

Universidad Nacional de Rosario  
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura  
Escuela de Posgrado y Educación Continua



# Control Basado en Conjuntos con Aplicación en Robótica Agrícola

**Román Comelli**

Director: Dr. Ernesto Kofman

Codirector: Dr. Mario Munich

Miembros del jurado: Dr. Leonardo Giovanini

Dr. Hernán Haimovich

Dr. Pablo Lotito

Tesis presentada en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, en  
cumplimiento parcial de los requisitos para obtener el título de

*Doctor en Ingeniería*

Abril 2024



## Declaración

Declaro que el trabajo incluido en esta tesis es el resultado de investigaciones originales y que no ha sido presentado para obtener ningún otro título de posgrado en ninguna otra universidad o institución.

Román Comelli

Abril 2024



A mis viejos, Patricia y Sergio, que siempre se ocuparon de darme, además de mucho amor, todas las herramientas que necesité para afrontar los desafíos que quise.



## Agradecimientos

Como generalmente se hace, y como realmente siento que debe ser, en primer lugar mi agradecimiento va para mi director. Cuando debo hablarle sobre Ernesto a alguien que no lo conoce, siempre lo presento como una persona que ve lo que muchos otros no y que, por lo tanto, suele poder decirte cosas interesantes que simplemente no imaginabas. Algo así como el final inesperado de una película genial. Y por si eso fuera poco, es un tipazo. Gracias entonces, Ernesto, por haberme ayudado a transitar este camino de una forma tan enriquecedora y, dentro de lo que implica hacer un doctorado, agradable.

Del ámbito científico, quiero agradecerles también mucho a Sorin y a John Jairo, quienes me recibieron y trabajaron conmigo en mi estancia doctoral en Francia, en París y Grenoble respectivamente. A partir del intercambio que tuve con ellos y de la experiencia que me posibilitaron junto con Ernesto, aprendí mucho más de lo que esperaba, tanto a nivel profesional como de mí mismo.

Continuando en el entorno de la academia, quiero hacer una mención especial para Taihú, a quien había visto en un programa de televisión local de divulgación tecnológica cuando estaba terminando la secundaria y con quien nunca imaginé, en ese momento, que publicaría mi primer artículo en una revista Q1 de robótica. Asimismo les agradezco mucho a Hernán, por ser uno de los primeros en mostrarme el valor de la matemática como lenguaje formal y riguroso, y a Ale, Antonio, Marimar, Javi, Diego, Nico y Charly por haberme acompañado también, desde sus respectivos roles, en las publicaciones que hice durante mi doctorado.

Del Laboratorio de Automatización y Control quiero agradecerles especialmente a Sergio y a Daniel, mis otros jefes de la universidad, de los cuales aprendí muchas cosas técnicas pero también la importancia de la vocación, la pasión y la experiencia. Compartí muy buenos momentos también con el resto de los integrantes de este laboratorio, y en particular con Renzo y Guille.

Yéndome ahora al plano personal, más allá de la dedicación, para mis viejos también va un agradecimiento muy especial. Y en esta oportunidad sumo a mi hermano, Tomi. Hacer un doctorado, desde el punto de vista emocional, es algo así como una montaña

rusa y tener un apoyo incondicional como el de mi familia fue invaluable. Cuando por buscar la estabilidad de la estrategia de control que proponíamos, me inestabilizaba yo en lo anímico, ellos siempre estuvieron. Y en el tramo final, que fue particularmente difícil, también estuvo Lu. Le agradezco por eso y ojalá me acompañe mucho tiempo más.

Mis amigos del Poli y del San José (Nahuel, Guido, Chapa, Lucho, Villa, Bata y Salva) y del cursado de la carrera de grado (Eva, Calu y todo el grupo *Bit Time*) se llevan también un fuerte agradecimiento. De uno u otro modo, todos fueron parte del camino que me trajo hasta acá.

Necesito agradecerles por último a Mica, Huguito, Mari, Kiari y Eduardo. Aunque de distintas formas no estén más conmigo, me gusta pensar que saben o sabrían cuán importantes fueron para mí en todo esto. *Vi voglio bene*.

