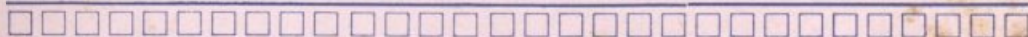


Revista del Centro Estudiantes de Ingeniería Rosario

ADOLFO P. ONDARÇUHU
ADMINISTRADOR

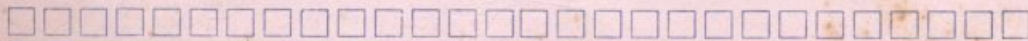
LUIS C. VERGA
DIRECTOR

LUIS MALAJOVICH
SECRETARIO REDACCIÓN

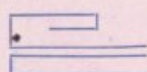
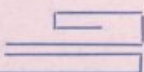


SUMARIO

Integración numérica aproximada.—Algunas ecuaciones de la termodinámica. — Cavilaciones geométricas.—Observaciones a fórmulas directamente calculables con logaritmos. — La interpolación de los resultados experimentales. — El Pandeo. — ¿Qué es la evolución? — Algunos datos técnicos de la Vacuum Oil. — Reorganización de la F. U. A.



COPIAS DE PLANOS

 TALLERES ELÉCTRICOS 

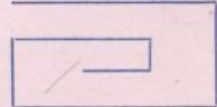
V. PALAU

CORDOBA 954

TELÉFONO 22962

PAPELES Y TELAS PARA DIBUJOS

Farmacia PUIGGARI

 S DOCTORES S 
 PUIGGARI 
 Y DANIERI

ABIERTA DÍA Y NOCHE

ANÁLISIS, ESTERILIZACIONES Y RECETAS



TELÉFONOS 22647 Y 22648

CORDOBA Esq. MITRE

ROSARIO

Fábrica Cerámica Alberdi

S. A

Fábricas en: NUEVO ALBERDI - Est. Sarratea F. C. C. A.
Est. JOSE C. PAZ (F. C. P.) Prov. Bs. Aires

Administración: Calle CORDOBA 856 - ROSARIO

**LOS MEJORES PRODUCTOS CERAMICOS DEL PAIS
DE CALIDAD INSUPERABLE Y ALTA RESISTENCIA**

Baldosas para piso de 20 x 20 cts.

Baldosas para techo de 20 x 20 cts.

Baldosas de 14 x 14 cts.

Baldosas exagonales de 14 cts.

Ladrillos prensados de 5 x 11 x 23 cts.

Ladrillos prensados de canto redondo

Ladrillos prensados cónicos para chimenea

Ladrillos prensados para veredas - 4 panes - 15 x 15 cts.

Ladrillos huecos 6 tubos

Ladrillos huecos 4 tubos

Ladrillos huecos machimbrados para tabique.

Tejas tipo Marsella

Tejas coloniales (medio caño)

Tejas escamas tipo Normando de 15 x 27

Tejuelas de prensa de 18 x 34

Ladrillos y Tejas esmaltadas en varios colores

GRANZA y POLVO de tejas y baldosas para caminos de jardín,
canchas de tennis, etc.

STOCK PERMANENTE

LOS PEDIDOS SE ATIENDEN EN EL DÍA

Banco El Hogar Argentino

Capital y Reservas \$ 60.000.000 m/n.

PRESTAMOS HIPOTECARIOS y para CONSTRUCCIONES

CAJA DE AHORROS

6 %

de interés

CUENTA CORRIENTE

2 %

de interés

PLAZO FIJO:

El mejor interés

ADMINISTRACION DE PROPIEDADES

POR CUENTA DE TERCEROS

Sucursal ROSARIO: Santa Fé esq. Gral. Mitre

FUERZA ELÉCTRICA



HAGA FUNCIONAR
SUS MAQUINARIAS
CON

**MOTORES
ELÉCTRICOS**

Y
ECONOMICE DINERO

La UNICA fuer
za que puede
satisfacer am
pliamente a un
industrial es la
energía e'éc
trica.

*

Atendemos pe
didos de mo
tores de cual
quier marca y po
tencia.

* *

Sociedad de Electricidad
de Rosario

ENRIQUE GIANNINI

Señor Constructor:

Una verdadera ventaja para sus construcciones le resultará la

Cal Viva Giannini

Premiada con medalla de oro en varias exposiciones

No tiene rivales entre sus similares

Haga hoy mismo un pequeño pedido de prueba,
será por su propio bien.

50% DE ECONOMÍA - NO DEJA DESPERDICIO

SALTA 1790

U. T. 4813

ROSARIO

FEDERACIÓN UNIVERSITARIA

Centro Estudiantes de Ingeniería

JUNTA DIRECTIVA

PERIODO 1928-1929

Secretario de Comunicaciones y Actas:	<i>LUIS MALAJOVICH</i>
Pro-Secretario de Comunicaciones y Actas:	<i>ANTONIO GONZALEZ</i>
Secretario de Relaciones Universitarias:	<i>LUIS C. VERGA</i>
Pro-Secretario de Relaciones Universitarias:	<i>MANUEL RUDROY</i>
Secretario de Hacienda:	<i>ADOLFO P. ONDARCUHU</i>
Pro-Secretario de Hacienda:	<i>ROBERTO GAYDOU</i>

Delegados:

1er. Año Civil: *José E. Guitart*. - 2o. Año Civil: *Angel Deltrozzo*. - 3er. Año Civil: *Marcelino Rins*. - 4o. Año: *Mario Fornari*. - 5o. Año: *Horacio Piñero*. - 6o. Año: *Marcelino Pignolo*. - 2o. Año Agrimensura: *Miguel Kleer*. - 3er. Año Agrimensura: *Alfredo Benvenuto*.

A la F. U. R.:

Ricardo Bilbao, Julio D. Albanese, Alfonso L. Calp, Antonio González y Luis C. Verga.

COMISIONES

Vigilancia:

Antonio González y Alfonso L. Calp.

Festejos y Deportes:

Lorenzo Z. Dotta, Edmundo D. Quaglia y Luis C. Verga.

Conferencias y Extensión Universitaria:

Dr. Alfredo Castellanos, Ingeniero Cortés Plá, Agrimensor César Torriglia (h.), Miguel Kleer y Adolfo P. Ondarcuhu.

Biblioteca y Cooperativa:

Pablo M. Baiocchi, Alfonso L. Calp, Ramón C. Chazarreta, Angel Deltrozzo y Luis Malajovich.

Comisión de Cuentas:

Pedro Bloj, Angel Deltrozzo y Alberto L. Romero.

Cumpliendo el socio con las obligaciones impuestas por los estatutos del Centro, recibirá gratuitamente la Revista. (Art. 13, inc. c).

Para ser admitido como socio activo se requiere ser alumno de la Facultad. (Art. 6).

Revista del Centro Estudiantes de Ingeniería Rosario

DIRECTOR	- LUIS C. VERGA
ADMINISTRADOR	- ADOLFO P. ONDARÇUHU
SECRET. REDAC.	- LUIS MALAJOVICH
REDACTORES	MARIO FORNARI
	PEDRO BLOJ
	ALFONSO L. CALP
	MIGUEL KLEER

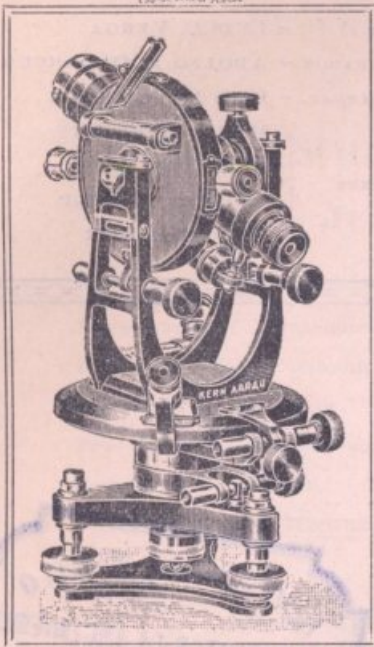
SUMARIO

7. DOS PALABRAS.
SECCION TECNICO - CIENTIFICA
7. JOSE BABINI — Integración numérica aproximada.
15. N. CAPLAN — Algunas ecuaciones de la termodinámica.
21. ARTURO SALLOVITZ — Cavilaciones geométricas.
23. SIMON RUBINSTEIN — Observaciones a fórmulas directamente calculables con logaritmos.
27. CARLOS DIEULEFAIT — La interpolación de los resultados experimentales.
31. JUAN C. VAN WYK — El pandeo.
51. ALFREDO CASTELLANOS — ¿Qué es la evolución?
59. VACUUM OIL COMPANY — Formación de espuma en el aceite de turbinas.

UNIVERSITARIAS

60. Reorganización de la F. U. Argentina.





TEODOLITOS y NIVELES

Existencia permanente de instrumentos de las mejores marcas

**ZEISS - KERN - BREITHAUPT
WILD - FENNEL**

Taller de precisión para composturas y rectificaciones

UTILES para Ingenieros, Agrimensores, Arquitectos, Dibujantes, a precios convenientes

Enrique Schellhas e Hijos

Casa fundada en 1887

San Martin 764

Rosario

Sociedad Petrolera Argentina

LORENZO BARALIS

Ingeniero Civil

**Crude-Oil, Nafta, Kerosene, Gas-Oil, Fuel-Oil,
Lubrificantes**

FABRICA

Camino a La Plata esq. Rio IV

U. T. 22, Avellaneda 7684

ADMINISTRACION

CANGALLO 439

U. T 33, Avenida 2461

DOS PALABRAS

DESPUES de una serie innumerable de dificultades hemos conseguido hacer aparecer la presente Revista merced a la ayuda decidida de algunos Profesores de la casa y profesionales, en su parte técnico-científica y del comercio de nuestra ciudad en su parte financiera.

Esperando poder continuar regularmente en la obra emprendida, dejamos a criterio del lector el presente número.

LA COMISION.

Sección Técnico - Científica

INTEGRACION NUMÉRICA APROXIMADA

Por el Ing. JOSÉ BABINI

La integración aproximada constituye uno de los capítulos más importantes de la Matemática Aplicada, y en su sentido restringido consiste en la determinación, mediante métodos de aproximación (numéricos, gráficos o mecánicos) de los valores de las integrales definidas de la forma:

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

cuando la $f(x)$ está dada por su expresión analítica, por un cuadro de valores, por una gráfica, etc.

El enunciado del problema ya indica su importancia y utilidad, por cuanto en la práctica frecuentemente se presentan casos en que, ya sea porque no se conoce la expresión analítica de $f(x)$ o porque ésta es tal que no puede efectuarse la integración por medios elementales o cuando la integración es penosa, no queda otro recurso que utilizar esos métodos de aproximación.

En esta nota nos proponemos dar una idea de conjunto de métodos numéricos de integración aproximada, más utilizada en la práctica.

La mayoría de los métodos numéricos que permiten el cálculo de una integral definida, consiste en expresar el *valor medio* de la función aproximadamente por una suma:

$$A = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n$$

donde las A_i son coeficientes numéricos y las y_i son los valores de la $f(x)$, correspondiente a determinados valores x_i de la variable.

El valor de la integral sería, pues:

$$I = \int_a^b f(x) dx = (b-a)(A_1 f_1 + A_2 f_2 + \dots + A_n f_n) + \alpha$$

siendo α el error cometido por la fórmula de cuadratura expresada por el primer término de la (1).

Si una fórmula de cuadratura da valores exactos cuando la función a integrar es racional entera a lo sumo de grado p se dice que esa fórmula tiene un grado de exactitud p .

Para obtener las fórmulas de cuadratura más comunes hagamos la sustitución de variable: $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} u$

es decir que tomamos como origen el punto medio del intervalo (ab) y adoptamos como unidad de la variable la mitad de ese intervalo.

Si suponemos ahora desarrollada la función en suma de potencia

$$y = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + \dots$$

tendremos integrando:

$$I = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 y du = (b-a) \left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \dots \right)$$

y los valores de A y α serán, indicando con $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ los valores correspondientes a: x_1, x_2, \dots, x_n

$$A = a_0 \sum_i A_i + a_1 \sum_i A_i u_i + a_2 \sum_i A_i u_i^2 + a_3 \sum_i A_i u_i^3 + \dots$$

$$\alpha = (b-a) \left[a_0 \left(1 - \sum_i A_i \right) - a_1 \sum_i A_i u_i + a_2 \left(\frac{1}{3} - \sum_i A_i u_i^2 \right) - a_3 \sum_i A_i u_i^3 + \dots \right]$$

Si deseamos que la fórmula (1) tenga un grado de exactitud $(m-1)$ en la expresión del error deberán anularse los coeficientes de $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}$ y verificarse, por lo tanto las m condiciones.

$$\begin{array}{ll} \sum_i A_i = 1 & \sum_i A_i u_i = 0 \\ \sum_i A_i u_i^2 = \frac{1}{3} & \sum_i A_i u_i^3 = 0 \\ \sum_i A_i u_i^4 = \frac{1}{5} & \sum_i A_i u_i^5 = 0 \\ \dots & \dots \end{array}$$

Si, para simplificar, suponemos que los n valores u_i de la variable se distribuyen simétricamente alrededor del origen, es decir si $u_i + v_{n-i-1} = 0$ las ecuaciones de la derecha del sistema (2) pueden sustituirse por un número igual de ecuaciones de la forma $A_i = A_{n-i-1}$

y para cualquier valor de r se tendrá: $\sum_i A_i u_i^{2r-1} = 0$

de ahí que, verificándose el sistema (2) con la indicación anterior, la expresión del error queda:

$$\text{para } m \text{ par} \quad \alpha = (b-a) \left[a_m \left(\frac{1}{m+1} - \sum_i A_i u_i^m \right) + a_{m+2} \left(\frac{1}{m+3} - \sum_i A_i u_i^{m+2} \right) + \dots \right]$$

$$\text{para } m \text{ impar} \quad \alpha = (b-a) \left[a_{m+1} \left(\frac{1}{m+2} - \sum_i A_i u_i^{m+1} \right) + a_{m+3} \left(\frac{1}{m+4} - \sum_i A_i u_i^{m+3} \right) + \dots \right]$$

Si ahora recordamos que por la fórmula de Mac-Laurin podemos expresar el valor de una función en un intervalo (a, b) por un polinomio de grado m ó $(m+1)$ cuyo coeficiente del término de mayor potencia es la de-

rivada de orden m ó $(m + 1)$ tomada en un punto intermedio del intervalo y dividida por el factorial de m ó $(m + 1)$, tendremos:

$$a_m = \frac{y_0^{(m)}}{m!} = \frac{(b-a)^m}{2^m m!} f^{(m)}(x_0)$$

$$a_{m+1} = \frac{y_0^{(m+1)}}{(m+1)!} = \frac{(b-a)^{m+1}}{2^{m+1} (m+1)!} f^{(m+1)}(x_0) \quad a < x_0 < b$$

e indicando, por último, con: $F_m = \frac{1}{m+1} - \sum_1^n A_i u_i^m$ para m par

$$F_m = \frac{1}{m+2} - \sum_1^n A_i u_i^{m+1} \quad \text{para } m \text{ impar}$$

llegamos a la siguiente expresión del error:

para m par $\alpha = \frac{(b-a)^{m+1}}{2^m m!} f^{(m)}(x_0) F_m$

$a < x_0 < b$

para m impar $\alpha = \frac{(b-a)^{m+2}}{2^{m+1} (m+1)!} f^{(m+1)}(x_0) F_m$

En resumen: verificándose las ecuaciones (2) con la condición $u_i + u_{n-i-1} = 0$ la fórmula (1) es una fórmula de cuadratura de grado de exactitud $(m-1)$ si m es par y grado de exactitud m si m es impar y con un error dado por la (3).

Consideremos ahora los distintos casos particulares que se pueden presentar según las incógnitas que se elijan.

Desde este punto de vista, podemos clasificar las fórmulas de cuadratura (1) en tres tipos:

- a) fórmulas en las que las abscisas son dadas;
- b) fórmulas en las que los coeficientes son dados, y
- c) fórmulas en las que no se dan ni las abscisas ni los coeficientes.

Para el establecimiento de las fórmulas del tipo (a) tenemos que calcular los n coeficientes A_i y, por lo tanto, para que ésto sea posible el sistema (2) debe tener n ecuaciones, es decir que $m = n$, y se obtendrán fórmulas con un grado de exactitud n ó $(n-1)$ según que n sea impar o par.

Las fórmulas de este tipo darán pues:

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \left(A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n \right) + \begin{cases} \frac{(b-a)^{n+1}}{2^n n!} f^{(n)}(x_0) F_n & n \text{ par} \\ \frac{(b-a)^{n+2}}{2^{n+1} (n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) F_n & n \text{ impar} \end{cases}$$

Según la manera de elegir las abscisas tenemos dos fórmulas de este tipo: la de *Newton-Cotes* y la de *Mac-Laurin*.

Para determinar los coeficientes A_i y F_n de la fórmula de *Newton-Cotes* se toman como abscisas dadas las de los puntos de división del intervalo (a, b) en $(n-1)$ partes, es decir: $u_i = \frac{2i-n-1}{n-1}$

Con estos valores de las u_i se resuelve el sistema (2) y con los valores obtenidos se calcula F_n .

Los valores de A_i y F_n están consignados en tablas, de donde sacamos los siguientes valores: $n = 2$; $A_1 = A_2 = \frac{1}{2}$ $F_2 = -\frac{2}{3}$

$$n = 3 ; A_1 = A_3 = \frac{1}{6} ; A_2 = \frac{2}{3} ; F_3 = -\frac{2}{15}$$

$$n = 4 ; A_1 = A_4 = \frac{1}{8} ; A_2 = A_3 = \frac{3}{8} ; F_4 = -\frac{8}{135}$$

En cambio en la fórmula de Mac-Laurin se toman como abscisas las de los puntos medios de los intervalos obtenidos al dividir el intervalo total ($a b$) en n partes y en este caso los valores u_i son: $u_i = \frac{2i - n - 1}{n}$

Los coeficientes de la fórmula de Mac-Laurin son:

$$n = 1 ; A_1 = 1 \quad F_1 = \frac{1}{3}$$

$$n = 2 ; A_1 = A_2 = \frac{1}{2} \quad F_2 = \frac{2}{9}$$

$$n = 3 ; A_1 = A_3 = \frac{3}{8} \quad A_2 = \frac{1}{4} \quad F_3 = \frac{7}{135} \text{ etc.}$$

En lo que respecta a las fórmulas de este tipo hay que observar que conviene utilizarlas para un número n de ordenadas impar, pues así se obtienen fórmulas de igual grado de exactitud que si se tomara una ordenada más. Además la fórmula de Mac-Laurin es algo más exacta que la de Newton-Cotes y sus resultados tienen errores de signo contrario a los de los obtenidos por la de Newton-Cotes.

Pero esta fórmula no se aplica generalmente, puesto que para obtener con ellas una buena exactitud hay que tomar n muy grande, lo que hace que intervengan numerosos coeficientes que complican la fórmula y hacen engorroso su cálculo.

Para evitar este inconveniente es preferible dividir el intervalo total de integración en intervalos más pequeños, y aplicar a cada uno de ellos las fórmulas anteriores tomando un número pequeño de ordenadas. En esta forma se han propuesto infinidad de fórmulas de cuadratura, de las cuales veremos únicamente las más importantes por su utilidad y aplicación: la de los rectángulos, de los trapecios, de Poncelet y Simpson.

Para eso suponemos dividido el intervalo de integración ($a b$) en $2n$ partes iguales y sean $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n} = b$ las abscisas de los puntos de división; e $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{2n-1}, y_{2n}$ las ordenadas correspondientes. Para facilitar la escritura indiquemos con:

$$P = y_0 + y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2} + y_{2n}$$

la suma de las ordenadas de índice par, con $I = y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}$ la de las ordenadas de índice impar y con

$$E_1 = \frac{y_0 + y_{2n}}{2} \quad E_2 = \frac{y_1 + y_{2n-1}}{2}$$

la semi suma de las ordenadas extremas y de las ordenadas segunda y penúltima.

Si con $h = \frac{b-a}{2n}$ indicamos el intervalo parcial, apliquemos a cada intervalo $2h$ la fórmula de Mac-Laurin para $n=1$ tendremos

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x) dx = 2hy_{2i} + \frac{h^3}{3} f''(\xi_i) = \frac{(b-a)}{n} y_{2i+1} + \frac{(b-a)^3}{24n^3} f''(\xi_i) \quad x_{2i} < \xi_i < x_{2i+2}$$

Sumando todas las integrales parciales

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} I + \frac{(b-a)^2}{24n^2} f''(x_0) \quad a < x_0 < b$$

donde
$$f''(x_0) = \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2) + \dots + f''(\xi_n)}{n}$$

La fórmula anterior es la llamada *fórmula de los rectángulos* cuya exactitud aumenta con n . Esa fórmula geoméricamente da el área de una serie de trapecios de bases las ordenadas extremos de los intervalos $2h$ y de lado no paralelo el segmento de tangente a la curva representativa de $f(x)$ en el punto de abscisa media de cada intervalo. De ahí que cuando la curva mantiene su curvatura en el intervalo total y $f''(x) < 0$ (concauidad hacia arriba) la fórmula da un valor por defecto mientras que si $f''(x_0) < 0$ (convexidad hacia arriba) dá un valor por exceso.

Si ahora aplicamos a cada intervalo $2h$ la fórmula de *Newton-Cotes* para $n = 2$ tendremos:

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x) dx = h(y_{2i} + y_{2i+2}) - \frac{2h^3}{3} f''(\xi_i) = \frac{(b-a)}{2n} (y_{2i} + y_{2i+2}) - \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi_i)$$

$x_{2i} < \xi_i < x_{2i+2}$

y sumando las integrales parciales:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} (P - E_1) - \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(x_0) \quad a < x_0 < b$$

que es la *fórmula de los trapecios*, de igual grado de exactitud que la anterior pero con error de signo contrario, y que geoméricamente da el área de una serie de trapecios, obtenidos tomando en lugar de la curva una poligonal formada por sus cuerdas.

Aprovechando las circunstancias de que las dos fórmulas anteriores dan errores de signo contrario, se puede obtener una fórmula más aproximada tomando su semi-suma.

Para eso apliquemos la fórmula de los trapecios al intervalo (x, x_{2n-1}) y sumémosle los trapecios extremos, obteniendo, si para concretar suponemos $f''(x_0) > 0$

$$\int_a^b f(x) dx < \frac{b-a}{n} (I - E_2) + \frac{b-a}{2n} \left(\frac{y_0 + y_{2n}}{2} + \frac{y_1 + y_{2n-1}}{2} \right) = \frac{b-a}{n} \left(I + \frac{E_1 - E_2}{2} \right)$$

En cambio por la fórmula de los rectángulos

$$\int_a^b f(x) dx > \frac{b-a}{n} I$$

Recordando que, si de un número se dan dos valores aproximados, uno por exceso y otro por defecto, un valor más aproximado es la semi-suma de

esos dos valores, con un error menor en valor absoluto que su semi-diferencia, tendremos

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \left(I + \frac{E_1 + E_2}{4} \right) + \alpha \quad \alpha < \frac{b-a}{n} \left(\frac{E_1 - E_2}{4} \right)$$

que es la fórmula de Poncelet particularmente útil en los casos en que por no conocerse la expresión analítica de $f(x)$ no puede calcularse el error que interviene en las otras fórmulas.

