su vez, desde la época denominada Matemática Moderna (década del 60) se ha instalado una presentación de los números reales basada en la teoría de conjuntos, lo que implica una presentación formalizada y descontextualizada, no siendo un contenido significativo para el alumno. Esto se evidencia al observar usualmente libros de texto de educación secundaria (Abálsamo et al., 2013; Jaller A. & Pérez, 2017; Chorny et al., 2015). Como se verá más adelante, en su mayoría la presentación de los números reales viene dada como una forma de llamar conjuntamente a los números racionales y a los irracionales. Algunas propuestas utilizan la notación de conjuntos $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ e incluso presentan un diagrama de Venn para representar esta definición y relaciones entre otros conjuntos numéricos ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$). Esta presentación de los conocimientos matemáticos es propia de la enseñanza tradicional de la matemática. No es extraño escuchar a los alumnos preguntar en la clase de matemática ¿esto para qué sirve? Reconociendo a los libros de texto como un elemento de referencia importante para el profesor de escuela secundaria, que en numerosos casos utiliza en su práctica, y a pesar de todas las críticas y los fracasos encontrados en la reforma de la Matemática Moderna (Kline, 1976), podría sospecharse que no se ha logrado plantear una enseñanza diferente más cercana a las corrientes didácticas actuales. ¿Cuál es la necesidad de construir el conjunto de los números reales? Esta presentación, ¿deja entrever cuál es la diferencia entre un número real y un número racional? ¿Se trata de un concepto nuevo o es solo una manera de llamar conjuntamente a los números racionales e irracionales?

Si bien se han intentado promover modelos educativos diferentes al tradicional, pareciera que este modelo predomina aún en la enseñanza de la matemática. Por ejemplo, en el actual Diseño Curricular de Matemática para la Educación Secundaria Orientada de la Pcia de Santa Fe, Argentina (Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe, Argentina, 2014a) se plantea una enseñanza a partir de la resolución de problemas. Sin embargo, los contenidos están organizados en ejes dependiendo de si los conceptos provienen de la rama de la geometría (eje Geometría y Medida), de la aritmética (eje Números y Operaciones), del álgebra o análisis matemático (eje Álgebra y Funciones) y de la estadística o probabilidad (eje Probabilidad y Estadística). Si bien se propone a los docentes plantear situaciones intra y extra matemáticas, esas situaciones deben concentrarse en el desarrollo y aplicación de conceptos establecidos y estructurados bajo un orden lógico que no siempre es el admitido en su resolución. Es decir, una situación problemática puede requerir para su resolución diversos conceptos y procedimientos no necesariamente provenientes de una misma rama de la matemática, ni correspondiente al mismo año escolar en el que se presenta. Se hace difícil plantear la enseñanza a partir de la resolución de problemas con tales restricciones. Tal es el caso del desarrollo de los números a lo largo de la escolaridad secundaria. En el Diseño Curricular mencionado anteriormente, se plantea la presentación de los números naturales, los racionales positivos, los enteros, los racionales, los irracionales y luego los reales (siguiendo ese orden a través de los años). En el caso de la secundaria técnica, se sigue el mismo orden agregando al final los números complejos. Esta presentación responde a criterios de la lógica matemática formal, no siendo el mismo, por ejemplo, que el orden de surgimiento histórico de estos tipos de números. Se presenta hoy en día una contradicción con lo propuesto por las editoriales, dado que, en los Diseños Curriculares de la provincia de Santa Fe, vigentes actualmente para educación secundaria (Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe, Argentina, 2011a-j; 2013 a-d; 2014 a-e) la teoría de conjuntos como contenido disciplinar se encuentra ausente.

Además, la formación del profesorado en la provincia de Santa Fe tampoco favorece un verdadero cambio: en el Diseño Curricular del Profesorado de Educación Secundaria en Matemática de la pcia. de Santa Fe (Ministerio de Educación de la pcia. de Santa Fe, 2015) no se plantea la enseñanza a los futuros docentes de la formalización de los números reales realizada por Cantor y Weierstrass, la definición de número real como cortadura de Dedekind, ni tampoco las demostraciones que prueban que el número $\pi$ es irracional y trascendente (a pesar de ser uno de los primeros números irracionales presentados en la escuela secundaria e incluso ya introducido -en su forma aproximada- en la primaria). Desde mi corto recorrido por institutos de formación docente y por comentarios de colegas que trabajan en este ámbito, se puede decir que el grado de profundidad de las teorías matemáticas enseñadas en los profesorados no alcanza el nivel necesario para poder enseñar los contenidos señalados, por lo que la teoría axiomática no constructiva es la enseñada generalmente a los futuros profesores. Y en los casos donde sí son presentadas las teorías formales del número real (como en algunos profesorados universitarios), no se profundiza acerca de las duras luchas epistemológicas que se tuvieron que dar para que esas teorías surgieran. Se pierden las razones por las que los matemáticos emprendieron la búsqueda ardua de una definición formal y cómo era concebido este concepto antes de esas teorías.

En los cursos de matemática del primer año de la universidad, donde me desempeño como docente, he podido observar que gran parte de los alumnos ingresantes no han logrado una construcción completa del número real durante su transcurso por la escuela secundaria. Los obstáculos que presentan para la adquisición de nuevos conocimientos muchas veces provienen de una falta de conocimientos previos. Por ejemplo, al preguntarles el resultado de realizar la operación entre conjuntos $[0,2] \setminus \{0\}$[1], la

[1] El símbolo $\setminus$ denota la resta entre conjuntos.

respuesta usual suele ser [1,2], a pesar de estar trabajando con intervalos de la recta real. Esto deja en evidencia que -en numerosos casos- solo reconocen los números enteros. Otro caso usual, es la descripción del número $\pi$ como $3{,}14$, no reconociendo su carácter de irracional. En el caso de definir algunas funciones continuas como, por ejemplo, la función exponencial $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^x$, suele no ser cuestionada la operatoria definida para todos los reales. No es habitual que se presenten cuestionamientos tales como: ¿es posible calcular un número irracional elevado a un número irracional? ¿Y a un número racional? ¿Cómo se calcula? Quizás sea porque en la enseñanza tradicional nunca se propiciaron este tipo de preguntas.

Por las razones expuestas, interesa indagar sobre la enseñanza del número real en la escuela secundaria. Se elige este nivel de escolaridad, dado que es donde se plantea su enseñanza en los documentos ministeriales y ya que es el punto de partida en muchas carreras universitarias para el aprendizaje de otros conocimientos matemáticos (por ejemplo, la mayoría de las Ingenierías (Universidad Nacional de Rosario, 2014a; Universidad Nacional de Rosario, 2014b; Universidad Nacional de Rosario, 2018) poseen en primer año asignaturas que comienzan con el estudio de funciones en dominio real, límite, derivada, etc. siendo el número real un contenido previo que los alumnos deberían poseer). Además, el aprendizaje de los números reales en el nivel secundario es imprescindible para la comprensión de:

- Conocimientos matemáticos referidos al mismo nivel (funciones reales continuas, trigonometría, sistema radián, área y perímetro de figuras planas, volumen de cuerpos, expresiones algebraicas, ecuaciones, medidas estadísticas, probabilidad, etc.).
- Conocimientos matemáticos referidos a un nivel superior (por ejemplo, del cálculo: límite, derivada, integrales, etc.).
- Situaciones referidas a la vida cotidiana: comprensión de unidades de medida de magnitudes continuas (como peso, tiempo, capacidad, longitud, área, etc.), comprensión de índices presentes en noticias periodísticas (por ejemplo, de índices demográficos en censos, índices de inflación, índices de intensidad de movimientos sísmicos, etc.), entre otros.
- Conocimientos aplicados a otras ciencias: comprensión de fenómenos químicos, físicos, biológicos modelizados matemáticamente.

Se elige la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) para investigar esta problemática, dado que es una teoría que se caracteriza principalmente por estudiar la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional. Esta teoría diferencia la matemática de la matemática escolar, dado que la matemática construida dentro de la comunidad científica no ha sido inventada con fines de enseñanza. Sin embargo, se la enseña dentro de un ámbito educativo en el cual el saber matemático sufre un proceso de transposición derivando en un subproducto que es reproducido en el escenario ficticio del aula (matemática escolar). Este proceso genera discursos en torno a los objetos matemáticos, a fin de facilitar su comunicación para la enseñanza. La consecuencia directa es la descontextualización de los objetos matemáticos, que genera una pérdida de sentido para quien lo aprende. Los consensos que se realizan a fin de introducir la matemática en el sistema didáctico son denominados, en esta teoría, como discurso Matemático Escolar (dME). El dME enfatiza la centración en los objetos matemáticos, ignorando su construcción social dentro del ámbito de la matemática que le da sentido y significatividad. La TSME plantea una enseñanza centrada en las prácticas más que en los objetos, problematizando el saber. Esta teoría, a su vez, considera la posibilidad de profundas transformaciones a partir del rediseño del dME. Pero este cambio solo es posible a partir del empoderamiento docente, es decir, a partir de una reflexión que se consolida en acción, que permite apropiarse del saber matemático para transformar la realidad (Reyes Gasperini & Cantoral, 2014). El empoderamiento docente es un proceso complejo que no se afianza rápidamente, sino que requiere de tiempo y constancia para consolidarse en un cambio de mirada y un cambio en la práctica.

Es posible advertir que desde esta teoría, que será profundizada luego en el apartado titulado Marco Conceptual, se pone en jaque la epistemología estructuralista de la matemática, propia de la Matemática Moderna, que atraviesa la enseñanza del número real en la actualidad. Interesa la enseñanza de un saber puesto en uso, que surge en un cierto contexto y es apropiado por parte de quien lo aprende, dado que se lo construye desde la mirada de quien lo inventa y de quien lo usa. Este enfoque aporta al estudio de la enseñanza del número real, dado que en su presentación tradicional aparece descontextualizado y es acompañado por un cierto dogmatismo: las propiedades no se demuestran, las operaciones no se definen (se "heredan" de otros conjuntos numéricos), la representación de la recta numérica continua no se construye a partir de los números reales (es presentada desde los primeros años de la educación secundaria e, inclusive, en la educación primaria). Sin embargo, es posible advertir la gran capacidad que tiene el docente de poder transformar su práctica en forma directa. Es importante, entonces, indagar cómo los profesores enseñan el número real en la escuela secundaria considerando que, la forma en que lo hagan, estará íntimamente relacionada con los conocimientos y concepciones que disponen para llevar a cabo sus prácticas y la manera en que son atravesados por el dME. Entendiendo por tareas a las actividades, acciones, ejecuciones y alternancias de dominios llevadas a cabo en una situación específica, donde se pone en juego el uso del conocimiento (Cordero & Flores, 2007), serán aquellas que proponga el profesor a sus alumnos en el aula las que dejarán en evidencia si se presentan o no oportunidades para propiciar el uso del número real, entreviendo cómo el sujeto actúa sobre este conocimiento e identifica a qué propósitos sirve y el rol que ocupa en esa situación específica.

En las secciones siguientes se profundizan algunos de los puntos planteados en la problemática aquí presentada:

*1.1.1 Propuestas para la enseñanza del número real en los Diseños Curriculares de la Provincia de Santa Fe*. Como esta investigación se lleva a cabo en escuelas secundarias, interesa localizar la inserción de este concepto en los distintos Diseños Curriculares, para, por un lado, definir su alcance, es decir, identificar cuáles son las características del concepto que deberían enseñarse (contenidos específicos) y cómo podría hacerse (consideraciones metodológicas), con el objetivo de conocer la formación en torno a este concepto que se pretende alcanzar al terminar la educación secundaria para todos los ciudadanos (independientemente de la orientación o tecnicatura que posean las escuelas secundarias[2]); y, por el otro lado, anticipar posibles prácticas en torno a la enseñanza del número real que podrían habitar en escuelas secundarias de la pcia. de Santa Fe (aunque se reconoce que lo prescripto en los Diseños Curriculares podría no coincidir necesariamente con las prácticas de enseñanza reales). Esto permitirá contextualizar (al menos desde lo prescripto) la enseñanza del número real dentro de la matemática escolar.

1.1.2 *Revisión de propuestas editoriales utilizadas para la enseñanza del número real*. Se divide en: propuestas utilizadas para la enseñanza secundaria actual, propuestas para la enseñanza secundaria enmarcadas dentro de lo que se conoce como la reforma de la Matemática Moderna y propuestas para la enseñanza de educación superior. Cada libro analizado plantea un desarrollo distinto para la enseñanza del número real, lo cual da una idea de cuáles son las propuestas para nivel secundario actuales y cómo se han planteado en el pasado en el período de la reforma de la Matemática Moderna, pudiendo contemplar el cambio que se ha producido en el tiempo. El objetivo de esta revisión es, entonces, identificar posibles tareas que los profesores podrían estar proponiendo en torno a la enseñanza del número real en las escuelas secundarias actualmente, y comparar estas con aquellas que eran propuestas en el período de la reforma de la Matemática Moderna. Además, se incorporan las propuestas para la enseñanza del número real en el nivel superior dado que eventualmente podrían ser utilizadas durante la formación docente y dan una idea de los conocimientos con los que podría contar un profesor de matemática acerca del número real.

## 1.1.1 Propuestas para la enseñanza del número real en los Diseños Curriculares de la Provincia de Santa Fe

En la provincia de Santa Fe, Argentina, la Educación Secundaria puede ser Orientada o de Modalidad Técnico-Profesional. Los Diseños Curriculares para cada tipo de educación conforman un proyecto curricular jurisdiccional, enmarcado en la Ley Nacional N° 26206 de Educación Nacional, que establece la obligatoriedad para este nivel, cuyo objetivo es la formación de adolescentes y jóvenes para la capacitación para el mundo laboral, el ejercicio pleno de la ciudadanía y para la continuidad de estudios superiores (Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe, 2014a). La modalidad técnico-profesional es, además, responsable de la formación de técnicos medios en áreas ocupacionales específicas y de la formación profesional (Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe, 2011a).

### 1.1.1.1 Inserción del número real en el Diseño Curricular para la Educación Secundaria Orientada

La Educación Secundaria Orientada se divide en ciclo básico (1er y 2do año) y ciclo orientado (3ero, 4to y 5to año), aunque Matemática se presenta como asignatura de la formación general en ambos ciclos y en todas las orientaciones (Economía y

[2] Este recorrido fue realizado antes de la selección de las docentes que componen la muestra.

Administración, Ciencias Naturales, Ciencias Sociales, Ciencias Sociales y Humanidades, Lenguas, Arte, Agro y Ambiente, Turismo, Comunicación, Informática, y Educación Física).

En el Diseño Curricular para Educación Secundaria Orientada se plantea la enseñanza de la matemática a partir de la resolución de problemas. En relación a esto se expresa:

> Si bien la resolución de problemas siempre estuvo presente en la actividad matemática, en este marco se la reconoce como un camino para la construcción de conocimientos, diferenciándola de la concepción tradicional en la que los problemas aparecen como la oportunidad para aplicar lo previamente enseñado. (Ministerio de Educación de la pcia. de Santa Fe, 2014a, p. 47)

En el mismo sentido, se señala lo siguiente:

> Se plantea un trabajo áulico que propicie una actividad a la manera de micro-sociedad científica, en el que se problematice el contenido y los estudiantes tengan oportunidades para interpretar información, establecer relaciones, conjeturar, elegir y construir un modelo para resolver los problemas, comunicar en forma oral y escrita, argumentar acerca de la validez de los procedimientos y resultados, elaborar conclusiones, de modo que posibilite la producción de conocimientos, aspecto central en la enseñanza. (Ministerio de Educación de la pcia. de Santa Fe, 2014a, p. 48)

Por otro lado, este Diseño organiza el contenido matemático en cuatro ejes:

> Este espacio curricular reconoce cuatro ejes conceptuales relevantes, que se organizan atendiendo principalmente a lo numérico, lo geométrico, lo algebraico, lo variacional y lo aleatorio. Ellos han sido denominados: Números y Operaciones, Geometría y Medida, Álgebra y Funciones, y Probabilidad y Estadística. Esta presentación no significa orden, prioridad, ni que debe agotarse uno antes de empezar el otro. Por lo tanto, es tarea del profesor seleccionar, secuenciar y vincular los contenidos explicitados en los distintos ejes de estas Orientaciones, favoreciendo la interrelación e integración en situaciones que problematicen el conocimiento. (Ministerio de Educación de la pcia. de Santa Fe, 2014a, p. 48)

Se hace explícito que la intención del documento es acompañar al profesor en sus propias decisiones, explicitando los aspectos didácticos de cada eje, pero dejándoles cierta libertad para secuenciar los contenidos íntimamente ligados a lo que la problematización del conocimiento y el camino a su construcción requiere.

La enseñanza del número real se localiza dentro del eje Números y Operaciones, realizando una descripción de los contenidos, por año, como se detalla a continuación, complementando estos con consideración metodológicas que se presentan para cada ciclo.

*Ciclo básico*

- *Primer año:*

Se plantea primero, la enseñanza de los criterios de divisibilidad de números naturales ($\mathbb{N}$), la exploración, formulación y validación de propiedades relacionadas a múltiplos, divisores y números primos. Continúa con la enseñanza de números racionales positivos en su expresión fraccionaria y como número decimal para ciertos cocientes. La fracción como razón, porcentaje, escala, probabilidad y como punto sobre la recta numérica. Luego, se presenta el contenido números enteros (ℤ) y, dentro de este, su interpretación en diversas situaciones y su representación en la recta numérica. A partir de esta representación, sigue la formulación de propiedades de equivalencia, discretitud o densidad de los distintos conjuntos numéricos. Con respecto a las operaciones en cada conjunto, se presenta la elaboración de estrategias para el cálculo (mental, escrito, exacto, aproximado o con calculadora), la jerarquía de las operaciones y sus propiedades. Por último, se propone la presentación de números irracionales y noción intuitiva de número real, aunque no se especifica sobre qué perspectiva se abordaría.

- *Segundo año:*

Para este año se propone la enseñanza de los números racionales (ℚ): diferentes representaciones y formas de escritura (fraccionaria, decimal finita o infinita periódica, como punto de una recta, notación científica). Las propiedades de equivalencia, orden y densidad de los números racionales, comparando con las propiedades de números enteros. Con respecto a las operaciones, se propone la elaboración de estrategias para el cálculo, la evaluación crítica de los resultados, sus formas de validación y sus propiedades.

Dentro de las consideraciones metodológicas (que engloba al primer y segundo año), se reafirma el uso del número dentro de la resolución de problemas:

> El estudio de números y operaciones no se reduce a la mera aplicación rutinaria de algoritmos en la resolución de ejercicios complejos, tediosos y repetitivos, sino que debe permitir resolver problemas intra y extramatemáticos, a partir de la selección del tipo de cálculo según lo requiera la situación presentada, la estimación y la interpretación de los resultados y la argumentación sobre su razonabilidad. (Ministerio de Educación de la pcia. de Santa Fe, 2014a, p. 51)

*Ciclo orientado*

- *Tercer año:*

Se continúa con el estudio de los números racionales, especialmente el significado de fracción como razón, como punto de una recta y la propiedad de densidad de la recta numérica. Para esto último, se propone el uso de recursos tecnológicos: los tradicionales en geometría (regla y compás), calculadora y software de geometría dinámica. Se avanza en el estudio de operaciones y sus propiedades, incorporando la radicación y la logaritmación como operaciones inversas a la potenciación. Luego, se plantea la enseñanza de números irracionales (𝕀) al reconocer la insuficiencia de los números racionales en el cálculo de algunas medidas (como la diagonal de un cuadrado respecto a su lado).

*Cuarto año:*

Para este año se propone el estudio de números irracionales, específicamente las expresiones como raíces enésimas (su aproximación por redondeo y truncamiento, acotamiento del error en función de la situación planteada, el uso de recursos tecnológicos como calculadoras y software). Luego, se plantea la enseñanza de los números reales (ℝ) a partir de situaciones que involucren el tratamiento del número áureo y la inconmensurabilidad de segmentos. Por último, se aborda el uso de propiedades para el trabajo con radicales, argumentando las equivalencias sobre sus distintas formas de escritura.

- *Quinto año:*

Se continúa con el estudio del conjunto $\mathbb{R}$, aproximando a partir de sucesiones los números $\sqrt{2}$ y $\pi$ (noción intuitiva de convergencia). Luego, se propone el estudio de propiedades de la recta real (densidad y completitud). Se avanza con las nociones de distancia, involucrando al valor absoluto. Por último, se plantea la resolución de cálculos que involucren números reales expresados como radicales aritméticos (operaciones y propiedades).

Dentro de las consideraciones metodológicas de este ciclo y de este eje, puede encontrarse la forma en la que se pretende que emerja el concepto de número real:

> A partir de los saberes previos de los estudiantes respecto de los Números Racionales, en el Ciclo Orientado se avanzará hacia la noción de Número Real en contextos que permitan reconocer la insuficiencia de aquellos para expresar algunas medidas y resultados de ciertas operaciones. (Ministerio de Educación de la pcia. de Santa Fe, 2014a, p. 135)

Dentro de la misma sección, se sugiere realizar una conexión entre el número y la medida involucrando la existencia de segmentos inconmensurables:

> Los estudiantes conocen desde la escolaridad primaria la medida como acto empírico y por lo tanto consideran solamente segmentos estimados como conmensurables. En este Ciclo se deben plantear situaciones que involucren la conmensurabilidad de segmentos y la interpretación de la existencia de segmentos inconmensurables. En lo expresado radica la importancia de estudiar la relación entre la longitud de la diagonal de un cuadrado y el lado, ya que la inconmensurabilidad concierne exclusivamente a objetos matemáticos y solo puede ser el resultado de una demostración y no de una mostración, siendo necesario independizar el razonamiento de los ostensivos -palabras, grafismos, escrituras, gestos y representaciones materiales de todo tipo que se utilizan en la consideración de un objeto matemático. (Ministerio de Educación de la pcia. de Santa Fe, 2014a, p. 135)

En este recorrido se ha podido localizar la enseñanza del número real, luego de presentar los números racionales e irracionales no negativos, en primer año en forma intuitiva profundizándose en el ciclo orientado. Dentro de este ciclo, se plantea el número real en la medida de segmentos inconmensurables y como límite de una sucesión (aunque en forma intuitiva), en particular de números irracionales, como raíces no racionales de números enteros positivos (por ejemplo, $\sqrt{2}$ y $\pi$). También, se presenta el número real como puntos de una recta completa.

#### 1.1.1.2 Inserción del número real en los Diseños Curriculares para la Educación con Modalidad Técnico-Profesional

La Educación Secundaria con Modalidad Técnico-Profesional, al igual que en la Orientada, se divide en 1er ciclo (1ero y 2do año) y 2do ciclo (3ro, 4to, 5to y 6to año). La asignatura Matemática forma parte de la Formación Científica Tecnológica desde 1ero hasta 5to año de todas las tecnicaturas y, en la mayoría, también en 6to año (las tecnicaturas en Diseño y Comunicación Multimedial, Diseño y Producción de Joyas, Informática Profesional y Personal, Pesca y Acuicultura, y Administración y Gestión poseen la asignatura Matemática Aplicada en su Diseño Curricular, en vez de Matemática, en el último año de escolaridad). Se realiza a continuación, una descripción de los contenidos presentados en relación al número y las operaciones, por año, hasta llegar al concepto de número real:

- *Primer año* (1er ciclo):

Se plantea la enseñanza del número entero, presentándolo como número relativo (en situaciones para determinar temperatura, nivel del mar, etc.) y como resta de números naturales (en situaciones de pérdidas y ganancias). Se sigue con la comparación entre números enteros, la definición de distancia y su representación en la recta numérica. Se sugiere la clasificación de diferentes tipos de números en los distintos conjuntos numéricos ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}$), aunque no queda claro en qué momento se presentaron los conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$. A continuación, se propone primero la interpretación de número racional como cociente entre números enteros y luego el uso de diferentes representaciones (fraccionaria, expresión decimal, notación científica, como punto de la recta numérica). Se plantea el análisis de similitudes y diferencias entre propiedades que se cumplen en $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ (orden, discretitud y densidad). Además, se propone el reconocimiento y el uso de las diferentes operaciones en $\mathbb{Q}$, en sus diferentes expresiones, según la situación que se presente (Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe, 2011a).

- *Segundo año* (1er ciclo):

Se continúa con el estudio de los números racionales, recuperando el concepto de número natural y entero en los diferentes contextos, incluso los procesos históricos que llevaron a la construcción de los conjuntos numéricos en las distintas culturas. Se propone la aproximación por redondeo y truncamiento, y el cálculo del error cometido. Además, se sugiere el análisis de las operaciones y sus propiedades en $\mathbb{Q}$, como extensión de las elaboradas para $\mathbb{Z}$. Se plantea el reconocimiento de la insuficiencia de los números racionales para expresar la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, y entre un cateto y la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Por último, se sugiere el análisis de propiedades de discretitud, densidad y aproximación a la idea de completitud de los diferentes conjuntos numéricos (aunque no queda claro si se presentó aún el conjuntos de los números reales), estableciendo relaciones de inclusión entre ellos (Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe, 2011a).

- *Tercer año (2do ciclo):*

En la mayoría de los Diseños Curriculares (en este ciclo aparecen diferenciados por tecnicatura), se plantea la enseñanza del número real en tercer año, posterior a la introducción del concepto de número irracional. Luego de una revisión de todos los Diseños Curriculares (Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe, 2011 b-j, 2013 a-d, 2014 b-e), puede decirse, en general, que los contenidos que se plantean son: el reconocimiento entre números racionales e irracionales, aproximaciones por redondeo y truncamiento, propiedades de orden, densidad y continuidad en ℝ, representación en la recta numérica de números reales, intervalos de números reales, operaciones con radicales, potencia de exponente racional y completitud de ℝ.

En los años superiores de este ciclo se continúa con el estudio de números complejos, series numéricas, funciones, límite, derivada e integrales, según la mayoría de los Diseños Curriculares.

Se puede observar en la modalidad Técnico-Profesional de la Educación Secundaria, a los números reales como conjunto numérico, a partir de la ampliación de otros, heredando sus propiedades. Además, se puede distinguir al número real como puntos de una recta en la cual se analizan propiedades como la densidad y la completitud. En general, se hace hincapié en la operatoria dentro de cada conjunto numérico y el estudio de sus propiedades.

En este recorrido se ha podido observar en qué año/s de escolaridad se pretende lograr la enseñanza del número real, los contenidos que se deberían desarrollar y en qué orden se propone hacerlo. Esto permite contextualizar al número real dentro de la matemática escolar y comprender de mejor manera la problemática planteada. Para seguir profundizando en esta línea, se realiza a continuación la revisión de propuestas editoriales utilizadas para la enseñanza del número real en distintos niveles y en distintos contextos.

### 1.1.2 Revisión de propuestas editoriales utilizadas para la enseñanza del número real

#### 1.1.2.1 Revisión del capítulo Número Real en libros de Matemática actuales para nivel secundario

Para la siguiente revisión se han tenido en cuenta algunos libros para educación secundaria, propuestas de editoriales argentinas muy difundidas, editados dentro de los últimos diez años. Para la selección se consultó a profesores en ejercicio profesional en el nivel secundario del dpto. Rosario acerca de los libros que son utilizados o consultados usualmente. Se han elegido aquellos que poseen un capítulo denominado Número Real (o equivalente), independientemente para qué año de la escuela secundaria está dirigido, y que desarrolle con mayor profundidad este contenido dentro de la misma serie de libros (cabe aclarar que los libros de referencia no son editados en Santa Fe, ni siguen los lineamientos de los Diseños Curriculares descriptos en el punto 1.1.1, puesto que, o bien, tales libros no existen, o bien, no se han encontrado tales libros referenciados por los profesores anteriormente mencionados). Como ya se ha mencionado consideramos los libros de texto como un elemento de referencia importante para el docente, que en muchas ocasiones consulta y utiliza para la planificación de sus clases. Después de un examen exhaustivo, y dada la coincidencia general que existe en el contenido de estos libros, se han seleccionado tres de ellos que resultan característicos de tres tendencias diferentes: la primera, en la que se hace hincapié en la operatoria de números reales por sobre otras características; la segunda, en la que se desarrollan diferentes características del número real de forma más balanceada; y la tercera, en donde el foco recae con mayor peso en el aspecto geométrico y en las situaciones problemáticas. En cada uno de los capítulos, se analiza la presentación de número real y los diferentes tipos de actividades que se proponen al alumno. Se expone a continuación, un resumen del desarrollo de los contenidos y una descripción del tipo de actividades propuestas:

En Abálsamo et al., (2013), se presenta primero un problema para trabajar con números racionales, que implica cálculo de porcentajes. Luego, se define el conjunto de los números enteros de la siguiente manera:

> El conjunto de los números enteros está formado por los números negativos, los positivos y el cero. (Abálsamo et al., 2013, p. 9)

En la sección de números enteros, se presentan sin introducción ni ejemplificación, propiedades de la potenciación y radicación de forma genérica, aunque no se indica qué tipo de números representan las letras presentes en las fórmulas. Luego, se presentan reglas para la realización de cálculos combinados y la jerarquía de las operaciones, y, por último, se define cuándo un entero es divisible por otro, el divisor común mayor (dcm) y el múltiplo común menor (mcm). Las actividades que siguen a esta sección, requieren aplicar propiedades de potenciación, radicación, realizar cálculos combinados y hallar el dcm y el mcm de números dados.

El capítulo continúa desarrollando número racional, definiéndolo como una expresión de la forma $\frac{a}{b}$, donde $a$ y $b$ son enteros y $b$ distinto de cero. Luego, se menciona cómo pasar de una fracción a su expresión decimal y viceversa (sin razonamientos que argumenten el procedimiento), clasificando estas en exactas o periódicas (puras o mixtas). Se sigue con operaciones combinadas, potenciación y radicación de números racionales. Las actividades tienden en su mayoría al cálculo numérico, siguiendo reglas que fueron presentadas con anterioridad. En menor proporción, se proponen actividades para comparar, ordenar y clasificar números racionales.
Luego, se introducen los números irracionales, definiéndolos como expresiones con infinitas cifras decimales no periódicas. A continuación, se afirma que no pueden expresarse como fracción. Se ejemplifica, brindando las primeras cifras decimales de los números $\pi$, $\sqrt{2}$ y $\sqrt[3]{5}$. Se explica un procedimiento, mediante el teorema de Pitágoras, para marcar sobre la recta el punto correspondiente a $\sqrt{5}$. Por último, se define al conjunto de los números reales y se presentan dos propiedades:

> El conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$) está formado por todos los números racionales y los irracionales.
> El conjunto de los números reales es:
>
> - Denso: entre dos números reales siempre existe otro número real.
> - Continuo: a cada punto de la recta numérica le corresponde un número real. (Abálsamo et al., 2013, p. 25)

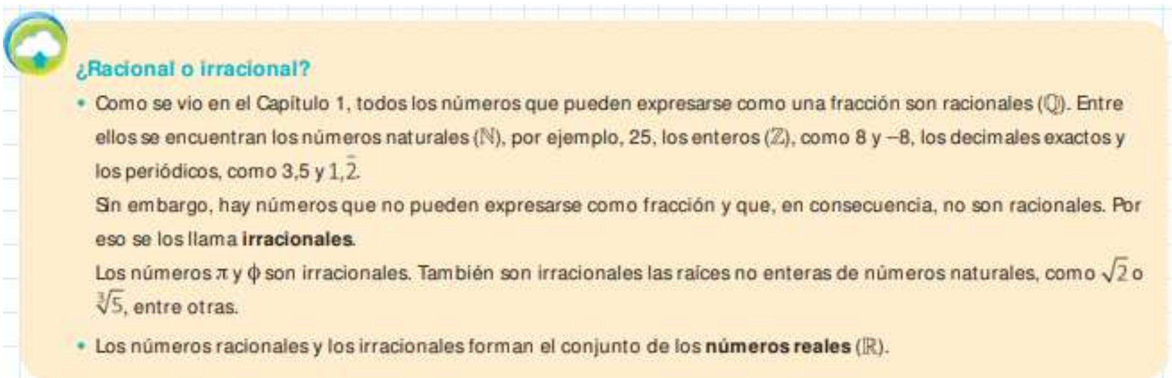
Las actividades que siguen tienen por objetivo clasificar en racional o irracional un número real, representar raíces cuadradas de enteros positivos en la recta numérica, acotar números irracionales por enteros, y operar con radicales.

El capítulo continúa con notación científica y aproximación, exponiendo un procedimiento para obtener la forma deseada. Por último, se introducen los intervalos reales como una forma de representar subconjuntos de números reales (aparte de la forma coloquial, simbólica y gráfica en la recta numérica).

Se puede observar una presentación del número real como conjunto. Las actividades propuestas hacen hincapié en la resolución algorítmica de cálculos numéricos, a partir de procedimientos dados. No se presentan problemas o situaciones que evidencien cuál es la necesidad de aplicar un tipo de representación o procedimiento. De la misma manera, se exponen las definiciones de forma descontextualizada. Las propiedades presentan falta de precisión en el lenguaje utilizado y no se demuestra su validez en el campo numérico en el que se enmarcan.

En Jaller & Pérez (2017), se inicia el capítulo con una actividad que pide aproximar con calculadora algunos números irracionales. También, se menciona a la escuela pitagórica y a los conocimientos que tenían acerca de los números racionales e irracionales (en términos de segmentos conmensurables o inconmensurables) pero no profundiza en estos conceptos, quedando en el plano de lo anecdótico. Luego, se señala la existencia del número $\pi$ (aunque no se lo relaciona con el perímetro de la circunferencia) pidiendo investigar cuántos decimales tiene. A continuación, y con el título de Números Irracionales, se presentan los diferentes conjuntos numéricos (Figura 1).

**Figura 1.** ***Definiciones de los diferentes campos numéricos***



¿Racional o irracional?

- Como se vio en el Capítulo 1, todos los números que pueden expresarse como una fracción son racionales ($\mathbb{Q}$). Entre ellos se encuentran los números naturales ($\mathbb{N}$), por ejemplo, 25, los enteros ($\mathbb{Z}$), como 8 y –8, los decimales exactos y los periódicos, como 3,5 y $1,\hat{2}$.
  Sin embargo, hay números que no pueden expresarse como fracción y que, en consecuencia, no son racionales. Por eso se los llama **irracionales**.
  Los números $\pi$ y $\phi$ son irracionales. También son irracionales las raíces no enteras de números naturales, como $\sqrt{2}$ o $\sqrt[3]{5}$, entre otras.
- Los números racionales y los irracionales forman el conjunto de los **números reales** ($\mathbb{R}$).

*Nota.* Tomado de "Entre números III" (p. 50), por A. Jaller y M. Pérez, 2017, Santillana.

Se observa una presentación de número real como conjunto, en donde la distinción entre número racional e irracional es la característica de poder expresarse o no como fracción. Las actividades propuestas tienen como objetivo clasificar números en racionales o irracionales, obtener diferentes representaciones de un número racional, representar gráficamente raíces cuadradas no enteras de números naturales (a partir del teorema de

Pitágoras), comparar diferentes números (a partir de la calculadora o del crecimiento de la raíz cuadrada, por ejemplo, al afirmar que $2 < \sqrt{5} < 3$ ya que $\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$), operar con radicales (sin contexto o en un contexto geométrico, al hallar el área o el perímetro de una figura con sus datos ya establecidos), aproximar un racional o un irracional por truncamiento o redondeo (a partir de una regla), expresar subconjuntos de números reales a partir de una inecuación, a partir de un intervalo o a partir de un gráfico (y pasar de una representación a la otra).

En este capítulo se puede observar un mayor equilibrio en las actividades repartidas en cada sección, que permiten comparar, operar, representar en la recta numérica, aproximar y representar subconjuntos de diferente manera. Sin embargo, el aspecto geométrico en la medición de segmentos presentada inicialmente no se retoma a lo largo de la propuesta. No se estudia cuándo dos segmentos son conmensurables o inconmensurables.

En Chorny et al. (2015), se inicia cada sección con uno o varios problemas y sus respectivas resoluciones para luego generalizar los conceptos. El capítulo comienza con problemas de proporcionalidad directa en aplicación a un problema de mezcla de jugo concentrado y agua, conversión en diferentes unidades de longitud y de ubicación de paquetes de golosinas. En cada problema debe plantearse una proporción o una razón. Luego, se define el conjunto de los números racionales como aquel formado por los enteros y los fraccionarios no enteros, es decir, a todo número expresable como fracción. Cabe aclarar que el término fracción es definido con anterioridad, como la razón (cociente) de números enteros. Las actividades que siguen son del estilo a las trabajadas en los ejemplos. Se continúa con problemas en donde se realizan construcciones con regla y compás para marcar racionales, a partir de uno dado, en la recta real (trasladando segmentos, dividiendo a la mitad, sumando segmentos, etc.). Se concluye que la suma, resta, multiplicación y división de números racionales es otro número racional. A partir del teorema de Pitágoras, se demuestra que la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1 metro, mide $\sqrt{2}$ metros. Observando una extensa aproximación decimal de $\sqrt{2}$ se sospecha que no posee período. A continuación, se demuestra que $\sqrt{2}$ no es un número racional, por el método de reducción al absurdo. Luego, se concluye que $\sqrt{2}$ no es racional y, por lo tanto, es irracional. Se sigue con otro problema en donde se estudia la relación entre el lado de un pentágono y una de sus diagonales. Posteriormente, se define error absoluto de una aproximación. Las actividades propuestas tienen por objetivo: reflexionar acerca de la relación entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro, clasificar números dados como raíces de números racionales en racionales o irracionales, calcular el error cometido al aproximar un número irracional con una fracción, observar y reconocer un patrón en las cifras decimales de un número para luego clasificarlo en racional o irracional, representar en la recta numérica raíces cuadradas irracionales.

Luego, se define a los números reales como unión de racionales e irracionales ($\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$). Se enuncia la completitud de la recta numérica indicando que a cada punto de la recta le corresponde un número real (y viceversa). A continuación, se demuestra que la suma de números racionales es un número racional, que la suma de dos irracionales no siempre es racional, que la suma de un racional y un irracional es irracional, y que todas las operaciones anteriores dan como resultado un número real. Se enuncia lo siguiente:

> - Las operaciones elementales entre números reales dan resultado real;
> - Todo número real tiene opuesto;
> - Todo número real tiene recíproco (excepto el 0).
>
> Recordemos que en ningún caso está definida la división por 0 ni la raíz con índice par de números negativos. (Chorny et al., 2015, p. 16)

Las actividades siguientes proponen la ubicación de puntos relacionados con una medida establecida en la recta, la comparación de números reales para su ordenamiento, la resolución de ecuaciones e inecuaciones con módulo a partir de una mirada gráfica, la realización de operaciones entre números reales a partir de situaciones geométricas, el cálculo de los primeros términos y determinación del término general de una sucesión (a partir de una situación geométrica o aritmética).

La propuesta de este libro gira en torno a la resolución de problemas, por lo cual, la definición de conceptos o enunciación de propiedades pierde protagonismo (a diferencia de las propuestas anteriores). Se observa una definición de número real como conjunto, aunque se hace foco en el aspecto geométrico del número por sobre el aritmético.

#### 1.1.2.2 Revisión del capítulo Números Reales en libros de texto para el nivel secundario enmarcados en la reforma denominada Matemática Moderna

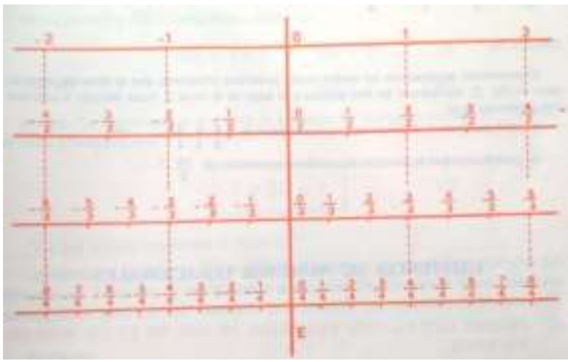
La reforma de la Matemática Moderna tuvo lugar a partir de la década del 60, y sus cambios fundamentales consistieron en la enseñanza de la matemática a partir de la teoría de conjuntos y las estructuras algebraicas. Una de las críticas al plan tradicional era que los alumnos aprendían matemática mecanizando procedimientos y memorizando demostraciones. La reforma vendría a solucionar este problema, enseñando la matemática lógicamente, comprendiendo el razonamiento detrás de cada paso, evitando la memorización y, de esta manera, superando las dificultades. La interpretación lógica era tradicionalmente utilizada para la enseñanza de la geometría: se comienza con los axiomas y las definiciones para luego deducir conclusiones, que se llaman teoremas. Por lo tanto, el mayor cambio en este aspecto fue en el campo de la aritmética y el álgebra (Kline, 1976)

Se han seleccionado dos libros representativos de esta corriente que poseen un capítulo denominado Números Reales y están destinados al 4to año de bachillerato. Presentan en su desarrollo puntos en común, pero también diferencias, aspecto por el cual han sido seleccionados para esta revisión. Dado que se puede observar una epistemología dominante estructuralista, resulta interesante analizar cómo se enseñaba el número real en esta época en particular. De cada unidad de cada libro se analizan los contenidos desarrollados, la presentación de número real y el tipo de actividades que se propone al alumno.

En Lopez (1969), se puede identificar dentro del capítulo Números Reales diferentes secciones:

- *Revisión de los números racionales*. Comienza el capítulo definiendo la división entre números enteros de la siguiente manera: "$a: b = c \Leftrightarrow a = b. c$" (p. 16). Se aclaran los casos en donde $a = 0$ o $b = 0$. También, se observa que si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, la división es posible en el caso que $|a|$ es múltiplo de $|b|$. Se concluye que $17: 3$ no tiene solución en el conjunto de los números enteros y, por lo tanto, es necesario crear nuevos entes o números, denominados racionales, de la forma $\frac{a}{b}$ donde $b \neq 0$ y $a, b$ son números enteros. A continuación, se demuestra que entre dos racionales cualesquiera $\alpha$ y $\beta$ hay siempre otro número racional $\frac{\alpha+\beta}{2}$, es decir, la media de los números $\alpha$ y $\beta$. Se afirma que este número es racional dado que la suma de dos racionales es racional y la división entre un racional y 2 es un racional. Luego, se generaliza este proceso planteando que si $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$, entonces pueden encontrarse la media entre $\alpha$ y $\gamma$, y entre $\gamma$ y $\beta$. Siguiendo este razonamiento, se concluye la propiedad de la densidad: "entre dos números racionales distintos existen, siempre, infinitos números racionales" (p. 18). Se continúa con la representación de racionales en la recta, dividiendo la unidad en dos, tres y cuatro partes, ejemplificando cómo localizar los puntos que corresponden a fracciones de denominadores dos, tres o cuatro (Figura 2).

**Figura 2.** ***Representación de los números racionales en la recta***

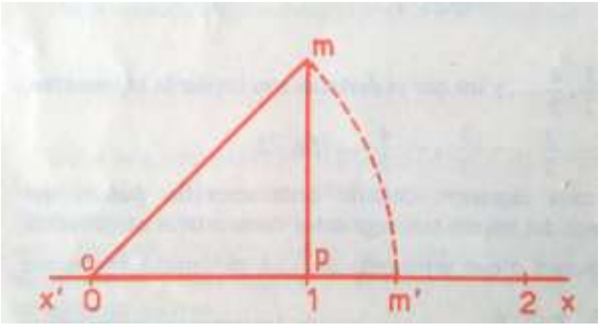


Tomado de "Matemática Moderna para 4° Año del Bachillerato Liceo de Señoritas y Escuelas de Comercio" (p. 19), por A. Lopez, 1969, Stella.

Los ejercicios de esta sección, consisten en calcular la media entre dos números racionales dados y hallar la relación entre los puntos representativos entre $2, \frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \frac{8}{4}\ y \frac{16}{8}$.

- *Existencia de los números irracionales*. Esta sección comienza con la localización sobre la recta numérica del punto $m'$, correspondiente a $\sqrt{2}$ (Figura 3).

**Figura 3.** ***Localización del punto correspondiente a $\sqrt{2}$ sobre la recta***




Tomado de "Matemática Moderna para 4° Año del Bachillerato Liceo de Señoritas y Escuelas de Comercio" (p. 20), por A. Lopez, 1969, Stella.

Mediante propiedades de triángulos, se concluye que $1 < \overline{om} < 2$. Aplicando el teorema de Pitágoras, se demuestra que $\overline{om} = \sqrt{2}$ y, por lo tanto, $1 < \sqrt{2} < 2$. Luego, se concluye que $\sqrt{2}$ no es un número entero. Se continúa con la demostración de que $\sqrt{2}$ no es un número racional, por el método de reducción al absurdo. Esto es, suponiendo que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, siendo $a$ y $b$ primos entre sí, se llega a una contradicción de los supuestos y, por lo tanto, $\sqrt{2}$ no puede ser un número racional. Se denomina, entonces, a $\sqrt{2}$ un número irracional. Se concluye que, de manera análoga, pueden ubicarse en la recta numérica a los puntos representativos de $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \ldots$ y los de sus respectivos opuestos afirmando que también se trata de números irracionales. Luego, se demuestra que los números de la forma $\pm\frac{m}{n}\sqrt{2}$ son números irracionales, siendo $\frac{m}{n}$ un número racional positivo. Nuevamente, se utiliza el método de reducción al absurdo y se supone que $\frac{m}{n}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, pero al multiplicarlo por $\frac{n}{m}$ (otro número racional) se obtiene por resultado el número irracional $\sqrt{2}$, aunque se sabe que el producto de dos racionales es igual a un número racional. Esta contradicción resulta de lo supuesto al comienzo, por lo cual $\frac{m}{n}\sqrt{2}$ es un número irracional. Por último, se pone en correspondencia biunívoca el conjunto de los números racionales con el conjunto formado por los números de la forma $\pm\frac{m}{n}\sqrt{2}$, siendo $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_0^+$, dejando en evidencia que si bien el conjunto de los números racionales es un conjunto denso en la recta numérica, sobre la recta hay muchísimos más puntos representativos de los números irracionales ya que son también irracionales los números de la forma $\pm\frac{m}{n}\sqrt{3}$, $\pm\frac{m}{n}\sqrt{5}$, $\pm\frac{m}{n}\sqrt{6}$, etc.

A continuación, se acota cada vez con mayor precisión el número $\sqrt{2}$ a partir de números racionales (Figura 4).

**Figura 4.** ***Sucesiones de racionales que acotan inferior y superiormente al número*** $\sqrt{2}$

$$
\begin{array}{lclcl}
1 & < & \sqrt{2} & < & 2 \\
1{,}4 & < & \sqrt{2} & < & 1{,}5 \\
1{,}41 & < & \sqrt{2} & < & 1{,}42 \\
1{,}414 & < & \sqrt{2} & < & 1{,}415 \\
1{,}4142 & < & \sqrt{2} & < & 1{,}4143 \\
\cdots & & \cdots & & \cdots \\
\cdots & & \cdots & & \cdots
\end{array}
$$

Tomado de "Matemática Moderna para 4° Año del Bachillerato Liceo de Señoritas y Escuelas de Comercio" (p. 24), por A. Lopez, 1969, Stella.

Se identifican dos sucesiones de números racionales (las columnas primera y tercera que se forman en las desigualdades de la Figura 4). La primera sucesión resulta creciente en el sentido positivo de la recta y está acotada superiormente por cualquier término de la segunda sucesión. En cambio, la segunda sucesión es decreciente en el sentido negativo de la recta numérica y la diferencia entre términos correspondientes de las dos sucesiones se hace cada vez más pequeña a medida que se avanza. Se concluye que estas dos sucesiones tienden a un mismo número que es $\sqrt{2}$. Se llama a ese número límite común de ambas sucesiones y se observa que ese límite no pertenece a ninguna de las dos sucesiones.

- *Números reales*. Se comienza definiendo los números reales de la siguiente manera: "con los números racionales y los irracionales formamos el conjunto de los números reales que designaremos con $\mathbb{R}$" (p. 27). Luego, se afirma que entre los puntos de la recta numérica y el conjunto de los números reales se establece una relación biunívoca, por lo cual, se expresa que el conjunto de los números reales es completo y, por esta propiedad, se designa a la recta numérica con el nombre de eje o recta real.

- *Operaciones con números reales*. Para la suma de números reales se definen las siguientes propiedades: es cerrada (si $\alpha$ y $\beta$ son números reales, $\alpha + \beta$ es también un número real), es uniforme (la suma de $\alpha$ y $\beta$ es única), es conmutativa, es asociativa, tiene elemento neutro (el 0, pues $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$), todo elemento $\alpha \in \mathbb{R}$ tiene inverso ($-\alpha$, pues $\alpha + (-\alpha) = 0$). Al elemento $-\alpha$ se le llama opuesto de $\alpha$. Luego, se define la resta entre $\alpha$ y $\beta$ como $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$, es decir, se suma al minuendo el opuesto del sustraendo. De manera análoga, se presentan propiedades de la multiplicación entre números reales (entre ellas la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición) y se define la división. Para la potenciación se realiza solo la observación de que todo lo estudiado para la potencia de base racional y exponente entero tiene validez para la potenciación de base real y exponente entero. A continuación, se ahonda en el estudio de la radicación y las propiedades de los radicales aritméticos, demostrando cada una de ellas. A partir de ejemplos, y utilizando las propiedades previamente demostradas, se exponen procedimientos para extraer factores fuera del signo radical, hallar la mínima expresión de un radical e introducir factores bajo el signo radical. Luego, se definen radicales semejantes para presentar diferentes casos de operaciones con radicales (adición, sustracción, multiplicación y división). Mediante un ejemplo, se explica racionalización de denominadores, dividiendo el análisis por casos. Por último, se define la potencia de exponente racional, demostrando propiedades (distributiva respecto a la multiplicación y la división, producto de potencias de igual base, cociente de potencias de igual base y potencia de potencia).

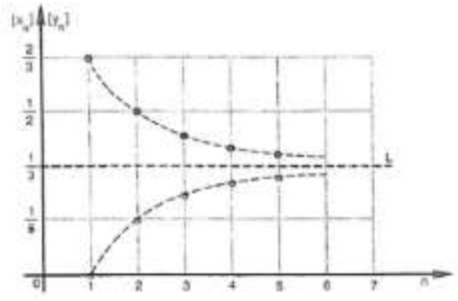
- *Ejercicios y problemas*. Los problemas son relativos a determinar si un número es racional o irracional, a calcular la media entre dos números racionales dados, a ubicar en la recta numérica los puntos que corresponden a números reales con raíces cuadradas y a operar con radicales (estos últimos tipos de ejercicios son los que predominan en las actividades). Los últimos dos ejercicios son de contexto geométrico, a diferencia de los anteriores que no tienen contexto, pero su objetivo es la operatoria entre radicales aritméticos.

En Vázquez de Tapia et al. (1983) se pueden identificar diferentes secciones dentro del capítulo Números Reales, detalladas a continuación:

- *Presentación intuitiva de los irracionales y los reales*. Se realiza primero la observación de que todo número racional puede ser expresado como un decimal periódico, dando varios ejemplos (considera período 0 o 9 en el caso de los enteros o decimales exactos). Luego, se construye a partir de una ley de formación expresiones decimales no periódicas. Se concluye que estos números no podrán expresarse como razón de enteros (ya que carecen de período) y, por lo tanto, se los denomina números irracionales (número de infinitas cifras decimales no periódicas). A continuación, se demuestra que $\sqrt{2}$ no es un número entero, ni un número racional (similar a lo expuesto en Lopez, 1969). Luego, se considera el conjunto de los números reales como $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ y, en consecuencia, todo número real es un número con infinitas cifras decimales periódicas o no periódicas. Los autores consideran a esta una idea intuitiva que se trata con mayor profundidad en las siguientes secciones. Los ejercicios de aplicación de esta sección consisten en escribir tres números decimales no periódicos y en demostrar que $\sqrt[3]{4}$ es un número irracional.

- *Los números reales definidos por clases de pares de sucesiones monótonas convergentes equivalentes*. Se comienza con un ejemplo de dos sucesiones, la primera monótona creciente y la segunda monótona decreciente, para las cuales cada término de la primera sucesión es menor que su correspondiente de la segunda sucesión y la diferencia entre dos términos correspondientes puede hacerse menor que cualquier número positivo $\varepsilon$, a partir de un cierto valor $n$ (Figura 5).

**Figura 5.** ***Ejemplo de sucesiones monótonas convergentes***



Tomado de “Matemática 4” (p. 46), por N. Vázquez de Tapia, A. Tapia de Bibiloni y C. Tapia, 1983, Ángel Estrada y Cía.

Luego, se denomina a cada par de sucesiones que cumplen con estas propiedades, monótonas convergentes. A continuación:

- Se denomina elemento frontera al valor $L$, que es mayor a todo elemento de la primera sucesión y menor que todo elemento de la segunda sucesión.

- Se enuncia (sin demostración) que el elemento frontera es único.

- Se muestra otro ejemplo de sucesiones monótonas convergentes, pero cuyo elemento frontera es un número irracional obtenido a partir de una ley de formación.

- Se definen como equivalentes a los dos pares de sucesiones monótonas convergentes que tienen el mismo elemento frontera, citando ejemplos. A partir de esta relación, se enuncia sin demostración, que esa relación es reflexiva, simétrica y transitiva (es de equivalencia).

- Se define un número real como la clase de equivalencia de pares de sucesiones monótonas convergentes (se identifica a cada clase de equivalencia con su elemento frontera).

Los ejercicios de aplicación de esta sección consisten en probar que dos sucesiones dadas son monótonas convergentes o en generar un par de sucesiones que lo sean.

- *El cuerpo de los reales*. Para esta sección, se vuelve a la definición intuitiva de números reales como $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$. Como el conjunto de los números reales está conformado por todos los números con infinitos decimales periódicos o no periódicos, los autores afirman que es natural generalizar las reglas de adición y multiplicación de los números decimales (ya que en la práctica se trabaja con aproximaciones de números irracionales). Se enuncia, entonces, que en $\mathbb{R}$ se cumplen las mismas propiedades para la adición y la multiplicación que en $\mathbb{Q}$ y, en consecuencia, el conjunto de los números reales tiene estructura de un cuerpo conmutativo con respecto a cada una de estas operaciones. Se continúa reconociendo un isomorfismo entre el conjunto $\mathbb{Q}$ y un subconjunto de $\mathbb{R}$, estableciendo una correspondencia entre cada número racional y un número real definido por la clase de pares de sucesiones monótonas convergentes que tengan como elemento frontera a dicho número racional. En este sentido, se afirma que el conjunto de los números reales es una ampliación de los números racionales.

- *Algunos números reales especiales*. En esta sección, se construyen pares de sucesiones monótonas convergentes que definen a los números $\sqrt{2}$, $\pi$ y $e$. En el caso de $\sqrt{2}$, se obtiene a partir de desigualdades de la potencia (por ejemplo, $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ pues $1{,}4^2 < 2 < 1,5^2$). Para el número $\pi$, se forma un par de sucesiones cuyos términos son los cocientes de los perímetros de los polígonos inscriptos y circunscriptos a una circunferencia, por el diámetro de la misma. Para el número $e$ (el número de Nepper), se considera el par de sucesiones $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ e $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ para demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = lim_{n\to\infty} y_n = e$.
- *Los reales en la recta numérica*. A partir de dos sucesiones monótonas convergentes $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, que definen a $\sqrt{2}$ (Figura 6), se introducen intervalos de la recta de la forma $[x_n, y_n]$, con $n \in \mathbb{N}$. Se denomina a estos intervalos, intervalos encajados y se observa que su amplitud puede hacerse tan pequeña como se quiera, eligiendo términos suficientemente avanzados en las sucesiones.

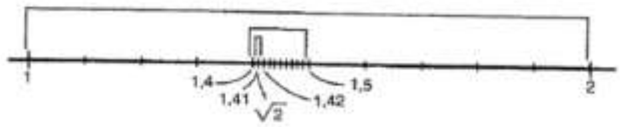
**Figura 6.** ***Sucesiones monótonas convergentes que definen a*** $\boldsymbol{\sqrt{2}}$

| $[x_n]$ | | $[y_n]$ |
|---|---|---|
| 1 | $< \sqrt{2} <$ | 2 |
| 1,4 | $< \sqrt{2} <$ | 1,5 |
| 1,41 | $< \sqrt{2} <$ | 1,42 |
| 1,414 | $< \sqrt{2} <$ | 1,415 |
| .......... | ........ | .......... |

Tomado de “Matemática 4” (p. 59), por N. Vázquez de Tapia, A. Tapia de Bibiloni y C. Tapia, 1983, Ángel Estrada y Cía.

Se observa que todos los puntos que representan a los términos de $\{x_n\}$ se encuentran a la izquierda de todos los puntos que representan a los términos de $\{y_n\}$ y que existe solo un punto que está a la derecha de todos los puntos de los primera sucesión y que está a la izquierda de todos los puntos de la segunda sucesión. Llama a este punto elemento frontera o de separación del encaje de intervalos. En el ejemplo dado, este punto representa a $\sqrt{2}$ (Figura 7).

**Figura 7.** ***Intervalos encajados***




Tomado de "Matemática 4" (p. 61), por N. Vázquez de Tapia, A. Tapia de Bibiloni y C. Tapia, 1983, Ángel Estrada y Cía.

Se concluye que los números racionales no cubren la recta, dado que existen puntos que se corresponden con números irracionales.

- *Propiedades de los números reales*. Se enuncian propiedades del conjunto de los números reales: $\mathbb{R}$ es un conjunto infinito, no tiene primero ni último elemento, es un conjunto totalmente ordenado por la relación $\leq$, es un conjunto denso (entre dos números reales existe siempre un número real), el conjunto de los números reales completa la recta (existe una biyección entre el conjunto de puntos de la recta y el conjunto de los números reales, esto es, $\mathbb{R}$ es un conjunto continuo).

  Los ejercicios de aplicación que se presentan a continuación, consisten en: encontrar los primeros términos de dos sucesiones monótonas convergentes cuyo valor frontera sea un número dado (racional o irracional), para luego representar sobre la recta los intervalos encajados correspondientes y el punto que representa la frontera; hallar valores comprendidos entre dos números irracionales o racionales; y dadas dos sucesiones, demostrar que son monótonas convergentes y hallar su valor frontera.

Se puede observar que, aunque ambas propuestas consideran una visión conjuntista de los números reales, cada una de ellas parte desde puntos de vista diferentes: a partir de su representación como punto de una recta o a partir de un par de sucesiones convergentes que tienen el mismo valor frontera (o punto frontera de intervalos encajados). Se evidencia una gran diferencia con respecto a las presentaciones de número real revisadas en los libros de texto actuales para educación secundaria, los cuales consideran al número real como la unión de racionales e irracionales. Existe en estos una simplificación en su conceptualización, no siendo definido verdaderamente.

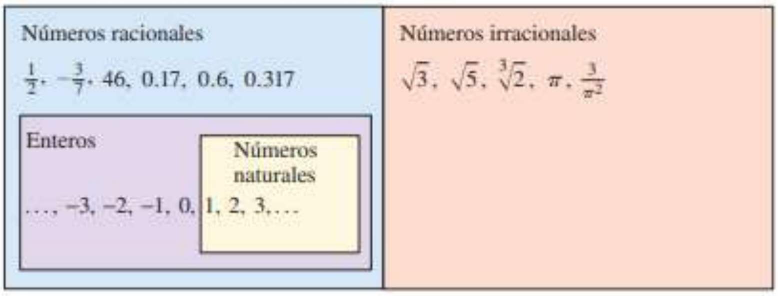
#### 1.1.2.3 Revisión de libros de texto de nivel superior para la enseñanza del número real

Se han seleccionado libros de texto para nivel superior, tradicionalmente utilizados en la formación de profesores y otros profesionales, que desarrollan el tema número real y que realizan presentaciones diferentes desde el punto de vista conceptual. A continuación, se presenta una descripción de los conceptos desarrollados en cada uno de ellos con el objetivo de identificar otras formas de presentar el número real en el aula (aunque sea de nivel superior, las propuestas didácticas de nivel secundario pueden estar influenciadas por aquellas que fueron parte de la formación de profesores).

En Stewart et al. (2012), se identifican las siguientes secciones que se detallan a continuación:

- *El sistema de los números reales, propiedades de las operaciones suma y producto*. Se introduce el conjunto de los números reales realizando la presentación de los diferentes tipos de números en el siguiente orden: naturales, enteros (consta de los números naturales, junto con sus negativos y el cero), racionales (números de la forma $\frac{r}{m}$, donde $r$ y $m$ son enteros con $m \neq 0$) y los números irracionales (aquellos que no pueden expresarse como fracción). Luego, presenta un esquema con el sistema de los números reales (Figura 8), ejemplificando cada tipo de número.

**Figura 8.** ***El sistema de los números reales***




Tomado "Precálculo. Matemáticas para el cálculo (6ª ed.)", (p. 2), por J. Stewart, L. Redlin y S. Watson, 2012, Cengage Learning.

Se afirma que puede probarse con diferentes grados de dificultad que $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\pi$ son números irracionales aunque no presenta ninguna de estas demostraciones.

En un costado de la página se observa el siguiente comentario, que hace referencia a situaciones en las cuales se pone en uso cada tipo de número:

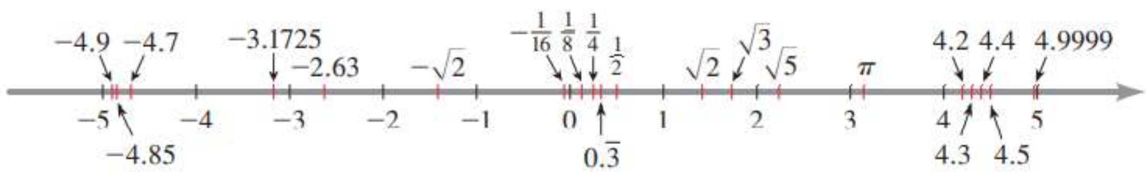
Los diferentes tipos de números reales fueron inventados para satisfacer necesidades específicas. Por ejemplo, los números naturales se necesitan para contar, los números negativos para describir una deuda o temperaturas bajo cero, los números racionales para conceptos como "medio galón de leche" y números irracionales para medir ciertas magnitudes, como la diagonal de un cuadrado. (p. 2)

El capítulo continúa con la representación decimal de números reales, afirmando que si un número es racional tiene una representación decimal periódica (por ejemplo, $\frac{1}{2} = 0{,}5\hat{0}$ o $\frac{2}{3} = 0{,}\hat{6}$). Luego, presenta sin demostración propiedades de los números reales.

- *La recta real*. En esta sección se introduce la representación de los números reales en la recta numérica. Se indica con una flecha la dirección positiva de la recta (hacia la derecha). Se elige un punto arbitrario O, llamado origen, que se corresponde con el número real 0. Luego, dada cualquier unidad de medida cada número positivo $x$ está representado por el punto sobre la recta a una distancia de

$x$ unidades a la derecha del origen, y cada número negativo $-x$ está representado por el punto a $x$ unidades a la izquierda del origen. El número asociado con el punto P se llama coordenada de P. Se denomina a la recta numérica construida de esta manera, recta real. No se profundiza en la localización de un punto que se corresponda con un número $x$, solo se ejemplifica mostrando el contenido de la Figura 9. Se aclara que a menudo se identifica al punto con su coordenada y se considera al número como un punto sobre la recta real.

**Figura 9.** ***Ejemplo de la representación de números reales en la recta numérica***




Tomado "Precálculo. Matemáticas para el cálculo (6ª ed.)", (p. 6), por J. Stewart, L. Redlin y S. Watson, 2012, Cengage Learning.

Se afirma que los números reales son ordenados, estableciendo que $a < b$ si $b - a > 0$ (geométricamente, $a$ se encuentra a la izquierda de $b$).

- *Conjuntos e intervalos.* Se define a los intervalos como conjuntos de números reales que se corresponden geométricamente con segmentos de recta. Luego, se presentan los distintos tipos de intervalos:

**Figura 10.** ***Definición de cada intervalo como conjunto y su representación gráfica***

| Notación | Descripción de conjunto | Gráfica |
|---|---|---|
| $(a, b)$ | $\{x \mid a < x < b\}$ | $a$ $b$ |
| $[a, b]$ | $\{x \mid a \le x \le b\}$ | $a$ $b$ |
| $[a, b)$ | $\{x \mid a \le x < b\}$ | $a$ $b$ |
| $(a, b]$ | $\{x \mid a < x \le b\}$ | $a$ $b$ |
| $(a, \infty)$ | $\{x \mid a < x\}$ | $a$ |
| $[a, \infty)$ | $\{x \mid a \le x\}$ | $a$ |
| $(-\infty, b)$ | $\{x \mid x < b\}$ | $b$ |
| $(-\infty, b]$ | $\{x \mid x \le b\}$ | $b$ |
| $(-\infty, \infty)$ | $\mathbb{R}$ (conjunto de todos los números reales) | |

Tomado de "Precálculo. Matemáticas para el cálculo (6ª ed.)", (p. 7), por J. Stewart, L. Redlin y S. Watson, 2012, Cengage Learning.

No se aclara que cuando un intervalo no tiene valor extremo a la derecha o a la izquierda (intervalos infinitos), su presentación es una semirrecta y no un segmento.

- *Valor absoluto y distancia.* Se define el valor absoluto de un número $a$ como:

$$|a| = \begin{cases} a \; si \; a \geq 0 \\ -a \; si \; a < 0 \end{cases}$$

  Se agrega que el valor absoluto de $a$ representa la distancia de $a$ al 0 en la recta real. Luego, se define la distancia entre los puntos $a$ y $b$ como $d(a,b) = |a-b|$. Por último, se presentan propiedades del valor absoluto sin demostración.

En este capítulo, se puede observar una presentación del número real como un conjunto que surge de la unión de racionales e irracionales. También su representación como punto de una recta, al hacer corresponder cada número real con un punto de la recta y, recíprocamente, cada punto de la recta con un número real.

En Apostol (1984) se hace explícito que hay muchos métodos para introducir el sistema de número reales y que el punto de vista adoptado no es constructivo, sino que se inicia el proceso en un punto avanzado. Se detallan a continuación los principales aspectos del número real desarrollados en el capítulo:

- *Axiomas de cuerpo.* Se considera a los números reales como conceptos primitivos que satisfacen un cierto número de propiedades que se consideran axiomas. Junto con el conjunto de los números reales se supone la existencia de las operaciones adición (+) y producto (.). Entonces para dos elementos cualesquiera de los reales $x$ e $y$, se tiene que $x + y$ y $x.y$ (o $xy$) son números reales. A los signos + y . no se les asigna otro significado especial que el precisado en los siguientes axiomas:

  Axioma 1. PROPIEDAD CONMUTATIVA. $x + y = y + x$,

  $xy = yx$.

  Axioma 2. PROPIEDAD ASOCIATIVA. $(x + y) + z = x + (y + z)$;

  $(xy)z = x(yz)$.

  Axioma 3. PROPIEDAD DISTRIBUTIVA. $x(y + z) = xy + xz$.