Y a quienes específicamente no tengo nada que agradecer es a las tecnologías basadas en *large language models* como *ChatGPT* o *Bard*. Nada de eso se utilizó para la escritura de esta tesis ni de ninguna de las publicaciones en las que la misma se basa.

## Resumen

En esta tesis se desarrolla un concepto matemático novedoso que luego se aplica al diseño de esquemas de control predictivo basado en modelo (MPC, por sus siglas en inglés).

La idea básica consiste en reemplazar un conjunto invariante de control (CIS) por dos regiones, una interior y otra exterior, que cumplen propiedades más débiles que la invariancia y que constituyen una aproximación a dicho CIS. La condición más relajada que define a este par de conjuntos interior-exterior hace que su obtención sea más simple que computar un invariante. Más aún, en el trabajo se brindan procedimientos que permiten hallar dichas regiones en casos en los cuales, debido a la presencia de no linealidades o de entradas finitas, por ejemplo, es imposible calcular un CIS o los mismos resultan demasiado complejos para ser utilizados en la práctica.

En lo que respecta a control propiamente dicho, lo que se presenta en esta investigación es una forma de usar estos conjuntos interior y exterior en el diseño de esquemas MPC de manera tal que, cumpliéndose ciertas hipótesis, los mismos garanticen factibilidad recursiva y estabilidad práctica. La técnica propuesta parte de una formulación MPC tradicional e introduce ciertas modificaciones para lograr las propiedades mencionadas. Estos cambios consisten en agregar una restricción diferente a las comúnmente utilizadas y en escalar de un modo particular el costo de etapa. Así, esta estrategia logra que el estado converja en tiempo finito y permanezca en una región objetivo sin la utilización de una restricción terminal ni un CIS y sin depender de una ley de control diferente local al conjunto al que se desea arribar.

El controlador MPC propuesto es luego aplicado a un problema de seguimiento de camino para un robot agrícola tipo auto. Para simplificar la implementación en tiempo real se considera que la acción de control (velocidad de giro de la dirección) pertenece a un conjunto finito, lo que sumado a la no linealidad del modelo haría imposible la obtención de un CIS para garantizar estabilidad y factibilidad recursiva en esquemas MPC tradicionales. Veremos, sin embargo, que es posible asegurar dichas propiedades con la estrategia propuesta.



# Abstract

In this thesis it is developed a novel mathematical concept that is then applied to the design of model predictive control (MPC) schemes.

The basic idea consists of replacing a control invariant set (CIS) with two regions, one interior and one exterior, that satisfy weaker properties than invariance and constitute an approximation to that CIS. The more relaxed condition that defines this pair of inner-outer sets makes their computation simpler than obtaining an invariant region. Furthermore, this thesis presents procedures that allow us to find these sets in cases in which, due to nonlinearities or other limitations such as finite input alphabets for example, it is impossible to calculate CIS or they are too complex to be used in practice.

Regarding control itself, what is developed as part of this research is a way of utilizing these inner and outer regions in the design of MPC schemes so that, when certain hypothesis are satisfied, these controllers can guarantee recursive feasibility and practical stability. The proposed control method starts from a standard MPC formulation and introduces some modifications to achieve the aforementioned properties. These changes consist of adding a different constraint to the commonly used ones and scaling the stage cost in a particular way. Thus, the presented strategy makes the state converge in finite-time and remain in the target set without requiring a terminal constraint, a CIS nor a different control law local to the region where the state is desired to arrive.

The proposed MPC controller is then applied to the problem of path following for a car-like agricultural robot. To simplify the real-time implementation, the control action (angular speed of the steering system) is considered to belong to a finite set, which together with the nonlinearities of the model makes it impossible to obtain a CIS as needed for traditional MPC schemes to guarantee stability and recursive feasibility. We will see, however, that it is possible to ensure those properties with the proposed strategy.