Gométricamente el límite del error es el área de un rectángulo de base h y de altura la distancia entre los puntos medios de la cuerda del arco total de curva a integrar y de la cuerda de proyección el intervalo (x_i, x_{2n-1})

Si ahora a cada intervalo $2h$ aplicamos la fórmula Newton-Cotes para $n=3$ se tiene:

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x) dx = \frac{h}{3} (y_{2i} + 4y_{2i+1} + y_{2i+2}) - \frac{h^5}{90} f'''(\xi_i) = \frac{b-a}{3n} (y_{2i} + 4y_{2i+1} + y_{2i+2}) - \frac{(b-a)^5}{2700n^2} f'''(\xi_i)$$

$x_{2i} < \xi_i < x_{2i+2}$

y sumando las integrales parciales:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{3n} (P + 2I - E_1) - \frac{(b-a)^5}{2700n^2} f'''(\xi_0) \quad a < \xi_0 < b$$

que es la muy conocida fórmula de Simpson.

Apliquemos estas últimas cuatro fórmulas a un ejemplo.

Sea calcular el trabajo de compresión de un kilogramo de vapor de agua saturado seco, partiendo de una presión inicial de 1 kg./cm.² hasta la presión de 7 kg./cm.²

Debe calcularse: $T = \int_{v_1}^{v_2} p dv$

pero como las tablas no dan los valores de la presión para valores equidistantes del volumen sino inversamente, transformemos la integral así

$$T = p_2 v_2 - p_1 v_1 - \int_{p_1}^{p_2} v dp$$

De una tabla de datos de vapor de agua deducimos:

p (Kg. cm ²)	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7
v (m ³)	1,7220	1,1760	0,9006	0,7310	0,6165	0,5355	0,4708	0,4217	0,3820	0,3494	0,3220	0,2987	0,2786

por lo tanto $p_2 v_2 - p_1 v_1 = (1,9502 - 1,7220) = 2282$ Kgm.

Para el cálculo de la integral tenemos $b-a = 6$; $n=6$

$P = 4,6923$ $I = 3,5012$ $E_1 = 1,0003$ $E_2 = 0,7328$

Fórmula de los rectángulos $T = 2282 - 35012 = -32730$ Kgm.

" " " trapecios $T = 2282 - 36920 = -34638$ Kgm.

" " " Poncelet $T = 2282 - 35681 = -33399$ Kgm.

" " " Simpson $T = 2282 - 35648 = -33366$ Kgm.

Como el error, según la fórmula de *Poncelet*, es $a < 669$ Kgm. solo podemos asegurar que $T = -33000$ Kgm. con sus dos primeras cifras exactas.

Veamos ahora las fórmulas del tipo (b). Como los coeficientes A_i están dados, serán incógnitas los n valores de las u_i y por lo tanto el sistema (2) se compondrá de $n + 1$ ecuaciones por cuanto la primera de ellas es independiente de las u_i y por lo tanto siendo $m = n + 1$ el grado de exactitud que se alcanzará con estas fórmulas será n o $n - 1$ según que n sea par o impar.

Como vemos se obtiene un grado de exactitud mayor en una unidad que con las fórmulas del tipo (a) y al contrario de aquellas, conviene utilizar las fórmulas con un número par de ordenadas.

Los coeficientes A_i pueden ser cualesquiera con tal de que cumplan la condición de que su suma sea 1 y la forma más simple de elegirlos es suponerlos todos iguales $A_i = \frac{1}{n}$.

Con estos valores se resuelve el sistema (2) que permite obtener los valores de u_i y de F_n con lo cual podremos calcular las ordenadas y el error de la fórmula de cuadratura.

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_m) + \begin{cases} \frac{(b-a)^{n+2}}{2^{n+2}(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) F_n & n \text{ impar} \\ \frac{(b-a)^{n+3}}{2^{n+2}(n+2)!} f^{(n+2)}(x_0) F_m & n \text{ par} \end{cases}$$

$a < x_0 < b$

que es la fórmula de *Tschebyscheff* muy utilizada en las construcciones navales.

Los valores de u_i y F_n según el número de ordenadas son:

$n = 1$	$u_1 = 0$	$F_1 = 1/3$
$n = 2$	$u_1 = u_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,577350$	$F_2 = 4/45$
$n = 3$	$-u_1 = u_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707107$	$u_2 = 0 \quad F_3 = 1/30$
$n = 4$	$-u_1 = u_4 = \sqrt{\frac{5+2,55}{15}} = 0,794654$	
	$-u_2 = u_3 = \sqrt{\frac{5-2,55}{15}} = 0,187592$	$F_4 = \frac{16}{945} \quad \text{etc}$

Para calcular un área por la fórmula de *Tschebyscheff* se lleva a partir del punto medio del intervalo de integración, los valores de las U_i multiplicados por el semi-intervalo; el término medio de las ordenadas correspondientes multiplicado por el intervalo dá el área.

Sea por ejemplo calcular con esa fórmula la integral

$$I = 4 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

Tendremos, tomando $n = 4$ que los valores de x y de la función correspondiente a los valores de las U_i serán:

$x_1 = 0,1027$	$x_2 = 0,4062$	$x_3 = 0,5938$	$x_4 = 0,8973$
$y_1 = 0,9890$	$y_2 = 0,8584$	$y_3 = 0,7393$	$y_4 = 0,5540$

y por lo tanto aproximadamente $I = 3,1413$ que difiere del valor exacto π en menos de 3 diezmilésimos.

Veamos, por último, las fórmulas del tipo (c). Como en este caso el número de incógnitas es $2n$, los n coeficientes A_i y los n valores de las U_i el sistema (2) tendrá $2n$ ecuaciones y por lo tanto siendo $m = 2n$ se llegará con esta fórmula a un grado de exactitud $(2n - 1)$.

Resuelto el sistema (2) se obtendrán los valores de las A_i , U_i y de F_n que se sustituirán en la fórmula

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) (A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n) + \frac{(b-a)^{2m+1}}{2^{2m} (2m)!} f^{(2m)}(x_0) F_n \quad a < x_0 < b$$

que es la fórmula de cuadratura de Gauss, que, para igual número de ordenadas dá el máximo grado de exactitud, casi el doble del de las fórmulas anteriores.

Los valores de A_i , U_i , F_n , según el número de ordenadas son:

$n = 1$	$u_1 = 0$	$A_1 = 1$	$F_1 = \frac{1}{3}$	
$n = 2$	$-u_1 = u_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,577350$	$A_1 = A_2 = \frac{1}{2}$	$F_2 = \frac{4}{45}$	
$n = 3$	$-u_1 = u_3 = \frac{\sqrt{15}}{5} = 0,774597$	$A_1 = A_3 = \frac{5}{8}$	$A_2 = \frac{4}{9}$	$F_3 = \frac{4}{775} \quad etc$

La fórmula de Gauss es muy útil para la determinación de valores medios de funciones dadas por aparatos registradores. Así en Meteorología para calcular la temperatura media diaria se aplica la fórmula de Gauss para tres ordenadas. Para eso como $a = 0$; $b = 24$ habrá que tomar la temperatura a las horas:

$x_1 = 12(1 + u_1) = 2^h 42^m 17^s$ $x_2 = 12^h$ $x_3 = 12(1 + u_3) = 21^h 17^m 43^s$
y siendo T_1 , T_2 , T_3 esas temperaturas la temperatura media será

$$T = \frac{5(T_1 + T_3) + 8T_2}{18}$$

lo que equivale a suponer que la variación de la temperatura respecto al tiempo es medida por una función racional entera de grado no superior al 5°.

ALGUNAS ECUACIONES DE LA TERMODINAMICA

Por N. CAPLAN

I - La ecuación general de los gases

Tengamos un gas perfecto cuya presión sea P_0 , el volumen v_0 y la temperatura 0° . Su "estado", como se sabe, es una función de estas tres variables. Un segundo estado suyo será caracterizado por p , v , t , respectivamente. Imaginemos un tercer estado en que la presión sea P_0 y la temperatura t ; su volumen, v' , será evidentemente distinto de v_0 y de v .

primer estado	$P_0, v_0, 0^\circ$
segundo estado	P, v, t
tercer estado	P_0, v', t

Para pasar del primer estado al tercero, siendo invariada la presión, se aplicará la fórmula de Gay-Lussac (isobárica):

$$a) v' = v_0 (1 + a t)$$

y para pasar del segundo estado al tercero, siendo constante la temperatura, aplicaremos la fórmula de Boyle-Mariotte (isotérmica):

$$b) p v = p_0 v'$$

Multiplicando miembro a miembro estas dos ecuaciones a) y b), se tiene:

$$c) p v v' = p_0 v_0 v' (1 + a t)$$

o sea:

$$d) p v = p_0 v_0 (1 + a t)$$

que lleva el nombre de "la ecuación general de los gases".

Esta última ecuación puede tomar aún la siguiente forma:

$$p v = p_0 v_0 a \left(\frac{1}{a} + t \right);$$

pero siendo $a = \frac{1}{273}$, se tendrá que $\frac{1}{a} = 273$. Luego la ecuación, debido

a que $T = 273 + t$, se convierte en: $p v = p_0 v_0 a T$

y llamando $p_0 v_0 a = r$, que será una constante para cada experimento, se tendrá:

$$e) p v = r T \quad \text{y f) } r = \frac{p v}{T}$$

Tomemos ahora el volumen específico de un gas, es decir 1 gramo = v cm^3 . Sabemos que $d = \frac{m}{v}$, o sea $\left[d \right] = \left[\frac{\text{gr}}{\text{cm}^3} \right]$; y en el caso nuestro se ten-

drá: $d = \frac{1}{\text{cm}^3}$, luego el volumen específico v será: $\left[v \right] = \left[\frac{1}{d} \right] \left[\frac{\text{cm}^3}{\text{gr}} \right]$, de modo que las dimensiones de r , en unidades absolutas del sistema C. G. S. serán (reemplazando en f):

$$\left[r \right] = \left[\frac{\text{gr. c.v. cm}^3}{\text{Sg}^2 \text{ cm}^2 \text{ gr. grados}} \right] \quad \text{o sea:} \quad \left[r \right] = \left[\frac{\text{cm}^2}{\text{Sg}^2 \text{ grados}} \right]$$

en unidades absolutas del sistema C. G. S.

Designemos ahora por M el peso molecular ($O = 16$). Siendo r una constante individual de cada experimento, o mejor dicho, de cada gas, tomaremos los productos Mr de algunos gases en idénticas condiciones, es decir,

siendo v el volumen específico y $T = 273$. La tabla siguiente nos dará los valores.

Gas	r (const. indiv.)	M	Mr
H_2	41.508.000	2,016	$8,315.10^7$
O_2	2.604.000	32,000	$8,315.10^7$
N_2	2.960.000	28,020	$8,315.10^7$
Aire	2.876.000	28,880 (término medio)	$8,315.10^7$
CO_2	1.890.000	44,000	$8,315.10^7$

Vemos que el producto Mr es absolutamente constante. Se puede explicar este hecho mediante la hipótesis de Avogadro: "dos gases ideales, bajo las mismas condiciones (v , p , t), tienen la misma cantidad de moléculas". De ahí, una consecuencia inmediata que: *Los pesos moleculares están en razón directa con las densidades respectivas, es decir:*

$$g) \quad M : M' = d : d';$$

$$\text{además, se tiene (f):} \quad \left. \begin{aligned} v &= \frac{r T}{p} \\ v' &= \frac{r' T}{p} \end{aligned} \right\}$$

$$\text{o sea:} \quad \frac{v}{v'} = \frac{r}{r'} \quad h)$$

es decir que las constantes individuales r y r' , son directamente proporcionales a los volúmenes específicos, y como éstos están en razón inversa con sus respectivas densidades, se tendrá:

$$\frac{v}{v'} = \frac{r}{r'} = \frac{d'}{d}$$

$$\text{Pero} \quad \frac{d}{d'} = \frac{M}{M'}$$

Luego reemplazando se obtiene:

$$\frac{r}{r'} = \frac{M'}{M}, \quad \text{o sea:} \quad r M = r' M' \quad A)$$

que es una constante universal para todos los gases ideales, cuyo valor es $8,315.10^7$ en unidades absolutas del sistema C. G. S.

Multiplicando ahora ambos miembros de la ecuación $v = \frac{r T}{p}$

$$\text{por } M, \text{ se tiene:} \quad v M = \frac{r M T}{p} \quad \text{o sea:} \quad p v M = r M T,$$

y llamando $rM = R$, como también: $vM = V$ (gramo-molécula), se obtiene la conocida relación:

$$\boxed{p V = R T} \quad B)$$

que es la ecuación de los gases ideales.

II. Calores específicos de los gases

Tengamos encerrado en un volumen cualquiera (para mayor sencillez, lo supondremos cilíndrico), con un pistón de sección S , (fig. 1) un gas ideal,

sobre el cual gravita, junto con el pistón, un peso P ; la presión será $p = \frac{P}{S}$
 de donde se tiene: $P = p S$

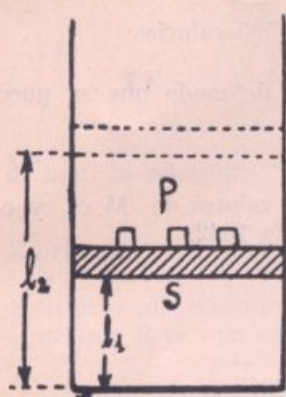


fig 1

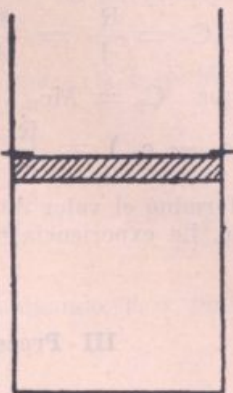


fig 2

Cuando calentamos esta masa gaseosa, el pistón llega a ocupar, después de l_1 , una altura l_2 , de modo que el trabajo gastado por el pistón con las pesas, tendrá por expresión: $A = P (l_2 - l_1)$ y reemplazando P por su igual pS , obtendremos: $A = pS (l_2 - l_1) = p (Sl_2 - Sl_1)$

Notemos que Sl puede ser considerado como el volumen (base por altura), y nuestra fórmula se convierte en: $A = p (V_2 - V_1)$ (1)
 fórmula completamente general, puesto que no depende de la forma del recipiente.

En esta experiencia hemos dejado constante la presión, pero podríamos haber procedido de otra manera: impidiendo que subiera el pistón, conservaríamos constante el volumen y aumentaríamos la presión (fig. 2). En el primer caso el calor específico (calor necesario para elevar la temperatura de 1 gramo del gas en 1°C), sería a presión constante, C_p , y en el segundo, a volumen constante, C_v . Es evidente que C_p debe ser mayor que C_v , puesto que, además de elevar la temperatura del gas, necesitaremos entregarle calor para efectuar el trabajo de la fórmula (1): $A = p (V_2 - V_1)$

Operemos con un mol (gramo molécula) del gas, de modo que tendríamos:

1) $C_p = c_p M$ calor molar a presión constante,

2) $C_v = c_v M$ calor molar a volumen constante para la elevación de la temperatura en 1° C.

La cantidad de calor en el segundo caso será: $C_v = C_v$

La cantidad de calor en el primer caso será: $C_p = C_v + p (V_2 - V_1)$

Restando ordenadamente, se obtiene: $C_p - C_v = p (V_2 - V_1)$ (2)
 (calorías) (ergs)

Además, para el primer caso se tendrá: $p V_1 = RT_1$

para el segundo caso se tendrá: $p V_2 = RT_2$

y restando miembro a miembro: $p (V_2 - V_1) = R (T_2 - T_1)$ (3)

Pero $T_2 - T_1 = 1$, puesto que se trata, en los calores específicos, de la elevación de la temperatura en 1°, luego se tiene: $p (V_2 - V_1) = R$ (4)

y reemplazando este valor en (2), se llega al resultado

$C_p - C_v = R$ (5)
 (calorías) (ergs)

Tomemos ahora en consideración que en esta fórmula, el primer miembro representa calor, mientras que el segundo representa trabajo, y que para

que esta igualdad pueda tener razón de ser, es necesario dividir el segundo miembro por el equivalente mecánico de la caloría, o sea por $J = 41,88 \cdot 10^6$ ergs, de modo que tendríamos:

$$C_p - C_v = \frac{R}{J} = \frac{8,315 \times 10^7}{41,88 \times 10^6} = 1,985 \text{ calorías.}$$

Notamos que $C_p = Mc_p$, y $C_v = Mc_v$, de modo que se puede escribir: $M (c_p - c_v) = \frac{R}{J}$

Robert Maier determinó el valor de J , conociendo los valores de M, c_p , y c_v , para el hidrógeno. La experiencia tuvo lugar en el año 1842.

III - Procesos adiabáticos

Se llaman así cuando son tan rápidos, que el calor no tiene tiempo suficiente para propagarse al ambiente, debido a la rapidez y al aislamiento de las paredes. El eslabón neumático, cuando se enciende la substancia puesta en el extremo del pistón, es un ejemplo de estos procesos. Los fenómenos acústicos también lo son.

Recordemos ahora el primer principio de la Termodinámica relacionado con el de la conservación de la energía: "si entregamos a un gas cierta cantidad de calor, esta tiene que transformarse en energía, que servirá para el aumento de la del gas y, además, para la dilatación, que es el trabajo $-A-$ (trabajo o energía interior y exterior)". Se le suele expresar por esta fórmula:

$$Q = U + A \text{ o mejor dicho: } JQ = U + A \dots \dots \dots (1)$$

La energía interior tiene por expresión:

$U = C_v (T_2 - T_1)$ y la exterior $A = p (V_2 - V_1)$ de modo que cualquier transformación es representada por la ecuación:

$$Q = C_v (T_2 - T_1) + p (V_2 - V_1) \dots \dots \dots (2)$$

Cuando el proceso es adiabático, el calor no se propaga al medio ambiente, es decir que $Q=0$, luego la relación (2), toma la forma:

$$0 = C_v (T_2 - T_1) + p (V_2 - V_1) \text{ o sea: } -p (V_2 - V_1) = C_v (T_2 - T_1)$$

$$\text{o mejor: } p (V_1 - V_2) = C_v (T_2 - T_1) \dots \dots \dots (3)$$

es decir, la disminución del volumen es acompañada por un aumento de la temperatura. Además, para el primer estado, se tiene:

$$p V_1 = RT_1 \dots \dots \dots (4)$$

Dividiendo ordenadamente la relación (3) por la (4), se obtiene:

$$\frac{V_1 - V_2}{V_1} = \frac{C_v}{R} \frac{T_2 - T_1}{T_1} \dots \dots \dots (5)$$

lo que se interpreta: "la compresión relativa es proporcional al aumento relativo de la temperatura". Por otra parte sabemos que: $R = C_p - C_v$,

luego se tiene: $\frac{V_1 - V_2}{V_1} = \frac{C_v}{C_p - C_v} \frac{T_2 - T_1}{T_1}$ de donde resulta,

$$\frac{T_2 - T_1}{T_1} = \frac{V_1 - V_2}{V_1} \frac{C_p - C_v}{C_v} \dots \text{ o sea, llamando } \frac{C_p}{C_v} = K,$$

se obtiene finalmente: $\frac{T_2 - T_1}{T_1} = (K - 1) \frac{V_1 - V_2}{V_1}$

Notamos que las diferencias $T_2 - T_1$ y $V_2 - V_1$, pueden ser tan pequeñas como se quiera, y esta consideración nos da derecho a escribir:

$$\frac{dT}{T} = (K - 1) \frac{dV}{V} \quad \text{e integrando:}$$

$$\int \frac{dT}{T} + (K - 1) \int \frac{dV}{V} = \text{Const.}, \text{ o sea: } \ln T + (K - 1) \ln V = \ln C$$

de aquí la relación:
$$TV^{K-1} = \text{Const} \dots \dots \dots (6)$$

Escribamos:
$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } pV = RT \\ \text{b) } TV^{K-1} = \text{Constante} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (A)$$

Multiplicando miembro a miembro y eliminando T, y teniendo además presente que R es una constante, se tiene:

$$pV^K = \text{Constante} \dots \dots \dots (7)$$

Esta ecuación es análoga a la isotérmica: aumentando adiabáticamente la presión de un gas, disminuye su volumen.

Eliminemos ahora el volumen de la a) del grupo (A):

$$V = \frac{RT}{p}; \text{ y reemplacemos este valor en b):}$$

$$\frac{T \cdot R^{K-1} \cdot T^{K-1}}{p^{K-1}} = \text{Const.}, \text{ o sea } \frac{T^K}{p^{K-1}} = \text{Const} \times R^{1-K} \text{ y como } R^{1-K} \text{ es también const., se tiene:}$$

$$\frac{T^K}{p^{K-1}} = \text{Const.} \dots \dots \dots (8)$$

De modo que obtuvimos tres ecuaciones que son para un proceso adiabático:

$$1) TV^{K-1} = \text{Const.}; 2) pV^K = \text{Const.}; \text{ y } 3) \frac{T^K}{p^{K-1}} = \text{Const.}$$

en las cuales figuran alternadamente *dos* de las tres variables que caracterizan el estado de un gas.

Clement y Désormes determinaron los valores de $K = \frac{C_p}{C_v}$:

para los gases monoatómicos:	$K = 1\frac{2}{3}$ (1,666...)	(Hg, He, Ne)
” ” ” biatómicos	$K = 1,40$	(O, N, aire)
” ” ” nobles	$K = 1,666\dots$	

*) $\frac{T_2 - T_1}{T_1} - (K - 1) \frac{V_2 - V_1}{V_1} = 0$, o sea: $\frac{T_2 - T_1}{T_1} + (K - 1) \frac{V_2 - V_1}{V_1} = 0$

de ahí la integración es decir: $T_1 V_1^{K-1} = T_2 V_2^{K-1} = T_3 V_3^{K-1} = \text{Const.}$

NOTA: Algunos, en vez de K, usan γ .



LA MINERVA

Fábrica de Sellos de Goma

Chapas de Bronce — Chapas
Esmaltadas

Taller de Grabados en General
— DE —

CARLOS ZÜRCHER

Numeradores Automáticos
Alemanes

948 - SANTA FE - 950

Teléfono 3469

Rosario

Talleres Metalúrgicos y Mecánicos en General

Fundición de Hierro y Bronce
SOLDADURA AUTOGENA
Oficina Técnica — Planos y
Presupuestos

RAINOLDI Hnos.

CONSTRUCCIONES

Reparaciones e instalaciones de
todas clases de Máquinas
Agrícolas, Industriales y
Marítimas

56 - BAlCARCE - 58

Entre Jujuy y Brown

Teléf. 4122 Rosario de Sta. Fe

CAVILACIONES GEOMÉTRICAS

Por el Ing. ARTURO SALLOVITZ

Con mucho placer respondo al pedido de la útil revista, en el número especial de su reaparición, con el siguiente artículo, en que disertaré sobre mi rama, sin hacer ninguna figura.

La Geometría, legada en testamento sagrado por Euclides a la posteridad, ha dominado durante 20 siglos, siendo la disciplina por excelencia, en que han dilucidado los espíritus más selectos de la humanidad.