  Axioma 4. EXISTENCIA DE ELEMENTOS NEUTROS. Existen dos números reales distintos, que se indican por 0 y 1 tales que para cada número real $x$ se tiene:

  $0 + x = x + 0 = x$ y $x1 = 1x = x$.

  Axioma 5. EXISTENCIA DE NEGATIVOS. Para cada número real $x$ existe un número real $y$ tal que $x + y = y + x = 0$.

  Axioma 6. EXISTENCIA DEL RECÍPROCO. Para cada número real $x \neq 0$ existe un número real $y$ tal que $xy = yx = 1$.

  De los axiomas anteriores se puede deducir todas las leyes usuales del Álgebra elemental. (p. 22)

Además, pueden considerarse tres axiomas que refieren a la ordenación de los números reales. Suponiendo que existe un subconjunto $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$, llamado conjunto de los números positivos, que satisfacen los siguientes axiomas:

"Axioma 7. Si x e y pertenecen a $\mathbb{R}^+$, lo mismo ocurre con $x + y$ y $xy$.

Axioma 8. Para todo real $x \neq 0$, o $x \in \mathbb{R}^+$ o $-x \in \mathbb{R}^+$ pero no ambos.

Axioma 9. $0 \notin \mathbb{R}^+$" (p. 24).

A partir de aquí, se definen las relaciones de desigualdad entre números reales y se pueden demostrar propiedades como la de tricotomía, transitiva, uniforme, etc.

Por último, debe tenerse en cuenta un axioma necesario para establecer la existencia del número irracional: el de completitud de los números reales.

"Axioma 10. Todo conjunto no vacío S de números reales acotado superiormente posee extremo superior; esto es, existe un número real B tal que B=sup S" (p. 31).

Luego, se presentan con demostración propiedades importantes del sistema de los números reales que se desprenden del axioma del extremo superior, como la propiedad arquimediana, la existencia de raíces cuadradas de los números reales no negativos y las raíces de orden superior.

- *Interpretación geométrica de los números reales como puntos de una recta*. Se inicia esta sección eligiendo un punto de la recta para representar al 0 y otro punto a la derecha del 0 para representar al 1, indicando que esta elección determina la escala. Luego, se agrega que si se adopta un conjunto de axiomas apropiados para la geometría euclidiana, se cumple que cada número real corresponde a un punto de la recta y viceversa.
- *Representación de los números reales por medio de decimales*. La sección comienza definiendo la representación decimal finita de ciertos números reales (aquellos que admiten tal representación):

> Un número real de la forma
>
> (1.16) $$r = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n},$$
>
> donde $a_0$ es un entero no negativo y $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son enteros que satisfacen $0 \leq a_i \leq 9$, se escribe corrientemente en la forma más breve siguiente:
>
> $r = a_0.a_1 a_2 \ldots a_n$.
>
> Se dice que ésta es la representación decimal finita de r. (p. 37)

Luego, se afirma que los números reales de esta clase son necesariamente racionales y pueden expresarse como $r = \frac{a}{10^n}$ donde $a$ es un entero (por ejemplo,

$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0{,}5$ o $\frac{1}{50} = \frac{2}{100} = 0{,}02$). Sin embargo, se hace notar que no todos los números racionales pueden expresarse de esta manera. Por ejemplo, $\frac{1}{3} \neq \frac{a}{10^n}, \forall a \in \mathbb{Z}$ puesto que $3a \neq 10^n, \forall n \in \mathbb{N}$ ya que 3 no es divisor de ninguna potencia de 10. A continuación se generaliza la representación decimal para cualquier número real:

> No obstante, cualquier número real $x > 0$ puede aproximarse con un error tan pequeño como se desee por medio de una suma de la forma (1.16) si se toma $n$ suficientemente grande. La razón de ello puede verse mediante el siguiente argumento geométrico: si $x$ no es entero, $x$ está comprendido entre dos números enteros consecutivos, es decir, $a_0 < x < a_0 + 1$. El segmento que une $a_0$ y $a_0 + 1$ puede subdividirse en 10 partes iguales. Si $x$ no coincide con uno de estos puntos de subdivisión, $x$ debe estar comprendido entre dos de ellos. Esto da lugar a un par de desigualdades de la forma:
>
> $$a_0 + \frac{a_1}{10} < x < a_0 + \frac{a_1 + 1}{10},$$
>
> donde $a_1$ es un entero ($0 \leq a_1 \leq 9$). Se divide ahora, el segmento que une $a_0 + \frac{a_1}{10}$ y $a_0 + \frac{a_1+1}{10}$ en diez partes iguales (cada una de longitud $10^{-2}$) y se continúa el proceso. Si después de un número finito de subdivisiones, uno de los puntos coincide con $x$, $x$ es un número de la forma (1.16). Si no es así, el proceso continúa indefinidamente y se engendra un conjunto de infinitos enteros $a_1, a_2, a_3$ .... En este caso se dice que $x$ tiene la representación decimal infinita
>
> $$x = a_0.\, a_1 a_2 a_3 \text{ ....}$$ (p.38)

Se puede observar que el capítulo expone una definición de número real como un cuerpo que satisface ciertos axiomas, como puntos de una recta y como el resultado de un proceso finito o infinito que resulta en una suma de finitos o infinitos términos (representación decimal).

En Spivak (1992) se reconocen desarrollos distintos del número real, que se exponen a continuación:

- *Propiedades básicas de los números*. El capítulo comienza enunciando doce propiedades para números (aunque no se especifica qué tipo de números). El autor hace explícita su intención: la de sintetizar conocimientos ya adquiridos en un número reducido de propiedades sencillas e inmediatas de los números. Estas propiedades se refieren a las operaciones fundamentales suma y multiplicación. Se enuncian a continuación (se considera $a, b$ y $c$ números cualesquiera):

  (P1) (Ley asociativa para la suma) $(a + b) + c = a + (b + c)$.

  (P2) (Existencia de una identidad para la suma) $a + 0 = 0 + a = a$.

  (P3) (Existencia de inversos para la suma) $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

  (P4) (Ley conmutativa para la suma) $a + b = b + a$.

  (P5) (Ley asociativa para la multiplicación) $a.(b.c) = (a.b).c$.

(P6) (Existencia de una identidad para la multiplicación)

$a.1 = 1.a = a$; $1 \neq 0$.

(P7) (Existencia de inversos para la multiplicación)

$a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$, para $a \neq 0$.

(P8) (Ley conmutativa para la multiplicación) $a.b = b.a$.

(P9) (Ley distributiva) $a.(b + c) = a.b + a.c$. (p.11)

A continuación se enuncian propiedades relativas a desigualdades:

> En realidad, conviene considerar el conjunto de todos los números positivos, representado por $P$, como concepto básico y expresar todas las propiedades en función de $P$:
>
> (P10) (Ley de tricotomía). Para todo número $a$, se cumple una y sólo una de las siguientes igualdades:
>
> i) $a = 0$.
>
> ii) $a$ pertenece al conjunto $P$.
>
> iii) $-a$ pertenece al conjunto $P$.
>
> (P11) (La suma es cerrada) Si $a$ y $b$ pertenecen a $P$, entonces $a + b$ pertenece a $P$.
>
> (P12) (La multiplicación es cerrada) Si $a$ y $b$ pertenecen a $P$, entonces $a.b$ pertenece a $P$. (p.12)

Se reconocen, luego, diferentes clases de números comenzando por los números naturales y observando que este conjunto no cumple con propiedades como (P2) y (P3) (0 y los opuestos de los números naturales no están contenidos en este conjunto). Para remediar este problema, se extiende este sistema al conjunto de los números enteros, pero se observa que (P7) no se cumple (por ejemplo, el inverso de 3 es $\frac{1}{3}$ y no es un número entero). Se considera, entonces, un sistema más amplio: el de los números racionales. Si bien este conjunto verifica todas las propiedades de (P1) a (P12), existe un conjunto más amplio que también las verifica y es el conjunto de los números reales. Este sistema de números reales contiene a los números racionales y a los números irracionales (aquellos que pueden ser representados por decimales infinitos). Luego, se realiza una demostración de que $\sqrt{2}$ no es racional. Sin embargo, no se ha demostrado su existencia. Y su demostración no puede basarse solamente en las propiedades (P1)-(P12) puesto que, como (P1)-(P12) también se cumplen para los racionales, los mismos argumentos podrían utilizarse para demostrar que $\sqrt{2}$ es racional (contradiciendo lo que ya se demostró). Entonces, habrá que encontrar más propiedades que distingan a los números reales de los números racionales. Por lo cual, se propone al lector adentrarse en el estudio de los números reales.

- *Cuerpos*. El desarrollo de esta sección es similar a la de Apostol (1984), por lo que no se expone aquí con el fin de no repetir información.

- *Construcción de números reales.* Aunque no se realiza una construcción de los conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$, se explicita que es posible y se supone la existencia de $\mathbb{Q}$. A partir de allí, se propone demostrar la existencia de un cuerpo ordenado completo. Para cumplir esta tarea, se desarrolla la descripción de sus elementos, que verifiquen las condiciones que lo definen como tal. Luego de hacer explícitas las suposiciones, se define número real de la siguiente manera:

  > Un número real es un conjunto α, de números racionales, con las cuatro siguientes propiedades:
  >
  > 1) Si $x$ está en α e $y$ es un número racional con $y < x$, entonces $y$ está también en α.
  >
  > 2) $\alpha \neq \emptyset$
  >
  > 3) $\alpha \neq \mathbb{Q}$
  >
  > 4) No existe ningún elemento máximo en α; dicho de otro modo, si $x$ está en α, entonces existe algún $y$ en α con $y > x$.
  >
  > El conjunto de todos los números reales se designa por $\mathbb{R}$. (p. 810)

  Luego, se da un ejemplo que clarifique la intencionalidad de esta definición:

  $$\alpha = \{x \in \mathbb{Q}: x < 0 \vee\ x^2 < 2\}$$

  En este caso α es un número real que se denomina $\sqrt{2}$. Puede comprobarse que este conjunto satisface las cuatro propiedades de la definición. Se observa que un número real es un conjunto de número racionales. Esto significa que un número racional no es un número real. Sin embargo, todo número racional $x$ puede ponerse en correspondencia con un número real a partir de su identificación con el siguiente conjunto: $\{y \in \mathbb{Q}: y < x\}$. Luego, se define la suma, el producto, la relación < entre números reales y el 0. Además, se demuestran la propiedad conmutativa, asociativa, distributiva, existencia del elemento neutro, del elemento recíproco, la existencia de cota superior mínima para un conjunto acotado superiormente y propiedades referidas a desigualdades.

- *Unicidad de los números reales.* En esta sección, se presenta la definición de isomorfismo entre cuerpos. Luego, se enuncia y se demuestra un teorema que afirma lo siguiente: "Si $F$ es un cuerpo ordenado completo, entonces $F$ es isomorfo a $\mathbb{R}$" (p. 831). Se aclara que, como dos cuerpos isomorfos pueden considerarse prácticamente idénticos (ya que las propiedades que se cumplan en uno serán cumplidas automáticamente en el otro), a partir de este teorema queda demostrado que el cuerpo ordenado de los números reales es único.

Se puede observar una definición de número real o bien, como un elemento de un cuerpo que cumple ciertas propiedades o axiomas, o bien como siendo ese número real un subconjunto de números racionales (cortadura de Dedekind).

En Rey Pastor et al. (1969), se desarrolla el número real desde distintos aspectos detallados a continuación:

- *Segmentos conmensurables e inconmensurables.* Se define primero la densidad de puntos racionales en la recta: "Se ha visto que por pequeña que sea la diferencia entre dos números racionales $a$ y $b$, $a < b$, existen infinitos números racionales intermedios; por ejemplo: $a + v\frac{b-a}{2^n}, 0 < v < 2^n, n = 1,2,3, \ldots$" (p. 93). Luego, se menciona una reseña histórica del descubrimiento de las magnitudes inconmensurables atribuido a los pitagóricos. Se continúa con la demostración de que $\sqrt{2}$ es irracional (a partir del método de reducción al absurdo, se prueba que no puede escribirse como fracción) y se lo representa en la recta al construir un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1 unidad y, por consiguiente, su hipotenusa mide $\sqrt{2}$. Se traslada la medida de este segmento sobre la recta numérica para mostrar que no todo punto sobre ella es racional. Se mencionan casos similares al dado, que surgen al determinar la longitud $\sqrt{3}$ de la diagonal de un cubo cuya arista mide 1, o al hallar la longitud del lado de un cubo cuyo volumen es 2 (que mide $\sqrt[3]{2}$). Se afirma que estos resultados son casos particulares del siguiente teorema: "Si $p(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n$ es un polinomio en el que el coeficiente del término de mayor grado es uno, y todos los demás coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son enteros, entonces la ecuación $p(x) = 0$ no tiene raíces fraccionarias (racionales no enteras)" (p. 94). Se ejemplifica el teorema dando la ecuación polinómica $x^2 - 2 = 0$, cuyas raíces no son racionales. Sin embargo, existen números racionales $x$ que aproximan a cero el primer miembro de la ecuación tanto como se quiera. El autor justifica la introducción de los números irracionales, a partir de la posibilidad de ir aproximando más y más, con números racionales, las soluciones de las ecuaciones de este tipo. Por último, se introduce el número real expresando: "los números racionales, ampliados con los irracionales (no expresables como razón de enteros), formarán el campo de los números reales" (p. 95).

- *Sucesiones.* En este apartado se precisa el concepto de sucesión y de límite de una sucesión. Se define una sucesión "…como un conjunto infinito, cuyos elementos repetidos o no, están en correspondencia con los números naturales" (p. 95). Luego, se presentan varios ejemplos y se define sucesión convergente:

> En general, la sucesión será convergente hacia $a$:
>
> $$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$
>
> cuando para cada número $\epsilon > 0$, tan pequeño como se quiera, existe un número natural $N = N(\epsilon)$, tal que $|a_n - a| < \epsilon$ para todo $n > N$. (p. 96)

Por último, se define sucesión monótona creciente y monótona decreciente.

- *Aproximaciones decimales y su generalización.* En este apartado, se observa que para ocupar la recta mediante un conjunto denso de puntos, no es necesario considerar todos los puntos racionales, sino que basta tomar aquellos cuyo denominador es una potencia de 10 (fracciones decimales). Luego, se introduce la representación decimal de un número racional: "El número $N$ representado en cifras decimales por $g.a_1a_2 \dots a_n$ tiene la forma:

$$N = g + a_1.10^{-1} + a_2.10^{-2} + \cdots + a_n.10^{-n}\text{" (p. 97).}$$

A continuación, se aclara que no toda fracción encuentra su expresión como fracción decimal. Es el caso de fracciones irreducibles cuyo denominador contenga factores primos distintos de 2 y 5. Se ejemplifica el caso con la fracción $\frac{2}{11}$, observando que no puede ser decimal dado que implicaría que:

$$\frac{2}{11} = \frac{s}{10^n} \Rightarrow 2.10^n = 11s,$$

siendo $s$ un número entero, lo cual no es posible dado que el primer miembro no posee el factor primo 11. Entonces, se aproxima por defecto y por exceso el desarrollo decimal de $\frac{2}{11}$ (Figura 11).

**Figura 11.** ***Acotación por defecto y por exceso de*** $\mathbf{\frac{2}{11}}$

$$\begin{gathered} 0 < 2/11 < 1 \\ 0{,}1 < 2/11 < 0{,}2 \\ 0{,}18 < 2/11 < 0{,}19 \\ 0{,}181 < 2/11 < 0{,}182 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered}$$

Tomado de "Análisis Matemático Volumen I.", (p. 97), por J. Rey Pastor, P. Calleja y C. Trejo C, 1969, Kapeluz.

Se observa que los miembros extremos de estas desigualdades, determinan una sucesión de intervalos encajados cuya amplitud sucesiva $(1, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \dots)$ es tan pequeña como se quiera y acota el error cometido por la aproximación respectiva. Luego, para la sucesión creciente (determinada por el extremo inferior de los intervalos encajados), resulta que la cifra decimal que está en cualquier posición impar es 1 y que la cifra decimal que está en cualquier lugar par es 2, es decir, que la expresión decimal de $\frac{2}{11}$ es periódica. Se generaliza este resultado, afirmando que "la expresión decimal de cualquier número racional que no sea fracción decimal es periódica. Recíprocamente, toda expresión decimal periódica indefinida representa (converge hacia) un número racional" (p.98). Se da una demostración de esta propiedad. Se realiza un desarrollo similar para determinar aproximaciones decimales por exceso y por defecto del número $\sqrt{2}$, a partir de la ecuación $x^2 = 2$. Para esto, se acota el número 2 con los cuadrados de expresiones decimales (Figura 12).

**Figura 12.** ***Acotación por exceso y por defecto de $\sqrt{2}$, a partir de la ecuación $x^2 = 2$***

$$
\begin{array}{rlr}
1^2 = & 1 < 2 < & 2^2 = 4 \\
(1{,}4)^2 = & 1{,}96 < 2 < & (1{,}5)^2 = 2{,}25 \\
(1{,}41)^2 = & 1{,}9881 < 2 < & (1{,}42)^2 = 2{,}0264 \\
(1.414)^2 = & 1{,}999396 < 2 < & (1{,}415)^2 = 2{,}00225 \\
(1{,}4142)^2 = & 1{,}99996164 < 2 < & (1{,}4143)^2 = 2{,}00024449, \text{ etc.}
\end{array}
$$

Tomado de "Análisis Matemático Volumen I.", (p. 98), por J. Rey Pastor, P. Calleja y C. Trejo C, 1969, Kapeluz.

A partir de aquí, se sugiere la definición de número:

> "Número" es una expresión decimal indefinida, pudiéndose considerar la fracción decimal como caso particular de expresión periódica que acaba en …0… o en …9… (0,25000…=0,24999…). Entonces, los números racionales resultan las expresiones decimales periódicas, y los números irracionales, las expresiones decimales aperiódicas. (p. 99)

Se agrega que este concepto fue el aceptado hasta mediados del siglo XIX. Se hace la aclaración de que el sistema decimal de numeración podría ser reemplazado por otro y, por ende, la definición de número real debe ser independiente de su representación. Por lo tanto, es necesario dar una definición de número por abstracción, para la cual la relación de equivalencia quede establecida de forma precisa. Además, se deben definir las operaciones fundamentales y, para dichas operaciones, se debe poder demostrar el cumplimiento de las leyes formales de cálculo.

- *Definición de número real por sucesiones de intervalos encajados.* Se presenta la siguiente definición:

> Llamamos monótonas contiguas a dos sucesiones indefinidas tales que:
>
> 1° La sucesión indefinida $a_1, a_2, a_3, \dots, a_i, \dots$, es monótona creciente, y la $a_1', a_2', a_3', \dots, a_i', \dots$, es monótona decreciente; es decir
>
> $$\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_i \leq \cdots \\ a_1' \geq a_2' \geq a_3' \geq \cdots \geq a_i' \geq \cdots \end{cases}$$
>
> 2° Todo número $a_i$ de la primera es menor que su correspondiente de la segunda, es decir: $a_i < a_i'$.
>
> 3° La diferencia $a_i' - a_i$ entre dos términos correspondientes llega a ser menor que cualquier número positivo $\epsilon$, desde un valor de $i$ en adelante. (p. 99)

En este apartado se generaliza lo observado en la sección anterior, puesto que las condiciones 1 y 2 plantean la existencia de intervalos encajados $J_i$, y la condición 3 determina que la amplitud de estos intervalos puede hacerse tan pequeña como se quiera para $i$ suficientemente grande. Se dice que el conjunto lineal de puntos $a_i$ es contiguo al de los $a_i'$, por quedar todos los puntos del primer conjunto a la izquierda de los del segundo y existir pares de elementos de ambos conjuntos tan próximos como se quiera. Se indica al encaje de intervalos de la siguiente manera: $\{a_i; a_i'\}$. Luego, se denomina elemento de separación o elemento frontera del encaje de intervalos, a todo número que sea igual o mayor que cada uno de los números $a_i$, e igual o menor que cada uno de los $a_i{}'$. Se argumenta que existe a lo sumo un número racional $\alpha$ que sea frontera de $\{a_i, a_i'\}$, pues si existiesen dos $\alpha_1$ y $\alpha_2$, no podría ser $a_i' - a_i$ menor que $|\alpha_1 - \alpha_2|$, contradiciendo la condición 3. Se considera la posibilidad de que no exista un punto frontera racional, por lo que se presenta la siguiente definición de número real (creando el número irracional):

> Un par de sucesiones monótonas contiguas de números racionales definen un número real, $\alpha = \{a_i, a_i{}'\}$, con la condición de que: $\{a_i; a_i'\} = \{b_i, b_i'\}$, si $a_i \leq b_j'$, $b_i \leq a_j'$, para cualquier par de subíndices $i, j$. (p. 100)

Lo que se introduce es una relación de equivalencia entre pares de sucesiones monótonas contiguas, para definir a un número real como la clase de equivalencia a partir de esa relación. En síntesis, se establece la igualdad entre dos números reales $\alpha$ y $\beta$ siendo que cualquier aproximación por defecto de $\alpha$ o $\beta$ no supere a ninguna aproximación por exceso de $\beta$ o $\alpha$, respectivamente.

Luego, se enuncia el postulado geométrico de Cantor, que corresponde a esta definición: "Dada una sucesión de intervalos encajados, $J_i = [a_i, a_i']$, existe siempre un punto $\alpha$ perteneciente a todos ellos" (p.101). Este postulado, se denomina continuidad de la recta y permite dar la representación geométrica del número real $\{a_i, a_i'\}$. A continuación, se define al cero como el número real cuyas aproximaciones por defecto nunca son positivas y las aproximaciones por exceso nunca son negativas.

- *Operaciones fundamentales y desigualdad entre números*. En este apartado, se definen las operaciones adición, sustracción, multiplicación y división  y la relación de desigualdad de números reales a partir de la definición dada. Se establece además, un isomorfismo entre los números racionales y los números reales con frontera racional, y en este sentido, se dice que los número racionales son un caso particular de los números reales.
- *Clases contiguas y cortaduras de Dedekind*. Esta sección comienza con la siguiente definición:

> Se llaman, en general, clases contiguas a dos conjuntos no vacíos, $A$ y $A'$, de números que cumplan las condiciones:
>
> 1°) Ordenación: todo número $a \in A$ es menor que todo número $a' \in A'$.
>
> 2°) Contigüidad: Para cada $\epsilon > 0$ existe un par de números $a \in A$ y $a' \in A'$, tales que $a' - a < \epsilon$. (p. 105)

Luego, se explicita que un ejemplo de clases contiguas en el campo racional es un par de sucesiones monótonas contiguas. Esta definición puede modificarse para así obtener lo que se denomina una cortadura en el campo racional, ampliando las condiciones anteriores de la siguiente manera:

> …
>
> 3°) todo número menor que un número de la clase A o clase inferior, pertenece a esta clase;
>
> 4°) todo número mayor que un número de la clase A' o clase superior, pertenece a esta clase;
>
> …. (p. 105)

Se establece una relación entre la definición de número real como sucesión de intervalos encajados y la definición de clases contiguas de la siguiente manera:

> Una sucesión de intervalos encajados determina siempre una cortadura, mediante la aplicación de estas dos condiciones. Recíprocamente, dada una cortadura $\{A, A'\}$, podemos siempre determinar de infinitas maneras pares de sucesiones monótonas contiguas tales que sus aproximaciones por defecto pertenezcan a la clase inferior $A$, y sus aproximaciones por exceso a la clase superior $A'$. (p. 105)

A continuación, se establece cuándo una cortadura define a un número irracional:

> 1°) *Existe un número racional no clasificado* $\alpha$. Entonces, los números de la clase inferior son los números menores que $\alpha$, y los números de la clase superior, los mayores que $\alpha$. El número $\alpha$ determina la cortadura, y recíprocamente, la cortadura define $\alpha$.
>
> …
>
> 4°) Todos los número racionales quedan clasificados, sin que la clase inferior tenga máximo ni la clase superior mínimo. Entonces la cortadura define un número irracional $\alpha$, que resulta mayor que todos los números de la clase inferior y menor que todos los números de la clase superior. (p. 106)

El propio autor (Rey Pastor et al., 1969) realiza una referencia histórica respecto a la teoría aquí presentada: Dedekind definió el número real mediante cortaduras en 1872, mientras que las clases contiguas fueron introducidas por Capelli en 1897. Pero existe otro método para introducir los números reales a partir de series de Cauchy, desarrollado en 1872 por Méray y Cantor, y que a partir de aportes de Lipschitz, Arzelà y Bachmann, fue evolucionando hasta ser el de las dos sucesiones monótonas contiguas expuesta por los autores del libro. Interesa señalar esta referencia dado que estas teorías serán retomadas en el análisis histórico-epistemológico del número real, ubicado dentro del Capítulo N° 2.

La sección continúa definiendo la desigualdad, la suma y la multiplicación de números reales a partir de la definición de cortadura, haciendo explícito que pueden demostrarse todas las leyes formales. También, se afirma que puede probarse que el sistema de los números reales definido mediante cortaduras es isomorfo al definido por sucesiones de intervalos encajados. De esta manera, es posible decir que todos estos sistemas corresponden a un concepto de número real que es, en este sentido, único.

- *Conjuntos lineales: intervalos.* Este apartado comienza señalando que los conjuntos de números reales se llaman lineales por la correspondencia biunívoca que se puede establecer entre los puntos de una línea recta y los números reales, una vez fijado un sistema de abscisas (es decir, un punto origen O, un punto unidad U, que determinan la unidad de medida, y el sentido positivo sobre la recta). Se enuncia el principio fundamental de la geometría analítica: "cada punto de la recta tiene una abscisa real, y a cada abscisa real corresponde un punto" (p. 108). Se define en esta sección intervalo cerrado, intervalo abierto, distancia entre dos puntos, intervalos infinitos, entorno de un punto (y, junto con este, entorno a la izquierda y entorno a la derecha de un punto).

Puede observarse en el desarrollo del contenido de este libro, cierta similitud con lo expuesto en Vázquez de Tapia et al. (1983), puesto que uno de sus autores (Julio Rey Pastor, español y nacionalizado argentino) fue el introductor de la matemática moderna en nuestro país. Sin embargo, la precisión en las definiciones y el desarrollo de la teoría, así como las referencias históricas que se realizan en la introducción de nuevos conceptos, hacen enriquecer la búsqueda de diferentes formas de conceptualizar el número real.

## *1.2 PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN Y OBJETIVOS*

### 1.2.1 Preguntas de investigación

Con este recorrido sobre los libros de texto para la enseñanza del número real en educación secundaria se puede advertir la gran distancia que existe entre la forma en que se plantea la enseñanza del número real actualmente y aquella en que se lo enseñaba hace unas décadas atrás. Como se ha visto en la introducción, con el fracaso de la Matemática Moderna se ha perdido rigurosidad en la enseñanza de las teorías matemáticas y, en el caso del número real, ha traído aparejado una simplificación de su definición al punto de no ser una verdadera construcción del concepto. Sin embargo, se aprecia la gran capacidad que tienen los docentes para transformar sus prácticas en forma directa al tener la posibilidad de formarse permanentemente y acceder a otra bibliografía que permita profundizar los conocimientos ya adquiridos acerca del número real (como los libros correspondientes al nivel superior analizados). Se considera que las concepciones que posean respecto al número real, ya sean sus conocimientos así como las decisiones que tomen en cuanto a sus propuestas didácticas y las tareas que propongan a sus alumnos, determinarán la forma en que se enseñe este conocimiento. A su vez, estas concepciones estarán atravesadas por el dME dado que los consensos en torno a la matemática escolar siempre están presentes en la práctica docente ya sean de forma consciente o inconsciente. Por lo cual, reconocerlo en la enseñanza del número real permitirá comprender de mejor manera las concepciones que poseen los profesores de matemática en relación a este concepto.

Por todo lo expuesto anteriormente, se plantean las siguientes preguntas que guiarán toda la investigación:

¿Cuáles son las concepciones que poseen los profesores de matemática sobre los números reales?

¿Cuáles son las tareas que presentan los profesores de matemática para propiciar el uso del número real en el aula?

¿Cuáles son las características específicas del discurso Matemático Escolar en torno al concepto de número real?

### 1.2.2 Objetivos

Se plantea para este trabajo de investigación el siguiente objetivo general:

- Describir las concepciones que poseen los profesores de matemática sobre los números reales.

Y los siguientes objetivos específicos:

- Identificar las tareas que proponen los profesores de matemática, para propiciar el uso del número real en el aula.

- Reconocer las características específicas del discurso Matemático Escolar en torno al concepto de número real (discurso numérico escolar).

## *1.3 PERSPECTIVA METODOLÓGICA*

Para esta investigación se ha planteado una metodología cualitativa, descriptiva y transversal. El diseño es un estudio de caso intrínseco dado que interesa investigar la enseñanza del número real en la escuela secundaria por parte de profesores de Matemática en toda su particularidad y su carácter ordinario. Para llevarlo a cabo se han seleccionado tres docentes con título de Profesor/a en Matemática (o equivalente), en ejercicio profesional, que trabajan enseñando números reales en alguna escuela secundaria del departamento Rosario, Santa Fe, Argentina. Atendiendo a los conocimientos que un docente posea y a las decisiones que pueda tomar en cuanto a sus propuestas didácticas y las tareas que propongan a sus alumnos, los profesores que conforman este estudio han sido escogidos de manera que contemple variedad precisamente respecto a estas características, esto es, la formación y la trayectoria profesional de los mismos (tabla 1).

**Tabla 1. Docentes participantes de la investigación**

| | |
|---|---|
| Docente A | Egresada de un profesorado terciario de la pcia. de Santa Fe. Ejerce la docencia en escuelas secundarias del dpto. Rosario. |

| | |
|---|---|
| Docente B | Egresada de un profesorado universitario. Ejerce la docencia en escuelas secundarias del dpto. Rosario y en nivel universitario. |
| Docente C | Egresada de un profesorado universitario. Ejerce la docencia en escuelas secundarias del dpto. Rosario y en nivel universitario. Realiza investigación en el ámbito universitario. |

Uno de los instrumentos utilizados para la recolección de los datos es la observación de clases (de carácter no participante), durante el desarrollo de la unidad Números Reales para reconocer indicios de un discurso numérico escolar generalizado. Otro instrumento es el material didáctico de clase, que tiene por objetivo indagar los tipos de tareas que propicien el uso del número real en el aula. Además, se han llevado a cabo dos sesiones de entrevistas semiestructuradas, una de las cuales se ha diseñado de tal manera que cada pregunta actúe como un reactivo[3] que permita identificar si el docente posee una concepción de número real predominante. Para el diseño de tales entrevistas se ha tenido en cuenta las diferentes concepciones del número real que serán presentadas en el Capítulo N° 2 Antecedentes y Marco Conceptual, luego de un recorrido histórico epistemológico del número real.

Para el procesamiento de los datos se ha realizado la desgrabación de las entrevistas y un registro narrativo de observaciones de clases de cada docente para luego organizar los fragmentos textuales de los indicadores pertinentes a cada modalidad de cada categoría de análisis.

Para la credibilidad y transferencia (interna y externa) se propone:

- Estancia prolongada en el campo: entre las sesiones de entrevistas y las observaciones de clase, se intentará establecer un vínculo de confianza con los docentes de la muestra.
- Triangulación de los datos: comparación permanente entre lo que el docente dice que hace (entrevistas), lo que el investigador interpreta que hace (observaciones) y lo que el docente propone hacer en su clase (material didáctico utilizado en las clases).

Puede verse la justificación y el desarrollo en detalle de la metodología adoptada, junto con las categorías de análisis, en esta investigación en el Capítulo N° 3 Metodología y Diseño de Investigación.

[3] Se define "reactivo" en el Capítulo N°3 Metodología, en el apartado 3.3.2 Entrevistas.

# Capítulo 2
# Antecedentes y Marco Conceptual

## *2.1 ESTADO DEL ARTE*

Es para destacar la escasa cantidad de estudios que se han encontrado, que analizan las concepciones acerca del número real en docentes. Por tal razón, a la hora de realizar la búsqueda no se ha restringido el año de publicación y se ha ampliado la selección hacia aquellos artículos que analizan concepciones[4] del número real en alumnos de educación secundaria o universitaria, sobre todo los que refieren a la formación de futuros profesores. Se han identificado estudios que analizan concepciones del número irracional o racional, pero solo se han considerado los que trabajan sobre el número real. Para realizar la revisión de la literatura de este trabajo, se han utilizado ecuaciones de búsqueda en buscadores académicos seleccionando fuentes primarias, como artículos de revistas de educación y tesis de maestría/doctorado, en español o inglés. En una segunda etapa, se han consultado las referencias bibliográficas presentes en los artículos seleccionados, comenzando con los más actuales. Se han agrupado los estudios en las siguientes secciones:

2.1.1 *Estudios didácticos sobre el uso del número real*. En esta categoría solo se encontró una investigación enmarcada en la TSME, una tesis de maestría que analiza los usos del número real en la obra de René Descartes. Si bien no se trabaja con alumnos o docentes, resulta de interés para analizar las concepciones presentes en la obra matemática desde el punto de vista de los usos que puede darse al número real, dentro del marco teórico adoptado en esta tesis.

*2.1.2 Estudios que indagan concepciones acerca del número real en docentes.* En esta categoría se han encontrado dos estudios que indagan las ideas propias sobre el número real y las que pueden anticipar en sus alumnos, en docentes en ejercicio profesional.

*2.1.3 Estudios que analizan concepciones acerca del número real en alumnos*. Se han seleccionado estudios que indagan conocimientos y/o dificultades en el aprendizaje del número real presentes en los alumnos, dado que se considera que en estos análisis se manifiestan las concepciones que estos poseen (aunque no se haga referencia a la palabra concepción específicamente).

### 2.1.1 Estudios didácticos sobre el uso del número real

- Fregueiro, 2014. Se realiza una resignificación del número real a partir de un análisis de las obras de René Descartes identificando los usos de este concepto. Interesa particularmente este matemático dado que es el primero en vincular la estructura

[4] Se concibe al término concepción como pluralidad epistemológica del concepto, pero también como conocimientos que posee el sujeto respecto al número real, que es atravesado por el dME. Este concepto será profundizado en la siguiente sección denominada Marco Conceptual.

aritmética de los números con un contexto geométrico. La autora reconoce tres usos del número real en la obra de Descartes:

- el uso geométrico-aritmético: asociando a cada segmento un número real, el cual denota la longitud del mismo. Cabe aclarar que se limita el uso de números reales positivos construibles con regla y compás, dado que existen números, tales como $\pi, e, \sqrt[3]{2}$, para los cuales no es posible construir un segmento de tal medida bajo procedimientos euclídeos. Este uso se evidencia a partir de la construcción de algoritmos geométricos para las operaciones aritméticas de los números (multiplicación, división, potenciación y raíz cuadrada).
- el uso geométrico-algebraico: se evidencia en la posibilidad de expresar una variable como la medida desconocida de un segmento y una ecuación algebraica dada como una relación entre segmentos. La solución de una ecuación adquiere un nuevo significado en este uso.
- el uso geométrico-analítico: asociando cada ecuación algebraica a un problema geométrico y viceversa.

Cada uno de estos usos permiten resignificar el número real positivo construible como segmento, las operaciones aritméticas, las ecuaciones algebraicas, la solución positiva de una ecuación (como relaciones entre segmentos) y los problemas geométricos (que encuentran su formulación en el contexto algebraico y viceversa). Identifica dos intencionalidades sociales vinculadas a la creación de la obra La Geometría, por parte de Descartes. La primera responde a la convicción de Descartes de crear un método (el método cartesiano) que posibilite generar una Ciencia Universal. En su obra intenta poner a prueba su método. La segunda está vinculada a la resolución del problema de Pappus[5], sin resolución hasta ese momento. Fue necesario pasar su formulación, en contexto geométrico, al contexto algebraico estableciendo relaciones entre segmentos con ecuaciones algebraicas. La autora reconoce que Descartes acorta la brecha entre magnitudes y número, dado que en su trabajo no hace distinción entre medidas conmensurables e inconmensurables considerando como número tanto a los racionales positivos como a los irracionales positivos algebraicos construibles.

### 2.1.2 Estudios que indagan concepciones acerca del número real en docentes

-Branchetti, 2017. Se realiza un estudio de caso, en el que se entrevista a un profesor con doctorado en Matemática acerca de la enseñanza y aprendizaje del número real en la escuela secundaria. Se utilizó el modelo Schoenfeld (Schoenfeld, 2010) para identificar cuáles son sus recursos, metas y orientaciones en el proceso de toma de decisiones. Los resultados evidencian que el conocimiento del docente acerca de los números reales es avanzado. Aunque conoce las cuestiones formales e históricas del número real, prefiere evitarlas por completo en la introducción del concepto para simplificar lo máximo posible. Declaró pasar repentinamente de intuiciones de continuidad y un conjunto de

[5] Problema de Pappus:

> Dadas 2n rectas, encontrar el lugar de los puntos tales que el producto de sus distancias, bajo ángulos dados, a n de esas rectas está en una relación dada con el producto de las distancias, bajo ángulos también dados, a las otras n rectas. (Hernández, 2002, p. 40)

números con diferentes representaciones a un significado formal implícito de $\mathbb{R}$. Reconoce la dificultad que tienen los alumnos para trabajar con algunas representaciones del número real en este nivel, pero nunca cuestiona que puedan no ser utilizadas. Además, mostró dudas epistemológicas acerca de la existencia de los números irracionales. La autora concluye que, aunque un docente posea un conocimiento avanzado en matemática, las dudas epistemológicas y la orientación personal pueden llevarlo a evitar cuestiones formales para la enseñanza de un concepto tan complejo como el número real, derivando en un enfoque trivial y estéril.

-Ferrero & Montoro, 2011. Se investiga las anticipaciones que puede realizar los profesores en ejercicio sobre las ideas que poseen sus alumnos en cuanto al concepto de número real. Realizan entrevistas semiestructuradas a 10 docentes que trabajan en nivel secundario o en la universidad, orientadas hacia el conocimiento pedagógico del contenido y el conocimiento de los alumnos. En los resultados puede verse que la mayoría considera como contenidos prioritarios en el nivel medio a las operaciones, relación de orden, representación en la recta, magnitudes, representación decimal y otras representaciones, mientras que cardinalidad, completitud y densidad son asignados a un nivel superior. Observan la dificultad en sus alumnos para reconocer a $\pi$ como número irracional y para distinguir la existencia de infinitos irracionales. La mayoría de los docentes admite que la recta numérica sirve para visualizar y comprender la relación de orden entre números, aunque tres de ellos afirman que no aporta a reconocer los distintos tipos de números por marcar irracionales con su aproximación racional.

### 2.1.3 Estudios que analizan concepciones acerca del número real en alumnos

-Rizos & Adam, 2022. Se investigan las concepciones que poseen estudiantes de Matemática de primer año acerca del número real, en cuanto a los criterios que utilizan para distinguir entre números racionales e irracionales y para localizarlos en la recta numérica utilizando únicamente regla no graduada y compás. Un total de 60 estudiantes de un curso de cálculo online (ya que la investigación transcurrió durante la pandemia del COVID 19) acceden a participar del estudio, en el cual deben responder un cuestionario que presenta preguntas referidas a la representación, el orden, la densidad y la operatoria de los números reales, tales como: "¿cuál es la razón entre la diagonal de un cuadrado y su lado?, ¿el cociente de dos racionales siempre es un número racional?, ¿puedes encontrar el número racional que sigue inmediatamente después del número 2/5?" (p. 4). En la mitad del semestre, se selecciona a un número reducido de estudiantes y se los invita a dos reuniones de dos horas cada una, en las cuales se presenta un marco histórico y filosófico de los números racionales e irracionales, se prueba que el número $\sqrt{2}$ es irracional y se muestra un procedimiento para representarlo en la recta numérica utilizando métodos euclídeos. Al finalizar el semestre, se convoca a los 60 estudiantes y se les da la siguiente tarea: "Para los números dados $\frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \pi, \sqrt{5}, \frac{\sqrt{2}}{2}$, encontrar su localización exacta en la recta numérica. Para aquellos números que no sea posible localizar, explicar de forma completa la razón. Para cualquier número que sea posible localizar, indique la ubicación exacta, describiendo en detalle el proceso" (p. 4). Los resultados permiten observar que el principal criterio que tienen los estudiantes para distinguir entre número racional o irracional es el número de dígitos decimales del número y la existencia o no de período. Además, la estrategia más comúnmente utilizada para representar a los números en la recta numérica fue la conversión a número decimal, luego el redondeo y, por último, su ubicación en la recta. Si bien los estudiantes reconocieron el valor de las construcciones geométricas, las autoras conjeturan que la virtualidad impidió una interacción adecuada.

- Fong et al., 2020. Se realiza un cuestionario abierto en el cual se examina las concepciones acerca de la divisibilidad infinita de un segmento de un grupo de 238 estudiantes de Matemática en un Instituto de Formación de Profesores de Malasia. Los investigadores clasificaron cualitativamente los diferentes tipos de pensamiento según tres formas de dar sentido al conocimiento: percepción (sacar conclusiones a través de los sentidos), operación (acción física como medir, contar y simbolizar cosas como un concepto mental manipulable en forma de simbolismo operativo) y razón (relacionado con la construcción del conocimiento formal en sistemas axiomáticos basados en definiciones formales y pruebas). Los resultados muestran una predominancia en el pensamiento infinito potencial (como proceso) por sobre el pensamiento infinito actual (como objeto). Es decir, hubo más estudiantes que concibieron que la divisibilidad de un segmento siempre podrá dividirse repetidamente contra una minoría que concibe que el segmento dejará de dividirse en un punto específico, dando lugar al infinito actual. Un 21% presentaron respuestas inconsistentes, cambiando sus respuestas de infinito potencial a infinito actual, indicando inestabilidad en su pensamiento.

-Mendoza et al., 2018. Se realiza un análisis estadístico descriptivo de los errores cometidos por 253 ingresantes a las carreras Ingeniería Eléctrica, Ingeniería en Agrimensura, Ingeniería en Electrónica, Licenciatura en Ciencias Físicas y Licenciatura en Ciencias Químicas al reconocer números como números reales. Al inicio del ciclo lectivo 2017, se proporciona a los estudiantes un test diagnóstico, que consta de identificar, de una serie de números dados, aquellos que son reales y/o pertenecientes a alguno de los conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Los resultados evidencian dificultades para identificar al cero como número racional debido a la imposibilidad de verlo como cociente de enteros en donde el numerador es múltiplo del denominador (como, por ejemplo, $\frac{0}{4}$). Además, se reconoce que los errores más frecuentes están asociados a relacionar radicandos con números irracionales y cocientes con números racionales. Por otra parte, los autores concluyen que los estudiantes no reconocen (o al menos en su totalidad) la inclusión de los conjuntos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ y, por lo tanto, presentan dificultades para reconocer a los números reales para posteriormente operar con ellos.

- Montoro, 2014. Se estudia cómo alumnos con muy diferentes niveles de formación matemática conciben a la recta numérica como representación de los números reales. Un total de 307 estudiantes (167 de escuela secundaria y 140 de universidad –estos últimos fueron estudiantes ingresantes o avanzados de carreras de formación Matemática, Biología o Educación Física), participaron respondiendo un cuestionario del cual tres tareas estaban destinadas a alcanzar los objetivos de este estudio. La primera de ellas consistió en localizar varios números dados en la recta numérica (se proporcionaba la recta sobre un cuadriculado, con una escala determinada, marcando el 0 y el 1). La segunda tarea proponía marcar sobre la recta todas las fracciones racionales, luego todas las raíces de esas fracciones y, por último, eliminar los puntos que representan racionales y analizar qué números quedarían en la recta. En la tercera tarea se solicita imaginar un microscopio de gran potencia que se enfoca sobre un segmento de recta, escribiendo lo que se observaría si se hace zoom y luego si el aumento es infinito (Robinet, 1986). Para clasificar las respuestas similares, se realizó un Análisis Factorial de Correspondencia Múltiple. Los resultados muestran diferentes grados de profundidad respecto a la concepción de número: un 7% de los estudiantes reconocen solo a los enteros y no reconocen la recta como modelo para los reales, un 18% identifican como número solo a los enteros y algunos decimales o fraccionarios, un 26% considera decimales solo hasta los décimos, un 19% concibe a los reales como los números decimales, un 13% considera a la recta como sostén de magnitudes, un 14% confunden los reales con racionales y un 5% (estudiantes universitarios de Matemática) reconoce que la recta representa a los reales completos y es continua.

- Cifuentes et al., 2012. Se describe la experiencia llevada a cabo en un taller denominado "Ingreso a la Formación Docente", destinado a estudiantes ingresantes de las carreras Profesorado de Matemática y Profesorado de Biología. Se llevaron a cabo nueve actividades, con el objetivo de trabajar aspectos relacionados con el número real: la comprensión de la completitud y su asociación con la continuidad de la recta, la relación entre las concepciones sobre el infinito matemático y la comprensión del número real, la comprensión de la densidad y el orden de números reales. Se describen resultados de la actividad 1 y 9 únicamente: en la primera se pide clasificar números dados según criterios propios y en la segunda se pide imaginar un microscopio con el cual se enfoca una recta y se hace zoom para luego describir lo que se observaría (actividad extraída de Robinet, 1986). Las autoras concluyen que los alumnos encuestados reconocen la existencia de algunos números irracionales, pero no distinguen que son infinitos; conciben a la recta como sustento intuitivo de los números reales, aceptando la asociación uno a uno entre punto y número; confunden número con operación, por ejemplo, $\sqrt{2}$ es una operación sin resolver de un número y no un número en sí mismo; y no aceptan el infinito actual, por ejemplo, al afirmar que $0,999\ldots$ se acerca mucho a 1 pero no es necesariamente 1.

-Bergé, 2010. Se realiza un estudio exploratorio cuyo objetivo es dar cuenta de las percepciones de los alumnos sobre la propiedad de completitud del conjunto de los números reales. Los estudiantes analizados, son alumnos de Licenciatura en Matemática que realizan tres cursos de Análisis y Cálculo (curso II, III y IV). Se realizó un cuestionario a los alumnos de estos cursos y luego se hicieron entrevistas a estudiantes voluntarios de cada uno de estos. En la primera pregunta de dicho cuestionario se pide describir cómo le explicaría a un estudiante más joven que una sucesión real no decreciente acotada superiormente tiene un límite, en la tercera pregunta se pide explicar qué significa que el conjunto de los números reales sea completo. Para la mayoría de los estudiantes del curso II (98/124) la existencia del límite de la sucesión de la pregunta 1 no parece requerir explicación. La mayoría de los estudiantes del curso III expresaron la completitud mediante el uso cotidiano de la palabra “completo” o mediante imágenes. Solo unos pocos estudiantes del curso IV ven a la completitud como una herramienta para definir nuevos elementos, aunque la mayoría de ellos no sabe qué problemas resuelve la completitud. La autora concluye que la comprensión de la completitud no se desprende directamente de la resolución de los ejercicios típicos que involucran supremos o sucesiones de Cauchy propuestos.

- Mora Mendieta & Torres Díaz, 2004. Se indagan las concepciones de estudiantes de Licenciatura en Matemática de Bogotá sobre los números reales. Utilizan el marco teórico correspondiente al enfoque sistémico de la Escuela Francesa de la Didáctica de la Matemática (Brousseau, Chevallard) y se asume la propuesta de Anna Sfard, para definir “concepción” en este estudio. De los resultados puede deducirse que las concepciones que tienen los estudiantes de la muestra son: los números reales como campo ordenado, los números reales como unión entre conjuntos numéricos y los números reales como puntos de la recta. Las autoras contrastaron estas concepciones con las históricas/epistemológicas del concepto y no pudieron establecer con exactitud una correspondencia. Tampoco pudieron encontrar una vinculación con lo encontrado en investigaciones del estado de arte, dado que los estudiantes no le atribuyeron al concepto usos prácticos en la cotidianeidad. Por último, consideran conveniente indagar las concepciones presentes en los profesores de educación básica y media, dado que las propias imágenes mentales sobre el número real en los alumnos en formación docente están influenciadas por su instrucción a lo largo de toda su historia académica.

- Crespo Crespo, 2004. Se analiza, en un recorrido histórico/epistemológico, los aspectos principales que influyeron en la construcción del concepto de continuidad, característica propia del conjunto de los números reales, frecuentemente confundido con el concepto de densidad. Realizaron experiencias mediante encuestas y preguntas en niños de primero, segundo y tercer ciclo de EGB y en alumnos de polimodal. En estas preguntas se indagaron los preconceptos e ideas que tenían los alumnos acerca del infinito y la continuidad. Una de ellas presenta una situación análoga a la paradoja de de Aquiles y la tortuga[6], de Zenón. Pudo observarse que las respuestas obtenidas varían notoriamente según las edades de los alumnos. Por ejemplo, el concepto de suma infinita o infinitas iteraciones no pudo reconocerse posible en los niveles de EGB, respondiendo que la hormiga claramente llega a su meta, no así en polimodal, donde incluso pudo entenderse que se estaba en presencia de una paradoja. En otra de las situaciones propuestas a los alumnos, se pidió describir lo que observarían si enfocaran una recta en un microscopio de gran potencia e hicieran “zoom” (situación basada en Robinet, 1986). Pudo observarse que la mayoría de los alumnos (sin distinción de edad) percibe a la recta como una cinta delgada, siendo una minoría la que hace explícito que la recta no tiene espesor. De los resultados la autora deduce que “una percepción incorrecta de la propiedad de

[6] Una hormiga quiere recorrer un lado de la mesa. Primero debe avanzar la mitad del trayecto, enseguida debe continuar con la mitad de lo que le queda, luego con la mitad de lo que le queda y así sucesivamente. ¿Llegará alguna vez al otro lado de la mesa? (Crespo Crespo, 2004, p.42)

completitud de los números reales, unida tan sólidamente a la continuidad de la recta, pueden dificultar la comprensión de nociones posteriores. Por ello es de gran importancia hacer hincapié en la enseñanza de estos conceptos” (p. 44).

- García et al., 1999. Se analizan las dificultades que presentan los alumnos al aprender el concepto de número real, desde un enfoque epistemológico, curricular y cognitivo. Elaboraron un cuestionario, realizado a estudiantes que ingresan a los programas de formación inicial de profesores de ciencias y matemáticas. Pudo observarse que la mitad de los estudiantes conciben al número real como cantidad y la otra mitad como una representación de objetos tangibles. En las respuestas se explicita el conflicto de aceptación de propiedades periódico/ no periódico de los decimales, como si el término periódico evitara el infinito puesto que si son periódicos son representaciones de racionales. Además, se evidencia la contradicción en aceptar que ciertos números sí son reales, pero las representaciones decimales son solo aproximaciones a ellos. En cuanto a la representación de los reales como puntos de la recta, surgió entre los estudiantes la idea de puntos gordos como átomos indivisibles, que conservan el orden de siguiente de los números naturales. Por último, los autores concluyen que las dificultades identificadas obedecen a un orden didáctico, propios de la transposición como conocimiento matemático escolar.

-Lehtinen et al., 1997. Se realiza una evaluación a 65 estudiantes en educación secundaria, provenientes de tres escuelas de Finlandia, luego de un curso de cálculo de 40 hs., en donde se evalúa el concepto de número, límite y derivada. Se pidió que realizaran cinco tareas (aquí solo se mencionan las que tienen relación con el concepto de número real):

- En la primera, se pidió que ordenaran de menor a mayor un conjunto de números decimales.
- En la segunda, se preguntó cuántos números se encuentran entre 0,99 y 1, identificando cuál se encuentra más cerca de 1.
- En la tercera, se presentó a los alumnos el siguiente problema:

> …una persona comienza a ahorrar dinero para una determinada compra ahorrando durante el primer mes la mitad del precio de compra, y durante el segundo mes y los siguientes ahorrando la mitad de la cantidad que ahorró el mes anterior. Se pidió a los estudiantes que concluyeran si la persona alguna vez ahorró la cantidad de dinero requerida y que dieran una explicación de su respuesta. (p.137)

Luego, se realiza una entrevista a 11 de esos estudiantes con el objetivo de profundizar y obtener mayor información acerca de las concepciones sobre números de los estudiantes. Los resultados muestran que los alumnos no tuvieron dificultades para realizar la primera tarea, pero para la segunda solo el 54% argumentó que había infinitos números entre 0,99 y 1 (un 9% dio una respuesta ambigua, un 3% dijo que ninguno, un 22% dijo que había una cantidad finita y un 12% no se atrevió a contestar). Un 42% respondió que no podía determinarse el número más cercano a 1 (una mayoría responde de forma incorrecta). Para la tercera tarea, la mayoría (74%) responde de forma correcta que no es posible llegar a la cantidad de dinero requerida. En general, las equivocaciones refieren a utilizar el redondeo para operar. Los autores concluyen que el cambio conceptual de una idea discreta a una continua de número resulta más complicada de lo que suelen pensar los docentes. Los alumnos del estudio, habían aprobado la prueba del curso de cálculo y, por tal razón, sus profesores pensaban que comprendían de manera adecuada la idea de continuidad. Hacen hincapié en el hecho de que rara vez ocurre un cambio espontáneo de números racionales a números reales en el pensamiento de niños y adultos.

- Romero, 1996. Se realiza un cuestionario a 74 alumnos de 3° de BUP, con el objetivo de analizar los modelos mentales y la percepción de las propiedades de las magnitudes continuas. El cuestionario consiste en tres preguntas: en la primera pregunta, se pide a los individuos que busquen y establezcan criterios de clasificación de números; en la segunda pregunta, se pide la descripción de una recta si se le realizara "zoom" (basado en el cuestionario de Robinet, 1986); y en la tercera pregunta, se propone la manipulación de un objeto acotado y completo como se describe a continuación:

> Con las tijeras, cortar la cuerda en dos trozos, iguales o no. Tirar uno de los fragmentos a la basura. Con las tijeras, cortar la cuerda que nos queda en dos trozos, iguales o no. Tirar uno de los fragmentos a la basura. Con las tijeras, cortar... (p. 6)

Los resultados muestran, para la primera pregunta, una relevancia significativa de las propiedades y características de los distintos conjuntos numéricos $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}, \mathbb{R})$ para clasificar números. Para la segunda pregunta, se clasifica a los individuos en atomistas y continuistas, dependiendo si ven en la recta elementos más o menos estructurados o la conciben como un todo. Para los primeros, se presentan dificultades o ignoran la estructura de orden no discreto, los segundos contestan la pregunta con coherencia pero ignoran tal propiedad. Los resultados de la tercera pregunta, han mostrado que en ningún caso la descripción del residuo de cuerda corresponde a un objeto finito, por el contrario, se lo percibe como muy pequeño o infinitesimal. La autora concluye que el esquema conceptual del continuo se presenta como un agregado inconexo de imágenes y de enunciados de propiedades, causando errores en las situaciones propuestas. También, evidencia que no se presentan conexiones no triviales entre la geometría y los números, hecho que relaciona con la característica que más relevancia tiene para los alumnos: su forma de escritura.

-Romero, 1995. En su tesis de doctorado estudia la introducción del número real en la escuela secundaria utilizando la metodología investigación-acción, un estudio de caso, en un curso con alumnos de entre 14 y 15 años de edad. En este estudio se analizan los problemas didácticos implicados en la utilización de las diferentes notaciones numéricas para representar a los números reales, haciendo hincapié en las representaciones geométricas analizando sus problemáticas particulares y sus potencialidades para la comprensión del concepto de número real. Se basan en las nociones de sistemas de representación propuestas por Kaput y Duval. En los resultados puede observarse que los alumnos no tuvieron dificultad para discriminar los decimales periódicos y los no periódicos, pero no pudieron suministrar ejemplos e indicar su procedencia al comienzo (aunque sí al finalizar el proceso didáctico llevado a cabo). Se ha notado un progreso en su capacidad de identificar el origen de decimales infinitos no periódicos de distinto tipo: raíces cuadradas, proporciones, solución de ecuaciones. Los alumnos manifestaron gran interés por el número $\pi$ y su argumentación de que tiene una expresión decimal no periódica, sin embargo, se reconoce la falta de herramientas en este nivel para contestar esa inquietud. Se pudo observar el desarrollo de las concepciones de algunos alumnos acerca de la conmensurabilidad e inconmensurabilidad de ciertas longitudes con respecto a otra tomada como unidad, si bien esta cuestión se reveló ciertamente complicada en este nivel. En cuanto a las dificultades observadas se menciona la resistencia por parte de los alumnos a considerar como equivalentes, representaciones de los números reales que presentaban facetas distintas y exclusivas de cada tipo de representación, los obstáculos al discriminar entre números racionales e irracionales a través de los distintos sistemas de representación y para distinguir los subconjuntos numéricos incluidos en los reales, los sistemas de representación asociados a estos y las relaciones de inclusión entre ellos.

- Robinet, 1986. Presenta un cuestionario en el cual se analizan ciertos aspectos del número real en alumnos de 17-18 años y alumnos de primer año de educación superior, más concretamente: la noción de racional y de inconmensurabilidad, la noción de infinito y el concepto de continuidad. De los resultados se concluye que los alumnos ven a $\mathbb{R}$ como un conjunto de números, que diferencian cada tipo de número mediante su escritura, que conciben a los números decimales como aquellos con una cantidad finita o infinita de números atrás de la coma (generando confusión pues son considerados menos precisos que los racionales). Por otro lado, se deduce que los alumnos consideran a la recta como puntos alineados en fila (uno atrás de otro). Afirma que la línea recta no genera intuitivamente la propiedad de continuidad o la completitud de $\mathbb{R}$, por lo cual debe trabajarse.

- Monaghan, 1988. Se realiza un cuestionario en estudiantes no universitarios (nivel A) para indagar su comprensión acerca de la representación decimal de números reales, sobre todo cuando son el resultado de una serie infinita o como límite de una sucesión convergente. El autor plantea que aunque las caracterizaciones formales de la completitud de los números reales (por ejemplo, todo conjunto acotado superiormente tiene supremo o que toda sucesión de Cauchy tiene límite) pertenecen al dominio de las matemáticas universitarias, formulaciones menos rigurosas deben ser parte de las matemáticas escolares para la comprensión un poco más madura de los números reales. Los resultados muestran que la visión principal de infinito que poseen los estudiantes es la de proceso que no tiene fin y, por tal razón, los decimales infinitos son vistos como entidades dinámicas e incompletas. El autor afirma que es necesario pasar a una visión de infinito actual para que los alumnos puedan considerar un decimal infinito como un número real. Por último, concluye que los docentes deben explorar los conflictos que surgen de sus propias concepciones al momento de enseñar este concepto. Establece que se necesita más investigación para evaluar la eficacia de los programas de enseñanza.

## *2.2. MARCO CONCEPTUAL*

En este capítulo se desarrollan los conceptos pertinentes para llevar a cabo esta investigación, enmarcados en una teoría de la Matemática Educativa y en el campo de la Matemática, contemplando la historia, la epistemología y la enseñanza en la educación secundaria del número real. Se divide en las siguientes secciones:

2.2.1 *La Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*. En este apartado se exponen las ideas y los principios fundamentales de esta teoría y a partir de los cuales se define y caracteriza el discurso Matemático Escolar, concepto introducido brevemente en el planteamiento del problema de esta investigación.

2.2.2 *Recorrido histórico-epistemológico del número real*. Aquí se realiza una historia crítica del desarrollo de este concepto, analizando los momentos y las causas que lo hicieron evolucionar, los obstáculos epistemológicos que tuvo que sortear, hasta su formalización a partir de diferentes teorías que conviven y lo caracterizan desde distintos puntos de vista.

2.2.3 *La noción de concepción*. Se define el término concepción desde dos perspectivas: una epistémica y otra cognitiva.

2.2.4 *El concepto de tarea: función y forma*. Se conceptualiza la noción tarea, función y forma de una tarea. Se ejemplifica para el caso del uso de las gráficas (Cordero & Flores, 2007).

La introducción de cada sección tiene su propósito en este marco conceptual, y se irá develando en la lectura de cada una de ellas.

### 2.2.1 La Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa: principios fundamentales y el discurso Matemático Escolar

Tradicionalmente los modelos educativos plantearon currículos centrados en conceptos, soslayando los usos de los conocimientos matemáticos (Cordero et al., 2015). La Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) es una teoría científica que se caracteriza principalmente por estudiar la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional. Se diferencia de otras teorías de la Matemática Educativa ya que amplía su mirada, no restringiendo el análisis hacia los objetos matemáticos y sus relaciones, sino considerando como problema educativo la significación compartida del objeto mediante su uso culturalmente situado. Esto quiere decir que los alumnos participan activamente de la cultura matemática, presente en sus propias experiencias de su vida diaria, dentro y fuera del aula. Para lograr esto, es decir, la democratización del aprendizaje es preciso ampliar el concepto de aula, saber y sociedad. Esto es posible para la TSME dado que un fundamento sobre el que se apoya es que "la Matemática, en tanto creación humana, recrea -a su manera- la vida misma" (Cantoral et al., 2014, p. 96). En este sentido, interesa estudiar el saber puesto en uso (y no estático), entendiendo por saber al popular, técnico o culto. Debe estudiarse desde la mirada de quien lo aprende, de quien lo inventa y de quien lo usa; es por esto por lo que hay que problematizarlo.

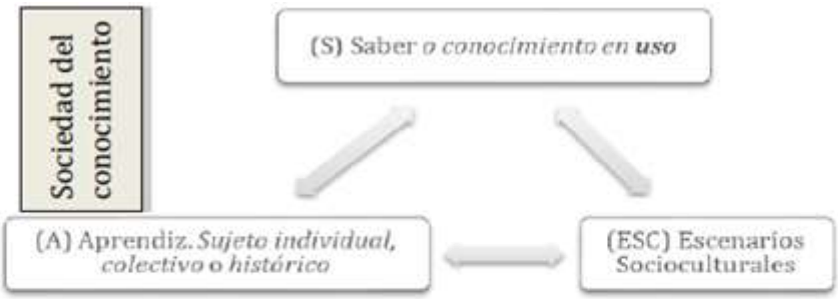
La TSME diferencia la matemática de la matemática escolar, dado que la matemática construida dentro de la comunidad científica no ha sido inventada con fines de enseñanza. Sin embargo, se la enseña dentro de un ámbito educativo en el cual el saber matemático sufre un proceso de transposición[7] derivando en un subproducto que es reproducido en el escenario ficticio del aula (matemática escolar). Este proceso genera discursos en torno a los objetos matemáticos, a fin de facilitar su comunicación para la enseñanza. La consecuencia directa es la descontextualización de los objetos matemáticos, que genera una pérdida de sentido para quien lo aprende. Los consensos que se realizan a fin de introducir la matemática en el sistema didáctico son denominados, en esta teoría, como discurso Matemático Escolar (dME). El dME enfatiza la centración de los objetos matemáticos, ignorando su construcción social dentro del ámbito de la matemática que le da sentido y significatividad. El dME es visto como medio para lograr una participación consensuada en el ámbito didáctico. Al ser el profesor el que comunica verdades preexistentes a sus alumnos, la construcción social del conocimiento queda rezagada en el dME. Por esta razón, la TSME plantea que el conflicto en la enseñanza y en el aprendizaje radica en el propio dME. Identificarlo y rediseñarlo será, entonces, el camino para modificar la actividad didáctica en Matemática y atender las problemáticas planteadas. Sin embargo, hay que comprender que estos discursos no son responsabilidad solo del profesor porque, al fin y al cabo, se ha formado bajo el mismo dME y se convierte, en consecuencia, en su reproductor.

> En este sentido, planteamos, que el dME subyace a lo inmediatamente visible, lo ostensible, explícito u objetivo, los contenidos y sus concepciones: Planes y Programas de estudio, libros de texto, exposiciones de aula, pero también a las creencias y concepciones de profesores, estudiantes y comunidad académica en general. (Cantoral et al., 2015a, p.14)

Tradicionalmente, en la didáctica de la matemática, se ha tomado como estructura de estudio de los procesos de enseñanza-aprendizaje el triángulo didáctico compuesto por saber, alumno y profesor. En la TSME, se amplía el concepto de saber, como saber culto, popular o técnico; el concepto de alumno, como sujeto individual o colectivo; y el concepto de profesor, como individuo o como institución escolar personificada. Pero el mayor cambio de este triángulo didáctico en esta teoría es la incorporación de los contextos sociales y las perspectivas culturales para la significación.

[7] Noción tomada de Chevallard (1997), entendida como el paso del saber sabio al saber enseñado.

**Figura 13.** ***El triángulo didáctico en la TSME***




*Nota*. Tomado de "Socioepistemología, Matemáticas y Realidad" (p. 107), por R. Cantoral, D. Reyes Gasperini, G. Montiel, 2014, *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(3).

Los entornos socioculturales, junto con el saber y el aprendiz son los actores principales de los procesos didácticos. Por esta razón, las investigaciones enmarcadas en la TSME se caracterizan por una descentración del objeto, contemplando las prácticas sociales en torno a ese objeto desde una mirada social y cultural de la matemática. Se incorpora la componente social integrándola a la componente epistemológica, a la componente cognitiva y a la componente didáctica. Para que el proceso didáctico tenga lugar, es necesario que el docente se apropie de su práctica a través de la problematización del saber matemático escolar. Su objetivo principal es darle herramientas al docente que le permitan mejorar sus prácticas, logrando así un rediseño del dME.

La TSME se apoya en cuatro principios fundamentales (Cantoral et al., 2014):

- **El principio normativo de la práctica social:**

Se entiende por práctica social, no a lo que hace en sí el individuo o grupo, sino lo que les hace hacer lo que hacen, quizá sin adquirir conciencia de sus acciones. La práctica social, en este sentido, es normativa, aunque no determinística por lo que es permanente pero no estática. Se produce el interés por saber qué origina la norma. Esta teoría diferencia la práctica de la acción, en un modelo de anidación de prácticas.

**Figura 14.** ***Modelo de anidación de prácticas***

*Nota*. Tomado de “Socioepistemología, Matemáticas y Realidad” (p. 99), por R. Cantoral, D. Reyes Gasperini, G. Montiel, 2014, *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(3).

La acción es directa del sujeto al medio, está enmarcada en una actividad humana que es situada socioculturalmente en un contexto determinado y perfila una práctica, dado que es una actividad que se repite y se regula por el contexto, constituyendo prácticas de referencia (ideológicas de un paradigma), a la vez normadas por la práctica social. Esta secuencia permite explicar el proceso de construcción del sujeto colectivo y, por lo tanto, permite explicar los procesos de construcción y difusión del conocimiento matemático con el fin de transformarlo para la mejora de procesos didácticos.

- **El principio de la racionalidad contextualizada:**

Para comprender este principio la TSME enuncia el concepto de escenario social, como aquel escenario que influye las conductas, la manera de actuar y de pensar de los miembros de la sociedad, condicionándolas de manera sustancial. Este principio, entonces, enuncia que el escenario social define nuestra racionalidad y, por esta razón, la construcción del conocimiento es un producto sociocultural y representativo de la sociedad donde se gestó.