# Índice General

<b>Índice de Figuras</b>	<b>xvii</b>
<b>Índice de Tablas</b>	<b>xix</b>
<b>Siglas</b>	<b>xxi</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Contexto y Motivación . . . . .	2
1.2. Trabajos Relacionados . . . . .	4
1.2.1. Alternativas a los Conjuntos Invariantes . . . . .	5
1.2.2. MPC, Estabilidad y Conjuntos . . . . .	6
1.2.3. Control de Vehículos Mediante MPC . . . . .	10
1.3. Organización de la Tesis . . . . .	12
1.4. Publicaciones Realizadas . . . . .	13
<b>2. Preliminares</b>	<b>15</b>
2.1. Notación . . . . .	15
2.2. Estabilidad Práctica . . . . .	16
2.3. Conjuntos Invariantes . . . . .	18
2.3.1. Cómputo . . . . .	19
2.4. Control Predictivo Basado en Modelo . . . . .	22
2.4.1. Ideas Previas . . . . .	22
2.4.2. MPC . . . . .	23
<b>3. Conjuntos Interior y Exterior</b>	<b>27</b>
3.1. Conjunto Interior de Control en $N$ Pasos . . . . .	27
3.1.1. Máximo Conjunto Interior de Control en $N$ Pasos . . . . .	29
3.1.2. Caracterización de un Conjunto Interior de Control en $N$ Pasos	32
3.2. Aplicación al Diseño de Controladores . . . . .	35

3.3. Ejemplo de Aplicación . . . . .	38
3.4. Conclusiones . . . . .	40
<b>4. MPC con Conjuntos Interior-Exterior</b>	<b>43</b>
4.1. Descripción del Problema . . . . .	43
4.2. Esquema MPC Propuesto . . . . .	45
4.3. Análisis de Estabilidad . . . . .	48
4.3.1. Comentarios Adicionales . . . . .	54
4.4. Diseño del Controlador . . . . .	57
4.5. Discusión de los Resultados . . . . .	58
4.6. Ejemplo de Simulación . . . . .	61
4.7. Generalización para Horizontes Diferentes . . . . .	65
4.7.1. Esquema MPC con Horizontes Diferentes . . . . .	65
4.7.2. Análisis de Estabilidad . . . . .	68
4.8. Conclusiones . . . . .	70
<b>5. Seguimiento de Camino en Robótica Agrícola</b>	<b>71</b>
5.1. Introducción . . . . .	71
5.2. Formulación del Problema de Aplicación . . . . .	72
5.3. Estrategia Propuesta . . . . .	74
5.3.1. Diseño del Controlador . . . . .	74
5.3.2. Cuestiones de Implementación . . . . .	77
5.4. Experimentos . . . . .	80
5.4.1. Modelo Realista de Planta . . . . .	81
5.4.2. Descripción de los Experimentos . . . . .	82
5.4.3. Resultados . . . . .	84
5.4.4. Discusión de lo Observado . . . . .	87
5.5. Conclusiones . . . . .	89
<b>6. Conclusiones Generales y Trabajo Futuro</b>	<b>91</b>
6.1. Conclusiones Generales . . . . .	91
6.2. Trabajo Futuro . . . . .	93
<b>Bibliografía</b>	<b>95</b>
<b>Apéndice A. Otras Demostraciones</b>	<b>103</b>
A.1. Existencia de Solución de la Optimización 4.9 . . . . .	103
A.2. Lema 7 . . . . .	105

---

A.3. Teorema 5 . . . . .	105
A.4. Corolario 10 . . . . .	107
A.5. Corolario 12 . . . . .	108



# Índice de Figuras

2.1. Ejemplo de CIS. . . . .	21
3.1. Ejemplo ilustrativo de un RCIS no convexo $\Omega$ con un par de conjuntos interior-exterior más simples, $\Omega_I$ y $\Omega_O$ . . . . .	28
3.2. Conjuntos interior y exterior y trayectorias de estado desde condiciones iniciales $x_0^a$ y $x_0^b$ . Se presentan dos vistas diferentes. . . . .	41
4.1. Secuencia de estados predichos óptima en $k = 0$ . . . . .	54
4.2. Secuencia de estados predichos no necesariamente óptima en $k = 1$ . . . . .	55
4.3. Secuencia de estados predichos óptima en $k = 0$ para otro sistema. En este caso se tiene $x_{1 0}^* \in \Omega_O$ . . . . .	57
4.4. Conjuntos $\Omega_I$ , $\Omega_O$ y $\Omega$ correspondientes al ejemplo. . . . .	62
4.5. Aplicación de nuestra formulación MPC. . . . .	64
5.1. Esquema del robot tipo auto, representado por el modelo de bicicleta. . . . .	73
5.2. Conjuntos $\Omega_I$ y $\Omega_O$ correspondientes al ejemplo. . . . .	76
5.3. Cálculo de la referencia basado en proyección e interpolación. . . . .	80
5.4. Esquema del modelo dinámico del vehículo usado como planta en las simulaciones. . . . .	82
5.5. Giros de cabecera de referencia usados en las trayectorias. . . . .	83
5.6. Trayectorias obtenidas para cada referencia. . . . .	85
5.7. Mapas de calor promediados de RMSE en trayectoria con giro $\Omega$ . . . . .	86
5.8. Mapa de calor promediado de porcentaje de estados no factibles para FCS-MPC en trayectoria con giro $\Omega$ . . . . .	86