Ella fué hallada perfectamente lógica por todos que la recorrieron y era tenida por la encarnación misma de la Lógica, sirviendo su estructura de modelo a la creación del Código Civil Romano, obra tan admirable y perdurable como aquella. Con razón podía poner Pitágoras a la puerta de su Escuela de Filosofía un cartel, que decía: "Nadie ignore la Geometría" como la mejor filosofía, que podía enseñar.

Efectivamente ella satisfacía las necesidades de aquella época y de los muchos siglos, que le sucedieron. Su procedimiento principal de la superposición y del que se deriva la medida, la convierte en la Geometría manual o del tacto, siendo su validez y armonía perfecta aplicándola a las figuras usuales de la práctica diaria, pero falla inmediatamente, si se la quiere extender al espacio infinito. Este fué el primer punto vulnerable, que hallaron los modernos comentaristas dirigiendo sus ataques al postulado de las paralelas, que son efectivamente rectas concurrentes en el infinito.

No era extraño, que esto sucediera en una época, donde genios como Galileo, Kepler y Newton pasearon audazmente su pensamiento por los espacios celestes para descubrir las leyes, que decían de la armonía en el universo infinito. Los geómetras cambiaron la geometría del tacto o sea euclideana por la Geometría proyectiva, la Geometría de la radiación o Geometría visual como arma de sus modernas investigaciones. Esa nueva rama con su gran poder de vinculación, independiente de la superposición y de la medida, podía en concordancia con la época, hacer pasear el pensamiento por el espacio infinito. Era tanta su armonía, que ni siquiera destruía la vieja y respetable escuela euclideana, pues la comprendía como una subdivisión y llegaba aun a conciliarla con sus enemigos Lobatchewsky y otros.

Parecería así que se hubiera llegado al completo dominio del espacio infinito, pero es forzoso decirlo: Debemos desconfiar, pues todo ese edificio tiene como punto de partida posible alguna prevención innata, de la cual ninguno de nuestra especie, se puede desprender y el cual como vicio hereditario, nos veda eternamente la verdad.

Así pues no debe extrañar, que en la Sorbona de París, la más alta cátedra científica de la actualidad, haya podido exponerse una extravagante tesis, con el siguiente razonamiento:

Imaginémosnos seres chatos de solamente dos dimensiones aferrados a una superficie plana, con un organismo adecuado para moverse y actuar únicamente dentro de dicho plano. Ese plano constituiría su universo o sea el espacio dentro del cual actúan y perciben actuación. Si a la superficie plana la reemplazamos por una superficie esférica, sujetos sus habitantes a las mismas condiciones de adherencia, su medio sería esa superficie e igual su grado de libertad, ellos podrían darse cuenta directamente de la forma verdadera del medio en que actúan y tendrían del mismo una impresión idéntica a la que se hubieron formado los habitantes del plano.

De la concepción, que nosotros tenemos de nuestro espacio, nacen las Geometrías mencionadas con las cuales lo analizamos y muy probablemente tampoco nosotros no podemos darnos cuenta de su forma verdadera.

Pero hay aun más todavía. Volvamos a nuestra anterior hipótesis de los seres chatos de dos dimensiones habitantes del plano. Si suponemos a cualquiera de ellos encerrados en una figura cualquiera, acaso un cuadrado trazado sobre el plano, el individuo así encerrado, no podrá llegar a ningún punto del plano exterior a dicho cuadrado, sin atravesar el perímetro de la figura, que lo aprisiona, es decir, sin vulnerar sus límites, pues el camino que ha de seguir, no debe alejarse ni abandonar la superficie plana.

Para nosotros, que conocemos tres dimensiones y tenemos tres grados de libertad en nuestros movimientos, nos sería fácil hallar y practicar una trayectoria aérea a través del espacio, alejándonos del plano y llegar del punto interior del cuadrado a cualquier punto exterior al mismo situado en el plano, sin tocar el perímetro del cuadrado.

De igual manera, para nosotros, que percibimos el medio en que actuamos, de acuerdo a nuestras impresiones sensoriales constituido por tres dimensiones, llamamos cuerpo a una porción de ese espacio o medio, cuando éste es limitado en todo sentido.

Supongámonos encerrados en el espacio de una pieza de forma común, que sería la de un paralelepípedo rectangular, si no tuviera la discontinuidad de puertas y ventanas, las cuales podemos dar por herméticamente cerradas. Nos es inconcebible, se pueda llegar al exterior de esta pieza, sin vulnerar sus límites, o sea filtrarse a través de las paredes. Pero si en el espacio absoluto existiera una cuarta dimensión o hubiera un cuarto grado de libertad, que nosotros no percibimos, por analogía con lo que sucedía en el caso anterior, esa operación sería perfectamente posible y ningún humano puede estar seguro del todo, que esta cuarta dimensión no exista. Es claro, que ella nos señalaría el camino, donde posiblemente moren los espíritus de los heroes, únicos que merecían la supervivencia, según los griegos y de los espíritus de los que no lo fueron, según creencias más democráticas y modernas.

He aquí, la atrevida tesis, que subió al más alto tribunal científico en la post guerra, cuando innumerables testigos en los campos de batalla, recientes, creyeron haber visto aparecer los mismos samaritanos, que en la lluvia de las granadas socorrían heridos y luego desaparecían sin dejar rastros y cuando hubo notables hombres de ciencia como Crook y otros, que admitían su existencia.

Terminaré esta disertación con las palabras del eminente geómetra, que fuera nuestro huésped, el Dr. Henríquez, a la prueba me remito.

Observaciones a fórmulas directamente calculables con logaritmos

Para el cálculo del ángulo horario, conociendo la latitud del lugar, la declinación y la altura del astro.

Por el Ing. SIMON RUBINSTEIN

Si en un sitio de latitud φ , se conoce la altura h (o la distancia cenital Z) de un astro de declinación δ , se puede calcular con fórmulas directamente calculables con logaritmos el ángulo horario del mismo. La fórmula:

$$(I) \quad \operatorname{sen} \frac{1}{2} t = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(S-h) \cos S}{\cos \varphi \operatorname{sen} \Delta}}$$

introducida en la práctica por Borda, es la universalmente usada por los marinos; pero para las operaciones terrestres de precisión es preferible utilizar la fórmula:

$$(II) \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} t = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(S-h) \cos S}{\operatorname{sen}(S-\varphi) \cos(S-\Delta)}}$$

En estas fórmulas $2S = h + \varphi + \Delta$, siendo Δ la distancia del astro al polo del observador, lo que da, tomando a δ en valor absoluto $\Delta = 90^\circ - \delta$ si la latitud y la declinación tienen el mismo signo y $\Delta = 90^\circ + \delta$ si tienen signos diferentes.

Comentando estas fórmulas, F. Beuf en la página 282 del tomo I de su tratado de Topografía y Geodesia afirma: "Se debe notar que todos los elementos que figuran bajo el radical en (I) y (II) deben ser forzosamente positivos para así obtener un valor real para $\frac{1}{2} t$ por consiguiente, al traducir numéricamente estas fórmulas, será preciso considerar siempre como positivas las cantidades h , φ , Δ ; de modo, entonces, que en estos cálculos no hay necesidad alguna de preocuparse de los signos".

Más adelante probaré que lo que acaba de afirmar F. Beuf no es exacto.

E. Schulte, en la página 150 de su tratado "La Determinación Geográfica de un Lugar" comentando la fórmula de Borda y la fórmula:

$$(III) \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} t = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(S-\varphi) \operatorname{sen}(S-\delta)}{\cos S \cos(S-\alpha)}}$$

siendo $2S = Z + \varphi + \delta$ y que la deduce en la página 146, quizás influenciado por F. Beuf, incurre en el mismo error afirmando:

"Conviene hacer notar, que todas las cantidades que figuran en esta fórmula y en la anterior, deben ser positivas a fin de obtener un valor real de $\frac{1}{2} t$. Tomaremos, entonces, a φ , δ y Z o h , φ y Δ según se emplee una u otra, siempre positivos sin preocuparnos de los signos".

Para que el lector siga con provecho el análisis que haré a continuación, es imprescindible que se moleste y lea la deducción de la fórmula (III) en la página 146 de la obra citada de E. Schulte y la deducción de las fórmulas (I) y (II) en la de F. Beuf, tomo I, págs. 280 a 282 inclusive, o en cualquier otro tratado de Astronomía Práctica. Compenetrado de la deducción de las fórmulas, con facilidad se convencerá que son erróneos los comentarios citados de F. Beuf y E. Schulte.

Comencemos con la fórmula (III), que deduce E. Schulte, en la pág. 146 de su obra. Probaré, que es necesario en esta fórmula, tener en cuenta los signos de φ y δ (Z es siempre positivo); en contra de lo que él afirma en la página 150.

Efectivamente: De la fórmula $\cos Z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$ deducimos:

$$(1) \quad \cos t = \frac{\cos Z - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta}$$

Si queremos operar con esta fórmula (que sirve de arranque para deducir la (III) sin tener en cuenta los signos de Z , φ , δ , ésta será válida para el caso en que $\varphi \geq 0$ y $\delta \geq 0$, es decir $(+\varphi)$ y $(+\delta)$ (Z es siempre positivo).

Calculemos ahora, el ángulo horario de un astro de declinación $(-\delta)$, que en un sitio de latitud $(-\varphi)$ tiene la misma distancia cenital Z que el anterior. Aplicaremos la fórmula (1).

$$\cos t = \frac{\cos Z - \sin(-\varphi) \sin(-\delta)}{\cos(-\varphi) \cos(-\delta)} = \frac{\cos Z - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta}$$

Como vemos, un astro de declinación $(-\delta)$ en un sitio de latitud $(-\varphi)$ que tiene una distancia cenital Z , tiene el mismo ángulo horario, que un astro de declinación $(+\delta)$ que alcanza la misma distancia cenital en un sitio de latitud $(+\varphi)$.

Por consiguiente, en el caso $(-\varphi)$ y $(-\delta)$ se puede operar con la fórmula (1) y con la (III) que se deduce de la anterior, sin tener en cuenta los signos. No hay que olvidar que Z es siempre positivo.

Pero, veamos qué es lo que ocurre en los casos: $(-\varphi)$ y $(+\delta)$ y $(+\varphi)$ y $(-\delta)$

Para $-\varphi$ y $+\delta$ aplicando la fórmula (1):

$$\cos t = \frac{\cos Z - \sin(-\varphi) \sin \delta}{\cos(-\varphi) \cos \delta}$$

$$\cos t = \frac{\cos Z + \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta} \quad (2)$$

Para $+\varphi$ y $-\delta$ aplicando la fórmula (1)

$$\cos t = \frac{\cos Z - \sin \varphi \sin(-\delta)}{\cos \varphi \cos(-\delta)}$$

$$\cos t = \frac{\cos Z + \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta} \quad (2)$$

Como se ve, si se quiere operar con $|\varphi|$ y $|\delta|$ (valores absolutos de φ y δ) para los casos $(-\varphi; +\delta)$ y $(+\varphi; -\delta)$ debe utilizarse la fórmula (2).

En estos casos, pues, en que la latitud tiene signo distinto a la declinación del astro, si no se desea tener en cuenta los signos de φ y δ , la fórmula (1) no debe ser empleada, ni la III que se deduce de ella, en contra de lo que afirma E. Schulte en la pág. 150 de su obra.

Resumiendo entonces, si no se quiere tener en cuenta los signos de φ y δ no conviene utilizar la fórmula III.

Veamos qué es lo que ocurre con las fórmulas I y II.

En las aplicaciones, el astro que se emplea está siempre encima del horizonte, por consiguiente h es siempre positivo.

Consideremos el caso $(+\varphi; +\delta)$ para el cual operando con $|\varphi|$ y $|\delta|$

$$\cos t = \frac{\sin \delta - \sin \varphi \cos \delta}{\cos \varphi \cos \delta} \quad (3)$$

En las fórmulas I y II, se introduce la distancia polar Δ que siempre se considera positiva; Δ es la distancia del astro al polo del observador.

En el caso en que la declinación del astro tiene el mismo signo que la latitud $\Delta = 90^\circ - |\delta|$ y en el caso contrario $\Delta = 90^\circ + |\delta|$.

En el caso $(+\varphi; +\delta)$ $\Delta = 90^\circ - \delta$ y, por consiguiente, $\sin \delta = \cos \Delta$ y $\cos \delta = \sin \Delta$; sustituyendo en (3) se llega a:

$$\cos t = \frac{\operatorname{sen} h - \operatorname{sen} \varphi \cos \Delta}{\cos \varphi \operatorname{sen} \Delta} \quad (2)$$

fórmula que sirve de arranque para deducir la I de Borda y la II.

En el caso $(-\varphi; -\delta)$ se tiene:

$$\cos t = \frac{\operatorname{sen} h - \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \delta}{\cos \varphi \cos \delta} = \frac{\operatorname{sen} h - \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \delta}{\cos \varphi \cos \delta} \quad (3)$$

es decir:

$$\cos t = \frac{\operatorname{sen} h - \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \delta}{\cos \varphi \cos \delta} \quad (3)$$

$\Delta = 90^\circ - |\delta|$ lo mismo que en el anterior y por consiguiente:

$$\cos t = \frac{\operatorname{sen} h - \operatorname{sen} \varphi \cos \delta}{\cos \varphi \operatorname{sen} \delta} \quad (4)$$

h es siempre positivo, Δ lo es por convención, luego en este caso, para conservar la fórmula (4) y las I y II que de ella se deducen, es menester operar con $|\varphi|$.

En el caso $(-\varphi; +\delta)$ se tiene:

$$\cos t = \frac{\operatorname{sen} h - \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \delta}{\cos \varphi \cos \delta} = \frac{\operatorname{sen} h + \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \delta}{\cos \varphi \cos \delta} \quad (5)$$

$$\cos t = \frac{\operatorname{sen} h + \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \delta}{\cos \varphi \cos \delta} \quad (5')$$

y por convención $\Delta = 90^\circ + |\delta|$, entonces $\cos |\delta| = \sin |\Delta|$
 $\operatorname{sen} |\delta| = -\cos |\Delta|$

sustituyendo en (5') se llega a:

$$\cos t = \frac{\operatorname{sen} h - \operatorname{sen} \varphi \cos \Delta}{\cos \varphi \operatorname{sen} \Delta} \quad (4')$$

lo mismo que en el caso anterior, para conservar la fórmula (4) y las I y II es necesario operar con $|\varphi|$

Para terminar consideremos el caso $(+\varphi; -\delta)$

$$\cos t = \frac{\operatorname{sen} h - \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \delta}{\cos \varphi \cos \delta} = \frac{\operatorname{sen} h + \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \delta}{\cos \varphi \cos \delta} \quad (3')$$

se llega a la misma (3') y como $\Delta = 90^\circ + |\delta|$, todo lo que se ha deducido para el caso anterior se puede extender a éste.

El análisis que hemos efectuado, considerando los cuatro casos posibles $(+\varphi; +\delta)$; $(-\varphi; -\delta)$; $(+\varphi; -\delta)$ y $(-\varphi; +\delta)$, nos permite concluir que en la fórmula de Borda y en la II hay que operar con $|h|$, $|\varphi|$ y $|\delta|$; es decir, que al aplicar la fórmula de Borda y la II hay que prescindir de los signos de φ y δ ; h es siempre positivo. En cambio, para aplicar la fórmula III, como hemos probado, es menester tener en cuenta los signos de φ y δ ; Z es siempre positivo.

MODERNA CARPINTERIA METALICA



ESTABLECIMIENTOS KLÖCKNER

SOCIEDAD ANÓNIMA

Agencia General de Rosario: Gral. Mitre 634 - Teléfono 7207

Queirolo Hnos. & Cía.

Importadores Mayoristas



ROSARIO DE SANTA FE
Tucumán y Entre Ríos

BUENOS AIRES
Chacabuco 457 al 463



No vacile Vd...

ADQUIERA UNA
L. C. SMITH
SILENCIOSA

Cía. La Silenciosa
CORDOBA 960 — Tel. 4748

NUEVO LOCAL

LA INTERPOLACIÓN DE LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES

Por el Agr. CARLOS DIEULEFAIT

I. — El problema de la interpolación consiste, en su aspecto matemático, en lo siguiente:

Dados los pares (x_i, y_i) ($i=1, 2, 3, \dots, n$), determinar la función $y=f(x)$ tal que se verifique: $y_i = f(x_i)$ ($i=1, 2, 3, \dots, n$). (1) —

Observará el lector que partiendo de este enunciado, se puede resolver el problema de la interpolación por más de un camino, según le imponamos condiciones distintas a la función $f(x)$, pudiendo fijarla algebraica o no, y dentro de las primeras, parabólicas o no.

Esta observación, a menudo no bien comprendida, es menester efectuarla y ella permite poner en evidencia el siguiente principio: El problema de la interpolación, único en las condiciones que debe satisfacer la función, depende o mejor dicho debe ir referido, al tipo de la función escogida. De manera pues que no tiene sentido determinado, definir el problema de la interpolación prescindiendo del tipo de la función interpolatriz. De igual manera como la posibilidad de una construcción geométrica, debía ir referida a la especificación de un determinado instrumento, ya que digámoslo una vez más, la cuadratura del círculo por ejemplo que era imposible con la regla y el compás, es posible con el intégrafo.

Ahora bien, ¿cómo escogeremos esta función? Desde el punto de vista teórico ello no interesa, bastando que cualquiera que sea la función, se cumpla la condición (1). Pero esta arbitrariedad es puramente aparente. En rigor, debemos elegir y casi estamos forzados a una elección más que a otra. Dentro de la teoría se preferirán las interpolaciones más simples; en la aplicación además de ello deberán tenerse en cuenta las condiciones reales del problema. Esto se aclarará a continuación.

II. — El caso teórico más simple y el único que ocupa la atención en nuestros cursos de Cálculo, por desgracia desarticulados con respecto a las aplicaciones físicas más interesantes para nuestra carrera, es el de considerar la función $y=f(x)$ del tipo parabólico, o sea una función algebraica de grado $n-1$, para nuestro caso:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1}$$
 Los coeficientes a_0, a_1, \dots, a_{n-1} quedan determinados por el sistema:

$$y_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_{n-1} x_i^{n-1}$$
 ($i=1, 2, 3, \dots, n$) sistema que prueba la existencia de $f(x)$ sometida a la condición (1) al mismo tiempo que permite calcular fácilmente los coeficientes por la teoría de los determinantes.

III. — Pero, y como lo adelantáramos, también la condición (1) podría quedar cumplida y de consiguiente el problema resuelto, mediante funciones o curvas algebraicas a dos o más variables y de segundo o mayor orden.

Para fijar las ideas consideremos por ej. los puntos:

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ y la curva $f(x, y) = 0$ de segundo orden, de manera que:

$$f(x, y) = a_{20} x^2 + a_{02} y^2 + a_{11} x y + a_{01} y + a_{10} x + a_{00} = 0$$

Si hacemos $a_{20} = a_{02} = 0$, nos queda:

$f(x, y) = a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + a_{11}xy + a_{00} = 0$
y a los efectos de que los tres pares estén sobre esta función, deberá tenerse:

$$(2) \quad a_{20}x_i^2 + a_{02}y_i^2 + a_{11}x_iy_i + a_{00} = 0 \quad (i = 1, 2, 3.)$$

La (2) es un sistema de tres ecuaciones lineales homogéneas, a cuatro incógnitas. El sistema, prescindiendo de la solución de los ceros que no interesan ni convienen, dará ∞^1 soluciones dependientes de los valores arbitrarios que convengamos en asignarle a uno de sus coeficientes de f e incógnitas de (2), a_{00} , por ejemplo.

Pero, si en lugar de partir de la hipótesis $a_{20} = a_{02} = 0$, consideramos válida la ecuación completa de la curva de segundo orden, se tendrá el sistema: $a_{20}x_i^2 + a_{02}y_i^2 + a_{11}x_iy_i + a_{20}x_i + a_{02}y_i + a_{00} = 0$ ($i = 1, 2, 3$) el cual es de tres ecuaciones lineales homogéneas con 6 incógnitas, dando por lo tanto ∞^3 soluciones dependientes de los valores arbitrarios que les atribuyamos a tres de sus incógnitas que son coeficientes de la función.

Abordando un caso concreto tendríamos. Sean, por ejemplo, los pares (3,6), (4,2) y (2,5) y sea: $f(x, y) = a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + a_{11}xy + a_{00} = 0$.

Imponiendo la condición (1), tendríamos:

$$9a_{20} + 36a_{02} + 18a_{11} + a_{00} = 0$$

$$16a_{20} + 4a_{02} + 8a_{11} + a_{00} = 0$$

$$4a_{20} + 25a_{02} + 10a_{11} + a_{00} = 0$$

sistema que se solucionaría fijando los valores de una cualquiera de las incógnitas. Por ej. para $a_{00} = -5$ se deduciría aplicando la regla de Cramer:

$$a_{20} = 0,844\dots$$

$$a_{11} = -1,371\dots$$

$$a_{02} = 0,613\dots$$

$$a_{00} = -5,000$$

de manera que nuestra función sería:

$$0,844\dots x^2 + 0,613\dots y^2 - 1,371\dots xy - 5 = 0.$$

Los distintos valores que le podemos atribuir a la incógnita a_{00} hacen que este sistema admita ∞^1 soluciones. Si hubiésemos partido de la forma completa correspondiente a una curva de segundo orden, hubiéramos tenido ∞^3 soluciones.

IV. — Sin dificultad, lo dicho para las curvas planas de segundo orden, podría extenderse para las del mismo orden en el espacio, o superficies. Pero es necesario analizar una diferencia general respecto a la interpolación entre estas curvas y superficies y las parábolas. Es la siguiente: La interpolación que tiene por principal objeto inducir las leyes de correspondencia partiendo de pares (X_i, Y_i) suministrados por la experiencia, debe, a más de cumplir la condición fundamental (1), servirnos para calcular los valores Y_k que resultarían de X_k en una doble forma que reciben los nombres correspondientes de interpolación y extrapolación. La primera se presentaría si el valor X_k no ha figurado como base de nuestro cálculo y está comprendido por dos que han servido para determinar la función. La segunda o la extrapolación sería si el valor X_k se hallase fuera (es superior o inferior) a todos los valores X_i que sirvieron de base para el cálculo de la función.

En el campo real de correspondiente representación geométrica en el plano o espacio propio, estos dos problemas tienen sentido cuando la función es parabólica, mientras que el de la extrapolación conduce en general a soluciones imaginarias y geoméricamente imposibles en el plano propio cuando las funciones de segundo orden, por ejemplo que hemos estudiado, representan cónicas y conicoides o cuádricas.

Para aclarar, refirámonos a un ejemplo. Si la función es de los tipos:
 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ o $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ o sea una elipse y una hipérbola,
 de correspondiente ecuación explícita:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

la extrapolación para valores de $x > a$ y $x < -a$ en la primera y $x < a$
 y $x > -a$ en la segunda, da resultados imaginarios.