- **El principio del relativismo epistemológico:**

Este principio se contrapone con el absolutismo epistemológico que sostiene la unicidad de la verdad y su universalidad. Para la TSME, el saber es una multitud de saberes con verdades relativas. Esto es coherente ya que se concibe al saber en tanto saber culto, popular o técnico. Por esta razón, el error del alumno en el ámbito educativo no es concebido como una falla o carencia, sino que debe analizarse la razón de valor de verdad que el alumno tiene con sus argumentaciones en coherencia con su racionalidad. Debe privilegiarse la diversidad de argumentaciones, dado que la respuesta depende de la interpretación del alumno y la validez del saber es relativa al individuo o al grupo.

- **El principio de la resignificación progresiva o de la apropiación situada:**

Este principio está en la base misma del desarrollo del pensamiento. Se ha denominado resignificación progresiva al proceso que realiza un individuo para establecer lazos de interacción con el medio, dando significado a los objetos dentro de un escenario social y resignificándolo poniéndolo en uso en nuevos contextos. Este proceso permite enriquecer los saberes, a causa de la propia evolución y de la interacción con diversos contextos.

En Cantoral et al. (2015a) se caracteriza teóricamente al dME y, teniendo en cuenta sus principios, fundamenta su rediseño:

- *Carácter utilitario*: el dME antepone la utilidad del conocimiento matemático frente a cualquiera de sus restantes cualidades. En su rediseño la matemática debe tener un carácter funcional, organizándola según el funcionamiento cognitivo, didáctico, epistemológico y social en la vida de las personas que la usan y la aprenden (principio normativo de la práctica social).

- *Atomización de los conceptos*: el dME concibe al saber centrado en objetos, sin considerar los aspectos sociales, contextuales y culturales que lo constituyen. Su rediseño permite reconocer, privilegiar y potenciar racionalidades relativas a contextos situados, a la realidad en la que se encuentre el individuo en tiempo y espacio (principio de la racionalidad contextualizada).
- *Carácter hegemónico*: el dME concibe a la matemática como un conocimiento acabado y continuo, dando supremacía a ciertas argumentaciones y significados frente a otros. Su rediseño plantea diversas maneras de constituir y desarrollar la matemática, relativa a la racionalidad contextualizada del grupo o individuo (principio del relativismo epistemológico).
- *Falta de marcos de referencia para la resignificación del saber*: se ha pasado por alto el hecho de que la matemática responde a prácticas de referencia, es decir que su significación no es estática. El rediseño del dME propone resignificar los saberes progresivamente, enriqueciéndolos con nuevos significados (principio de la resignificación progresiva).

El dME es la expresión de una epistemología dominante la cual no considera ni conoce el uso del conocimiento matemático ya que los modelos educativos apostaron atenderlo desde los conceptos (y no desde las prácticas). En Cordero et al. (2015), se describen ciertos fenómenos en torno al dME:

- *La exclusión de la práctica social*. Se distinguen dos epistemologías del conocimiento, aquella que se expresa en el dME y otra que se expresa en la construcción social del conocimiento matemático. Como ya se ha dicho predomina la primera por sobre la segunda, olvidando los contextos, las comunidades y las situaciones de donde emerge el conocimiento matemático. Existe entonces una violencia simbólica, entendida como la imposición de significados arbitrarios legítimos socialmente. Esto ocurre en las argumentaciones, significados y procedimientos que se generan en la matemática escolar a raíz del dME. En contraposición, la construcción social del conocimiento matemático considera las interacciones entre individuos (a sabiendas de qué individuo y sus procesos historiales) y a la funcionalidad de este en un contexto y una situación específica.
- *La opacidad*. En el dME no se consideran las argumentaciones del conocimiento matemático que correspondan a la matemática como instrumento, es decir, la matemática aplicada a la ingeniería, la biología, la medicina, entre otras disciplinas. Es decir, no se considera matemática a aquellos conocimientos en los cuales su objeto de estudio no es la obra matemática en sí misma. En particular, la matemática de lo cotidiano no se considera conocimiento matemático. Podría decirse que la matemática de la vida no es la misma que la matemática escolar, se desconocen y no dialogan entre ellas.

> En este sentido, la pluralidad epistemológica no tiene cabida en el actual dME ya que éste trata únicamente a la matemática como un ente objetivo, abstracto y generalizable, sin múltiples significados, sin desarrollo histórico, ni funcionalidad y mucho menos de manera transversal y multidisciplinar. (p. 91)

Luego, el fenómeno de la opacidad es la negación de la pluralidad epistemológica del conocimiento.

- *La adherencia*. La supremacía del dME, por sobre el pensamiento cultural de docentes y estudiantes, provoca actitudes no críticas hacia los contenidos matemáticos que se enseñan, así como la exclusión de su construcción y opacidad de su funcionalidad. Docentes y, por lo tanto, estudiantes adhieren al dME y no se atreven a trastocarlo. Por ende, no existe la reciprocidad entre la matemática y lo cotidiano en el aula, la dialéctica del conocimiento matemático y la vida. Por esta razón, es necesario el rediseño del dME, para que la matemática escolar no sea ajena a la construcción social del conocimiento matemático.

Uno de los propósitos de esta investigación es caracterizar el dME en torno al concepto de número real (discurso numérico escolar), con el fin de identificar elementos para un rediseño que se enfoque en el uso del número real, basado en la construcción social de este concepto. Este proceso (el rediseño del dME) solo es posible a través del empoderamiento docente, definido como una reflexión que se consolida en acción, que permite apropiarse de la práctica docente a través de la problematización del saber matemático escolar (Reyes Gasperini & Cantoral, 2014). Dado que el dME excluye la construcción social del conocimiento matemático, y el docente también ha sido excluido de este proceso, observar las concepciones que este posee en torno al concepto de número real permitirá distinguir aspectos que obstaculizan su enseñanza y su aprendizaje.

Para conocer la naturaleza social del número real y reconocer su pluralidad epistemológica, será necesario realizar un recorrido histórico-epistemológico de este concepto. Esto permitirá ir distinguiendo algunas concepciones acerca del número real, que permita luego plantear valores para la categoría de análisis en cuestión.

### 2.2.2 Recorrido histórico-epistemológico del número real

El concepto de número real es un concepto complejo que dentro del campo de la matemática tardó 23 siglos en formalizarse y consolidarse como tal. Entender su evolución, sus contradicciones y sus cambios de paradigma es fundamental para comprenderlo cabalmente. Para este fin, se historiza el concepto de número real, es decir, se estudia "una historia crítica del desarrollo conceptual, una epistemología situada, más allá de lo cronológico factual" (Cantoral et al., 2015a, p. 13).

#### 2.2.2.1 Los orígenes del número: primeros usos

El origen del concepto de número natural se remonta a la antigüedad prehistórica, ligado al acto de contar y registrar información: montones de piedras o muescas en un palo o hueso evidencian que esta práctica precede ampliamente a la escritura y la civilización. También hay estudios que lo conectan con ciertos rituales primitivos en donde el aspecto ordinal del número precede a lo cuantitativo (Boyer, 1986). Aunque el número natural nos resulte tan familiar hoy en día, hay que aclarar que el concepto fue elaborado muy lentamente. En sus comienzos el número era percibido como una propiedad inseparable de una colección de objetos. Más adelante, el número aparece ya como una propiedad de la colección aunque no se distingue el número abstracto. Por ejemplo, algunos pueblos denominaban el término mano para el número cinco y entonces reconocían que en una colección de cinco objetos había tantos elementos como dedos en una mano. Pero no se trata de un número abstracto, ya que es una propiedad de la colección y no un objeto en sí mismo. Al igual que la negrura es la característica de todos los objetos de color negro, el número cinco es la propiedad que tiene un conjunto con igual cantidad de elementos que dedos de una mano. Para distinguir el concepto de número y darle nombre, fue necesario comparar muchas colecciones de objetos durante generaciones y generaciones para así distinguirlo como objeto en sí mismo y encontrar relaciones entre ellos (Aleksandrov et al., 2019).

La introducción de los símbolos numéricos aparentemente se produjo al mismo tiempo que la escritura, y jugó un gran papel en el desarrollo de la aritmética. Los símbolos permitieron concebir números tan grandes que no podrían descubrirse por observación directa o por enumeración. Por otro lado, la creación de las fracciones estuvo asociado al proceso de medir: cuando la unidad de medida elegida no está contenida un número entero de veces en la magnitud a medir surge la necesidad de fraccionar la unidad para expresar la magnitud con mayor precisión (Aleksandrov et al., 2019). Los primeros documentos, papiros del antiguo Egipto y tablillas en escritura cuneiforme de Mesopotamia que datan de aproximadamente unos 4000 años, revelan cuestiones relativas al cálculo numérico con números naturales y fracciones positivas, referidas a casos concretos con el fin de facilitar técnicas y responder a la resolución de problemas prácticos: relativos a la astronomía para elaborar calendarios, orientarse en el mar, predecir eventos importantes para la agricultura y razones de culto, administración de la cosecha, recaudación de impuestos y todo lo relacionado a la organización de tareas (Boyer, 1986). Por tal razón, los objetos de la matemática de las culturas prehelénicas son de naturaleza concreta y desarrollada a través de la experiencia, a partir de la inducción. Esto es, a partir de la observación de casos concretos y generalizando lo que se ha observado de manera continua (Klimovsky & Boido, 2005). En estos primeros documentos, no se encuentran formulaciones explícitas para las reglas de cálculo, ni una distinción clara entre resultados exactos y aproximados. En aquella época los problemas que planteaba la supervivencia humana era el mayor interés de la mayor parte de la humanidad (Boyer, 1986).

#### 2.2.2.2 Noción pitagórica de número

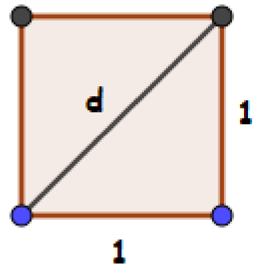
Pitágoras de Samos (582-500 a.C.) luego de viajar por Egipto y Mesopotamia, fundó su escuela en el sur de Italia, en el ámbito menos convulsionado de Crotona, y marcó la historia de la ciencia al ser considerado el primer racionalista de la historia de la filosofía. Esto se debe a que, para él y sus seguidores, los objetos matemáticos no son empíricos, sino que pertenecen a otra realidad de lo no perceptible por los sentidos (Klimovsky & Boido, 2005). Se atribuye como lema de la escuela pitagórica la frase “los números constituyen la esencia del mundo”. Para sus integrantes, dos segmentos cualesquiera deben ser conmensurables[8], dado que consideraban a los puntos como átomos que poseen extensión. De esta manera, cada segmento representa una hilera de un número finito de puntos y, por lo tanto, es posible encontrar una medida común para ambos, que represente la unidad, de tal manera que sea parte alícuota de uno y otro. Es decir, dados dos segmentos cualesquiera, podría encontrarse como unidad mínima común la longitud del punto extenso (Klimovsky & Boido, 2005). Esta noción resultó ser muy útil en la determinación de áreas y volúmenes: las áreas se calculaban como la suma de filas formadas por átomos y los volúmenes como suma de capas de átomos. Puesto que consideraban los cuerpos compuestos por átomos, resultó natural considerar las figuras geométricas bajo el mismo punto de vista (Aleksandrov et al., 2019). Podría decirse que esta concepción de número, como agregado de unidades, en realidad corresponde a la de número natural. Luego, la esencia de todas las cosas resulta explicable a través de los números naturales y de sus razones (Romero, 1995). Sin embargo, se encontraron con problemas que invalidaban este principio sobre el cual se fundamentaba la actividad de la escuela pitagórica.

#### 2.2.2.3 El problema de la inconmensurabilidad y las paradojas de Zenón

El fracaso en la noción pitagórica de número se debió paradójicamente al Teorema de Pitágoras, al comparar la medida de la diagonal de un cuadrado con su lado: si tomamos un cuadrado cuyo lado mide 1, aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene que su diagonal mide $\sqrt{2}$ (Figura 15). Puede probarse, empleando el método de reducción al absurdo, que no existe ninguna fracción del tipo $\frac{m}{n}$, donde $m$ y $n$ son números naturales, que elevada al cuadrado sea igual a 2. Actualmente, diríamos que $\sqrt{2}$ es un número irracional, pero para los pitagóricos tal resultado generaba conmoción dado que implicaba concebir puntos sin extensión, una abstracción anti intuitiva que está más allá de la experiencia (Klimovsky & Boido, 2005). No conocían los números irracionales, ni tenían un símbolo como $\sqrt{2}$, por lo cual no podían representar con ningún número a la longitud de la diagonal del cuadrado (Aleksandrov et al., 2019).

[8] Dos segmentos son conmensurables si es posible encontrar alguna unidad de medida en común para ambos, es decir, tal que el segmento unidad sea a la vez, parte alícuota de uno y otro, aunque el número que expresa la medida, en cada caso, no sea el mismo (Klimovsky & Boido, 2005, p. 43).

**Figura 15.** ***Aplicación del Teorema de Pitágoras para calcular la diagonal de un cuadrado de lado*** *1*




$$d^2 = 1^2 + 1^2$$
$$d^2 = 2$$
$$d = \sqrt{2}$$

Los argumentos contra el atomismo se encuentran, también, en otras escuelas filosóficas, como la de los eleáticos. Zenón de Elea (siglo V a.C.) conduce a paradojas la idea de obtener magnitudes continuas a partir de un conjunto de unidades o partículas infinitamente pequeñas (Romero, 1995). Las más célebres son la de Aquiles, la del Estadio y la de la Flecha. Aquí se presenta la primera de ellas:

> Nos encontramos con Aquiles, el de los pies ligeros, compitiendo en una carrera con una tortuga a la que se le ha dado una ventaja inicial, y en la paradoja se trata de demostrar que Aquiles, por muy velozmente que corra, no podrá alcanzar ni, por supuesto, adelantar nunca a la tortuga, por muy lentamente que ésta se mueva. Pues para cuando Aquiles haya alcanzado la posición inicial de la tortuga, ésta habría avanzado alguna distancia, aunque sea pequeña, y cuando Aquiles haya recorrido esta distancia, la tortuga habrá avanzado algo más lejos, y así el proceso continúa indefinidamente, con el resultado de que el veloz Aquiles no puede alcanzar a la lenta tortuga. (Boyer, 1986, p. 109)

La paradoja de Aquiles y la tortuga, sostiene que el movimiento es imposible bajo la hipótesis de la subdivisión indefinida del espacio y el tiempo. Por hecho empírico, Zenón sabía perfectamente que Aquiles finalmente alcanzaría a la tortuga pero su crítica está destinada a mostrar que los puntos y los instantes no pueden ser discretos (separados unos de otros), es decir, que el espacio es infinitamente indivisible, en contra de la opinión pitagórica (Klimovsky & Boido, 2005).

La influencia de los argumentos de Zenón generó un cambio en el punto de vista de las magnitudes geométricas, dado que ya no aparecen para la época de Euclides asociadas a números (o a su representación por medio de átomos), sino a segmentos. Así el dominio de lo numérico se mantuvo en el plano de lo discreto, pero el mundo de las magnitudes continuas fue tratado por métodos puramente geométricos (Boyer, 1986).

#### 2.2.2.4 La teoría de proporciones en los elementos de Euclides

La inconmensurabilidad de segmentos causa la ruina de la teoría de proporciones utilizada por los griegos: cuatro cantidades están en proporción, a:b=c:d , si las dos razones a:b y c:d tienen la misma resta mutua, es decir, si la menor en cada una de las dos razones cabe en la mayor el mismo número entero de veces, y el resto en cada caso cabe en la menor el mismo número entero de veces, y el nuevo resto cabe en el anterior el mismo número entero de veces, y así sucesivamente. En la siguiente figura se ejemplifica la proporción

BA:CD=HI:JK. Se observa que la medida BA cabe una vez sobre CD (BA=CE), el resto ED entra exactamente tres veces sobre BA (ED=BF=FG=GA). La misma relación se encuentra entre HI y JK. La medida HI cabe una vez sobre JK (HI=JL), el resto LK entra exactamente tres veces sobre HI (LK=HM=MN=NI).

**Figura 16.** ***Ejemplo de proporcionalidad entre segmentos conmensurables***


Esta definición sería imposible de utilizar en segmentos inconmensurables ya que implicaría un proceso indefinido (Boyer, 1986).

Eudoxo de Cnido (*ca*. 408-*ca*. 355 a.C.) realiza dos contribuciones que vienen a dilucidar este problema:

1) *La teoría de proporciones expuesta en el libro V de los Elementos de Euclides*. Esta teoría, aplicable tanto a magnitudes conmensurables como inconmensurables puede formularse en forma simbólica de la siguiente manera:

   $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , sí y sólo si dados dos números naturales cualesquiera $m$ y $n$, si $m.a < n.b$ entonces $m.c < n.d$, o si $m.a = n.d$ entonces $m.c = n.d$, o bien si $m.a > n.b$ entonces $m.c > n.d$. (Boyer, 1986, p.128)

   Esta definición de igualdad de dos razones no dista demasiado del procedimiento de productos cruzados que utilizamos hoy en día para las fracciones:

   $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a.d = b.c.$$

2) *El método exhaustivo*. A partir del axioma de Arquímedes o axioma de la continuidad[9], se logra demostrar el siguiente enunciado que constituye la base para el método de exhaución griego:

   > Si de cualquier magnitud se sustrae una parte superior o igual a su mitad, y si del resto se sustrae una parte superior o igual a su mitad, y si se continúa este procedimiento de subdivisión, quedará una magnitud más pequeña que cualquier magnitud dada de la misma especie. (Collete, 1985a, p. 98)

Cabe aclarar que para los griegos, el cociente entre magnitudes no constituía un número en sí mismo, sino que era una relación entre números. El concepto de número irracional fue una aportación posterior de los matemáticos orientales (Alexandrov et al., 2019). La

[9] Axioma de Arquímedes: se dice que dos magnitudes tienen una razón una a la otra, si se puede encontrar un múltiplo de una cualquiera de ellas que supere a la otra.

validación del trabajo de las magnitudes continuas se constituyó en el dominio de la geometría, no de la aritmética, situación que se mantuvo hasta los siglos XVII y XVIII (Bergé & Sessa, 2003).

#### 2.2.2.5 El desarrollo de la aritmética y del álgebra hindú y árabe

Los matemáticos hindúes, en el período comprendido entre el 200 y el 1200, conocían la geometría de los griegos, pero desarrollaron un don especial en la aritmética. Su motivación se encontraba principalmente en la astronomía y en la astrología. Fueron audaces al trabajar con números irracionales, aplicando métodos similares a los utilizados con números racionales e independizándose de la geometría. Su interés en el cálculo hizo pasar por alto las cuestiones filosóficas y las argumentaciones lógicas que preocupaban a los griegos. Obtuvieron conclusiones útiles al operar con estos números con métodos correctos. A su vez, consideraron al cero como número, anteriormente utilizado para representar la ausencia de número, y operaron con él. También introdujeron los números negativos para indicar deudas, los números positivos representaban activos. Brahmagupta (*fl.* 628) da reglas para las cuatro operaciones y Bhaskara (1114-*ca.* 1185) indica que la raíz cuadrada de un número positivo da como resultado un número positivo y otro negativo, aunque no se dio ninguna definición, axioma o teorema. Su interés fue puramente práctico, aspecto observado también en su desarrollo del álgebra, aplicada a problemas habituales de comercio y a la astronomía (Kline, 1972).

Los árabes también poseían el conocimiento de los griegos y de los hindúes. De estos últimos tomaron y mejoraron los símbolos numéricos y adoptaron su sistema de notación posicional. Al igual que los hindúes, trabajaron libremente con los irracionales, tal es así que Omar Khayyâm (*ca.* 1050-1123) y Nasir-Eddin (1201-1274) afirmaban que toda razón entre magnitudes, conmensurables e inconmensurables, puede ser considerada un número. No fueron tan arriesgados con los números enteros dado que rechazaron las reglas de operaciones legada por los hindúes. En su obra titulada Algebra, al-Khowarismi (siglo IX) resuelve ecuaciones lineales y cuadráticas evitando soluciones negativas y la sustracción de cantidades mayores al minuendo. Su confianza en la matemática griega se hace evidente al resolver algebraicamente un problema, para luego justificarlo con procesos geométricos, no pudiendo desligar del todo la aritmética y el álgebra del dominio geométrico (Kline, 1972).

#### 2.2.2.6 La concepción de número en los siglos XVI y XVII

Durante la primera mitad de siglo XVI, no hubo demasiados cambios en la aritmética práctica, legada del trabajo de los hindúes y árabes. Para mediados del siglo XVI, en Europa se hacían necesarios avances a partir de necesidades prácticas y científicas como: la nueva teoría astronómica heliocéntrica de Copérnico y Kepler que requería cálculos más precisos, el desarrollo de la actividad bancaria y comercial, el trabajo técnico de arquitectura y la fabricación de cañones y el estudio de movimiento de proyectiles (Kline, 1972).

La aceptación o no de los diferentes tipos de números, generaba discusión entre los matemáticos de este período. Para el 1500 ya era aceptado el número 0, los irracionales eran utilizados libremente en los cálculos aritméticos pero se cuestionaba si estos entes eran realmente número: Stifel consideraba la expresión decimal de números irracionales aunque concebía como número solo a los enteros y los fraccionarios positivos, Pascal y Barrow entendían a $\sqrt{3}$ solo como magnitud geométrica continua, Stevin sí aceptaba a los irracionales como números y los aproximaba mediante racionales, punto de vista similar tenían Wallis y Descartes en su aceptación. En cuanto a los números negativos, la mayoría de los matemáticos de los siglos XVI y XVII no los aceptaban, en particular cuando eran raíces de ecuaciones se descartaban por ser consideradas soluciones imposibles. Algunos matemáticos los aceptaban pero con ciertos recaudos: Descartes los consideraba números ya que podía transformar una ecuación con raíces negativas en otra con raíces positivas; Harriot, aunque no aceptaba raíces negativas, a veces ponía un número negativo como segundo miembro de una ecuación. Stevin y Wallis aceptaron los números negativos completamente, el primero de ellos considerando coeficientes negativos y aceptando las raíces cuando estas eran negativas (Kline, 1972).

Durante los siglos XVI y XVII los métodos para operar con números fueron mejorados y extendidos. Stevin difundió el uso de fracciones decimales para operar con números racionales, en vez de la utilización del sistema sexagesimal usualmente utilizado con anterioridad para operar con fracciones, con el objetivo de ahorrar tiempo a los contables (Kline, 1972). Este matemático no fue el primero en utilizar las fracciones decimales sistemáticamente, pero se popularizó su uso cuando acometió la tarea de explicarlas con todo detalle y de forma elemental (Boyer, 1986). Vieta mejoró métodos para la extracción de raíces cuadradas y cúbicas. También, se comenzó a utilizar fracciones continuas para aproximar irracionales. Napier (1550-1617) con la intención de facilitar cálculos de trigonometría esférica para resolver problemas astronómicos, desarrolla los logaritmos. Al tomar logaritmos de senos, la nueva escala crece en progresión aritmética mientras que los senos decrecen en progresión geométrica. Los números en la nueva tabla de logaritmos estarán más próximos entre sí que en la tabla original. El enfoque de Napier no considera al logaritmo como el exponente de una potencia de base fija. Hacia fines del siglo XVII una serie de matemáticos cayeron en la cuenta que podían definirse de esa manera (anteriormente no se utilizaban los exponentes fraccionarios o irracionales). William Jones realiza el primer desarrollo sistemático en 1742, aunque Euler ya había definido los logaritmos de esta manera y había propuesto al número $e$ como base para los logaritmos naturales (Kline, 1972).

#### 2.2.2.7 La irracionalidad de los números $\boldsymbol{\pi}$ y $\boldsymbol{e}$. La distinción entre números algebraicos y trascendentes

Durante el siglo XVIII, surge la distinción entre números irracionales algebraicos y trascendentes, es decir, aquellos números que pueden obtenerse como raíz de polinomios a coeficientes racionales (algebraicos) o no (trascendentes). En esta misma época, Euler demuestra que $e$ y $e^2$ son irracionales y Lambert realiza la primera demostración, en 1761, de que $\pi$ es irracional. Este último matemático, probó que si $x$ es un número racional distinto de cero, entonces $tg\ x$ es irracional. Como $tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ es racional, $\frac{\pi}{4}$ no puede serlo y, por lo tanto, tampoco puede serlo $\pi$. Sin embargo, esta demostración no daba solución a la cuadratura del círculo[10] puesto que existen número irracionales (como las raíces cuadradas de enteros positivos) que son construibles mediante métodos euclídeos. Euler reconocía una diferencia entre irracionales algebraicos y trascendentes hacia el 1744, pero se debe a Liouville, Hermite y Linderman su clara existencia. Liouville (1809-1882) demuestra, mediante la teoría de fracciones continuas, que ni $e$ ni $e^2$ pueden ser la raíz de una ecuación cuadrática con coeficientes enteros. Luego, con este resultado, Hermite (1822-1901) demuestra que $e$ es trascendente. La trascendencia de $\pi$ se debe a Linderman (1852-1939), demostrándolo en 1882, dando al fin por concluido el problema de la cuadratura del círculo ya que solo sería posible si $\pi$ fuera la raíz de una ecuación de segundo grado. Se deduce de este resultado que $\pi$ puede ser la ordenada de una curva, solo si esta es trascendente, siendo su construcción posible solo mediante procedimientos o aparatos (Collete, 1985b).

#### 2.2.2.8 La aritmetización del análisis y la necesidad de teorías formales de número real

Hasta el siglo XIX, los conceptos de número natural, cero, número negativo, fracción, número racional e irracional fueron emergiendo en un proceso lento y progresivo, aunque su uso se fundamenta de manera intuitiva y sobre consideraciones de naturaleza geométrica o algebraica (Collete, 1985b).

El desarrollo del cálculo durante los siglos XVII y XVIII fue marcado por cuatro problemas fundamentales: dada una fórmula de distancia recorrida por un móvil en función del tiempo, hallar la velocidad y la aceleración del mismo en cada instante; la búsqueda de rectas tangentes en cada punto de una curva; hallar valores máximos y mínimos de funciones; y, por último, hallar volúmenes de cuerpos acotados por superficies o áreas de figuras acotadas por curvas. La naturaleza de estos problemas escapaba a la problemática sobre el cuestionamiento del número buscado. Es la existencia de la solución a los modelos planteados lo que hace necesaria la completitud del sistema numérico que se está utilizando (Bergé & Sessa, 2003). Se requiere un sistema de números que sea la imagen abstracta de todos los valores posibles de una magnitud que varía continuamente. Emerge la propiedad más importante del sistema de los números reales: su continuidad (Alexandrov et al., 2019). Cabe aclarar que el pensamiento de los matemáticos del siglo XVIII era ciertamente libre e intuitivo: el significado físico de la matemática guió los pasos matemáticos y ofreció seguridad en sus argumentaciones aunque eran, en su mayoría, conscientes de su propia indiferencia hacia el rigor. En su labor, ignoraron cuestiones delicadas del análisis, tales como la convergencia de series e integrales, el intercambio del orden de la diferenciación y la integración, el uso de diferenciales de grado superior y los problemas en torno a la existencia de integrales y soluciones de ecuaciones diferenciales (Kline, 1972).

Sin embargo, a partir del desarrollo de las geometrías no euclidianas en el siglo XIX, se genera una crisis en los fundamentos de la matemática dado que la existencia de tres

[10] Consiste en construir, utilizando solamente regla no graduada y compás, un cuadrado de igual área que un círculo dado.

sistemas axiomáticos, matemáticamente correctos y no compatibles entre sí, desplegó un manto de desconfianza principalmente en los argumentos sustentados en representaciones gráficas. Los matemáticos de la primera mitad del siglo se propusieron la tarea de reconstruir el análisis sobre bases sólidas de conceptos aritméticos. En este período, se definen con precisión nociones y se demuestran propiedades que eran consideradas verificadas por el dominio numérico en cuestión, sin una discusión sobre su validez. Es el caso de los conceptos de variable, función, infinitésimo, función continua y otras. Se produjo entonces una cierta circularidad en los argumentos de las demostraciones. La definición precisa de límite se hizo necesaria para la clarificación del concepto de número real (Bergé & Sessa, 2003). En particular, el hecho de que una sucesión de números racionales puede tener como límite un número irracional e inversamente. Los trabajos de Cauchy sobre la convergencia de las series infinitas, el teorema del valor medio[11] demostrado por Bolzano y el estudio de funciones discontinuas representables mediante series de Fourier revelaron la exigencia de una estructuración lógica de los números sobre bases esencialmente aritméticas. Las paradojas existentes, los resultados incongruentes y las definiciones imprecisas demandaban una revisión del estatuto lógico sobre los que se basaban los conocimientos matemáticos existentes. El rigor exigido a la matemática en esa época puso de manifiesto la falta de claridad e imprecisión del sistema de los números reales, que hasta ese momento se operaba bajo una comprensión intuitiva basada en consideraciones geométricas o algebraicas (Collete, 1985b).

Esta última etapa, marcó dos caminos hacia el estatuto de los números reales:

I) Definirlo de tal manera que las propiedades atribuidas a los números reales se verifiquen (teorías constructivas del número real).
II) Definirlo como un cuerpo axiomático[12] que satisfaga dichas propiedades (teoría axiomática del número real).

### 2.2.2.9 Teorías constructivas del número real

Varios matemáticos realizaron contribuciones a la hora de encontrar una teoría formal que definiera los números reales. Los números irracionales suponían la mayor dificultad, aunque aún no estaban lógicamente establecidas ni siquiera las propiedades más simples de los números racionales (los matemáticos de la época supusieron que se conocían con tanta seguridad que no era necesaria su fundamentación, o realizaron precipitadamente algún esquema improvisado). El primero que ofreció un tratamiento de los números irracionales fue Hamilton, en dos artículos de 1833 y 1835, en los cuales basaba en el tiempo su noción de todos los números (racionales o irracionales). No se expone con detalle su teoría dado que resultó poco satisfactoria para la matemática, aunque su idea

---

[11] Si una función es continua en $[a, b]$ y se tiene que el signo de $f(a)$ es distinto al signo de $f(b)$ entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$ (Bergé & Sessa, 2003).

[12] Un axioma en matemática es una proposición admitida como verdadera (sin demostración) para el desarrollo de una teoría. Un cuerpo axiomático posee términos primitivos y axiomas, a partir de los cuales (y de ciertos desarrollos lógicos) se demuestran teoremas y se definen nuevos conceptos. Un sistema axiomático formal debe cumplir con las siguientes propiedades: consistencia, completitud, saturación, independencia y decidibilidad sintáctica.

de particionar a los racionales en dos clases y definir un número irracional como el representante de tal partición, tendrá conexión con la obra de Dedekind que se desarrolla más adelante. Méray publica sus ideas en 1869, que consistían esencialmente en definir un número real como el límite de una sucesión de números racionales. Una sucesión convergente determina un número racional como límite, o bien un número ficticio que son lo que conocemos como números irracionales. Méray no es muy preciso en determinar si su sucesión convergente es o no el número mismo (esta idea la retoma luego Cantor, para definir número real). Weierstrass, se percató de que era necesario dar una definición de número irracional independiente del concepto de límite puesto que, hasta ese momento, este concepto había supuesto el primero (existía una circularidad en la definición). Luego, Weierstrass corrige este error lógico identificando la sucesión misma con el número límite. En forma sumamente simplificada, siguiendo a Boyer (1986), se podría decir que lo que se daría en llamar número real $\frac{1}{3}$ no es el límite de la sucesión $\{s_n\}$ siendo $s_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots + \frac{3}{10^n}$, sino que es la sucesión misma asociada a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n}$[13].

En 1871, Cantor había comenzado a desarrollar una teoría de número real, con ideas parecidas a las de Méray y Weierstrass. Heine sugiere algunas simplificaciones a la teoría de Cantor en 1872 (por tal razón suele llamarse teoría de Cantor-Heine). Se introduce una nueva clase de números, los números reales, basando su construcción en la existencia de los números racionales. Se parte de una sucesión $\{a_i\}$ de números racionales que satisface la condición de que

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - a_{n+r}) = 0$$

siendo $r$ un número natural cualquiera. A esta sucesión se la denomina sucesión fundamental, y es, por definición, un número real al que podemos denotar $b$. Dos sucesiones fundamentales $\{a_i\}$ y $\{b_i\}$ son iguales, o representan el mismo número real, solo si $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$. Se puede definir la sucesión nula, positiva y negativa de la siguiente manera:

> Dado un número racional arbitrario[14], los términos $a_n$ de la sucesión para $n$ suficientemente grande son todos en valor absoluto menores que el número dado; o todos los términos a partir de un cierto $n$ son mayores que un cierto número racional positivo $\rho$; o bien todos los términos de la sucesión a partir de un cierto $n$ son menores que un cierto número racional negativo $-\rho$. En el primer caso, $b = 0$; en el segundo $b > 0$; en el tercero $b < 0$. (Kline, 1972, pp.1298-1299)

Luego, dadas dos sucesiones fundamentales $\{a_i\}$ y $\{a'_i\}$, representadas por $a$ y $a'$, se demuestra que $\{a_i \pm a'_i\}, \{a_i . a'_i\}$ y $\left\{\frac{a_i}{a'_i}\right\}$, con $a'_i \neq 0$, son sucesiones fundamentales. Esto define a la suma/resta $a \pm a'$, el producto $a.a'$ y el cociente $\frac{a}{a'}$ $(a' \neq 0)$. Luego, puede definirse si $a = a', a < a'$ ó $a > a'$, según sea $a - a' = 0$, $a - a' < 0$ ó $a - a' > 0$

[13] Esta idea será retomada por Cantor, definiendo un nuevo sistema de números llamados números reales.
[14] Se infiere del contexto, que el autor ha querido considerar un número racional positivo arbitrario.

respectivamente. Se puede observar que los números reales racionales quedan incluidos en esta definición de número real, dado que para cada número racional $a$ puede definirse una sucesión fundamental $\{a_n\}$ en donde todos sus términos sean iguales a $a$ (y que define al número real $a$). Luego, si existe un número racional $a$ tal que $\lim_{n\to\infty}(a - a_n) = 0$ entonces diremos que $a$ es el límite de la sucesión fundamental $\{a_n\}$ (Collete, 1985b). Por ejemplo, si se define la sucesión fundamental $\{b_n\} = \{0{,}1; 0{,}11; 0{,}111; \ldots\}$, existe un único número real $b = 0,\hat{1}$, que puede ser definido por la sucesión fundamental $a_n = \frac{1}{9}$ $\forall n$, tal que

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - \tfrac{1}{9}) = 0.$$

De esta manera, se define el número real $0,\hat{1}$ que se corresponde con el número racional $\frac{1}{9}$.

Pero si se tiene un símbolo $b$, un número real (que no se corresponde con ningún número racional) definido por la sucesión fundamental $\{b_i\}$, tal que la diferencia $b - b_i$ se vuelve infinitamente pequeña a medida que $i$ crece se dirá que el límite de la sucesión $\{b_i\}$ es $b$ (Bergué y Sessa, 2003). Por ejemplo, se define un número real a partir de la sucesión $\{b_n\} = \{1{,}4; 1{,}41; 1{,}414; 1{,}4142; \ldots\}$, siendo $(b_n)^2 < 2$ y $\left(b_n + \frac{1}{10^n}\right)^2 > 2$, que se simboliza $\sqrt{2}$. Entonces, la diferencia $\sqrt{2} - b_i$, define la sucesión fundamental $\{b_n - b_i\}$ para cada $i$ fijo. Es decir:

$$\sqrt{2} - b_1 = \sqrt{2} - 1{,}4 = \{0; 0{,}01; 0{,}014; 0{,}0142 \ldots\}$$
$$\sqrt{2} - b_2 = \sqrt{2} - 1{,}41 = \{-0{,}01; 0; 0{,}004; 0{,}0042 \ldots\}$$
$$\sqrt{2} - b_3 = \sqrt{2} - 1{,}414 = \{-0{,}014; -0{,}004; 0; 0{,}0002; \ldots\}$$
$$\vdots$$

Se puede observar que, para cada $i$, resulta: $b_n - b_i < 0$, para $n < i$; $b_n - b_i = 0$, para $n = i$; y $b_n - b_i > 0$ para $n > i$. A medida que $i$ crece, los valores de $b_n - b_i$ se hacen cada vez más pequeños para todo $n > i$. Por lo tanto, tiene sentido decir que $\lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt{2}$.

Luego, queda definido cualquier número real (racional o irracional) a partir del siguiente resultado:

> … si $\{b_n\}$ es cualquier sucesión de números reales (racionales o irracionales), y si $\lim_{n\to\infty}(b_{n+m} - b_n) = 0$ para $m$ arbitrario, entonces existe un único número real $b$, determinado por una sucesión fundamental $\{a_n\}$ de números racionales $a_n$ tal que $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. (Kline, 1972, p. 1299)

Al haber agregado a los racionales, los límites de sucesiones fundamentales, se obtiene un nuevo dominio numérico que cumple con la condición de que toda sucesión fundamental tiene límite (y, por lo tanto, es completo). Por otro lado, Cantor relaciona los puntos de la recta con los números reales de la siguiente manera: establecido un origen y un segmento unidad U, asigna un número racional a cada segmento conmensurable con U y, luego, a cada segmento inconmensurable con U le asigna el valor b, siendo b el límite de una sucesión fundamental $\{a_n\}$ cuyos elementos se corresponden con segmentos $A_n$. Esta asignación, permite poner en correspondencia puntos de una recta con números reales, aunque la recíproca debe garantizarse mediante un axioma (Bergé & Sessa, 2003).

Otra de las teorías es la desarrollada por Dedekind. Al igual que en las teorías anteriores, intenta definir completamente los números irracionales mediante los números racionales. Para ello plantea una comparación entre puntos de la recta y números racionales, advirtiendo que existen infinidad de puntos que no se corresponden con ningún número racional y se deberán crear nuevos números de manera tal que pueda completarse la recta. Luego, se cuestiona en qué consiste la continuidad de la recta, advirtiendo que cada punto P de una línea recta produce una separación tal que cada punto de una porción está situado a la izquierda de cada punto de la segunda porción. Dedekind formula el siguiente principio que define la esencia de la continuidad:

> Si todos los puntos de una línea recta se sitúan en dos clases tales que cada punto de la primera clase se encuentra a la izquierda de cada uno de los puntos de la siguiente clase, entonces existe un único punto que produce esta división de todos los puntos en dos clases, esta separación de la línea recta en dos porciones. (Collete, 1985b, p. 373).

Considera a este principio un axioma ya que no puede ser demostrado y es por lo que se le atribuye a la línea recta su continuidad. Luego, Dedekind introduce su célebre cortadura al considerar la división de los números racionales en dos clases $A_1$ y $A_2$, tales que todo número de $A_1$ sea menor que todo número de $A_2$. Se designa a la cortadura $(A_1, A_2)$. Luego, cada número racional $a$ produce una cortadura $(A_1, A_2)$ en la cual $a$ es mayor a todos los elementos de $A_1$ y es menor a todos los elementos de $A_2$. Pero existen infinidad de cortaduras que no están definidas por números racionales. Por ejemplo, si tomamos en la primera clase todos los números racionales negativos y todos aquellos no negativos cuyos cuadrados sean menor que 2 y en la segunda clase todos los demás racionales, se obtiene una cortadura que no está determinada por ningún número racional (definiría a $\sqrt{2}$). A partir de esta definición, Dedekind realiza la comparación de cortaduras, presentando tres propiedades fundamentales de los números reales. Siendo $\alpha$ y $\beta$ los números reales que producen las cortaduras $(A_1, A_2)$ y $(B_1, B_2)$ respectivamente, se puede demostrar que:

> I) Si $\alpha > \beta$ y $\beta > \gamma$ entonces $\alpha > \gamma$, y se dirá que el número $\beta$ se encuentra entre $\alpha$ y $\gamma$.
> II) Si $\alpha, \gamma$ son dos números cualesquiera diferentes, entonces existe una infinidad de números diferentes $\beta$ que se encuentran entre ellos.
> III) Si $\alpha$ es un número real cualquiera, entonces todos los números reales se dividen en dos clases $A_1$ y $A_2$, de manera que cada una de ellas posee un número infinito de elementos, cada miembro de $A_1$ es inferior a $\alpha$ y cada miembro de $A_2$ es superior a $\alpha$. El número $\alpha$ puede ser asignado a cualquier de las clases. (Collete, 1985b, pp.374-375)

Dedekind plantea que el dominio de los números reales posee la propiedad de la continuidad y define explícitamente la operación suma, agregando que las otras operaciones se pueden definir de manera análoga.

Tanto en la teoría de Cantor como en la de Dedekind, se reconoce la necesidad de establecer axiomáticamente la continuidad de la recta para luego, a partir de sus construcciones, establecer la completitud del sistema numérico (según la versión de completitud de cada una) (Bergé & Sessa, 2003). A pesar de ciertas imprecisiones, como por ejemplo de dónde proviene el número irracional $\alpha$ que produce la cortadura o por qué el número irracional $\alpha$ es distinto de la cortadura, la teoría de Dedekind fue aceptada por la mayoría de los matemáticos (Collete, 1985b). Más adelante, se hicieron posibles algunas modificaciones como la teoría de clases contiguas (introducidas por Capelli en 1897) y la teoría de sucesiones monótonas contiguas (a partir de los aportes de Lipschitz, Arzelà y Bachmann a la teoría de Cantor), que se estudian actualmente como se ha mostrado en la revisión de libros de texto de nivel superior en el Capítulo N° 1 Introducción (Rey Pastor et al., 1969).

#### 2.2.2.10 La teoría axiomática de Hilbert

Algunos años después, en 1899, Hilbert publica su teoría axiomática para dar respuesta al problema de la completitud numérica. Reconociendo a los métodos constructivos (denominados por él como método genético) por su valor pedagógico heurístico, consideraba más seguro desde el punto de vista de la lógica la aplicación del método axiomático para la definición del sistema completo de los números reales.

Asume, primero, el término *número* no definido denotado por letras $a, b, c,$ etc. y plantea los siguientes axiomas:

I. Axiomas de conexión:

$I_1$. A partir de un número $a$ y el número $b$ se obtiene por adición un determinado número $c$; simbólicamente

$$a + b = c \qquad \text{o} \qquad c = a + b.$$

$I_2$. Si $a$ y $b$ son números dados, existe uno y sólo un número $x$ y existe también un y solo un número $y$ tales que

$$a + x = b \qquad \text{y} \qquad y + a = b.$$

$I_3$. Hay un número determinado, denotado por 0, tal que para cualquier $a$

$$a + 0 = a \qquad \text{y} \qquad 0 + a = a.$$

$I_4$. A partir del número $a$ y el número $b$ se obtiene por otro método, la multiplicación, un número determinado $c$; simbólicamente

$$ab = c \qquad \text{o} \qquad c = ab.$$

$I_5$. Dados dos números arbitrarios, $a$ y $b$, si $a$ no es 0, existe uno y sólo un número $x$, y también uno y sólo un número $y$, tales que

$$ax = b \qquad \text{a}[sic] \qquad ya = b.$$

$I_6$. Existe un número determinado, denotado por 1, tal que para cada $a$ tenemos

$$a.1 = a \qquad \text{y} \qquad 1.a = a.$$

II. Axiomas de cálculo:

$II_1$. $a + (b + c) = (a + b) + c$.

$II_2$. $a + b = b + a$.

$II_3$. $(ab)c = a(bc)$.

$II_4$. $a(b + c) = ab + ac$.

$II_5$. $(a + b)c = ac + bc$.

$II_6$. $ab = ba$.

III. Axiomas de orden:

$III_1$. Si $a$ y $b$ son dos números diferentes, entonces uno de ellos es siempre mayor que el otro; este último se dice que es más pequeño que el primero; simbólicamente

$$a > b \qquad \text{y} \qquad b < a.$$

$III_2$. Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.

$III_3$. Si $a > b$ entonces siempre es cierto que

$$a + c > b + c \qquad \text{y} \qquad c + a > c + b.$$

$III_4$. Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$ y $ca > cb$.

IV. Axiomas de continuidad:

$IV_1$. (Axioma de Arquímedes). Si $a > 0$ y $b > 0$ son dos números arbitrarios, entonces es posible sumar $a$ consigo mismo un número suficiente de veces para tener

$$a + a + \cdots + a > b.$$

$IV_2$. (Axioma de completitud). No es posible añadir al sistema de los números ninguna colección de cosas de manera que la colección resultante siga satisfaciendo los axiomas precedentes; dicho en pocas palabras, los números forman una colección de objetos que no puede ampliarse sin que deje de cumplirse alguno de los axiomas precedentes.

Hilbert señala que esos axiomas no son independientes; se pueden deducir algunos de ellos de los otros. (Kline, 1972, pp. 1306-1308)

También, señala que es necesario probar la consistencia[15] de este sistema axiomático. Una vez logrado esto, quedaría definida matemáticamente la existencia de los números reales (en ese momento, no era consciente de la dificultad de esta tarea). Si bien su teoría recibió

[15] "Se dice que un sistema axiomático es consistente si no puede haber en él un teorema tal que su negación también sea teorema. Dicho de otro modo, no encontraremos en el sistema dos teoremas contradictorios" (Klimovsky & Boido, 2005, p. 151).

críticas, a los matemáticos en general les pareció que se resolvían todos los problemas lógicos presentados hasta ese momento (Kline, 1972).

### 2.2.2.11 El problema de la consistencia del sistema de los números reales

El problema de probar la consistencia del sistema axiomático de los números reales proviene de probar la consistencia de la geometría euclideana, entendida como sistema axiomático, y que a su vez probaría la consistencia de las geometrías no euclideanas. Esto se debe a Descartes (1596-1650) y Fermat (1601-1665) y a su creación de la geometría analítica. La geometría analítica consiste en la posibilidad de expresar todo lo que se dice en términos de la geometría euclideana en términos de la aritmética de los números reales. Por ejemplo, un punto del plano (euclideano) se corresponde con un par ordenado de números reales, una recta del plano se traduce en una ecuación de primer grado con dos incógnitas $ax + by + c = 0$, siendo $a, b$ y $c$ números reales (previo al establecimiento de un sistema de referencia de ejes coordenados, con una unidad de medida en sus ejes establecida). Luego, es posible que todo teorema de la geometría euclideana se corresponda con un teorema de la aritmética de los números reales. De esta manera es posible reducir el problema de la consistencia de la geometría euclideana a la consistencia de la teoría de los números reales. Pero se verá que este problema acaba por reducirse a la consistencia de los números racionales, este a la de los enteros y, por último, a la consistencia de los números naturales.

Como ya se ha desarrollado en la sección anterior, las teorías constructivas del número real se basan en la existencia de números racionales. De esta manera se reduce el sistema de los números reales al sistema de los números racionales. Es posible entonces construir los números racionales a partir de los números enteros, definiéndolos como clases de equivalencia[16] a partir de la siguiente relación: $(m, n) \sim (p, q) \Leftrightarrow m \cdot q = n \cdot p$, siendo " $\cdot$ " la multiplicación de $m, n, p$ y $q$ números enteros. Por ejemplo, sabemos que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ y podemos expresar cada una de estas fracciones como los pares ordenados $(1,2)$ y $(2,4)$. Diremos que son equivalentes, $(1,2) \sim (2,4)$ dado que el producto cruzado es igual $(1 \cdot 4 = 2 \cdot 2 = 4)$. Luego, el número $\frac{1}{2}$ es en realidad la clase de equivalencia de $(1,2)$, es decir, el conjunto de todos los pares ordenados de enteros que se relacionan con él.

De manera similar, es posible construir los números enteros a partir de los números naturales. Si formamos pares ordenados de números naturales $(a, b)$ y $(c, d)$, se define la siguiente relación de equivalencia: $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$. Los pares ordenados cuyo segundo número es 0 representan a los números naturales, es decir, $(5,0)$ representa al 5. En cambio, aquellos pares ordenados cuyo primer número es 0 son considerados números enteros negativos. Por ejemplo, $(0,5)$ representa el $-5$. Se puede definir, entonces, a los números enteros como las clases de equivalencia respecto de esta relación. Así se reduce el sistema de los números enteros al de los números naturales.

Falta, entonces, introducir un sistema axiomático formal para los números naturales y probar su consistencia. Tarea que lleva a cabo, en parte, Peano (1858-1932) quien realiza

[16] La clase de equivalencia de un elemento es el conjunto de todos los elementos que se relacionan con él a partir de una relación de equivalencia. Una relación es de equivalencia si es reflexiva, simétrica y transitiva.

la introducción de los números naturales a partir de términos primitivos (como cero, siguiente y número natural) y cinco axiomas. No se desarrolla aquí la axiomática de Peano, dado que no se quiere ahondar en formalidades que hagan perder la idea esencial que se intenta exponer en esta sección.

Gödel (1906-1978) publica en 1931 un escrito denominado "Sobre proposiciones formalmente indecidibles de *Principia Mathematica* y sistemas relacionados", en el cual se hallan dos resultados de gran importancia para la historia de la lógica y la matemática. El primero de ellos (el primer metateorema de Gödel) demuestra que: cualquier sistema axiomático que contenga a la aritmética es incompleto. El segundo resultado (segundo metateorema de Gödel) afirma que: ningún sistema axiomático que contenga a la aritmética puede demostrar su propia consistencia. En síntesis, se ha demostrado que cualquier sistema axiomático apto para fundamentar la aritmética (como el de Peano), si es consistente existe en él una expresión verdadera pero indemostrable. Dicho de otro modo, si el sistema es consistente no es completo, y si es completo no es consistente (Klimovsky & Boido, 2005). Queda entonces sin respuesta el problema de la consistencia del sistema axiomático de los números reales (y de las geometrías).

Sin embargo, estos problemas de la filosofía de la matemática, que se han vuelto extremadamente complejos y controvertidos, no detuvieron el desarrollo de la matemática. Por el contrario, su amplio campo de posibilidad sigue siendo un reino de libertad y creatividad, y sus aplicaciones a otras ciencias y a la tecnología no han dejado de ser fructíferas para el desarrollo del mundo moderno.

#### 2.2.2.12 Consideraciones finales del recorrido

Como es posible advertir, el conocimiento acerca del número real es variado y se ha desarrollado desde diferentes puntos de vista. Se ha realizado aquí un recorte, que seguramente puede ser robustecido, pero que intenta mostrar que el concepto de número real no es un conocimiento acabado, ni su desarrollo es un continuo lineal. Por el contrario, el concepto de número tuvo y tiene varios conflictos epistemológicos que lo hicieron y hacen desarrollar, a veces ligado a las experiencias empíricas de la vida diaria y en sociedad, y por momentos ligado al desarrollo de la matemática misma, de la física, de la lógica y otras disciplinas.

Hoy en día conviven diferentes teorías y puede encontrarse en los libros de texto presentaciones muy diferentes para el concepto de número real (como ya se ha visto en la introducción de esta tesis) que trabajan diferentes concepciones. Luego, interesa definir con precisión a lo que llamamos concepción. Más adelante y considerando el recorrido realizado en esta sección, se plantearán categorías de análisis que permitan operativizar las concepciones del número real.

### 2.2.3 Concepciones acerca del número real

Hasta aquí se ha utilizado el término concepción sin especificar en detalle su significado. La palabra concepción posee una amplia gama terminológica, pero se ha señalado al número real como objeto de estudio de la matemática, construido socialmente bajo diferentes epistemologías y a partir de necesidades de distinta índole, y como objeto de la matemática escolar, atravesado por el dME que se encuentra presente tanto en propuestas ministeriales (como los Diseños Curriculares presentados en la introducción de este estudio), como en libros de texto, entre otros. Como el objetivo principal de esta investigación es describir las concepciones que posee el profesor de matemática sobre los números reales, se conciben a las concepciones como pluralidad epistemológica del concepto, pero también como conocimientos que posee el profesor respecto al número real, que es atravesado por el dME. Se asume, entonces, como concepción al siguiente término:

> Como puede deducirse del estudio que hace Artigue (1990), la noción de concepción (o concepciones) es la más frecuentemente usada en el análisis cognitivo en Didáctica de las Matemáticas. En la explicación que hace esta autora, se consideran dos significados interdependientes para el término concepción: la perspectiva epistémica (naturaleza compleja de los objetos matemáticos y de su funcionamiento) y la perspectiva cognitiva (los conocimientos del sujeto en relación con un objeto matemático particular). (Gordillo Alfonso & Restrepo Becerra, 2012, p. 10)

Teniendo en cuenta esta definición de concepción, se podrán construir categorías de análisis para la variable concepciones acerca del número real desde estas dos perspectivas: para la epistémica se tendrá en cuenta el desarrollo histórico-epistemológico del número real, entendiendo cómo surge y evoluciona dentro del campo de la matemática y otras ciencias; atendiendo a la cognitiva, se considera el número real contextualizado en la matemática escolar correspondiente al nivel secundario de escolaridad y contempla tanto las ideas del docente acerca de la enseñanza, así como su propia formación de este concepto. Esta cuestión se desarrolla en detalle en el siguiente capítulo.

### 2.2.4 El concepto de tarea: función y forma

En esta sección se retoman algunas nociones planteadas por referentes de la TSME. Ya ha sido definido el término concepción y se han descripto características del dME que atraviesa la enseñanza de la matemática en general. Para completar este marco conceptual, solo falta definir la noción de tarea dado que es uno de los objetivos específicos de esta investigación identificar aquellas que propicien el uso del número real en el aula. En la TSME se reconoce el paso del conocimiento al saber a través de su uso, puesto que interesa estudiar la vida de los objetos matemáticos en el seno de la vida social. De esta manera, el significado dejará de ser visto como un atributo del objeto y pasará a considerarse como un derivado de su valor de uso (Cantoral et al., 2015b). Por lo tanto, conocer cómo el sujeto actúa sobre un conocimiento e identifica a qué propósitos sirve y el rol que ocupa en una situación específica dotará de significación relativa, situada y contextualizada a los objetos formales (en este caso, el número real).

Las situaciones que plantee el docente para propiciar el uso del número real en el aula, estarán manifestadas por un patrón de tareas que componen esa situación. Para reconocer y describir esas tareas, se considera lo planteado por Cordero & Flores (2007), quienes formulan una epistemología del uso de las gráficas en el dME. Los autores analizan el dME en libros de texto de nivel básico (primaria y secundaria) para identificar el uso que se les da a las gráficas con respecto a su función y su forma, definiendo estos aspectos:

> El “uso” es la función orgánica de la situación que se manifiesta por las “tareas” que componen la situación, y la forma del “uso” serán la clase de esas “tareas”. Las tareas pueden ser actividades, acciones, ejecuciones y alternancia de dominios. Cuando la alternancia de tareas sucede se genera una nueva función orgánica que debatirá con las formas de los usos. (Cordero & Flores, 2007, p. 13)

Para cada patrón de tareas encontradas en los libros donde se usen gráficas, los autores categorizan las funciones identificadas en esas tareas, describiendo una tarea representante de su grupo, ubicándola en el sistema escolar (año, eje del Diseño Curricular) y reconociendo la cantidad de ellas que se presentan de la misma índole, para saber si hay supremacía sobre un tipo de tarea específico.

Es labor del profesor, en su quehacer profesional, crear condiciones apropiadas para que los alumnos construyan aprendizajes con sentido. Es decir, significa generar conocimientos que estén disponibles para que puedan ponerse en uso en diversas situaciones y puedan resignificarse en diferentes contextos. Las actividades que propone el docente para este fin serán instrumentos que pone a disposición en la clase para ayudar a estructurar las experiencias de aprendizaje (Anijovich, 2009).

Las tareas se caracterizan entonces a partir de su función y su forma en una situación específica en donde se ponga en uso el conocimiento. En el marco de esta tesis, se entiende por función de la tarea a aquellos propósitos según los cuales el conocimiento se manifiesta y por forma a los requerimientos del quehacer matemático para llevar adelante la tarea. Se muestra en la Figura 17, un ejemplo para el uso de las gráficas propuesto por Cordero & Flores (2007). Se observa que en la actividad propuesta se solicita al alumno la reproducción de las trayectorias observadas en una retícula igual a la del gráfico provisto. En este caso, el propósito de la tarea es la reproducción y comparación de trayectorias (función) y para llevar a cabo esta tarea se requiere plasmar, reproducir o comparar trayectorias en retículas cuadradas (forma).

**Figura 17.** ***Ejemplo de tarea, función y forma de la tarea para el uso de las gráficas***

| Categoría | Gráfica de la Tarea | Ubicación de la Tarea | Descripción de la Tarea | # de Tareas |
|---|---|---|---|---|
| ***Función: Reproducción y comparación de Trayectorias.*** <br> *Forma: Patrón de tareas en la cual se plasman, producen o comparan trayectorias en retículas cuadriculadas.* <br> *(Ciclo 1: 1º, 2º)* | MSU <br> 1. "Beto camina sobre una cuadricula"  | Curricularmente pertenecen al eje Medición y Geometría y se encuentran en el libro: <br> 1. Del primer grado en la parte dos (pág. 29). | Se le solicita al estudiante: <br> 1. Comparar ciertas trayectorias compuestas de indicadores (en este caso huellas) plasmadas en una retícula cuadriculada, y se solicita la reproducción de las trayectorias en una retícula igual a la anterior. | Dos |
| |  | 2. El libro de texto del segundo grado en el bloque tres (pág. 92). | 2. *Ídem* 1 | Dos |

Tomado de "El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto" (p. 19), por F. Cordero y R. Flores, 2007, *Relime*, *10*(1), 7-38.

De manera análoga, se puede identificar la función y la forma de las tareas que se propongan en una clase de número real. Los propósitos a los cuales responda una tarea y los requerimientos del quehacer matemático para llevarla a cabo, harán emerger al menos una concepción de número real y estará en profunda relación con aquellas que posea el docente. De esta manera se pueden articular las tareas con las concepciones que las hagan emerger y que el docente pretenda trabajar con sus alumnos.

# Capítulo 3
# Metodología y diseño de la investigación

## *3.1 JUSTIFICACIÓN DE LA METODOLOGÍA*

### 3.1.1 Enfoque

Se ha adoptado un enfoque cualitativo dado que los objetivos de esta investigación implican necesariamente un proceso inductivo (de exploración y descripción de los fenómenos) puesto que no hay un procedimiento claramente definido para establecer las concepciones que poseen los docentes e identificar cómo influye el dME sobre estas, normando las prácticas docentes. Por tal razón, se requiere entender los fenómenos desde la perspectiva subjetiva de los profesores participantes de la investigación, describiendo sus propias palabras (habladas o escritas) y su conducta observable (Taylor et al., 1984). Una de las características de este enfoque es que no se pretende generalizar resultados sino proceder caso por caso, hasta llegar a una perspectiva más general (Hernández Sampieri et al., 2006).

### 3.1.2 Alcance y tipo de investigación

El alcance es, por un lado, exploratorio ya que, como pudo observarse en el estado de arte, el problema presentado no ha sido estudiado con la profundidad que merece desde el marco teórico de la Teoría Socioepistemológica y uno de los objetivos de este estudio es caracterizar el discurso numérico escolar desde una perspectiva social. Se requiere, por lo tanto, generar categorías de análisis a partir de las teorías disponibles, generando perspectivas teóricas para abordar la problemática. Por otro lado, el estudio tiene también un alcance descriptivo, dado que se quiere identificar los usos del número real que propicia el profesor de matemática en el aula a través de tareas que propone, en relación a las concepciones que posee acerca del número real.

Además, se trata de una investigación no experimental transversal porque no interesa analizar cambios de variables a lo largo del tiempo, sino que interesa describir las variables en un único momento (Hernández Sampieri et al., 2006). La recolección de datos se llevará a cabo en el momento en que los docentes participantes se encuentran enseñando número real en sus cursos, permaneciendo en el campo lo que dure la Unidad Didáctica.

## *3.2 DISEÑO. POBLACIÓN Y MUESTRA*

La enseñanza del número real en la escuela secundaria por parte de profesores de matemática constituye un caso complejo, un sistema acotado y único. En esta investigación se adopta un diseño de estudio de caso intrínseco, dado que lo que lo caracteriza no es que representa un rasgo o problema particular, sino que se interesa en toda su particularidad y en su carácter ordinario (Stake, 2013). Se considera que la población de este estudio son los docentes con título de Profesor/a de Matemática (o equivalente), en ejercicio profesional, que trabajan enseñando números reales en alguna escuela secundaria del departamento Rosario. Debido a que el estudio tiene un enfoque cualitativo, la muestra seleccionada es no probabilística ya que no interesa generalizar los resultados a una población más amplia, sino que lo que se busca es la indagación en profundidad. Ningún caso complejo puede entenderse completamente, por lo que el criterio para seleccionar la muestra ha sido pensado de manera tal que contemple variedad. Para esto se ha tenido en cuenta la formación y la trayectoria profesional de los profesores ya que se consideran características influyentes en la enseñanza que moldean su práctica. Por tal razón, se han seleccionado tres profesores de matemática, con perfiles profesionales bien diferentes, que llamaremos docente A, docente B y docente C.

- Docente A. Egresada de un profesorado terciario de la pcia. de Santa Fe. Ejerce la docencia en una escuela secundaria y en una Escuela de Enseñanza Media para Adultos del dpto. Rosario. Posee el título de Profesora de Matemática y Computación, aunque se desempeña enseñando solo Matemática. En particular, enseña Número Real en tercer año, de una Escuela Secundaria Orientada en Comunicación de gestión privada.
- Docente B. Egresada de un profesorado universitario. Ejerce la docencia en dos escuelas secundarias del dpto. Rosario y en el nivel universitario. Posee el título de Profesora en Matemática, y enseña Número Real en segundo año de una Escuela Secundaria de gestión pública, dependiente de la Universidad Nacional de Rosario.
- Docente C. Egresada de un profesorado universitario. Ejerce la docencia en una escuela secundaria del dpto. Rosario y en el nivel universitario. Además, realiza investigación en el ámbito universitario en el área Matemática. Posee el título de Profesora en Matemática, y enseña Número Real en segundo año de una Escuela Secundaria Orientada en Economía y Gestión de las Organizaciones, de gestión privada.

Se ha considerado que todas se desempeñen en su cargo de manera estable y que cuenten con una experiencia significativa realizando su tarea (mayor a 5 años). Si bien el Diseño Curricular de la Pcia. de Santa Fe para Educación Secundaria Orientada (Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe, 2014a) asigna este contenido al quinto año y los Diseños Curriculares para Educación Técnico Profesional (Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe, 2011 a-j, 2013 a-d, 2014 b-e) al tercer año de la educación secundaria, varía según el diseño curricular institucional de cada escuela y su enseñanza puede encontrarse en diferentes años de escolaridad (como ya se ha visto, la docente A enseña este contenido en 3er año, mientras que las docentes B y C lo enseñan en 2do año).

Cabe aclarar que el diseño del estudio tiene como intención comprender el caso de manera tal que la investigación pueda abordarse de manera profunda. No se pretende generalizar ni a ciertos años escolares, ni a toda la educación secundaria. Por tal razón, se hace necesariamente un recorte analizando las situaciones que componen el caso: la enseñanza del número real llevada a cabo por las docentes A, B y C cada una en un año escolar específico, en una escuela particular del dpto. Rosario, Santa Fe, Argentina. Sin embargo, no significa que el estudio de caso no pueda ser considerado como un aporte valioso para futuros estudios.

### 3.2.1 Proceso de selección de las docentes de la muestra y del curso en donde ellas enseñan número real

La intención de este apartado es detallar cómo fue la búsqueda y selección de las docentes de la muestra y clarificar cuáles fueron los criterios que se siguieron para seleccionar los cursos en los que enseñan número real, a fin de recabar la información necesaria para llevar adelante esta investigación.

El proceso por el cual se ha seleccionado a las docentes ha comenzado por identificar aquellas que cumplan con los requisitos en cuanto a la trayectoria y formación profesional descriptos anteriormente, y que respondan afirmativamente al hecho de encontrase enseñando el contenido número real en la escuela secundaria. Se les ha preguntado en qué año de la escuela secundaria en la cual se desempeñan, se desarrollan con profundidad contenidos relacionados al tópico número real y particularmente en cuáles de ellos, ellas mismas enseñan este contenido.

1) La docente A (que trabaja en 3ro, 4to y 5to año), ha reconocido que en la escuela en la cual se desempeña no se dicta el contenido número real hasta el 3er año, aclarando que en 1ro se desarrolla el contenido números enteros y en 2do, el contenido números racionales. Además, manifiesta que en 4to y en 5to año se avanza con otros contenidos diferentes (que aun involucrando el contenido número real no permite profundizar en lo que ya se ha desarrollado en 3ero).
2) La docente B (que trabaja solo en 2do año), ha reconocido que en la escuela en la cual se desempeña, se aborda el tema recién en el 2do año y se lo retoma en 3ro donde se extiende la temática al estudio de los radicales, más precisamente, al estudio de las potencias con exponentes fraccionarios positivos y negativos. Al igual que la docente A, manifiesta que no se aborda el estudio de este tema con mayor profundidad, ni en 4to año, ni en 5to, por tener que desarrollar allí contenidos de otra índole.
3) La docente C (que trabaja en 1ro, 2do, 4to y 5to año), ha reconocido -al igual que la docente B- que en la escuela en la cual se desempeña, se aborda el tema recién en el 2do año y se lo retoma en 4to en donde se extiende la temática al estudio de los radicales. En los restantes años escolares se enseñan otros contenidos que, aunque pudieran estar relacionados con el número real, no van más allá de lo ya desarrollado en 2do y en 4to.

El número real atraviesa toda la escolaridad secundaria -o al menos desde que es presentado el concepto- puesto que se lo utiliza cuando se estudian otros contenidos como, por ejemplo, funciones, trigonometría, estadística, etc. Por tal razón, se tuvo que, a fin de realizar la escritura de esta tesis, elegir una unidad temática para recabar la información necesaria que permita llevar a cabo esta investigación. Se priorizó aquella en la cual se sentaran las bases conceptuales, es decir, en la que se presente y se desarrolle con profundidad el número real dentro toda de la escolaridad secundaria, más allá de que puedan consolidarse algunos aspectos más adelante. Esa unidad fue la que señalaron y reconocieron las propias docentes como tal (correspondiente a 2do año para las docentes B y C, y a 3er año para la docente A), dentro de la organización de contenidos que se ha decidido en la institución donde trabajan. Se ha chequeado que la unidad que seleccionaron llevara el nombre "Número Real" con el objetivo de verificar que se trata del principal objeto de estudio dentro de la secuencia didáctica.