# Índice de Tablas

- 5.1. Mejores (más bajos) índices obtenidos para cada controlador en promedio.  
Los resultados en negrita son los más pequeños entre los controladores. 87



# Siglas

CIS Conjunto Invariante de Control (Control Invariant Set)

FCS Conjunto Finito de Control (Finite Control Set)

GNSS Sistema Satelital de Navegación Global (Global Navigation Satellite System)

GPU Unidad de Procesamiento Gráfico (Graphics Processing Unit)

LPV Lineal con Parámetros Variantes (Linear Parameter Varying)

LQG Gaussiano Cuadrático Lineal (Linear Quadratic Gaussian)

LQR Regulador Cuadrático Lineal (Linear Quadratic Regulator)

MIQP Optimización Cuadrática Mixta-Entera (Mixed-Integer Quadratic Programming)

MPC Control Predictivo basado en Modelo (Model Predictive Control)

NMPC MPC No Lineal (Nonlinear MPC)

PI Proporcional Integral (Proportional Integral)

RCIS Conjunto Invariante de Control Robusto (Robust Control Invariant Set)

RMSE Raíz del Error Cuadrático Medio (Root Mean Square Error)

RTK Cinemática de Tiempo Real (Real Time Kinematics)

SIMD Instrucción-Única-Datos-Múltiples (Single-Instruction-Multiple-Data)

SLAM Localización y Mapeo Simultáneos (Simultaneous Localization and Mapping)



# Capítulo 1

## Introducción

La descripción matemática de muchos sistemas de interés en la ingeniería, la biología y la economía, por nombrar algunas áreas del conocimiento, se realiza mediante ecuaciones diferenciales y/o en diferencias que vinculan distintas variables asociadas con los mismos. La *teoría de control* aprovecha este tipo de representación a través de modelos matemáticos con el objetivo de lograr que dichas variables adquieran determinados valores deseados. Esto se consigue diseñando y analizando controladores, que no son más que otros sistemas encargados de interactuar con los primeros para que justamente se comporten como se requiera. La interacción entre estos componentes se basa en el concepto fundamental de *realimentación*, que involucra la medición de las variables a regular y la utilización de esa información para definir qué acción aplicar sobre el sistema controlado.

Entre las propiedades que se suelen especificar al describir el comportamiento deseado de un sistema, podemos mencionar tiempos de respuesta reducidos, rechazo a distintos tipos de perturbaciones, cumplimiento de restricciones, etc. Debe notarse que para lograr todo esto se necesita a su vez de una propiedad más elemental que es la de *estabilidad*. En forma intuitiva, que un sistema sea estable significa que sus variables evolucionarán hacia y se mantendrán en cierto punto de operación por más que inicialmente no estén allí.

En general, cuando hay perturbaciones, limitaciones en la capacidad de actuar sobre el sistema u otros tipos de no idealidades, lo único que puede esperarse de las variables mencionadas en el párrafo anterior es que converjan y permanezcan en cierto conjunto, pero no en un punto de equilibrio. Esta propiedad, que luego se formalizará bajo el nombre de *estabilidad práctica*, requiere que dicha región contenga un *conjunto invariante*, es decir, un conjunto en el que el estado del sistema puede mantenerse por

siempre. A pesar de ser muy útiles en la teoría de control, los invariantes suelen ser difíciles de computar y representar.