V. — Ya invocada la razón del problema de la interpolación, una sencilla consideración también experimental, basta para abandonar el camino teórico. Es la siguiente:

Cuando con la base de los pares (x_i, y_i) ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) deseamos inducir la ley de correspondencia, es menester no olvidar que los valores x_i é y_i son resultados de la observación o sea, números que representan magnitudes físicas cuya mensurabilidad se supone que ellos expresan. Ahora bien, si x_i corresponde a lecturas efectuadas en una escala termométrica por ejemplo, é y_i a la longitud, superficie o volumen de un sistema físico determinado, se comprende que la exactitud de x_i está vinculada a la apreciación del termómetro, a su grado de idealidad capilar homogénea, a las acciones de pequeñas corrientes no actuantes del mismo modo sobre el sistema, etc., y que la valuación de la longitud o volumen del sistema, dependen de otro conjunto de factores, los cuales a pesar de ser más o menos ajenos al concepto físico de longitud o volumen que deseamos medir, intervienen para alterarlo.

Este hecho cuya consideración debe tenerse presente y ser motivo de análisis en todo y sin excepción estudio experimental (ya sea de la enseñanza o de la investigación) nos lleva a la conclusión de que, en realidad los pares de números que habíamos adoptado eran una ilusión física disimulada por el ropaje de una realidad solamente matemática! Las fórmulas son exactas matemáticamente, pero sólo lo serán físicamente si los datos de que hemos partido eran físicamente exactos.

Debido a esto es que a los pares (x_i, y_i) debemos sustituirles los pares $(x_i \pm \epsilon_x, y_i \pm \epsilon_y)$ o sea, pasando de un punto a un pequeño segmento o de un número a un pequeño intervalo, cuyas medidas $\pm \epsilon_x$ y $\pm \epsilon_y$ representan simbólicamente la influencia de los distintos factores que intervienen en la producción de errores fortuitos o accidentales.

La reducción $\epsilon = 0$ que nos conduce al caso ya estudiado, y que supone un error nulo, podría ser cuestión de convención, pero debe tenerse presente que físicamente ello supone admitir una ilimitada precisión de los métodos experimentales a la que se podrá suponer haber llegado por prolijidad de las observaciones, correlacionándola con el número de experiencias. Según el interés del caso a estudiar, dependerán evidentemente estos criterios.

VI. — El estudio detenido de los elementos ϵ corresponde a la teoría de los errores, disciplina esta que se enseña en nuestra Facultad en los cursos de Topografía y Geodesia enlazándola con las aplicaciones de estas dos materias. Esta circunstancia hace que, a pesar del valiente esfuerzo desarrollado por su benemérito Prof. el Ing. S. Rubinstein, el plan orgánico de la teoría de los errores quede sin colocación en nuestros planes de estudio (1), ausencia que se resiente tanto más cuanto sus fundamentos críticos o sea el Cálculo de

(1) En mi opinión, las ejercitaciones que se dan bajo el nombre de Trab. Prácticos en los cursos de Matemáticas, deberían orientarse fuera de los problemas con $a, x,$ y ω para considerar precisamente distintas cuestiones experimentales con cuyo estudio se consiga a la par que el afinamiento del instrumento matemático, una mayor madurez para las aplicaciones de la teoría, cuestión que es el todo para nuestra carrera y el desideratum para toda buena comprensión completa de la ciencia.

Probabilidades no tiene ningún curso especial ya que lo que forma parte del programa de Algebra de primer año, no deja de ser una aplicación elemental del Análisis Combinatorio ordinario.

Sin pretender penetrar en la teoría de los errores, pero enlazándonos a ella con el criterio de los cuadrados mínimos, estudiaremos a continuación el problema de la interpolación parabólica desde este punto de vista.

Sean los pares (x_i, y_i) ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) dados por la observación

Se trata de hallar los valores de a_k ($k = 0, 1, 2, \dots, k$) siendo $n > k$ correspondientes a los coeficientes de la parábola:

$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k$ tal que se tenga:

$$(3). \quad \left[y_i - f(x_i) \right]^2 \text{ un mínimo.}$$

Observaciones: Como se ve, $f(x)$ no pasará necesariamente por los puntos (x_i, y_i) ($i = 1, 2, \dots, n$).—

No necesitaremos calcular una parábola de grado $n-1$ como en la interpolación parabólica anteriormente estudiada, bastándonos con referirnos a una de grado $k < n$ con lo que se consigue simplificación de los cálculos.

$y_i - f(x_i)$ representa el error correspondiente al atributo x_i cuando se pasa del dato experimental y_i a la función $f(x_i)$ de grado k .

Las derivadas parciales de (3) con respecto a las a_i garanten el mínimo al igualar a cero el resultado. Se tienen así $k+1$ ecuaciones lineales en a_i .

Son las siguientes:

$$\begin{aligned} 1^\circ: \quad \sum_{i=1}^n 2 \left[y_i - f(x_i) \right] \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_0} &= \sum_{i=1}^n \left[y_i - f(x_i) \right] = 0 \\ 2^\circ: \quad \sum_{i=1}^n 2 \left[y_i - f(x_i) \right] \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_1} &= \sum_{i=1}^n \left[y_i - f(x_i) \right] x_i = 0 \\ (k+1)^\circ: \quad \sum_{i=1}^n 2 \left[y_i - f(x_i) \right] \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_k} &= \sum_{i=1}^n \left[y_i - f(x_i) \right] x_i^k = 0 \end{aligned}$$

De donde se deducen las correspondientes igualdades condicionales:

$$\begin{aligned} 1^\circ: \quad \sum_{i=1}^n y_i &= \sum_{i=1}^n f(x_i) \\ 2^\circ: \quad \sum_{i=1}^n y_i x_i &= \sum_{i=1}^n f(x_i) x_i \\ (k+1)^\circ: \quad \sum_{i=1}^n y_i x_i^k &= \sum_{i=1}^n f(x_i) x_i^k \end{aligned}$$

Estas igualdades condicionales en número de $k+1$ son los momentos sucesivos y permiten determinar los coeficientes a_i de la función $f(x_i)$ tal que hagan un mínimo, la suma de los cuadrados de los errores.

EL PANDEO

Por el Ing. J. C. van WYK

Indole del problema

Un sólido cuya proporción de dimensiones se aproxima a la del cubo, si es ensayado a la compresión acusa durante esta operación dos formas distintas de resistencia;

1°. el período elástico, que se caracteriza por la casi total reversibilidad de la energía puesta en juego y:

2°. el período plástico, que para la generalidad de los materiales se inicia con cierta brusquedad, trazando un límite más o menos bien definido con el estado anterior, y a partir de cuyo límite el material pierde en grado creciente el poder de reversión de la energía; parte de esta se transforma en calor y finalmente se produce el estado plástico completo.

Designando con P la carga; Ω la variación de longitud primitiva L , la variación o fuerza específica de reacción está dada por $\sigma = \frac{P}{\Omega}$; si además ΔL es para determinado valor de la tensión σ la variación de longitud primitiva L , la variación específica está dada por $\epsilon = \frac{\Delta L}{L}$

Si en un diagrama como el de la fig. 1 se representan las tensiones σ en ordenadas y las ϵ en abscisas, se nota que para materiales como los aceros, el hierro y la madera, que dentro la mayor parte del período elástico existe una relación constante entre los incrementos de las σ y de los ϵ ; $\frac{\Delta \sigma}{\Delta \epsilon} = \text{const.}$ a esta relación se llama módulo de elasticidad y se acostumbra indicarlo con la letra E . Este módulo también puede considerarse como la tangente trigonométrica del diagrama registrador del ensayo.

$$E = \frac{d \sigma}{d \epsilon} = \text{tg } \varphi$$

para $\text{tg } \varphi$ constante $E = \frac{\sigma}{\epsilon} \therefore \epsilon = E \sigma$, lo que expresa que en el campo de la proporcionalidad la variación específica de longitud está dada por el producto del módulo de elasticidad por la tensión.

Considerando el módulo como tangente trigonométrica al diagrama del ensayo, entonces fuera del campo de la proporcionalidad corresponde diferente valor de E a cada valor de la tensión y se indica con la notación:

$$E_{\sigma} = \frac{d \sigma}{d \epsilon}$$

En el período plástico con el aumento de la tensión se produce un relajamiento progresivo de la cohesión; en materiales dúctiles como el hierro y el acero y aún en algunas piedras como el mármol se observa un escurrimiento lateral según planos inclinados, acusado por el aumento de las dimensiones transversales y las líneas características del escurrimiento. En materiales como fundición y madera tiene lugar una penetración de los cristales o fibras.

Si los ensayos se realizan sobre prismas, por ejemplo, de la misma sección transversal pero de longitudes cada vez en aumento, la rotura se produce para cargas P cada vez menores a medida que la longitud crece y además cambia de carácter, va acompañado de flexión lateral; la pieza de ensayo

toma la forma de arco antes de ceder y después de cierta proporción de la longitud la pieza cede únicamente flexionándose sin llegar a romperse el material; si en tal condición se suspende la carga, entonces al disminuirse la presión la pieza vuelve a tomar su posición primitiva; pero al insistir la carga, aumenta rápidamente la flexión lateral y termina inmediatamente con el colapso.

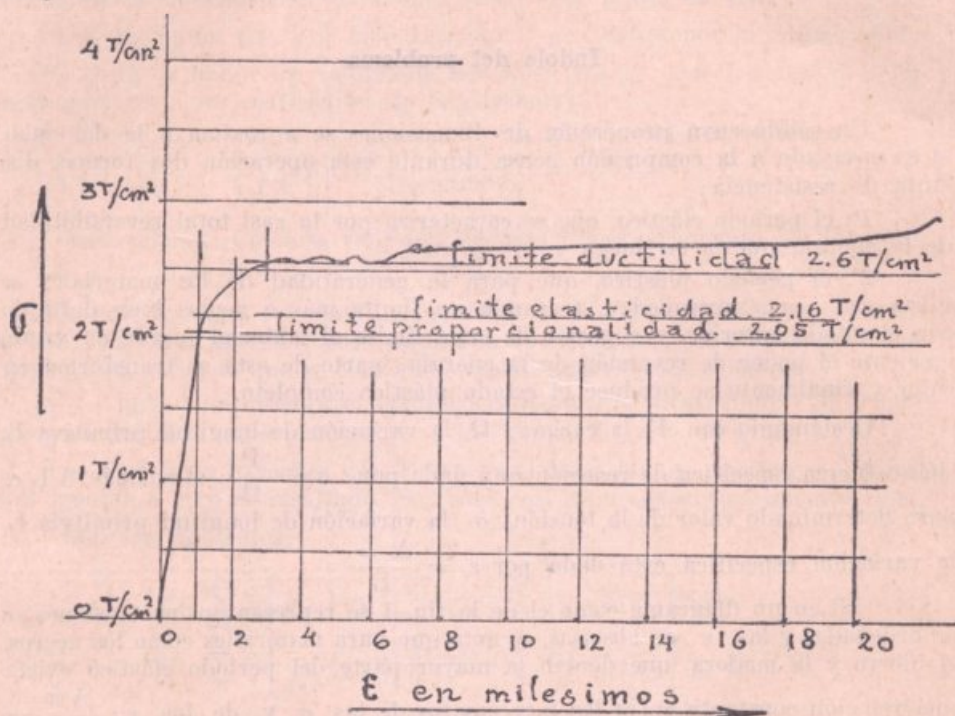


fig. 1

Se puede deducir, que si en el primer caso el material reacciona por su simple resistencia a la compresión (resistencia cúbica), en el segundo caso al aumentarse la longitud gradualmente, esta reacción cambia de carácter y se torna en una forma de equilibrio elástico. Este equilibrio es estable mientras la carga no llegue a cierto límite, pasado aquél se torna inestable.

El problema del pandeo investiga en el caso de los sólidos cargados de punta, la carga crítica que marca el límite del equilibrio elástico estable para cada clase de material y proporción de las dimensiones.

Para aclarar aún en mayor grado este criterio analizaremos a un sólido cargado de punta, empleando el método propuesto por el ingeniero W. Ritter y ampliado por el ing. Jorge Duclout (W. Ritter. Estática Gráfica. Zurich, 1888). (Jorge Duclout. Apuntes del curso de elasticidad. B. Aires 1909).

En la figura 2a., ff representa el eje de una columna empotrada en el plano aa. Una carga P_1 elegida al tanteo próxima a la carga crítica, actúa según una recta pp paralela al eje y a una distancia e' sumamente pequeña. Esta distancia está representada por el segmento e ampliado en una escala arbitraria que será la escala de los deslizamientos horizontales (elaciones); veremos enseguida que la relación de esta escala no la necesitamos conocer; y adoptamos en la fig. $e = 200$ cms.

La longitud del eje se ha dividido en un número entero de partes iguales Δ_1 , porque trataremos a la columna como resuelta en una cadena de mallas

KURT RICHTER

INGENIERO

Establecimiento Metalúrgico - Construcciones
Metálicas

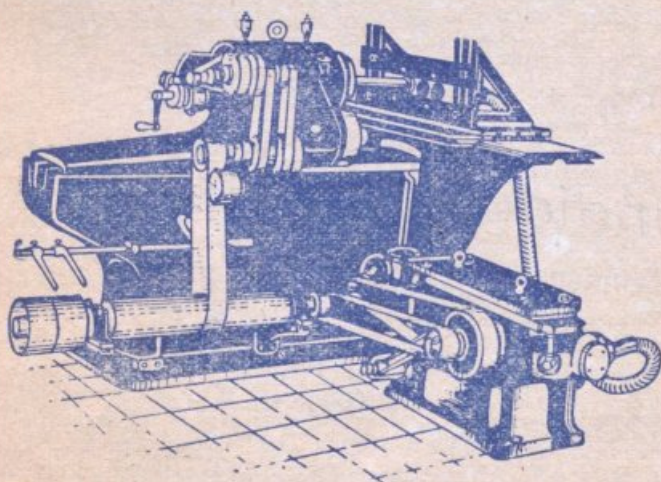
DORREGO 1951

Teléf. 22338

ROSARIO

TALLERES METALURGICOS

DE E. JOSÉ CAVALLETTO



ELABORACION DE
REPUESTOS PARA
CUALQUIER CLASE
DE AUTOMOVILES.

RECTIFICACION
DE CILINDROS PARA
MOTORES A
EXPLOSION CON
MAQUINAS ESPECIALES
DE ALTA PRECISION

STOCK PERMANENTE
DE PISTONES, AROS,
PERNOS Y VALVULAS

CORONAS DE ARRANQUE PARA VOLANTE.

Italia 746 = Teléfono 21681 = Rosario

Análisis

*Clinicos e
Industriales*

Gache & Scrimaglio



ROSARIO

Santa Fé 1294 • Tel. 6236

**Fluido Desinfectante
"CONTINENTAL"**

**ENVASES DE
1, 2, 5, 10 y 20 litros
y en Tambores**



Gache, Barbieri y Pensa

**Calle URQUIZA 2655
ROSARIO**

Candia & Isella

INGENIEROS - CONSTRUCTORES

Salta 1528

Rosario

Comisión Biblioteca y Cooperativa

PUBLICACIONES EN VENTA

Broggi Hugo. - Análisis matemático, vol. 1	\$ 5.50
Rey Pastor. - Análisis algebraico enc.	14.75
" " " " rust.	12.75
Garzón J. M. - Tratado de trigonometría elemental, enc.	5.95
Rouché E. y Comberousse Ch. - Tratado de geometría elemental, enc.	11.65
" " " " Traité de geometrie, rust.	8.60
" " " " " " " " enc.	11.65
Sallovitz A. - Geometría descriptiva, 2 tomos en un volumen, enc.	7.85
Loyarte Ramón G. - Física general. Tomo I	7.25
" " " " " " II	10.75
" " " " " " III	10.75
Rey Pastor. - Cálculo Infinitesimal, libro completo	8.75
" " Teoría de las funciones reales	9.75
Appel P. - Elements d'analyse mathématique	16.90
Tresse A. et Thybaut A. - Cours de geometrie analytique	9.75
Ranelletti C. - Elementos de geometría descriptiva y sus aplicaciones a la teoría de las sombras, etc., enc.	5.95
C. E. de I. de Rosario. - Apuntes de Geología	5.—
Frehner y A. Demichino. - Topografía	18.25
Folguera Grassi F. - Estabilidad de los edificios, etc.	3.20
Foerster Max. - Tratado práctico de estática de las construcciones, etc., enc.	19.25
Marseillan. - Tecnología del calor	2.—
Ucha M. y Gietz E. G. - Termodinámica técnica	2.75
Baulino C. - Trattato di macchine termiche	11.65
Dellepiane. - Geodesia	18.25
Butty E. - Resolución estática de sistemas planos (I parte)	9.—
" " " " " " (II parte)	6.25
Solarí. - Agrimensura Legal (2ª edición)	2.—
Dassen C. C. - Mecanismos	14.25
Flamant A. - Hydraulique, rust.	9.75
" " " " enc.	12.60
Spataro D. - Trattato completo di idraulica teórica e sperimentale, 3 tomos, rust.	38.25
Viappiani A. - Trattato di idraulica pratica, enc.	13.40
" " " " " " rust.	10.55
Pasini A. - Costruzione delle strade ordinarie e ferrate, rust.	14.50
Pomini O. - Costruzione di macchine, 4 tomos, rúst.	33.90
Schneidewind. - Ferrocarrile (Tomo I y Atlas)	9.—
Chassagny M. - Manuel theorique et pratique d'electricité, enc.	2.30
Thomälen A. - Electrotecnia, enc.	13.55
C. E. I. de Buenos Aires. - Electrotécnica, enc.	16.75
" " " " " " rust.	15.25

Candiani E. - Canales de navegación	7.25
.. .. Memorandum para el examen de Puertos	5.25
Dubbel H. - Máquinas y turbinas de vapor, enc.	19.25
Vanetta. - Puentes de Madera	3.75
Segovia. - Estudio Experimental de Puentes Metálicos	5.25
Jorini A. F. - Teoría y práctica de la construcción de puentes de madera, etc., enc.	13.55
Jorini A. F. - Teoría e pratica della costruzione del ponti, etc., rúst.	8.65
Kayser H. - Hormigón armado, enc.	3.20
Kersten C. - Construcciones de hormigón armado, enc.	19.25
Mörsch E. - Teoría e pratica del cemento armado, enc.	13.40
Tajani F. - Trattato moderno di materiale mobile ed esercizio delle ferrovie, 2 tomos, rúst.	21.15
Vanderrydt H. et Minsart E. - Cours d'exploitation des chemins de fer, rúst.	19.25
Vanderrydt H. et Minsart E. - Cours d'exploitation des chemins de fer, enc.	22.10
Latzina E. - Turbinas de vapor	5.75
.. .. Construcción de Máquinas	11.25
Zucal M. - Hidráulica Agrícola	14.—
Dupuis S. - Tables de logarithmes a sept decimales, enc.	7.40

NOTA. — Estos precios son exclusivamente para los socios.

OTRA. — Los libros que no se encuentren en la presente lista pueden ser solicitados a cualquier miembro de la comisión.

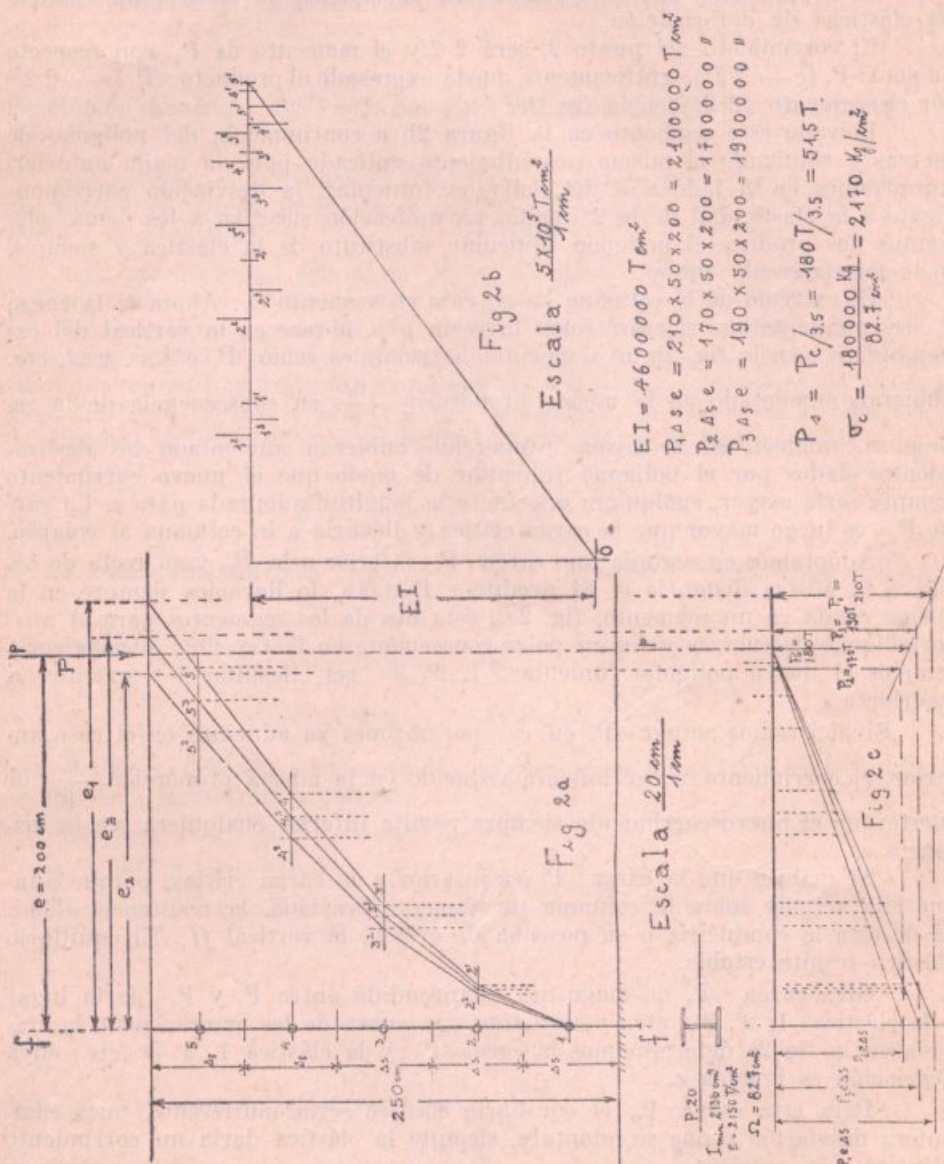
PUBLICACIONES RECIBIDAS

LIBROS: — Universidad y Democracia, **Alfredo L. Palacios**; Hambre, **Knut Hanssum**; Construcción de mampostería, **E. B. Castro**; Tecnología del calor, **F. Marseillan**; Examen de conciencia, **Dr. Aníbal Ponce**; Geometría Descriptiva, **Arturo Sallovitz** (1ª y 2ª parte); Geometría Descriptiva, **N. N.**; Manual del Tornero Mecánico, **S. Dinero**; Einstein explicado, **José Gilli**; Bajo la mirada de Lenin, **Alfredo Agorio**.