Se pueden observar discrepancias con lo propuesto por el Diseño Curricular de la Escuela Secundaria Orientada (descripto en el punto 1.1.1.1 de esta tesis), sobre todo en los años escolares en los que se sugiere desarrollar este tema. Por lo cual se pretendió complementar la información brindada por las docentes con una revisión de los diseños curriculares institucionales de las escuelas a la que pertenecen. Pero, la realidad, es que al pedir tanto dichos diseños como las planificaciones de las docentes, tales documentos no existían en todas las situaciones, de modo que ello no se pudo llevar a cabo. Al solicitar las planificaciones de la materia a observar, ellas no estaban todas disponibles (algunas docentes no contaban con las mismas). Al solicitar los diseños curriculares institucionales, también se encontró con que no todos ellos estaban explicitados (las escuelas no lo proveen y/o no ha habido un proceso institucional de escritura de los mismos, por lo que estas no cuentan con ellos). Esta situación hizo que no fuera posible analizar similitudes y diferencias entre los documentos institucionales, así como entre estos y el Diseño Curricular provincial, como podría haber sido provechoso. Por tal razón, la recolección de datos se lleva a cabo en las clases de la unidad que, según propias palabras de las docentes, se presenta y se desarrolla el número real con mayor dedicación a lo largo de los años escolares. Si bien los años escolares a observar no condicen con los que propone el Diseño Curricular provincial para las Escuelas Secundarias Orientadas, es una realidad que existe y que se despliega de las prácticas docentes y de los propios modos de organización de las diferentes instituciones.

## *3.3 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS. CATEGORÍAS DE ANÁLISIS.*

### 3.3.1 Observaciones de clases

Se han realizado observaciones de clases (de carácter no participante) cuando las docentes del estudio estuvieron desarrollando la unidad Números Reales, para indagar los tipos de tareas que propicien el uso del número real en el aula y para pesquisar indicios de un discurso numérico escolar generalizado. Atendiendo al contexto de pandemia (ocurrido durante los años 2020 y 2021) por la propagación del COVID-19 y el aislamiento preventivo y obligatorio que afectó a las instituciones educativas, las observaciones han sido presenciales y/o virtuales de clases sincrónicas. En el caso de la docente A, las clases fueron de manera presencial en una única burbuja[17], dado que la cantidad de alumnos del

[17] Se denominó burbuja sanitaria escolar a un grupo de estudiantes para los cuales era posible mantener la ventilación y la distancia social adecuada para prevenir la propagación del COVID-19 dentro del salón de clases. Algunos cursos fueron divididos en dos o tres burbujas (dependiendo del número de alumnos y las dimensiones del aula) las cuales tenían clases presenciales cada dos o tres semanas, en forma intercalada. Ante la detección de un caso de covid-19 en el curso, se aislaba solo a la burbuja a la que

curso y las dimensiones del aula permitieron respetar los protocolos de distanciamiento social. Con la docente B, las clases fueron al principio presenciales y luego virtuales, a causa de las restricciones impuestas por el gobierno nacional y provincial de volver al aislamiento preventivo por la suba de casos de COVID-19. Con la docente C, las clases fueron 100% virtuales por estar dentro de este período de aislamiento. Para las clases presenciales se ha grabado el audio de lo acontecido y para las clases virtuales se ha grabado en formato video su desarrollo. Dado el contexto de emergencia sanitaria, las clases (que originalmente estaban planificadas para la presencialidad) debieron alterar su formato para la virtualidad. Por tal razón, las docentes han intentado reproducir esa clase presencial en encuentros virtuales sincrónicos. No se considera que sean propuestas didácticas planificadas directamente para el dictado a distancia, sino una adaptación forzada de una propuesta ya existente puesto que las docentes en el poco tiempo que tuvieron dieron respuesta de la mejor manera posible para continuar dando clases, digitalizando material y organizando encuentros (donde compartían pantalla y mostraban a modo de pizarra lo que iban explicando). Si bien ha cambiado el formato, las docentes han intentado mantener la metodología de trabajo que tenían en el aula presencial. Por ejemplo, en el caso de la docente B se daba un tiempo para que los alumnos realizaran la ejercitación separándolos en grupo dentro de la videollamada y dejándolos interactuar entre ellos, con la opción de llamarla si surgía alguna duda. En el caso de la docente C, estos momentos eran asincrónicos, pudiendo los alumnos enviar sus consultas mediante el aula virtual para ser luego contestada por la docente.

En todos los casos se ha tomado nota, y se ha volcado toda la información en un registro narrativo centrado en el desarrollo de las acciones. El tipo de registro adoptado son notas de campo, con dos tipos de contenido:

- Descriptivo: intenta abordar la imagen de la situación, las personas, las conversaciones y reacciones lo más fielmente posible.
- Reflexivo: incorpora el pensamiento, las sensaciones, las ideas y las interpretaciones del observador (Anijovich, 2009).

Por tal razón, se ha armado una planilla por clase en la cual se ha volcado en una columna la descripción de lo que acontece en la clase: los diálogos -para los cuales se ha usado la letra “P” para referirse a lo que dice la docente y las letras “A” seguido de un número según hable alumno 1, alumno 2, etc.-, lo que se escribe en el pizarrón, las interacciones, las tareas que se proponen. En otra columna las inferencias subjetivas (las reflexiones y pensamientos) y en una última columna la relación con el discurso numérico escolar (aquí se identifican los indicios de un dME generalizado que se manifiesta en las acciones y conversaciones que sostiene la docente con los alumnos). Esta categoría de análisis (discurso numérico escolar), se operativiza teniendo en cuenta las siguientes dimensiones (Cordero et al., 2015):

pertenecía el estudiante, pudiendo concurrir a la escuela el resto del curso según el cronograma establecido.

- El **contexto en el que se enmarca el número real**, que haga ver su carácter utilitario o funcional en una situación específica (organización de la matemática escolar).
- El **foco de interés del docente acerca de lo que saben o lo que hacen sus alumnos en cuanto al número real,** identificando si la enseñanza está centrada en objetos o centrada en prácticas sociales (relación con el saber matemático), es decir, si hay atomización de conceptos o racionalidades conceptuales diversas.
- Los **tipos de argumentos y procedimientos** que permiten el tratamiento y construcción del concepto de número real (validación del saber). Esto es, si poseen un carácter hegemónico o se propicia la validación de saberes.
- El **tipo de presentación del número real:** como objeto preexistente o como objeto a construir (concepción epistemológica), es decir, si posee un carácter hegemónico o se trata de conocimientos construidos.
- La **relación del número real con otros campos de conocimientos y prácticas sociales -como la graficación y la predicción-** que se propicie en el aula (significación del saber), esto es, falta de marcos de referencia o pluralidad de marcos de referencia para la resignificación.

En cada clase, se ha identificado alguna de estas dimensiones describiendo su conexión con el dME y dejando registro en la planilla para luego procesar toda la información en su conjunto.

### 3.3.2 Entrevistas

Se han llevado a cabo dos sesiones de entrevistas semiestructuradas con los docentes de la muestra de manera individual para investigar las concepciones que tienen acerca del número real. Como se ha dicho en el apartado Marco Conceptual, se define al término concepción desde dos perspectivas: una cognitiva (en relación con los conocimientos que posee el profesor respecto al número real y que es atravesado por el dME) y una epistémica (en relación con la naturaleza compleja del concepto y sus relaciones). Para conocer la construcción social del número real se ha realizado una revisión histórico-epistemológica del concepto (perspectiva epistémica) y, para conocer aspectos referidos a su enseñanza y a su introducción en el aula, se ha efectuado una revisión de los Diseños Curriculares Ministeriales y propuestas editoriales (perspectiva cognitiva). Esta categoría de análisis (concepciones acerca del número real) se operativiza de la siguiente manera:

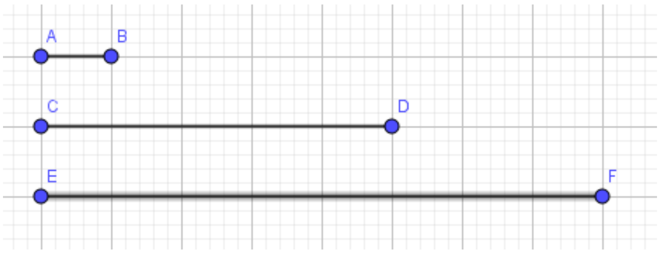
*Perspectiva cognitiva*. Compuesta por las ideas respecto a la enseñanza del número real (aspectos que considera importante enseñar y diferentes formas de construir el concepto que tienen sus alumnos), los diversos usos del número real y su conceptualización, y los conocimientos incorporados dentro de su propia formación respecto al número real (ver modelo de entrevistas en anexos, p. 202).

*Perspectiva epistémica*. Se reconocen las siguientes concepciones de número real:

- **Como la medida de segmentos conmensurables e inconmensurables**:

Dos segmentos son conmensurables si es posible encontrar alguna unidad de medida común para ambos, es decir, tal que el segmento unidad sea, a la vez, parte alícuota de uno y otro, aunque el número que expresa la medida de cada segmento sea distinto en cada caso. Por ejemplo, si la medida que se emplea es un centímetro, podríamos decir que segmentos cuya medida son 5 cm y 8 cm son conmensurables, dado que la longitud del centímetro es parte alícuota común a ambos (Klimovsky & Boido, 2005).

**Figura 18.** ***Ejemplo de segmentos conmensurables***




CD y EF son segmentos conmensurables, ya que AB es un segmento con el cual es posible medir a ambos. Tomando AB como unidad de medida, CD mide 5 y EF mide 8.

Como ya se ha visto, desde la antigua Grecia, los pitagóricos mostraron que no siempre es posible encontrar un segmento unidad que cumpla esta propiedad para dos segmentos cualesquiera. En este caso, se dirá que los segmentos en cuestión son inconmensurables.

La medida de diferentes segmentos, tomando uno como unidad de medida, permite construir la idea de número real positivo. Si bien, esta visión es incompleta con respecto a lo que actualmente se define como número real en las teorías formales de la matemática, es una noción intuitiva y geométrica que persistió durante mucho tiempo en la historia dentro de este campo y permitió el desarrollo de teorías más complejas, como el análisis diferencial. El argumento geométrico para validar los conocimientos matemáticos perduró hasta el siglo XVIII, siendo el siglo XIX el momento en el que se empezó a dudar de su rigurosidad.

- **Como un elemento de un conjunto, que es resultado de la unión de otros dos conjuntos (los racionales y los irracionales):**
  El sistema de los números reales está conformado por distintos tipos de números. Los números racionales se obtienen como cociente de enteros, es decir, un número racional $r$ puede expresarse como $r = \frac{m}{n}$ donde $m$ y $n$ son enteros siendo $n \neq 0$. Los números irracionales son definidos como aquellos números que no pueden expresarse como cociente de enteros. Según esta visión conjuntista, el conjunto de los números reales es $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

Esta definición es usualmente la presentada en los libros de texto actuales para educación secundaria (sección 1.1.2.1) y en Stewart et al. (2012). Podría decirse que es poco precisa (puesto que en realidad, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ son conjuntos isomorfos a subconjuntos de $\mathbb{R}$) y resulta una simplificación del concepto, hasta el punto de no definirlo en sí mismo (solo se definen los números racionales y los números irracionales). Como se ha visto en la sección 2.2.2, fue necesario en la historia de la matemática crear el concepto de número real, como sistema numérico diferente a $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$, que cumpla con la condición de completitud.

- **Como puntos de una recta completa y continua**:
  La idea de recta real completa y continua fue utilizada intuitivamente para representar a los números reales mucho antes de consolidarse en el axioma introducido en la teoría de Dedekind y la de Cantor-Heine, y que hoy en día lo conocemos con el siguiente enunciado: existe una correspondencia biunívoca entre los puntos de una recta y los números reales. Esto quiere decir que, si se elige un punto para representar al 0 y otro a la derecha del 0 para representar al 1, cada número real corresponde a uno y solo un punto de la recta y, recíprocamente, cada punto de la recta a un número real y solo uno (Apostol, 1984).

- **Como límite de una sucesión, como clase de equivalencia de sucesiones convergentes o como resultado de una serie (representación decimal de Weierstrass)**:

  Se han visto diferentes desarrollos para la presentación del número real que encajan en esta categoría:
  - Como límite de una sucesión fundamental (teoría constructiva de Cantor-Heine).
  - Como la clase de pares de sucesiones monótonas convergentes (Vázquez de Tapia et al., 1983).
  - Como límite de una sucesión de Cauchy (Spivak, 1992).
  - Como la clase de sucesiones monótonas contiguas (o como intervalos encajados) (Rey Pastor et al., 1969).
  - Como serie, idea esencialmente planteada por Weierstrass y que actualmente se plantearía de la siguiente manera (Apostol, 1976):
    La parte entera de un número real $x$, es el único entero $[x]$ tal que:
    $$[x] \leq x < [x] + 1.$$
    Para representar un número real $x$ podemos escribir: $x = [x] + (x - [x])$ donde $0 \leq x - [x] < 1$. Luego, interesará la representación de $x - [x]$, dado que $[x] \in \mathbb{Z}$. Puede probarse que, dado un número real $x \in [0,1)$, existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in N}$ de enteros en $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ tal que: $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{10^n}$. Se denomina representación decimal del número $x$ a toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos en D tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{10^n}$. La

representación decimal de un número real no es necesariamente única[18]. Si $x \in \mathbb{Q}$, $x \in [0,1)$, y su representación fraccionaria irreducible posee un denominador cuyos únicos factores primos son a lo sumo 2 y 5 entonces:

$$x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots x_n 000 \dots$$
$$x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots x_{(n-1)}(x_n - 1)999 \dots$$

Se observa que, con el objetivo de no depender de la representación decimal elegida, esta presentación del número real como serie se generaliza eligiendo cualquier base (no necesariamente la decimal).

- **Como soluciones posibles o no posibles de ecuaciones algebraicas (números trascendentes o algebraicos):**
  Toda raíz de una ecuación algebraica polinómica con coeficientes racionales es llamada número algebraico y todo número que no sea algebraico es llamado trascendente. Esta clasificación no es análoga a la de número racional/irracional dado que hay números irracionales algebraicos e irracionales trascendentes. Por ejemplo, $x = \sqrt{2}$ es solución de la ecuación algebraica $x^2 - 2 = 0$, mientras que se ha demostrado que $\pi$ no puede ser obtenido como solución de una ecuación de este tipo. Esta demostración, representó la respuesta definitiva al problema de la cuadratura del círculo, dado que la construcción con regla y compás de segmentos de cierta medida no es posible si esa medida representa un número trascendente (Collete, 1985b).

- **Como cortadura de Dedekind:**
  Dedekind definió el número real mediante cortaduras en 1872 presuponiendo el desarrollo de la aritmética de los números racionales y haciendo notar que en una línea recta existen infinitos puntos que no corresponden a ningún número racional. Insatisfecho con los métodos basados en la concepción de longitudes prolongadas para la definición de números irracionales, propone que la aritmética se desarrolle a partir de sí misma. Luego, precisa que la continuidad de la recta descansa en el hecho de que cada punto de una recta produce una separación en dos porciones, tal que cada punto de una porción está situado a la izquierda de cada punto de la otra porción (Collete, 1985b). Esta idea es la principal sobre la cual se basa su teoría, que puede leerse en forma más detallada en la sección 2.2.2.9 de este capítulo.
  En Rey Pastor et al. (1969), se ha visto su relación con la definición de clases contiguas y la definición de intervalos encajados. Queda en evidencia que estas teorías no son excluyentes y son equivalentes unas con otras, aunque aportan diferentes aspectos y representaciones del número real que permiten su comprensión.

- **Como elemento de un cuerpo ordenado arquimediano maximal:**

[18] Por ejemplo, $0,5 = 0,4\hat{9}$.

La denominación de cuerpo ordenado arquimediano maximal es actual, pero el precedente se encuentra en la teoría axiomática presentada por Hilbert en 1899 (puede leerse en forma detallada en la sección 2.2.2.10 del capítulo anterior). Si bien hay muchos cuerpos ordenados arquimedianos (por ejemplo, $\mathbb{Q}$ con el orden usual), lo que diferencia a $\mathbb{R}$ de todos ellos es el axioma de completitud enunciado por Hilbert, que en términos actuales sería el siguiente: "Todo conjunto no vacío S de números reales acotado superiormente posee extremo superior; esto es, existe un número real B tal que B=sup S" (Apostol, 1984). La propiedad arquimediana, que es demostrable en las teorías constructivas de Dedekind y Cantor-Heine, en la formulación de Hilbert es necesaria incluirla como axioma pues no se deduce de los otros grupos de axiomas.

Es posible observar en los libros de texto (Spivack, 1992; Apostol, 1984) una presentación axiomática de los números reales, en los cuales los axiomas no difieren significativamente de los propuestos por Hilbert. Sin embargo, en sus desarrollos las teorías constructivas se vuelven modelos para demostrar la consistencia de ese grupo de axiomas (que descansa a su vez en la consistencia de $\mathbb{Q}$) (Bergé & Sessa, 2003).

En correspondencia con la definición de concepción dada, se ha confeccionado cada entrevista atendiendo a cada una de estas perspectivas (ver modelo de entrevistas en anexos, p. 215). En particular, la segunda entrevista se ha confeccionado de manera tal que cada pregunta o grupo de preguntas sea considerada un "reactivo" que permita identificar cuál es la concepción de número real específica predominante en cada docente. Se entiende por reactivo a la experiencia metacognitiva a la que se expone al docente de la cual se espera que haga emerger la concepción deseada o al menos que produzca una reflexión consciente sobre lo que sabe. Cuando se habla de metacognición se hace referencia al conocimiento que se tiene sobre los procesos y productos de pensamientos de uno mismo, por lo cual las experiencias metacognitivas serán "aquellas experiencias de tipo consciente sobre asuntos cognitivos o afectivos (por ejemplo, pensamientos, sentimientos, vivencias, etcétera)" (Díaz-Barriga Arceo & Hernandez Rojas, 2005, p. 245). En una experiencia metacognitiva uno reconoce si la tarea es fácil de realizar o si está próximo a completarla con éxito (en este caso, las docentes podrán responder con facilidad al reactivo) o, por el contrario, si algo es difícil de comprender o solucionar (y en este caso, las docentes podrían demostrar tener conflictos para responder a las preguntas dadas generando procesos de pensamiento acerca de lo que saben). El propósito del reactivo es, a partir de la reflexión, hacer consciente a cada docente de las propias concepciones que ha incorporado a través de su propia formación y a lo largo de su práctica docente. A continuación, se presenta -para cada concepción descripta anteriormente- en qué consiste cada reactivo y cuál es su objetivo específico:

- *Reactivo 1: concepción de número real como la medida de segmentos conmensurables e inconmensurables.* Se les ha presentado dos situaciones en las que se ha pedido medir un segmento ($S2$) con respecto a otro dado, siendo este último la unidad ($U$) (sin conocer la relación que existe entre ellos). En el primer caso, $U$ tiene mayor longitud que $S2$ y la relación que tienen es que son segmentos conmensurables puesto que $S2 = \frac{3}{4}U$. En el segundo caso, $U$ tiene menor longitud que $S2$ y la relación que tienen es que son segmentos inconmensurables dado que $S2 = \sqrt{3}U$. Se ha preguntado si es posible medirlos de manera precisa y, de no ser así, se ha pedido una aproximación y una cota del error cometido en esa aproximación. El objetivo de este reactivo es identificar si las docentes conciben la diferencia entre segmentos conmensurables e inconmensurables, si encuentran un procedimiento para llevar a cabo la medición, si diferencian si la medida es exacta o aproximada, y en última instancia si encuentran una forma de acotar el error cometido.

- *Reactivo 2: concepción de número real como puntos de una recta completa y continua.* Se les ha preguntado cuáles considera que son las condiciones necesarias para asignar a cada punto de la recta un número real y viceversa (a cada número real un punto de una recta). En segunda instancia, se les ha pedido que localicen (si es posible) los puntos correspondientes a $\sqrt{2}$ y $\sqrt[3]{2}$. Aquí el objetivo es identificar hasta qué punto las docentes pueden construir la recta numérica, si reconocen el axioma de completitud de los números reales o a la continuidad de la recta como una condición no demostrable (que debe exigirse como axioma) y si distinguen procedimientos para construir ciertos números reales con métodos euclídeos, advirtiendo que no todo número real puede construirse con regla y compás (y, por tal razón, no es localizable en la recta numérica de forma exacta).

- *Reactivo 3: concepción de número real como soluciones posibles o no posibles de ecuaciones algebraicas.* Se les ha pedido que determinen el valor de verdad de la siguiente afirmación, justificando su respuesta: todo número real puede obtenerse como raíz de un polinomio a coeficientes racionales. Además, se les ha pedido reconocer características comunes y diferencias sustanciales entre los números $\sqrt[3]{2}$ y $\pi$. El objetivo de este reactivo es analizar, primero, si reconocen que no todo número real es raíz de un polinomio a coeficientes racionales. Segundo, distinguir si reconocen la existencia entre números irracionales de dos tipos (aquellos algebraicos y aquellos trascendentes). Tercero, y en conexión con el reactivo anterior, observar si reconocen la relación entre números trascendentes y números construibles con regla y compás (ningún número trascendente es construible; sin embargo, no todo número algebraico es construible -solo aquellos que son raíces de ecuaciones lineales o cuadráticas-).

- *Reactivo 4: concepción de número real como límite de una sucesión, como clase de equivalencia de sucesiones convergentes o como resultado de una serie (representación decimal de Weierstrass).* En este reactivo se ha consultado la relación que establecen entre los números $0,\hat{9}$ y $1$, y cómo justifican esa relación. Luego, se les ha preguntado si conocen el cálculo que realiza la calculadora al aproximar el número $e^{\sqrt{2}}$ con el número $4{,}113250379$. En la primera pregunta, el objetivo es identificar si las docentes reconocen la relación que existe entre ambos números como un límite ($1 = \lim_{n \to \infty} a_n$, siendo $a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{9}{10^i}$) o como el resultado de una serie ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 1$). La aproximación de $e^{\sqrt{2}}$ también puede analizarse como una suma parcial de la serie de Taylor de la función $f(x) = e^x$, alrededor de 1, evaluada en $\sqrt{2}$. En ambos casos, puede pensarse al número real como un límite de una sucesión o como el resultado de una serie.

- *Reactivo 5: concepción de número real como cortadura de Dedekind.* Se les ha pedido que expliquen la siguiente afirmación:

  Los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{Q}: x^3 > 2\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Q}: x^3 < 2\}$ son conjuntos disjuntos ($A \cap B = \emptyset$) y su unión es $\mathbb{Q}$.

  Esta afirmación justifica la existencia de un número real denominado $\sqrt[3]{2}$. El objetivo de este reactivo es que identifiquen que la separación en dos clases de $\mathbb{Q}$, subconjuntos disjuntos de racionales, en el cual todo elemento de $A$ se encuentra a la derecha de todo elemento de $B$, define un único número real (en este caso, $\sqrt[3]{2}$). La existencia de tal número solo es posible gracias a la completitud de los números reales.

- *Reactivo 6: concepción de número real como elemento de un cuerpo ordenado arquimediano maximal.* Con el objetivo de que identifiquen la propiedad de orden del cuerpo de los números reales se les ha preguntado por qué es posible convenir en que la orientación de los números sobre el eje x es de izquierda a derecha (o de derecha a izquierda). Luego, se les ha pedido que justifiquen el hecho de que el conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q}: x^3 < 2\}$ no tiene supremo en el conjunto de los números racionales, pero sí lo tiene en el campo de los números reales. En este caso, se intenta que reconozcan el axioma de completitud de los números reales: todo conjunto acotado superiormente tiene supremo. Este axioma es característico del cuerpo de los números reales, diferenciándolo del conjunto de los números racionales, puesto que tiene relación directa con la característica de ser un conjunto completo.

- *Reactivo 7: concepción de número real como elemento de un conjunto proveniente de la unión de racionales e irracionales.* Se les ha pedido que justifiquen por qué 0,25 es un número racional y por qué es un número real. De la misma manera, se ha pedido las razones que justifican que $\pi$ es un número irracional y que es, a su vez, un número real. En este reactivo entran en juego las conceptualizaciones de cada tipo de número, relacionando el conjunto de los números racionales o irracionales con un subconjunto de los números reales bajo isomorfismo (contención de conjuntos numéricos).

Las modalidades de cada categoría de análisis aquí presentadas podrían extenderse a partir de lo analizado si la clasificación no llega a saturar las unidades analizadas.

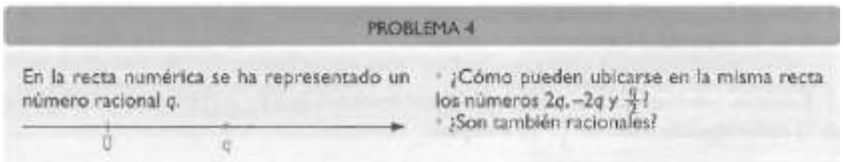
Cabe aclarar que las concepciones desde la perspectiva epistémica (que son las analizadas a partir de los reactivos) se complementan con las concepciones desde la perspectiva cognitiva, puesto que se asume la visión vigotskyana de no limitar el pensamiento humano por el cerebro o la mente del individuo y considerar, por el contrario, que la experiencia social moldea las formas que este dispone para interpretar el mundo que lo rodea. En este sentido, se puede decir que las formas de pensamiento de orden superior se derivan de los contextos sociales y culturales por los que son atravesados los individuos (Mota de Cabrera & Villalobos, 2007). Desde esta postura, se considera que las concepciones que posean las docentes estarán formadas por los conocimientos adquiridos a partir de sus experiencias en institutos de formación docente o durante su práctica profesional, así como por su cultura y los usos que se les da en esta al número real.

### 3.3.3 Material didáctico utilizado para la ejecución de tareas durante las clases observadas

Por material didáctico se hace referencia a las fotocopias de libros utilizadas o apuntes realizados por el docente (o por el grupo de docentes que componen el dpto. de Matemática de la escuela) o cualquier actividad dada por las docentes para la ejecución de tareas dentro de las clases de Número Real.

Para el registro de las tareas propuestas, que han sido dadas en forma escrita, se han descargado las guías prácticas en formato PDF o se ha sacado fotocopia o foto de la ejercitación dada a los alumnos. Como ya se ha dicho en el apartado Marco Conceptual, se basará el análisis de las tareas propuestas para propiciar el uso del número real en el aula, en el estudio planteado por Cordero & Flores (2007), donde se formula una epistemología del uso de las gráficas en el dME de libros de texto, identificando la función y la forma en las tareas propuestas. De manera análoga, se puede caracterizar una actividad en donde se ponga en uso el número real a partir de su función y forma. A continuación, se muestra un ejemplo de un problema correspondiente a un libro para educación secundaria en donde se enseña número real (Figura 19).

**Figura 19.** ***Ejemplo de tarea para el uso del número real en la enseñanza de la matemática para la educación secundaria***


PROBLEMA 4

En la recta numérica se ha representado un número racional $q$.

- ¿Cómo pueden ubicarse en la misma recta los números $2q$, $-2q$ y $\frac{q}{2}$?
- ¿Son también racionales?



Tomado de "Matemática 4 ES Huellas" (p. 10), por F. Chorny, C. Salpeter y O. Casares, 2015, Estrada.

Aquí la función de la tarea es la representación en la recta numérica de ciertos números, dada la ubicación de un racional y la distinción entre números racionales e irracionales (propósito de la tarea). La forma (es decir, el requerimiento del quehacer matemático para llevar a cabo la tarea) es representar números en la recta y determinar si son racionales o no. Puede observarse que la concepción que se manifiesta en esta tarea es la de número real como punto de una recta completa y continua (aunque solo se trabaje con racionales) y como pares de segmentos conmensurables e inconmensurables (para la distinción entre número racional o irracional). Luego, la caracterización de una tarea hará emerger alguna concepción de número real que se manifiesta en el uso del conocimiento.

Considerando las diferentes concepciones del número real, se reconocen funcionamientos y formas para posibles tareas correspondientes al nivel secundario tal como se propone en la tabla siguiente:

**Tabla 2. Función y forma para posibles tareas según concepción de número real**

| Concepciones de número real | Función | Forma |
|---|---|---|
| *Como la medida de segmentos conmensurables e inconmensurables.* | 1) Medición de segmentos. | Patrón de tareas en las cuales se mide un segmento con otro dado. |
| | 2) Operaciones con segmentos (suma, resta, producto, cociente) desde un punto de vista geométrico. | Patrón de tareas en las cuales se opera con segmentos (sumar, restar, multiplicar y dividir segmentos). |
| *Como puntos de una recta completa y continua.* | 1) Ubicación de puntos en una recta (con un origen y un segmento unidad determinados) correspondientes a un número (y viceversa). | Patrón de tareas en las cuales se ubican ciertos números en una recta numérica real (y viceversa, dado un punto hallar su valor real correspondiente). |
| | 2) Representación de conjuntos numéricos en la recta real. | Patrón de tareas en las cuales se representan conjuntos, por ejemplo, intervalos de la recta real. |
| | 3) Cálculo de distancia entre puntos de una recta: dado dos puntos A y B de la recta, hallar la longitud del segmento $\overline{AB}$. | Patrón de tareas en las cuales se calcula distancia entre puntos (por ejemplo, al calcular el valor absoluto de un número). |
| *Como soluciones posibles o no posibles de ecuaciones algebraicas (números algebraicos o trascendentes).* | 1) Análisis sobre la existencia de alguna solución real de una ecuación algebraica polinómica con coeficientes racionales y su búsqueda. | Patrón de tareas donde se hallan raíces o se analiza la existencia de alguna solución real de una ecuación algebraica polinómica con coeficientes racionales (por ejemplo, utilizando el teorema de Bolzano). |
| *Como límite de una sucesión o como resultado de una serie (representación decimal).* | 1) Aproximación de un número con infinitas cifras decimales (racional o irracional) a partir de una sucesión de términos | Patrón de tareas donde se aproxime un número con infinitas cifras decimales (racional o irracional) a |

| | | |
|---|---|---|
| | racionales cada vez más próximos al número. | partir de algoritmos (por ejemplo, el método de exhaución, usando el teorema de Bolzano, etc.). |
| | 2) Análisis de convergencia de sucesiones. | Patrón de tareas donde se analice la convergencia de sucesiones. |
| *Como cortadura de Dedeking.* | 1) Acotación de un conjunto numérico. | Patrón de tareas donde se busque supremo o ínfimo de un conjunto. |
| *Como elemento de un cuerpo ordenado y completo.* | 1) Operaciones de cuerpo (suma, resta, producto, cociente) desde un punto de vista algebraico (cumpliendo los axiomas). | Patrón de tareas donde se operen elementos siguiendo una serie de axiomas. |
| | 2) Comparación (relación de orden) entre elementos del cuerpo. | Patrón de tareas donde se comparen elementos de un cuerpo (por ejemplo, al resolver inecuaciones). |
| *Como un elemento de un conjunto, que es resultado de la unión de otros dos conjuntos (los racionales y los irracionales).* | 1) Identificación de subconjuntos de $\mathbb{R}$ isomorfos a otros conjuntos numéricos (racionales, irracionales, enteros, naturales). | Patrón de tareas donde se identifique un elemento de $\mathbb{R}$ y su elemento correspondiente en otro conjunto numérico (por ejemplo, racionales o irracionales). |

Se contabiliza la cantidad de tareas propuestas por cada docente a lo largo de toda la unidad, que se perfila dentro de cada concepción, manifestada por su función y su forma, con el objetivo de reconocer si hay supremacía sobre un tipo de tarea específico (y, por consecuencia, de alguna concepción de número real) e identificar si existen concepciones que no se propician en el aula. Para cada patrón de tareas encontradas, se realiza una descripción de una tarea representante de su grupo, con el fin de esclarecer la función y la forma a la que responde, así como la concepción primordial que emerge del trabajo con ese grupo de tareas.

Si bien los instrumentos de recolección de datos mencionados tienen como objetivo indagar sobre una categoría de análisis particular, toda la información recogida será utilizada globalmente para realizar el procesamiento y el análisis de los datos.

## *3.4 ESTRATEGIAS UTILIZADAS PARA EL PROCESAMIENTO Y ANÁLISIS DE DATOS*

### 3.4.1 Procesamiento de los datos

Se han utilizado códigos referidos a cada docente y a cada tipo de elemento de recolección de datos para nombrar los archivos, organizados dentro de carpetas con el nombre de cada docente, con el fin de facilitar la organización y el procesamiento de la información.

Para el procesamiento de datos, la organización ha sido distinta según el elemento de recolección de datos:

- Para las observaciones de clase se han registrado, por docente y por subtema de la unidad, los fragmentos de cada categoría de análisis del discurso numérico escolar, resaltados con colores en las notas de campo. De esta manera se han reconocido aquellos que sean similares y se han seleccionado, para el reporte de resultados, los más representativos de las situaciones identificadas.

- Se han registrado, de manera escrita o por fotos, todas las tareas reconocidas en los apuntes de clase, las fotocopias y las propuestas en clase. Se han volcado en una tabla agrupadas por concepción, contabilizando la cantidad de tareas y seleccionando aquella que sea representativa del grupo, por docente individualmente.
- Para las entrevistas, se han organizado por pregunta o grupo de preguntas que se corresponden con una concepción en particular, los aspectos más importantes reconocidos. En este caso se han buscado similitudes entre las respuestas, con lo cual se han analizado en forma conjunta por pregunta, las respuestas obtenidas por cada docente. Se han seleccionado algunos registros textuales de cada entrevista que sean significativos para la concepción a analizar.

### 3.4.2 Credibilidad y transferencia (validez interna y externa)

Para conseguir credibilidad en el estudio se han llevado a cabo las siguientes acciones:

- Estancia prolongada en el campo: entre las sesiones de entrevistas y las observaciones de clase, se ha intentado establecer un vínculo de confianza con los docentes de la muestra, para así reducir al mínimo posible o desaparecer por completo las tensiones o los efectos provocados en el docente por la presencia del investigador.
- Con el objetivo de calibrar los reactivos que se proponen en una de las entrevistas, se ha aplicado repetidamente versiones anteriores a otra docente que no compone este estudio (con características similares a la docente B) para ajustar y modificar las preguntas con el fin de obtener las concepciones acerca del número real de manera más precisa.
- Triangulación de datos: para hacer una comparación entre lo que el docente dice que hace (entrevistas), lo que el investigador interpreta que hace (observaciones) y lo que el docente propone hacer (material utilizado en sus clases). Esto permite detectar inconsistencias y ajustar los elementos de recolección de datos para una mayor precisión.

Si bien es muy difícil transferir los resultados obtenidos a otro contexto, nos puede dar una pauta para conocer con mayor profundidad el problema estudiado y reflexionar sobre posibles mejoras en la enseñanza del número real en la escuela secundaria.

# Capítulo 4
# Resultados

## *4.1 DISCURSO NUMÉRICO ESCOLAR*

Se presenta en esta sección el recorrido de lo desarrollado por cada docente en sus clases correspondientes a la unidad Número Real, identificando características del discurso numérico escolar en el tipo de presentación, los tipos de argumentos y procedimientos, el contexto en el que se enmarca, el foco de interés de la docente y la relación con otros campos de conocimientos y prácticas sociales del número real.

### 4.1.1 DOCENTE A

La docente A organiza la unidad Número Real en dos partes:

1. Ecuaciones e inecuaciones con módulo: clases 1-5.
2. Radicales (extracción de factores fuera del radical, operaciones con radicales): clases 6-14.

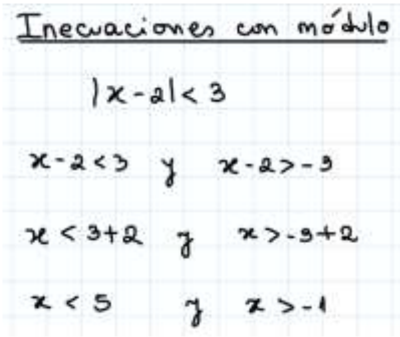
Las clases en el caso de la docente A fueron en su totalidad presenciales.

#### 4.1.1.1. Parte 1: ecuaciones con módulo

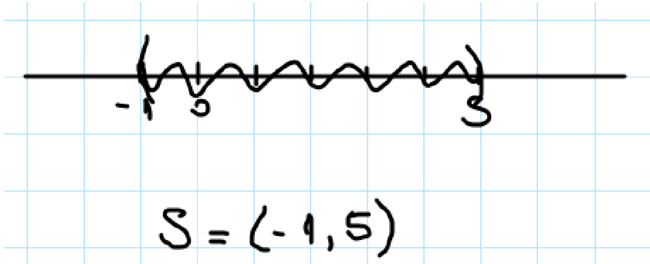
Si bien no se estuvo presente en la primera clase de la unidad (dado que la docente A decide al final de una clase de la unidad anterior comenzar un tema nuevo puesto que le sobra tiempo), se reconstruyen estos últimos minutos de esta clase con lo que cuenta la docente (se le ha consultado qué ha trabajado y cómo lo ha llevado a cabo) y con lo escrito en las carpetas de varios alumnos.

La docente A comienza la unidad explicando con ejemplos cómo resolver inecuaciones con módulo. Sin poner título, indicando que comienza una nueva unidad, procede a resolver y explicar la resolución de los ejemplos que propone:

> La docente A me comenta que ella comienza la clase repasando lo que es el módulo de un número como su distancia al cero. Luego, explica cómo resolver inecuaciones con módulo utilizando ejemplos:
>
> $$|x-2|<3$$
> $$|x+3|\geq 1$$
>
> La explicación de la resolución de la primera inecuación consiste en pensar dónde se encuentran los números cuya distancia al cero es menor que 3. Se concluye que son los valores mayores a -3 y menores que 3. Luego, plantea dos inecuaciones (se reproduce lo que copiaron del pizarrón los alumnos en la carpeta):

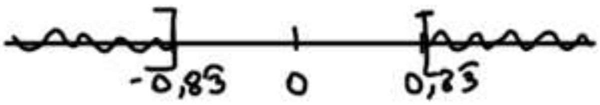



Para resolver las inecuaciones indica que “pasa sumando el -2 al otro miembro” y opera. Luego, marca sobre una recta numérica los puntos entre -1 y 5, e indica que se va a representar como un intervalo en el cual el -1 y el 5 no están incluidos ya que son menores que 5 y mayores (estricto) que -1. Esto último se representa con un paréntesis y escribe el conjunto solución:



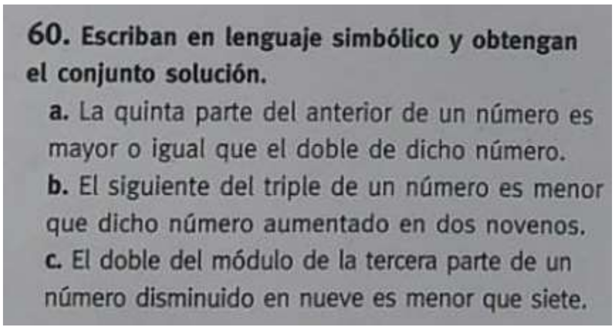

La docente se basa en la definición de módulo o valor absoluto, que los alumnos conocían previamente, para realizar el planteo de la resolución. Se utiliza la recta para representar números reales, sin indicar previamente que cada número real se corresponde con un punto y viceversa. Tampoco se problematiza cuántos números hay y de qué tipo son los que se encuentran en ese intervalo (**tipo de presentación**). Puede observarse en lo explicado por la docente, que no se hacen explícitas las propiedades que validan su accionar en el despeje de la incógnita en la ecuación, como la propiedad uniforme (**tipo de argumentos y procedimientos**). La docente deja de tarea ejercicios similares, con lo cual se evidencia que el **foco de interés** está puesto en que los alumnos puedan reproducir el mismo procedimiento expuesto por la docente.

Las clases siguientes transcurren con una dinámica similar: los alumnos resuelven los ejercicios propuestos por la docente (dados en una fotocopia) y consultan sus dudas. A veces los alumnos pasan al pizarrón a resolver los ejercicios, con el objetivo de corregir la ejercitación en conjunto. Es posible observar que los alumnos no establecen una unidad para representar el conjunto solución de las inecuaciones, como se puede observar en el siguiente ejemplo en el que se reproduce la representación gráfica realizada por un alumno en el pizarrón:




La docente no parece prestar atención a esto, y podría pensarse que es solo una herramienta para apoyarse al escribir el conjunto solución (**tipo de presentación**).

En la resolución de un ejercicio, no se problematiza (al menos no explícitamente a toda la clase) el campo numérico en donde tiene sentido la incógnita.



**60. Escriban en lenguaje simbólico y obtengan el conjunto solución.**

**a.** La quinta parte del anterior de un número es mayor o igual que el doble de dicho número.

**b.** El siguiente del triple de un número es menor que dicho número aumentado en dos novenos.

**c.** El doble del módulo de la tercera parte de un número disminuido en nueve es menor que siete.

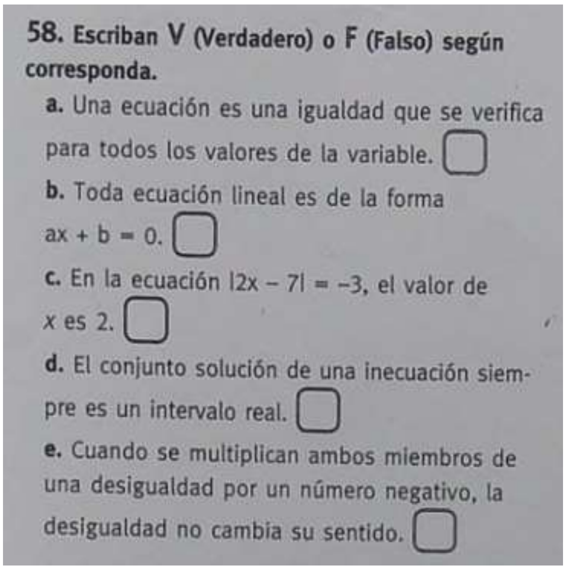
*Nota*. Tomado de "Activados 4 Matemática" (p. 27), por R. Abálsamo, A. Berio, S., Mastucci, N. Quirós, F. De Rossi, 2017, Puerto de Palos.

La docente no hace explícito, ni problematiza, el hecho de que los números reales no poseen anterior, ni siguiente (tampoco los números racionales o irracionales). Por lo cual, el conjunto solución de las inecuaciones planteadas en este ejercicio solo tiene sentido en el conjunto de los números enteros. La docente A no lo aclara en ningún momento, tampoco surge de los alumnos el planteo de esta inquietud. En todas las clases de este tema, no se hace explícito el campo numérico en el cual se está trabajando. Queda en evidencia que es un tema de duda para los alumnos, en un comentario que hace la docente respecto a las preguntas que le hacen sobre las soluciones que encuentran en las inecuaciones propuestas:

> A2: pero, ¿está bien?
> P: sí, está bien.
> Después, me mira y me comenta:
> P: piensan que si es negativo o una fracción está mal.

También es posible observar que la forma de resolver las dudas de sus alumnos implica una imposición de significados y procedimientos:

> Unas alumnas del fondo llaman a la profesora porque no entienden el ejercicio 58:



**58. Escriban V (Verdadero) o F (Falso) según corresponda.**

**a.** Una ecuación es una igualdad que se verifica para todos los valores de la variable. ☐

**b.** Toda ecuación lineal es de la forma $ax + b = 0$. ☐

**c.** En la ecuación $|2x - 7| = -3$, el valor de $x$ es 2. ☐

**d.** El conjunto solución de una inecuación siempre es un intervalo real. ☐

**e.** Cuando se multiplican ambos miembros de una desigualdad por un número negativo, la desigualdad no cambia su sentido. ☐

*Nota*. Tomado de “Activados 4 Matemática” (p. 27), por R. Abálsamo, A. Berio, S., Mastucci, N. Quirós, F. De Rossi, 2017, Puerto de Palos.

> La profesora lee el enunciado del ítem c), luego responde:
> P: Es falso. Reemplazando acá la x por 2, ¿ven que no les da?
> A2: ahh, tenemos que reemplazar…y el que sigue tampoco lo entendemos.
> P: a ver…es falso, tienen que armar la inecuación, ese lo tienen que pensar más. Armen una inecuación con módulo que no tenga solución.
> A2: bueno, lo pensamos.

No se alude al significado de solución de una ecuación (se da por sobreentendido), tampoco al de conjunto solución. Asimismo, no se explicitan los diferentes tipos de soluciones en una inecuación con módulo. Los aspectos conceptuales de este contenido no se presentan, ni se construyen con los alumnos, dado que se espera la aplicación directa de los procedimientos (ella pide que encuentren una inecuación que no tenga solución pero no problematiza si es posible o no, directamente da por hecha su existencia).

Algo similar ocurre con las reglas de cálculo, cuando ayuda a los alumnos a resolver las inecuaciones:

> Otro alumno llama a la profesora. Escucho que le explica cómo despejar la incógnita en una desigualdad:
> P: vos despejás igual que en una ecuación, pero si pasás dividiendo un negativo cambia el sentido de la desigualdad. Si es menor, pasa a ser mayor…
>
> Luego, la profesora ayuda a un alumno sentado adelante.
> P: tenés que eliminar el paréntesis, el menos adelante del paréntesis, cambia los signos.
> Luego, escribe en el pizarrón:
>
> $$-(2x-8)$$
> $$-2x+8$$

Puede verse que las reglas de cálculo son impuestas por la docente, sin apoyarse en propiedades explícitas dadas a los alumnos, ni una explicación de por qué son válidas. Se recurre a algoritmos memorísticos para su resolución (**tipo de argumentos y procedimientos**).

El **contexto en el que se enmarca el número real**, en esta parte de la unidad, es la resolución de inecuaciones a partir de reglas estáticas, no presenta un carácter funcional. No se observa **relación del número real con otros campos de conocimientos** que no sea el puramente matemático y que le dé significatividad a la resolución de inecuaciones de este tipo.

**Tabla 3. Características observadas en la Docente A acerca del discurso numérico escolar en la parte I: ecuaciones e inecuaciones con módulo**

| Categorías de análisis para el discurso numérico escolar | Características del discurso numérico escolar |
|---|---|
| Tipo de presentación del número real | No se presenta el número real. Resolución de inecuaciones basada en la definición de módulo o valor absoluto. Se utiliza la recta para representar números reales, sin indicar previamente que cada número real se corresponde con un punto y viceversa. Significados y procedimientos impuestos. |
| Tipos de argumentos y procedimientos | No se hacen explícitas las propiedades que validan la resolución de las inecuaciones (propiedad uniforme). No se hace explícita la necesidad de establecer una unidad para la representación de números reales en la recta. |
| El contexto en el que se enmarca el número real, que haga ver su grado de funcionalidad en una situación específica | Resolución de ecuaciones e inecuaciones. Reglas estáticas, no presenta un carácter funcional. |
| El foco de interés del docente acerca de lo que saben o lo que hacen sus alumnos en cuanto al número real | Reproducción del mismo procedimiento expuesto por la docente para la resolución de inecuaciones con módulo. |
| La relación del número real con otros campos de conocimientos y prácticas sociales que se propicie en el aula | Explicaciones dentro de la matemática misma, no hay relación con otros campos de conocimiento. |

#### 4.1.1.2 Parte 2: radicales (extracción de factores fuera del radical, operaciones con radicales)

La docente A refresca el concepto de número irracional, preguntando a los alumnos si recuerdan cuáles eran los números racionales e irracionales.

> Después, escribe la fecha y el título “Números irracionales” en el pizarrón y espera a que los alumnos saquen la carpeta y hagan silencio. Luego, pregunta:
> P: ¿cuáles eran los números irracionales?
> A1: Los que no son racionales
> P: ¿Y cuáles eran los racionales?
> A2: Los que se pueden representar como fracción.
> P: Entonces ¿los irracionales? Los que no se pueden representar como fracción. ¿Un ejemplo?
> A3: ¡$\pi$!
> P: Tienen infinitas cifras decimales no periódicas. ¿Otro ejemplo?
> A4: raíz de 1
> P: ¿raíz de uno? ¿cuánto da?

A4: No, ¡raíz de 3!
P: bien, raíz de 3. ¿Cuáles son entonces? ¿Raíces cómo?
A2: Las raíces de números primos.
P: ¿solo de números primos?
A2: no…las raíces que no son raíz de 4, de 9…
P: las raíces no exactas, que no dan un número entero.
Luego dicta:
P: Los números irracionales son aquellos que no pueden ser expresados como el cociente de dos números enteros y tienen infinitas cifras decimales no periódicas. Las raíces no exactas de números racionales, son números irracionales.

Da la definición de número irracional sin un análisis o demostración de su existencia. No se construye el concepto, se impone la condición de que no puede expresarse como fracción y que tiene infinitas cifras decimales no periódicas, aunque parece ser un tema previo que los alumnos ya conocen. Pone de ejemplo las raíces no exactas, aunque no queda claro cuál es el índice de la raíz, ni se da precisión al término "exacto" (entendiéndose que se trata de un número entero, como en la explicación anterior). Tampoco se justifica por qué se trataría de número irracionales (**tipo de presentación**). Luego, introduce el concepto de radical:

La profesora dicta textual del libro Activados 4 Matemática (Abálsamo et al., 2017):
"Se denomina radical a la raíz indicada de un número o de una expresión, siempre que esta tenga solución real" (p. 32).
Luego, comenta:
P: Vamos a empezar con extracción, suma, resta, cociente de radicales.
Escribe el título en el pizarrón: Extracción de factores de radicales.
Dicta, leyendo del mismo libro:
P: "Existen factores dentro de un radical que pueden ser extraídos si el exponente de los mismos es mayor o a lo sumo igual que el índice de la raíz. Para ello deben aplicarse propiedades de la potenciación y de la radicación"(Abálsamo et al., 2017, p. 34).

Se puede observar que no se problematiza la situación de extraer factores fuera del radical. El **foco de interés** está puesto en las técnicas para expresar un radical de otra manera, previamente establecida, sin analizar las ventajas de hallar esa expresión o dar algún motivo que la justifique. Esto puede observarse en los ejemplos que propone la docente:

Ejemplo:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{16.x^8} &= \sqrt[3]{2^4}.\sqrt[3]{x^8}\\ &= \sqrt[3]{2^3}.\sqrt[3]{2^1}.\sqrt[3]{x^6.x^2}\\ &= 2.\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{x^6}.\sqrt[3]{x^2}\\ &= 2.\sqrt[3]{2}.x^2.\sqrt[3]{x^2}\\ &= 2x^2\sqrt[3]{2x^2}\end{aligned}$$

A6: ¿Por qué se hace esto, profe?
La profesora se ríe por lo bajo y dice:

P: ¿Entendieron?
Los alumnos no contestan.

Los alumnos preguntan acerca de los motivos por los cuales se desarrollan estas técnicas, pero la docente ignora la pregunta dejando más en evidencia que el **contexto** en el que se enmarca el número real es algorítmico, basado en la operatoria de los números reales. Continúa con ejemplos similares y la ejercitación no presenta otra dificultad más que la de factorizar números compuestos, aplicar propiedades de potenciación y radicación.

Para la adición y sustracción de radicales, la docente A procede de manera similar:

Escribe el título "Radicales semejantes". Comienza a dictar:
P: Dos radicales son semejantes cuando tienen igual índice y mismo radicando.
Escribe en el pizarrón:

- Términos con radicales semejantes:

$$-\sqrt[5]{3} \text{ y } \sqrt[5]{3}$$
$$-2\sqrt[3]{2} \text{ y } 4\sqrt[3]{2}$$
$$3\sqrt[4]{x^3} \text{ y } -8\sqrt[4]{x^3}$$

- Términos con radicales no semejantes:

$$-\sqrt[3]{7} \ \ y \ \ \sqrt{7}$$
$$5\sqrt{3} \ \ y \ \ 7\sqrt{2}$$
$$-4\sqrt[4]{3} \ \ y \ \ 9\sqrt[3]{4}$$

Comienza definiendo y ejemplificando radicales semejantes para luego presentar la siguiente regla para la suma y resta de radicales:

Espera que los alumnos terminen de escribir los ejemplos y luego dicta el título: "Adición y sustracción de radicales". Continúa dictando: "sólo es posible sumar o restar términos que contienen radicales semejantes"(Abálsamo et al., 2017, p. 34).
Escribe en el pizarrón:

$$6\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - \sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

P: Para sumar estos radicales sumamos, 6 con 4 y restamos 1. Da 9 por raíz de 3.

No se dejan explícitas las propiedades que se están aplicando o la justificación del procedimiento por el cual se suman o restan los coeficientes de $\sqrt{3}$. Se impone un procedimiento, como una regla de cálculo exitosa sin argumentación sobre su validez (**tipo de argumentos y procedimientos**). Los alumnos cometen errores al resolver los ejercicios en el pizarrón, quizás por no comprender las reglas que deben aplicarse:

Un alumno escribe en el pizarrón:
e)$-\sqrt{169} - \sqrt{99} + \sqrt{235} =$
$-\sqrt{13^2} - \sqrt{3^2}\sqrt{11} + \sqrt{5^2}\sqrt{11} =$
$-13 - 3\sqrt{11} + 5\sqrt{11} = -11\sqrt{11}$
La profesora le dice al alumno que tiene un error. Pregunta al resto si se dan cuenta del error. Un alumno dice: "falta el -13".
P: el error, me parece, es que juntó todo. Estos dos que tienen raíz de 11 se pueden juntar.

Este error suele ser recurrente en los alumnos. La docente interviene en la clase cuando aparece un error de este tipo reforzando y repitiendo que no pueden sumarse términos que no son semejantes.

La presentación de la multiplicación de radicales, las operaciones combinadas entre radicales y la racionalización de denominadores se da de manera similar. Los procedimientos son explicados por la docente, a veces sin hacer explícitas las propiedades que se utilizan y a veces presentándolas sin demostración y con un lenguaje poco preciso (**tipo de argumentos y procedimientos**).

> P: vamos a hacer otro ejemplo. ¿Qué hay que hacer acá? No se puede distribuir la potencia. Hay una fórmula que yo quiero que conozcan. Lo vamos a hacer primero sin la fórmula.
> Escribe en el pizarrón:
>
> $$\begin{aligned}(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 &= (\sqrt{2}+\sqrt{3}).(\sqrt{2}+\sqrt{3})\\ &= (\sqrt{2})^2+\sqrt{2}\sqrt{3}+\sqrt{3}\sqrt{2}+(\sqrt{3})^2\\ &= 2+\sqrt{6}+\sqrt{6}+3\\ &= 5+2\sqrt{6}\end{aligned}$$
>
> P: Les voy a dar la fórmula del cuadrado del binomio que es re práctica. Se usa muchísimo en otros temas.
> Escribe en el pizarrón:
>
> $$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
>
> P: ¿vamos a ver cómo quedaría con la fórmula?
> Escribe en el pizarrón:
>
> $$\begin{aligned}(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 &= (\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2\\ &= 2+2\sqrt{6}+3\\ &= 5+2\sqrt{6}\end{aligned}$$
>
> P: ¿Qué notaron de hacerlo así con la fórmula?
> A1: es más corto
> P: de las dos formas está bien, pero así es más corto.
> Espera que terminen de copiar y luego escribe:
> d) $(\sqrt{10}+\sqrt{7}).(\sqrt{10}-\sqrt{7})$
> P: ¿qué puedo hacer?
> A2: distributiva
> P: Sí, pero hay algo más fácil. A ver si se acuerdan…
> A2: cuadrado del binomio
> P: No, no es lo mismo. Miren esto, ¿es el mismo procedimiento que antes?
> A2: no, no es lo mismo.
> La profesora escribe en el pizarrón:
>
> $$(a-b).(a+b) = a^2-b^2$$
>
> Diferencia de cuadrados
> Los alumnos le dicen que no lo dieron el año anterior.

No se explicita en ningún momento los valores que pueden asumir las variables de las expresiones algebraicas, si es posible su cálculo para cualquier número real, ni la validez de las fórmulas presentadas. No se evidencia **relación con otros campos de conocimientos o prácticas sociales** (como el medir, por ejemplo al comparar segmentos que son inconmensurables).

**Tabla 4. Características observadas en la Docente A acerca del discurso numérico escolar en la parte II: radicales**

| Categorías de análisis para el discurso numérico escolar | Parte II: radicales |
|---|---|
| Tipo de presentación del número real | No se construye el concepto de número irracional, se impone la condición de que no puede expresarse como fracción y que tiene infinitas cifras decimales no periódicas. No se plantea por qué las raíces no exactas de número racionales son número irracionales. |
| Tipos de argumentos y procedimientos | Mecánico y memorístico, no se explicitan las propiedades que se aplican (como la distributiva de la raíz respecto del producto, producto de potencias de igual base, etc.) |
| El contexto en el que se enmarca el número real, que haga ver su grado de funcionalidad en una situación específica | Algorítmico, basado en la operatoria de números reales. Reglas exitosas para el cálculo, dentro de la matemática misma. No se resignifica en diversos contextos, es único. |
| El foco de interés del docente acerca de lo que saben o lo que hacen sus alumnos en cuanto al número real | Puesto en el algoritmo que permite sacar factores y operar con radicales. La enseñanza está centrada en objetos. |
| La relación del número real con otros campos de conocimientos y prácticas sociales que se propicie en el aula | No se evidencia relación con otros campos de conocimientos o prácticas sociales (como medir). Los alumnos preguntan en reiteradas ocasiones para qué sirve, dónde se usa aquello que les está enseñando pero la docente no da respuesta. |

### 4.1.2 DOCENTE B

La docente B organiza la unidad Número Real en cuatro partes:

1. Presentación del conjunto de los números reales. Operaciones y ecuaciones con números racionales: clases 1, 2, 3 y 4.
2. Notación científica: clases 5, 6 y 7.
3. Inecuaciones e intervalos de la recta real: clases 8, 9 y 10.
4. Operaciones con números irracionales: clases 11, 12 y 13.

Solo la primera clase de las desarrolladas por la docente B fue presencial, el resto fueron virtuales a causa del aislamiento preventivo y obligatorio por la propagación del COVID-19 impuesto por el gobierno en ese momento.

### 4.1.2.1 Parte 1: presentación del conjunto de los números reales. Operaciones y ecuaciones con números racionales

La docente B comienza la unidad presentando los diferentes conjuntos numéricos. Comienza con los números naturales, describiéndolos como un conjunto con infinitos elementos que sirven para contar (el 1, el 2, el 3 y así ejemplifica). Menciona los diagramas de Venn para representar conjuntos, aunque los alumnos dicen que no recuerdan haber visto tal representación. Continúa con el conjunto de los números enteros, como ampliación de los naturales al observar que no es posible realizar restas cuando el minuendo es menor que el sustraendo:

> P: ahh bueno. ¿Puedo hacer operaciones con estos números? Yo puedo hacer operaciones, pero ¿qué pasa? Si yo los sumo, ¿me da un número natural?
> A1: sí
> P: sí, me da un número natural. ¿Y si los resto?
> A3: depende…
> P: depende ¿de qué? De cuál es mayor o menor. Si a un número le resto otro más grande, ¿me da cómo?
> A2: negativo
> P: negativo, entonces no es natural. Necesito otro conjunto para poder meter a estos negativos. ¿Cuáles serían, por ejemplo? El -1…si yo hago 3-17 ¿cuánto me daría? -14. El 0, fíjense que acá no lo incluimos, no es un número natural. Y puedo seguir nombrando, otros números negativos: el -128. Entonces a este conjunto, de los naturales negativos y los naturales, ¿qué vamos a hacer? Los vamos a encerrar en un conjunto más grande que se llama el conjunto de los números enteros. Estos seguramente ya los escucharon el año pasado.

Puede observarse que, para referirse a los números naturales, la docente B menciona una práctica de referencia: contar elementos. No es el caso de la presentación que hace con los números enteros, en donde su significado radica en la realización de restas que no tienen un resultado posible en el conjunto de los números naturales.

La docente procede de manera similar para presentar los números racionales como cociente de enteros, ya que no siempre se obtiene como resultado un número entero:

> P: bien, ahora ¿todas las divisiones entre enteros, me va a dar un número que esté dentro del conjunto de los números enteros?
> A2: no
> P: ¿por ejemplo? ¿cuál no?
> A2: 10 dividido 3
> P: bien, 10 dividido 3. Este cociente no me da un número entero, ¿tienen la calculadora por ahí? Hagan la división esa, ¿cuánto les da?
> A3: 3,3333…
> P: bien, da 3,333…y ¿sigue esto?
> A1: sí, porque son infinitos
> P: Muy bien, el -1/5 tampoco. Yo lo puedo hacer en la calculadora, la división y obviamente no es un número entero.
> Va anotando en el pizarrón estos ejemplos.

P: todos estos números, fíjense que podemos hacer divisiones, multiplicaciones, todas las operaciones elementales y el resultado me va a dar ¿qué? Un tipo de fracción irreducible, un número decimal o también un número entero. Es un conjunto más amplio, donde involucra también los enteros. Este se llama el conjunto de los números racionales y se simboliza con una $\mathbb{Q}$. El conjunto, entonces, de los números racionales lo identificamos con una $\mathbb{Q}$.

El hilo conductor de la presentación sigue siendo la operatoria entre números, al obtener resultados que no son posibles dentro de un conjunto numérico y a partir de allí precisar de otro más amplio. La presentación de los irracionales sigue la misma lógica:

P: ¿pero yo podré aplicar la raíz cuadrada a varios números y que me dé siempre un número racional?
A3: no, por ejemplo, al 2
P: a ver, si yo hago la raíz cuadrada de 2, ¿cuánto me da esto?
A3: un número periódico, ¿no?
P: bueno, contesto estas dos preguntas: ¿se puede expresar como fracción? No. ¿Es un número periódico? No
A3: no periódico
P: ¿dijiste no periódico?
A3: sí.
P: ah perdón, te entendí periódico. ¿Qué significa que un número es no periódico?
A3: o sea, que no era exacto, que no es como 10 dividido 3 que te daba 3,333 … Que no se repite una secuencia, así como 2, 5, 2, 5…
P: como que no se repite siempre una secuencia
A3: como que no hay un patrón…
P: bien, muy bien. Bueno, agarren la calculadora y hagan la raíz cuadrada de 2. A ver decime A3 cuánto es.
A3: 1,414213562…
P: y sigue, sigue. Lo que sigue yo no puedo verlo en la calculadora y sino en una computadora que me dé, no sé, cien cifras decimales. ¿Y el problema cuál es? que no hay una secuencia, como dijo A3, no hay un período de repetición. Entonces estos números que tienen esta característica, nunca los voy a poder escribir como fracción. Por lo tanto, este nos queda fuera de este conjunto, ¿bien? Y esto no me pasa solo con la raíz de 2, me pasa con muchos y con infinitos números. Miren, vamos a ver otros, tengo la raíz cúbica de -5. A ver ¿quién lo hace con la calculadora?

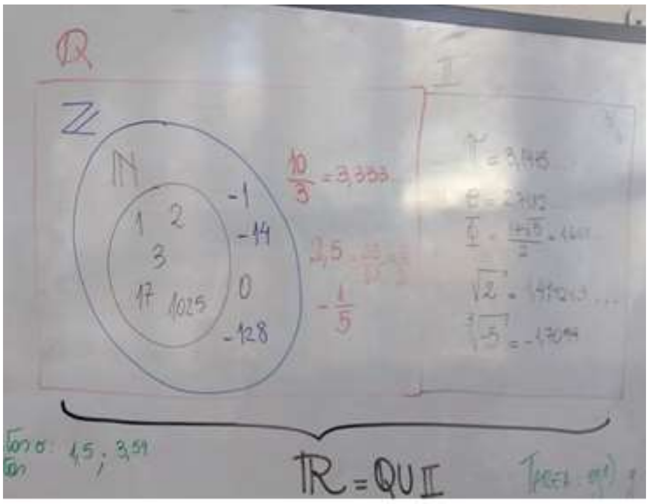
De esta manera, presenta a los irracionales como los números decimales que tienen infinitas cifras decimales no periódicas. Ejemplifica con el número $\pi$, comentando que es el cociente entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro, y el número de oro, comentando que tiene relación con proporciones del cuerpo humano, como el cociente entre la estatura y la distancia del obligo a los pies.

Podemos notar que, tanto para los racionales como para los irracionales, se considera su existencia a partir del resultado de una operación, factible de realizar y a veces obtenido en la calculadora, aunque no se explicite ni se conozca el algoritmo que se realiza para obtenerlo. En el caso del número $\pi$ o raíces no racionales, la docente afirma que tienen infinitas cifras decimales no periódicas, pero no se explica la razón, ni un procedimiento que permita obtener aproximaciones cada vez mejores y que argumente una idea intuitiva de que siempre se podrían agregar decimales a la expresión. Además, se impone la característica de que los irracionales no pueden expresarse como fracción sin especificar el por qué (**tipo de presentación**).

Por otro lado, la suposición de la existencia de racionales e irracionales es considerada suficiente para suponer la existencia de números reales (objetos preexistentes), ya que son presentados como la unión de estos dos conjuntos:

> P: los que no son racionales, son irracionales y los represento con una letra 𝕀. ¿Habrá otro conjunto? ¿Otros números fuera de estos? Por ahora todos estos, los racionales y los irracionales forman el conjunto de los números reales. Lo representamos con la ℝ. Los reales terminan siendo la unión de los racionales con los irracionales, ¿se acuerdan este simbolito? ∪, de unión de conjuntos.
> A3: sí.
> P: Bueno, tengo la unión de conjuntos.

Con un diagrama de Venn, concluye su presentación:




La presentación de los números reales que realiza la docente B sigue un orden lógico, no histórico y lineal, conducido por la necesidad de obtener resultados de operaciones numéricas, aunque no se vislumbre la necesidad de realizar estas operaciones y obtener resultados. No se enmarca en ninguna práctica de referencia, como la repartición en partes iguales para el caso de los racionales, ni en la medición de longitudes para el caso de los números irracionales, por ejemplo (**relación del número real con otros campos de conocimiento y prácticas sociale**s).

Luego, la docente B comienza a trabajar las diferentes representaciones de un número racional: como fracción y como número decimal. Clasifica los decimales en exactos o periódicos, y dentro de estos últimos como puros o mixtos. Para realizar el pasaje de una representación a otra, presenta reglas mecánicas y memorísticas. Por ejemplo, al pasar de fracción a número decimal:

2- Coloca una F si la expresión decimal de la fracción es finita y una P, si es periódica.

a) $\frac{2}{7}$

b) $\frac{7}{20}$

c) $\frac{4}{15}$

d) $\frac{9}{8}$

e) $\frac{5}{12}$

f) $\frac{1}{32}$

P: si hacen 2 dividido 7, con la calculadora por ejemplo… ¿cuánto les da?
A3: a mí me dio 0,285714 y esa cifra es la que…
P: bueno, les digo algo, es confuso, pero en realidad hay un período. Es 285714 y después empieza 2857 y no hay más lugar en el visor, pero sí cumple un período. ¿Bien? O sea que no es finita, es periódica. Y yo les voy a decir algo más, voy a poner la "P" de periódica…ehh…creo que lo charlé con uds, no recuerdo bien…para darme cuenta si una fracción es periódica o finita yo tengo que observar el denominador, si no hay forma de expresarlo… si al 7, por ejemplo, no hay forma de llevarlo a una potencia de 10 cuando hago la amplificación de la fracción. Es decir, si yo tengo el 2/7 y yo quiero buscar una fracción equivalente, ¿bien? Entonces, ¿habrá forma de que podamos encontrar una fracción equivalente cuyo denominador sea una potencia de 10? 10…100…1000…
A3: no.
P: entonces, si yo no encuentro esa forma, y ahora voy a explicar algo también respecto a eso, quiere decir que yo nunca voy a poder escribir a la fracción en forma finita, en su forma decimal. O sea que siempre me va a dar periódica y eso también lo puedo explicar, cuando uds descomponen al denominador…vieron cuando uds descomponen un número en primos…
A3: sí, en la primaria lo vi
P: bueno, a cualquier número nosotros lo podemos descomponer en factores primos, en números primos. Y si en esa descomposición aparece un 5, por ejemplo, yo voy a poder llevarla a una fracción que se llama decimal, es decir, que su expresión decimal va a ser finita. ¿Alguna duda respecto a esto?
Nadie contesta y entonces continúa:
P: bueno, acá fíjense que el 7 ya de por sí es primo, o sea que su descomposición en primos es el mismo 7, entonces ya vemos de que seguramente va a ser su expresión decimal infinita periódica. El 7/20, fíjense el 20 en su descomposición aparece un 5 y también aparece un 2 entonces va a haber forma de llevar esa expresión a fracción decimal, es decir, que en el denominador aparezca una potencia de 10. Por lo tanto, esa fracción es una fracción exacta finita, el 7/20
Escribe al lado del número "F".