Con el objetivo de sortear estas complicaciones, en esta tesis se presentan dos conjuntos a los que nos referiremos como *interior* y *exterior* que, satisfaciendo cierta propiedad más débil que la invariancia, constituyen una novedosa herramienta teórica general dentro del *control basado en conjuntos* y una alternativa a los invariantes. Luego se propone una estrategia de *control predictivo basado en modelo* (MPC, por sus siglas en inglés) que, utilizando dicho par de conjuntos, permite garantizar estabilidad práctica. Finalmente esta técnica de control se utiliza en una aplicación de robótica agrícola, más específicamente, en seguimiento de camino con un vehículo tipo auto.

Este primer capítulo introductorio presenta el contexto dentro del cual se ubican nuestros resultados y describe las motivaciones para su desarrollo. A su vez, se comentan trabajos relacionados, se explica con más detalle la organización de la tesis junto con sus contribuciones y se mencionan las publicaciones realizadas.

## 1.1. Contexto y Motivación

El control basado en conjuntos es una rama de la teoría de control que agrupa aquellas técnicas que tienen en su formulación cierta componente teórica fundada en propiedades de subconjuntos del espacio de estados [1]. La aparición de conjuntos en el diseño de controladores se da de forma natural cuando hay que considerar restricciones, perturbaciones, incertidumbre y/o especificaciones, como ser la convergencia del estado a una dada región. Sin embargo, los conjuntos no solo forman parte de la descripción del problema sino que también son fundamentales para su resolución.

A modo ilustrativo consideremos que debemos hallar, para un sistema sujeto a perturbaciones desconocidas pero acotadas sobre el cual podemos aplicar una entrada, desde qué condiciones iniciales se puede lograr que una determinada variable llegue a un intervalo deseado. La formalización de este problema, necesaria para resolverlo, se basa en la especificación precisa de los requerimientos dados en términos de conjuntos: nótese que hay un conjunto que agrupa las posibles entradas, otro conjunto que es el objetivo al que hay que arribar y otro más al cual pertenecen las perturbaciones. Intuitivamente puede pensarse que para estar en la región deseada, es necesario en el instante anterior haber estado en cierto conjunto desde el cual se podía llegar a dicho objetivo mediante la aplicación de alguna entrada disponible, teniendo en cuenta la ocurrencia de cualquier perturbación factible. Este procedimiento aplicado de forma recursiva, yendo hacia atrás en el tiempo a partir de las ecuaciones del sistema y

mediante operaciones entre conjuntos, constituye una forma estándar de obtener el *conjunto de controlabilidad* hacia la región objetivo, que serían las condiciones iniciales que queríamos encontrar.

Si la intención no fuera llegar al conjunto deseado sino mantenernos en él, el problema sería diferente aunque podría también ser abordado mediante un procedimiento semejante al anterior, con operaciones entre conjuntos e iterando hacia atrás en el tiempo mediante la descripción matemática del sistema. En este caso, lo que se obtendría sería un *conjunto positivamente invariante de control robusto*, es decir una región tal que si el estado se encuentra allí entonces existe una acción de control que le permitiría permanecer ahí en el instante siguiente<sup>1</sup> independientemente de las perturbaciones. Este tipo de regiones es fundamental para el análisis de los sistemas y el diseño de leyes de control estabilizantes [2] por lo que, además de ser otro ejemplo ilustrativo de los temas que aborda el control basado en conjuntos, relaciona dicha rama de control con la *teoría de Lyapunov* [3].

Las funciones de Lyapunov son funciones definidas positivas dependientes del estado que en cierta forma generalizan el concepto de energía. La teoría de Lyapunov utiliza estas funciones junto con la idea de disipación de la energía para probar la estabilidad de puntos de equilibrio de sistemas dinámicos y su importancia radica en que ha sido muy útil en el contexto no lineal. En forma intuitiva, esta teoría se basa en que si en un punto de equilibrio de un sistema “disipativo” hay un mínimo local de una función de “energía”, entonces dicho punto es localmente estable. Los conjuntos de nivel de estas funciones de Lyapunov que se encuentren en entornos suficientemente pequeños del mínimo local mencionado constituyen regiones invariantes. Así aparece la vinculación (posiblemente, la más clara) entre la teoría de Lyapunov y el control basado en conjuntos.