FOLLETOS: — Discusión de la ecuación general de segundo grado a dos variables, por **Ing. F. Sánchez Sarmiento**; Contribución a la Higiene Social. - Paludismo, **Dr. Carlos J. Omnés**; Definición, constitución y composición de materiales cementosos, **Ing. M. Durrieu**; Construcciones Geométricas, **Carlos Dieulefait**; Sobre la serie logarítmica, **Dr. Juan C. Vignaux**; Sobre el criterio logarítmico de las series dobles, **Dr. Juan C. Vignaux**; Anales de la Sociedad Española de estudios fotogramétricos N.º 1 y 2; Estudio analítico de una cuaderna con puntal y tablas, por **Ing. Alberto Klein**; Cómo desde los aires se puede medir la tierra, por **J. M. Torroja**; Ingeniería y Agrimensura Legal, por el **Ing. Luis Achával**.

REVISTAS: — La Ingeniería, Bs. Aires; Mecánica y Metalurgia, Bs. Aires; Revista Telegráfica, Bs. Aires; Radio Revista, Bs. Aires; Automobilia, París; Ingeniería y Construcción, Madrid; Ingeniería Internacional, Nueva York; El Estudiante Libre, Organó de la Asociación de los E. de Medicina, Montevideo; El Constructor Rosarino, Rosario; Revista de Arquitectura, Rosario; Radio Cultura, Bs. Aires; La Construcción Moderna, Bs. Aires; Revista del C. E. de Ingeniería de Córdoba; Revista del C. E. de Ingeniería de Buenos Aires; Revista del C. E. de Medicina de Rosario; El Arquitecto Constructor, Bs. Aires; Revista del C. E. de Química Industrial, Santa Fe; Revista del C. E. de Agronomía, La Plata; Boletín Phillips, Bs. Aires.

rígidas, unidas entre sí por articulaciones elásticas capaces de efectuar rotaciones iguales a las rotaciones relativas entre el plano superior e inferior del elemento elástico Δ_s y solicitado por un momento flector. De tal suerte resolveremos el problema en forma aproximada empleando en vez del cálculo infinitesimal, el cálculo con diferencias finitas.



El momento flector que obra así sobre la malla 1°, es Pe' , la rotación relativa entre su plano superior e inferior está dado por:

$$\theta_1' = \frac{P e' \Delta_s}{E I}$$

Si en la fig. 2b con O como polo, $E I$ tomado en escala conveniente como distancia polar (la unidad de $E I$ es Kg. cm^2) llevamos como fuerza el producto $P e'$ en un segmento a partir de la vertical del polo y en la misma escala adoptada para $E I$ (la unidad de este producto es también Kg. cm^2), y trazamos por la articulación 1 paralelas a las rectas polares; el segmento interceptado por esta recta sobre la bb representa la desviación del extremo

de la columna si únicamente la malla Δs , de la cadena se deformase y quedando rígido el resto de la columna. La desviación en cuestión la obtenemos en la misma escala arbitraria y sin determinar, por cuyo intermedio a la distancia infinitésima e' representamos por el segmento e ; por la razón de que habíamos tomado $P e \Delta s$ en vez de $P e' \Delta s$. La construcción efectuada es la aplicación del conocido método geométrico de Mohr para obtener las elásticas de deformación.

El corrimiento del punto 2, será $2'2''$ y el momento de P_1 con respecto a $2'$ será: $P_1(e - 2'2'')$, gráficamente queda expresado el producto: $P_1(e - 2'2'')$ por el segmento $(2'2'')$ en la fig. 2c.

Llevado este segmento en la figura 2b a continuación del polígono de fuerzas y siguiendo el mismo procedimiento aplicado para la malla anterior, encontramos en el lado $2'3'$ del polígono funicular, la desviación correspondiente a la elasticidad de la 2ª malla. La aplicación sucesiva a los demás elementos nos produce el polígono funicular sustituto de la elástica y siempre en la misma escala que e' .

El extremo de la columna ha corrido el segmento e_1 . Ahora si la carga P_1 en vez de actuar siempre sobre la recta $p p$, obrase en la vertical del extremo de e_1 , en la fig. 2b los segmentos horizontales como $P_1 e \Delta s$, $2'2''$, etc.

hubieran aumentado en la misma proporción $\frac{e_1}{e}$ en consecuencia de la semejanza, también en la misma proporción hubieran aumentado los deslizamientos dados por el polígono funicular de modo que el nuevo corrimiento siempre sería mayor, cualquiera que fuera la longitud adoptada para e . La carga P_1 es luego mayor que la carga crítica y llevaría a la columna al colapso.

Adoptamos en seguida una carga P_2 inferior a la P_1 y su recta de acción a la misma distancia e . Al producto $P_2 e \Delta s$ lo llevamos siempre en la misma escala en un segmento, fig. 2c.; ésta nos da los segmentos para el nuevo polígono de fuerzas y figura polar consecuente en la fig. 2b²; además construimos el nuevo polígono funicular 1, 2², 3² etc. Resulta el segmento e_2 inferior a e .

Si hiciéramos actuar P_2 en e_2 por razones ya aducidas en el caso anterior, el corrimiento e_2' se hubiera reducido en la misma proporción $\frac{e_2}{e}$ de suerte que el nuevo corrimiento siempre resulta inferior cualquiera sea la distancia e .

Se deduce que la carga P_2 es inferior a la carga crítica, porque aunque ella actuase sobre la columna previamente desviada, la resistencia elástica de ésta la conduciría a su posición de origen, la vertical ff . El equilibrio elástico resulta estable.

Otra carga P_3 de magnitud comprendida entre P_1 y P_2 daría lugar a la elástica 1, 2³, 3³, etc., y mediante una curva de los errores como la trazada en la fig 2c determinamos la carga P_0 y la elástica 1 2⁰ 3⁰, etc., cuya desviación es igual a e .

Para esta carga P_0 el equilibrio elástico sería indiferente, pues cualquiera desviación e que se adoptare, siempre la elástica daría un corrimiento idéntico.

En la práctica constructiva es necesario adoptar una cierta medida de seguridad en concordancia con el material a emplearse y que se aconseja para el acero dulce — factor de seguridad $s=4$; así la carga de seguridad a admitir sería:

$$\frac{P_0}{4}$$

Para fundición	$s = 8$
Para madera	$s = 8$ a 10
Para hierro soldado	$s = 5$

Una columna que en vez de empotrada en la base, termina en dos articulaciones se puede reducir al caso recién tratado, considerando que al defor-

marse la columna, la sección a la mitad de la altura permanece horizontal, por consiguiente esta columna se comporta como dos columnas empotradas y unidas entre sí en la sección de empotramiento.

El método expuesto encuentra aplicación aun cuando la columna fuere de sección variable, en tal caso en la figura polar se varía la distancia polar EI correspondiente al momento de inercia medio de cada elemento Δs .

Resolución Analítica del Problema para Columna de Sección Constante

En la figura 3 la columna articulada y guiada en A y B es sometida a una carga P cuya recta de acción se halla a una distancia muy pequeña e y es paralela a la recta AB .

Esta excentricidad arbitraria puede suponerse igualmente en el plano del eje yy (plano del dibujo) como en el plano xx ; pero si la rigidez mínima está en la dirección del plano yy (I_x es min.) es lógico que el valor crítico de P con excentricidad en el plano yy , será el valor determinante de la resistencia de la columna. Con respecto a una sección transversal cualquiera de abscisa x el momento flector será $P(e+y)$, siendo y la ordenada de la elástica de la columna deformada, y la ecuación diferencial de la elástica sería:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = - \frac{P(e+y)}{EI}$$

para EI constante ponemos $\frac{P}{EI} = \left(\frac{1}{K}\right)^2$ además $(e+y) = y_1$. Esta

vez la ecuación se escribe: $\frac{d^2 y_1}{dx^2} + \frac{y_1}{K^2} = 0$, cuya integración es:

$$y_1 = A \operatorname{sen} \frac{x}{K} + B \cos \frac{x}{K}$$

en esta ecuación deben determinarse las constantes de integración A y B por las condiciones límites del problema.

Así para $x=0$ será $y_1 = e$

para $x=l$ será $y_1 = e$

sustituidos nos dan $e = B$ además: $e = A \operatorname{sen} \frac{l}{K} + e \cos \frac{l}{K} \therefore$

$$A = - \frac{e \cos \frac{l}{K}}{\operatorname{sen} \frac{l}{K}}$$

sustituidas las constantes en la ecuación:

$$y_1 = e + y = -e \cos \frac{l}{K} \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{K}}{\operatorname{sen} \frac{l}{K}} + e \frac{\cos \frac{x}{K} \operatorname{sen} \frac{l}{K}}{\operatorname{sen} \frac{l}{K}}$$

o también:

$$y_1 = e + y = e \frac{\operatorname{sen} \frac{l-x}{K}}{\operatorname{sen} \frac{l}{K}}$$

la elástica resulta una curva senoidal; a media altura $\frac{l}{2}$ será la deflexión max.:

$$y_{1, \max} = l + y_{\max} = e + f = e \frac{\sin \frac{l}{2K}}{\sin \frac{l}{K}} = \frac{e}{2 \cos \frac{l}{2K}}$$

luego la deflexión está en proporción directa con la excentricidad e .

Si disponemos de P en $\frac{P}{EI} = \left(\frac{1}{K}\right)^2$ hasta que $\frac{1}{2K}$ se aproxima a: $\frac{\pi}{2}$; tenemos que para:

$$y_{\max} = e + f = \frac{e}{2 \cos \frac{\pi}{2}} = \frac{e}{0} = \infty$$

la flecha se haría infinitamente grande, lo que significa que P alcanzó el valor crítico del equilibrio elástico.

Si en $\frac{1}{2K} = \frac{\pi}{2}$ substituimos $K = \frac{l}{\sqrt{\frac{P}{EI}}}$ toma la forma: $l \sqrt{\frac{P}{EI}} = \pi$

de donde la carga crítica: $P_c = \frac{\pi^2}{l^2} EI$ de cuya expresión observamos que esta carga es independiente de la excentricidad e .

Para $e=0$ en la ecuación de la elástica resulta $f=0$ de modo que para una carga perfectamente centrada y una columna de eje absolutamente recto y material perfectamente homogéneo, se produciría el colapso repentinamente sin acusarse flexión previa al proximarse la carga a su valor crítico. Pero a la menor irregularidad en estas condiciones se produce una flecha que aumenta en proporciones crecientes y al aproximarse la carga a su valor crítico la deflexión tiende rápidamente hacia ∞ .

La fórmula $P_c = \frac{\pi^2}{l^2} EI$ es conocida como la fórmula de Euler; fué deducida por el matemático L. Euler en su célebre publicación "*Methodus inveniendi líneas curvas*". *Additamentum I De curvis elasticis*. (Lausanne, año 1744).

Analícemos todavía el mismo problema para otras condiciones de los extremos de la columna, comenzando con la columna empotrada en un extremo y libre en el otro, de acuerdo al esquema de la fig. 4.

Por el análisis del caso anterior hemos visto que una pequeña excentricidad de la carga no influye en la magnitud de la carga crítica; por esta razón puede simplificarse la ecuación general de la elástica poniendo $e=0$:

$$y = A \sin \frac{x}{K} + B \cos \frac{x}{K}$$

y determinamos las constantes A y B para las condiciones de este problema. Para $x=0$, será $y=0$ de donde resulta $B=0$.

Para $x=L$ será $\frac{dy}{dx} = 0$ de donde $0 = \frac{A}{K} \cos \frac{L}{K}$ esta condición se satisface igualmente para $A=0$ como para $\cos \frac{L}{K} = 0$; substituido en la

ecuación de la elástica $\Lambda = 0$ tendríamos $y = 0$; pero si $\cos \frac{L}{K} = 0$, o sea $\frac{L}{K} = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$ donde por la condición del problema haremos $n = 0$, entonces será: $\frac{L}{K} = \frac{\pi}{2}$ aquí sustituido $K = \frac{1}{\sqrt{\frac{P}{EI}}}$ dá: $P_c = \frac{\pi^2}{4L^2} EI$

introducido este resultado en la ecuación de la elástica bajo la forma: $\frac{1}{K} = \frac{\pi}{2L}$ esta aparece: $y = A \sin \frac{\pi x}{2L}$

A ha quedado indeterminado, así solamente pone en evidencia que en el momento de ceder la columna, la elástica será una curva senoidal.

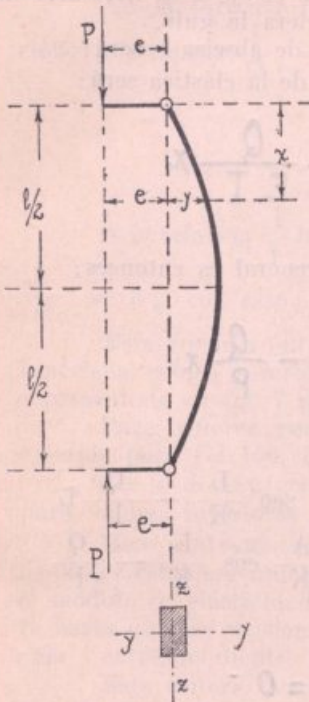


fig 3

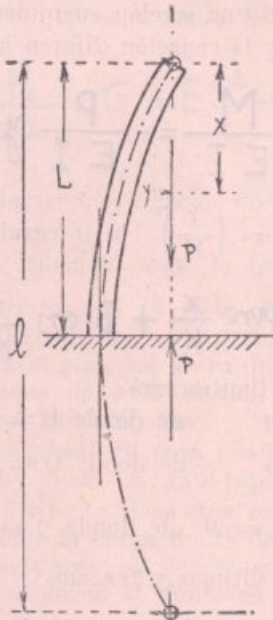


fig 4

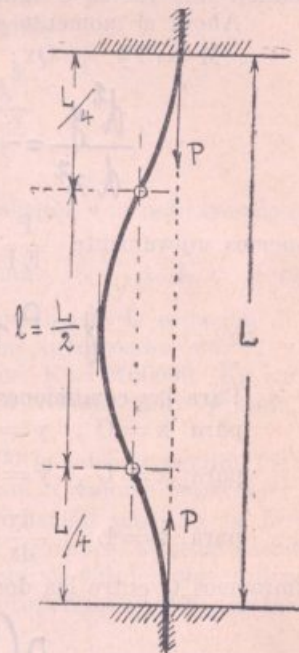


fig 5

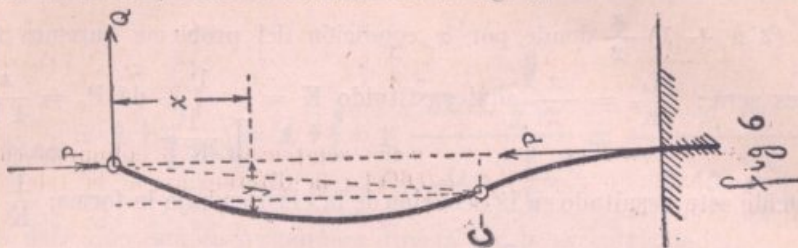
La expresión de P_c ya se podría haber deducido de la observación de la figura; porque la columna empotrada es una mitad de la columna del caso anterior, y haciendo $l = 2L$ en la fórmula del caso fundamental de Euler:

$$P_c = \frac{\pi^2}{l^2} EI \text{ obtenemos } P_c = \frac{\pi^2}{4L^2} EI.$$

Otro caso es el de la columna empotrada en los dos extremos como el indicado en figura 5, que puede asimilarse a la combinación de cuatro columnas empotradas cada una de una longitud $\frac{L}{4}$.

Si introducimos en la fórmula del caso fundamental $l = \frac{L}{2}$ la carga crítica estará dada por: $P_c = \frac{4\pi^2}{L^2} EI$.

Otro caso sería el de la columna empotrada en un extremo y articulada y guiada en el otro, como el indicado en la fig. 6.



Este caso sería reductible a la combinación de tres columnas empotradas, pero entonces el punto A se desplazaría en un segmento igual a la ordenada del punto c; y esta desviación no es compatible con la condición de A como punto guiado. Para mantener este punto sobre el eje x es necesario introducir una fuerza Q igual a la reacción que ofreciera la guía.

Ahora el momento en una sección cualquiera de abscisa x será:

$M = Py + Qx$; y la ecuación diferencial de la elástica será:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI} y - \frac{Q}{EI} x$$

ponemos nuevamente $\frac{P}{EI} = \left(\frac{1}{K}\right)^2$ la integral general es entonces:

$$y = A \operatorname{sen} \frac{x}{K} + B \cos \frac{x}{K} - \frac{Q}{P} x$$

Para las condiciones límites será:

para $x=0$, $y=0$ de donde $B=0$

para $x=L$, $y=0$ de donde $0 = A \operatorname{sen} \frac{L}{K} - \frac{Q}{P} L$

para $x=L$, $\frac{dy}{dx} = 0$ de donde $0 = \frac{A}{K} \cos \frac{L}{K} - \frac{Q}{P}$

eliminamos Q entre las dos últimas y tenemos:

$$A \left(\frac{L}{K} \cos \frac{L}{K} - \operatorname{sen} \frac{L}{K} \right) = 0$$

de aquí $\frac{L}{K} \cos \frac{L}{K} - \operatorname{sen} \frac{L}{K} = 0$, o también $\frac{L}{K} = \operatorname{tg} \frac{L}{K}$

cuyas raíces obtenidas por el método de aproximación son:

$$\frac{L}{K} = 0; \quad \frac{L}{K} = 4,493 \quad (257^\circ 27' 12'')$$

$$\frac{L}{K} = 7,725 \quad (442^\circ 37' 28''); \quad \frac{L}{K} = 10,904 \quad (624^\circ 45' 37'') \text{ etc.}$$

La resolución compatible con el problema será la menor después de $\frac{L}{K} = 0$;

$$\frac{L}{K} = 4,493 \quad \therefore \frac{P}{EI} L^2 = 4,493^2 \cong 20 \cong 2\pi^2$$

$$\text{finalmente: } P_c = \frac{20 EI}{L^2} = \frac{2\pi^2 EI}{L^2}$$

Para hacer la comparación entre las longitudes de pandeo l del caso fundamental con L del presente, igualamos las dos expresiones:

$$\frac{2\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2}{l^2} EI \quad \therefore \quad l = \frac{L}{\sqrt{2}} = 0,707L$$

Si se considerase este caso como compuesto de 3 columnas empotradas se hubiera obtenido $l = 2/3 L = 0,666L$; la diferencia con la relación exacta es, pues, reducida.

La fórmula de Euler y los resultados de los experimentos

En la fórmula fundamental dividimos ambos miembros por Ω (la sección) y ponemos $\frac{I}{\Omega} = r^2$ (r es el radio de giro):

$$\frac{P_c}{\Omega} = \sigma = E\pi^2 \frac{r^2}{l^2}$$

A la relación $\frac{l}{r}$ la llamaremos relación de esbeltez y la indicaremos con i . $\frac{l^2}{r^2} = i^2$, con esto la ecuación toma la forma: $\sigma i^2 = E\pi^2 = \text{const.}$

Esta función entre la tensión σ y la relación i es la ecuación de una hipérbola cúbica referida al centro y coordenadas ortogonales $x=i$; $y=\sigma$ representada en fig. 7 para el material acero dulce. $E=2100000 \text{ Kg/cm}^2$.

Para valores pequeños de i la tensión σ resulta muy grande, por ejemplo para $i=100$, $\sigma = 2100 \text{ Kg/cm}^2$.

$i=10$, $\sigma = 210000 \text{ Kg/cm}^2$. Si para $i=100$ la tensión resulta factible; para valores inferiores de i crece σ rápidamente a valores imposibles.

Este contrasentido aparente tiene una explicación sencilla; la fórmula de Euler establece únicamente la carga límite del equilibrio elástico basado en el módulo de elasticidad constante; en consecuencia su validez rige únicamente hasta que las tensiones alcancen al límite de proporcionalidad y a la relación i correspondiente.

Este criterio ha quedado corroborado por los experimentos de *Tetmayer* efectuados sobre columnas de alma llena de los distintos materiales y variadas relaciones de esbeltez.

Las diferentes secciones ensayadas aparecen en fig. 8.

Los términos medios de los resultados han sido marcados con pequeños círculos en la fig. 8. Se nota para valores de $i \sim 110$ una perfecta concordancia con los valores teóricos de la fórmula de Euler.

Para valores de $i < 110$ los resultados experimentales son muy diferentes de los datos teóricos, como era de esperar.

En mencionado investigador, basándose en sus numerosos ensayos, dió para cada material los límites de validez de la fórmula de Euler los consignados en la planilla que sigue:

Madera	$E = 100$	T/cm. ² límite	$i = 100$
Fundición	$E = 1000$	" "	$i = 80$
Hierro soldado	$E = 2000$	" "	$i = 112$
Hierro dulce	$E = 2150$	" "	$i = 105$
Acero	$E = 2250$	" "	$i = 90$
Hormigón	$E = 200$	" "	$i = 200$

Las dimensiones empleadas en la práctica de las construcciones, para barras comprimidas y columnas, en la gran mayoría de los casos, quedan con su relación i por debajo de los límites de validez: por esta razón *Tetmayer* ha traducido en las siguientes fórmulas sus resultados empíricos:

Hierro soldado para $i < 112$; $\sigma_e = 3,03 - 0,0129i$ T/cm².

Acero dulce de resistencia inferior a 4,5 T/cm²; para $i < 105$,
 $\sigma_e = 3,1 - 0,0114i$ T/cm².

Acero dulce de resistencia superior a 4,5 T/cm²; para $i < 105$,
 $\sigma_e = 3,21 - 0,0116i$ T/cm².

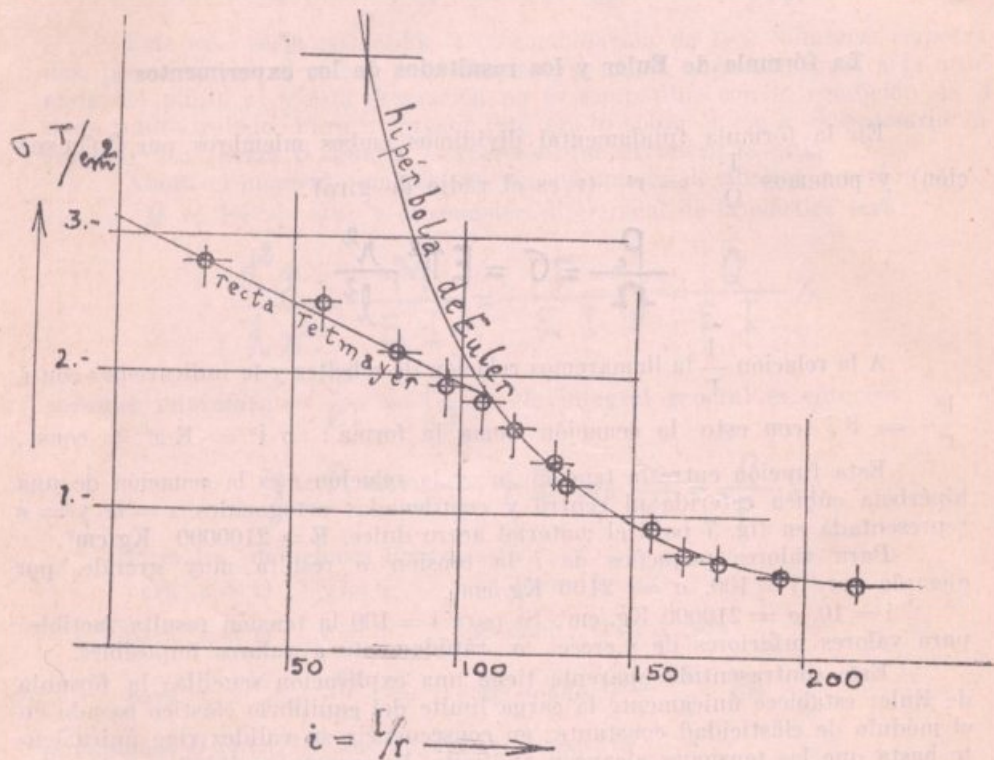


fig. 7

Acero níquel porcentaje entre 2 y 3,7 por ciento; para $i < 81$,
 $\sigma_e = 4,5 - 0,021i$ T/cm².