Puede observarse que se utiliza la calculadora para validar si un número es exacto o periódico, al menos como primera estrategia, pero no se explicita que la calculadora sirve para acelerar el resultado del algoritmo de la división. Al no realizar este procedimiento, no es posible ver los restos que se van obteniendo, invisibilizando el por qué se repite el período infinitamente. Sin embargo, para el caso del 2/7, al no poder visualizar el período que se repite en el visor de la calculadora, la docente B cambia la estrategia para buscar una fracción equivalente a la dada que tenga como denominador una potencia de 10. Para esta segunda estrategia, recurre a la factorización en primos del denominador sin explicar por qué debe estar formado solo por 2 y 5 para ser exacta. Queda entonces como una regla memorística, al igual que la división por calculadora, para la determinación de la clasificación. El significado es el pasaje a diferentes tipos de representación de un mismo número y su argumentación es puramente algorítmica (**tipo de argumentos y procedimientos**).

Lo mismo ocurre cuando la docente B quiere pasar la expresión de un número decimal periódico a fracción:

> P: Les voy a explicar una técnica, que obviamente tiene su explicación. Nosotros les enseñamos la técnica y el que quiera, podemos ver la explicación, de dónde vienen las operaciones que hacemos, ¿está bien? Lo que tenemos que hacer es escribir al número…lo primero que vamos a hacer es escribirlo en forma periódica. Fíjense que lo que se repite en el b) es el 12.
> Escribe: $b)\ 0{,}121212\ldots = 0{,}\widehat{12}$
> P: entonces el arco abarca al 1 y al 2. Para escribirlo como fracción lo que vamos a hacer es expresar a todo el número sin la coma, sin el arco…o sea, que me quedaría 012 pero bueno, el 0 en esta posición carece de significado entonces lo vamos a sacar y le tendríamos que restar la parte o los dígitos que no están afectados por el arco, en este caso es 0 también, o sea que no le resto nada y divido por…abajo vamos a poner tanta cantidad de nueves como dígitos hay abajo del arco. Hay dos dígitos abajo del arco, por eso vamos a poner dos nueves.
> Escribe $0{,}\widehat{12} = \frac{12}{99}$
> P: entonces les da 12 sobre 99. Uds. lo pueden comprobar con la calculadora, si hacen 12 dividido 99 les va a dar 0, 121212… Ahora, como me dice que lo exprese como una fracción irreducible, nosotros lo que vamos a hacer es simplificar, ¿sí? Si nosotros simplificamos al 12/99, ¿por qué número lo podríamos dividir?

En este caso la docente B deja explícito que es una "técnica" pero que no va a explicar la justificación de por qué es exitosa para poder representar decimales periódicos como fracción. Una vez más, puede notarse la imposición de procedimientos, priorizando lo algorítmico por sobre el entendimiento (**tipo de argumentos y procedimientos**).

Seguido a la resolución de estos ejercicios, la docente propone actividades para realizar operaciones combinadas con números racionales y resolver ecuaciones. Se presentan las propiedades de los números reales como las "reglas de juego" a seguir, y una serie de pasos, tipo "receta", de cómo se debe proceder en su resolución:

7) c)

$$\left(0,\hat{3}-1\right)^2 : \sqrt{\left(1-\frac{3}{4}\right)^{-1}} - \left(0,\hat{6}+0,\widehat{12}-0,\widehat{23}\right) : \sqrt[3]{-0,125} =$$

En la resolución de este ejercicio podemos observar que la docente va guiando a los alumnos en los pasos que deben hacer: primero, deben separar en términos; segundo, escribir todos los decimales como fracción; y luego, operar siguiendo una serie de propiedades para el cálculo. No se problematiza este proceder, el por qué es necesario convenir cuáles son las operaciones que deben realizarse primero, ni el por qué es conveniente trabajar con fracciones y no con números decimales. Tampoco se explican por qué las propiedades que se utilizan son válidas, no se resignifican en el nuevo campo numérico de los reales (**tipo de argumentos y procedimientos**). A nivel conceptual sucede algo similar, por ejemplo, al expresar como fracción a los decimales puros con período 9, la docente reconoce ambas expresiones como números enteros, sin diferenciar sus características (número real/número entero), más allá de la correspondencia que los conecta:

P: Voy completando con uds., a ver el ejercicio 4. ¿Cuánto les da cada uno de ellos? El $0,\hat{9}$
A2: 9/9
P: bien, 9/9
P: o sea que el $0,\hat{9}$ nos da 9/9. ¿Y cuándo es 9/9?
A2: 1
P: Tal cual, 9/9 es 1. Si pensamos en el 0,9999... con infinitos nueves podemos pensar ¡uy, está re cerca del 1! Pero podemos ver, matemáticamente, que es igual a 1.
Continúa de la misma manera preguntando los resultados de los otros ítems.
Varios alumnos contestan y a medida que va obteniendo respuesta, escribe:

4- Transforma a fracción los siguientes números. ¿Puedes sacar alguna conclusión?

a) $0,\hat{9} = 9/9 = 1$ $\qquad 0,\hat{9} = 0,9999.....$
b) $1,\hat{9} = 18/9 = 2$
c) $2,\hat{9} = 27/9 = 3$
d) $16,\hat{9} = 153/9 = 17$

P: Bueno, fíjense. Todos estos números cuando lo escribo en forma fraccionaria, puedo ver que al operar puedo hacer el cociente y me va a dar números enteros. O sea, ¿qué conclusión podemos sacar? ¿Qué les parece?
A2: que $0,\hat{9}$ es igual a 1

P: bueno, podríamos decir que todos los números de este estilo que son periódicos puros que tienen período 9 terminan siendo un número entero. ¿Bien?

En este punto del desarrollo es posible observar que el **foco de interés** de la docente está puesto en el aspecto aritmético y algorítmico del número real. Dedica mucho tiempo y esfuerzo a la aplicación sistemática de técnicas y propiedades para la resolución de cálculos, despojados de toda actividad humana.

La docente sigue en la misma línea cuando trabaja con ecuaciones. A continuación, se muestra cómo la docente va resolviendo el siguiente ejercicio:

d) $\frac{(0,5 - x) : 0,1}{(0,5 - 1)^2} = -4$

1. $X = \frac{3}{5}$
2. $X = \frac{2}{5}$
3. $X = -\frac{3}{5}$

Primero pasa los decimales a fracción, realiza distributiva en el numerador y resuelve la operación del denominador. Llegado a este punto, comienza el despeje de la incógnita realizando pasajes de números al segundo miembro, a partir de las operaciones inversas que aparecen en el primer miembro:

$$\frac{5 - 10x}{\frac{1}{4}} = -4$$

P: ¿Qué podemos hacer para despejar x? ¿Qué operación podemos hacer?
A3: puedo pasar el ¼
P: Bueno, ese ¼ que está dividiendo, lo puedo pasar multiplicando al otro miembro
Escribe ese paso y simplifica:

$$5 - 10x = -4 . \frac{1}{4}$$

P: ¿a qué es igual este segundo miembro? -1 por 1/1 ¿cuánto da?
A4: -1
P: ahora despejamos x, primero paso el 5 al otro miembro restando.
Escribe:

$$5 - 10x = -1$$
$$-10x = -1 - 5$$

P: Tenemos -10x igual a -6. ¿Y ahora? ¿x a que es igual? A -6…
A4: más 10

P: ¿estamos todos de acuerdo?
A2: sí .
Contestan varios esta pregunta.
P: bueno, estamos al horno entonces…
A2: ¿pasa dividiendo?
P: ¡aja! Ojo, ojo. Miren el -10, ¿qué operación le está haciendo a la x? Si bien no aparece ningún simbolito ahí, está multiplicando…
A4: claro…tenés que pasar dividiendo.
P: Tal cual. O sea, que lo pasamos al otro miembro dividiendo con su signo. El número lo pasamos dividiendo, al -10. ¿Qué resultado nos va a dar? Menos dividido menos da más, positivo. Y acá podemos simplificar el 6 con el 10. A ambos lo vamos a poder dividir por 2. Nos da 3/5 positivo. Por lo tanto, la opción correcta que vamos a marcar es la primera para el d.

La docente B explica la resolución, de manera algorítmica y mecánica. No se hace referencia, en este punto, a la propiedad uniforme y, al no comprender demasiado estos pasos, los alumnos se confunden y cometen errores (**tipos de argumentos y procedimientos**).

Luego, la docente propone la resolución de problemas para plantear ecuaciones, los cuales suponen un mayor grado de complejidad al tener que pasar de un lenguaje coloquial a uno simbólico:

10) Plantear la ecuación y resolver los siguientes problemas: x: un n°

a) La tercera parte del anterior de un número es cuatro unidades mayor que la quinta parte de su consecutivo. ¿Cuál es el número?

P: ahora antes de empezar a trabajar con el problema, a modelizarlo, a plantear una ecuación, recordemos algunas cuestiones…Uno cuando habla de un número o un número desconocido uno habla de una incógnita o de “x”, lo representamos con una letra. Ahora, ¿cómo yo puedo expresar al consecutivo del número? ¿O a la tercera parte del número? Tenemos varias expresiones para “x”. Por ejemplo, a la tercera parte de un número, ¿cómo lo expreso?
A2: 1/3
P: como un 1/3, muy bien. Ahora el consecutivo…esperen, fui muy rápido ahí. La tercera parte de un número no es solo 1/3. Es 1/3 del número. Lo voy a escribir acá.
Escribe:
La tercera parte de un n°: $\frac{1}{3}x$.
P: la tercera parte lo expreso como 1/3 pero del número, entonces 1/3 del número es, la operación que se hace es 1/3 multiplicado por ese número. ¿Me explico? Ahora yo lo que quiero es la tercera parte del anterior de un número. ¿Cómo expreso el anterior de un número?
A3: x-1

P: Muy bien, porque el anterior es restarle una unidad. Bueno ahora combinemos estas dos formas. Yo necesito la tercera parte pero del anterior del número. ¿Cómo expreso eso?
Una alumna escribe en el chat "1/3(x-1)". La profesora lo lee y dice que está muy bien. Escribe:

$$\frac{1}{3}(x-1)$$

P: ahora la quinta parte del consecutivo, ¿cómo escribo el consecutivo?
A2: x+1
P: muy bien, x+1. ¿Y la quinta parte?
A2: dividido 5
Otra alumna pone en el chat "1/5"
P: muy bien, dividido 5 o, lo que es lo mismo como me dicen acá en el chat, multiplicado por 1/5.
Escribe:

$$\frac{1}{5}(x+1)$$

P: bueno, entonces ahora estoy ya casi en condiciones de terminar de modelizar el problema, de dar la ecuación que modeliza este problema. Tengo que la tercera parte del anterior de un número es 4 unidades mayor, ¿Qué quiere decir que es 4 unidades mayor? ¿qué operación tengo que hacer?
Una alumna escribe en el chat "sumar 4".
P: claro, sumar 4. Entonces, ¿cómo nos quedaría la ecuación?
A medida que explica va escribiendo.

$$\frac{1}{3}(x-1)=\frac{1}{5}(x+1)+4$$

P: Uds. vayan por partes. Este, dentro de todo es sencillo, puede haber otros más complejos. Aparecen otros que son situaciones de la vida cotidiana, no solo hablan de números, sino que habla de lo que gasta una persona, de partes de un poste….Pero bueno, si uds van identificando por parte las expresiones en forma matemática de lo que me está diciendo en forma coloquial, que quiere decir en palabras, podemos ir armando la ecuación. Bueno, lo que nos queda acá es ir resolviendo la ecuación. Lo nuevo, por así decir, es el planteo del problema. El planteo de la ecuación, teniendo el problema.
Resuelve la ecuación, explicando cada paso:

$$\frac{1}{3}(x-1)=\frac{1}{5}(x+1)+4$$
$$\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}=\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}+4$$
$$\frac{1}{3}x-\frac{1}{5}x=\frac{1}{5}+4+\frac{1}{3}$$
$$\frac{2}{15}x=\frac{68}{15}$$
$$x=\frac{68}{15}:\frac{2}{15}$$

$$x = \frac{68}{15} . \frac{15}{2}$$
$$x = 34$$

Luego escribe:
Rta: el n° es 34

Aquí puede verse que el **foco de interés** de la docente B está puesto en el planteo de una ecuación, a partir de la interpretación de un enunciado en forma coloquial y su pasaje a un lenguaje simbólico. Sin embargo, la discusión es limitada ya que no se observa la naturaleza de la incógnita en ese problema, por ejemplo, si se trata de un número entero, racional, etc. Tampoco se trata de problemas ligados a un contexto real o de aplicación a otras ciencias, ni relacionados con alguna práctica de referencia en donde el número real sea puesto en uso (**relación del número real con otros campos de conocimiento o prácticas sociales**). Los problemas que la docente B propone son de un escenario ficticio irreal o muy poco probable. Por ejemplo, en algunos de ellos se trata de averiguar cuál es el sueldo de una persona conociendo sus gastos y lo que le queda en su cuenta, cuando una persona sabe en general cuánto gana y en función a su sueldo realiza sus gastos. Otro caso, trata de conocer la altura de un poste conociendo las partes de él que se han pintado (para conocer las partes pintadas, es normal que se divida al poste en partes iguales y eso requiere de una medición previa con lo cual ya se conocería la altura del poste). En este sentido, el **contexto en el que se enmarca el número real** es el del pasaje de una representación a otra (de coloquial a simbólica) y el uso de reglas de cálculo para la resolución de una ecuación. Se evidencia un carácter utilitario del conocimiento, ya que no se le permite al alumno resignificarlo en otros contextos, se trata de procedimientos y reglas estáticas que sirven para ser aplicadas en situaciones o problemas similares.

**Tabla 5. Características observadas en la Docente B acerca del discurso numérico escolar en la parte I: presentación del número real, operaciones con números racionales**

| Categorías de análisis para el discurso numérico escolar | Parte I: presentación del número real. Operaciones con números racionales. |
|---|---|
| Tipo de presentación del número real | Conjuntos de números que poseen ciertas características dadas. El hilo conductor de la presentación es la operatoria entre números, al obtener resultados que no son posibles dentro de un conjunto numérico y a partir de allí precisar de otro más amplio. Podemos notar que, tanto para los racionales como para los irracionales, se considera su existencia a partir del resultado de una operación, factible de realizar y a veces obtenido en la calculadora, aunque no se explicite ni se conozca el algoritmo que se realiza para obtenerlo. |

| | |
|---|---|
| Tipos de argumentos y procedimientos | Algorítmico y mecánico: “técnicas” para el pasaje de fracción a decimal, propiedades que reglan el cálculo de operaciones combinadas, reglas de “paso sumando”, “paso dividiendo”, etc. para resolver ecuaciones. |
| El contexto en el que se enmarca el número real, que haga ver su grado de funcionalidad en una situación específica | Uso de reglas de cálculo para resolver operaciones o ecuaciones. Pasaje de un lenguaje coloquial al simbólico para el planteo de ecuaciones. Se trata de procedimientos y reglas estáticas que sirven para ser aplicadas en situaciones o problemas similares. |
| El foco de interés del docente acerca de lo que saben o lo que hacen sus alumnos en cuanto al número real | El número real como objeto que debe seguir ciertas reglas de cálculo. Interesan los diferentes tipos de representación de una ecuación (lenguaje coloquial y simbólico). Enseñanza centrada en objetos. |
| La relación del número real con otros campos de conocimientos y prácticas sociales que se propicie en el aula | Orden lógico, lineal, no se presentan las bases de significados naturales de cada tipo de número. Salvo comentarios al pasar en el caso de los naturales para “contar”, el número $\pi$ en la medida de la circunferencia o el número de oro y su relación con las medidas del cuerpo. Falta de marcos de referencia |

#### 4.1.2.2 Parte 2: notación científica

La docente B presenta a la notación científica como una forma establecida de escribir números muy grandes o muy pequeños:

> P: La notación científica, ¿para qué la usamos? Es una forma abreviada de expresar a un número, a una cantidad que sea muy pequeña o muy grande. Entonces acá en el apunte nos daba como introducción dos ejemplos. El ejemplo del diámetro de un glóbulo rojo, 0.0065 mm. Es una medida muy pequeñita y hay otras muchísimo más pequeñas. Y, por otro lado, tenemos el ejemplo de la distancia de la Tierra al Sol, que es 150 mil millones de metros. Que es una cantidad muy grande. Entonces para poder escribir en forma más reducida y poder hacer operaciones de forma más sencilla, ¿nosotros qué hacemos? Vamos a escribir al número de forma abreviada y acá tenemos en el cuadro celeste la forma, fíjense…Se expresa como un número, que es un número k…este número k es un número entre 1 y 10, mayor o igual a 1, menor estricto que 10, tiene que cumplir sí o sí con esa condición para estar escrito en notación científica, y está multiplicado por una potencia de 10. ¿Qué es una potencia de 10? Es 10 elevado a un exponente, donde el exponente…esto para tener en cuenta, el exponente es un número entero. ¿Sí? Estamos acá recordando algunas cuestiones de conjuntos de los números. Los números enteros ¿cuáles eran? Todos los números con los que contamos: 1,2,3,4,5,6,7…, y los opuestos de ellos…y el cero. Los negativos, el -1, -2, -3…, el 1,2, 3…y el cero también.

> La **notación científica** de un número real es su expresión como el producto de un número mayor o igual que 1 y menor que 10, por una potencia de 10. La forma general de un número escrito a partir de su notación científica es:
>
> $\boxed{k \cdot 10^n \text{ donde } 1 \leq k < 10 \text{ y } n \in \mathbb{Z}}$
>
> Además, *n* es negativo cuando corresponde a la expresión de una cantidad muy pequeña y *n* es positivo cuando se relaciona con una cantidad muy grande.

Aunque introduce ejemplos aplicados a la naturaleza, donde se encuentran números grandes o pequeños (como el diámetro del glóbulo rojo o la distancia del Sol a la Tierra), no se enmarca la forma propuesta de expresarlos en una actividad científica. No se problematiza el manejo de estos números, y las ventajas que tendría expresarlos de esa manera. Tampoco el por qué utilizar esa forma y no otra. Se convierte entonces en un objeto preexistente, cuya presentación es la forma impuesta de expresar estos números siguiendo una forma preestablecida y cuyo significado es expresar números muy grandes o muy pequeños de forma reducida (**tipo de presentación**).

Para el pasaje de una expresión a otra en notación científica se mecanizan algunos procedimientos, que la docente B no profundiza:

> P: tenemos acá el número 0,0065 mm. Para expresarlo en notación científica yo tengo que expresarlo como un número, entre 1 y 10, mayor o igual a 1 y menor estricto que 10… ¿cómo obtengo ese número? Ustedes van a observar, cuando el número es muy pequeño, ¿cuál es la primer cifra, distinta de cero, que aparece? Comenzando de izquierda a derecha, ¿sí? De izquierda a derecha, la primer cifra distinta de cero que aparece es el 6, ¿no? Bueno, con esa cifra y las cifras que siguen, nosotros nos determinamos un número justamente entre 1 y 10, o sea, el 6 va a ser la parte entera del número y las cifras que siguen van a determinar la parte decimal del número. O sea que determinamos el número 6,5. Este sería el k… ¿Hasta ahí me entendieron?
> A2: sí, profe.
> P: bueno, vieron que es un número entre 1 y 10. Bien, y lo vamos a multiplicar por una potencia de 10. Vamos a expresar 10 elevado a un número, ese número…ese número, primero…cuando estamos en presencia de un número pequeño, en el sentido de menor que 1, ¿sí? Cero coma…que empiecen con cero. Entonces, la potencia va a tener un exponente negativo. El número va a ser negativo, el exponente…ahora, ¿qué número va a ser? Y bueno, ¿qué tenemos que hacer? ¿Cómo nos damos cuenta? Fíjense los lugares que hay entre la coma y el 6 incluido, que sería hasta la nueva coma que yo determine. Fíjense que sería un lugar, dos lugares, tres lugares. Entonces, se eleva a la -3. El menos porque es un número pequeño y el 3 porque estamos corriendo 3 lugares la coma. ¿Se entiende?

Se justifica el exponente negativo de la potencia de 10 al decir que el número es pequeño, aunque en realidad supone una división para que el número desarrollado sea igual al expresado en notación científica. Lo mismo ocurre con el exponente positivo cuando el número es grande, no se hace hincapié en que el producto reiterado por 10 agrega ceros al número hasta completar su desarrollo. El signo del exponente de 10 se determina porque es un número grande (y eso lo hace positivo) y el valor absoluto del exponente, por la cantidad de lugares atrás de la coma. No hay una explicación de qué operación se está realizando, sino que el procedimiento a llevar a cabo se presenta como "receta" con la cual se obtienen expresiones equivalentes (**tipo de procedimientos y argumentos**). Los alumnos deberán, entonces, memorizar la definición y los pasos a seguir para obtener la expresión en notación científica. Lo mismo ocurre en el camino inverso, para pasar de un número escrito en notación científica a su forma desarrollada:

> P: Vamos ahora al revés, tenemos un número en notación científica y vamos a desarrollarlo, habiendo hecho el producto con la potencia de 10. Vamos a hacer otro ejemplo, supongamos que tenemos $8.10^4$. Uds piensen al 8 como 8,0. Un número entero como el número coma cero. Después de la coma yo tengo que correrla a la derecha 4 veces. Desde la coma me corro 4 lugares, y ¿cómo completo? Completo con ceros. Entonces el $8.10^4$ es 80 mil. Escribe:
>
> $$8=8{,}0 \qquad 8.10^4 = 8{,}0000$$
>
> Borra la coma y escribe 80.000.

En esta explicación aparece el procedimiento de "correr la coma", que no deja ver que en realidad hay operaciones que deben realizarse, como calcular la potencia y luego multiplicar por 8 el resultado. Esto genera confusión en los alumnos, sobre todo al expresar números "chicos" en notación científica:

> P: bueno, ahora vamos al revés, si el número es chico. Al número lo multiplicamos por una potencia de 10 con exponente negativo. Entonces si yo tengo $8.10^{-4}$ ahora la coma la tengo que correr hacia la izquierda, hacia adelante. Ahora, como siempre les digo, piensen que el 8 tiene una coma atrás: 8,0. Entonces me tengo que correr 4 lugares hacia adelante. Uno, dos, tres, cuatro…la coma ahora va a estar acá, completo con ceros en los lugares vacíos. Ahora, un número que tiene ceros adelante y no tiene coma…acá estos ceros adelante no tienen significado. Entonces, ¿Qué se hace? Se pone coma, cero. En realidad, fíjense que estamos agregando 4 ceros. Si tengo que desarrollar al número expresado en notación científica lo que tengo que hacer es agregar 4 ceros adelante, ¿se entiende?
>
> $$8.10^{-4} = 0{,}0008,$$
>
> A5: profe, ¿qué determina que el exponente es negativo o positivo?
> P: Cuando el 4 es positivo nos va a resultar…nos va a indicar que el número es grande o mayor que 10. Si el número es negativo, nos indica que el número es pequeño, entre 0 y 1.
> A5: ¡gracias!
> P: No de nada.

En este caso, la coma se corre hacia la izquierda en vez de la derecha. La justificación es que el número es chico porque el exponente es negativo. No se relaciona la expresión con la operación que se está realizando, la división sucesiva por 10. El **foco de interés** está puesto en el pasaje de una forma desarrollada a notación científica y viceversa, cuyo hilo conductor es la operatoria que relaciona estas dos formas, aunque no se explicite.

La realización de los ejercicios restantes, se centran en la comparación de números expresados en distinta forma y en la operatoria entre números. Se puede observar, que la docente indica previamente la forma de proceder en su resolución, promoviendo la mecanización de algunos procedimientos o resultados:

- En la comparación de números expresados en notación científica, diciendo que el mayor es aquel que tenga mayor exponente, sin explicar el por qué:

  P: Pero supongamos que yo tengo el número $2,5 \cdot 10^4$ y tengo el $2,5 \cdot 10^5$, entonces el número que multiplica a la potencia es el mismo pero las potencias son distintas, ¿cuál va a ser el mayor? Aquel que tenga el exponente más grande.

  $$2,5 \cdot 10^4 < 2,5 \cdot 10^5$$

  P: Ahora si yo tengo número pequeño, o sea con potencia de exponente negativo.

  $$2,5 \cdot 10^{-4} \qquad 2,5 \cdot 10^{-5}$$

  P: acá nuevamente, el mayor es el que tiene exponente más grande ¿Y cuál es el que tiene exponente más grande? ¿el -4 o el -5?
  A2: Profe, ¿no sería el -4?
  P: Tal cual, el -4 es más grande. Vieron que en los negativos funciona al revés la cosa. Bueno, no es que este caso se presente, pero son criterios interesantes para trabajar.

- En las operaciones combinadas con números, la docente indica paso a paso cómo proceder, sin dar lugar a los alumnos a que piensen en cuál es la mejor manera de hacerlo. Primero se pasan los decimales a notación científica, luego se asocian y se operan por un lado los coeficientes y por otro las potencias de 10 y, por último, se escribe el resultado en notación científica:

  $$6)\ b)\ \frac{0,024 \cdot 12\,000}{0,36 \cdot 500 \cdot (0,2)^2} =$$

  P: lo primero que van a hacer es expresar a todos los números en notación científica, para luego hacer operaciones.
  Va preguntando a los alumnos cómo se escribe cada número en notación científica. A medida que le responden va escribiendo. Contestan correctamente.

  $$\frac{2,4 \cdot 10^{-2} \cdot 1,2 \cdot 10^{4}}{3,6 \cdot 10^{-1} \cdot 5 \cdot 10^{2} \cdot (2 \cdot 10^{-1})^2} =$$

  En el siguiente paso vuelve a escribir lo mismo, excepto el paréntesis elevado al cuadrado. Recuerda la propiedad de potenciación.

$$\frac{2,4\cdot 10^{-2}\cdot 1,2\cdot 10^{4}}{3,6\cdot 10^{-1}\cdot 5\cdot 10^{2}\cdot 4\cdot 10^{-2}} =$$

P: Bueno, ¿cómo procedemos ahora? Vamos a multiplicar todos los números que no son potencia de 10. A ver ¿cuáles son? El 2,4 por el 1,2. Eso me da 2,88 por… ¿y ahora qué hago? Multiplico las potencias de 10: $10^{-2}$ por $10^{4}$, ¿qué propiedad voy a usar?
A2: la dos…
P: Muy bien, la propiedad 2. Tengo que hacer -2+4 que es 2. Vamos ahora con el denominador, multiplicamos todos los números que no son potencia de 10: 3,6 por 5 por 4, eso nos da 72. Ahora multiplicamos las potencias de 10: $10^{-1}$ por $10^{2}$, por $10^{-2}$. Nuevamente aplicamos la propiedad 3, a ver ¿cuánto nos va a quedar? Sumemos los exponentes -1+2 es 1, más -2, -1. Entonces nos queda $10^{-1}$. ¿Me siguen hasta ahí?
A2: sí, profe

$$\frac{2,4\cdot 10^{-2}\cdot 1,2\cdot 10^{4}}{3,6\cdot 10^{-1}\cdot 5\cdot 10^{2}\cdot 4\cdot 10^{-2}} = \frac{2,88\cdot 10^{2}}{72\cdot 10^{-1}}$$

P: Bueno, ahora hacemos la división de los números que no son potencia de 10. 2,88 dividido 72 me da 0,04 y, por otro lado, hacemos la división entre $10^{2}$ y $10^{-1}$. ¿Qué propiedad aplico?
A4: la 4
P: la 4, o sea que tenemos que restar los exponentes. Me queda una potencia de 10 con exponente que es la resta entre 2 y -1. Me queda 10 elevado a la 2 menos -1, o sea, $10^{3}$.

$$= 0,04\cdot 10^{3}$$

P: Por último, lo que hacemos es escribir al número en notación científica. Yo pregunto, ¿este número está expresado en notación científica?
A4: no
P: No, entonces vamos a expresarlo en notación científica. Vamos a expresar al 0,04, que no está en notación científica. Bien, es 4 por $10^{-2}$. Ahora, ¿qué hacemos? Vamos a aplicar propiedades de potencia, ¿qué propiedad voy a usar?
A4: la 3
P: bien, me queda la potencia cuyo exponente es la resta de los exponentes -2+3, da 1. Entonces el número en notación científica es $4.\ 10^{1}$

$$= 0,04\cdot 10^{3}$$
$$= 4\cdot 10^{-2}\cdot 10^{3}$$
$$= \boxed{4\cdot 10^{1}}$$

Luego, la docente B propone la realización de ejercicios de aplicación cuyo **foco de interés** está puesto en la operatoria entre números "muy grandes" o "muy pequeños" y en la expresión del resultado en notación científica:

7) Resuelve los siguientes problemas:

a) La masa de un protón es aprox. $6{,}4 \times 10^{-4}\ gr$. ¿Cuantos protones serían necesarios para formar una masa de 4 toneladas?. Expresar el resultado en notación científica. (1 tonelada = 1000000 gramos)

c) Si una persona tiene 5 litros de sangre y aprox. 4500000 glóbulos rojos en cada milímetro cubico, calcula en notación científica su número de glóbulos rojos.

d) La superficie aproximada de nuestro planeta es de 510 millones de kilómetros cuadrados, y la de la parte continental, de 150.

a) Expresa las medidas anteriores en metros cuadrados usando notación científica.
b) Si la Argentina ocupa alrededor de $2{,}78.10^{12}$ $m^2$, ¿cuántas veces entra el área de nuestro país en la del planeta? ¿y en la de la parte continental?
c) La provincia de Misiones tiene una superficie de casi 30.000 $km^2$ y la de Chaco, poco menos de 100.000 $km^2$. ¿Cuántas veces entra en el área de cada una de estas provincias en la de la Argentina?

Estos problemas aparecen como aplicación de los conocimientos presentados con anterioridad, justificados por su utilidad en situaciones que requieran medidas y/o cantidades pequeñas o grandes (carácter utilitario). No se reconoce a estas prácticas de referencias, como el medir o el contar, como generadoras del conocimiento matemático, funcional al mundo que nos rodea. No se hace referencia a su utilización en el campo científico, el por qué los científicos requirieron esta forma de representación (**relación del número real con otros campos de conocimiento y prácticas sociales**).

**Tabla 6. Características observadas en la Docente B acerca del discurso numérico escolar en la parte II: notación científica**

| Categorías de análisis para el discurso numérico escolar | Parte II: notación científica |
|---|---|
| Tipo de presentación del número real | Forma impuesta de expresar estos números siguiendo una forma preestablecida para expresar números muy grande o muy pequeños de forma reducida |
| Tipos de argumentos y procedimientos | Algorítmico y mecánico: relación del signo del exponente de la potencia de 10 con un número "chico" o un número "grande", pasos para "correr la coma" a la derecha o a la izquierda según corresponda, procedimientos preestablecidos a la hora de operar. |

| | |
|---|---|
| El contexto en el que se enmarca el número real, que haga ver su grado de funcionalidad en una situación específica | Expresión reducida de un número que puede encontrarse en situaciones que implican medidas o cantidades pequeñas o grandes (ejemplos de la naturaleza). |
| El foco de interés del docente acerca de lo que saben o lo que hacen sus alumnos en cuanto al número real | Expresar un número muy grande o muy pequeño en forma reducida y viceversa. Pasaje de una expresión a otra. Operar y comparar con estos números. |
| La relación del número real con otros campos de conocimientos y prácticas sociales que se propicie en el aula | No se reconoce a estas prácticas de referencias, como el medir o el contar, como generadoras de esta forma de representación. Solo se menciona su utilización en el campo científico, pero no el por qué requirieron esta forma de representación. |

### 4.1.2.3 Parte 3: inecuaciones e intervalos de la recta real

La docente B introduce las inecuaciones como una forma simbólica de representar una relación de desigualdad entre una magnitud o cantidad y un número o, más general, entre dos expresiones **(tipo de presentación)**:

> P: Primero, vamos a ver acá el apunte de inecuaciones con una incógnita. Hace la introducción planteando algunos problemitas, o situaciones…donde uno la situación o el problemita lo puede llevar a modelizar con una expresión. Esta situación, como en este caso, por ejemplo, la primer situación…está escrita en lenguaje coloquial, ¿qué quiere decir esto? Está expresada con palabras. Y en la segunda columna, nos muestra cómo expresar esa situación en lenguaje simbólico… o llamado también inecuación, en este caso. Es un lenguaje matemático, ¿y por qué se llama inecuación? Nosotros estuvimos viendo, ecuaciones, ¿qué es? Una igualdad entre dos expresiones donde tengo una incógnita que tengo que averiguar. Bueno, una inecuación es muy parecida a una ecuación, nada más que en vez de aparecer una igualdad aparece una desigualdad. El simbolito este de menor…menor o igual, mayor, mayor o igual. Este símbolo, me expresa una desigualdad entre dos expresiones. Pero vamos a ver que lo vamos a trabajar de manera muy similar a las ecuaciones.

INECUACIONES CON UNA INCÓGNITA

Completar la tabla:

| Lenguaje coloquial | Lenguaje simbólico |
|---|---|
| El peso ***p*** que transporta el ascensor debe ser menor que 275 kg. | ***p < 275*** |
| Para ganar el premio, la cantidad de discos vendidos ***d*** no debe ser inferior a 100 000 | ***d*** ......... **100 000** |
| Para abrir la cuenta hay que depositar un capital ***c*** de al menos $ 200 | ***c*** .......... ***200*** |
| El número de inscriptos ***i*** no puede exceder al de vacantes ***v*** | ***i*** .......... ***v*** |
| Para subir al juego, la altura ***h*** debe ser superior a 0,80 m. | ***h*** ...... ***0,80*** |

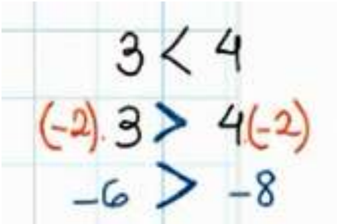
Se puede observar que el **foco de interés** de la docente está puesto en el pasaje de lenguaje coloquial al simbólico, aunque no se reconoce una situación donde se requiera la representación simbólica por sobre la coloquial.

Luego de la resolución de la primera actividad, explica cómo resolver una inecuación con una incógnita, nuevamente sin proponer alguna situación donde se requiera el uso del lenguaje simbólico. Para resolverlas, presenta la propiedad uniforme de la multiplicación, comprobando su validez a partir de ejemplos numéricos:

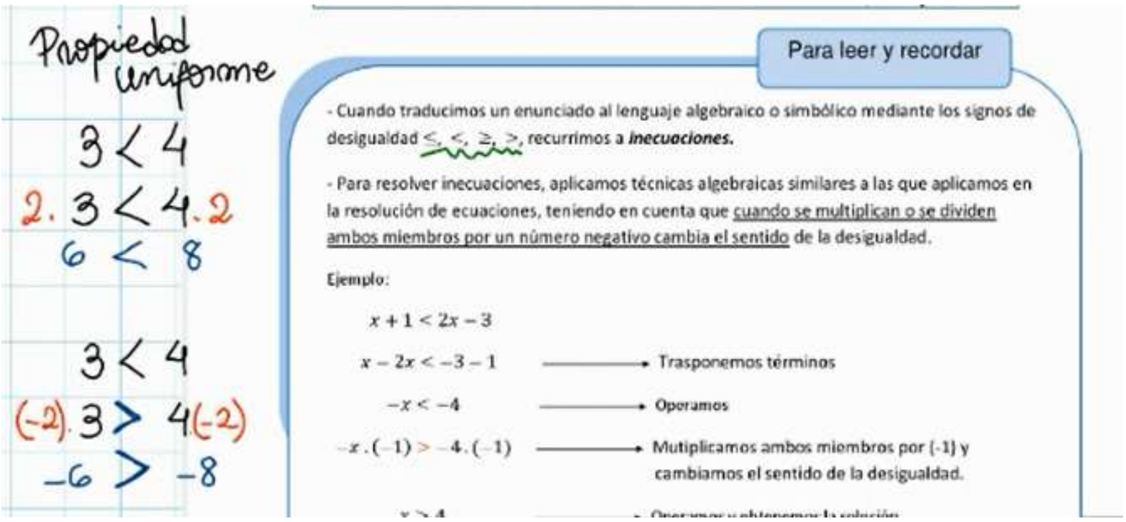
> P: ahora hay una propiedad que se llama uniforme que esa propiedad lo que me dice es que, si yo a ambos miembros lo multiplico por un número positivo (por ejemplo, lo multiplico por 2, por el mismo número, el mismo número positivo), la desigualdad se mantiene. Fíjense, hagamos la cuenta y veamos: 2 por 3 me da 6, 2 por 4 me da 8, efectivamente 6 es menor que 8. Esto se cumple.

$$3 < 4$$
$$2.3 < 4.2$$
$$6 < 8$$

> P: Ahora, ¿qué pasa si en vez de multiplicar un número positivo, multiplico por un número negativo a ambos miembros de la desigualdad? Por ejemplo, en vez de multiplicar por 2, voy a multiplicar por -2. Si multiplico -2 por 3 me da -6 y -2 por 4 me da -8. ¿Cuál es mayor?
> A1: -6
> P: -6 es mayor. Entonces fíjense que cambia la orientación de la desigualdad. Yo tenía la desigualdad con una orientación y ahora cambia la orientación. La boca abierta está para el otro lado. Y eso es porque yo multipliqué por un número negativo. ¿Está?




Escribe como título:



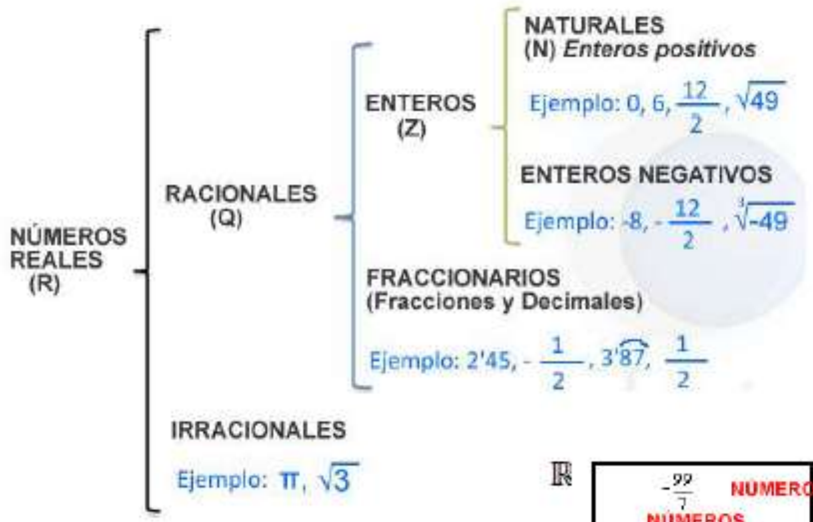

No queda formulada la propiedad uniforme en forma general, el ejemplo que escribe la docente se aplica a un caso particular. Termina siendo una regla a seguir: “cuando se multiplican o dividen ambos miembros por un número negativo, cambia el sentido de la desigualdad” (**tipos de argumentos y procedimientos**). Indica una analogía en la forma de resolver ecuaciones con la de resolver inecuaciones, explicando que el pasaje de un término a otro queda validado por la propiedad uniforme (aunque no se enuncia el caso de la suma):

> P: Entonces, por ejemplo, si yo tengo… igual que cuando multiplico… lo voy a hacer acá al costado. Si decimos 2x<8, uno dice debería pasar el 2 dividiendo. Eso si es una ecuación, en una inecuación va a pasar lo mismo. Eso de pasar dividiendo, ¿de dónde viene? De esta propiedad, la uniforme, que es multiplicar a ambos miembros por un número de tal manera que se puede simplificar con el 2 y me quede la x sola. Entonces lo que uno hace, divide por dos en ambos miembros, se simplifican los 2 y ahí me queda 8 sobre 2 que es 4. De ahí viene el “paso dividiendo”.

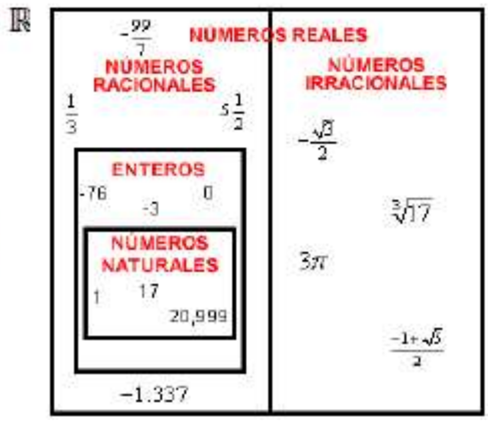
Para introducir la noción de intervalo, la docente B primero repasa los diferentes conjuntos numéricos mostrando el siguiente esquema:

**NÚMEROS REALES**

Los números racionales (Q) y los números irracionales (I) forman un nuevo conjunto, llamado ***conjunto de los números reales***, y al que se designa con la letra $\mathbb{R}$.




Al conjunto de los Número reales ($\mathbb{R}$) lo podemos representar con el siguiente diagrama




Se percibe un error en el primer esquema, dado que el cero aparece como ejemplo dentro de los enteros positivos (previamente la docente dijo que no pertenece a los naturales). Los racionales se muestran conformados por los enteros y los fraccionarios, cuando los enteros en realidad pueden corresponderse con ciertos racionales (según su presentación). Además, define a los fraccionarios como fracciones y decimales, aunque son dos expresiones diferentes que representan el mismo número. En el diagrama de Venn que figura más abajo, se considera, dentro de los números naturales, el 20,999. Si se considera que se trataba de representar el $20,\hat{9}$ como un número igual a 21, no se estaría contemplando que $20,\hat{9}$ no es natural dado que en esa representación decimal no serviría como número “para contar” como lo definió en la primera clase la docente. No se evidencia la correspondencia entre elementos de un conjunto en otro, ni las propiedades que lo hacen pertenecer a un conjunto y no a otro (**tipo de presentación**).

Luego, la docente enuncia propiedades que cumplen los números reales:

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

El **conjunto** de los **números reales** (R) es:

- Es un conjunto **infinito** de números.

- Es un conjunto **denso**, es decir que entre dos números reales hay infinitos números reales.

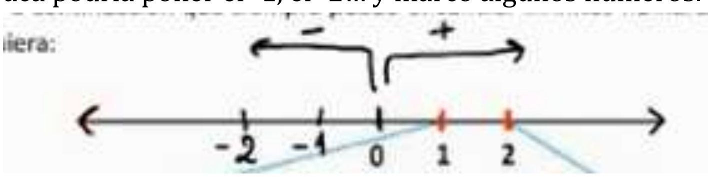
- Todos los números reales se pueden representar sobre la recta (**recta Real**), cumpliéndose que:

a) A todo número real le corresponde un punto y sólo un punto sobre la recta
b) A cada punto de la recta le corresponde un número real.

Caracteriza a los números reales como un conjunto denso, aunque la densidad se trata de una definición topológica que cobra significado cuando se refiere a un subconjunto propio de un espacio topológico. La trivialidad de que un espacio es denso en sí mismo, no refiere a ninguna condición del mismo que permita caracterizarlo. En cambio, sí resulta significativo la propiedad de que los racionales son densos en los reales, tomando a $\mathbb{R}$ como espacio con la topología usual de intervalos abiertos generados por la distancia usual que define el valor absoluto. Todas las propiedades son presentadas sin demostración, ni explicación intuitiva de su validez (**tipo de presentación**).

Con respecto a la última propiedad, la docente intenta dar una explicación de por qué podría representarse cualquier número racional en la recta, recurriendo a la división indefinida de segmentos en diez partes iguales:

> Muestra la recta que no tiene flechas en sus extremos y las dibuja en cada uno de ellos
> P: la graduamos con unidades, el cero y dejando las mismas distancias entre las unidades…uds pueden dejar un cuadrito, dos cuadritos de la carpeta para que quede prolijo, le recta se dibuja con regla. Y hacia la derecha del cero uno pone todos los positivos y hacia la izquierda del cero todos los negativos. Entonces yo acá podría poner el -1, el -2… y marco algunos números.

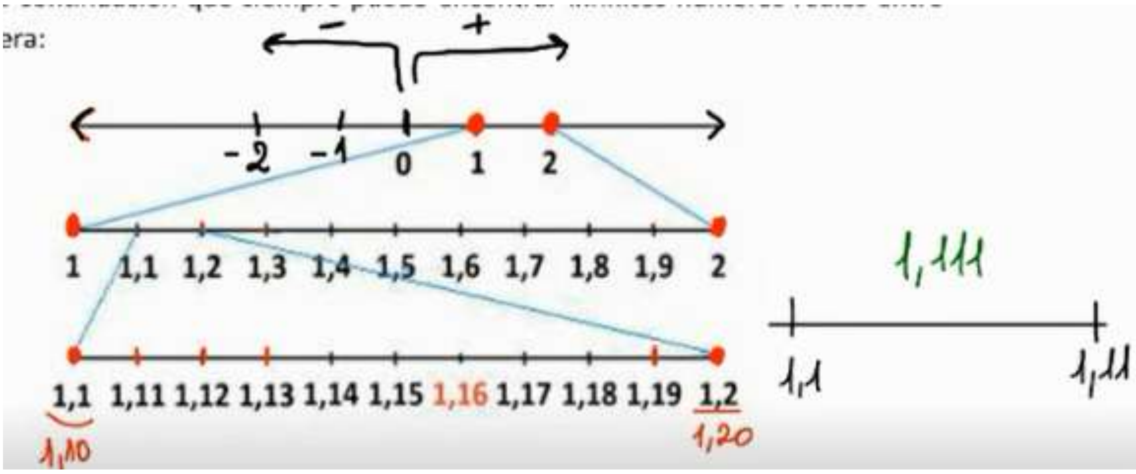



> P: Entonces supongamos que marco el número 1 y el número 2. Al 1 le corresponde un punto y al 2 le corresponde este otro punto. Si yo hago un zoom, como si ampliara, entre el 1 y el 2 puedo hacer una división de números también, ¿sí? Una división de ese segmento, que lo puedo dividir en 10 partes también. Si lo divido en 10 partes, me van a quedar definidos puntos. ¿Y qué puntos voy a tener? Y bueno, los puntos que representan al 1,1; al 1,2; al 1,3 y hasta el 1,9. O sea que fíjense que entre el 1 y el 2 encuentro unos cuantos números más. Ahora supongamos que yo hago nuevamente un zoom, y entre el 1,1 y el 1,2 también lo divido a este segmento de recta en otras 10 partes, por ejemplo. Y entonces, ¿qué van a aparecer? Van a aparecer puntos que representan a otros números. Fíjense,

tengo el 1,11; 1,12; 1,13 hasta llegar al 1,19. Recuerden que tener 1,1 es como tener 1,10, es equivalente, y el 1,2 es 1,20. Entonces fíjense cuantos números tengo entre el 1,1 y el 1,2. Y yo esto podría seguir, podría seguir, ¿sí? Hacer más zoom a la recta, y decir entre el 1,1 y el 1,11, díganme uds, por ejemplo, un número que pueda estar entre estos dos.

A2: 1,111

La docente escribe:

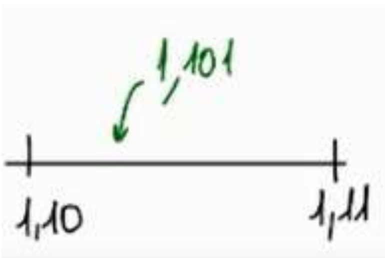



P: pregunto, ¿qué les parece? Piensen al 1,1 como 1,10 y al 1,11. El 1,111, ¿cae acá adentro?

A1: no, sería más grande

P: tal cual, este número cae después. Entonces, a ver cómo nos damos cuenta.

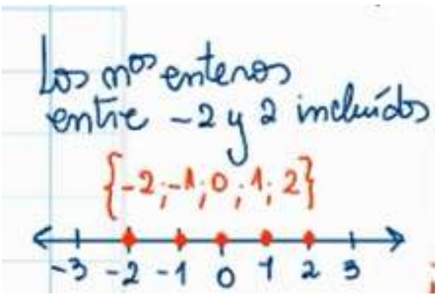
A3: 1,101



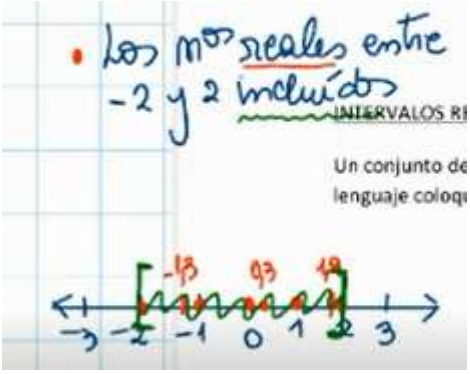

P: muy bien, acá adentro, en alguno de los puntos de este segmento está el 1,101. Muy bien, 1,101; 1,102; 1,103… y yo estoy nombrando aparte números que son racionales, ¡imagínense los irracionales que hay! Entonces, con esto estamos viendo la infinitud de los números reales y esta característica de ser denso que yo siempre entre dos números, por más cerquita que se encuentren, yo voy a encontrar un número entre ellos dos. Y no solo uno, infinitos. Porque yo con este proceso puedo seguir y puedo seguir con este proceso.

Desde el comienzo no se discute la relación de orden de los números reales, se impone la representación creciente de izquierda a derecha, aunque sea una de otras posibles. Tampoco se problematiza el cómo subdividir el segmento en 10 partes iguales, no se profundiza con el aspecto geométrico de la construcción con regla no graduada y compás. Tampoco el cómo marcar números irracionales, no se plantean preguntas tales como: ¿puede marcarse cualquier número real? ¿Cómo aseguro la existencia de un punto para cada número real y viceversa? No se detiene demasiado en la construcción geométrica, sino que resulta una introducción para luego poder definir intervalos reales y su representación en la recta (**foco de interés**).

La docente B presenta algunos conjuntos como ejemplo, para poder definir intervalos reales:




P: ahora, ¿qué pasa? Y ahora van a ver la necesidad de tener otra notación para escribir conjuntos…si yo quiero que de alguna forma escribamos los números reales, reales, entre -2 y 2 incluidos.  Yo quiero que uds. me digan cuáles son esos números. Yo acá hago una recta y quiero que me digan cuáles son esos números. A ver…¿qué les parece? ¿alguno me nombra cuáles son?
A1: el 1
P: bueno…
A2: el -1
P: bien, el 0 están diciendo por acá (haciendo referencia al chat)
A1: el 2
P: bien y el -2 también porque están incluidos. ¿Son los únicos?
A2: el 0,3 ¿puede ser también?
P: bien, el 0,3 ponele que aproximadamente esté por acá. A ver, ¿hay otros?
A2: sí, hay un montón.
A1: sí, porque 0,5 también. -1,3 también.
P: Tal cual. ¿El 1,9?
A2: sí.
P: ¿El 1,999?
A3: también
P: ¿y el 1,9999...? y sigo hasta que me canse…
A3: sí, son infinitos
P: claro, más que muchos son infinitos. Entonces no puedo decir específicamente cuáles son, puedo nombrar ejemplos. Entonces, ¿cómo los represento gráficamente? Uno gráficamente lo que hace es desde el más chico al más grande, hago un sombreado en la recta. Por ejemplo, así, podemos hacer un rayadito…del más chico al más grande. En este caso como están incluidos ponemos un corchete, tanto en el 2 como en el -2. Y como justamente no los puedo poner así entre llaves y nombrar cuáles son, necesitamos lo que se llaman intervalos reales.




Aparece la necesidad de los intervalos como una forma de notar subconjuntos de números reales que cumplen una relación de desigualdad con respecto a algún valor numérico (**contexto en el que se enmarca el número real**). No aparece relacionado con alguna práctica social o en relación a otras ciencias, como el rango que puede tomar una variable física en alguna situación específica (**relación del número real con otros campos de conocimiento**).

La docente hace hincapié en las distintas formas de representar la relación de desigualdad (**foco de interés**): en lenguaje coloquial, como intervalo y gráficamente.

Luego de presentar los diferentes tipos de intervalos posibles (abiertos, cerrados, semiabiertos e infinitos), explica que es posible representar el conjunto solución de una inecuación a partir de un intervalo y luego se puede representar en la recta numérica, lo cual parece ser su objetivo final por el cual se presentaron los intervalos reales (**tipo de presentación**).

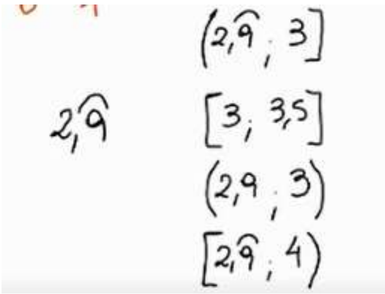
La segunda actividad propuesta tiene por objetivo reconocer si ciertos números pertenecen o no a ciertos intervalos reales. La docente se apoya en la representación decimal para decidirlo, aunque podría utilizar otros criterios (**tipos de procedimientos y argumentos**):

2) Unir con una flecha cada número real con el intervalo al que pertenece:

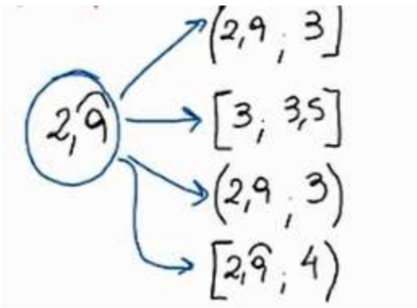
| | |
|---|---|
| $\sqrt{5}$ | $(0;1)$ |
| $\frac{1}{7}$ | $(2;4)$ |
| $\pi$ | $[3;\ 3{,}5]$ |
| $-\frac{2}{3}$ | $(-1;0)$ |
| $\sqrt[3]{8}$ | $[2;\ 3]$ |

P: bueno, primero tenemos $\sqrt{5}$ , nos vamos a ayudar con la calculadora. Vamos a escribir, es aproximadamente 2,23. ¿Por qué digo aproximadamente? Este símbolo que yo uso así, es para indicar aproximado porque recordemos que la $\sqrt{5}$ es un número irracional, es decir, que tiene infinitas cifras decimales no periódicas. Entonces como no puedo escribir todas las cifras decimales escribo algunas. Pero pongo que es aproximado porque no es exactamente 2,23. Entonces, este número… ¿a qué intervalo pertenece?

En este caso, por ejemplo, podría asegurar que $\sqrt{5}$ no estará entre 0 y 1 dado que sus cuadrados son 0 y 1 y todo número x comprendido entre ellos cumplirá que su cuadrado ($x^2$) estará entre 0 y 1. Este mismo criterio se podría utilizar para los intervalos que contienen números positivos. Utiliza la representación decimal, incluso en casos más sencillos como 1/7, para el cual no hace falta por ser una fracción propia, ya se sabe que es un número entre 0 y 1. Agrega otro ejercicio similar, para discutir la representación de $2,\hat{9}$ y su inclusión en distintos intervalos:




P: Miren, yo voy a escribir el 2,9 y el $2,\hat{9}$ tiene infinitos nueves. Que no sé si alguno se acuerda, ¿a qué era igual? Yo tenía un ejercicio, donde el número decimal tenía infinitos nueves, ¿a qué era igual? ¿se acuerdan? ¿Que nos daba un número cómo? Cuando tenía infinitos nueves después de la coma…
A3: ¿más chiquito?
P: no, a ver…vamos a pasarlo a forma fraccionaria.
A2: al próximo número, $2,\hat{9}$ … 3.
P: muy bien, fíjense vamos a recordarlo. Si yo lo tengo que pasar a fracción, ¿cómo se escribía? Se escribía todo el número, le resto la parte que no es periódica y lo divido por tantos 9 como dígitos haya debajo del arco. Cuando yo hago esta cuenta, esto me da $27/9$ que efectivamente es 3. Eso, por un lado, esto es que $2,\hat{9}$ es 3. Eso para recordar.




Aquí comete un error dado que $2,\hat{9}$ no pertenece al intervalo (2,9; 3) ya que el 3 no está incluido por tener paréntesis (la flecha indica que el número pertenece al intervalo). Se evidencia que a la docente le interesa que los alumnos logren reconocer que $2,\hat{9}$ es igual a 3 y que es un número mayor que 2,9 (**foco de interés**).

La tercera y última actividad se enfoca en que los alumnos puedan pasar una relación de desigualdad de una forma de representación a otra (coloquial, simbólica, en intervalo y gráficamente). Puede observarse que este es el hilo conductor en toda esta sección, y que la enseñanza se encuentra centrada en objetos.

**Tabla 7. Características observadas en la Docente B acerca del discurso numérico escolar en la parte III: inecuaciones e intervalos**

| Categorías de análisis para el discurso numérico escolar | Parte III: inecuaciones e intervalos |
|---|---|
| Tipo de presentación del número real. | Inecuación como forma de expresar una relación de desigualdad entre una incógnita y un número, o entre dos expresiones. Recta real como elemento para representar a los números reales o intervalos de números reales. Intervalos como forma de representación de un conjunto que contiene números reales que cumplen con una desigualdad. |
| Tipos de argumentos y procedimientos. | Utilización de propiedad uniforme para resolver inecuaciones, validada a través de ejemplos. Analogía en la resolución de inecuaciones con las ecuaciones. |
| El contexto en el que se enmarca el número real, que haga ver su grado de funcionalidad en una situación específica. | Expresar en lenguaje simbólico o gráfico una relación de desigualdad presentada en forma coloquial. Reglas para la resolución de inecuaciones. |
| El foco de interés del docente acerca de lo que saben o lo que hacen sus alumnos en cuanto al número real. | Resolución de inecuaciones mediante el despeje de la incógnita. Pasaje a diferentes tipos de representación. |
| La relación del número real con otros campos de conocimientos y prácticas sociales que se propicie en el aula. | No se presenta relación con otros campos de conocimiento. Tampoco con prácticas de referencia, como el comparar, ya que las situaciones que presenta la docente no muestran la necesidad de expresar en forma simbólica una relación de desigualdad. |

#### 4.1.2.4 Parte 4: operaciones con números irracionales

Al comenzar esta parte de la unidad, la docente refuerza el concepto de número irracional como "números que se podían expresar en forma decimal, pero que tenían infinitas cifras decimales no periódicas". Luego, comenta: "Y la particular observación es que nunca los vamos a poder expresar como fracción". En esta forma de presentación, se impone un significado que no se construye con el alumno dado que no se explica por qué tiene infinitas cifras decimales o por qué no es posible expresarlo como fracción. Resultan propiedades que poseen estos números, sin demostrar, ni trabajar intuitivamente (**tipo de presentación**). Luego, propone el trabajo con raíces de números enteros o racionales:

P: ¿Por qué de las raíces? Porque justamente, muchos números, infinitos números irracionales son la raíz de algún número. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ ya estuvimos viendo que es un número irracional, la $\sqrt[3]{-5}$, si lo hacen con calculadora van a ver que obtienen infinitas cifras decimales no periódicas. Y como estos, hay infinitos ejemplos. Entonces, ¿qué vamos a poder hacer con los números de este tipo? Vamos a repasar, algo que uds ya deberían saber, unas propiedades de las raíces. Pero a modo de revisión, acá tenemos en la primera página, algunas propiedades.

**PARA RECORDAR**

Raíz de un producto

La raíz de un producto es igual al producto de las raíces de los factores: $\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$

Ejemplo

$$\sqrt{3^2\cdot 2^4}=\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{2^4}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{16}=3\cdot 4=12.$$

Se llega a igual resultado de la siguiente manera:

$$\sqrt{3^2\cdot 2^4}=\sqrt{9\cdot 16}=\sqrt{144}=12.$$

Raíz de un cociente

La raíz de una fracción es igual al cociente de la raíz del numerador entre la raíz del denominador:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Aclara que la letra n, representa un número natural. Muestra que cuando tienen la raíz n-ésima de un número "a" elevado a la n, muchos alumnos simplifican y dicen que es igual al número "a". Corrige diciendo que, si n es par, hay que hacer el valor absoluto del radicando.

$\left(\cancel{\sqrt[n]{a}}\right)^{\cancel{n}}=a$ ojo!!

Simplificación

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=\begin{cases}|a|\ si\ n\ par\\ a\ si\ n\ impar\end{cases}$$

Ejemplo

$\underbrace{\left(\sqrt{2}\right)^2=|2|=2}_{n\,par}$ $\quad$ $\underbrace{\left(\sqrt[4]{(-2)}\right)^4=|-2|=2}_{n\,par}$ $\quad$ $\underbrace{\left(\sqrt[3]{5}\right)^3=5}_{n\,impar}$ $\quad$ $\underbrace{\left(\sqrt[5]{-5}\right)^5=-5}_{n\,impar}$

Se puede observar un error en la última propiedad presentada, que proviene de la confusión de qué operación se efectúa con anterioridad (si $a$ es un número real negativo y $n$ es par, $\sqrt[n]{a}$ no es un número real). No se aclara a qué conjunto numérico pertenece el número "a" o "b" presentados en las propiedades. Como explica que es un repaso de propiedades conocidas, y los ejemplos numéricos hacen referencia a números enteros, se supone que son enteros o racionales. No se aprovecha el desarrollo de esta unidad para estudiar el cálculo de raíces n-ésimas de números reales. Las propiedades quedan enunciadas sin demostración, como reglas a seguir. Lo mismo ocurre con las propiedades que sigue presentando:

Otras propiedades

| |
|---|
| $(\sqrt[n]{a})^m. = \sqrt[n]{a^m}; \quad \boldsymbol{a} \in \mathcal{R}^+ \wedge \boldsymbol{n,m} \in \mathcal{N}$ |
| $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}. = \sqrt[m.n]{a}; \quad \boldsymbol{a} \in \mathcal{R}^+ \wedge \boldsymbol{n,m} \in \mathcal{N}$ |
| $\sqrt[n]{a \pm b} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}; \quad \boldsymbol{a,b} \in \mathcal{R}^+ \wedge \boldsymbol{n} \in \mathcal{N}$ |

Cuadrado de un binomio

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Ejemplo

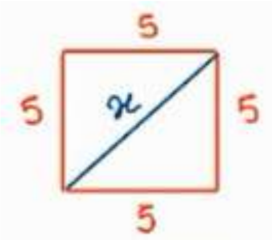
$$(\sqrt{3} + \sqrt{7})^2 = (\sqrt{3})^2 + 2.\sqrt{3}.\sqrt{7} + (\sqrt{7})^2 = 3 + 2.\sqrt{21} + 7 = 10 + 2\sqrt{21}$$

P: esto, no voy a explicar ahora de donde viene, por eso estoy haciendo el repaso. Tener $(a+b)^2$ es lo mismo que tener $(a+b)(a+b)$ y entonces puedo aplicar la propiedad distributiva. Entonces, les queda el primer término al cuadrado, más dos veces el primero por el segundo, más el segundo al cuadrado. Si está sumando, si está restando nos queda lo mismo, pero $-2ab$ en el medio…Les queda el primer término al cuadrado, menos 2 veces el primero por el segundo, más el segundo término al cuadrado. ¿No lo han visto esto el año pasado?
A1: creo que fue este año
P: No, yo esto no lo di este año. Bueno, pero es fácil aplicar esta fórmula. Vamos a ver el ejemplo, porque esta fórmula la van a usar muchísimo.

El cuadrado del binomio resulta ser una fórmula que hay que memorizar para aplicar en el momento que se presente una situación similar a la del ejemplo, sin tener certezas de por qué es conveniente utilizar la fórmula que devuelve una expresión equivalente a la original. Luego de la presentación de todas estas propiedades, propone una serie de ejercicios donde deberán aplicarlas:

1) Realiza la siguiente actividad:
   a) Calcula la medida de la diagonal de un cuadrado de lado 5.
   b) Calcula la medida de la diagonal de un cuadrado de lado 3.
   c) ¿Cuánto valdrá la diagonal del cuadrado si el lado es 1?
   d) A partir de lo que hiciste, elabora una conjetura y pruébala.

P: los números irracionales son muy interesantes porque los podemos ver en un montón de medidas. Y ahora lo vamos a ver, por ejemplo, en la diagonal de un cuadrado. Fíjense el ejercicio que sigue. El ejercicio 1 nos dice que calculemos la medida de la diagonal de un cuadrado de lado 5.
Dibuja un cuadrado, poniendo la medida:




P: no importa si son 5 metros, o 5 centímetros, por ahora podemos obviar la unidad de medida. Un cuadrado tiene todos sus lados iguales. Y su diagonal, puedo ver cualquiera de las dos diagonales, ya vimos en polígonos que un cuadrado tiene dos diagonales…No conozco la medida de la diagonal, la vamos a llamar con x. ¿Cómo puedo...? ¿A alguno se le ocurre cómo puedo calcular la medida de esta diagonal?
A2: ¿Usando el teorema de Pitágoras?
P: Muy bien. Si tomamos uno de los triangulitos, puedo aplicar Pitágoras porque estamos en presencia de un cuadrado, todos los ángulos son rectos, entonces me queda conformado un triángulo rectángulo. ¿Y qué nos dice el Teorema de Pitágoras? Recordemos: la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa. ¿Qué eran los catetos? Los lados con el que se forma el ángulo recto.

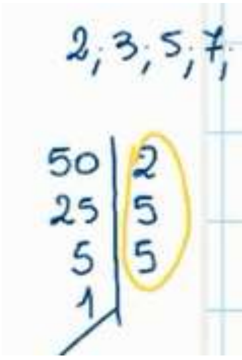
Si bien el problema invita a calcular una medida de un segmento, se puede observar que la intención de la docente pasa porque puedan plantear una ecuación aplicando el Teorema de Pitágoras (**foco de interés**). El **contexto en donde se enmarca el uso del número real** es la operatoria con radicales y racionales y en el pasaje de una situación geométrica a una aritmética. No se aprovecha el problema propuesto para plantear dificultades en la medición, al no poder determinar si la diagonal es parte alícuota del segmento unidad. La inconmensurabilidad de segmentos no se plantea como un problema en este caso, dado que el teorema de Pitágoras permite calcular de forma exacta la medida. Prima lo algorítmico y, por lo tanto, no se plantean otros contextos en los cuales se pueda resignificar el número real (**relación del número real con prácticas sociales o de referencia**).