Una familia de técnicas de control que en sus formulaciones más comunes requiere explícitamente de la utilización de conjuntos invariantes de control (CIS) para garantizar estabilidad es la que se engloba bajo el término MPC. En particular, controladores basados en MPC, a los que también nos referiremos como de *horizonte deslizante* u *horizonte móvil*, han sido fuertemente adoptados en la industria debido a que son intrínsecamente adecuados para sistemas con múltiples entradas y salidas y a que pueden manejar fácilmente restricciones en cualquiera de las variables consideradas [4]. Debe notarse que si bien este grupo de estrategias pertenece al universo del *control óptimo* ya que computa la entrada a aplicar optimizando una dada función de costo,

---

<sup>1</sup>Hablar de instantes de tiempo futuros es lo que motiva a usar la palabra “positivamente”. Aunque por simplicidad a partir de ahora dicha palabra será omitida y se usará el acrónimo RCIS, se mantiene la idea de avance del tiempo.

toma también elementos del control basado en conjuntos. Como ya se mencionó, esto es principalmente cuando se busca un comportamiento estabilizante.

Ocurre sin embargo que ni en la industria ni en aplicaciones de escala mucho menor a la industrial se suelen tener en cuenta los recaudos necesarios para garantizar estabilidad con MPC. Entre los motivos por los cuales pasa esto podemos decir que ni la obtención ni el manejo de CIS son en general sencillos. El mecanismo recursivo hacia atrás mencionado previamente, en la práctica solo termina siendo factible con sistemas lineales, que mapean hiperplanos (que típicamente suelen usarse para definir la región de partida) en hiperplanos y permiten entonces la manipulación de los conjuntos. Sin embargo, incluso en estos casos las regiones invariantes halladas suelen ser poliedros de muchas caras y, por lo tanto, difíciles de manejar. Por su parte las soluciones basadas en hiperelipsoides, que han sido también muy desarrolladas en la literatura, suelen ser demasiado conservadoras, trayendo problemas en términos de desempeño y reducción de la región de atracción.

En este contexto y con la motivación de evitar la necesidad de usar un CIS es que surge el par de conjuntos interior y exterior, mencionados al comienzo de esta sección y que constituyen la base de las contribuciones de esta tesis. La condición que debe cumplir este par de regiones es que si el estado del sistema se encuentra en el conjunto interior, entonces debe poder retornar al mismo en una cantidad finita de pasos sin salirse del conjunto exterior. Esta propiedad teórica, relacionada con la invariancia como se explicará más adelante, permite formular estrategias de MPC estabilizantes sin necesidad explícita de conocer un CIS. En última instancia, las ventajas asociadas con el uso de este par de conjuntos en lugar de una región invariante se manifiestan en una mayor flexibilidad y simplicidad a la hora de diseñar controladores MPC estabilizantes.

## 1.2. Trabajos Relacionados

La literatura relacionada presentada en este capítulo introductorio ha sido agrupada en correspondencia con las tres partes que conforman el núcleo de esta tesis. En primer lugar se encuentra la que plantea alternativas al uso de conjuntos invariantes, que es lo que termina siendo nuestra propuesta del par interior-exterior. Posteriormente se comentan trabajos sobre técnicas de MPC que abordan la cuestión de la estabilidad y/o toman elementos del control basado en conjuntos para sus formulaciones. Esto se relaciona con el controlador que proponemos a partir de las regiones interior y exterior. Por último, se presentan publicaciones sobre control de movimiento en vehículos con ruedas mediante MPC, lo que se vincula con la aplicación en robótica agrícola que

desarrollamos hacia el final de la tesis. Sobre esto último se aclara que aunque se aborden configuraciones más allá de la tipo auto y los entornos no se limiten al agro, la literatura descripta no es exhaustiva.