Madera, para $i < 100$, $\sigma_e = 0,293 - 0,00194i$ T/cm².

Fundición, para $i < 80$, $\sigma_e = 7,76 - 0,12i + 0,00053i^2$ T/cm².

Fórmulas empíricas relativas a los mismos ensayos y otros análogos han sido compuestas por Hodgkinson, Schwarz, Rankine, Ostenfeld, Johnson, Strand; y están citadas en distintas publicaciones y en los manuales.

En Alemania en 1925 se dictó un reglamento oficial para construcciones, el que en su referencia a columnas y barras comprimidas, prescriben para cada valor de i la tensión de seguridad σ_s correspondiente, por medio de coeficientes ω , que deben aplicarse como divisor de la tensión cúbica admisible.

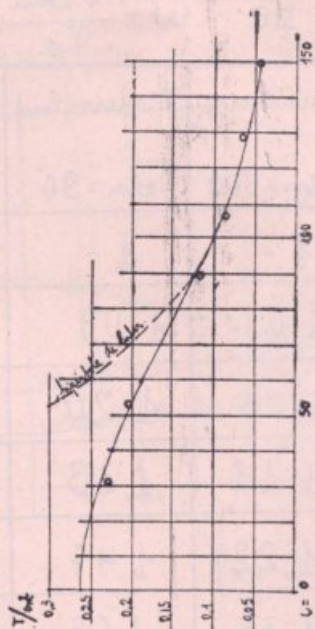
Por ejemplo, para acero dulce $\sigma_{adm} = 1400$ Kg./cm²; entonces para

determinada relación de esbeltez i , a la que corresponde el coeficiente ω , la tensión de seguridad a permitir será:

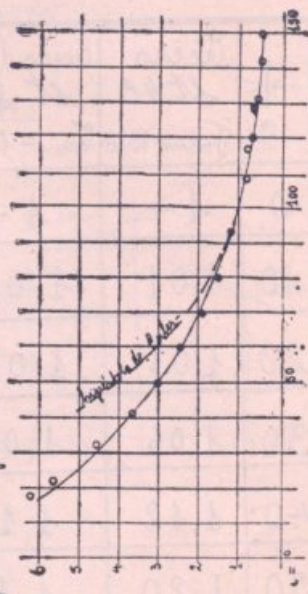
$$\sigma_s = \frac{\sigma_{adm}}{\omega} = \frac{1400 \text{ Kg/cm}^2}{\omega}$$

O J L ≠ ≠ T [] [] I

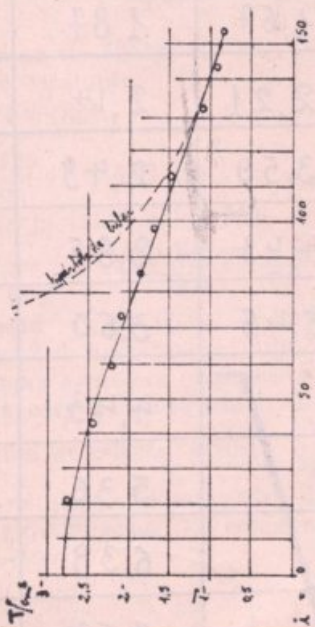
Secciones empujadas.



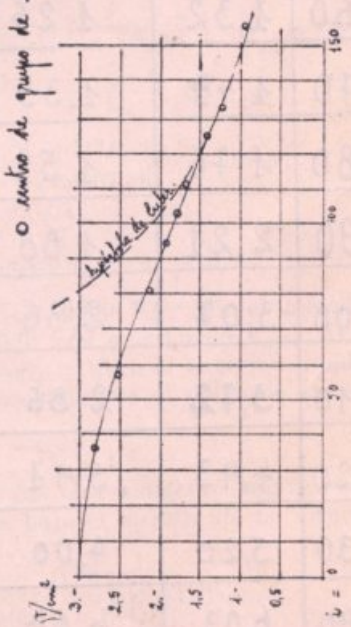
Madera.



Fundición



Hierro soldado



Acero dulce

fig 8

En la formación de estos coeficientes ω se ha tenido en cuenta un coeficiente de seguridad variable con i ; por ejemplo en el campo de la validez de la fórmula de Euler y material acero dulce $s=3,5$; para $i < 100$ el coeficiente de seguridad disminuye y es 1,71 para $i=0$. El coeficiente s no se refiere a la tensión de ruptura, sino que considera como carga crítica al

TABLAS

Valores de $w = \frac{\sigma_{adm}}{\sigma_d}$

$\frac{h}{d}$	Acero St 48 $\sigma_{adm} = 1820$	Acero dulce St 37 $\sigma_{adm} = 1400$	Fundición $\sigma_{adm} = 900$	Madera (Pino) $\sigma_{adm} = 90$	Madera Roble, abeto $\sigma_{adm} = 100$
0	1.-	1.-	1.-	1.-	1.-
10	1,01	1,01	1,01	1,09	1,10
20	1,03	1,02	1,05	1,20	1,22
30	1,06	1,05	1,11	1,33	1,36
40	1,12	1,10	1,22	1,47	1,53
50	1,20	1,17	1,39	1,65	1,74
60	1,32	1,26	1,67	1,87	2,00
70	1,49	1,39	2,21	2,14	2,35
80	1,76	1,59	3,50	2,49	2,81
90	2,21	1,88	4,43	2,95	3,48
100	3,07	2,36	5,45	3,60	4,50
110	3,72	2,86	/	4,43	5,54
120	4,43	3,41		5,36	6,70
130	5,20	4,00		6,39	7,99
140	6,03	4,64		7,53	9,41
150	6,92	5,32		8,77	10,97

límite de ductilidad = a 2400 Kg./cm.² para el acero dulce. El gráfico de la fig. 9 muestra la variación de estos coeficientes.

La aplicación de este reglamento es muy sencilla y expeditiva para el cálculo de columnas y barras comprimidas, y reduce a un mínimo la posibilidad de error de cálculo. Por esta razón sería recomendable su adopción en los reglamentos de edificación.

En la página anterior se dan las tablas mencionadas.

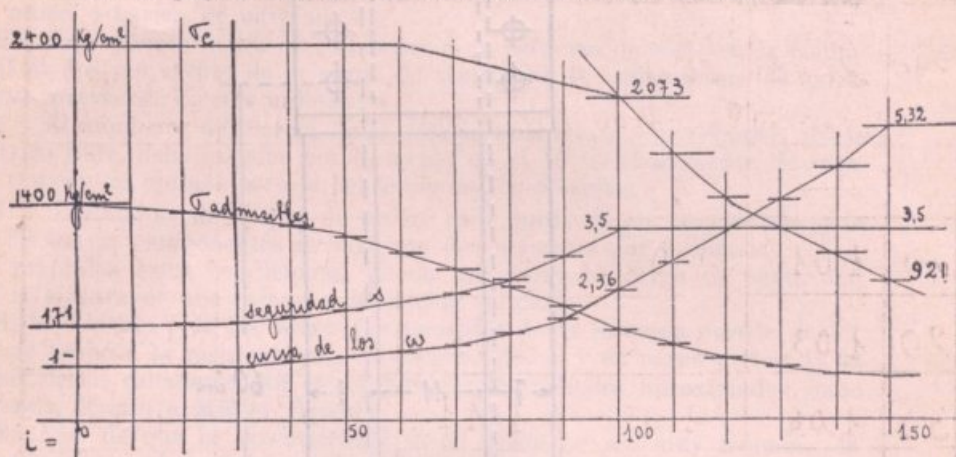


fig 9

Aplicación de las tablas

Una columna de 5,00m. de piso a piso es de un perfil I. N. 20, ala ancha de espesor constante.

$I_{min.} = 2136 \text{ cm.}^4$ $\Omega = 82,7 \text{ cm.}^2$

$r = \sqrt{\frac{2136}{82,7}} = 5,07 \text{ cm.}$ $i = \frac{l}{r} = \frac{500 \text{ cm}}{5,07 \text{ cm}} = 98,5$

de la tabla $\omega = 2,36 - 1,5 \times 0,048 = 2,3$.

$\sigma_s = \frac{\sigma_{adm}}{\omega} = \frac{1400 \text{ Kg/cm}^2}{2,3} = 608 \text{ Kg/cm}^2$ $s = 3,5$

carga de seguridad $P_s = \Omega \sigma_s = 82,7 \times 608 = 50000 \text{ Kg.}$ (en el método gráfico de la fig. 2 se había encontrado $P = 180 \text{ T.}$ con $s = 3,5$ da $P_s = 51,5 \text{ Ton.}$) Si la columna estuviera empotrada en la base y libre el extremo donde se ha aplicado la carga, la longitud l debería considerarse el doble de L ; en tal caso la relación de esbeltez sería: $\frac{1000 \text{ cm}}{5,07 \text{ cm}} = 197$.

La tabla no alcanza a este valor de i porque el reglamento recomienda $i = 150$ como límite superior. La columna queda bajo el alcance de la fórmula de Euler $i > 105$.

$P_c = \frac{\pi^2}{4} \frac{EI}{L^2} = \frac{9,85}{4} \cdot \frac{2100 \times 2136}{500^2} = 44 \text{ Ton.}$

coeficiente de seguridad $s = 4$. $P_s = \frac{44}{4} = 11 \text{ Ton.}$

Aunque en otro capítulo se tratará de la teoría de las columnas armadas y el esfuerzo de corte en el pandeo, es del caso mencionar a continuación

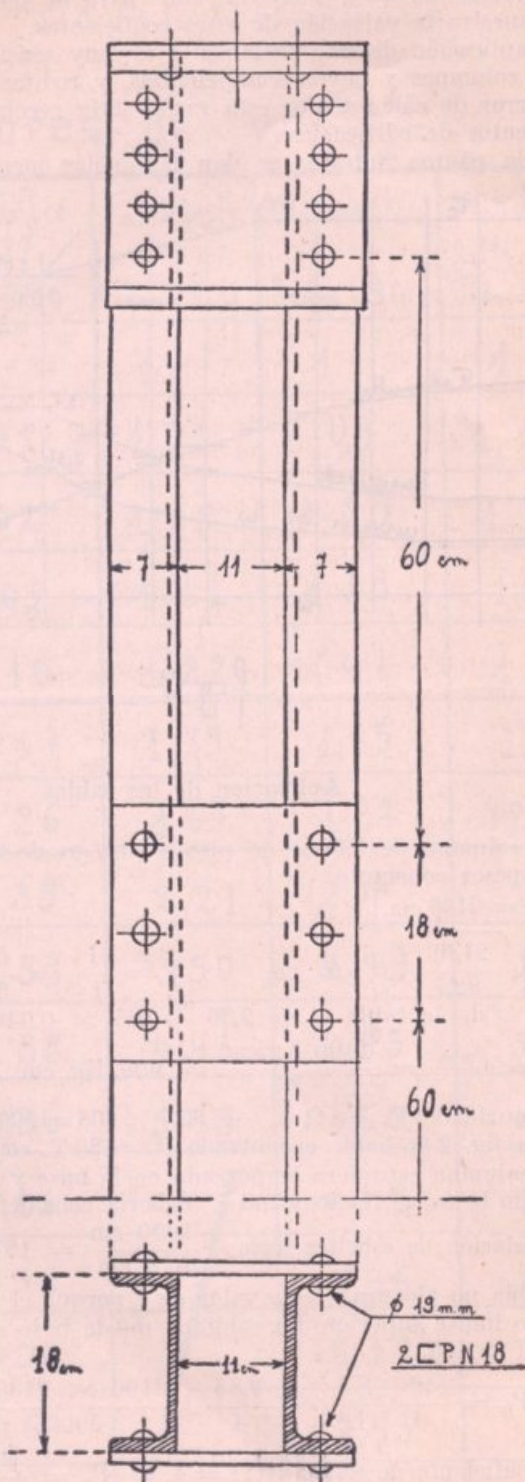


fig 10

unas disposiciones elementales del reglamento citado, y que es conveniente observar al proyectarse estas estructuras.

1º.) En las columnas compuestas con enrejado o chapas, la relación i de las partes componentes no debe exceder a la relación de esbeltez de la columna total, ni tampoco exceder del número 30.

Para establecer esta relación de una parte componente, puede adoptarse como longitud la distancia libre entre los remaches extremos de las chapas de unión o barras de enrejado.

2º.) Las uniones deben corresponder a un esfuerzo de corte en la columna igual al dos por ciento de la carga de seguridad P_s , además en los extremos deben preverse fuertes uniones.

3º.) El momento de inercia de la sección compuesta con respecto al eje baricéntrico libre, debe exceder por lo menos en el 10 % al momento de inercia con respecto al eje que corte a las secciones componentes.

4º.) Tratándose de chapas de unión, cada junta de las chapas con cada una de las barras componentes se hará con dos remaches por lo menos.

Cumplidas estas condiciones, puede calcularse la carga de seguridad como si se tratara de una columna de sección solidaria.

Si la relación i de las barras componentes de la columna excede de 30, afecta este hecho a la resistencia de la columna toda; y su carga crítica y de seguridad deben calcularse por cualquiera de los métodos aproximados como de Engesser, Krohn o Müller Breslau.

En caso de que la excentricidad de la carga no sea muy pequeña, la máxima tensión en el material puede calcularse sumando a la tensión de pandeo, la correspondiente al momento flector que resulta de la traslación de la carga al baricentro de la sección.

Para una carga P con excentricidad e , además, conocida la sección y su relación i , de la tabla obtenemos el coeficiente de pandeo ω . La tensión de pandeo será: $\sigma_1 = \frac{P \cdot \omega}{\Omega}$ y la tensión debida al momento Pe será $\sigma_2 = \frac{M}{W}$

$$\text{La tensión máxima será: } \sigma_{\max} = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{P \cdot \omega}{\Omega} + \frac{M}{W}$$

ésta no deberá exceder a σ_{adm}

Como aplicación dimensionaremos una columna para condiciones análogas al caso anterior; columna que termina en dos articulaciones, carga céntrica de 50 Ton. (fig. 10).

Probamos con 2 \square N. 16. $\Omega = 2 \times 24 \text{ cm.}^2$ $I_x = 2 \times 925 \text{ cm.}^4$.

Comencemos el cálculo para el eje que interesa ambas secciones, si satisface la sección adoptada distanciaremos los hierros entre sí de modo que el momento de inercia para el eje libre resulte en un 10 % mayor.

$$r = \sqrt{\frac{2 \times 925}{2 \times 24}} = 6,2 \text{ cm.} \quad i = \frac{500}{6,2} = 80,5$$

de la tabla $\omega = 1,59$ $\sigma_s = \frac{1400}{1,59} = 880 \text{ Kg./cm.}^2$.

$$P_s = 2 \times 24 \times 880 = 42000 \text{ Kg. (insuficiente).}$$

Ensayamos 2 \square N 18. $\Omega = 2 \times 28 \text{ cm.}^2$ $I_x = 2 \times 1354 \text{ cm.}^4$.

$$r = \sqrt{\frac{2 \times 1354}{2 \times 28}} = 6,95 \text{ cm} \quad i = \frac{500}{6,95} = 72$$

de la tabla $\omega = 1,39 + 2 \times 0,002 = 1,43$ $\sigma_s = \frac{1400}{1,43} = 980 \text{ Kg./cm.}^2$.

$$P_s = 2 \times 28 \times 980 = 55.000 \text{ Kg.}$$

corresponde, pues, 2 \square N 18; la distancia debe ser tal que:

$$I_y = I_x + 10 \% = (2 \times 1354) + (2 \times 135) = 2978 \text{ cm.}^4$$

Esto corresponde a una distancia libre de 10,3 cm. \cong 11 cm.

Distancia entre remaches extremos de las chapas:

$$J_{\min} = 114 \text{ cm}^4 \quad \Omega = 28 \text{ cm}^4 \quad i \text{ no menor de } 30.$$

$$r = \sqrt{\frac{114}{28}} = 2 \quad l = i \times r = 30 \times 2 = 60 \text{ cm.}$$

Esfuerzo de corte 2 % de 50.000 Kg. = 1.000 Kg.; la distancia libre es 11 cm., la distancia entre e. de g. de las secciones es: $11 + 2 \times 1,9 = 14,8 \text{ cm.}$

$$\text{Esfuerzo rasante: } \frac{1000 \text{ Kg.}}{14,8 \text{ cm}} = 67,5 \text{ Kg./cm.}$$

Si adoptamos las chapas de 22 cm. de ancho y 18 cm. entre remaches, la distancia de eje a eje de las uniones será 60 cm. + 18 cm. = 78 cm. El esfuerzo rasante sobre esta longitud será: $78 \text{ cm.} \times 67,5 \text{ Kg./cm.} = 5250 \text{ Kg.}$

Sobre los dos remaches actúa un momento de $5250 \text{ Kg.} \times 9 \text{ cm.} = 47.500 \text{ Kg.cm.}$; en cada remache:

$$\frac{47500 \text{ Kg.cm}}{18 \text{ cm.}} = 2640 \text{ Kg en dirección horizontal.}$$

$$\frac{5250 \text{ Kg}}{3} = 1740 \text{ Kg. en dirección vertical.}$$

$$\text{resultante } \sqrt{2640^2 + 1740^2} = 3200 \text{ Kg.}$$

remache de 19 mm. al corte simple con $T = 1000 \text{ Kg./cm.}^2$ resiste 3142 Kg.

Otra solución del Problema

La barra comprimida de la fig. 11, articulada en los dos extremos, la imaginamos deformada por una fuerza de intensidad cualquiera, por ejemplo 1 Ton., aplicada en el punto medio y con dirección normal al eje.

Si f es la flecha, el trabajo de deformación o energía potencial acumulada en la barra, es $\frac{1}{2} . l . f$.

Por causa de la deformación, la longitud entre articulaciones ha disminuido en una cantidad δ ; que es la diferencia entre la longitud del arco y la cuerda.

Sobre la barra deformada aplicamos, en las articulaciones, 2 fuerzas P cuyas rectas de acción es la cuerda; y atribuimos a P una magnitud tal que sea el límite para que la columna, empleando el potencial acumulado, todavía pueda recobrar su forma primitiva al retirar la carga transversal.

El trabajo restituído será $P \delta$ y para un sólido perfectamente elástico.

$$1. \frac{1}{2} . f . = P \delta \quad \text{o} \quad P = \frac{f}{2 \delta} \quad (\text{a}) \quad \text{donde } P \text{ será la carga crítica para}$$

la columna.

Andrée en su obra "Die Statik des Eisenbanes" y también Föepl en su obra "Drang und Zwang" proponen la resolución expuesta en principio; pero al calcular δ adoptan arbitrariamente para la elástica una curva sinusoidal; adopción que no se justifica.

A juicio del suscripto corresponde hallar la ecuación de la elástica correspondiente al estado de carga 1 Ton., en el punto medio, cuya elástica será una parábola cúbica; y para esta línea se debe hallar la diferencia, entre la longitud de la curva y la cuerda.

En la fig. 12 se indica el diagrama de momentos para tal estado de carga.

La elástica se obtiene, de acuerdo a Mohr, como diagrama de momentos de la viga sometida a cargas dadas por el diagrama de momentos flectores reducidos en EI . En caso de que EI sea constante, puede omitirse la división por este valor.



Fig. 11

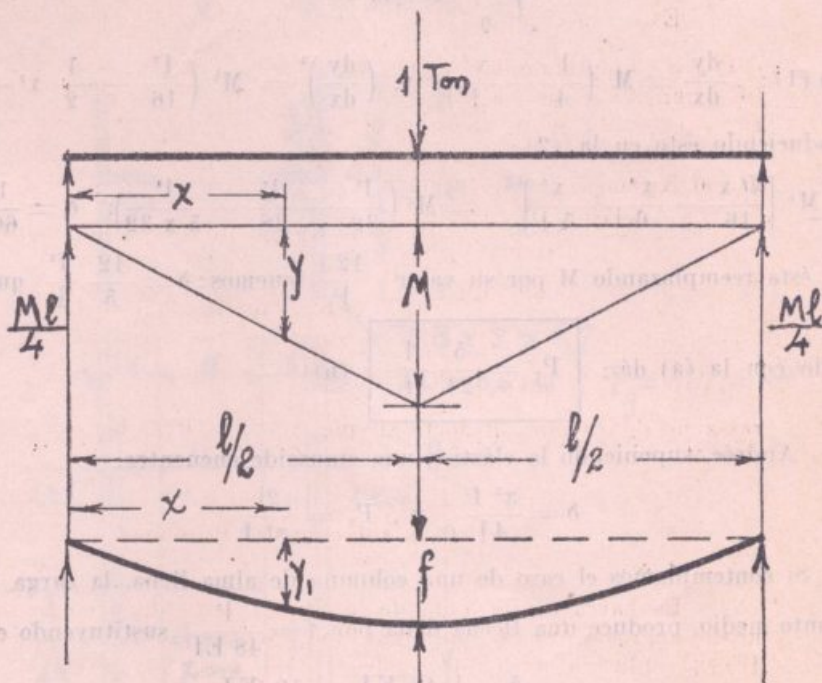


Fig. 12

Siendo M la ordenada máxima del diagrama de momentos flectores o sea de cargas, una ordenada correspondiente a la abscisa x está dada por:

$Y = \frac{2Mx}{l}$ y el momento Y_1 , o sea la ordenada en la elástica, estará dada por:

$$Y_1 = \frac{Ml}{4} x - \frac{M}{l} x^2 = \frac{x}{3} = M \left(\frac{1}{4} x - \frac{x^2}{3l} \right) \quad (1)$$

para un valor de x entre 0 y $\frac{l}{2}$. Además, para $x = \frac{l}{2}$ será $Y_1 = f$; reem-

plazando este valor en la ecuación anterior:

$$f = M \left(\frac{l^2}{8} - \frac{l^2}{24l} \right) = M \frac{l^2}{12} \quad \text{o tambien } M = \frac{12f}{l^2}$$

Hallemos la longitud de la curva de la ecuación (1).

$$S = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} ds = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}$$

El binomio desarrollado es: $\left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{dy}{dx} \right)^4 \text{ etc.} \right]$ siendo $\frac{dy}{dx}$ la tangente a la elástica, muy pequeña, puede despreciarse $\left(\frac{dy}{dx} \right)^4$; entonces la diferencia entre arco y cuerda está expresada en general por:

$$\delta = 2 \int_0^l \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx \quad (2)$$

en la (1): $\frac{dy}{dx} = M \left(\frac{1}{4} - \frac{x^2}{l^2} \right)$; y, $\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = M^2 \left(\frac{1^2}{16} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{l^2} + \frac{x^4}{l^4} \right)$

introduciendo esto en la (2):

$$\delta = M^2 \left[\frac{1^3 x}{16} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5 l^2} \right]_0^l = M^2 \left(\frac{1^4}{32} - \frac{1^4}{48} - \frac{1^4}{5 \times 32} \right); \delta = \frac{1}{60} M^2 l^4$$

y en ésta reemplazando M por su valor $\frac{12 f}{l^2}$ tenemos: $\delta = \frac{12}{5} \frac{f^2}{l}$ que com-

binado con la (a) dá:
$$P_c = \frac{5}{24} \frac{l}{f} \quad (b)$$

Andréc, suponiendo la elástica una senoide encuentra:

$$\delta = \frac{\pi^2 f^2}{4l} \quad \text{y} \quad P_c = \frac{2l}{\pi^2 f}$$

Si contemplamos el caso de una columna de alma llena, la carga 1, en el punto medio, produce una flecha dada por $f = \frac{l^3}{48 EI}$ sustituyendo en (b)

$$P_c = \frac{5}{24} \frac{1 \cdot 48 EI}{l^3} = \frac{10 EI}{l^3}$$

la fórmula de Euler da: $P_{cL} = \frac{\pi^2}{l^2} EI = 9,86 \frac{EI}{l^2}$

La gran ventaja de la fórmula (b) sobre la de Euler reside en que también es aplicable al caso de columnas compuestas con enrejado, o simples chapas de unión. Tales sistemas son mucho más flexibles que barras de alma llena, es decir, al someterlas a la carga de 1 Ton. en el punto medio, la flecha f será mayor en la barra compuesta a causa de la deformación del enrejado, y, en mayor grado todavía, tratándose del sistema con chapas de unión.