La docente continúa resolviendo la ecuación y, al encontrar el resultado, plantea expresarlo de otra manera:

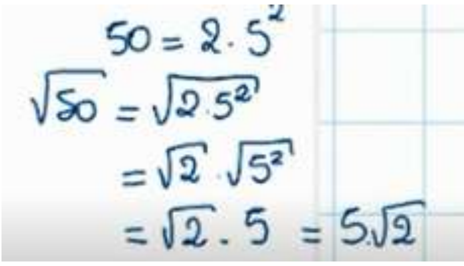
P: la diagonal mide $\sqrt{50}$. ¿La vamos a pasar en forma decimal?
Nadie contesta y prosigue.
P: no, dijimos que no. Nosotros fíjense que la $\sqrt{50}$ va a dar un número irracional, 50 no es el cuadrado de ningún número. Si yo tengo la $\sqrt{4}$ yo obviamente la puedo resolver es 2, me da un número entero o un número racional. La $\sqrt{\frac{64}{81}}$ yo la puedo

resolver y me da $\frac{8}{9}$, pero la $\sqrt{50}$ no nos va a dar ningún número entero, ni racional. Entonces, lo dejamos así. Pero yo les dije antes, que voy a poder simplificarla lo mejor que puedo, es decir, que dentro de la raíz aparezca un número más chico y reescribir a esta $\sqrt{50}$ de otra manera.

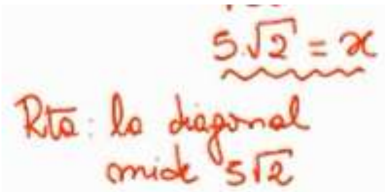
Pregunta si se acuerdan lo que es factorizar en factores primos. Recuerda los números primos listando algunos en orden creciente. Luego, realiza la división de 50 por primos:




Luego, explica que 50 puede ser escrito como producto de números primos y expresa la raíz de 50 a partir de esa factorización:




Luego, dice que ahora tienen la medida de la diagonal y escribe:




La docente no justifica el por qué utiliza esta representación. Al realizar el cálculo de raíces con calculadora, queda invisibilizada la ventaja de este procedimiento. Nunca se problematiza el encontrar un número que elevado al cuadrado sea 2, ni siquiera en forma heurística con alguna aproximación, por lo cual la calculadora acelera un procedimiento que no se conoce (**tipos de argumentos y procedimientos**).

**Tabla 8. Características observadas en la Docente B acerca del discurso numérico escolar en la parte IV: operaciones con números irracionales**

| Categorías de análisis para el discurso numérico escolar | Parte IV: operaciones con números irracionales |
|---|---|

| | |
|---|---|
| Tipo de presentación del número real. | Número irracional como decimal con infinitas cifras decimales no periódicas. Elementos del conjunto, que cumplen con esta característica impuesta por la docente y observable en la calculadora frente a la ausencia de período. Se trabaja con raíces de números enteros o racionales, como ejemplos de irracionales. |
| Tipos de argumentos y procedimientos. | Algorítmico y memorístico: las propiedades presentadas por la docente, sin demostración formal ni otro tipo de validación, rigen las operaciones que se realizan que involucran racionales y raíces de racionales. |
| El contexto en el que se enmarca el número real, que haga ver su grado de funcionalidad en una situación específica. | Operatoria con radicales y racionales. Pasaje de un contexto geométrico a uno aritmético. |
| El foco de interés del docente acerca de lo que saben o lo que hacen sus alumnos en cuanto al número real. | Aplicación de propiedades para la operatoria con radicales. Si bien se presentan contextos geométricos para encontrar ciertas medidas, el foco de interés está puesto en el cálculo que debe realizarse y en las propiedades que permiten su planteo (por ejemplo, el teorema de Pitágoras para hallar la longitud de la diagonal de un cuadrado). |
| La relación del número real con otros campos de conocimientos y prácticas sociales que se propicie en el aula. | No se presenta relación con otros campos de conocimiento. Aunque algunas actividades plantean el cálculo de un perímetro o área, no se encuentran presentes prácticas de referencia, como el medir. Las medidas se encuentran presentes en las figuras dadas en el enunciado y solo hay que aplicar propiedades para encontrar el resultado pedido. |

### 4.1.3 DOCENTE C

La docente C organiza la unidad Número Real en tres partes:

1. Repaso de números racionales: operaciones con números fraccionarios (suma, resta, multiplicación, división y potenciación de exponente entero) y potencias de exponente fraccionario. Como se trataba de un repaso, la docente C subía material de lectura y actividades al aula virtual y los alumnos luego subían sus resoluciones. La docente C corregía y dejaba comentarios en los trabajos subidos por los alumnos.
2. Notación científica. Todas las clases correspondientes a esta parte fueron virtuales (clases 1-3).

3. Aproximación por redondeo y truncamiento. Aplicaciones del teorema de Pitágoras. Todas las clases correspondientes a esta parte fueron virtuales (clases 4-9).

#### 4.1.3.1 Parte 1: repaso de números racionales

En esta parte, no se plantea interacción docente-alumno. La docente solo corrige las actividades marcando errores en la producción subida por los alumnos: comenta pero no hay retrabajo, ni reentrega. El apunte es producción propia de la docente, no se trata de fotocopias de libros de matemática correspondiente a este nivel. Por tal razón, se realiza un análisis del material elaborado por la docente para este repaso.

El apunte comienza repasando las propiedades de potenciación y la regla de los signos para números enteros (se supone por contexto, aunque no queda explícito el campo numérico en el cual valen las propiedades):

Para recordar

REGLA DE LOS SIGNOS

- $+ \cdot + = +$
- $- \cdot - = +$
- $+ \cdot - = -$
- $- \cdot + = -$

PROPIEDADES DE POTENCIA DE IGUAL BASE

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $a^m : a^n = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Luego, se ejemplifica la aplicación de las propiedades de potencia de igual base y se propone una ejercitación para replicar el procedimiento realizado en los ejemplos.

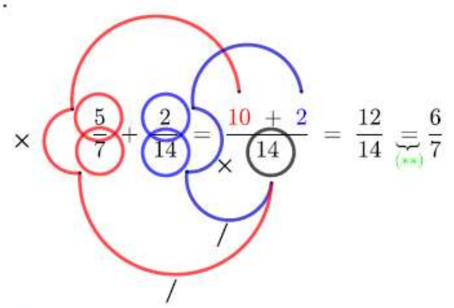
**Ejemplos:** Aplicando las propiedades de potencias de igual base resolvemos ejercicios como los que siguen.

1. $(2^{-3} : 2^{-5})^{-2} \cdot 2^3 = (2^{-3-(-5)})^2 \cdot 2^3 = (2^{-3+5})^2 \cdot 2^3 = (2^2)^2 \cdot 2^3 = 2^{2 \cdot 2} \cdot 2^3 = 2^4 \cdot 2^3 = 2^{4+3} = 2^7$
2. $\frac{(5 \cdot 5^2 \cdot 5^3)^4 \cdot [(5^2)^{-3}]^4}{(5^4)^{-4}} = \frac{(5^1 \cdot 5^2 \cdot 5^3)^4 \cdot [5^{2 \cdot (-3)}]^4}{5^{4 \cdot (-4)}} = \frac{(5^{1+2+3})^4 \cdot [5^{-6}]^4}{5^{-16}} = \frac{(5^6)^4 \cdot 5^{-6 \cdot 4}}{5^{-16}} = \frac{5^{6 \cdot 4} \cdot 5^{-24}}{5^{-16}} = \frac{5^{24} \cdot 5^{-24}}{5^{-16}} = \frac{5^{24+(-24)}}{5^{-16}} = \frac{5^{24-24}}{5^{-16}} = \frac{5^0}{5^{-16}} = 5^{0-(-16)} = 5^{16}$

   *Recordar*: en el penúltimo paso uso que la fracción implica división.

Con una misma lógica, se continúa con la explicación de cómo realizar sumas, restas, multiplicación y división entre fracciones, exponiendo los pasos a seguir:

- **Suma y resta**
  - *Cuando tienen el mismo denominador*: el denominador coincide con el denominador de ambas fracciones y el numerador será el resultado de la operación propuesta entre los numeradores.
    - $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{1+2}{5}=\frac{3}{5}$
  - *Cuando tienen distinnto denominador*: el denominador será el **mínimo común múltiplo (m.c.m.)** entre los denominadores, es decir, el número más chico que puede ser dividido por ambos denominadores y se trabaja como se indica en el siguinte ejemplo.
    - .




(**) Simplificamos la fracción dividiendo por 2 al numerador y denominador.

Divide el caso de la suma y la resta cuando las fracciones tienen igual o distinto denominador. En ambos casos, da una regla para el cálculo sin mencionar el concepto de fracciones equivalentes. No se problematiza la búsqueda de un procedimiento para poder operar con fracciones y la necesidad de hallar el m.c.m. de ambos denominadores (**tipo de presentación**). Lo mismo ocurre cuando presenta el procedimiento para multiplicar fracciones: "El resultado del producto entre dos fracciones es una nueva fracción, el denominador es el producto de los denominadores y el numerador, el producto de los numeradores". Para el caso de la división, lo presenta como una multiplicación: "La división entre dos fracciones es igual al producto de la primera por el recíproco de la segunda ($\frac{b}{a}$ es el recíproco de $\frac{a}{b}$)". En ambos casos, se presenta como una regla de cálculo que permite hallar con éxito el número buscado pero sin una fundamentación acerca de por qué se realiza ese procedimiento y no otro. Resulta entonces un procedimiento algorítmico y memorístico (**tipos de argumentos y procedimientos**). Los ejercicios consisten en realizar operaciones con números fraccionarios aplicando las reglas presentadas y ejemplificadas con anterioridad. El **foco de interés** está puesto en la operatoria de números racionales en su forma fraccionaria.

Introduce la potenciación de exponente fraccionario con un ejemplo, indicando que pueden aplicarse las mismas propiedades de potenciación presentadas anteriormente (se supone que para exponente entero o natural).

POTENCIAS DE EXPONENTES FRACCIONARIOS

Aplicando las propiedades de potencias de igual base y teniendo en cuenta cómo operar con fracciones, podemos resolver ejercicios del tipo:

$$\frac{2^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{-\frac{5}{4}} : 2^3}{(2^{-\frac{3}{2}})^{-1}}.$$

Resolvemos como sigue:

- $\frac{2^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{-\frac{5}{4}} : 2^3}{(2^{-\frac{3}{2}})^{-1}} = \frac{2^{\frac{6+(-5)}{4}} : 2^{\frac{3}{1}}}{2^{-\frac{3}{2} \cdot (-\frac{1}{1})}} = \frac{2^{\frac{6-5}{4}} : 2^{\frac{3}{1}}}{2^{\frac{3}{2}}} = \frac{2^{\frac{1}{4}} : 2^{\frac{3}{1}}}{2^{\frac{3}{2}}} = \frac{2^{\frac{1-12}{4}}}{2^{\frac{3}{2}}} = \frac{2^{-\frac{11}{4}}}{2^{\frac{3}{2}}} = 2^{\frac{-11-6}{4}} = 2^{-\frac{17}{4}}.$

Posteriormente, da una definición que establece la relación entre la potencia de exponente fraccionario y la radicación:

**Definición:**

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

A partir de esta definición, podemos reescribir expresiones, aquellas dadas con raices pueden ser transformadas a exponentes fraccionarios y viceversa.

No se indican argumentos de por qué valen las mismas propiedades de potenciación cuando el exponente es fraccionario, ni cómo se relacionan estas con las propiedades de la radicación. Se impone el significado de exponente fraccionario, como una forma de expresar radicales (**tipos de argumentos y procedimientos**). Tampoco se problematiza el trabajo algebraico con radicales, por lo cual sería conveniente su representación como potencia. El trasfondo matemático de la cuestión no queda establecido, siendo el hilo conductor el cálculo de operaciones con radicales (o de potencias de exponente fraccionario) utilizando propiedades de la potenciación que se "heredan" del conjunto de los números enteros (**contexto en el que se enmarca el número real**).
Uno de los ejemplos dados se utiliza para introducir el concepto de número real:

2. $(-3)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(-3)^2} = \sqrt[3]{9}$, no lo resolvemos ya que el resultado es un *número irracional* (el conjunto de los números irracionales está formado por aquellos números que tienen infinitas cifras decimales no periódica, es decir, no se pueden expresar como una fracción. El conjunto de los números irracionales se simboliza por $\mathbb{I}$ y junto con el conjunto de los números racionale $\mathbb{Q}$ (todos los números que tienen representación como números fraccionarios), forman el conjunto de los *números reales* $\mathbb{R}$).

Se puede observar que la expresión $\sqrt[3]{9}$ es tomado por la docente C como una operatoria que debe resolverse y no como un número en sí mismo (concibe al número como su expresión decimal infinita y no en su expresión como radical). También se puede observar una concepción conjuntista de los números reales, no siendo esta una definición en sí misma sino una manera de llamar conjuntamente a los números racionales y a los números irracionales (**tipo de presentación**).
Las actividades propuestas por la docente tienen por objetivo utilizar las propiedades de potencias de igual base para expresar productos y cocientes de radicales en una sola potencia, para obtener un número real como resultado. No se presenta **relación del número real con otros campos de conocimientos o prácticas sociales**.

**Tabla 9. Características observadas en la Docente C acerca del discurso numérico escolar en la parte I: repaso de números racionales**

| Categorías de análisis para el discurso numérico escolar | Parte I: repaso de números racionales |
|---|---|
| Tipo de presentación del número real. | Se define a los números irracionales como aquellos números con infinitas cifras decimales no periódicas, es decir, que no pueden expresarse como fracción. El conjunto de los números reales son aquellos conformados por los racionales y por los irracionales. |
| Tipos de argumentos y procedimientos. | Se presentan reglas de cálculo que permite hallar con éxito una operación entre fracciones (suma, resta, multiplicación y división) pero sin una fundamentación del proceder (procedimiento algorítmico y memorístico). Se impone el significado de exponente fraccionario, como una forma de expresar radicales, que siguen las mismas propiedades que para exponente entero. |
| El contexto en el que se enmarca el número real, que haga ver su grado de funcionalidad en una situación específica. | Cálculo de operaciones con fracciones o con radicales (o potencias de exponente fraccionario). |
| El foco de interés del docente acerca de lo que saben o lo que hacen sus alumnos en cuanto al número real. | El foco de interés está puesto en la operatoria de números racionales en su forma fraccionaria y con radicales (o potencias de exponente fraccionario). |
| La relación del número real con otros campos de conocimientos y prácticas sociales que se propicie en el aula. | No se presenta relación del número real con otros campos de conocimientos o prácticas sociales. |

### 4.1.3.2 Parte 2: notación científica

La docente C introduce notación científica en su clase (los alumnos debían leer el apunte antes de realizar los ejercicios propuestos) como una forma de representar números muy grandes o muy pequeños:

> P: ¿Qué tema estábamos viendo?
> A1: Notación científica (varios contestan).
> P: ¿Y para qué sirve la notación científica?
> A1: Para escribir números muy grandes o muy chicos.

P: Bueno, si no sé si es exactamente la expresión números muy grandes o chicos, pero sí. Se utiliza mucho en física o astronomía, por ejemplo, para expresar la distancia del sol a la Tierra. Números muy grandes o muy chicos.

Luego, la docente repasa la siguiente definición de notación científica que se encuentra en su apunte:

NOTACIÓN CIENTÍFICA

La *notación científica* es una manera rápida de representar un número utilizando potencias de base diez. Esta notación se utiliza para poder expresar muy fácilmente números muy grandes o muy pequeños.

Los números se escriben como un producto:

$$a \cdot 10^n,$$

siendo:

- $a$: un número real mayor o igual que 1 y menor que 10, que recibe el nombre de coeficiente.
- $n$: un número entero, que recibe el nombre de exponente u orden de magnitud.

P: ¿Y cómo se escribe un número en notación científica?
A1: Un número por una potencia de diez.
P: ¿Y cómo tenía que ser ese número?
A2: el exponente tiene que estar entre 1 y 10.
P: Bueno, pero mirá el número que está acá (hace referencia al número $4{,}7.10^{-5}$). El exponente es negativo, no es un número entre 1 y 10. ¿Qué cosa tiene que ser un número entre 1 y 10? ¿Se acuerdan?
Nadie contesta.
P: bueno, se los recuerdo yo. Tenemos que escribir un número entre 1 y 10 por una potencia de 10.

Aunque menciona que es utilizado frecuentemente por físicos o químicos (otro ejemplo que indica es para escribir el tamaño de un átomo), no se muestra cuál es la ventaja de trabajar con esta representación, ni por qué se utiliza esa estructura y no otra. El **tipo de presentación** es como un objeto preexistente, no se realiza su construcción en el aula.

Las primeras actividades propuestas tienen el objetivo de pasar un número a su expresión en notación científica y viceversa:

1. Escribir los siguientes números dados en notación científica, en notación estándar.

   *a)* $7{,}65 \cdot 10^5$
   *b)* $5 \cdot 10^4$
   *c)* $4{,}7 \cdot 10^{-5}$

2. Expresar los siguientes números en notación científica.

   *a)* $93000000$
   *b)* $7281{,}3$
   *c)* $0{,}000047$

Para llevar a cabo esta tarea, la docente relaciona el signo del exponente de la potencia de 10 con la propiedad del número de ser un número mayor que 10 o menor que 1. En el primer caso lo clasifica como número grande y en el segundo caso como número chico.

> P: los 93 millones, ¿es un número grande o un número chico?
> A2: un número grande.
> P: Entonces, ¿cómo debe ser la potencia de 10 para que el 9,3 se agrande?
> A2: positivo
> P: bien, por eso queda $9{,}3.10^7$ porque corrí 7 lugares hacia la derecha la coma para obtener 93 millones. Si el número es grande el exponente es positivo, si el número es chico el exponente es negativo.

Hacia qué lugar correr la coma suele ser una pregunta recurrente de los alumnos. Recién en la última clase de este tema la docente argumenta las razones por las cuales la coma se corre hacia cierto lugar y qué operación se realiza si el exponente es negativo o positivo. En el siguiente ejercicio debían escribir un número en notación científica:


> P: entonces ¿qué va en el ejercicio 2) a)?
> A3: no, pero ¿vos calculas todo el número o el número que va antes de la coma?
> P: no, yo estoy viendo el número completo. Yo estoy viendo el 160723,5. Estoy viendo ese número completo. Ese número que está ahí, es ¿más grande que 10 o más chico que 1?
> A3: ahh…¿sin la coma?
> P: así completo como está.
> A3: más grande que 10.
> P: más grande, con coma o sin la coma, es más grande que 10. Entonces, yo estoy tratando de escribir un número que es grande en NC[19] entonces yo ya sé que la potencia de 10 seguro es positiva.
> A3: ahh, yo me fijaba después cuando pasaba tooodo, y si el número era 1 yo lo ponía en negativo, no me fijaba en eso.
> P: no, fijate que lo que te dice la NC es que cuando vos pasas un número a NC el número que multiplica a la potencia de 10 es un número mayor o igual a 1 y menor estricto que 10. ¿De qué depende la potencia de 10? Si yo vengo de un número grande o de un número chico, ahí es cuando juega la potencia de 10.
> Una alumna pregunta de qué ejercicio están hablando. La profesora le responde y sigue con la idea anterior para esclarecer la duda de la alumna.
> P: A ese número… ¿qué hago cuando multiplicó por 10 a ese número? ¿qué me da como resultado multiplicar por 10 el número? Bueno, agarren una calculadora y pueden hacerlo, escriban  el número y multiplíquenlo por 10 ¿Tienen a mano? ¿tienen el celular o algo?
> A3: me dio 16 coma…

[19] Las siglas NC significan notación científica. Se ha utilizado esta abreviatura en las notas de campo, por la cantidad de veces que se repetían estas palabras.

P: 07235. Pero si en vez de tener ese número multiplicado por 10, lo tengo multiplicado por 10 al cuadrado, que tener 10 al cuadrado es lo mismo que tener 100. Agarren el número y multiplíquenlo por 100.

A3: y sería 160…

P: 160,7235. Bueno, sí lo tengo multiplicado por 10 a la 5 que va a ser lo mismo que tener un 1 y 5 ceros. ¿Está bien? si tengo multiplicado por 10 a la 5 lo que estoy haciendo es volver a obtener como resultado el número que está dado acá. Pero eso pasa cuando la potencia de este número es 5, no cuando la potencia es -5. Si yo tuviese como potencia -5, yo tengo que dividir, ¿está bien?, por 100000 y si yo divido por 100000, entonces el número se me vuelve cada vez más chico y como resultado no obtengo este número que está dado al principio 160723,5. Obtengo otro número distinto. Entonces, si nosotros tenemos un número que es grande y lo estamos pasando a NC, seguro que esa potencia va a tener que ser positiva, porque a este número que conseguimos, que escribimos que está entre 1 y 10, cuando lo multiplicamos por potencias positivas de 10, se va a hacer cada vez más grande. Si nosotros los multiplicamos por potencias negativas de 10, en realidad lo que estamos haciendo es dividir por múltiplos de 10, el número se hace cada vez más chiquito, entonces nunca vamos a tener dada esta igualdad que aparece acá. ¿Se entiende lo que dije?

Pareciera que los alumnos no comprenden que cuando multiplican un número por una potencia de 10 con exponente positivo, están multiplicando sucesivamente por 10 el número y es por eso que se agranda “corriendo la coma hacia la derecha” tantas veces como se multiplique por 10. Lo mismo ocurre cuando se multiplica por una potencia de 10 con exponente negativo (se divide por 10 sucesivamente el número, haciéndolo menor al original “corriendo la coma hacia la izquierda”). Esta idea es la que intenta esclarecer la docente a raíz de las sucesivas preguntas con respecto a esto. Se evidencia que se trata de un procedimiento algorítmico y memorístico puesto que se pone mucho esfuerzo en tratar de recordar los pasos a seguir, sin ahondar demasiado en por qué se procede de esa manera (**tipos de argumentos y procedimientos**).

Las actividades siguientes propuestas por la docente requieren realizar operaciones (suma, resta, multiplicación, división y potencia) de números de este tipo:

3. Primero expresar los números en notación científica y luego resolver.

*a*) $5800000 + 270000000 - 45000$

*b*) $0,0000038 - 0,00025 + 0,0000412$

*c*) $\dfrac{72000000 \cdot 0,00003}{0,009 \cdot 400}$

*d*) $\dfrac{18000000000 \cdot (20000)^3}{0,0003}$

Para llevar a cabo esta tarea la profesora provee reglas a seguir en su apunte:

- **Suma o resta**

  Siempre que las potencias de 10 sean las mismas, se deben sumar los coeficientes (o restar si se trata de una resta), dejando la potencia de 10 con el mismo grado. En caso de que no tengan el mismo exponente, debe convertirse el coeficiente, multiplicándolo o dividiéndolo por 10 tantas veces como se necesite para obtener el mismo exponente.

En el caso de la suma no se deja explícito cuáles son las propiedades que se utilizan, aunque la docente da una explicación que refiere a que los números son de diferente índole:

> P: ¿Puedo sumar $5{,}8.10^6 + 2{,}7.10^8 - 4{,}5.10^4$? Las potencias de 10 tienen todas distinto exponente, ¿se pueden sumar?
> A1: sí, se suman los exponentes.
> P: Vamos a ver un ejemplo. ¿Cómo resuelvo $x^2$?
> A3: ¿Se pasa dividiendo el 2?
> P: Ojo, yo no tengo una igualdad como para despejar $x$. Supongamos que tengo $5x + 4x^2$, ¿se pueden sumar las $x$?
> A3: si me queda $9x$.
> P: ¿Puedo sumar $x$ con distintos exponentes?
> A1: no, no se puede.
> P: claro, es como querer sumar 5 sillas con 4 manzanas. ¿Puedo sumar 5 sillas con 4 manzanas?
> A2: no, no se puede.
> P: En cambio, si sumo 5 sillas con 4 sillas tengo 9 sillas. Las puedo sumar. Tienen que ser de la misma índole. Para poder sumar debo poner todos los números como una potencia de 10 con el mayor exponente.

En el caso que describe los números representan cantidades de cosas distintas, por lo cual no tendría sentido operar con estas cantidades (**tipos de argumentos y procedimientos**). Este tipo de aclaraciones continúan en las siguientes clases, cuando se debe operar con números escritos en notación científica:

> P: claro, porque nosotros cuando hacíamos, por ejemplo, si tenemos 2x más 5x ¿cuál es el resultado de eso?
> A: y lo mismo…
> P: no, pero da 7x. Fíjense que si acá hago $3{,}9.\,10^6 - 0{,}0713.\,10^6 + 5{,}615.10^6$, el resultado va a ser el número que obtenga de la suma por $10^6$. Ese $10^6$ está multiplicando a todos los números que aparecen, entonces lo sigo manteniendo. ¿Se entiende?
> A: sí.
> P: piénsenlo como una variable si quieren. No es una variable, es un número, pero si quieren piénsenlo así, o sea, se repite ese número en todos los términos. ¿Está bien? Nosotros no vimos nada de factor común, pero después más adelante cuando vean algo de factorización van a ver que en esto se puede aplicar también.

La docente establece como regla que deben sumarse o restarse los coeficientes de $10^6$, para luego multiplicar ese resultado por $10^6$. No menciona que se puede sacar factor común $10^6$ y por tal razón se suman los coeficientes, es decir:

$$3{,}9.10^6 - 0{,}0713.10^6 + 5{,}615.10^6 = (3{,}9 - 0{,}0713 + 5{,}615).10^6$$

La propiedad que permite hacer esta operación es la distributiva de la suma respecto del producto, que no es tomada como propiedad de los números reales sino que es visto como un caso de factoreo que se verá más adelante.

Para el resto de las operaciones también establece en su apunte reglas a seguir:

- **Multiplicación**
  Para multiplicar cantidades escritas en notación científica se multiplican los coeficientes y se suman los exponentes.
  **Ejemplo:**
  - $(4 \cdot 10^{12}) \cdot (2 \cdot 10^5) = (2 \cdot 4) \cdot 10^{12+5} = 8 \cdot 10^{17}$
- **División**
  Para dividir cantidades escritas en notación científica se dividen los coeficientes y se restan los exponentes.
  **Ejemplo:**
  - $(48 \cdot 10^{-10}) : (12 \cdot 10^{-1}) = (48 : 12) \cdot 10^{-10-(-1)} = 4 \cdot 10^{-10+1} = 4 \cdot 10^{-9}$
- **Potenciación**
  Se eleva el coeficiente a la potencia y se multiplican los exponentes.
  **Ejemplo:**
  - $(3 \cdot 10^6)^2 = 3^2 \cdot (10^6)^2 = 9 \cdot 10^{6 \cdot 2} = 9 \cdot 10^{12}$

Las propiedades de potencia de igual base argumentan los pasos a seguir en este tipo de ejercicios que son del tipo algorítmico:

3. Primero expresar los números en notación científica y luego resolver.

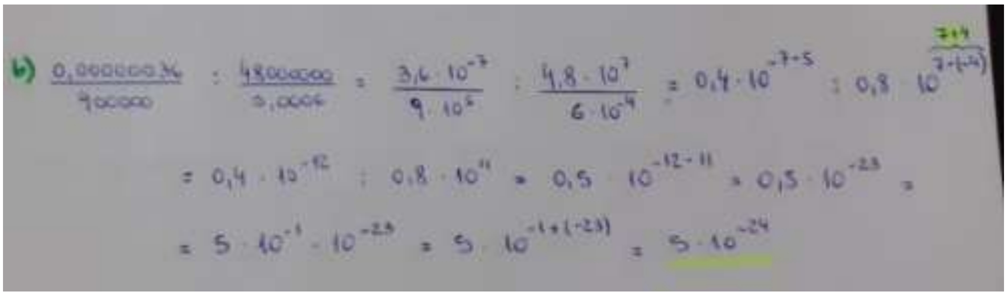
   *a)* $3900000 - 71300 + 5615000$

   *b)* $\dfrac{0,00000036}{900000} : \dfrac{48000000}{0,0006}$

   *c)* $\dfrac{0,00000024 \cdot (30000000000)^2}{30000000}$

P: bueno, pasamos entonces al apartado b) que era otro de los que causó problemas. Fíjense que ahora en el apartado b) no tenemos sumas, ni restas, sino que las operaciones que están involucradas…bueno, que están involucradas ahí son divisiones porque nosotros sabemos que…que tener una fracción es lo mismo que tener una división entre números, por lo tanto, lo que tenemos que hacer es pasar todos los números a NC y trabajar con los números que tengamos ya en NC según las operaciones que van apareciendo aplicando las propiedades de potencia de igual base. Teniendo en cuenta que, una de las propiedades que ya vimos es la que utilizamos antes, tenemos una multiplicación de potencias de igual base, ¿qué pasaba con los exponentes?
A1: ¿se sumaban?

A2: ¿cómo profe?
A3: se sumaban.
P: ¿Qué pasa cuando tenemos una división de potencias de igual base?
A1: se restan.
P: ¿Y cuando tenemos potencia de potencia?
A1: se multiplican-
P: perfecto. Entonces lo primero que vamos a hacer es pasar todos los números a NC. Fíjense que eso es lo primero que hice después de esta primera igualdad, o sea tenemos esta expresión y lo que conseguí después es esta otra, que es equivalente a la expresión dada porque lo único que hice fue pasar estos números a NC.



En este caso, la docente propone pasar todos los números dado a su expresión en notación científica y luego operar asociando, por un lado, los coeficientes y, por otro, las potencias de 10. En este último caso, aplica las propiedades de potencias de igual base para simplificar la expresión.

Se evidencia que el **foco de interés** se encuentra en expresar un número “grande” o “chico” de una forma más reducida y poder operar con estos números. El **contexto** en el que se enmarca es su utilización en la astronomía o en la química, aunque no se discuta el grado de funcionalidad que requiere el trabajar de esta manera y no de otra. Es un conocimiento utilitario, en el sentido que se aplica en otras disciplinas donde las cantidades o las medidas lo requieren pero que se aborda sin conexión, solo desde el objeto matemático de interés. No se reconoce en su desarrollo prácticas -como el contar o el medir- como generadoras de este tipo de representación (**relación del número real con otros campos de conocimientos o prácticas sociales**).

**Tabla 10. Características observadas en la Docente C acerca del discurso numérico escolar en la parte II: notación científica**

| Categorías de análisis para el discurso numérico escolar | Parte II: notación científica |
|---|---|
| Tipo de presentación del número real. | Forma impuesta de expresar números en notación científica siguiendo una forma preestablecida para expresar números muy grandes o muy pequeños de forma reducida. |
| Tipos de argumentos y procedimientos. | Se establecen reglas a seguir, como por ejemplo: si el número es grande el exponente de 10 en su expresión en notación científica es positivo, y si es chico su exponente es negativo. Lo mismo ocurre al "correr la coma" para desarrollar un número dado en notación científica: si el número es grande se corre hacia la derecha y si el número es chico se corre hacia la izquierda. Se proveen reglas exitosas para la operatoria con números dados en notación científica, basadas en las propiedades de potenciación. |
| El contexto en el que se enmarca el número real, que haga ver su grado de funcionalidad en una situación específica. | Se menciona su utilización en la astronomía o en la química, aunque se aborda sin conexión, solo desde el objeto matemático de interés. |
| El foco de interés del docente acerca de lo que saben o lo que hacen sus alumnos en cuanto al número real. | Se encuentra en expresar un número "grande" o "chico" de una forma más reducida y poder operar con estos números. |
| La relación del número real con otros campos de conocimientos y prácticas sociales que se propicie en el aula. | No se reconoce en su desarrollo prácticas -como el contar o el medir- como generadoras de este tipo de representación. |

#### 4.1.3.3 Parte 3: aproximación y teorema de Pitágoras

La docente define la aproximación de un número real, como un número cercano a ese real que tiene una cantidad finita de decimales. Considera necesario realizar la aproximación cuando el número posee infinitas cifras decimales no periódicas:

> P: ¿En qué sentido y cuándo vamos a tener que aproximar números y qué números tienen sentido aproximarse? Yo les preguntaba recién si dado el 5,8, el 5,8, ¿era un número que necesitábamos aproximar? Y me estaban contestando que no. En realidad, porque es un número que es cortito en el sentido de que es un número que tiene pocas cifras decimales, que tiene una cantidad finita de cifras decimales. Nosotros podemos contar los números que están después de la coma y escribir cero coma 8. O sea, nos llevó un tiempo finito, porque no es que hay una cantidad infinita de números que tenemos después de la coma, sino que tenemos una cantidad finita por lo tanto lo podemos escribir. Si yo les doy para escribir... si yo le doy otro número, por ejemplo: el 8,5589, ¿es un número que ustedes necesitarían aproximar?
> A1: sí.

P: Y, ¿por qué no necesitarían aproxima a ese número?
A1: Porque tiene muchas cifras después de la coma.
P: ¿Cuantas cifras tiene detrás de la coma? Lo repito 8,5589.
A1: Cuatro.
A2: 5 cifras.
P: Tiene cuatro cifras después de la coma. Solo tienen que escribir un poquito más, tampoco es que es un esfuerzo enorme tener que escribir cuatro cifras después de la coma. Peor sería tener que escribir, qué sé yo, el 8,5555…y repetir el 5 hasta el infinito. Este, ¿es un número que necesitará aproximación?
A1: Sí (varios alumnos contestan).
A2: No, no, porque… ¿no tiene el triangulito arriba?
P: Porque tiene un arquito arriba del 5. Si yo escribo, acuérdense, ¿qué vimos en primero? ¿qué tipo de números habíamos visto?
A2: Periódicos.
P: Entran dentro los numerosos periódicos. Yo tengo 8,5 y repito el 5 hasta el infinito. Ese número se puede escribir como 8,5 con un arquito arriba del 5.
A3: es periódico exacto.
P: Que en realidad es periódico puro este que estoy diciendo. Eran decimales exactos, lo que tenían una cantidad finita de cifras después de la coma. Esos eran los decimales exactos, como yo dije antes, el 8,5589 es un decimal exacto porque podemos contar la cantidad de números que hay después de la coma, por lo tanto, ese es exacto. Ahora, después, dentro de los periódicos teníamos dos clases, los periódicos puros y los periódicos mixtos. Dentro de los periódicos puros estaban todos los números que repetíamos una cifra de manera infinita, pero la repetíamos a partir de la coma, o sea, teníamos un número coma y después de la coma empezamos a repetir de manera infinita una cifra decimal. Entonces eso eran periódicos puros. Y los periódicos mixtos eran aquellos números que después de la coma teníamos una cifra que no se repetían y después empezábamos a repetir, ¿está bien?
A1: Profe, ¿cuándo vimos eso?
P: Todo eso lo vimos en primero pero no lo vamos a ver ahora. Es como bueno, justo vino a colación de lo que estaba hablando y por eso lo estoy repitiendo ahora. Pero no, no es que ahora nos vamos a detener en esos números. Ahora, ¿ustedes se acuerdan qué hacíamos con esos números? ¿Cómo trabajamos con esos números cuando queríamos resolver un ejercicio de operaciones combinadas, por ejemplo? ¿Dónde aparecían esta clase de números? ¿Cómo operábamos con ellos? ¿Alguien se acuerda cómo se resolvía un ejercicio de operaciones combinadas?
A1: No, me acuerdo que lo dimos y todo, pero no me acuerdo eso.
A2: ¿no se separaba en términos, se resolvía la multiplicación y división, después las potencias, raíces y después las sumas? ¿Algo así era, profe?
P: Eso es la forma general de resolver un ejercicio de operaciones combinadas. Está bien, ahora mi pregunta iba para el lado de cómo trabajamos con los números estos que eran periódicos. ¿Qué hacíamos con estos números? que eran periódicos ya sea puro o mixtos, incluso con los decimales exactos… ¿qué hacíamos para empezar a resolver? ¿Qué era lo primero que hacíamos?
A3: Profe, ¿no los pasábamos a fracción?

P: Muy bien. Lo primero que hacíamos era pasarlos a fracción y una vez que los pasábamos a fracción, resolvíamos usando las fracciones.
P: Está bien, todos estos números que estuvimos nombrando son números que entran dentro del conjunto de los números racionales. Los números racionales son aquellos números que se pueden pasar a fracción y con las fracciones nosotros sabemos operar: sabemos sumar, restar, multiplicar, dividir, aplicar potencias, raíces. Bueno, todas las operaciones las usamos dentro de este conjunto de números racionales. Ahora hay otro conjunto numérico, otro conjunto numérico que no es el conjunto de los números racionales, ni está dentro, ni los contiene, sino que están separados, que es el conjunto de los números irracionales. Los números irracionales son aquellos números que tienen infinitas cifras periódicas, perdón, infinitas cifras decimales que no son periódicas. O sea, cuando un número después de la coma tiene infinitas cifras y no logramos que se repita ninguna cifra, ni logramos pensarlo como un número periódico, ya sea puro o mixto, que no tenemos una regularidad después de la coma, esos son los números que se llaman irracionales, ¿alguno conoce algún número irracional?
A1: Y qué sé yo…8,36754 y así….
P: ¿Podrías cortar en algún momento ese número que estás pensando o nos pasaríamos la clase diciendo ese número?
A1: Y sí, o sea, nos podríamos pasar toda la clase.
P: Nos podemos pasar toda la clase porque estos números dijimos tienen infinitas cifras después de la coma, por lo tanto, no hay forma de cortar un número y nos podemos pasar toda la clase diciendo este tipo de números. Dentro de los números irracionales hay algunos números que tienen algún cierto tipo de expresión que nosotros podemos identificar, que son, por ejemplo, el número raíz de 2. El número raíz[20] de 2 es un número irracional. Si ustedes escriben en la calculadora y tratan de calcular el número de raíz de 2, van a ver que después de la coma tienen una cantidad que en la calculadora aparece como finita, porque tienen cierto espacio para escribir un número, pero este es un número que tiene infinitas cifras decimales y que no son periódicas, o sea, no tiene ninguna regularidad. Entra dentro del conjunto de los números irracionales, así como raíz de 3, raíz de 5. Ahora, si yo les digo la raíz de 4, ¿es un número irracional?
A1: No, es racional.
P: ¿Y por qué es racional?
A1: ¿Y porque tiene un resultado?
P: porque el resultado es 2, exactamente. Entonces si yo busco, por ejemplo, el resultado de raíz de 2 en la calculadora, obviamente que voy a tener, hasta completar los números permitidos en la calculadora, una cantidad de cifras distintas que no tienen ninguna regularidad. Pero si ustedes ese número lo podrían buscar en una computadora, o lo pueden buscar en una tabla, como se usaba antes y demás, pueden ver que ese número va a tener infinitas cifras y que no tiene ninguna regularidad. Bueno, ese estilo de números, ese estilo de números es el que vamos a tratar de aproximar. Esos números que no los puedo pasar a fracción, entonces con los cuales no puedo trabajar, me conviene aproximarlos para poder trabajar y poder trabajar de manera más cómoda cuando estamos haciendo

[20] Se entiende por contexto que cuando la docente C dice "raíz", se refiere a la raíz cuadrada.

> cuentas. Entonces los números que vamos a aproximar son los números irracionales, que son aquellos números que tienen infinitas cifras después de la coma, que no son periódicas. ¿Está bien? Tal como el raíz de 2, raíz de 3, raíz de 5, el número $\pi$.

Se puede observar que define a los números racionales como aquellos que pueden expresarse como fracción y, por tal razón, no necesitan aproximarse ya que al operar con ellos puede utilizarse esta representación. También define a los números irracionales como aquellos números que tienen infinitas cifras decimales no periódicas y, por ser imposible trabajar con su expresión decimal, recurre a su aproximación (**contexto en el que se enmarca el número real**). Se puede ver que el significado de número irracional es impuesto, no se construye y se valida con visualizar la aparente ausencia de período en la calculadora o computadora. La docente no plantea la posibilidad de trabajar con la expresión exacta de algunos números irracionales, por ejemplo con $\sqrt{2}$, para hacer cálculos y por eso debe acudirse a su aproximación (**tipo de presentación**). Puede verse, en la definición que plantea la docente, que no se define el error de la aproximación:

**Definición:** Dado un número real $x$, una aproximación es un valor $a$ cercano a $x$. Si $a > x$ la aproximación es por exceso y si $a < x$ la aproximación es por defecto.

Generalmente, la aproximación $a$ es un número decimal finito y cercano (en algún sentido) al valor $x$. Existen 2 métodos fundamentales para aproximar una cantidad. En ambos casos, debemos indicar la cifra a la que queremos aproximar.

Luego, la docente presenta dos técnicas para aproximar:

- **Redondeo:** para redondear una cantidad en la $n$-ésima cifra, nos fijaremos en la siguiente cifra. Si ésta es mayor o igual que 5, aumentamos en una unidad la cifra $n$-ésima. En otro caso, dejamos tal y como está la cifra $n$-ésima y despreciamos las demás cifras a partir de ella.
- **Truncamiento:** para truncar una cantidad a la cifra $n$-ésima, se prescinde directamente de las siguientes cifras a partir de ella. Este método siempre produce aproximaciones por defecto, es decir, menores que la cantidad exacta $x$ que queremos aproximar.

Como puede verse son reglas establecidas sobre cómo proceder para hallar la aproximación por redondeo y truncamiento. La elección de la cantidad de cifras decimales con la que se quiere aproximar el número o la elección del método para aproximar un número real no se discute (**tipos de procedimientos y argumentos**). En los ejemplos y ejercicios propuestos ya viene dado:

- Redondear $x = 2,3465$ con tres cifra decimales $\rightarrow$ $x = 2,3465$ entonces $a = 2,347$
- Redondear $x = 3,94678$ con tres cifra decimales $\rightarrow$ $x = 3,94678$ entonces $a = 3,947$
- Redondear $x = \sqrt{2}$ con dos cifra decimales $\rightarrow$ $x = \sqrt{2} = 1,41421\ldots$, $x \approx 1,41421$ entonces $a = 1,41$
- Truncar $x = 2,35$ con una cifra decimal $\rightarrow$ $x = 2,35$ entonces $a = 2,3$
- Truncar $x = 12,2365$ con dos cifra decimales $\rightarrow$ $x = 12,2365$ entonces $a = 12,23$
- Truncar $x = \sqrt{2}$ con dos cifra decimales $\rightarrow$ $x = \sqrt{2} = 1,41421\ldots$ entonces $a = 1,41$

La docente hace hincapié en que la aproximación no es igual al número que se quiere aproximar, introduciendo el símbolo $\approx$:

> P: Fíjense una cosa que yo acá escribir $x = \sqrt{2}$ igual a 1,41421 y puse puntos suspensivos, diciendo que este número no termina acá, este número sigue. Esa es una forma de decir, bueno, vamos a anotar el número pero voy a tener en cuenta que este número es un número irracional y por eso agregué los puntitos suspensivos. Entonces yo pongo una cantidad, por ejemplo. ¿Por qué puse esta cantidad? porque yo quiero redondear en este caso con dos cifras decimales. Con escribir 5 cifras ya me basta para redondear con dos cifras decimales. Incluso ya me hubiese bastado de escribir 3 cifras decimales, porque lo que me importa es lo que pasa en la tercera cifra si quiero redondear con dos, ¿está bien? Lo importante es escribir estos puntos suspensivos y no cortar, o sea, no escribir que $\sqrt{2} =$ 1,41421 sin estos puntos, porque eso es mentira, ¿está bien? Estoy diciendo que el número es raíz de 2, es exactamente igual a un número que tiene una cantidad finita de cifras decimales y eso es mentira.

En la ejercitación propuesta, debe aproximarse por redondeo y truncamiento un número dado que posee una cantidad finita o infinita de decimales:

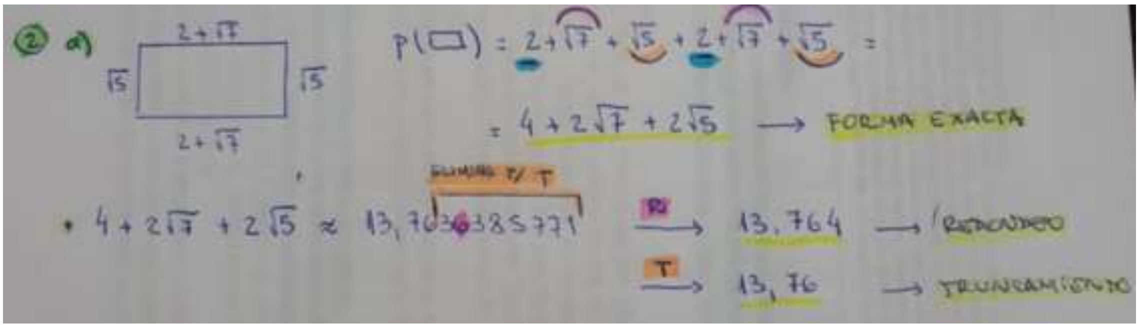
1. Redondear y truncar los siguientes números:
   - $20,04573$.
   - $0,8321$.
   - $0,09468$.
   - $0,1870$.
   - $5,3622$.
   - $1,243268 \cdot 10^2$.
   - $\sqrt{12}$.
   - $\sqrt[3]{9}$.

   *a*) Con una cifra decimal.
   *b*) Con dos cifras decimales.
   *c*) Con tres cifras decimales.

En otros ejercicios, debe aplicarse la aproximación en el cálculo de perímetro de figuras, donde se conoce la medida de sus lados:

Hallar el perímetro de forma exacta, por redondeo con 3 cifras decimales y por truncamiento con 2 cifras decimales de:

*a*) Un rectángulo cuyos lados miden $\sqrt{5}\ cm$ y $2 + \sqrt{7}\ cm$.
*b*) Un triángulo cuyos lados miden $1\ cm$, $2\ cm$ y $\sqrt{3}\ cm$.



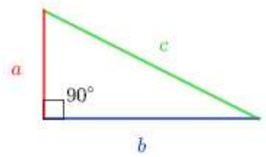
P: y esto que tenemos acá es la forma exacta de la solución. Con forma exacta lo que decimos es que tenemos la forma de que no aparezcan cifras decimales, ¿por qué? Porque si nosotros calculamos la raíz de 7 y calculamos la raíz de 5, que son números irracionales, no vamos a poder escribir de manera completa el número solución porque tiene infinitas cifras decimales, o sea, que tiene una cantidad infinita de cifras después de la coma. Por lo tanto, no voy a poder escribir esa solución de forma exacta si quisiera escribir esos números con cifras decimales. O sea, que la única forma de escribir la solución exacta es dejarlo expresado así con raíces, ¿está bien?

Nuevamente la cantidad de cifras decimales que requiere la aproximación está impuesta en el enunciado. No se comenta, cuál de las dos aproximaciones obtenidas es mejor, ni se enmarca en alguna práctica contextualizada (**relación del número real con otros campos de conocimiento o prácticas sociales**). Puede verse que el **foco de interés** está en aproximar por redondeo y truncamiento un número dado u obtenido a partir del cálculo del perímetro de una figura en la cual se conoce la medida de sus lados.

En las clases siguientes, la docente introduce el teorema de Pitágoras a partir de un problema:

Suponiendo que la pared de un edificio es de 90° al piso, el Teorema de Pitágoras puede usarse para encontrar el lado faltante del triángulo recto que forma. Una escalera de $7,6\ m$ se inclina contra un edificio de tal forma que la base de la escalera está $2\ m$ alejada del edificio. ¿Qué altura del edificio puede alcanzar la parte alta de la escalera?. Este tipo de ejercicios tienen respuesta aplicando el Teorema de Pitágoras.

El Teorema de Pitágoras permite encontrar la longitud de los lados de un triángulo rectángulo, que es un triángulo con un ángulo de 90° (conocido como ángulo recto). Un ejemplo de un triángulo rectángulo se representa a continuación.




P: Y ahí hay un ejemplito, que es un ejemplo chico pero un ejemplo al fin. Que si nosotros, por ejemplo, queremos…supongamos que alguien quiere pintar un edificio, ¿está bien? Alguien quiere pintar un edificio y tiene una escalera para pintar un edificio que mide, como dice ahí, esa escalera 7,6 metros. Y sabe que, para no caerse, puede poner el pie de la escalera a una distancia del pie del edificio de 2 m. Entonces el pintor lo que quiere saber es qué altura va a poder alcanzar para poder pintar el edificio con esa escalera, sabiendo que para no caerse la distancia en que debe colocar a la escalera del edificio… el pie de la escalera del edificio es de 2 m. Entonces, si nosotros tenemos un problema, que es ver hasta dónde va a llegar el pintor con esa escalera (o si tendrá que pedir alguna otra escalera que sea un poco más alta porque no llega a pintar el edificio completo), lo que podemos pensar es que podemos formar un triángulo rectángulo para solucionar este problema, que es posible, pensando en que 2 va a ser la medida que acá está representada con *b*, que es la distancia que hay del pie del edificio al pie de la escalera, y que la escalera mide, que es lo que tenemos acá representado con $c$, 7,6 m. Si somos capaces de calcular la medida de este lado $a$ de este triángulo rectángulo, vamos a saber a qué altura del edificio podemos llegar a pintar. O sea, qué altura del edificio podemos llegar a pintar teniendo la distancia que hay del pie del edificio al pie de la escalera y la medida de la escalera. Entonces, ¿cómo vamos a hacer eso? Aplicando el teorema de Pitágoras.

Antes de introducir el enunciado del teorema de Pitágoras, menciona al matemático Pitágoras:

TEOREMA DE PITÁGORAS

Pitágoras es muy conocido, a pesar de que no publicó ningún escrito durante su vida. Lo que sabemos de Pitágoras ha llegado a través de otros filósofos e historiadores. Pitágoras fue un filósofo y matemático griego conocido por introducir el teorema que lleva su nombre, que indica que el cuadrado de la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma del cuadrado de la medida de los catetos. El teorema no es sólo un postulado geométrico, también tiene aplicaciones en el mundo real.

P: Acá al principio, bueno, les conté un poquito acerca de Pitágoras, que fue quien probó este resultado que vamos a ver ahora acerca de los triángulos rectángulos. Que dice fue un filósofo matemático griego que, digamos, fue conocido por el teorema este que lleva su nombre, pero fue un matemático que no publicó mucho, sino que los resultados que se fueron conociendo de cosas que él demostró, se hizo mediante otros matemáticos. Entonces, este teorema que vamos a ver y vamos a ver ahora cómo se aplica, también podemos ver que no solo se usa, digamos, para resolver problemas matemáticos, sino que también es aplicable a algunos problemas que tienen que ver con la vida real.

La mención al matemático queda solo en una referencia histórica, no se ahonda en la demostración que hizo, ni en cómo conocía ese resultado y por qué le interesaba demostrar este teorema. Por otro lado, el problema introductorio parece tener el objetivo de mostrar que el teorema tiene aplicación en el mundo real (como puede verse, menciona esto último en la introducción del apunte).

A continuación, presenta el enunciado del teorema de Pitágoras:

Un triángulo rectángulo se compone con dos *catetos* que son los lados adyacentes al ángulo recto y la *hipotenusa* que es el lado opuesto al ángulo recto. En la figura, los catetos los denotamos por $a$ y $b$ y la hipotenusa con la letra $c$.

**Teorema de Pitágoras:** Dado un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de la medida de los catetos es igual a la medida de la hipotenusa al cuadrado.

Considerando el triángulo de la figura anterior tenemos:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

P: Entonces si nosotros, como dijimos, tenemos un triángulo rectángulo y conocemos dos de los datos…o sea, conocemos, en el caso de la escalera, cuál era esta medida y cuál era esta otra, aplicando esa fórmula de la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa o la suma de las medidas de los cuadrados de los catetos es igual a la medida de la hipotenusa al cuadrado,

> podemos calcular el dato que nos falta. O sea que, si en un triángulo rectángulo nos falta como dato esta altura o la medida de esta base o la medida de la hipotenusa, no nos pueden faltar dos datos sino que nos va a faltar uno solo, nosotros aplicando ese teorema vamos a ver cómo podemos calcular el dato que falta.

Se puede observar que la docente presenta sin ningún tipo de exploración previa, ni demostración, el enunciado del teorema de Pitágoras (**tipo de presentación**). El objetivo planteado parece ser hallar la medida de alguno de los lados del triángulo rectángulo, teniendo como dato la medida de los otros dos, a partir de una ecuación que se plantea aplicando el teorema de Pitágoras (**contexto en el que se enmarca el número real**).

Luego, presenta varios ejemplos de aplicación. El primero de ellos consiste en verificar el teorema:

**Ejemplo:** Consideremos el triángulo rectángulo cuya medida de los catetos son 3 $cm$ y 4 $cm$ y la medida de la hipotenusa 5 $cm$. ¿Se cumple el Teorema de Pitágoras para este triángulo?

Solución:

$$3^2 + 4^2 \overset{??}{=} 5^2$$
$$9 + 16 \overset{??}{=} 25$$
$$25 = 25$$

> P: Bueno, ¿cómo plantearían la cuenta? Escriban y planteen la cuenta y díganme qué están planteando para ver si se cumple lo que yo quiero ver que se cumple. ¿Qué es lo que tengo que plantear para ver si se cumple el teorema de Pitágoras?
> A1: Siguiendo la estructura.
> P: Sí, ¿y cómo?
> A1: 3 al cuadrado más 4 al cuadrado, igual a 5 al cuadrado.
> P: Bueno, y si resuelven eso…si hacen 3 al cuadrado, más 4 al cuadrado, ¿eso les da igual a 5 al cuadrado?
> A2: no, no, no.
> P: ¿No? Qué raro, porque a mí sí me dio.
> A2: Sería 3 por 3 y 4 por 4.
> P: exacto.
> A2: claro, sería 3 por 3, 9. Y 4 por 4, 16. Ahh que burra que soy, sí, da. Porque 9 más 16 es 25, y 5 por 5 es 25.
> P: Eso, está bien. Incluso este es un ejemplo que por ahí hasta ustedes me podrían decir que no está muy bien redactado… porque si ya me está hablando de un triángulo rectángulo y yo ya sé que para los triángulos rectángulos, que tienen catetos y tienen hipotenusa, el teorema de Pitágoras se verifica obviamente que esto tiene que ser igual. O sea, no tendría sentido que yo les diga no sé… que les diga decir si un triángulo cuyos catetos miden esto y cuya hipotenusa mide esto, porque yo ya si los estoy llamando catetos y lo estoy llamando hipotenusa es porque sé que estoy hablando de un triángulo rectángulo. Entonces seguro que va a verificar el teorema de Pitágoras. ¿Está bien?

El ejemplo, por como está planteado, pareciera que pide verificar el teorema de Pitágoras. Sin embargo, la intención de la docente parece ser que se demuestre que el triángulo cuyos lados tienen esas medidas es rectángulo. Esto implica aplicar el recíproco del teorema de Pitágoras, que no se contempla dentro del enunciado presentado como teorema. Sin embargo, es un resultado que evidentemente la docente conoce y quiere que los alumnos apliquen. Para esto, da otro ejemplo modificando el enunciado:

> P: Yo les digo verificar si hay un triángulo de lados 2, 3 y 7 que verifica el teorema de Pitágoras ¿Qué tengo que hacer para ver si un triángulo de lados 2, 3 y 7 verifica el teorema de Pitágoras?
> A1: y bueno, tenés que hacer 2 por 2 sumado a 3 por 3 y ver si te da 7 por 7.
> P: bueno, ¿verifica eso?
> A1: no
> P: No, si ustedes hacen 3 al cuadrado…porque ya sé que el candidato a ser hipotenusa va a ser el 7 porque es el lado más grande. Entonces si ustedes hacen 2 al cuadrado, más 3 al cuadrado, tienen 4 + 9, que eso es 13. Y por otro lado hacen 7 al cuadrado que les da 49. Entonces como 13 es distinto de 49, es mentira que un triángulo que tenga como medida de los lados 2, 3 y 7 pueda verificar el teorema de Pitágoras, ¿está bien? Entonces acá tenemos un triángulo que es un triángulo que sí lo verifica y, por otro lado, vimos que hay triángulos que no lo van a verificar. En particular, aquel triángulo que tenga lados de medidas 2, 3 y 7 no va a ser un triángulo rectángulo, o sea, no va a ser un triángulo que tenga un ángulo recto. En cambio, en este caso, si ustedes dibujan un triángulo cuyos lados tengan estas medidas, seguro van a ver que entre el lado que mide 3 cm y el lado que mide 4 cm, ahí se va a formar un ángulo de 90º.

Utiliza el teorema de Pitágoras para verificar si un triángulo en el cual se sabe la medida de sus lados es rectángulo o no (aunque las medidas tomadas en el ejemplo, 2, 3 y 7, no corresponden a las medidas de las longitudes de lados de un triángulo por no verificar la desigualdad triangular). En este caso no se presenta aplicación (por ejemplo, en la construcción, al mostrar que con una terna pitagórica es posible armar una "escuadra" que permita identificar ángulos rectos).

Los siguientes ejemplos que presenta la docente tienen por objetivo la búsqueda de la longitud de un lado de un triángulo rectángulo:

**Ejemplo:** Calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo de 60 $cm$ de cateto menor y 80 $cm$ de cateto mayor.

Solución:
Como estamos trabajando con un triángulo rectángulo, podemos aplicar el Teorema de Pitágoras. Entonces, si llamamos $c$ a la medida de la hipotenusa del triángulo tenemos:

$$c^2 = 60^2 + 80^2 \rightarrow c^2 = 3600 + 6400 \rightarrow c^2 = 10000 \rightarrow c \underbrace{=}_{(*)} \sqrt{10000} \rightarrow c = 100$$

(*) En este caso, sólo consideramos la raíz positiva como única solución porque tenemos en cuenta que $c$ es la medida del uno de los lados del triángulo. Teniendo en cuenta el problema que estamos resolviendo, no tiene sentido hablar de soluciones negativas.

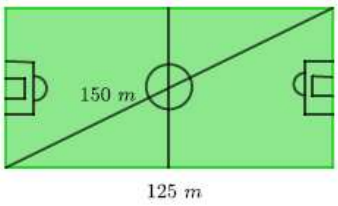
P: Entonces desde acá podemos despejar cuál es la medida de la hipotenusa. ¿Cómo? Y resolviendo primero esta cuenta. Hacemos primero 60 al cuadrado, y si ustedes hacen esa cuenta van a ver que el resultado de eso es 3600. Hacemos 80 al cuadrado y el resultado de eso es 6400. Entonces esta igualdad, esta igualdad es equivalente a esta otra. Lo único que hicimos fue resolver el 60 al cuadrado y el 80 al cuadrado. Ahora tener esta igualdad en este paso es equivalente a esta otra, porque lo único que hicimos de un paso al otro fue sumar $3600 + 6400$, y eso es 10000. Y ahora para terminar de resolver esta ecuación y encontrar cuál es el valor de $c$, que es el valor de la hipotenusa, lo que tenemos que hacer es terminar de despejar y como tenemos una potencia de este lado de la igualdad, ¿cómo pasan las potencias? ¿Cómo se despejan las potencias? ¿Qué tenemos que hacer para terminar de despejar acá?
A1: Pasando la raíz.
P: Pasando como raíz. ¿Ahora ustedes se acuerdan que cuando nosotros teníamos una ecuación cuadrática, y pasábamos una potencia al cuadrado como raíz para el otro lado, había una particularidad?
A1: No, no me acuerdo profe.
P: ¿No se acuerdan? Bueno, la particularidad que teníamos es que cuando resolvemos una ecuación de este estilo, una ecuación cuadrática con una potencia igual a dos (y lo mismo pasa con cualquier potencia par), cuando nosotros pasamos la potencia como raíz, si cuando aplicamos raíz a ambos lados de la igualdad para obtener la igualdad que nosotros queremos, había dos soluciones posibles: la positiva y la negativa. Se acuerdan cuando teníamos $x^2$, igual no sé, $x^2 = 16$ entonces sacábamos dos flechitas y decíamos una solución puede ser raíz de 16 y la otra es menos raíz de 16.
A1: Sí, profe.
P: Bueno, pero ¿por qué en este caso no consideramos la solución negativa y ponemos directamente que c es igual a la raíz positiva, en este caso de 10000, que fue el resultado que conseguí después de sumar los cuadrados de las medidas de los catetos? porque estamos trabajando…le damos sentido al problema con el que estamos trabajando. Nosotros estamos queriendo calcular la medida de la hipotenusa de un triángulo. Si nosotros hubiésemos considerado la solución negativa, ¿tendría sentido decir que la medida de un lado de un triángulo es menos 100?
A1: No.
P: No, ¿está bien? Si hablo de medida del lado de un triángulo, hablo de un número positivo. Entonces es por eso que en este caso, por más que estamos resolviendo una ecuación cuadrática que, si nosotros nos abstraemos del problema que tenemos, en este caso hubiésemos tenido dos soluciones posibles. Como le estamos dando sentido a esto que estamos buscando, que es la medida del lado de un triángulo, solo vamos a considerar para la solución de estos problemas la solución positiva. ¿Está bien? Entonces en este caso, directamente aplicamos la raíz cuadrada y una vez que aplicamos la raíz cuadrada obtenemos como resultado el número 100. O sea que la solución o la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo que tiene como medida de los catetos 60 y 80 es 100.

En este caso, es posible ver que la docente quiere dejar en claro que el resultado obtenido en el despeje de la incógnita debe contextualizarse en el problema. En este caso debe ser positivo por ser el lado de un triángulo rectángulo, aunque la ecuación tenga dos soluciones posibles (**tipo de argumentos y procedimientos**).

Otro de los ejemplos presentado por la docente, requiere el bosquejo de un triángulo rectángulo para su planteo y posterior resolución:

**Ejemplo:** Una cancha de fútbol (rectangular como sabemos) mide 125 $m$ de largo. Si la longitud de sus diagonales es de 150 $m$. ¿Cuál es el ancho de la cancha?

Solución: Nuevamente comenzamos haciendo un gráfico para ubicar los datos que tenemos.




Sin mostrar la solución al comienzo, les pide que hagan un dibujo que esquematice la situación. Una alumna pregunta si no sería $125^2 + b^2 = 150^2$. La docente le dice que sí y pide que alguien más participe. Otra alumna pregunta si los catetos son 125 y 150, a lo que la profesora pide que se hagan un dibujo para visualizar los datos. Otra alumna dice que 150 sería la diagonal del rectángulo y lo que hay que encontrar es la medida de un cateto. La docente muestra la solución y explica su resolución.

Debemos calcular el ancho de la cancha. Denotamos por $a$ dicho ancho, entonces en el triángulo rectángulo que se forma entre la diagonal de la cancha, el largo y el ancho, los catetos tienen medida $a$ y 125 y la hipotenusa 150. Entonces, aplicando el Teorema de Pitágoras tenemos.

$$150^2 = a^2 + 125^2 \rightarrow 22500 = a^2 + 15625 \rightarrow 22500 - 15625 = a^2 \rightarrow 6875 = a^2 \rightarrow \sqrt{6875} = a \rightarrow 82,9 = a$$

Por lo tanto, la medida buscada es $82,9\ m$.

P: Ahora a ver algo que no recuerdo cuando lo hice, pero si ustedes tienen a mano la raíz de 6875, si ustedes se fijan y hacen la cuenta, les da como resultado un número irracional, o sea que nos queda 82,9156197589 y tiene un montón de otros decimales. Entonces lo que yo hice en este caso fue truncar o redondear, porque el resultado en este caso es el mismo, con una cifra decimal. Y acá es donde vamos a usar esta parte de redondeo y truncamiento, porque cuando uno resuelve problemas usando el teorema de Pitágoras, muchas veces tiene que resolver raíces cuadradas cuyos resultados son números irracionales. Entonces a esos resultados es que los vamos a redondear, o mejor dicho los vamos a aproximar, por redondeo o por truncamiento, que es lo que les escribí acá en este párrafo.

> Observemos que en este caso, al resolver la raíz se obtiene un número irracional (tiene infinitas cifras decimales no periódicas), esto suele pasar a menudo cuando resolvemos este tipo de problemas. Es por eso que a veces se pide que el resultadosl en los ejercicios se exprese de manera *exacta*, esto es con su expresión como raíz si el resultado es un número irracional o bien se pide una solución *aproximada*, que puede darse por redondeo o truncamiento, según se indique en cada caso.

Llama la atención el signo igual en la aproximación realizada en el ejemplo, aunque se puede suponer que es un error de tipeo ya que la docente aclaró repetidamente en clases anteriores que la aproximación no es igual al número que se quiere aproximar. La docente no clarifica cuándo el resultado conviene dejarlo de manera exacta o de manera aproximada.

Los ejemplos y ejercicios propuestos evidencian que el interés de la docente es que los alumnos apliquen el teorema de Pitágoras a un triángulo rectángulo para hallar, mediante el despeje de la incógnita, la medida de uno de sus lados para luego aproximar el resultado cuando este es un número irracional. El **foco de interés** está puesto en lo algorítmico, en la aplicación de procedimientos impuestos para resolver actividades del estilo a las presentadas. Si bien muchos de los problemas presentados hacen referencia a la medición, no se presenta la necesidad real de realizar el cálculo con el teorema de Pitágoras, o al menos no se problematiza la búsqueda de la medida que se quiere hallar (**relación del número real con otros campos de conocimientos y prácticas sociales**).