### 1.2.1. Alternativas a los Conjuntos Invariantes

Aunque existen muchos procedimientos para el cómputo de (R)CIS bajo diferentes suposiciones [5–9], como ya se mencionó esto es siempre complicado y aun en aquellos casos en los que puede hacerse las regiones obtenidas suelen ser difíciles de utilizar y manipular cuando son poliedros o demasiado conservadoras si se trata de hiperelipsoides. Esto ha motivado la aparición de alternativas a estos conjuntos basadas en la relajación parcial de la condición de invariancia. Posiblemente el primer trabajo que plantea este tipo de ideas sea [10], que considera particularmente sistemas de tiempo discreto<sup>2</sup> lineales y periódicos, es decir que sus ecuaciones dependen de matrices  $M_k$  tales que  $M_k = M_{k+T}$  para algún valor positivo de  $T$ . En dicho trabajo también se asume que el estado, la entrada y las perturbaciones están restringidos a pertenecer a regiones que varían con el mismo período  $T$ . Un conjunto periódicamente invariante es definido entonces para este tipo de sistemas como aquel para el cual existe una ley de control que permite garantizar que si el estado se encuentra en dicho conjunto, entonces puede retornar a él tras  $T$  instantes de tiempo satisfaciendo siempre las restricciones variantes en el estado y la entrada.

Otro concepto semejante es el de cuasi-invariancia, para sistemas lineales con parámetros variantes (LPV), que es propuesto en [11] y se define con respecto a una ley de control invariante en el tiempo pero que depende de los parámetros del sistema. Si el estado pertenece a un conjunto cuasi-invariante en un dado instante de tiempo, entonces existe un número finito de pasos tras los cuales el mismo puede volver a estar en dicha región mediante la aplicación de entradas factibles, independientemente de la evolución de los parámetros del sistema. A pesar de presentar esta novedosa idea considerando conjuntos poliédricos, los autores de este trabajo solo utilizan la cuasi-invariancia como un medio para obtener conjuntos invariantes, que son los que finalmente usan.

En [9, 12] se extiende la propuesta anterior introduciendo el concepto de invariancia extendida o invariancia periódica, semejante al de cuasi-invariancia excepto por el hecho de que el controlador también puede ser variante en el tiempo. Es destacable también que en las formulaciones de [9, 12] no se utilizan poliedros sino hiperelipsoides

<sup>2</sup>En general, a menos que se aclare lo contrario, siempre se hará referencia a sistemas de tiempo discreto por más que no se lo diga explícitamente.

y se aclara explícitamente que puede haber restricciones en el estado además de en la entrada como era únicamente en [11].

Los trabajos [13, 14] exploran y expanden la idea de invariancia periódica para analizar las trayectorias de sistemas dinámicos lineales con respecto a restricciones estáticas. Se proponen así los conceptos de invariancia periódica ( $p$ -invariancia) fuerte y débil según si el retorno del estado al conjunto  $p$ -invariante se da en una cantidad exacta, o menor o igual que  $p$  pasos. Otras ideas relacionadas son la generalización de conjuntos  $(k, \lambda)$ -contractivos [15, 16], que además del retorno tras  $k$  pasos prevén la posibilidad de contracción mediante el factor  $\lambda$ , y los conjuntos invariantes de tiempo de permanencia para sistemas conmutados [17].

Una noción un tanto más alejada pero que también constituye una relajación del concepto de invariancia es la  $\mathcal{D}$ -invariancia cíclica [18]. Esta idea fue propuesta en el contexto de sistemas de tiempo discreto con retardo y se define considerando conjuntamente los estados actuales y anteriores (retardados). Una secuencia de conjuntos para el intervalo del retardo, que no necesariamente tienen que ser iguales, se denomina cíclicamente  $\mathcal{D}$ -invariante si se respeta una propiedad de inclusión cíclica entre sus elementos. Los autores de [18] analizan las implicancias de este concepto en el problema de estabilización de sistemas autónomos de tiempo discreto con retardo.

Una característica común a la mayoría de las ideas hasta aquí mencionados es que cuando el estado abandona el conjunto con la propiedad de invariancia relajada que sea, solo es restringido (y no en todos los casos) a permanecer dentro de la región factible. Dependiendo del tamaño de dicha región, esto podría significar alejarse demasiado del conjunto objetivo, lo cual podría traer problemas según cuáles sean los requerimientos que hayan sido impuestos para el diseño del controlador. A diferencia de esto, el par de conjuntos interior-exterior que se describe en esta tesis permite cumplir con la restricción de que el estado siempre quede restringido a permanecer en el conjunto exterior, que a su vez es el que juega el rol de conjunto objetivo. Como se verá más adelante, esto constituirá una ventaja importante de nuestras formulaciones.