Como aplicación calcularemos por la fórmula (b) la carga crítica de un tipo de barra comprimida, ensayado en París en 1906 en el "Conservatoire National des arts et metiers", con el objeto de establecer la influencia de las chapas de unión en las barras de los puentes.

La fig. 13 consigna la sección de la barra compuesta $4 \lfloor 8 \times 5 \times 0.7$ unidos por chapas de 13 cm. de ancho por 2 cm. de espesor, distanciados en 96 cm. de centro a centro; el I total con respecto al eje libre es $= 2.149 \text{ cm.}^4$;

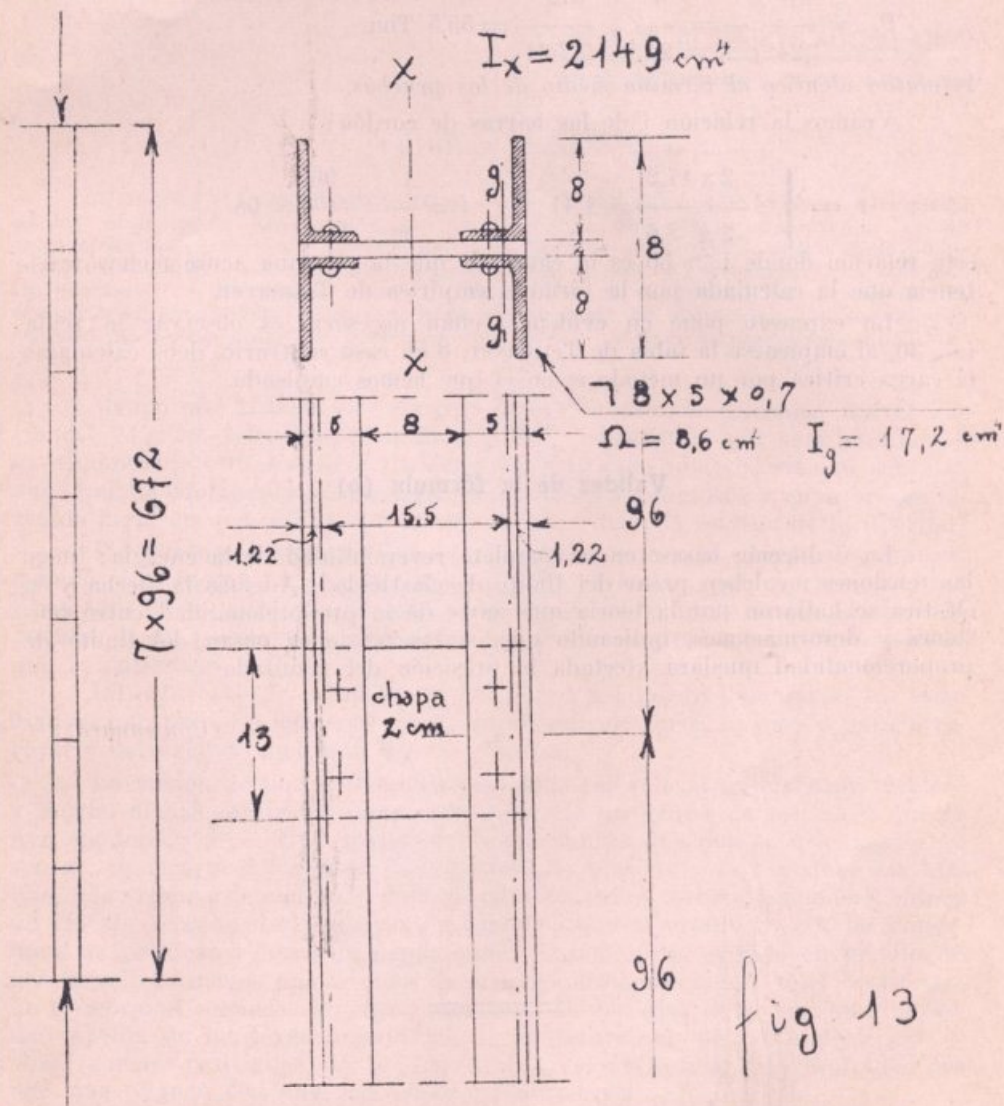
la longitud total $7 \times 96 = 672 \text{ cm.}$; la relación de esbeltez $\frac{l}{i} = 85$. Una se-

rie de estas barras fueron ensayadas, en cuanto a su resistencia al pandeo, en el sentido del momento de inercia mayor (eje neutro I_x), adoptándose un dispositivo para que no pudiera ceder la columna en sentido transversal.

La relación de esbeltez $85 < 112$ indica que la fórmula de Euler no es aplicable. Esta daría una carga crítica:

$$P_e = 9.86 \frac{EI}{l^2} = 9.86 \frac{2100 \times 2149}{672^2} = 98.5 \text{ Ton.}$$

Según Tetmayer, para la citada relación i , corresponde un $\sigma_c = 2.196$ Kgs./cm.² y una carga crítica $4 \times 8,6 \times 2.196 = 75 \text{ Ton.}$



El término medio de los ensayos dió 55 Ton. como carga crítica. Nótese que la sección compuesta tiene una resistencia muy disminuida.

Si designamos con a la distancia de centro a centro de las chapas de unión, con I_c el momento de inercia del cordón compuesto de los hierros \sqsubset ; Ω_c su sección; I_p el momento de inercia de la chapa de unión, con h la distancia entre los baricentros de los cordones, tenemos la siguiente expresión de la flecha f causada por la fuerza de 1 Ton., actuando en el medio de la columna:

$$P_n = \frac{P = 1 \text{ Ton.}}{4}$$

$$f = \frac{7}{24} \frac{P_n a^3}{E I_c} + \frac{13}{24} \frac{P_n a^2 h}{E I_p} + \frac{119}{2} \frac{P_n a^3}{h^2 \Omega_c E}$$

sustituyendo los valores, tenemos: $f = 0,89 + 0,0245 + 1,62 = 2,534$ cm.

La fórmula antes citada es deducida, más adelante, por medio de la ecuación de Mohr.

Si se emplea el valor de f , ya encontrado, en la fórmula (b), se tiene:

$$P_c = \frac{5}{24} \frac{1}{f} \frac{5}{24} \frac{672}{2,534} = 55.5 \text{ Ton.}$$

resultado idéntico al término medio de las pruebas.

Veamos la relación i de las barras de cordón:

$$r = \sqrt{\frac{2 \times 17,2}{2 \times 8,6}} = 1,41 \quad i = \frac{1}{r} = \frac{96}{1,41} = 68$$

esta relación donde $i > 30$ es la causa de que la columna acuse menor resistencia que la calculada por la fórmula empírica de Tetmayer.

Lo expuesto pone en evidencia cuán necesario es observar la regla $i < 30$, al emplearse la tabla de Tetmayer, o en caso contrario, debe calcularse la carga crítica por un método como el que hemos empleado.

Validez de la fórmula (b)

La deducción básase en la completa reversibilidad de la energía; luego las tensiones no deben pasar del límite de elasticidad. Además la flecha y la elástica se hallaron por la teoría que parte de la proporcionalidad entre tensiones y deformaciones, indicando que, si las tensiones pasan del límite de proporcionalidad quedará afectada la precisión del resultado.

(Continuará).

¿QUE ES LA EVOLUCION?

Conferencia de carácter cultural pronunciada el 17 de Octubre de 1925 en el salón de actos de la Facultad de Ingeniería, a pedido de la Comisión de "Extensión Universitaria del Centro Estudiantes de Ingeniería de Rosario".

Por el Dr. ALFREDO CASTELLANOS

Profesor de Mineralogía y Geología de la Facultad

PRIMERA PARTE

SUMARIO (1): INTRODUCCION. — Actualidad del tema elegido. - El espíritu de los estudiantes. - Orientación que debe tener la universidad argentina. - Acción cultural de los gobiernos. - Efectos de la democracia argentina. - Acción renovadora de los estudiantes. - La investigación científica en el país. - Formación de la conciencia estudiantil. - El proceso Scopes. - Significado de la prohibición de enseñar la evolución en las escuelas. - Universalidad del concepto de evolución. - El sentimiento religioso no puede negar los principios científicos. - Propósitos del disertante.

Ocupo esta tribuna por encargo de la comisión de extensión universitaria del "Centro Estudiantes de Ingeniería", constituida por mis alumnos y ex alumnos de esta Facultad, habiéndome solicitado una disertación sobre el tema que ha conmovido los círculos intelectuales y religiosos y cuyo origen ha tenido lugar en una nación que ostenta en su pórtico la estatua de la libertad!

He cifrado siempre en los estudiantes de este país grandes esperanzas cuando ellos luchan en pos de un ideal y no se hallan, por consiguiente, impregnados de las tituladas virtudes ciudadanas, cuya única misión sería la de engañar a un pueblo para conquistar posiciones de preferencia sin más arma que la impostura.

En esta casa de estudios, si en verdad así puede llamársela, los estudiantes han tenido a su cargo la extensión universitaria, luchando para arrebatarla del exclusivismo que hoy la tiraniza.

La misión de una Universidad no debe ser solo la de elaborar técnicos y mucho menos empíricos, como hoy pretende un grupo de mentores que se han apoderado de ciertos institutos de enseñanzas que por su orientación no son ni siquiera profesionales. El horizonte de una Universidad debe ser amplio, una tribuna de ciencia y cultura para todos los estratos sociales y nunca un círculo cerrado destinado solo a aquéllos que el estado social, las conveniencias políticas y hasta la depravación moral los ha erigido en privilegiados, ni mucho menos una tribuna de propaganda comercial, y más desastroso, de belicidad sectaria. En estos institutos de estudios debe verterse la verdad nacida de las leyes inmutables de la naturaleza, de las experiencias y observaciones realizadas por los investigadores, sin desviar los resultados por más que pugnen con nuestras ideas y costumbres.

La cultura de nuestro pueblo no ha preocupado a los gobernantes, sobre todo en la última época, porque su desarrollo es una valla para la elevación de los impostores políticos. Pasaron aquellos tiempos en que un Mitre, un Sarmiento, un Juan María Gutiérrez, etc. ocupaban los sitiales guberna-

(1) Esta conferencia, poco después de pronunciada, fué reconstruída para ser publicada en la Revista del Centro Estudiantes de Ingeniería, pero ha permanecido inédita hasta el presente por haberse suspendido la aparición de dicha Revista. En algunas partes del texto está ampliada a fin de dar más claridad a los conceptos y se han suprimido todas las láminas que se proyectaron en el curso de la disertación.

mentales, en que el mejoramiento de la instrucción pública era el norte de su acción y el desarrollo de la ciencia su preocupación. Cayó el gobierno de la aristocracia argentina, sinónima en aquellos días de intelectualidad y surgió, en forma impetuosa, bajo el imperio de una ley injusta, la democracia de hoy, que más bien debería llamarse mediocracia, haciendo languidecer la ciencia y agonizar la instrucción pública porque han servido de festín a numerosos cuervos políticos. El país ha descendido en su cultura y la universidad implantada e impuesta en un medio corrompido ha sido envuelta en este horrible maremagnum, la complacencia política y la pasión partidista han triunfado en nombramientos y concursos, cuando no imperaba la amistad o el compadraje.

Es por todo lo expuesto que cifro mis esperanzas optimistas en los estudiantes, siempre que no se hallen contaminados del ambiente, ni se dejen arrear como recua de imbéciles por un impostor y piensen que con revueltas sin fundamentos, arreciendo las instituciones, destruyendo sin reconstruir, se modificará un sistema. Labrando con el estudio la propia personalidad frente de una conciencia de hombres probos, destruiréis lo impúdico y reconstruiréis algo mejor y conquistando las cátedras con vuestros propios méritos, dando el ejemplo, demostraréis cuando salgáis de las aulas, que en el llano fuistéis sinceros.

Nuestro país sufre hoy, por el sistema electoral, por el espíritu que lo anima, una crisis intelectual; faltan investigadores en muchas ramas del saber siendo ya tiempo que los tenga. Desgraciadamente jamás podrá conseguirlos mientras el pueblo viva una vida demasiado fácil, mientras sólo se agite el espíritu ante las rencillas caudillescas, ante hechos que pueden ser sólo posibles en el estado primitivo de barbarie de la sociedad humana, y nunca, entiéndase bien, ni cuando el hombre en su condición de tal se alejó de la bestialidad para ser grande por su desarrollo intelectual; no solo nos hemos estancado sino quizás retrogrado en nuestra cultura. Nos faltan muchas cátedras de ciencia e investigadores nacionales, que debemos suplirlos, hasta tanto se formen en nuestro país, por extranjeros, no falsarios que vienen con el cariz de sabios a hacer la América sino investigadores de verdad que enseñen desde la cátedra que la ciencia merece un alto respeto porque es una pesada carga para el hombre y cuyo cultivo requiere muchos sinsabores y una preocupación, la ciencia por la ciencia misma, y no una mistificación, un empirismo, una pretensión y sobre todo una audacia.

Es menester que el estudiante aprenda, en la soledad del laboratorio, en presencia de las observaciones o de la naturaleza guiado por un maestro respetado por su saber que enseña y exige, que es necesario forjarse un alto concepto de la ciencia, concluyendo de una vez con la pedantería característica, labrada a expensas de los guarismos de un azar, que hace salir el profesional de las aulas condecorado con laureles de cartón para escalar posiciones, apoderarse de institutos y gobernar un país sin más méritos que su propia incapacidad.

Eseuchad bien alumnos míos, sabed que para proclamar un ideal, para ser *leader* de una cruzada se requiere ante todo sinceridad, poniendo por ejemplo su propia persona. Los que luchan por la extensión universitaria llevan en sus pechos una noble aspiración de mejoramiento social, solo así se puede erigir una universidad modelo, cuando el pueblo que la alimenta es sano y digno; por eso también he aceptado gustoso esta tribuna para dirigirles la palabra y alentarlos en la lucha emprendida. Perseverad que en vuestras manos está el triunfo.

No hace mucho que al ocupar por primera vez esta tribuna, también brindada por mis alumnos, llamé la atención del auditorio sobre un difícil problema planteado a la sociedad humana, cual es el de indagar sobre lo que se considera como más antigua organización social humana, que creo haber resuelto con los fundamentos que expuse en mi conferencia "La familia primitiva", a pesar de estar en oposición a todas las ideas hasta entonces ver-

tidas. En esta ocasión recordé también que se agitaba en el ambiente ¡llamando la atención de nuestros legisladores!, un problema social, es decir el proyecto sobre la ley de divorcio, estrangulada por la secta que tiraniza este país. En esa oportunidad manifesté que en el hombre el matrimonio monógamo era anterior a toda idea religiosa. Hoy, otro asunto, también de orden sectario, me hace ocupar de nuevo esta tribuna y es el proceso Scopes que ha tenido lugar en Norte América conmoviendo el espíritu hasta de los más apáticos que solo se agita por las influencias egoístas y de los empíricos que solo se excita con fines utilitarios.

Es en el estado de Tennessee donde un sentimiento religioso quiso imponer el derecho del más fuerte, (dado que era mayor el número) en contra de la razón y pretendió ahogar una verdad científica. Fué en pleno siglo de civilización y de progreso, en plena era de libertad, que estalló un conflicto entre la religión y la ciencia, fué la petulancia del ignorante que ahoga toda duda, fué la impostura que pretendió acallar la voz de la razón desafiando nuestra propia cultura del presente siglo. Al decir esto, piénsese que no voy contra el sentimiento religioso al que tiene derecho cualquier hombre en la intimidad de sus convicciones, sino contra los que lo imponen como conveniente y lo consideran como absoluto. Fué en la pequeña aldea de Dayton donde una horda de campesinos analfabetos, guiados por un pastor religioso, declara e impone cegando la inteligencia, que la evolución no debe enseñarse en las escuelas por ser contraria a un sentimiento. No es posible tolerar que en este siglo y en los venideros se secuestre la inteligencia humana impidiendo la duda y no se indague la verdad científica. Es una manifestación ancestral que ha caracterizado nuestros tiempos de organización primitiva y esteriores de una civilización hipócrita de veinte siglos, impuesta tiránicamente explotando la debilidad humana.

Como sobre el asunto Scopes he sido interrogado por numerosas personas, a tal punto que me ví obligado a realizar ciertas declaraciones (1), aprovecho esta oportunidad para exponer en forma naturalmente sintética qué es la evolución. No pretendo agotar el tema por que es tan vasto que abarcaría, no una disertación, sino un curso en el que debiera exponer los principios históricos, los numerosos fundamentos en que se ha erigido esta teoría y las múltiples pruebas emergidas de las distintas ramas del saber humano que le sirven de fundamento.

La evolución está basada en hechos comprobados a cuyo imperio se mueve todo lo que nos rodea, tanto animado como inanimado, llegando a ser tan vasta su influencia que con esa sola palabra se ha tratado de designar un crecido número de procesos.

Hay muchos espíritus religiosos, y esto vaya para satisfacción de algunos que me escuchan, que consideran al Creador como fundador de esta ley que ha imprimido a la materia en su faz inicial y que solo por su tan perfecta armonía era posible concebirla como producto de un espíritu superior al del hombre; es la religión que volviendo por los fueros de la verdad trata de acercarse a la ciencia en lugar de destruirla como en los estados primitivos.

Es por todo lo que acabo de exponer que se impone la necesidad de explicar en la forma más sencilla, como lo hago en mi cátedra y sin ninguna idea de imposición, a qué se llama evolución, para después ocuparnos del criterio de los grandes naturalistas, en particular de las causas a que se la atribuye, para terminar con las pruebas en que se funda y con lo injusto e insólito de la pretensión religiosa de querer impedir su difusión en las escuelas. Con esto creo cumplir el fin que me he propuesto y las aspiraciones de los que recurrieron a mí al solicitarme esta conferencia.

(1) "A propósito del asunto Scopes". *La Acción*, Julio 26 de 1925.—Rosario.

EVOLUCION. — Definición. - Concepto filosófico. - Concepto naturalista. - Involución. - Revolución. - La evolución es una ley universal. - No es posible impedir su enseñanza. - Los Estados Unidos de América del Norte ante el mundo científico. - La evolución en Astronomía. - (Cosmogonía religiosa. - Ideas cosmogónicas en la antigüedad. - Descartes. - Newton. - Kant. - Laplace, etc.). - La evolución en Geología. - En el campo de los coloides, etc.

Con la palabra **evolución** se han querido significar los cambios morfológicos y estructurales que sufren los seres y las cosas a través de las edades, significación vastísima que por tal carácter resulta vaga, imprecisa y que en el lenguaje vulgar ha adquirido tal amplitud que hoy se puede decir no representa nada. Este caso recuerda tantos otros que se producen en todos los tiempos cuando un hecho, un descubrimiento, una doctrina, etc., llega a los dominios de la turba, se deforma en tal magnitud para infiltrarse en la masa, que pierde su verdadero sentido.

En el **concepto filosófico** evolución significa una sucesión de estados, de más en más complejos, de más en más utilitarios, de tal suerte que en estos últimos casos el proceso de simplicidad expresa un adelanto. El fué sugerido por Coleridge a Spencer, quien en 1854 bosquejó los fundamentos para expresar su teoría recién en 1857. Es el concepto Spenceriano de la evolución, del que no nos ocuparemos.

Los naturalistas entienden por evolución a los cambios producidos, ya graduales o bruscos, ya irreversibles o reversibles, que sufren los seres. Es, entonces, evolución, sinónima de idea de modificación y bajo este nombre se estudian los cambios graduales y continuos que se denominan transformismo, como también las modificaciones bruscas que reciben el nombre de mutaciones.

La inmutabilidad de las especies implica la negación de las modificaciones que debieron sufrir los seres a través del tiempo. Es por ello que las obras de Lamarck y Darwin se consideran el arranque de una nueva era para las ciencias naturales, porque a la variabilidad de las especies se impone la idea de evolución.

Se ha creado otro término, **involución**, para designar un concepto contrario al de evolución, implicando entonces un cambio regresivo, la vuelta al estado ancestral; pero no es posible usar este término por no ser aplicable a muchos casos que pueden ofrecer los cambios en los seres. Algunas veces una modificación aislada es una forma regresiva, pero necesaria para el progreso del individuo porque en el conjunto armónico del ser se manifiesta coadyuvando al desarrollo del mismo, siendo entonces evolución. También debemos hacer notar que en ciertas ocasiones lo que para el hombre es evolución, en algunos animales y plantas resulta una involución.

En sentido filosófico se ha emitido otro concepto que con el título de **revolución** se expresa un cambio brusco del estado de los seres y las cosas. Es, por consiguiente, un proceso discontinuo.

Las ciencias naturales son, en particular, las que han robustecido el concepto de evolución y las que le han dotado de pruebas fehacientes, por cuya causa se considera, con cierto exclusivismo, que la evolución es una ley que rige a estas ciencias, sin pensar que debe aplicársela con un criterio más amplio, más universal, como ley que rige la materia.

No es sólo en el estado actual de la ciencia, sino desde hace mucho tiempo, que no es posible aceptar la quietud, el reposo absoluto, la inmutabilidad, etc., en los sistemas que la inteligencia humana puede percibir y a esta generalización tampoco debe escaparse la especie zoológica y botánica cuya inmutabilidad fué proclamada por su creador Linneo y defendida por Cuvier con todo el peso de su autoridad científica.

Pero como ya dije, la evolución no es una ley que solo rige los seres vivientes, sino también es el espíritu de la ciencia, en general. Su negación,

la prohibición de su enseñanza implican, en el estado actual de nuestros conocimientos, una vuelta a la condición de barbarie, caracterizada por el predominio de la ignorancia. La nota dada en Estados Unidos es, pues, vergonzosa y la considero una mancha oprobiosa que habla muy poco en favor de la cultura de ese pueblo.