**Tabla 11. Características observadas en la Docente C acerca del discurso numérico escolar en la parte III: aproximación y aplicaciones del teorema de Pitágoras**

| Categorías de análisis para el discurso numérico escolar | Parte III: aproximación por redondeo y truncamiento. Aplicaciones del teorema de Pitágoras |
|---|---|
| Tipo de presentación del número real. | El significado de número irracional es impuesto y se valida con visualizar la aparente ausencia de período en la calculadora o computadora. La aproximación se presenta como necesaria ante la imposibilidad de trabajar con la expresión decimal de números irracionales. El teorema de Pitágoras se plantea sin demostración ni exploración previa sobre su validez. |
| Tipos de argumentos y procedimientos. | Los métodos de aproximación son impuestos, no se vislumbra el por qué o el para qué de cada uno. La elección de la cantidad de cifras decimales con la que se quiere aproximar el número o la elección del método para aproximar un número real no se discute. |
| El contexto en el que se enmarca el número real, que haga ver su grado de funcionalidad en una situación específica. | La aproximación de número irracional, por poseer infinitas cifras decimales y no poder operar con su expresión decimal. |

| | |
|---|---|
| El foco de interés del docente acerca de lo que saben o lo que hacen sus alumnos en cuanto al número real. | Está puesto en aplicar el teorema de Pitágoras a un triángulo rectángulo para hallar, mediante el despeje de la incógnita, la medida de uno de sus lados para luego aproximar el resultado cuando este es un número irracional. |
| La relación del número real con otros campos de conocimientos y prácticas sociales que se propicie en el aula. | Si bien muchos de los problemas presentados hacen referencia a la búsqueda de un medida en particular, no se problematiza el por qué no podría medirse directamente o el por qué es necesario aplicar el teorema de Pitágoras. |

## *4.2 TAREAS QUE PROPICIAN EL NÚMERO REAL EN EL AULA*

Como ya se ha dicho en el Capítulo 3, el análisis de las tareas propuestas para propiciar el uso del número real en el aula se basará en el estudio planteado por Cordero y Flores (2007). La presentación de los resultados también se basa en este estudio (aunque con ciertas modificaciones), clasificando las tareas propuestas por cada docente según la función y la forma de cada tarea, que responde a una concepción de número real específica. Para realizar esto, fue necesario distinguir un patrón de tareas específico que contemple los diferentes aspectos:

- Concepción de número real: como ya se ha dicho en el marco metodológico de esta investigación, la caracterización de una tarea específica hará emerger alguna concepción de número real que se manifiesta en los propósitos a los que responde la tarea (función) y en los requerimientos del quehacer matemático para llevarla adelante (forma).
- Categoría: aquí se deja explícito la función y la forma a las cuales responde el grupo de tareas específicas.
- Descripción de una tarea representativa del grupo de tareas: se describe el contenido de una tarea que se considera representativa del grupo, para analizar los significados y procedimientos del uso del número real.
- Número de tareas: refiere a la cantidad de tareas del grupo que se presentan en toda la propuesta didáctica correspondiente a la unidad desarrollada por la docente. El objetivo es evidenciar los usos y concepciones más frecuentes del número real. Se ha considerado una actividad con varios ítems como única tarea.

### 4.2.1 DOCENTE A

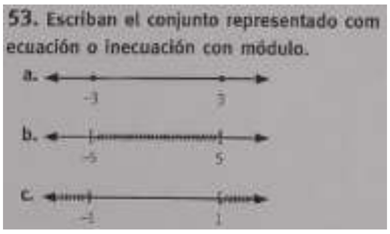
A continuación, se presentan las distintas categorías para las tareas que propician el uso del número real en el aula, según cada concepción de número real identificada (tabla 13 y 14). Cabe mencionar que las tareas propuestas son tomadas del capítulo I Números Reales del libro Activados 4 Matemática (Abálsamo et al., 2017), que es el material didáctico utilizado por la docente A durante sus clases. Las concepciones que emergen de las mismas son: número real como elemento de un cuerpo ordenado y completo y número real como puntos de una recta completa y continua.

**Tabla 12. Categoría para el uso del número real, para la concepción de número real como elemento de un cuerpo ordenado y completo (docente A)**

| Categoría | Descripción de la tarea | # de tareas |
|---|---|---|
| Función: operaciones de cuerpo (suma, resta, producto, cociente) desde un punto de vista algebraico (cumpliendo los axiomas).<br><br>Forma: patrón de tareas donde se opere con elementos siguiendo una serie de axiomas. | Se solicita al alumno extraer factores de un radical:<br>1. Extrae factores del radical:<br>a) $\sqrt[3]{0,125}$<br>b) $\sqrt[4]{234a^3b^7}$ | 3 |
| | Se solicita al alumno operar con radicales (sumar, restar, multiplicar y dividir radicales, racionalizar denominadores):<br>2. Resuelve las operaciones:<br>a) $\sqrt{98}-\sqrt{112}-\sqrt{28}$<br>b) $2\sqrt{48}-5\sqrt{12}+\sqrt{27}$<br>c) $(\sqrt{5}-\sqrt{8})^2$<br>d) $\left(\frac{2}{3}\sqrt{2}-2\sqrt[3]{2}\right)^2$ | 12 |
| | Se solicita al alumno resolver ecuaciones con y sin módulo:<br>52. Resuelvan las siguientes ecuaciones c<br>módulo.<br>a. $\lvert x\rvert + 5 = 12$ e. $\lvert x + 4\rvert = 2$ | 9 |
| | Se solicita al alumno resolver el módulo de un número real:<br>46. Calculen los siguientes módulos.<br>a. $\lvert -15\rvert =$ e. $\lvert -3 \,.\, 20\rvert =$<br>b. $\lvert -29\rvert =$ f. $\lvert 10 : (-2)\rvert =$<br>c. $\lvert 45\rvert =$ g. $\lvert 2 + 4 \,.\, 3\rvert =$<br>d. $\lvert -1 - 5\rvert =$ h. $\lvert 12 : (-6) + 1\rvert =$ | 1 |
| Función: comparación (relación de orden) entre elementos del cuerpo.<br><br>Forma: patrón de tareas donde se comparen elementos de un cuerpo, al aplicar propiedades para resolver inecuaciones. | Se solicita a los alumnos resolver inecuaciones con y sin módulo:<br>63. Resuelvan las inecuaciones con módulo.<br>a. $5 + \lvert 3x - 4\rvert \leq 12 - 4x$<br>b. $3 - (2x - 8) + 5 > \lvert -x - 4\rvert \,.\, \lvert -3\rvert$<br>c. $2 \,.\, (2x - 6) < \lvert 3x - 7\rvert + 3$<br>d. $4 \,.\, \lvert 2x + 5\rvert + 3 \geq \frac{1}{2} \cdot (4x + 6)$ | 7 |

Se evidencia que el uso del conocimiento desarrollado tiene mayor peso en lo algorítmico, siguiendo propiedades o axiomas dentro del cuerpo de los números reales para operar con estos números y compararlos. Aunque la docente no lo denomine cuerpo, ni presente axiomas (sino más bien le llama propiedades), se ha considerado que, dentro del formalismo matemático, las actividades que propone se perfilan en esta categoría.

**Tabla 13. Categoría para el uso del número real, para la concepción de número real como puntos de una recta completa y continua (docente A)**

| Categoría | Descripción de la tarea | # de tareas |
|---|---|---|
| Función: representación algebraica de un conjunto de puntos de una recta numérica.<br>Forma: patrón de tareas en donde se busque la representación algebraica de un conjunto de puntos ubicados en la recta numérica. | Se solicita expresar una ecuación o inecuación cuya solución represente puntos de una recta<br><br> | 2 |

Se observa menor frecuencia en las tareas que conciben al número real como punto de una recta completa y continua. Como ya se ha visto en la sección anterior, la docente no dedica demasiado tiempo en la construcción de la recta numérica y la representación de subconjuntos de los números reales gráficamente. Más bien, pareciera que el interés se encuentra en pasar de una representación gráfica a otra algebraica (y viceversa, al dar el conjunto solución de una inecuación).

### 4.2.2 DOCENTE B

Las concepciones que emergen de las tareas propuestas por la docente B son la de número real como elemento de un cuerpo ordenado y completo, como límite de una sucesión o resultado de una serie y como punto de una recta completa y continua. Al igual que con la docente A, se presentan a continuación las distintas categorías encontradas en el desarrollo de sus clases, según cada concepción de número real identificada (tabla 15, 16 y 17). Cabe aclarar que las tareas propuestas son tomadas del apunte de clases utilizado por la docente B, que ha sido confeccionado en conjunto con las otras docentes de la cátedra de Matemática pertenecientes a la escuela.

**Tabla 14. Categoría para el uso del número real, para la concepción de número real como elemento de un cuerpo ordenado y completo (docente B)**

| Categoría | Descripción de la tarea | # de tareas |
|---|---|---|
| Función: operaciones de cuerpo (suma, resta, | Se solicita resolver operaciones combinadas con números racionales:<br>7- Transforma en fracciones ordinarias y realiza las siguientes operaciones.<br>a) $\sqrt{(3,\hat{6}-1,\hat{2}):1,1-0,\hat{4}} =$ Rta: $\frac{4}{3}$ | 2 |

<table>
<tr>
<td rowspan="5">producto, cociente) desde un punto de vista algebraico (cumpliendo los axiomas).<br><br>Forma: patrón de tareas donde se opera con elementos siguiendo una serie de axiomas.</td>
<td>Se solicita obtener la representación decimal de una fracción, para luego clasificarla:<br><br>1- Halla la expresión decimal de cada una de las siguientes fracciones y clasifícalas en exactas, periódicas puras y periódicas mixtas.<br><br>
<table>
<tr><td>FRACCIÓN</td><td>$\frac{1}{3}$</td><td>$\frac{1}{5}$</td><td>$\frac{5}{6}$</td><td>$\frac{2}{11}$</td><td>$\frac{7}{4}$</td><td>$\frac{5}{12}$</td></tr>
<tr><td>EXPRESIÓN DECIMAL</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>CLASIFICACIÓN</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td>
<td>3</td>
</tr>
<tr>
<td>Se solicita obtener la representación como fracción de un número decimal periódico:<br><br>3- Expresa como expresión decimal periódica y transformarla en una fracción irreducible.<br>a) 0,444…=<br>b) 0,121212…=<br>c) 0,027027027…=</td>
<td>1</td>
</tr>
<tr>
<td>Se solicita resolver ecuaciones lineales con una incógnita que involucran números racionales:<br><br>10) Plantear la ecuación y resolver los siguientes problemas:<br><br>a) La tercera parte del anterior de un número es cuatro unidades mayor que la quinta parte de su consecutivo. ¿Cuál es el número?</td>
<td>3</td>
</tr>
<tr>
<td>Se solicita expresar y operar con números en notación científica:<br><br>a) La masa de un protón es aprox. 6,4 $\times 10^{-4}\ gr$. ¿Cuantos protones serían necesarios para formar una masa de 4 toneladas?. Expresar el resultado en notación científica. (1 tonelada = 1000000 gramos)</td>
<td>10</td>
</tr>
<tr>
<td>Se solicita resolver operaciones entre números racionales e irracionales:<br><br>6) Resolver aplicando propiedades:<br><br>
<table>
<tr><td>a) $3\sqrt{2}-7\sqrt{2}$</td><td>b) $(2+\sqrt{3})^2$</td></tr>
<tr><td>c) $\sqrt{5}(2+\sqrt{5})$</td><td>d) $(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2$</td></tr>
<tr><td>e) $(1+\sqrt{2})(3+\sqrt{2})$</td><td>f) $(\sqrt{5}+\sqrt{4})(\sqrt{5}-\sqrt{4})$</td></tr>
<tr><td>a) $(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})$</td><td>b) $5+4\sqrt{3}-(7-2\sqrt{3})$</td></tr>
</table>
</td>
<td>8</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="3">Función: comparación (relación de orden) entre elementos del cuerpo.<br><br>Forma: patrón de tareas donde se comparen elementos de un cuerpo, al aplicar propiedades para resolver inecuaciones.</td><td>Se solicita plantear una inecuación que exprese una afirmación dada en forma coloquial:<br>Completar la tabla:<br><table><tr><th>Lenguaje coloquial</th><th>Lenguaje simbólico</th></tr><tr><td>El peso p que transporta el ascensor debe ser menor que 275 kg.</td><td>$p < 275$</td></tr><tr><td>Para ganar el premio, la cantidad de discos vendidos d no debe ser inferior a 100 000</td><td>d ……… 100 000</td></tr><tr><td>Para abrir la cuenta hay que depositar un capital c de al menos $ 200</td><td>c ………. 200</td></tr><tr><td>El número de inscriptos i no puede exceder al de vacantes v</td><td>i ……….. v</td></tr><tr><td>Para subir al juego, la altura h debe ser superior a 0,80 m.</td><td>h ……. 0,80</td></tr></table></td><td>2</td></tr>
<tr><td>Se solicita resolver inecuaciones a partir de las propiedades de cuerpo:<br>1) Resuelve las siguientes inecuaciones:<br>a) $\frac{2}{9}(3x-0,75)>2x-1$     b) $\frac{1}{5}(2,5x+\frac{3}{4})\le x-1,1$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Se solicita identificar si un número real pertenece a un intervalo:<br>2) Unir con una flecha cada número real con el intervalo al que pertenece:<br>$\sqrt{5}$    $(0;1)$<br>$\frac{1}{7}$    $(2;4)$<br>$\pi$    $[3;\ 3,5]$<br>$-\frac{2}{3}$    $(-1;0)$<br>$\sqrt[3]{8}$    $[2;\ 3]$</td><td>2</td></tr>
</table>

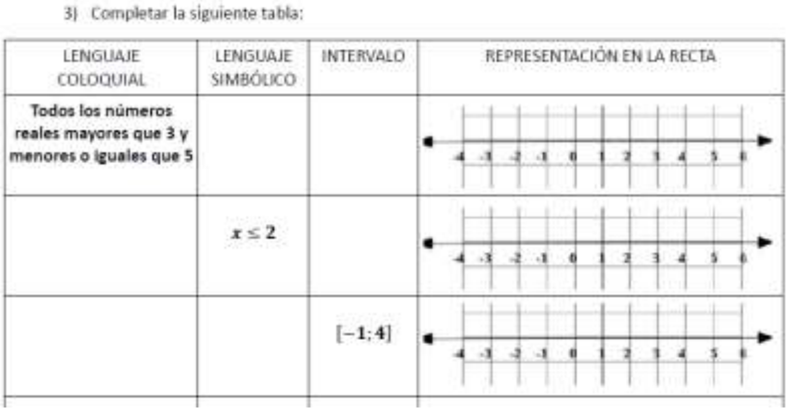
Aquí corresponde la misma aclaración que para la docente A, ya que la docente B tampoco menciona el cuerpo de los números reales, ni los axiomas (también le llama propiedades). Sin embargo, se considera adecuado agrupar en esta categoría a las tareas que corresponden a la operatoria y comparación de números reales.

**Tabla 15. Categoría para el uso del número real como límite de una sucesión o como resultado de una serie -representación decimal- (docente B)**

| Categoría | Descripción de la tarea | # de tareas |
|---|---|---|
| Función: análisis de convergencia de una serie<br><br>Forma: patrón de tareas donde se analiza a qué número converge una serie | Se solicita observar a qué número entero es igual un número decimal periódico puro con período 9:<br>4- Transforma a fracción los siguientes números. ¿Puedes sacar alguna conclusión?<br>a) $0,\hat{9}$<br>b) $1,\hat{9}$<br>c) $2,\hat{9}$<br>d) $16,\hat{9}$ | 1 |

Si bien la docente nunca trabaja con series numéricas, ni de convergencia, se rescata la intención del ejercicio que es llegar a la conclusión de que todo número decimal periódico puro, con período 9, es igual a un número entero. Al trabajar este ejercicio la docente menciona en sus clases, por ejemplo, el acercamiento que existe entre 0,999… y 1 hasta el punto de ser lo mismo. Si bien la aclaración es sutil y no se ahonda demasiado al respecto, podría ser un indicio de que la docente posee esta concepción y quiere transmitirla de alguna manera.

**Tabla 16. Categoría para el uso del número real, para la concepción de número real como puntos de una recta completa y continua (docente B)**

<table>
<tr><th>Categoría</th><th>Descripción de la tarea</th><th># de tareas</th></tr>
<tr><td>Función: representación de conjuntos numéricos en la recta real.<br><br>Forma: patrón de tareas en donde se debe representar intervalos en la recta real.</td><td>Se solicita representar intervalos en la recta real:<br><br>3) Completar la siguiente tabla:
<table>
<tr><th>LENGUAJE COLOQUIAL</th><th>LENGUAJE SIMBÓLICO</th><th>INTERVALO</th><th>REPRESENTACIÓN EN LA RECTA</th></tr>
<tr><td>Todos los números reales mayores que 3 y menores o iguales que 5</td><td></td><td></td><td>-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6</td></tr>
<tr><td></td><td>$x \leq 2$</td><td></td><td>-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$[-1;4]$</td><td>-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6</td></tr>
</table>
</td><td>1</td></tr>
</table>

La docente B dedica tiempo de una clase a explicar la ubicación de números reales en la recta, mediante la subdivisión de la unidad en 10 partes iguales, para luego subdividir cada una de esas partes en 10 partes iguales, y así sucesivamente. Sin embargo, llama la atención que no proponga más actividades del estilo para marcar, por ejemplo, algunos números reales específicos. Solamente aparece la recta como soporte para representar gráficamente intervalos reales.

Puede observarse, al igual que la docente A, una mayor frecuencia de tareas que tienen que ver con el aspecto algorítmico del número real.

### 4.2.3 DOCENTE C

La concepción que emerge de las tareas propuestas por la docente C es la de número real como elemento de un cuerpo ordenado y completo. Dichas tareas son tomadas de los apuntes confeccionados por la docente C para sus clases. A continuación, se presentan las distintas categorías encontradas para las tareas que propician el uso del número real en las clases de la docente C (tabla 18).

**Tabla 17. Categoría para el uso del número real, para la concepción de número real como elemento de un cuerpo ordenado y completo (docente B)**

| Categoría | Descripción de la tarea | # de tareas |
|---|---|---|

| | | |
|---|---|---|
| Función: operaciones de cuerpo (suma, resta, producto, cociente) desde un punto de vista algebraico (cumpliendo los axiomas). Aproximación de números reales.<br><br>Forma: patrón de tareas donde se opera con elementos siguiendo una serie de axiomas. | Se solicita resolver operaciones con números racionales:<br>**RESOLVER:**<br>1. $\frac{2}{3}+\frac{5}{3}$ 5. $-\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)$<br>2. $\frac{6}{5}-\frac{2}{5}$ 6. $\frac{2}{3}:\left(-\frac{5}{4}\right)$ | 3 |
| | Se solicita resolver operaciones combinadas con radicales, a partir su representación con exponente fraccionario:<br>8. $\frac{\sqrt{3^5}\cdot\sqrt[5]{3^2}:\sqrt[4]{3^{-1}}}{\sqrt{3^3}\cdot\sqrt[5]{3^7}}$.<br>9. $\frac{\sqrt[3]{2^{-5}}:\sqrt{2^3}\cdot(\sqrt[4]{2^7})^2}{(\sqrt[4]{2^5})^{-2}}$. | 2 |
| | Se solicita expresar un número en notación científica cuando aparece desarrollado, y viceversa. Operar con números expresados en notación científica:<br>3. Primero expresar los números en notación científica y luego resolver.<br>*a)* $5800000+270000000-45000$<br>*b)* $0,0000038-0,00025+0,0000412$<br>*c)* $\frac{72000000\cdot 0,00003}{0,009\cdot 400}$ | 9 |
| | Se solicita aplicar el teorema de Pitágoras para calcular la medida de un lado de un triángulo rectángulo o para decidir si un triángulo es rectángulo a partir de la medida de sus lados:<br>3. Una escalera de bomberos de $14,5\ m$ de longitud se apoya en la fachada de un edificio, poniendo el pie de la escalera a $9\ m$ del edificio. ¿Qué altura, en metros, alcanza la escalera? Dar la respuesta en forma exacta y en forma aproximada por redondeo y truncamiento con 2 cifras decimales. | 11 |
| | Se solicita redondear o truncar números racionales o irracionales, a partir de su representación decimal.<br>2. Hallar el perímetro de forma exacta, por redondeo con 3 cifras decimales y por truncamiento con 2 cifras decimales de:<br>*a)* Un rectángulo cuyos lados miden $\sqrt{5}\ cm$ y $2+\sqrt{7}\ cm$.<br>*b)* Un triángulo cuyos lados miden $1\ cm$, $2\ cm$ y $\sqrt{3}\ cm$. | 10 |

En las tareas que propone la docente C, al igual que en aquellas llevadas a cabo por las docentes A y B, se puede observar la primacía de lo aritmético (aunque algorítmico) por sobre otra característica del número real. En este caso, la operatoria, el pasaje de un tipo de representación a otra y la aproximación de números son los principales objetivos de las tareas propuestas.

### *4.3 CONCEPCIONES DEL NÚMERO REAL*

Los siguientes resultados corresponden a dos sesiones de entrevistas realizadas cuya finalidad es reconocer las concepciones acerca del número real que poseen las docentes de este estudio. La primera de ellas corresponde a las concepciones del número real desde la perspectiva cognitiva, y la segunda a las concepciones desde la perspectiva epistémica (reactivos).

### 4.3.1 Concepciones acerca del número real desde la perspectiva cognitiva

Cabe recordar que desde la perspectiva cognitiva se han considerado las concepciones que tienen relación con los aspectos referidos a la enseñanza del número real en el aula, los diversos usos que pueden darse del número real, su conceptualización y los conocimientos que las docentes han incorporado dentro de su propia formación respecto a este saber. A continuación, se presentan las respuestas obtenidas en esta entrevista respecto a cada categoría:

**Importancia de la enseñanza del número real en la escuela secundaria.** Cuando se les ha preguntado si consideran importante enseñar números reales en la escuela secundaria, todas las docentes responden afirmativamente. La docente A considera que el tema es muy amplio pero que lo importante es que a los alumnos "les quede claro que los números reales son todos los números", aunque reconoce que muchas veces el concepto no llega a aprenderse ya que preguntan en cuarto o quinto año qué es un número real. La docente B afirma que la importancia radica en la infinitud y la continuidad, en la operatoria con número reales y sobre todo con irracionales, dado que no puede conocerse su expresión decimal sino que debe recurrirse a una aproximación. La docente C reconoce que la importancia de enseñar el número real en este nivel radica en el concepto de número irracional: "sí, lo considero importante porque no se pueden quedar los chicos con la idea de que los únicos números que existen son aquellos que tienen una cantidad finita de decimales atrás de la coma o que son periódicos y siempre se repiten. O sea, ellos saben que existen ciertos números que no tienen esa particularidad o regularidad y necesitamos ese concepto también para enseñar otros conceptos". También lo considera necesario en la formación propedéutica, para el ingreso a alguna carrera terciaria o universitaria que requiera de conocimientos matemáticos. Se evidencia que las docentes consideran importante que los alumnos conozcan las características propias de los irracionales, y no solo de los racionales, en este nivel. La docente B menciona la completitud, lo cual hace posible ver al conjunto de números reales como un todo, pero no profundiza por qué sería importante estudiar esta cualidad.

**Aspectos más relevantes que son necesarios enseñar del número real.** Cuando se le pregunta acerca de los aspectos del número real que considera necesario enseñar, la docente A hace referencia a los contenidos que incluye en la unidad observada: valor absoluto, ecuaciones con valor absoluto, y radicales. Sin embargo, no justifica por qué los considera importante y en detrimento de qué otros contenidos. La docente B considera importante saber distinguir entre los diferentes conjuntos numéricos, reconocer las diferentes representaciones de los números reales para luego operar, considerando distintos procedimientos según la representación para elegir el más conveniente, el uso de la calculadora y la notación científica para expresar números muy grandes o muy pequeños. La docente C reconoce la importancia de la incorporación de los números irracionales y el estudio de sus características, diferenciándolos de los otros conjuntos numéricos que ya vienen trabajando en años anteriores. También, en cuanto a las aplicaciones físicas del número real, considera importante enseñar notación científica. Afirma que se trabaja con número real desde los primeros años de la educación secundaria: “Porque si uno se pone a pensar, con números reales trabajás desde primer año cuando incorporas el concepto de los números enteros, que ellos hasta el momento vienen trabajando con naturales entonces vos empezás a ampliar el conjunto hasta completar todos los reales. Hasta este momento que estamos trabajando con los irracionales, empezás incluso a trabajar con números reales en primer año cuando estás trabajando con los enteros, que es un subconjunto si querés, ¿no es cierto?, de los números reales”. Se evidencia que los aspectos que consideran importante enseñar muestran coherencia con los contenidos seleccionados para la unidad Números Reales (y que fueron observados en las clases en las cuales fueron desarrollados). En las docentes A y B puede observarse que se hace hincapié en la operatoria de los números reales, aunque en la docente B, y también en la docente C, se observa que la concepción de número real como conjunto, unión de racionales e irracionales, está muy presente. En la docente C, además, se observa que no distingue la naturaleza de cada elemento de los conjuntos numéricos ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}$) sino que los declara directamente como elementos del conjunto de números reales sin explicitar que se trata de un isomorfismo entre dichos conjuntos y subconjuntos de $\mathbb{R}$ (por ejemplo, al mencionar que los alumnos conocen los números reales cuando trabajan con números naturales en primer año).

**Definición de número real.** Al pedirles que definan el número real, mencionando distintas aristas del concepto, la docente A afirma que es necesaria la presentación de los distintos conjuntos numéricos (naturales, enteros, racionales) hasta llegar a los irracionales, luego define: “los números reales son todos los que conocieron, hasta llegar a ver los irracionales”. La docente B lo define de manera similar, dando un poco más de formalidad a los conceptos, expresando que es la unión del conjunto de los números racionales y el conjunto de los números irracionales, que son definidos previamente, a partir de operaciones que no obtienen resultado posible en el conjunto numérico en el que se está trabajando (por ejemplo, el cociente de dos enteros cuyo dividendo no es múltiplo del divisor o la raíz cuadrada de un número entero que no tiene solución entera). Luego, agrega: “Pero básicamente, a veces les digo a los chicos, son los números que ustedes conocen, que pueden conocer, que pueden inventarse, poniendo decimales, son todos, todos, todos que pueden resultar de cualquier operación que hagan. Dicho muy…para llevarlo a su entendimiento, ¿no?”. La docente B pierde precisión ya que no considera aquellas operaciones que no encuentran resultado posible en el conjunto de los números reales (la raíz de índice par de un número negativo o la división de un número por cero no son operaciones definidas en los reales). La docente C plantea la ampliación de los conjuntos numéricos (naturales incluidos en enteros, enteros incluidos en racionales) y luego la unión del conjunto de racionales con el conjunto de los irracionales para completar la recta numérica. Agrega que pensando fuera de la escuela secundaria puede definirse como un cuerpo con sus propiedades: “te sirve para trabajar un espacio vectorial sobre un cuerpo que no es lo mismo trabajar dentro de los reales que dentro de los complejos, que puede tener distintas dimensiones dependiendo del cuerpo donde se trabaje”. Se evidencia que sigue predominando la visión conjuntista de los números reales. En el caso de la docente C se puede reconocer una concepción como puntos de una recta completa y también como un cuerpo (aunque no considera este último aspecto pertinente al nivel secundario).

**Usos del número real.** Al preguntarle en dónde piensa que sus alumnos pueden poner en uso el número real, la docente A lo relaciona con otros conocimientos matemáticos: "los números reales aparecen en ecuaciones, geometría, trigonometría…por ejemplo, para dar números irracionales podría plantear una ecuación cuya solución sea una raíz no exacta de un número real". Luego, plantea que sus alumnos pueden ponerlo en uso aún sin darse cuenta que están trabajando con números reales, dando como ejemplo la comparación de temperaturas por encima o debajo de 0°C. La docente B se muestra desorientada con la pregunta, al principio lo relaciona con contenidos del currículo: al realizar operaciones, al resolver ecuaciones, etc. Luego, lo intenta relacionar con la vida diaria y dar una respuesta más general: "a la hora de hacer algún cálculo para obtener medidas, a la hora de interpretar algún gráfico también, al entender las magnitudes que son continuas como, por ejemplo, la temperatura, la altura, el tiempo, poder interpretar esas magnitudes también, que uno vive atravesándose con ese tipo de situaciones. Lo que es ganancia, dinero, al ser todas variables continuas, llevado a la Estadística". Agrega la importancia de comprender la densidad de números reales, de realizar aproximaciones considerando el error que se comete. La docente C piensa que sus alumnos pueden poner en uso el número real en diferentes situaciones de la vida cotidiana, incluso antes de conocer que se trata de un número real: "En el kiosco, en la rueda de una bici, como te decía antes, en las pulgadas de una compu…hasta uno viste los aplica sin saber porque vos…primer año no diste todavía, al principio del año no viste bien lo que significa bien el número racional y cómo se representa y demás, pero uno…no sé… en las pulgadas de una computadora lo está aplicando". Luego, agrega: "Pero bueno, no sé si ellos lo utilizan pensando en qué concepto están usando al momento de usarlo en sí. Después, lo que hacemos nosotros es más que nada una formalización de eso que ellos ya fueron usando previamente". Las docentes A y C consideran la utilización de los números reales previa a su formalización (por tratarse de números enteros, por ejemplo), lo cual denota una clara concepción conjuntista (los números enteros se encuentran incluidos en los reales y, por esta razón, ya los están utilizando). En cambio, la docente B hace referencia a la utilización de ciertas magnitudes continuas, que por tal propiedad se pondría en uso el número real.

**Construcción del número real.** Cuando se le pregunta cómo piensa que sus alumnos pueden construir el concepto de número real, la docente A contesta que pueden construirlo presentándole distintos problemas que tengan por resultado distintos tipos de números (naturales, enteros, racionales, irracionales), para luego discutir sus diferencias y finalmente formalizarlo. La docente B considera que pueden construirlo de la misma manera que lo va enseñando, a partir de la ampliación del campo numérico, observando que algunas operaciones no pueden realizarse en el campo numérico que se está trabajando y es necesario construir otro conjunto que los contenga. Menciona algunas situaciones que requieren el uso de números irracionales: "La típica de calcular la diagonal de un cuadrado, por ejemplo. O cuando uno le presenta los números, por ejemplo, el número $\pi$ y les muestra de dónde sale". La docente C menciona que pueden construirlo a partir de la unión de racionales con irracionales, incluyendo la correspondencia biunívoca entre punto y recta: “Si yo quiero, como te decía, si yo pienso en completar la recta y tenemos hasta el momento dado los números racionales se les puede hacer notar, que si yo quiero representar el número raíz de dos[21] con lo que tengo representado hasta el momento no tengo forma de hacerlo, entonces como que una dice tengo un número, tengo el conjunto de los números reales, tengo la recta numérica, quiero hacer, bueno para decirlo de alguna forma, una biyección y tengo un número real, lo quiero representar acá, agarro y me paro en cualquier lugar de la recta y quiero buscar un punto de ese conjunto que lo representa. Entonces, yo creo que se puede hacer una biyección ahí entre el conjunto y la recta como para que vean que hay una relación uno a uno entre ellos”. Lo que tienen en común sus respuestas es la aparición de diferentes tipos de números hasta llegar a los irracionales. Solo la docente C plantea la construcción de la recta para que sea completa.

**Propia formación acerca del número real.** Cuando se les pregunta cómo fue su propia formación acerca del número real (cómo aprendieron el número real, lo cual está en relación a su propio aprendizaje), la docente A no recuerda haber dado el tema en su formación de profesorado, sí en los cursos de ingreso que recordaban temas del secundario, similar a lo que enseña actualmente en el nivel secundario. La docente B recuerda haberlo estudiado en una materia de primer año de su carrera: “El tema de la infinitud, la recta numérica, el trabajar con intervalos, en un momento trabajar con conjuntos de números”. La docente C afirma que terminó de comprender el concepto de número real en la universidad e incluso siendo docente, enseñando ese tema. Luego, recuerda los temas que estudió durante su formación: “No, lo que sí me acuerdo de los axiomas de números reales, ese tipo de construcción de números reales, eso sí lo vi seguro en la facultad, no lo había visto en el secundario. Lo que por ahí debo haber visto en el secundario es la inclusión, pero no sé a mí me parece…esa inclusión con el diagrama de Venn, natural contenido en los enteros, contenido… pero o sea, el resto de las cosas las terminé de afianzar en la facultad. Todo eso que yo te decía antes de completitud y demás, olvidate que no”. Solo la docente C recuerda haber estudiado una teoría formal de los números reales (la axiomática) durante su formación docente. Las docentes A y B mencionan contenidos que podrían pertenecer al nivel secundario y, por lo tanto, podría tratarse de un repaso de conocimientos previos.

**Contexto en donde se utiliza cada tipo de número (natural/entero/real).** Al preguntarles en qué contexto utilizarían un número natural, la docente A afirma que lo utilizaría para la medición de segmentos, la docente B para contar cosas, la docente C ejemplifica con la clase de gimnasia (dando a entender que si el docente pide hacer 10 u 11 sentadillas, no pueden ser 10 y medio). Cuando se le pregunta en qué contexto utilizaría un número entero, la docente A contesta que lo utiliza cuando habla de profundidad del océano o cuando utiliza el ascensor y va al subsuelo. La docente B también lo asocia a distancias bajo el nivel del mar o sobre el nivel del mar y para el cálculo de diferencias. La docente C lo utilizaría para representar deudas. Por último,

[21] Se entiende por contexto que cuando la docente dice raíz de 2 se refiere a $\sqrt{2}$.

cuando se pregunta en qué contexto utilizaría un número real, la docente A explica que lo utiliza para generalizar que “es el conjunto más grande de todos los números”, cuando quiere calcular, por ejemplo, la raíz cuadrada no entera de un número. La docente B afirma que lo utilizaría “para tomar medidas, al pesarme, a la hora de calcular distancias entre números reales, al momento de ver algún rango entre tal temperatura y tal temperatura, o entre tal ganancia y tal ganancia o en qué rango de valores se encuentra un número determinado, para ir achicando esos rangos”. La docente C menciona que puede utilizarse a la hora de medir la pantalla de una computadora, de calcular las dimensiones de una cancha, cuando se utiliza notación científica. Agrega: “Para que puedan ver la diferencia, si bien hay una contención, siempre el conjunto que contiene es más grande que el conjunto con el que estamos trabajando, hay elementos ahí que no los tiene el conjunto más chico y poder mostrar que esa contención es estricta”. Las docentes mencionan diversas situaciones en donde pueden utilizar un número natural, un número entero y un número real, todas ellas referidas a la acción de medir, contar, calcular o representar el estado de algo (como una deuda o el piso en el que se encuentra el ascensor de un edificio). La docente C menciona la importancia que tiene que sus alumnos vean la diferencia entre el conjunto $\mathbb{R}$ y los conjuntos contenidos en él, algo similar menciona la docente A al decir que es el conjunto más grande.

### 4.3.2 Concepciones acerca del número real desde la perspectiva epistémica (reactivos)

A continuación se presentan los resultados obtenidos a partir de la segunda entrevista en la cual cada pregunta o grupo de preguntas actúa como reactivo que haga emerger una concepción de número real específica.

**Reactivo 1: concepción del número real como la medida de segmentos conmensurables e inconmensurables**

Cuando se les ha pedido que midieran un segmento S2 considerando como unidad otro segmento U, se han obtenido diversas respuestas. En la primera situación presentada, S2 es de menor longitud que U (Figura 20) y en la segunda situación S2 es de mayor longitud que U (Figura 21).

**Figura 20.** ***Primera situación presentada a las docentes en Reactivo 1***

**Figura 21.** ***Segunda situación presentada a las docentes en Reactivo 1***


La docente A resuelve la primera situación midiendo con regla graduada ambos segmentos y calculando el porcentaje que representa la longitud de S2 con respecto a U: “A ver, si este es 5 y este es 3,5. Bueno, el segmento dos es 5 y este es 3,5 entonces si esta fuera la unidad, este sería el 70% de la unidad”. Sin embargo, presenta dificultades para poder realizar el mismo procedimiento en la segunda situación no pudiendo arribar a ningún resultado. La docente B plantea la necesidad de utilizar regla no graduada y compás, ya que argumenta que midiendo con regla graduada no sería exacto. La docente B transporta S2 sobre U con compás, observa que la parte que “sobra” de U entra aproximadamente cuatro veces en U (traslada con el compás la medida de ese “sobrante”) y, con este procedimiento, llega a la conclusión de que S2 es $\frac{3}{4}$ de U. Al plantear la proporción, aclara que no puede calcularse de forma precisa y que su cálculo resulta una aproximación. Luego, acota la medida de S2 superior e inferiormente pero no logra dar una acotación del error (como era lo pedido), ya que aclara que al no tener la medida real no puede hacerlo. Para la segunda situación procede de manera diferente, mide ambos segmentos con regla graduada, toma la medida en milímetros y realiza el cociente entre la medida de S2 y la medida de U. También aclara que es aproximada, y que lo realiza “a ojo”. Acota la medida de S2, utilizando compás y observando qué fracción de U es menor y qué fracción de U es mayor a S2 (también lo realiza en forma aproximada, sin utilizar procedimientos euclídeos para dividir un segmento en partes iguales). La docente C, describe tres posibilidades para proceder: utilizando regla graduada; utilizando regla no graduada y compás; y, sin utilizar elementos, dividiendo el segmento a la mitad doblando la hoja de manera tal que los extremos del segmento coincidan y de esta manera marcar el punto medio. Aclara que con ninguno de estos procedimientos puede obtener la medida exacta, ejemplificando con una relación de inconmensurabilidad: “no, de manera precisa no, si el segmento mide $\sqrt{2}$ nunca voy a poder obtener la medida $\sqrt{2}$, entonces lo voy a aproximar obviamente, por más que tenga la regla, no lo voy a poder dar de forma exacta”. A diferencia de la docente B, considera más preciso el procedimiento de medir con regla graduada, midiendo cada uno de los segmentos y planteando una regla de tres simple para calcular la medida de S2 en función de U. Para el segundo procedimiento (en la primera situación), plantea transportar con compás la medida de S2 sobre U y observar cuántas veces entra lo que “sobra” de U en S2. Luego, aclara que la relación sería al revés porque S2 es de menor longitud que U y, por lo tanto, sería una parte de U. Para el tercer procedimiento (doblando la hoja), primero transportaría la mitad de U sobre S2, luego, al volver a doblar la hoja, transportaría un cuarto de U y así sucesivamente hasta que no entren más segmentos. Reconoce en este procedimiento, una forma de acotar la medida inferior y superiormente y, de esa manera, poder obtener una mejor aproximación tomando el punto medio entre estas cotas. Por último, afirma que puede acotar el error pero si se permite establecer la cota dado que, si esa cota es dada de antemano y muy pequeña, no podría hacerlo.

Se reconoce en todas las docentes la concepción de conmensurabilidad para la medición, aunque lo pongan en términos de una proporción. Si bien las docentes B y C plantean la medición con regla y compás, ninguna describe, ni utiliza, un procedimiento para dividir al segmento en partes iguales (solo se utiliza el compás para transportar segmentos, procedimiento que no requiere de la regla, a pesar de que la nombran como un elemento necesario). El problema de la inconmensurabilidad solo se hizo explícito en la docente C. La docente B, en cambio, atribuye el problema de la precisión a las mediciones y procedimientos realizados.

**Reactivo 2: concepción de número real como puntos de una recta completa y continua**

Cuando se les ha preguntado cuáles son las condiciones necesarias para asignar a cada punto de una recta un número real y viceversa (a cada número real un punto de una recta), la docente A no logra comprender la pregunta y contesta, mostrando inseguridad en su respuesta, que podría asignar un valor a “x” y un valor a “y” para formar pares ordenados. Se evidencia que no logra reconocer la construcción de la recta real, ni la distingue del plano real. La docente B plantea necesario establecer una unidad y la orientación de la recta (un sentido de crecimiento). La docente C reconoce necesaria la completitud de los números reales para poder hacer una biyección entre punto y número: “que sea completo, obviamente la recta tiene que ser continua porque obviamente no tengo la biyección. Eso seguro, porque si ya tengo algún agujerito ya no puedo hacer la biyección”.

Si bien se presenta cierta concepción para la construcción de la recta real en las docentes B y C, ninguna plantea la existencia del axioma “existe una correspondencia biunívoca entre los puntos de una recta y los números reales”. Más bien, es tomada como una propiedad y no como una condición considerada verdadera sin demostración, dado que no es posible localizar cualquier número real en la recta (no todo número real es construible en términos euclídeos con regla y compás). Esta concepción entra en conflicto al querer responder la siguiente pregunta, en donde se pide localizar en la recta numérica $\sqrt{2}$ y $\sqrt[3]{2}$. La docente A afirma que existe un método para marcar $\sqrt{2}$ en la recta, pero no lo recuerda porque no lo explica en sus clases. Aclara que sus alumnos marcan dichos números buscando la aproximación decimal con la calculadora y localizando esa aproximación en la recta, pero no distingue la importancia de realizar otro procedimiento para localizarlo de forma exacta. La docente B y C plantean marcar el número $\sqrt{2}$, mediante la construcción de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden la unidad. A partir del Teorema de Pitágoras, se puede calcular la medida de la hipotenusa ($\sqrt{2}$), para luego transportarlo, con compás, desde el origen sobre la recta. Para $\sqrt[3]{2}$, plantean que sí existe un punto de la recta que lo representa, pero no logran encontrar un procedimiento para localizarlo y marcarlo. Ambas intentan aplicar el mismo método que utilizaron con $\sqrt{2}$, pero no logran encontrar las medidas de los catetos que permita obtener la hipotenusa deseada. La docente C, además, piensa en reescribir $\sqrt[3]{2}$ como un múltiplo entero de otra raíz que sea fácilmente construible con regla y compás, aplicando la propiedad de potencias de igual base, aunque sin éxito comienza a preguntarse si es realmente posible.

Se evidencia que no queda claro, en ninguna de las docentes, cuáles son aquellos números construibles con regla y compás y que pueden localizarse a partir de su construcción en la recta numérica. Sí queda establecido, para las docentes B y C, la correspondencia biunívoca entre número real y punto, aunque no se lo reconoce como axioma.

**Reactivo 3: concepción de número real como soluciones posibles o no posibles de ecuaciones algebraicas**

Cuando se les ha pedido que asignen valor de verdad a la afirmación "todo número real puede obtenerse como raíz de un polinomio a coeficientes racionales" y que lo justifiquen, se obtuvieron diferentes respuestas. La docente A afirma que es verdadera, aunque luego de pensarlo aclara que con un polinomio de tales características puede obtenerse una raíz natural, entera, racional o irracional del tipo raíz enésima de un número racional. Sin embargo, termina generalizando para cualquier número real sin ningún tipo de argumentación. La docente B afirma que es falso, pero no logra justificarlo. Sospecha que algunos irracionales no pueden encontrarse de esa manera, mencionando el número $\pi$, pero no logra estar segura para dar alguna demostración. La docente C también sostiene que es falsa la afirmación, mostrando más seguridad, justificando que algunos irracionales no pueden obtenerse como raíz de un polinomio a coeficientes racionales y da como ejemplo el número $\pi$. La idea logra concretarse un poco más cuando se pregunta acerca de las características comunes y las diferencias sustanciales entre los números $\sqrt[3]{2}$ y $\pi$. En esta consigna, todas las docentes reconocen en ambos números la característica de ser un número irracional, con infinitas cifras decimales no periódicas. La docente A no distingue diferencias entre ellos, afirma que $\pi$ es un número "más conocido" (por su relación con el perímetro de la circunferencia, resulta más estudiado que $\sqrt[3]{2}$) pero advierte que la pregunta no apunta a esa respuesta. La docente B afirma que $\sqrt[3]{2}$ es solución de la ecuación $x^3 - 2 = 0$ y, por lo tanto, es una raíz de un polinomio a coeficientes racionales, mientras que $\pi$ no puede serlo, dado que al factorizar el polinomio algún coeficiente quedaría irracional (aunque se contradice con lo afirmado anteriormente): "no, yo pensé con $\pi$…A ver, estoy mareada. Un polinomio vos lo podés factorizar con sus raíces…no, es imposible. ¡Ahí está! No, porque suponiendo que tuviera raíces irracionales, en su forma factorizada cuando lo desarrollás te van a quedar sus coeficientes irracionales, así que no. Pero eso, te estoy hablando de aquellos que no son raíces, raíz cúbica, raíz cuadrada de algún número". La docente C recuerda el conjunto de los números trascendentes, asignando $\pi$ a este conjunto y afirmando que pertenece a él dado que no puede obtenerse como raíz de un polinomio a coeficientes racionales, a diferencia de $\sqrt[3]{2}$ que sí se puede. No intenta dar una explicación de por qué esto es así, pero se evidencia que es un resultado que conoce.

Se puede observar esta concepción en las docentes B y C, no así en la docente A dado que no reconoce que existen números que no pueden obtenerse como raíz de un polinomio a coeficientes racionales. Sin embargo, a pesar de que las docentes B y C reconocen al número $\sqrt[3]{2}$ como algebraico y mencionan al número $\pi$ como el contraejemplo a la afirmación presentada, no logran dar un argumento sólido que justifique esto último.

**Reactivo 4: concepción de número real como límite de una sucesión o resultado de una serie**

Cuando se les pregunta acerca de qué relación se establece entre $0,\hat{9}$ y 1, todas las docentes contestan que son iguales. La docente A y la docente C justifican esta relación a partir del pasaje de decimal a fracción, respondiendo que $0,\hat{9}$ es igual a $\frac{9}{9}$, igual a 1. La docente A acota que este resultado llamó la atención de sus alumnos: “bueno, el otro día me pasó que pusieron en la calculadora y les daba uno. Y claro, porque el 9 se repite infinitamente, entonces, repetirse infinitamente se redondea y queda directamente el 1. Si lo queremos pasar a fracción, hacemos 9 sobre 9 y queda 1”. La docente B responde de otra manera, mostrando lo anti-intuitiva que resulta para ella esta relación: “Esto me voló la cabeza a mí, porque para mí el 0,9999… no es 1, en mi cabeza, pero yo sé que es tan 9 que es 1. ¿Y qué relación establezco? Justamente, como no hay un vacío entre los números… entre el $0,\hat{9}$ y el 1 podría haber un número, pero ¿cuál es el número? No existe, termina siendo el mismo. Eso se me ocurre decirte”. Justifica la igualdad a partir de la densidad de números racionales, ya que ese argumento parece convencerla más de esa relación.

Al preguntarles acerca del cálculo que realiza la calculadora para dar una aproximación de $e^{\sqrt{2}}$, todas las docentes responden que no lo conocen. La docente C menciona la posibilidad de aproximarlo, hallando un polinomio de Taylor de la función $y = e^x$, para luego evaluarlo en $\sqrt{2}$, pero no establece alrededor de qué punto, ni el grado del polinomio que sería conveniente utilizar.

Cuando se les pregunta si recuerdan cuál es el cálculo para aproximar el número $e$, todas las docentes responden que no lo conocen o no lo recuerdan, a pesar de presentárselo a sus alumnos en algún momento de la educación secundaria, mencionando que es un número irracional y obteniendo su aproximación decimal con la calculadora.

Se evidencia que ninguna de las docentes hace explícita la idea de límite de una sucesión o resultado de una serie con los números reales presentados. En las docentes B y C puede evidenciarse sutilmente esta concepción, la primera cuando establece que hay distancia nula entre los números $0,\hat{9}$ y 1, y la segunda cuando establece la aproximación por polinomios de Taylor para obtener un valor próximo a $e^{\sqrt{2}}$, aunque ninguna de las dos desarrolla demasiado la idea.

**Reactivo 5: concepción de número real como cortadura de Dedekind**

Se les ha pedido a las docentes explicar por qué la siguiente afirmación justifica la existencia del número real $\sqrt[3]{2}$: los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{Q}: x^3 > 2\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Q}: x^3 < 2\}$ son conjuntos disjuntos ($A \cap B = \emptyset$) y su unión es $\mathbb{Q}$. La docente A reconoce que el número que queda en el medio entre esos dos conjuntos es $\sqrt[3]{2}$: "Bueno, si yo planteo acá la inecuación paso el cubo como la raíz cúbica entonces me queda que $x > \sqrt[3]{2}$ y acá que $x < \sqrt[3]{2}$, ¿viene por ahí la cosa? Bueno, quedarían como para los dos lados y ahí quedaría el numerito en el medio. La unión es $\mathbb{Q}$ y la intersección vacío…". La docente B duda y plantea la existencia del número, afirmando que los racionales incluidos en ambos conjuntos son números reales: "bueno, entonces si tengo todos los racionales mayores que la $\sqrt[3]{2}$ y menores a la $\sqrt[3]{2}$. Bueno, si tengo la recta, tengo todos los números de acá para allá y de acá para allá, racionales. Bien, este número además, es un número real, bueno los mayores a él y menores a él son reales, entonces el que está entre… él mismo, es un número real. Existe ese número, ¿o no?". La docente C justifica la existencia a partir de la continuidad y completitud de la recta: "bueno, la unión, obviamente, de los racionales junto con los irracionales son los que completan la recta, eso sí lo vimos antes cuando decíamos de la continuidad de la recta y demás. Cuando vos haces $A \cup B$ ya tenés afirmado que te da todos los racionales, para completarlo te falta el complemento de $A \cup B$ y el número $\sqrt[3]{2}$, en particular, es parte del complemento en este caso. No se me ocurre otra cosa ahora".

Todas las docentes reconocen que el número que está comprendido entre los conjuntos $A$ y $B$ es $\sqrt[3]{2}$, pero no cuestionan su existencia, a pesar de no haber podido construirlo y localizarlo en la recta. Ninguna de las docentes plantea que la construcción de estos conjuntos de racionales, establece la existencia de un punto, que en este caso corresponde a $\sqrt[3]{2}$, y esto posibilita justificar la existencia de dicho número. La docente C plantea la continuidad y completitud de la recta en su argumentación, aunque ya da por establecida la existencia de los irracionales (y, por ende, de los reales).

**Reactivo 6: concepción de número real como elemento de un cuerpo ordenado y completo**

Al preguntar por qué es posible convenir una orientación de la recta de izquierda a derecha (o de derecha a izquierda), todas respondieron que es posible a partir del orden de los números reales. La docente C agrega que existen axiomas de orden que lo garantizan.

Cuando se les preguntó cómo justificarían que el conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q}: x^3 < 2\}$ no tiene supremo en el conjunto de los números racionales, pero sí lo tiene en el campo de los números reales, la docente A afirma que no recuerda algunos conceptos, por lo que luego de recordar la definición de supremo, reconoce que quizás la respuesta tiene que ver con que el número $\sqrt[3]{2}$ es un número irracional: "claro, en los reales se supone que sí porque puede haber números irracionales, pero en los racionales no porque tengo $\sqrt[3]{2}$". Sin embargo, no logra darle mucha forma a la idea y decide pasar a la siguiente pregunta. Algo similar contesta la docente B, no pudiendo expresarlo del todo con claridad: "Y porque el supremo…porque el supremo de este número es un número real. Si yo tomo el supremo dentro de los números racionales, siempre voy a encontrar otro número real entre el supremo de los racionales y el supremo de los reales. Entonces, ¿cómo justifico que tiene supremo en el de los números reales, pero no en los racionales? En el de los racionales no, porque siempre voy a encontrar un número mayor…no sé cómo explicarlo…no tiene supremo…". Y agrega: "la menor de las cotas superiores no es un número racional. Vos me estás haciendo acordar de un montón de cosas que no me acordaba". La misma idea expone la docente C, pero con mayor sustento en su argumentación: "por ahí uno podría mostrar que el número $\sqrt[3]{2}$ es más grande que cualquiera de los $x$ en $\mathbb{Q}$, tales que son menor a ese número, un número que los mayora. Pero, sin embargo, si yo tomo algo un poquito más chiquito que ese $\sqrt[3]{2}$ seguro entre ese más chiquito que tomé y ese $\sqrt[3]{2}$ voy a encontrar un número racional. Entonces ahí voy a tener problemas para decir que ese algo, un poquito más chiquito que encontré, va a ser un supremo del conjunto A que tengo definido de esa forma. Pero así, como de manera intuitiva…". Agrega también que la justificación es válida ya que la recta queda completa con los números reales.

Las docentes consideran el orden de los números reales, aunque no todas lo reconocen como un axioma (solo la docente C). En cuanto a la existencia del supremo para el conjunto $A$ descripto anteriormente, no todas reconocen la completitud del campo de los números reales como una condición necesaria para que el conjunto tenga supremo en $\mathbb{R}$ y ninguna de ellas lo reconoce como axioma (axioma de completitud). Siguen considerando la diferencia entre números racionales e irracionales, sin considerar el conjunto de números reales como un campo en sí mismo, que posee características propias, y esta concepción prevalece en las argumentaciones dadas (al menos en las docentes A y B). No expresan la completitud como una característica propia del campo de los números reales, que no se cumple en el conjunto de los números racionales.

**Reactivo 7: concepción de número real como elemento de un conjunto proveniente de la unión de racionales e irracionales**

Se les ha preguntado a las docentes cómo justificarían que 0,25 es, primero, un número racional y, segundo, un número real. Todas las docentes justifican que el número $0{,}25$ es un número racional porque puede ser expresado como fracción y argumentan que es un número real a partir de la inclusión del conjunto de los números racionales en el conjunto de los reales.

Luego, se les ha preguntado cómo justificarían que el número $\pi$ es, primero, irracional y, segundo, real. Las docentes A y B justifican que es un número irracional porque no puede expresarse como fracción, y al ser irracional está incluido en los números reales. La docente C reconoce los mismos resultados expresados por las docentes A y B, pero entra en conflicto con la justificación de que el número $\pi$ es irracional dado que afirma no conocer la demostración que prueba que tiene infinitas cifras decimales no periódicas. Estima que podría justificarse a partir de un desarrollo por sucesiones, pero no se le ocurre cómo hacerlo.

Se ha identificado que todas las docentes conciben a los números reales como conjunto, constituido por la unión de racionales e irracionales, distinguiendo las características que los diferencian.

# Capítulo 5
# Análisis y discusión de los resultados. Conclusiones.

## 5.1 ANÁLISIS DE RESULTADOS

En esta sección se examinan, se estudian y se explicitan las particularidades del caso, recogidas a partir de la muestra seleccionada mediante las distintas técnicas de recolección de datos planteadas, siempre con la intención de darles sentido a la luz del marco conceptual adoptado. Este análisis permitirá realizar posteriomente la discusión propuesta en la sección siguiente.

### 5.1.1 Análisis del discurso numérico escolar en las docentes A, B y C

Cabe destacar que el concepto de número real es tan amplio que las unidades desarrolladas por las distintas docentes bajo este nombre abarcan contenidos diferentes entre sí. Sin embargo, en todas ellas se pudieron reconocer características específicas del discurso numérico escolar en común:

**Presentación del número real**. Se observaron pocas oportunidades para la construcción del número real en el aula. En el caso de la docente A, ni siquiera es presentada una definición y en el caso de las docentes B y C, el conjunto de los números reales es considerado como un objeto preexistente atribuyendo un significado impuesto: es la unión de dos conjuntos de números (racionales e irracionales) que poseen ciertas características dadas (se pueden representar como fracción o no; o tienen una cantidad de cifras decimales finitas o infinitas periódicas, o bien, infinitas no periódicas). En el caso de la docente B, el hilo conductor de la presentación fue la imposibilidad de obtener resultados al realizar operaciones con números de un mismo conjunto numérico. Por ejemplo, al dividir dos números enteros -en donde el numerador no es múltiplo del denominador- se obtiene un número que no es entero y de ahí la necesidad de los números racionales, ya considerados existentes. Tampoco es cuestionada, por ninguna de estas docentes ni dentro de la unidad observada, la existencia de los números irracionales y basan su presentación en la obtención, por calculadora, de ciertos resultados de operaciones entre números racionales en los cuales se observa la ausencia de período (aunque no se sepa cómo obtiene la calculadora el resultado, cómo se puede asegurar que las cifras decimales son infinitas o si en realidad existe un período pero supera la cantidad de cifras que muestra el visor). Esta forma de presentación, de conjuntos incluidos unos en otros en forma acumulativa, esconde e invisibiliza el trasfondo epistemológico al que cada representación responde. En definitiva, en las situaciones observadas, se ha notado que:

- No hay un retorno a las bases naturales que den significado a los diferentes tipos de números.

- La existencia de los números racionales y de los números irracionales aseguran la existencia de los números reales.
- No se problematiza de dónde proviene cada tipo de número, a qué fines responde, ni en dónde puede ponerse en uso.

En la muestra estudiada, la enseñanza del número real se basa en la memorización de conceptos, concibiéndose como un conocimiento acabado y continuo (carácter hegemónico).

**Tipos de argumentos y procedimientos que permiten el tratamiento y construcción del concepto de número real**. Puede decirse que lo algorítmico predomina en los contenidos enseñados por las tres docentes. Las técnicas de cálculo o métodos utilizados validan la igualdad entre diferentes representaciones del número, en todas las situaciones observadas. Por ejemplo, para justificar que $0,\hat{9}$ es igual a 1, la docente B realiza el cociente $\frac{9}{9}$ dando por resultado, mediante simplificación, el número 1. Se podría suponer entonces que ambos números son iguales y no poseen características que los diferencien. Sin embargo, ambos números conceptualmente responden a fines distintos: el número 1 lo utilizamos para contar, mientras que este uso no es posible para el número $0,\hat{9}$. Tampoco se problematiza la necesidad o la ventaja de utilizar una representación en vez de otra, contextualizando su uso. Es el caso de la docente A, cuando sus alumnos preguntan reiteradas veces para qué sirve la técnica de racionalización de denominadores en operaciones con radicales. En ningún momento se hace explícito el por qué y/o el para qué de este proceder. Por ejemplo, el uso de la calculadora invisibiliza la imposibilidad de realizar la división entre 2 y $\sqrt{2}$ (ya que posee un algoritmo de cálculo, que no es evidente para quien lo utiliza) para hallar una expresión decimal aproximada de $\frac{2}{\sqrt{2}}$. Por tal razón, es necesario obtener su expresión equivalente con denominador entero (en este ejemplo, $\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{1}$), para, de esta manera, poder hallar su expresión decimal aproximada. Se podría pensar que siempre que uno se encuentre con una expresión de este tipo es necesario realizar este procedimiento. Otro ejemplo puede observarse cuando la docente C, en la aproximación de un número irracional, explica que la cantidad de cifras decimales de la aproximación es dada en el enunciado del ejercicio, sin explicitar en función de qué se determina esa cantidad (por ejemplo, para saber el largo de una mesa bastaría con una cifra decimal mientras que se necesitarían muchas más para el cálculo del lugar de aterrizaje de un cohete espacial). Se podría suponer que siempre se utiliza una o dos cifras decimales (como una norma), o que tiene que estar dada de antemano para poder realizar la aproximación. Por otro lado, las demostraciones formales para validar propiedades o para probar que un número es irracional se encuentran ausentes en todas las clases observadas. Todas las docentes utilizan, por ejemplo, la calculadora en varias ocasiones para validar que el resultado de una raíz cuadrada de algún número racional es irracional. A pesar de que este método de verificación no es correcto (permite sospechar que se trata de un número irracional pero no es posible asegurarlo), ninguna de las docentes hace una demostración que lo pruebe, ni menciona que es necesario hacerla. De esta manera, en las situaciones analizadas, puede observarse la supremacía de ciertos argumentos y significados frente a otros, tendiendo a los procedimientos mecánicos y memorísticos (carácter hegemónico).

**Contexto en el que se enmarca el número real**. En las clases desarrolladas por las tres docentes se ha observado que se hace hincapié en los aspectos aritméticos en detrimento de los aspectos geométricos del número. En todas sus clases se presentan reglas exitosas para el cálculo (resolver ecuaciones/inecuaciones, operar con racionales y/o con radicales, aproximar un número, etc.), o para obtener diferentes representaciones de un mismo número (pasaje de decimal a fracción, pasaje a notación científica, etc.). Sin embargo, se trata de reglas estáticas dadas por las docentes, que no se resignifican en otros contextos sino que sirven solo para resolver ejercicios similares a los dados. El aspecto geométrico del número no se trabaja en las clases de las docentes A y C. En el caso de la docente B, se menciona un procedimiento para localizar números racionales, con una cantidad finita de decimales, en la recta numérica a partir de la división sucesiva en diez partes iguales de la unidad. Sin embargo, no se explicita cómo podría localizarse un número si posee infinitas cifras decimales periódicas -por ejemplo, $\frac{1}{3} = 0,\hat{3}$- o si fuera irracional, dado que el procedimiento anterior no terminaría nunca. Tampoco se explica cómo podría dividirse un segmento dado en diez partes iguales de forma exacta y geométrica. Los alumnos no se enfrentan nunca a esta situación ya que en las tareas planteadas por la docente no se trabaja este procedimiento. Aunque el estudio de caso escapa a lo que sucede en otros años escolares, o, incluso en otras unidades dentro del mismo año escolar que aborden contenidos correspondientes a otros ejes (como Geometría y Medida o Álgebra y Funciones), llama la atención que la medición de segmentos y la localización de puntos en la recta no tenga protagonismo en las clases de números reales observadas, ya que son aspectos primordiales de los que surgen los números reales a lo largo de su historia y sería deseable que sean presentados en esta unidad -al menos en un primer acercamiento- para propiciar así el carácter funcional del número.

**Foco de interés del docente acerca de lo que saben o lo que hacen sus alumnos en cuanto al número real.** En general, todas las docentes observadas plantean actividades para resolver situaciones de la matemática pura, por ejemplo, una ecuación o una operación dada. Muestran interés en que sus alumnos puedan reproducir los procedimientos explicados, aplicando propiedades o métodos presentados con anterioridad. Las propiedades son dadas por las docentes sin demostración ni discusión sobre su validez. Como se trata de reglas de cálculo que son dadas e impuestas por las docentes, el tener éxito en la resolución de situaciones planteadas depende exclusivamente de recordar de memoria las propiedades y los procedimientos explicados. Por ejemplo, la docente B plantea en sus clases que para poder realizar operaciones combinadas con números racionales deben expresar los números decimales como fracción. No se discute cuáles son las posibilidades para su resolución si se expresan todos los números como decimales, cuáles son las operaciones factibles de realizar o cuáles son las ventajas o desventajas de esta forma de resolución. Lo mismo se observa cuando la docente A explica la resolución de inecuaciones, aclarando la propiedad de que "cuando el número que pasa multiplicando o dividiendo al otro lado de la desigualdad es negativo, cambia el sentido de la desigualdad". No puede verse el por qué de esta propiedad sino que es una regla que debe cumplirse pues la docente así lo indica. Lo mismo ocurre cuando la docente C aclara las reglas para el redondeo o truncamiento para la aproximación de números irracionales. Los significados de dichos procedimientos registrados en este caso de estudio no se desprenden del quehacer matemático contextualizado (atomización de conceptos y procesos matemáticos).

**Relación del número real con otros campos de conocimientos y prácticas sociales -como la graficación y la predicción- que se propicie en el aula**. En general, de acuerdo a lo observado, no se presenta relación del número real con otros campos de conocimiento o prácticas sociales. En el caso de las docentes B y C, solo se menciona el uso que hacen los científicos para representar números en notación científica. En el caso de la primera, también se menciona la utilidad del número $\pi$ para medir la longitud de una circunferencia o del número de oro con relación al cuerpo humano. Sin embargo, queda en el plano de lo anecdótico no siendo, por ejemplo, la medición una práctica utilizada en el aula para construir y significar el saber. Puede decirse que las propuestas de enseñanza del número real analizadas no consideran aspectos sociales y/o culturales (falta de marcos de referencia para la resignificación).

### 5.1.2 Análisis de las tareas propuestas por las docentes A, B y C

Las características del discurso numérico escolar reconocidas tienen relación con las diferentes tareas propuestas por las docentes. En todas ellas, predomina una concepción de número real que debe seguir una serie de axiomas o propiedades que norman su operatoria. Podría decirse que se evidencia una concepción de número real como elemento de un cuerpo completo, arquimediano maximal (aunque no se reconozca con ese nombre, ni se tengan presentes los axiomas). Sin embargo, las operaciones no vuelven a definirse para los números reales y pareciera que siguen rigiendo las mismas reglas que son válidas para los números racionales (aunque nunca se hace explícito). Por ejemplo, cuando la docente C trabaja con potencias de exponente fraccionario utiliza propiedades de potencia de igual base (sumando o restando exponentes) para llegar a una única potencia. El trabajo con radicales pareciera ser la mayor preocupación de la docente A, para operar con este tipo de números irracionales (los que son de la forma raíz enésima de un racional). Las docentes B y C también operan con números de este tipo pero, en este caso, se encuentran presentes en el cálculo de una longitud, un área o un perímetro de alguna figura geométrica con algunas medidas dadas (contenidos correspondientes al eje Geometría y Medida del ciclo básico). La docente B prioriza la aplicación de propiedades de la radicación, sobre todo para extraer factores fuera del radical. La docente C, en cambio, prioriza la aproximación de números irracionales diferenciándola de la forma exacta. Se podría decir que se da preferencia a lo algorítmico por sobre lo conceptual, pareciera que lo que importa es operar con los números reales aunque no se sepa del todo de qué tipo de entes matemáticos se trata.

Dado que -según lo afirmado por las docentes observadas- en esta unidad se desarrolla con profundidad el concepto de número real y, a pesar de que según el Diseño Curricular correspondiente tanto la completitud de la recta como la convergencia de sucesiones son temas a desarrollar en el 5to año, hubiera sido deseable (teniendo en cuenta la perspectiva epistemológica atendida por la TSME) que las actividades propuestas observadas indujeran al menos intuitivamente estas ideas, cimentando sus bases para su posterior estudio con más detalle y precisión. Por un lado, la concepción de número real como puntos de una recta aparece muy sutilmente en las actividades planteadas por las docentes A y B, aunque estas solo la utilizan como sostén para identificar el intervalo que representa la solución de una inecuación. No se encuentran oportunidades para la discusión acerca de qué números reales se pueden representar en la recta de forma exacta, cuáles son posibles de localizar, ni por qué se pide a la recta que contenga a todos los números reales. Por otro lado, solo la docente B propone sutilmente en sus tareas el trabajar con el número real como resultado de una serie o como límite de una sucesión. Al mencionar que, al agregar nueves a la expresión decimal $0{,}999$, los nuevos números se acercan tanto como se quiera a 1 y, por tal razón, $0{,}\hat{9}$ y 1 terminan siendo iguales, deja entrever un conocimiento que quiere resaltar: la idea de convergencia. Sin embargo, el análisis se queda corto y no se retoma la discusión para otro tipo de números (por ejemplo, irracionales y su expresión decimal infinita). El uso de la calculadora para el cálculo de las primeras cifras decimales de, por ejemplo, la raíz cuadrada de 2 oculta la forma de obtener números decimales exactos que elevados al cuadrado den resultados cada vez más cercanos al número 2. La construcción de la sucesión que converge a $\sqrt{2}$, o al menos de los primeros términos de dicha sucesión, fundamenta el procedimiento que hace la calculadora y que permite sospechar que posee infinitas cifras decimales no periódicas (se entiende que este procedimiento -sin necesariamente hablar de sucesiones- refiere a la noción intuitiva de número real que el Diseño Curricular para Escuelas Secundarias Orientadas aconseja enseñar en el ciclo básico). Los procesos infinitos de este estilo no son trabajados por las docentes, ni siquiera en forma intuitiva, evitando el tema de la convergencia en el desarrollo que realizan del número real. Esto quizás se deba a una extrema simplificación que pareciera ser adecuada para el nivel que se está enseñando.