He dicho que en todos los campos científicos la evolución es la idea directriz y para no prolongar demasiado esta disertación solo me ocuparé de algunos en forma sintética.

La **astronomía**, desde que se elevó sobre bases científicas proporcionando los fundamentos a la cosmogonía, para que explicara el origen de nuestro sistema planetario, y en general de los otros, lo hizo irremisiblemente bajo el imperio de esa ley. Es decir, fué desde que sus cultores se embarcaron en las teorías evolucionistas que pudieron intentar la explicación de problemas tan complejos e importantes como son los que comprende la cosmogonía.

Es sabido que los estudios cosmogónicos se iniciaron en la antigüedad y que cada pueblo necesitó crear su cosmogonía religiosa, explicable en aquel estado de la ignorancia humana, pero bien pronto fué suplantada por el concepto científico que no solo universalizó esas opiniones sino les dió bases sólidas.

No nos ocuparemos de las ideas cosmogónicas de los antiguos, de la escuela de Platón, Aristóteles, Cicerón, del mismo Lucrecio, de Virgilio, etc., porque esto nos llevaría mucho tiempo. Nos detendremos solo en la de Descartes y Newton para llegar a Kant y Laplace. **Descartes** considera que en la naturaleza solo existe materia y movimiento. La primera debe sus propiedades a las múltiples divisiones que ha sufrido desde que Dios le dió su primer impulso y a la intensidad de sus movimientos. Considera también al universo como infinito e invariable y que Dios creó una cantidad determinada de materia imprimiéndole una cantidad fija de movimiento; de ella, mediante una serie de transformaciones nacieron las estrellas, el sol y los planetas. De la división de la misma se produjeron tres formas distintas: una constituía una masa grosera e irregular que se aglomeraba y estaba dotada de una pequeña cantidad de movimiento, formaba los planetas y los cometas; otra más grande se había redondeado por frotamiento y constituía los medios flúidos dotados de movimientos más rápidos con tendencia a regularizarse, volviéndose circular como los torbellinos en los cursos de agua; la tercera forma estaba representada por partículas extremadamente difundidas desprendidas de la primera y dotadas de movimientos más rápidos que les permitían vibrar en todos sentidos formando el elemento del fuego; estaban concentradas en medio de cada torbellino para sugerir el sol y las estrellas.

Para **Newton** desaparece la hipótesis de los torbellinos de Descartes, pero en presencia de la constitución eminentemente giratoria del sistema solar, declara que no existe en él causas mecánicas sino que se debe más bien a la acción directa de Dios.

Estas eran, en brevísima síntesis, las ideas reinantes hasta el advenimiento de Kant y Laplace fundadores de la cosmogonía evolucionista. Los que les siguieron como Hirn, Faye, Roche, Lockyer, Moulton, Coronel Du Ligondés, See, Arrhenius, Belot, Chamberlin, etc., no hicieron más que perfeccionarlas.

Kant expone en su **Historia Natural del Cielo**, en 1754, y reproduce en 1763 en su exposición sobre existencia de Dios, su hipótesis cosmogónica. Considera que el origen del universo fué un caos gaseoso, un caos de materiales muy ligeros del que nacieron, en virtud del movimiento general de rotación, numerosas masas que más tarde se condensaron y constituyeron centros de atracción; a partir de este punto explica, valiéndose de leyes y principios matemáticos y astronómicos, el origen del sol y los planetas.

Más tarde, en 1796 Laplace estudia en su **Exposición del sistema del mundo** los movimientos aparentes y reales de los cuerpos celestes, las leyes del movimiento, la teoría de la gravitación universal y como resultado de ello lanza su hipótesis cosmogónica, considerando el origen de nuestro sistema planetario, el de la tierra, por lo tanto, engendrada de un girón de la nebulosa primordial. Al concebir esta extensa nebulosa con un poder giratorio alrededor de su eje, la considera definida, admitiendo después de un período de enfriamiento por radiación calórica que permite una contracción en la nebulosa. Siguiendo adelante en la exposición de su sistema, llega a los dominios de la geología por medio de la ley universal, la evolución.

La **Geología**, al estudiar el origen de las rocas mediante los conocimientos que se tienen de la atmósfera solar, ha podido con Meunier realizar la síntesis de aquéllas, estudiando el origen de la tierra con todas sus transformaciones hasta la época actual, y de los estudios realizados sobre la luna, se podrá aclarar el porvenir de la tierra.

Si dejamos estas ciencias y entramos en el **campo de los coloides**, notamos no sin asombro que la formación y destrucción de los sistemas coloidales están regidos, también, por las leyes de la evolución; hay algo más, así como los seres en un proceso hacia el gigantismo tienen su máximo de concentración, lo que produce la extinción de las especies, el proceso de coagulación y floculación de los coloides, fenómeno completamente irreversible, como todos ellos, indica también su fin.

Largo sería enumerar la similitud que existe entre la vida, diríamos así, de los coloides y la de los seres, pero ella puede ser tema para otra conferencia.

Con lo expuesto nos hemos referido a una parte reducida de nuestros conocimientos sobre algunas ramas del saber humano que podríamos haber extendido más pero nos alejaríamos del tema, creyendo que lo dicho es suficiente para hacer resaltar que la evolución no es solo una teoría de ciertas ramas científicas. (Botánica y Zoología) sino de todas las ciencias.

EL PROBLEMA DE LA EVOLUCION. — Sus formas. - Transformismo. - Mutaciones.

PRIMERAS IDEAS EVOLUCIONISTAS. — En los griegos y romanos. - Linneo. - La especie. - Goethe. - Erasmo Darwin. - Treviranus. - Oken. etc.

Así como todos los hombres de ciencia están contestes en admitir la evolución, el problema se complica por la diversidad de criterio de los investigadores en el preciso momento en que se pretende señalar y explicar las causas que producen el fenómeno. La evolución es como el calor, la luz, la electricidad, etc., cuya existencia no se puede negar, pero sí discutir aún hoy, las causas que la originan. Es necesario tener en cuenta estas manifestaciones para no caer en un error fundamental; cuando se niega el darwinismo o el lamarekismo, no es porque se rechace la evolución sino que no se aceptan los factores que dieron Darwin y Lamarek para explicarlos.

Desde Lamarek a Darwin y los que le han sucedido, todos admiten que la evolución de los seres se realiza en una forma especial, es decir lentamente, a la que se denominó **transformismo**, basado en aquel aforismo de Linneo, que la naturaleza no da saltos. Para explicar el transformismo algunos usan indistintamente la denominación darwinismo lo que es completa-

mente erróneo. La variación de las especies se efectúa en forma lenta o continua. Las variaciones individuales llamadas fluctuaciones se reparten en todos los individuos diferenciándose únicamente por graduaciones sensibles. Para constituir una nueva raza o variedad se requiere una larga sucesión de tiempo que permita acumular todos estos caracteres. Hay entonces graduaciones intermedias entre individuos extremos. Quien definió con mayor claridad esta clase de variación individual o fluctuación fué Darwin y por eso se le llama darwiniana. Es de la que con buen éxito hecha mano el hombre para practicar la selección artificial entre los animales que lo rodean, llamados domésticos.

El transformismo, según la manera con que cada escuela ha tratado de explicarlo o de atribuir una preponderancia más o menos exclusivista a tal o cual factor, ha dado origen a una subdivisión de escuelas que no pudieron nunca ponerse de acuerdo, debido sobre todo al acendrado exclusivismo en que se mantienen sus cultores.

Este hecho ha servido de base a los detractores de la evolución para negarla.

La segunda forma de evolución es la que se realiza por variaciones bruscas o discontinuas las que De Vries llamó **mutaciones**. Ellas nacieron de la aparición de variaciones repentinas en determinados seres. Darwin también las observó denominándolas **sports** pero no les atribuyó un rol preponderante y solo en los últimos años han tomado tal incremento que se ha creado la escuela mutacionista, cuyos cultores sostienen que es la única vía por la que se realiza la evolución orgánica.

A fin de dar una idea del estado en que se encontraban las ciencias naturales antes del advenimiento de Lamarck y Darwin, haremos una somera reseña histórica para luego exponer las causas y la interpretación que los distintos naturalistas dan al proceso de evolución.

En los albores de la ciencia se aprecian las primeras tentativas de explicar ciertos fenómenos guiados por un concepto evolucionista. Entre los filósofos griegos podemos citar a Empédocles, quien consideraba que flotaban en el agua, en un comienzo, dispersos, los órganos de los seres para luego ir agrupándose poco a poco hasta constituir los más organizados.

Entre los romanos continúan apareciendo de cuando en cuando escritores con ideas evolucionistas, pero ellas fluctuaban difusas en el ambiente porque no eran una necesidad para poder interpretar algunos procesos, y recién pudieron tomar cuerpo de doctrina cuando se presentó un medio cultivado científicamente. Por eso al principio pasaron desapercibidas hasta que un gran naturalista de la ortodoxia, Linneo, con una amplia visión de las ciencias naturales, les dió impulso y preparó sin pensarlo el terreno en que debía germinar la semilla que Geoffroy de Saint-Hilaire, Wallace, Lamarck y Darwin, sus grandes cultores, arrojaron.

Con el advenimiento de Linneo surgen de lleno las ciencias naturales y su estudio se realiza sobre bases más científicas. Funda la especie fija e inmutable, dá las bases de la clasificación, que aunque artificial debía prestar gran utilidad porque fué la precursora de una más perfecta, la misma que rige las ciencias naturales. Agrupa las especies y funda los géneros, reúne estos y constituye las familias, crea una nomenclatura binaria designando al género con el primer nombre y con el segundo a la especie. En su **Sistema Natural** publicado en 1735, estampa sus conquistas y manifiesta que las especies son tantas como las que salieron de manos del Creador. Siendo creacionista y aceptando la especie como inmutable y fija es el más formidable antievolucionista; pero al definir la especie, al fundar el género, la familia, etc. y al ensayar una clasificación, aunque artificial, siembra sin pensarlo, la semilla augusta de una nueva teoría, la evolución.

Creada la especie inmutable y fija, la evolución surgiría demostrando su variabilidad. De ello se encargaron los sucesores del gran naturalista sueco.

Pero antes de pasar adelante expliquemos lo que es especie. Se entiende por tal a un conjunto de caracteres de organización que se presentan en los individuos y que por sus semejanzas se encuentran entre ellos íntimas relaciones, por las que se agrupan los seres. Estos caracteres se llaman específicos. Cuando dos o más especies pueden agruparse en virtud de ciertas particularidades comunes constituyen un género. Estos caracteres llamados genéricos se hallan en menor número que los específicos e indican una relación más lejana. Así puede extenderse el concepto para explicar lo que es familia, orden, clase, etc.

Linneo, al considerar los caracteres específicos como inmutables y fijos, sostiene que en la sucesión del tiempo no han sufrido ninguna transformación ni tampoco modificación en el cruce de los seres.

(Continuará).

Formación de Espuma en el Aceite de Turbinas

Explicaciones técnicas de la Vacuum Oil Company

La espuma en el aceite de los sistemas de circulación de turbinas, consiste en la formación de una gran cantidad de burbujas, por el batido del aire con el aceite. Si en los tanques se acumula mucha espuma, ésta puede desbordar o escurrirse, ensuciando el exterior de los tanques y produciendo una pérdida importante de aceite.

En algunos casos la espuma de aceite se escapa de los cojinetes próximos al dinamo, pudiendo llegar a destruir la aislación de los arrollamientos o acumularse en los anillos colectores. Además, la espuma puede formar "bolsas de aire", que representan una disminución en la presión del aceite.

Si se forma espuma, la primera medida a tomarse consiste en modificar cualquier detalle que permita al aceite aspirar aire y arrastrarlo a través del sistema de lubricación. Puede ocurrir que la aspiración de la bomba esté descubierta, cuando en realidad debe estar completamente cubierta por el aceite. La caída del aceite desde una altura demasiado grande, entre la tubería de retorno y el depósito, ocasiona también la mezcla del aceite con aire, en forma de burbujas o espuma.

Un retorno muy abundante de aceite por la válvula de seguridad (válvula de regulación de la presión), puede causar el mismo efecto, si el aceite entra al depósito arriba del nivel del aceite. Se puede remediar esto por medio de uniones T, que proporcionan varias bocas de descarga, reduciendo así la velocidad del aceite.

Algunas veces, bastará ajustar la válvula de seguridad, para que ésta permita una presión más elevada del aceite.

En ciertas ocasiones, la alta "tensión de superficie" del aceite nuevo, produce espuma, que se nota durante la primera puesta en marcha. Sin embargo, a medida que el aceite se calienta por el funcionamiento de la turbina, se reduce su viscosidad y cesa, generalmente, la formación de espuma. No conviene hacer circular el agua de enfriamiento, por el refrigerador de aceite, hasta que la turbina marche, por lo menos, a media velocidad. Esto facilita el calentamiento rápido del aceite y ayuda a evitar la espuma.

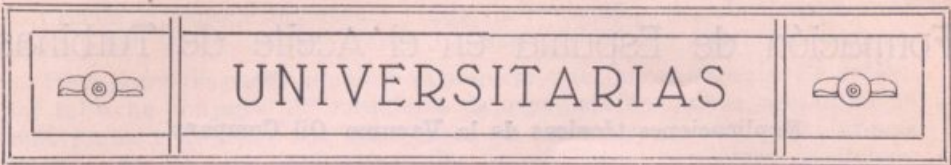
El aceite usado puede dar espuma, a causa del aire arrastrado por las impurezas finas en suspensión. Es necesario filtrar este aceite, con el fin de eliminar dichas impurezas.

Cuando se agrega al aceite usado una gran cantidad de aceite nuevo, desaparece la uniformidad química del aceite, de lo cual puede resultar la formación de espuma. El método más aconsejable consiste en agregar aceite nuevo al sistema, en pequeñas cantidades y a intervalos frecuentes. No conviene agregar más de un 10 % de aceite nuevo a la vez.

La acumulación de espuma en los soportes de los cojinetes se evita, generalmente, por medio de una tubería de retorno de medida amplia, que mantenga seco el soporte. Otra buena precaución consiste en instalar tubos respiraderos suficientemente amplios para facilitar la rotura de las burbujas.

Si la espuma se produce en los cojinetes o en las tuberías de retorno de los mismos, basta generalmente con una pequeña reducción en la presión de aceite. Pero en otros casos (indicados más arriba), el remedio consiste, por el contrario, en aumentar la presión de aceite, para reducir la formación de espuma en el depósito.

Finalmente, se puede reducir también, algunas veces, la formación de espuma, haciendo circular el aceite a mayor temperatura. Esto se efectúa reduciendo la circulación de agua por el refrigerador. No siempre conviene adoptar este sistema, pues las temperaturas elevadas del aceite aceleran la oxidación del aceite lubricante.



UNIVERSITARIAS

Reorganización de la Federación Universitaria Argentina

Uno de los más sentidos anhelos de la juventud universitaria se ha cumplido al iniciarse en forma brillante la reorganización de la F. U. Argentina.

En Córdoba han tenido lugar, los días 18, 19 y 20 de septiembre, las reuniones iniciales, asistiendo a ellas los representantes de la F. U. de La Plata, señores Humberto B. Vera y Humberto N. Quiroga; de la U. F. del Litoral, señores Julio D. Albanese y Eduardo B. Carlos; de la F. U. de Cór-



De izquierda a derecha — Eduardo B. Carlos (F. U. Litoral), Humberto B. Vera (F. U. La Plata), Carlos Cuenya (h.) (F. U. Tucumán), Carlos Zabala Ortiz (F. U. Córdoba), Elías Soñez (F. U. Tucumán), Julio D. Albanese (F. U. Litoral) y Humberto N. Quiroga (F. U. La Plata).

doba, señores Carlos Zabala Ortiz y Horacio Gómez Molina, y de la F. U. de Tucumán, señores Carlos Cuenya (h.) y Elías Soñez. Hicieron, además, acto de presencia el presidente de la F. U. de La Plata, señor Aznar, y los representantes, con carácter oficioso, de la F. U. de Bs. Aires, Sres. Malbec y Rocco.

Durante el desarrollo de las sesiones se pudo constatar el interés que ellas habían conseguido despertar entre la juventud universitaria, representada por una numerosa y entusiasta barra que siguió constantemente las deliberaciones.

Las resoluciones adoptadas fueron las siguientes:

1). — Iniciar en Córdoba la reorganización de la F. U. Argentina, celebrando allí las primeras reuniones y efectuar el 5 de octubre próximo otra en la Capital Federal a los efectos de dejar fijada en esta última ciudad la sede oficial de la institución.

2). — Suscribir los delegados presentes el acta de reorganización.

3). — Designar, con carácter provisional, presidente al representante de la F. U. de Córdoba, señor Carlos Zabala Ortiz, y secretario al de la F. U. de La Plata, señor Humberto B. Vera.

4). — Hacer público un manifiesto concretando las aspiraciones de la juventud universitaria en la hora actual y designar para su redacción a los señores Soñez, Albanese y Vera.

5). — Encargar a la delegación de La Plata la confección de un ante proyecto de los estatutos que han de regir el funcionamiento de la entidad.

6). — Auspiciar la realización del Primer Congreso Americano de Estudiantes Universitarios y hacer llegar a su junta organizadora la adhesión de la F. U. A.

7). — Organizar el Segundo Congreso Nacional de Estudiantes Universitarios, fijando como puntos básicos del mismo la consideración de los principios fundamentales de la Reforma y la discusión de un proyecto de Ley Universitaria que responda al concepto que sobre la materia posee la juventud que legítimamente representa la F. U. A.

8). — Solidarizarse con los movimientos que en pro de la obtención de un orden universitario más justo y lógico sostienen los estudiantes de la Universidad de Córdoba y los de la F. de C. Médicas de Rosario, acordándose, además, tomar la pertinente intervención a fin de contribuir al mejor éxito de los mismos.

9). — Rendir un homenaje a la memoria de los esforzados luchadores reformistas Pablo Vrillaud, fallecido en el ejercicio de la presidencia de la F. U. A., Carlos Ripa Alberdi y Enrique Dreysin.

La representación del Litoral tuvo un desempeño destacado, interpretando fielmente el espíritu reformista que alienta al estudiantado de nuestra Universidad.

El optimismo que surge de la noticia arriba insertada ha sido, en parte, malogrado por las actitudes poco meditadas de los componentes de la Federación Universitaria de Buenos Aires; actuales autoridades de las instituciones estudiantiles de Buenos Aires han demostrado que ignoran por completo la misión que ellas deben desempeñar y que anteponen a toda obra útil un desmedido espíritu localista, orientado hacia el mayor brillo personal.

El 5 del etc., en cumplimiento de la resolución aprobada en la reunión inicial, se reunieron en la C. Federal las delegaciones de Tucumán, Litoral, Córdoba y La Plata, recibiendo allí la ingrata nueva de que la F. U. B. A. desconocía lo acordado en Córdoba, con argumentos inconsistentes, carentes de toda lógica. Animados los delegados del interior de la mayor buena voluntad, procuraron armonizar con los componentes de la F. U. B. A., pero, ante su terquedad insultante, iniciaron las sesiones, prescindiendo de ese organismo estudiantil y aprobando diversas resoluciones de importancia, que la carencia de espacio nos impide publicar.

SPIRANDELLI JUAN
Ingeniero Civil
Maipú 958

TAIANA ANGEL M.
Ingeniero Civil
Ríoja 1315

TAIANA ENRIQUE (h).
Ingeniero
Ríoja 1315

TAVERNIER JORGE A.
Arquitecto
Buenos Aires 1030

TORRIGLIA CESAR
Agrimensor
San Lorenzo 1131

VACCA ALBERTO D.
Arquitecto
San Lorenzo 1696

VASALLI MIGUEL E.
Doctor en Química
B. Oroño 939

VERA LUIS
Técnico Nacional
1º. de Mayo 1602

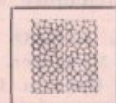
VERGARA OROÑO G.
Agrimensor
1er. piso E. Zeballos 1616

VICEVICH MATEO
Ingeniero Civil
E. Zeballos 783

VIGNAUX JUAN C.
Doctor en Matemáticas
Berrutti 3813 (B. A.)

WYK JUAN C. van
Ingeniero Civil
Salta 1888

ZAPATA RAUL
Ingeniero Civil
San Juan 2274

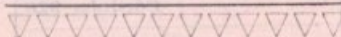


Revista del



Centro Estudiantes de Ingeniería

PUBLICACIÓN BIMESTRAL



TARIFA DE AVISOS

POR PUBLICACIÓN

	Entera \$ m/n	Media \$ m/n	Cuarto \$ m/n
Tapa	60.—	35.—	20.—
Contratapa	50.—	28.—	16.—
Página blanca ..	40.—	24.—	14.—
Página en color	35.—	20.—	12.—

Dirección y Administración: CÓRDOBA 689

ROSARIO (Rep. Argentina)

Contestación a la observación del Zugo. Loureiro

$$\begin{array}{l} \varphi = -30^\circ \\ \delta = 10^\circ \\ h = 40^\circ \end{array} \quad \begin{array}{l} \Delta = 90^\circ + 10^\circ = 100^\circ \\ h = 40^\circ \\ \varphi = 30^\circ \\ 170^\circ \end{array} \quad S = 85^\circ$$

$$S - h = 85^\circ - 40^\circ = 45^\circ$$

$$\text{Sen } \frac{1}{2}t = \sqrt{\frac{\text{Sen } 45^\circ \cos 85^\circ}{\cos 30^\circ \text{sen } 100^\circ}}$$

$$\begin{array}{l} \varphi = -30^\circ \\ \Delta = 100^\circ \\ h = \frac{40^\circ}{110^\circ} \end{array}$$

Teniendo en cuenta el signo.

$$S = 55^\circ$$

$$S - h = 55^\circ - 40^\circ = 15^\circ$$

DISPONIBLE

$$\text{sen } \frac{1}{2}t = \sqrt{\frac{\text{sen } 15^\circ \cos 55^\circ}{\cos 30^\circ \text{sen } 100^\circ}}$$

I) $\text{sen } 45^\circ \cos 85^\circ = 0,706 \times 0,087 = 0,0614$

Teniendo en cuenta el signo de φ .

$$\text{sen } 15^\circ \cos 55^\circ = 0,259 \times 0,574 = 0,148$$

$$\text{sen } \cos t = \frac{\text{sen } h - \text{sen } \varphi \text{sen } \delta}{\cos \varphi \text{sen } \Delta} \quad \Delta = 90^\circ - \delta$$

$$\cos t = \frac{\text{sen } h - \text{sen } \varphi \cos \Delta}{\cos \varphi \text{sen } \Delta}$$

$$\cos t = \frac{\text{sen } h - \text{sen}(-\varphi) \text{sen } \delta}{\cos(-\varphi) \text{sen } \delta}$$

$$\cos t = \frac{\text{sen } h - \text{sen}(-\varphi)(-\cos \Delta)}{\cos \varphi \text{sen } \Delta} = \frac{\text{sen } h + \text{sen}(-\varphi) \cos \Delta}{\cos \varphi \text{sen } \Delta}$$

$$\Delta = 90^\circ - \delta$$

$$\text{sen } \delta = -\cos \Delta$$

$$\cos \delta = \text{sen } \Delta$$