### 5.1.3 Análisis de las concepciones acerca del número real en las docentes A, B y C desde la perspectiva cognitiva

A lo largo de la entrevista pudo reconocerse un predominio de la concepción conjuntista del número real en todas las docentes. Todas coinciden en que la importancia de enseñar números reales en este nivel radica en que los alumnos conozcan los números irracionales, además de los racionales. Las docentes B y C mencionan como un aspecto importante a enseñar la distinción de los diferentes conjuntos numéricos. Sin embargo, llama la atención que ninguna de las actividades propuestas en sus clases trabaje esta cuestión. Pudo observarse que para las docentes no hay un concepto de número real en sí mismo, que se desprenda de la de número racional, sobre todo a la hora de dar una definición. No se concibe como un ente matemático diferente sino como una forma de llamar conjuntamente a “todos los números”, tal como lo expresa la docente A. En línea con lo anterior, y siendo más notorio en la docente C, puede decirse que no distinguen que cada tipo de número (natural, entero, racional, real) es de distinta naturaleza ya que responden a fines y necesidades diferentes. Pareciera que las docentes desconocen el hecho de que la contención de conjuntos en realidad corresponde a isomorfismos entre los conjuntos

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ y subconjuntos de $\mathbb{R}$. El hecho de definir a $\mathbb{R}$ como unión de estos conjuntos obstaculiza su construcción, habilitando este tipo de confusión. Tanto la docente A como la docente C, plantean que los alumnos pueden poner en uso el número real incluso antes de presentarlo, dando ejemplos en el campo de los números enteros. Existe nuevamente una confusión al considerar enteros como números reales, dado que no pueden distinguir características que los diferencien conceptualmente. Se evidencia que las docentes comprenden la unión o la inclusión de conjuntos de forma literal.

A partir de la indagación acerca de la importancia de la enseñanza del número real en la escuela secundaria, de los usos que puede darse al número real y de la construcción de este concepto, la cuestión de la continuidad de la recta y la completitud de los números reales emerge en varias de las respuestas de las docentes B y C. La docente B piensa que el número real puede ponerse en uso en el manejo de magnitudes continuas, relacionándolo con el campo de la Estadística (cuando se definen variables continuas). La continuidad pareciera ser la característica que reconoce la docente B que diferencia al número real de otro tipo de número. Llama la atención que a pesar de ser mencionada por ella como una propiedad que fundamenta la enseñanza de este concepto, no es trabajada en las tareas que propone a sus alumnos ya que esta es la unidad que la propia docente afirma desarrollarlo con profundidad y sería apropiado que emerja de su construcción inicial, aunque pudiera ser profundizado más adelante. Por otro lado, la docente C considera que la completitud de la recta es el objetivo final al que se quiere llegar, luego de ir ampliando los conjuntos hasta formar el de los números reales (ella observa que con los racionales no alcanza para completar la recta y de ahí la importancia de agregar los irracionales). Sin embargo, nunca lo menciona en sus clases ni se trabaja en las actividades que propone a sus alumnos en 2do año. En su relato puede observarse que considera a la existencia de los números reales precedente a su representación en la recta numérica. La propiedad de completitud no es mencionada por la docente A a lo largo de la entrevista, a pesar de ser una característica exclusiva del conjunto de los números reales que lo diferencia de $\mathbb{Q}$.

A la hora de describir cómo pueden sus alumnos construir el concepto de número real, las docentes A y C plantean formas de presentación que no se corresponden con lo que desarrollaron en sus clases, a pesar de que señalan estudiar el concepto en profundidad en la unidad observada. En el caso de la docente A, afirma que plantearía problemas que tengan por resultado distintos tipos de números (naturales, enteros, racionales, irracionales). Sin embargo, durante sus clases nunca propuso ninguna situación de este tipo. En la resolución de inecuaciones, la docente A plantea el conjunto solución como un intervalo real que tiene por extremos siempre un número racional o entero, con lo cual no queda claro si los alumnos comprenden qué tipo de números contienen esos conjuntos. La docente C, en cambio, considera que los alumnos pueden construir el concepto de número real a partir de la necesidad de completar la recta numérica aunque esta no haya sido la forma en que lo presentó en el año observado. No se plantea el problema de la construcción del concepto de número irracional, ni de su localización en la recta. Tampoco se pregunta cómo es posible asegurar la biyección entre punto y número, para que no queden puntos de la recta sin un número real asignado y viceversa. Este análisis no pareciera ser relevante para la docente al momento de adentrarse al estudio del ente matemático en cuestión para realizar su construcción. Solo la docente B presenta coherencia al afirmar que sus alumnos pueden construir el concepto de la forma en que lo desarrolló en sus clases: a partir de realizar operaciones que no tienen solución en el conjunto numérico en el que se está trabajando y, a partir de allí, la necesidad de ampliar los conjuntos hasta llegar a $\mathbb{R}$.

Con respecto al contexto en que se podría poner en uso un número natural, las docentes B y C hacen referencia a la práctica de contar. Si bien consideran el aspecto cardinal del número, no tienen presente su carácter ordinal (que sirve para dar un orden a ciertos elementos). Llama la atención la respuesta de la docente A, que hace referencia a la medición de segmentos, puesto que en esta práctica es común encontrarse con que los números naturales no son suficientes (sería más acertado relacionarla con el uso de números racionales o irracionales). Al preguntarles en dónde se podría poner en uso un número entero, las respuestas se vuelven un poco más confusas. Por ejemplo, las docentes A y B hacen referencia a la profundidad del océano o distancias bajo o sobre el nivel del mar. Se capta la intención de querer utilizar un número negativo en estas situaciones, pero una distancia no necesariamente siempre es un número entero. La respuesta de la docente C, al referirse a las deudas, es más acertada ya que podemos asociarla a los orígenes del número entero. Al responder cuáles podrían ser los usos de un número real, las docentes B y C hacen referencia a la práctica del medir. Sin embargo, la docente C ejemplifica con algunas medidas que son enteras, como es la de una pantalla que se mide en pulgadas, aunque sigue insistiendo que, por la contención de conjuntos, se trataría de un número real. En el caso de la docente A, responde que podría poner en uso el número real en una operatoria que no tiene solución en el campo de los números racionales y que sí lo tiene en el campo de los irracionales (por ejemplo, al querer calcular la $\sqrt{2}$), aunque no contextualiza en dónde pondría en uso ese número.

Se evidencian diferencias en la formación recibida por cada una de las docentes sobre el número real, siendo solo la docente C aquella que recuerda haber recibido instrucción formal sobre la teoría axiomática como cuerpo arquimediano maximal. En todos los casos, mencionan no haber estudiado teorías constructivas del número real lo cual podría incidir en las concepciones que poseen acerca de este concepto.

### 5.1.4 Análisis de las concepciones acerca del número real en las docentes A, B y C desde la perspectiva epistémica (reactivos)

A continuación se realiza un análisis de las respuestas obtenidas en la segunda entrevista, referida a las concepciones que poseen las docentes acerca del número real desde la perspectiva epistémica (reactivos). Se ha organizado el análisis respecto a cada concepción determinada:

**Número real como la medida de segmentos conmensurables e inconmensurables.** A la hora de realizar mediciones las docentes se encontraron con algunas dificultades. Por ejemplo, las técnicas para medir con regla no graduada y compás no fueron del todo desarrolladas por las docentes B y C. A pesar de ser mencionada, los procedimientos descriptos no requieren el uso de la regla, y el compás solo se utiliza para transportar segmentos (no lo usan, por ejemplo, para dividir al segmento en partes iguales). Estas técnicas no fueron ni siquiera mencionadas por la docente A, ya que la única estrategia que encuentra es medir con regla graduada cada segmento y plantear una proporción. Solo la docente C percibe que los segmentos no pueden medirse en forma precisa dado que podría tratarse de segmentos inconmensurables (aunque no lo expresa de esta manera, solo ejemplifica diciendo que si S2 mide $\sqrt{2}$ nunca se va a poder determinar su medida de manera exacta). La búsqueda de una cota para el error no queda clara para las docentes A y B. La primera no logra llegar a esta instancia para pensar la estimación dado que no consigue encontrar la medida de S2 cuando esta es mayor que U y pide continuar con la siguiente pregunta (llama la atención que no aplique el mismo procedimiento que hizo cuando la medida de S2 es menor que U). La segunda considera necesario conocer la medida real del segmento para poder calcular el error para luego dar una cota. La docente C muestra más seguridad, arribando a la conclusión de que podría utilizar una cota "grande" para estimar el error, pero que sería muy burdo y no tendría sentido para el cálculo de la estimación que se quiere realizar. Sin embargo, menciona el teorema de Bolzano para hacer estimaciones por exceso y por defecto de la medida del segmento cada vez mejores, aunque no queda claro cuándo terminaría el proceso y cuál sería la cota fijada para el error en ese caso.

**Número real como puntos de una recta completa y continua.** El aspecto geométrico del número es necesario para la construcción de la recta real. Si bien las docentes B y C reconocen a los números reales como puntos de una recta, ninguna reconoce la correspondencia biunívoca entre ambos conjuntos como un axioma. Más bien, es tomada como una propiedad y no como una condición considerada verdadera sin demostración, dado que no es posible localizar cualquier número real en la recta numérica. Esta concepción entra en conflicto al querer buscar un procedimiento para marcar en la recta el punto correspondiente a $\sqrt[3]{2}$. Pareciera que ninguna de las docentes logra distinguir claramente bajo qué condiciones un segmento es construible con regla y compás. Tampoco aparece la asociación de la $\sqrt[3]{2}$ con el problema geométrico de la duplicación del cubo (construir un cubo que tenga el doble de volumen que un cubo dado), que obtiene finalmente respuesta cuando logra demostrarse que la $\sqrt[3]{2}$ no es construible por métodos euclídeos (por ser solución de una ecuación cúbica). En el caso de la docente A, pareciera que la construcción de la recta numérica no resulta ser un aspecto primordial en la enseñanza de los números reales, siendo la aproximación el procedimiento utilizado para su representación geométrica. La completitud del campo numérico en cuestión y la continuidad de la recta solo son mencionadas por la docente C, aspectos primordiales que son ignorados por las otras docentes en la construcción de la recta numérica.

**Número real como soluciones posibles o no posibles de ecuaciones algebraicas.** La distinción entre números racionales/irracionales queda clara para todas las docentes, no así la distinción entre número algebraico y transcendente. Se presenta esta concepción en la docente B y, con mayor claridad, en la docente C. A pesar de mencionar al número $\pi$

como un número que no puede ser raíz de un polinomio a coeficientes racionales, las justificaciones no aparecen asociadas al célebre problema de la cuadratura del círculo, que tiene respuesta definitiva cuando se demuestra que el número $\pi$ es trascendente. Los problemas clásicos de la geometría griega no aparecen como referencia en la construcción de los números reales y en su ubicación en la recta numérica. Aunque la docente B menciona la factorización de polinomios para argumentar que $\pi$ es trascendente (sin reconocer esta clasificación), no termina de concretar su idea y puede notarse que no se ha planteado esta situación previamente (al menos significativamente como para reconstruir ese conocimiento).

**Número real como límite de una sucesión o resultado de una serie.** La idea de número real como límite de una sucesión o como resultado de una serie no aparece en forma concreta y sólida en ninguna de las docentes. La docente B menciona como aspecto esencial a enseñar del número real el tema de la "infinitud", aunque no ahonda demasiado en esta característica para saber a qué se refiere. Es la única de las docentes que reconoce un conflicto en ella misma acerca de la igualdad entre $0,\hat{9}$ y 1. Relaciona el proceso de acercarse a 1 tanto como se quiera, pero le cuesta asimilar el resultado de que en el límite es igual a 1. A diferencia de ella, las docentes A y C no entran en este conflicto dado que reconocen la igualdad realizando el pasaje de decimal a fracción. El hecho de que las docentes desconozcan (o no recuerden) el procedimiento por el cual se puede obtener una aproximación del número $e$, o del número $e^{\sqrt{2}}$ (excepto la docente C, que intenta dar una justificación en el momento a partir de un polinomio de Taylor), indica que no ha sido una inquietud que promuevan en la enseñanza del número real (a pesar de identificar al número $e$ como uno de los primeros ejemplos de número irracional). Se evidencia que las docentes no tienen presente la definición de número real como la clase de equivalencia de una sucesión de racionales que se aproxima a dicho número (en coherencia con lo que han respondido que recuerdan acerca de su formación ya que no ha sido mencionado el estudio de teorías constructivas del número real). Esto podría obstaculizar la reconstrucción de este concepto en sus clases.

**Número real como cortadura de Dedekind.** La existencia de la $\sqrt[3]{2}$ no es cuestionada por ninguna de las docentes, a pesar de pedir en la consigna las razones de su existencia. Las docentes no perciben las complicaciones presentes a la hora de fundamentar la existencia de los números irracionales y, en consecuencia, de los números reales. Las ideas de Dedekind son sutiles a la hora de buscar la esencia de la continuidad, al decir que si pueden separarse los puntos de una recta en dos clases, tales que cada punto de la primera clase se encuentra a la izquierda de cada uno de los puntos de la segunda clase, esto determina la existencia de un único punto que produce tal división. La docente C menciona que con los racionales no puede completarse la recta pero, ¿cómo se puede asegurar que aquellos puntos "libres" en la recta se corresponden con un irracional? En la consigna se presenta el caso de la $\sqrt[3]{2}$ dado que no es construible con métodos euclídeos (no puede construirse con regla y compás un segmento de tal medida) y, por tal razón, las docentes no pudieron previamente localizarlo en la recta. La respuesta se encuentra en que, si se pide la continuidad de la recta como axioma, la existencia de tal punto asegura la existencia de un único valor $x$ tal que $x^3 > 2$ y $x^3 < 2$ (que llamamos $\sqrt[3]{2}$ y que separa a los racionales en dos clases). Las docentes, al asegurar y no cuestionar la existencia de números irracionales y/o de reales, no terminan de comprender a qué apunta la consigna y pasan por alto esta cuestión que cala profundo en las bases epistemológicas de la matemática. Se trata de la ontología del número real, que es ignorada por las docentes por solo conocer o adherir a una versión simplificada y desvirtuada del concepto.

**Número real como elemento de un cuerpo ordenado y completo.** A pesar de que la docente C recuerda haber estudiado, durante su formación como docente, la definición axiomática del cuerpo de los números reales, no reconoce a la completitud como un axioma (entendida en este contexto como la condición de que todo conjunto no vacío de números reales acotado superiormente posea supremo). La docente B, a pesar de mencionar la continuidad de la recta y la densidad de los números reales en otras preguntas de las entrevistas no relaciona estas ideas con la completitud de $\mathbb{R}$. Al utilizar el argumento de que $\sqrt[3]{2}$ es irracional, y por tal razón no sería el supremo del conjunto $A$ en el campo de los números racionales, se evidencia que las docentes no poseen otras herramientas conceptuales para justificar la afirmación (como el hecho de que la completitud es lo que diferencia el conjunto de los números racionales de los reales). La docente B en sus clases y en la primera entrevista menciona la propiedad de densidad como de importancia para el estudio de los números reales. Sin embargo, la densidad es una propiedad que interesa en el campo de los números racionales (la imagen isomorfa de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ es denso en $\mathbb{R}$, con la topología usual en $\mathbb{R}$). No queda claro si diferencia estas dos condiciones, y si comprende que la completitud tiene relación con la determinación del supremo de un conjunto acotado superiormente.

**Número real como elemento de un conjunto proveniente de la unión de racionales e irracionales.** Se vuelve a confirmar que todas las docentes no conciben una definición de número real separada de la de número racional o irracional, argumentando que tanto 0,25 y $\pi$ son números reales por pertenecer el primero a $\mathbb{Q}$ y el segundo a $\mathbb{I}$ (y estos conjuntos estar incluidos en $\mathbb{R}$). La docente C es la única que comienza a preguntarse por qué $\pi$ es un número irracional, dado que no conoce (o no recuerda) cómo obtener su desarrollo decimal y cómo demostrar que tiene infinitas cifras decimales no periódicas. Llama la atención que, recién en este punto y a raíz de la pregunta, ponga en cuestionamiento esta idea. Queda claro que las docentes conocen este hecho pero no pueden reconstruirlo para argumentarlo (repiten una afirmación que saben y consideran validada por otros -los matemáticos- pero no se construye). Pareciera, entonces, que el número real posee múltiples dificultades para ser construido (o reconstruido) en el aula y tiene relación con la poca profundidad con la que se conoce este concepto. Las teorías formales evidentemente pueden ser malinterpretadas si no se reconocen en ellas los conflictos de su construcción y se simplifican al punto de producir deformaciones, desviándose de lo sustancial del saber.

## *5.2 DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS*

En este apartado, se propone comparar y contrastar (destacando similitudes y diferencias) los resultados previamente analizados de esta investigación con aquellos alcanzados por otros autores que han investigado temáticas análogas y que han sido explicitados dentro de la sección 2.2 de este escrito, ya sea en el estado del arte o dentro de la TSME que enmarca esta investigación. Esta discusión en torno al caso bajo estudio, posibilitará posteriormente alcanzar el planteamiento de ciertos enunciados a modo de conclusión.

Como se ha visto en el recorrido histórico-epistemológico del número real, aceptar la existencia de los números reales fue una situación que ofreció mucha resistencia en los matemáticos hasta finales del siglo XIX e incluso hasta principios del siglo XX, hasta lograr la formalización del concepto. Entre otras razones, esto se debió a la no comprensión de la convergencia de una sucesión de números, correspondiente a las cifras decimales que se agregan infinitamente para construir un número real (en especial cuando se observa la ausencia de período). La cuestión de trasfondo se traduce en pasar de una concepción de infinito potencial (como proceso) a la concepción de infinito actual (como objeto), aspecto que resulta primordial para comprender la naturaleza del número real. Es que en este punto, se vio la necesidad de construir una definición de número real, que resolviera el problema del infinito, que termina derivando en el problema de la completitud del campo numérico (y este, a su vez, en el problema de la continuidad de la recta, por lo menos desde el punto de vista de Dedekind). Se podría pensar que la aceptación del infinito actual se presenta como una dificultad a la hora de comprender el concepto de número real, íntimamente relacionado con el obstáculo epistemológico que se les presentó a los matemáticos. Respecto a esto, Branchetti (2017) afirma que el docente participante de su investigación mostró dudas epistemológicas sobre la existencia de los números irracionales, a pesar de haber dado cuenta de sus conocimientos acerca de los aspectos históricos y formales del número real. En esta investigación, se ha podido observar que las docentes A, B y C no muestran nunca dudas sobre su existencia pero, en este caso, debido al hecho de que no son capaces de reconstruir el concepto de número real, y en consecuencia, lo consideran como un conocimiento preexistente, acabado y continuo. Sin embargo, la docente B muestra asombro respecto al resultado de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 1$. Aunque no lo explicita en estos términos, pareciera que no concibe la idea de infinito actual, aunque sí la de infinito potencial (al agregar cada vez más nueves en los decimales, el número se acerca cada vez más a 1). A pesar de que menciona haber estudiado la cuestión de la infinitud de los números reales durante su formación como docente, no parece tener en claro esta distinción (el resto de las docentes ni siquiera menciona entrar en conflicto con esta idea). Por otro lado, existen varias investigaciones que plantean la dificultad para la comprensión del infinito en el aprendizaje del número real en alumnos de escuela secundaria o de nivel universitario. Fong et al. (2020), da cuenta que la gran mayoría de los alumnos de Matemática encuestados (que se forman como profesores), tienen dificultades para concebir el infinito actual por considerar la subdivisión de segmentos como un proceso infinito que nunca termina (en lugar de pensar que en algún momento la subdivisión culmina en un punto específico). Cifuentes et al. (2012), afirma que los alumnos encuestados no aceptan el infinito actual, por ejemplo, al afirmar que $0{,}999\ldots$ se acerca mucho a 1 pero no es necesariamente 1. Monaghan (1988), también observa que la visión principal de infinito que poseen los estudiantes es la de infinito potencial y, por tal razón, considera que los docentes deben explorar los conflictos que surgen de esta concepción al enseñar número real. Se podría decir, a la luz de los resultados de esta investigación, que las docentes de este estudio no han logrado problematizar la cuestión de la convergencia de sucesiones o series que definen números reales (y, por consiguiente, la cuestión del infinito), siendo esta una concepción no asentada del todo en las mismas. Pareciera que no existe una visión integral de estos conocimientos, al no reconocer la definición constructiva de número real de Cantor-Méray o Weierstrass. Esto puede observarse cuando las docentes no logran dar una explicación de la aproximación decimal que devuelve la calculadora del número $e$ o $e^{\sqrt{2}}$; excepto la docente C que piensa en la construcción de un polinomio de Taylor de la función $f(x) = e^x$, aunque se evidencia que no es una cuestión que haya sido pensada con anterioridad. Lo mismo ocurre, cuando se pide dar una explicación de por qué $\pi$ es un número irracional, siendo la docente C la única que entra en conflicto al querer dar una argumentación sustentada en la construcción de la representación decimal de este número (el resto de las docentes lo da por hecho).

Como se ha visto en los resultados, en las clases observadas no se ahondan en los problemas que se plantean en la construcción de la recta numérica, el querer localizar números reales en la misma (cuestión que, como ya se ha visto, cala profundo en la construcción de este concepto y que se esperaría encontrar al momento de desarrollarlo). La cuestión no es abordada en sus clases por la docente C y sí lo hacen las docentes A y B (aunque sea de manera algo superficial). En relación a esta cuestión, Ferrero y Montoro (2011) plantean que los docentes encuestados en su investigación reconocen la utilidad de la recta para visualizar y comprender la relación de orden de los números reales, pero que algunos de ellos afirman que no es posible reconocer los distintos tipos de números por marcar irracionales con su aproximación racional. En este sentido, se encuentran semejanzas con lo analizado previamente: en las clases observadas, no ha resultado habitual trabajar la localización de números reales de forma exacta, a partir de la construcción de segmentos con métodos euclidianos (cuando ello sea posible), para construir la idea inicial de recta real o de número irracional, a pesar de que sus orígenes se encuentren en la acción de medir segmentos. En las entrevistas es claro entrever que no distinguen cuáles son los segmentos que pueden construirse con regla no graduada y compás (por ejemplo, al querer localizar $\sqrt[3]{2}$ no reconocen que no es posible por ser solución de una ecuación cúbica), tampoco se menciona la relación de conmensurabilidad e inconmensurabilidad entre segmentos (al querer medir uno dado, establecido otro como unidad). Rizos y Adam (2022), mencionan que en su estudio la estrategia más comúnmente utilizada por los alumnos para representar números en la recta fue la conversión a número decimal, luego el redondeo y, por último, su ubicación en la recta. Este es el procedimiento que menciona la docente A que utilizan sus alumnos en sus clases. Este accionar de los alumnos pareciera ser inducido por sus docentes puesto que la recta actúa como sostén para representar aproximadamente algún conjunto numérico (por ejemplo, un intervalo) o para visualizar la relación de orden entre dos o más números. No se profundiza en cuestiones más complejas, como aquellas de las que emerge la necesidad de la axiomatización de la continuidad de la recta o en la completitud del campo numérico (como lo determina Dedekind, Cantor o Hilbert en sus teorías formales) al presentar y desarrollar el concepto de número real (aunque sea de un modo informal). Bergé (2010), plantea que solo unos pocos estudiantes participantes de su investigación, logran ver a la completitud como una herramienta para definir nuevos elementos y que no distinguen qué problemas resuelve esta propiedad de los números reales. La autora sostiene que la resolución de ejercicios que involucran supremos o sucesiones de Cauchy no necesariamente logra la comprensión de la completitud por parte de los alumnos. En este sentido, quizás deba considerarse el aspecto geométrico del número en complemento con el analítico. Robinet (1986), encuentra en su investigación que la mayoría de los alumnos de primer año de la universidad encuestados tienen una concepción de la recta atomista, es decir, consideran a la recta como puntos alineados en fila (uno atrás de otro). Afirma que la línea recta no genera intuitivamente en todos los estudiantes una buena representación de $\mathbb{R}$ y, por lo tanto, deben construirse y trabajarse sus propiedades. Este resultado hallado por Robinet (1986), sugiere pensar que los alumnos no logran superar la visión pitagórica de número (que es la de número natural) y que una enseñanza carente de todo aspecto geométrico del número, que presenta una desconexión entre las propiedades de los números y los problemas geométricos que hicieron emerger tales propiedades, obstaculiza aún más este pasaje de una concepción de lo discreto a una concepción del continuo, que caracteriza al número real. En el caso de los pitagóricos, la comparación de segmentos inconmensurables fue la situación que rompió con la concepción atomista de número.

En este trabajo puede apreciarse que la construcción del concepto de número real es compleja y no está exenta de incertidumbres. Sin embargo, estos conocimientos deberían ser abordados de manera profunda en la formación integral de los profesores de matemática puesto que es el primer paso para lograr un rediseño del discurso numérico escolar. De otra forma, predomina la enseñanza de teorías simplificadas del número real y carente de un verdadero significado para el alumno (y por qué no para el docente). Como ya se ha visto en los resultados, las docentes realizan una presentación de este concepto a partir de una interpretación literal de unión e inclusión de conjuntos ($\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$), sin una verdadera construcción del número irracional (o mejor dicho, real). Esta concepción está tan internalizada en las docentes, que consideran que se está estudiando el número real al momento de estudiar números naturales, por ejemplo (por la contención $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$). Se diluye la verdadera naturaleza de cada tipo de número, los usos a los cuales responde, y pasan a ser todos partes de un mismo ente que no se define en sí mismo, sino que se compone de diferentes elementos (naturales, enteros, racionales e irracionales). En consonancia con los autores seguidos en el marco conceptual, se podría decir que: “esto nos impide tener una visión amplia de la estructura del saber, es decir, ¿cuáles son las situaciones que hacen que se construya dicho saber? ¿Por qué ese conocimiento y no otro? ¿Cuáles son sus usos?” (Soto & Cantoral, 2014, p. 1539). De ello podría provenir que las docentes en ejercicio observadas, atravesados por el dME y, adhiriendo a él, se encuentran llevando a cabo prácticas docentes que derivan en la enseñanza de objetos y procesos matemáticos atomizados, que “se manifiesta en una matemática escolar carente de argumentaciones y significados que provengan de la actividad humana” (Soto & Cantoral, 2014, p. 1539). Los conocimientos no presentan un carácter funcional puesto que no se reconocen a las prácticas sociales como la base de su creación (Cantoral et al., 2015a). Relacionado con esta cuestión, Mendoza et al. (2018) realizan un cuestionario a estudiantes ingresantes de diferentes carreras universitarias, cuyo objetivo es identificar, de una serie de números dados, aquellos que son reales y/o pertenecientes a alguno de los conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. En sus resultados, identifican errores que cometen los alumnos inducidos por prácticas escolares habituales. Por ejemplo, al visualizar en la calculadora que las cifras decimales de un cociente de enteros cubren toda la pantalla y no se observa período alguno concluyen que se trata de un número irracional. O al identificar en su mayoría al número $3,\hat{9}$ como número real, pero la mitad de ellos como número racional y poco más que la décima parte de los encuestados como natural o entero. Los autores atribuyen este resultado, al hecho de que los alumnos poseen un conocimiento memorístico del algoritmo que permite obtener este número como fracción y no pueden usarlo cuando lo requieren (sumado a que el período, en este caso, es 9). Al igual que los resultados encontrados en esta investigación, se observa que la forma de validar que un número es irracional se lleva a cabo con la calculadora obteniendo la aproximación decimal del número. No solo que esta validación es incorrecta, sino que induce en los alumnos errores conceptuales que resultan luego difíciles de revertir, y no se presentan otras alternativas de validación con la cual contrastar estos resultados. Con respecto al reconocimiento del número $3,\hat{9}$ como número racional/entero/natural, los resultados se demuestran coherentes con lo que se ha analizado en este estudio puesto que se espera de la simple inclusión de conjuntos (mal entendida) una clasificación directa. Se oculta el hecho de que la cuestión es más compleja de lo que parece. Un número natural sirve para contar (lo cual no se visualiza en el número $3,\hat{9}$, cuya naturaleza por definición es distinta del número $4$), un número entero posee signo definido ($3,\hat{9}$ es diferente, por definición, del número $+4$) y, por último, un número racional es una razón entre dos números enteros ($3,\hat{9}$ es diferente, por definición, de $\frac{36}{9}$). Lo que no se explicita es la correspondencia biunívoca entre subconjuntos de los números reales y $\mathbb{N}/\mathbb{Z}/\mathbb{Q}$, y que cada uno de ellos responde a fines distintos. El ojo del problema se pone en el pasaje de un tipo de representación a otro, en vez de lo conceptual que emerge de las prácticas de referencia. Quizás el llamar “número” a todos por igual, induce e internaliza esta concepción.

### *5.3 CONCLUSIONES*

Antes de comenzar con este apartado, se señala aquí que las conclusiones que se exponen a continuación, como toda conclusión de cualquier tesis de la naturaleza descripta inicialmente en este escrito, deben considerarse provisorias pero no por ello menos relevantes a los efectos de futuros estudios que podrían tomarlas como hipótesis a validar o refutar. Las mismas refieren a los interrogantes iniciales que han motivado esta investigación y se desprenden de los resultados reportados, analizados y discutidos previamente. No se pretende con ellas realizar generalizaciones de ningún tipo y, por tal razón, no suponen respuestas definitivas -aunque sí una aproximación valiosa y adecuada- a la problemática planteada.

Uno de los objetivos de este estudio es reconocer las características específicas del discurso Matemático Escolar en torno al concepto de número real (discurso numérico escolar). En el marco conceptual se han expuesto las características generales del dME, a continuación se presentan aquellas específicas del discurso numérico escolar que han sido reconocidas en esta investigación. Se ha podido distinguir:

- Su *carácter hegemónico, que privilegia un solo tipo de significados, argumentaciones y procedimientos, en detrimento de otros.* Como se ha visto en el análisis de resultados, el significado que se impone de número real es el de ser un número racional o un número irracional. Es decir, a partir de la clasificación de un número en racional o irracional se le atribuye la propiedad de ser un número real, siendo concebido como un objeto preexistente. Las docentes A, B y C no realizan una verdadera construcción del número irracional, y por ende de número real, en las clases observadas, puesto que es presentado como resultado de operaciones que se consideran factibles de realizar solo por visualizar su resultado en la calculadora (por ejemplo, $\sqrt{2}$). La supuesta ausencia de período (porque no se observa en la pantalla de la calculadora) justifica la existencia de números irracionales, que son definidos como los números con infinitas cifras decimales no periódicas. Nunca se cuestiona de dónde se obtiene el resultado "mágico" que brinda la calculadora, ni la existencia de las infinitas cifras decimales (dado que la calculadora lo trunca). En este sentido es que puede verse al número real como un conocimiento acabado y continuo, puesto que su comprensión se reduce a la memorización del concepto (es real si puede clasificarse como racional o irracional, y esta clasificación se reduce a observar su desarrollo decimal en la calculadora e identificar la ausencia o no de período). No se ha considerado que existen diversas formas de construir el concepto de número real, que no es única. Su abordaje en cambio, puede responder a necesidades específicas, resignificándose progresivamente para constituirse en el complejo conocimiento que realmente es, derivándose del trabajo con magnitudes inconmensurables, o de sucesiones que se construyen a partir de la aproximación al número deseado por definición (en el caso de $\sqrt{2}$, sería un número $x$ tal que $x^2 = 2$, por ejemplo). En cuanto a los procedimientos, prima lo algorítmico más que lo conceptual. En general, son desarrollados mediante normas inducidas por las docentes, que imponen una forma de trabajo específica, fundamentados en propiedades que son dadas de antemano sin demostración. En su lugar podría propiciarse el espacio para el intercambio de ideas y su discusión acerca de cómo proceder o cómo argumentar en situaciones problemáticas que requieran el uso del número real, como la construcción o la medición de segmentos, el cálculo de distancias, etc.
- Su *carácter utilitario, que antepone la utilidad del conocimiento matemático frente a cualquiera de sus restantes cualidades.* En el caso del número real, como se ha dicho previamente en el análisis de los resultados, se observa mayor predominio del aspecto aritmético del número, en detrimento del geométrico, al presentar y desarrollar el concepto en las unidades analizadas. Las docentes de este estudio invierten mucho tiempo y esfuerzo en que sus alumnos puedan operar de forma exitosa a través de la aplicación de propiedades y procedimientos dados. También esperan que puedan reconocer diferentes representaciones del número e identificarlo

como uno solo (por ejemplo, $1,\hat{9} = \frac{4}{2} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = 2$), ignorando que conceptualmente se trata de números distintos. Podría decirse que la mayoría de los contextos en donde se presenta el número real es de tipo aritmético, en donde deben seguirse reglas estáticas, algorítmicas y mecánicas que permiten resolver actividades similares a las dadas. Pareciera que el interés del estudio del número real radica en su operatoria y en el seguir de forma adecuada las normas que la rigen, pues resulta útil para resolver ecuaciones/inecuaciones, expresar un número de otra manera o simplemente hacer una cuenta. La completitud del campo numérico no es trabajada por las docentes, solo es presentada como propiedad por la docente B, a pesar de ser una de las características más importantes del conjunto de números reales y que lo diferencia de los restantes conjuntos numéricos (este aspecto se considera fuertemente ligado al concepto, razón por la cual se esperaría que se aborde -al menos desde una perspectiva intuitiva- al momento de presentarlo y desarrollarlo). Esta visión acotada del concepto impide resignificarlo en otros contextos: por ejemplo (y por el mismo motivo recién argumentado), en la problemática de localizar ciertos números en la recta numérica para así posibilitar un tratamiento de carácter funcional.

- La *atomización de los conceptos, que concibe al saber centrado en objetos, sin considerar los aspectos sociales, contextuales y culturales que lo constituyen.* Como se ha visto en los resultados, el discurso numérico escolar se centra en objetos como número racional/irracional, ecuaciones, inecuaciones, radicales, etc. y, por lo tanto, su significado no proviene de prácticas que se gestan en la actividad humana. Como se ha dicho en el análisis de las clases observadas, las propiedades y los procedimientos explicados deben ser aprendidos de memoria una vez presentados por las docentes, en vez de emerger del quehacer matemático contextualizado. Esto impide tener una visión amplia de la estructura del número real, que contemple las situaciones que permitan su construcción. En el recorrido histórico-epistemológico, que se ha presentado en el marco conceptual de esta tesis, se ha podido reconocer que los orígenes del número irracional se gestan en la práctica de medir, al comparar segmentos que son inconmensurables. Sin embargo, la medición de segmentos nunca se presenta como un problema a resolver en las clases analizadas. Pareciera existir una percepción en las docentes de que estos conocimientos pertenecen al campo de la geometría y que el estudio del número real debería enfocarse en el campo de la aritmética, como si no hubiera conexión entre ellos. Esto podría ser consecuencia de la atomización de los conocimientos dentro de la matemática escolar.
- La *falta de marcos de referencia, que soslaya el hecho de que la matemática responde a prácticas de referencia, que la obligan a resignificarla.* Las docentes de este estudio mencionan brevemente algunos usos del número real, pero quedando solo en el plano de lo anecdótico. Los siguientes son ejemplos de algunas de estas situaciones, observadas en las clases de la docente B o la docente C: el hecho de que los científicos utilizan la notación científica por la conveniencia de escribir números grandes o chicos en forma reducida, el uso que tiene el número $\pi$ para calcular la longitud de una circunferencia, o la relación que tiene el número de oro con algunas

medidas del cuerpo humano. No se aborda en los casos estudiados, previo al desarrollo del concepto, la problemática que emerge de, por ejemplo, querer realizar cálculos con números muy grandes o muy pequeños; las complicaciones de querer medir la longitud de una circunferencia y hallar una fórmula; o el descubrir las proporciones que esconde el cuerpo humano que hace que presente características comunes en cualquier persona, incluso cuando las contexturas son muy diferentes. Es decir, las docentes no han conectado al número real con la necesidad por la que se origina, que puede gestarse en otras ciencias o en otros contextos, y no necesariamente de la matemática pura. Puede decirse que en las dinámicas áulicas observadas, no se han apreciado las prácticas de referencia como generadoras del conocimiento.

En este estudio se ha podido reconocer una epistemología dominante del discurso numérico escolar: que impone significados (la de clasificar un número real en racional o en irracional, al observar su desarrollo decimal o parte de él); que prima lo aritmético por sobre lo geométrico o lo analítico; que entiende su utilidad en la operatoria del número y que soslaya otras características (como la de ser un campo completo); que sigue reglas estáticas, algorítmicas y memorísticas; que no reconoce prácticas como el medir como generadora del conocimiento.

Con respecto al objetivo de identificar las tareas que propone el profesor de matemática, para propiciar el uso del número real en el aula, se ha notado en las docentes que compone la muestra un mayor predominio de tareas que trabajan lo aritmético abordándolo desde un aspecto algorítmico, mecánico y memorístico. Este resultado tiene coherencia con el discurso numérico escolar descripto. En las tres docentes se ha identificado una mayor cantidad de tareas cuya función es la de operar con elementos del conjunto de los números reales, aplicando propiedades. En general, sus principales objetivos son resolver cálculos y realizar el pasaje de un tipo de representación a otro. En el caso de las docentes B y C, se plantean, además, tareas cuya función es la de comparar números reales (para resolver inecuaciones). Estas tareas se corresponden con la concepción de número real como elemento de un cuerpo ordenado y completo (aunque las docentes no lo pongan en estos términos, se opera aplicando propiedades que son dadas sin demostración, ni validación, y que norman el quehacer matemático para, por ejemplo, resolver ecuaciones/inecuaciones, operar con números en notación científica, aproximar un número irracional, entre otros). Sin embargo, a pesar de ser el dominio de lo aritmético el objetivo principal que tienen las docentes para sus alumnos, no se vuelven a definir las operaciones en el campo de los números reales y para la mayoría de las propiedades que se aplican pareciera que siguen rigiendo las mismas que eran válidas para los números racionales. Por otro lado, las docentes A y B proponen, aunque en menor medida, tareas cuya función es la representación de puntos en la recta numérica (al graficar el conjunto solución de una inecuación, por ejemplo). Se corresponde, en este caso, con una concepción de número real como puntos de una recta completa y continua. Solo la docente B, plantea la resolución de una tarea que podría relacionarse, sutilmente, con el análisis de convergencia de una serie (al solicitar observar a qué número entero es igual un número decimal periódico puro con período 9). Aunque no se ahonde demasiado al respecto se puede percibir la intención de la docente de que sus alumnos se percaten del acercamiento que existe entre $0{,}999\ldots$ y $1$ hasta el punto de ser lo mismo. La función y la forma de esta tarea se corresponde con la concepción de número real como límite de una sucesión o como resultado de una serie. Recordando que las docentes observadas -tal como ellas mismas lo manifiestan (ver sección 3.2.1)- presentan y desarrollan con profundidad, en las instituciones en las que trabajan, el concepto de número real, se observa en las secuencias didácticas analizadas que no se presentan tareas que propicien la medición, la construcción o la comparación de segmentos, ni que trabaje la continuidad de la recta o la completitud del campo numérico. Tampoco la convergencia de sucesiones de números racionales cuyo límite es un número irracional, aunque sea de forma intuitiva. No se construye la aproximación decimal cada vez más cercana al número $\pi$, al número $e$ o al número $\sqrt{2}$; a pesar de ser presentados por las docentes como primeros ejemplos de número irracional. Se esperaría que estos conocimientos emergieran, aunque sea sutilmente, de la construcción del concepto de número real, cimentando sus bases. Llama la atención que, a pesar de que la concepción conjuntista es la que predomina a la hora de conceptualizar el número real, ninguna de las docentes plantea tareas para trabajar en el aula la inclusión de conjuntos o la clasificación en racional/irracional de los números reales.

Por último, con respecto al objetivo principal de esta investigación, se describen las concepciones que poseen las profesoras que componen el estudio sobre los números reales desde las dos perspectivas analizadas:

- El *carácter cognitivo*, que refiere a los conocimientos del profesor en relación con el número real y su enseñanza que es atravesada por el dME. Las docentes de este caso consideran de importancia que sus alumnos sepan reconocer distintos tipos de números, con sus características y sus diferentes representaciones. No se pone el foco en la construcción de un nuevo concepto, el de número real, que emerge de situaciones donde puede ponerse en uso. Esto se debe al hecho de definir a $\mathbb{R}$ como unión de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$, siendo la concepción conjuntista la que predomina en sus respuestas. Esto puede verse en los contextos en donde consideran que puede utilizarse el número real o en los usos que pueden darle, puesto que sus respuestas refieren a otros conjuntos numéricos. Sin embargo, se justifica la respuesta mediante la contención de conjuntos: el contar es un uso del número natural, pero como los números naturales pertenecen al campo de los números reales se convierte también en un uso del número real, por ejemplo. Al optar por estrategias para enseñar el número real, predomina la imposición de significados, argumentos y procedimientos, cuestión que no es percibida como un problema que obstaculiza el aprendizaje de sus alumnos sino que se refuerza en una forma de enseñar que se conoce y que no cuestiona otras perspectivas para su abordaje. Sin embargo, las docentes reconocen formas de construir el número real o propiedades importantes del concepto que no se corresponden con lo desarrollado en sus clases (a pesar de ser las unidades observadas aquellas en las que las docentes mismas dicen abordar su estudio en profundidad): presentación de situaciones que requieran el uso de distintos números, en el caso de la docente A; el trabajo con magnitudes inconmensurables, mencionando como ejemplos el cálculo de la diagonal de un cuadrado o del número $\pi$ mostrando en dónde se originan, en el caso de la docente B; la completitud de la recta numérica, en el caso de la docente C. A pesar de que la continuidad de la recta y la completitud del campo numérico son mencionadas como características de los números reales por las docentes B y C, no fueron temas a trabajar en sus clases. Esto refuerza aún más la idea de la adherencia al discurso numérico escolar descripto anteriormente, que provoca actitudes no críticas hacia cómo se enseña el número real.

- El *carácter epistémico*, que refiere a la naturaleza compleja de los objetos matemáticos y de su funcionamiento. Los resultados sugieren que quizás posiblemente las docentes no hayan tenido suficientes oportunidades durante su formación y trayectoria profesional para problematizar aspectos primordiales del número real, ligados íntimamente a su construcción, como ser:
    - La comparación entre medidas conmensurables e inconmensurables: ninguna de las docentes desarrolla de forma sólida las técnicas para la medición de segmentos en forma euclídea, las docentes B y C consideran la utilización del compás pero solo para transportar segmentos. Solo en la docente C aparece la concepción de medidas inconmensurables ya que, aunque no lo pone en estos términos, es la única que considera la posibilidad de que una de las medidas sea un número irracional.
    - La localización de puntos en la recta y la construcción de la recta real: no queda clara para ninguna de las docentes bajo qué condiciones un segmento es construible con regla no gradada y compás. Por lo tanto, se confunde cuándo es posible localizar un número en la recta real en forma exacta. Esto ocurre cuando no encuentran formas de construir un segmento de medida $\sqrt[3]{2}$, ni logran dar argumentos que justifiquen por qué no es posible.
    - La distinción entre números algebraicos y trascendentes, y su relación con las condiciones para la construcción de segmentos en términos euclídeos: en relación a este punto y el anterior, se puede decir que las docentes no relacionan algunos números -y su posible construcción- con los problemas geométricos griegos (por ejemplo, la cuadratura del círculo y su relación con el número $\pi$ o la duplicación del cubo y el número $\sqrt[3]{2}$). La distinción entre número algebraico y trascendente queda clara solo en la docente C, aunque ninguna de las docentes -incluida esta última- puede argumentar las razones por las que el número $\pi$ no puede obtenerse como raíz de un polinomio a coeficientes racionales. Pareciera existir en ellas una desconexión de estas cuestiones con la geometría.
    - La convergencia de una serie o una sucesión para definir un número real: la concepción de número real como resultado de una serie o límite de una sucesión no aparece de manera sólida en ninguna de las docentes. Las docentes A y C no asumen la perspectiva de la convergencia para

argumentar la igualdad entre $0,\hat{9}$ y 1 (y la docente B plantea sus dudas en la explicación de esta igualdad). Ninguna de ellas tampoco lo hace para definir al número $e$, puesto que afirman desconocer de dónde surge su desarrollo decimal (a pesar de ser presentado como ejemplo de número irracional). Solo la docente C intenta establecer una aproximación de $e^{\sqrt{2}}$ definiendo un polinomio de Taylor, aunque es evidente por su respuesta espontánea que no fue un tema a analizar previamente (o al menos que tuviera presente).

- La completitud del campo numérico y la continuidad de la recta: las docentes no reconocen (o quizás no recuerdan) la completitud de los números reales como un axioma, y, por tal razón, las condiciones para determinar la existencia de números reales (concepción como elemento de un cuerpo o como cortadura de Dedekind). No cuestionan la existencia de $\sqrt[3]{2}$, por ejemplo, afirmando que se trata de un número irracional (a pesar de no haber podido construir previamente un segmento de tal medida y de localizar el punto que le corresponde en la recta numérica).

En las respuestas de las docentes no aparecen referencias históricas o argumentos sustentados en teorías formales, ya sean constructivas o axiomáticas del número real (sobre todo en la docente C que recuerda haber recibido instrucción formal del tema). Pareciera que las docentes no llegan a percibir las complicaciones presentes a la hora de definir a los números reales, quizás por adherir a una versión simplificada y deformada del concepto (la de unión de conjuntos, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$), siendo esta la concepción que predomina.

Como ya se ha visto, se presenta estrecha relación entre las concepciones identificadas, las tareas propuestas y la epistemología dominante reconocida en el discurso numérico escolar en las tres docentes que componen este caso.

## *5.4 REFLEXIONES FINALES*

Como ya se ha dicho en el marco conceptual adoptado en esta investigación, la TSME afirma que el dME actual obstaculiza la construcción social de los conocimientos en el aula. Según esta teoría, el rediseño del dME debe estar fundamentado en el carácter funcional del conocimiento, en racionalidades conceptuales diversas, en la validación de saberes relativa a los individuos y al grupo cultural, y a la pluralidad de marcos de referencia para la resignificación del saber (Cantoral et al, 2015a). Reconocer características específicas del discurso numérico escolar podría ser entonces un punto de partida para pensar algunos aspectos para su rediseño, que se centre en prácticas y no solo en objetos matemáticos. La historia y la epistemología del número real quizás puedan servir para identificar prácticas de referencia que hagan emerger este conocimiento. La medición de segmentos, la búsqueda del desarrollo decimal de un número o la localización de números en la recta real dado un punto sobre la misma se han mencionado como algunos ejemplos de situaciones que no se han propiciado en las clases analizadas. Podríamos preguntarnos, ¿qué aspectos debería contemplar el rediseño del discurso numérico escolar para lograr una construcción verdadera y significativa del número real en el aula? ¿Existirán otras características del discurso numérico escolar que no se han desprendido de este estudio de caso que impida u obstaculice su construcción?

Como se ha visto en el estado del arte, y se lo ha reconocido en el caso analizado, la visión limitada de número real que llega a las aulas dificulta su comprensión. Las tareas propuestas por las docentes de este estudio propician el aspecto aritmético (aunque algorítmico y mecánico) del número, por sobre lo conceptual (quizás más relacionado a lo geométrico o analítico). Podríamos preguntarnos, ¿qué otras tareas podrían diseñarse para propiciar el uso del número real en el aula que contribuyan a la comprensión de una definición? ¿Qué aspectos del número real deberían explorar dichas tareas para propiciar prácticas superadoras fundamentadas en el rediseño del dME?

En este estudio se han distinguido conocimientos que no han podido ser del todo reconstruidos por las docentes que constituyen el caso, puesto que sus respuestas no han podido ser fundamentadas sólidamente en algunas preguntas. Se ha observado una concepción de número real como conjunto muy arraigada, producto quizás de una simplificación de teorías formales que terminan siendo malinterpretadas. Pareciera que se ha naturalizado una única forma de definir al número real, que no incluye otras concepciones y que se limita a clasificar los números en racionales e irracionales. En este sentido, quizás sea necesario repensar la formación docente respecto al concepto de número real. Como ya se ha dicho, la construcción del concepto no es sencilla y requiere la conexión de distintas ramas de la matemática, pero también con su historia y su epistemología. En torno a esta cuestión, se presentan algunos cuestionamientos: ¿la presentación de teorías formales del número (o una simplificación de estas) dentro de la formación de profesores, es suficiente para que el docente pueda reconocer al concepto en sus distintas particularidades y enfoques? ¿Cómo podrían articularse los conocimientos, quizás atomizados en asignaturas curriculares, para que se logre comprender la estructura global del número real, desde su origen y su evolución? ¿Qué saberes de la formación docente podrían reforzarse para lograr una enseñanza del concepto desde su pluralidad epistemológica, en diferentes marcos de referencia, en conexión con otras ramas de la matemática y con otras ciencias?

En cuanto a los resultados obtenidos, hay algunos que han sido esperados y otros que -por el contrario- han sido imprevistos. Por ejemplo, era sospechado el predominio de la concepción conjuntista en las docentes, la desconexión de aspectos más formales del número real (como la clasificación en número algebraico o trascendente, su definición como cortadura de Dedekind o los axiomas de cuerpo) con las propuestas didácticas observadas para nivel secundario o el predominio en estas del aspecto aritmético del número por sobre el geométrico o el analítico. Sin embargo, durante las entrevistas han emergido otras concepciones -sobre todo en las docentes B y C- que no se esperaban por no haber sido detectadas en el desarrollo de sus clases. Es decir, que las docentes poseían otras concepciones diferentes de aquellas que pudieron observarse en sus propuestas didácticas. Es el caso, por ejemplo, de la concepción de número real como punto de una recta completa y continua: la docente C plantea con firmeza que la enseñanza del número real se justifica en la completitud de la recta numérica y, aunque no haya sido abordado en sus clases este tema, es algo que tiene claro; la docente B, por otro lado, hace referencia a la continuidad y la infinitud como aspectos importantes a enseñar de los números reales y, aunque los procesos infinitos no son trabajados en sus clases, es algo que menciona como primordial del número real. Se ha dejado en evidencia que las docentes poseen más concepciones de las que han demostrado tener en sus clases (al menos en las que fueron observadas). Podría sospecharse entonces la existencia de un aparente divorcio entre las concepciones que se poseen con lo que se propone para la enseñanza del número real, cuestionándose cuáles son las causas de ese divorcio. Pareciera que la matemática escolar responde a otras cuestiones, que quizás relega aspectos incorporados en la formación docente pero que no encuentran conexión con las tareas que se propician en el aula. O tal vez por ser considerado demasiado complejo para el nivel secundario, o porque el discurso numérico escolar obnubila la verdadera esencia de aquello que se enseña, la razón primordial de su existencia y de su uso. Es para destacar la buena predisposición que presentaron las docentes durante toda la investigación, sobre todo a la hora de responder a las entrevistas, mostrando compromiso al querer dar respuesta a cada una de las preguntas que se le hacían (a pesar de que en ocasiones no la encontraban rápidamente y requería de un esfuerzo por su parte para recordar cuestiones que hacía mucho tiempo que no estudiaban). Podría ser esta una de las razones por las cuales se obtuvieron resultados concretos y diferentes a los obtenidos en la observación de clases, hecho que justifica la utilización de diferentes elementos de recolección de datos.

La elaboración de esta tesis me ha permitido como autora, reflexionar tanto sobre mi propia formación como sobre las prácticas profesionales que habitan en las aulas. El estudio en profundidad del número real, no solo desde sus aspectos formales sino desde su historia y epistemología, me ha permitido interpelar mis concepciones previas e identificar otras nuevas ampliando mis conocimientos respecto a este concepto. Todo el proceso investigativo ha requerido de mucho esfuerzo, revisión y reflexión continua. Se ha convertido para mí en un proceso de crecimiento y aprendizaje paulatino. Queda aún mucho para seguir indagando en esta línea de investigación, siendo las preguntas que aquí se plantean un puntapié para emprender esta tarea en un futuro.

# Bibliografía


Abálsamo, R., Berio, A., Kotowski, C., Liberto, L., Mastucci, S., & Quirós, N. (2013). *Matemática 3, fotoactivados*. Puerto de Palos.

Abálsamo, R., Berio, A., Mastucci, S., Quirós, N., & De Rossi, F. (2017). *Activados 4 Matemática*. Puerto de Palos.

Aleksandrov, A., Kolmogorov, A., & Laurentiev, M. (2019). *La matemática. Su contenido, métodos y significado*. Alianza.

Anijovich, R. (2009). La observación: educar la mirada para significar la complejidad. En *Transitar la formación pedagógica: Dispositivos y estrategias* (pp. 59–83). https://pedagogiaydidacticaunsa.files.wordpress.com/2013/06/la-observacion-cap-3-anijovich.pdf

Apostol, T. (1976). *Análisis Matemático* (2da ed.). Reverté.

Apostol, T. (1984). *Calculus I. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al Álgebra lineal*. Reverté.

Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10*(2–3), 241–286.

Bell, A. (1986). Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros. *Enseñanza de las Ciencias*, *4*(3), 199–208.

Bergé, A. (2010). Students’ perceptions of the completeness property of the set of real numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *41*(2), 217–227. https://doi.org/10.1080/00207390903399638

Bergé, A., & Sessa, C. (2003). Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos: aportes a una investigación didáctica. *Relime*, *6*(3), 163–197.

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. Alianza.

Branchetti, L. (2017). High school teachers’ choices concerning the teaching of real numbers : a case study. *CERME*, *10*, 2009–2016.

Cantoral, R., Montiel, G., & Reyes-Gasperini, D. (2015a). Análisis del discurso matemático en los libros de texto desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *8*, 9–28.

Cantoral, R., Montiel, G., & Reyes Gasperini, D. (2015b). El programa socioepistemológico de investigación en matemática educativa: el caso de latinoamerica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(1), 5–17.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., & Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(3), 91–116.

Carrillo, J., & Rojas, N. (2013). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza de los números racionales. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *4*, 47–64.

Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado* (Aique (Ed.)).

Chorny, F., Salpeter, C., & Casares, O. (2015). *Matemática 4 ES Huellas*. Estrada.

Cifuentes, M., Ferrero, M., & Montoro, V. (2012). Una experiencia de taller sobre números reales con ingresantes a la Universidad. *En Veiga, Daniela Cecilia (Ed.), Actas de la IX Conferencia Argentina de Educación Matemática*, 54–61.

Collete, J. P. (1985a). *Historia de las Matemáticas I*. Siglo Veintiuno.

Collete, J. P. (1985b). *Historia de las Matemáticas II*. Siglo Veintiuno.

Cordero, F., & Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Relime*, *10*(1), 7–38.

Cordero, F., Gómez Osalde, K., Silva Crocci, H., & D, S. (2015). El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad. *Gedisa*.

Crespo Crespo, C. (2004). El concepto de continuidad y sus obstáculos epistemológicos. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.*, *17*, 39–44. http://funes.uniandes.edu.co/6239/1/CrespoElconceptoAlme2005.pdf

Díaz-Barriga Arceo, F., & Hernandez Rojas, G. (2005). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretacion constructivista* (2 ed.). http://creson.edu.mx/Bibliografia/Licenciatura en Educacion Primaria/Repositorio Planeacion educativa/diaz-barriga---estrategias-docentes-para-un-aprendizaje-significativo.pdf

Escolano, R., & Gairín, J. M. (2005). Modelos de medida para la enseñanza del número racional en educación primaria. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *1*, 17–35.

Ferrero, M., & Montoro, V. (2011). Consulta a profesores como medio de aproximación a las concepciones de los estudiantes acerca del número real. *Revista de Educación Matemática*, *26*, 1–14.

Fong, N. L., Pang, V., & Eng, C. K. (2020). Making sense of mathematics through perception, operation & reason: The case of divisibility of a segment. *ASM Science Journal*, *13*. https://doi.org/10.32802/ASMSCJ.2020.SM26(2.14)

Fregueiro, M. A. (2014). *Usos y resignificación del número real en la obra matemática de René Descartes* (Número November) [Instituto Politécnico Nacional]. https://doi.org/10.13140/RG.2.2.18903.47527

García O, G., Serrano, C., & Díaz, H. (1999). ¿Qué Hay Detrás De Las Dificultades Que Presenta La Comprensión Del Concepto De Número Real? *Rev. Tecné, Episteme y Didaxis*, *5*, 3–16. https://doi.org/10.17227/ted.num5-5676

Gordillo Alfonso, A., & Restrepo Becerra, J. (2012). Comprensión lectora y concepciones de estudiantes universitarios sobre enunciados matemáticos. *Zona Próxima*, *17*, 2–23.

Hernández Sampieri, R., Fernández-Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2006). *Metodología de la investigación* (4ta ed.). McGraw-Hill Interamericana.

Hernández, V. (2002). La geometría de Descartes. En *Apuntes de Historia de las Matemáticas* (Vol. 1, Número 1, pp. 32–45).

Jaller A., & Pérez, M. (2017). *Entre números III*. Santillana.

Klimovsky, G., & Boido, G. (2005). *Las desventuras del conocimiento matemático. Filosofía de la matemática: una introducción*. AZ.

Kline, M. (1972). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días I, II y III*. Alianza.

Kline, M. (1976). *El fracaso de la matemática moderna. Por qué Juanito no sabe sumar*.

Lehtinen, E., Merenluoto, K., & Kasanen, E. (1997). Conceptual change in mathematics: From rational to (un)real numbers. *European Journal of Psychology of Education*, *12*(2), 131–145. https://doi.org/10.1007/BF03173081

Lopez, A. (1969). *Matemática Moderna para 4° Año del Bachillerato Liceo de Señoritas y Escuelas de Comercio.* Stella.

Mendoza, M. E., Caputo, L. N., Bordón, P. D., & Porcel, E. A. (2018). Errores en la identificación de números reales cometidos por ingresantes universitarios. *Extensionismo, Innovación y Transferencia Tecnológica*, *4*, 24–30. https://doi.org/10.30972/eitt.402869

Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe, Argentina. (2011a). Diseño Curricular Educación Secundaria Modalidad Técnico-Profesional. Primer ciclo. https://campuseducativo.santafe.edu.ar/wp-content/uploads/1er.-ciclo-DPETPyT.pdf

Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe, Argentina. (2011b). Diseño Curricular Educación Secundaria Modalidad Técnico Profesional. Segundo ciclo. Anexo 3. Técnico en Producción Agropecuaria. https://campuseducativo.santafe.edu.ar/wp-content/uploads/17.-T%C3%A9cnico-en-Producci%C3%B3n-Agropecuaria-1.pdf

Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe, Argentina. (2011c). Diseño Curricular Educación Secundaria Modalidad Técnico Profesional. Segundo ciclo. Anexo 4. Técnico Maestro Mayor de Obras. https://campuseducativo.santafe.edu.ar/wp-content/uploads/8.-Maestro-Mayor-de-Obras-1.pdf

Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe, Argentina. (2011d). Diseño Curricular Educación Secundaria Modalidad Técnico Profesional. Segundo ciclo. Anexo 5. Técnico en Electrónica. https://campuseducativo.santafe.edu.ar/wp-content/uploads/10.-Técnico-en-Electrónica-1.pdf

Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe, Argentina. (2011e). Diseño

Curricular Educación Secundaria Modalidad Técnico Profesional. Segundo ciclo. Anexo 6. Técnico en Equipos e Instalaciones Electromecánicas. https://campuseducativo.santafe.edu.ar/wp-content/uploads/12.-T%C3%A9cnico-en-Equipos-e-Instalaciones-Electromec%C3%A1nicas-1.pdf

Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe, Argentina. (2011f). Diseño Curricular Educación Secundaria Modalidad Técnico Profesional. Segundo ciclo. Anexo 7. Técnico Químico. https://campuseducativo.santafe.edu.ar/wp-content/uploads/20.-Técnico-Químico-1.pdf

Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe, Argentina. (2011g). Diseño Curricular Educación Secundaria Modalidad Técnico Profesional. Segundo Ciclo. Anexo 8. Técnico en Industria de Procesos. https://campuseducativo.santafe.edu.ar/wp-content/uploads/14.-Técnico-en-Industria-de-Procesos-1.pdf

Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe, Argentina. (2011h). Diseño Curricular Educación Secundaria Modalidad Técnico Profesional. Segundo ciclo. Anexo 9. Técnico en Informática Profesional y Personal. https://campuseducativo.santafe.edu.ar/wp-content/uploads/15.-Técnico-en-Informática-Profesional-y-Personal-1.pdf

Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe, Argentina. (2011i). Diseño Curricular Educación Secundaria Modalidad Técnico Profesional. Segundo ciclo. Anexo 10. Técnico en administración y gestión. https://campuseducativo.santafe.edu.ar/wp-content/uploads/4.-T%C3%A9cnico-en-Administraci%C3%B3n-y-Gesti%C3%B3n.pdf

Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe, Argentina. (2011j). Diseño Curricular Educación Secundaria Modalidad Técnico Profesional. Segundo ciclo. Anexo 11. Técnico en automotores. https://campuseducativo.santafe.edu.ar/wp-content/uploads/5.-Técnico-en-Automotores-1.pdf

Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe, Argentina. (2013a). Diseño Curricular Educación Secundaria Modalidad Técnico Profesional. Segundo ciclo. Técnico Mecánico. https://campuseducativo.santafe.edu.ar/wp-content/uploads/19.-Técnico-Mecánico-1.pdf

Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe, Argentina. (2013b). Diseño Curricular Educación Secundaria Modalidad Técnico Profesional. Segundo ciclo. Técnico en Indumentaria y Productos de Confección Textil. https://campuseducativo.santafe.edu.ar/wp-content/uploads/13.-Técnico-en-Indumentaria-y-Productos-de-Confección-Textil-1.pdf

Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe, Argentina. (2013c). Diseño Curricular Educación Técnico Profesional. Segundo Ciclo. Técnico Electromecánico Motorista Naval. https://campuseducativo.santafe.edu.ar/wp-content/uploads/7.-Técnico-Electromecánico-Motorista-Naval-1.pdf

Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe, Argetina. (2013d). Diseño Curricular Educación Secundaria Modalidad Técnico Profesional. Segundo ciclo. Técnico en Diseño y Producción de Joyas. https://campuseducativo.santafe.edu.ar/wp-content/uploads/9.-Técnico-en-Diseño-y-Producción-de-Joyas-1.pdf

Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe, Argentina. (2014a). Diseño Curricular para Educación Secundaria Orientada. https://campuseducativo.santafe.edu.ar/wp-content/uploads/1.-Form-Gral.-1er.-Ciclo-Anexo-III-Resol-2630-14.pdf

Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe, Argentina. (2014b). Diseño Curricular Educación Secundaria Modalidad Técnico Profesional. Segundo ciclo. Técnico en Diseño y Comunicación Multimedial. https://campuseducativo.santafe.edu.ar/wp-content/uploads/6.-Técnico-en-Diseño-y-Comunicación-Multimedial-1.pdf

Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe, Argentina. (2014c). Diseño Curricular Educación Secundaria Modalidad Técnico Profesional. Segundo ciclo. Técnico en Energías Renovables. https://campuseducativo.santafe.edu.ar/wp-content/uploads/11.-Técnico-en-Energías-Renovables-1.pdf

Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe, Argentina. (2014d). Diseño Curricular Educación Secundaria Modalidad Técnico Profesional. Segundo ciclo. Técnico en Pesca y Acuicultura. https://campuseducativo.santafe.edu.ar/wp-content/uploads/16.-Técnico-en-Pesca-y-Acuicultura-Modificado-1.pdf

Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe, Argentina. (2014e). Diseño Curricular Educación Secundaria Modalidad Técnico Profesional. Segundo ciclo. Técnico en Tecnología de los Alimentos. https://campuseducativo.santafe.edu.ar/wp-content/uploads/18.-Técnico-en-Tecnología-de-los-Alimentos-1.pdf

Ministerio de Educación de la pcia. de Santa Fe. (2015). Diseño Curricular Profesorado de Eduación Secundaria en Matemática. Anexo VII. https://amsafe.org.ar/wp-content/uploads/2016_RM_2090-_15_ANEXO_VII_Matematica-1-1.pdf

Monaghan, J. (1988). Real mathematics. *The Mathematical Gazette*, *72*, 276–281. http://www.m-a.org.uk/jsp/index.jsp?lnk=620

Montoro, V. (2014). El número real y la recta. Comprensiones de estudiantes secundarios y universitarios. *VIII Congreso Iberoameticano de Educación Matemática. Libro de actas.*, 175–183.

Mora Mendieta, L., & Torres Díaz, J. (2004). *Concepciones de Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas sobre números reales (tesis de maestría)*. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Mota de Cabrera, C., & Villalobos, J. (2007). El Aspecto Socio-Cultural del pensamiento y del lenguaje: visión vygotskyana. *Educere*, *11*(38), 411–418.

Reina, L., Wilhelmi, M. R., Carranza, P., & Lasa, A. (2014). Construcción de la noción de número irracional en formación de profesores: conflictos semióticos y desafíos. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *27*, 629–637.

Rey Pastor, J., Calleja, P., & Trejo, C. (1969). *Análisis Matemático Volumen I*. Kapeluz.

Reyes Gasperini, D., & Cantoral, R. (2014). Socioepistemología y Empoderamiento: la profesionalización docente desde la problematización del saber matemático. *Bolema*, *28*(48), 360–382.

Rizos, I., & Adam, M. (2022). *Mathematics students' conceptions and reactions to questions concerning the nature of rational and irrational numbers*. *17*(3).

Robinet, J. (1986). Les Réels: quels modèles en ont les élèves? *Educational Studies in Mathematics*, *17*, 359–386.

Romero, C. (1996). Una investigación sobre los esquemas conceptuales del continuo. Ensayo de un cuestionario. *Enseñanza de las Ciencias*, *14*(1), 3–14.

Romero, I. (1995). *Introducción del número real en la escuela secundaria*. Universidad de Granada.

Romero, I., & Rico, L. (1996). Sobre la introducción del concepto de irracionalidad en enseñanza secundaria: el caso de rai2. *Educación Matemática*, *8*(2), 18–32.

Schoenfeld, A. H. (2010). *How we think: A theory of goal-oriented decision making and its educational applications* (1° ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203843000

Soto, D., & Cantoral, R. (2014). Discurso Matemático Escolar y Exclusión. Una Visión Socioepistemológica. *Bolema*, *28*(50), 1525–1544. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a25

Spivak, M. (1992). *Cálculo Infinitesimal* (2da ed.). Reverté.

Stake, R. (2013). Estudios de casos cualitativos. En *El campo de la investigación ciualitativa. Manual de investigación cualitativa Vol III.* (pp. 154–197). Gedisa.

Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2012). *Precálculo. Matemáticas para el cálculo* (6ta ed.). Cengage Learning.

Taylor, S. J., Bogdan, R., & Piatigorsky, J. (1984). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación. La búsqueda de significados.* (2da ed.). Paidós.

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. Universidad Nacional de Rosario. (2014a). Plan de Estudios Agrimensura.

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. Universidad Nacional de Rosario. (2014b). Plan de Estudios Ingeniería Industrial.

Facultad de Ciencias Bioquímicas y Farmacéuticas. Universidad Nacional de Rosario. (2018). Plan de Estudios Farmacia.

Vázquez de Tapia, N., Tapia de Bibiloni, A., & Tapia, C. (1983). *Matemática 4*. Ángel Estrada y Cía.

Verdún, N., & Caronia, S. (2010). La correspondencia número irracional-punto de la recta. De objeto de estudio a objeto a enseñar. *Actas de la VIII Conferencia Argentina de Educación Matemática*, 25–32.