### 1.2.2. MPC, Estabilidad y Conjuntos

Si bien existen diversos enfoques basados en la utilización de (R)CIS para el diseño de controladores con propiedades teóricas [18–20], en el contexto de MPC estos conjuntos son típicamente usados como restricción terminal en el problema de optimización y permiten que el mismo sea recursivamente factible, lo cual es fundamental para asegurar la convergencia del estado a la región objetivo [21–23]. Más concretamente y a modo de ejemplo, en [24] la restricción de que el último estado predicho pertenezca

a un CIS es utilizada para probar que la factibilidad del problema de optimización, independientemente de que se encuentre o no una solución óptima, es suficiente para garantizar estabilidad y convergencia en tiempo finito. Lo que los autores de dicho trabajo proponen son dos versiones, una óptima y otra subóptima, de una estrategia MPC de modo dual con una función de costo de etapa  $L(x, u) \geq \ell(\|(x, u)\|)$  para todo  $x \notin \Omega$  y todo  $u \in U$ , donde  $\ell(s)$  es una función de clase  $\mathcal{K}$ ,  $\Omega$  es el conjunto objetivo y  $U$  es un conjunto de entrada acotado. Se asume que  $L(x, h_L(x)) = 0$  para todo  $x \in \Omega$ , siendo  $h_L(x)$  una ley de control local a  $\Omega$ , y que para el sistema en lazo cerrado con  $u = h_L(x)$ ,  $\Omega$  es invariante. Hay que mencionar que en este controlador se aplica MPC solo en la primera etapa de la operación de modo dual, hasta lograr convergencia (en tiempo finito) al CIS. Luego, en el segundo modo, se emplea un controlador local que directamente se asume que posee un comportamiento asintóticamente estable hacia el origen.

Una idea semejante a la de [24] es presentada en [22], donde un RCIS que es además contractivo se utiliza como región objetivo. En este caso, el costo de etapa, que incluye un término específicamente diseñado dependiente de la entrada, se vuelve nulo en dicho conjunto y nuevamente se agrega una restricción terminal que impone que el último estado predicho dentro del horizonte pertenezca al RCIS. Luego, estas condiciones se usan para probar convergencia en tiempo finito a la región objetivo, pero no se garantiza que el estado quede allí para siempre luego de haber llegado.

Manteniéndonos en la línea de trabajos que utilizan CIS, en [25] se analiza el caso en el que la entrada de control está cuantificada, es decir que pertenece a un conjunto finito<sup>3</sup> o, lo que es lo mismo, a uno cuya cardinalidad es un número natural. Considerando sistemas lineales y estacionarios, en este trabajo se propone una estrategia estabilizante de MPC de modo dual con restricción terminal pero sin costo final, y se brindan resultados para la construcción de CIS poliédricos cuando dichos sistemas tienen entrada cuantificada de dimensión unitaria. El cómputo de la acción de control se plantea como un problema de optimización cuadrática mixta-entera (MIQP).

Otra contribución al tema de la estabilidad de MPC aplicado a sistemas con entrada finita está dada por [26]. Allí se plantea una estrategia de horizonte deslizante con ley de control, conjunto y costo terminales y se investigan formas de probar estabilidad bajo la condición de que el conjunto de control sea finito. Se presentan entonces dos enfoques. El primero se basa en tomar la entrada como si perteneciera a un conjunto no finito pero estuviera afectada por una perturbación acotada: el error de cuantificación.

---

<sup>3</sup>Este caso es particularmente interesante por los ejemplos de aplicación que se desarrollan en esta tesis.

A partir de eso se utilizan resultados del control robusto y la teoría de la estabilidad entrada-estado [27]. El segundo enfoque plantea un análisis directo a partir del cual se deriva una condición que debe ser satisfecha por la función de costo en la región terminal.

Dejando de lado los CIS, varios de los trabajos presentados en la subsección anterior también proponen estrategias de MPC teniendo en consideración los conjuntos que definen con propiedades más relajadas que la invariancia. Por ejemplo, en [10] se plantea un controlador por realimentación óptimo a lazo abierto<sup>4</sup> para resolver el llamado problema de mantenimiento de horizonte infinito. Esta estrategia se generaliza mediante la utilización de una distancia que contempla la forma de los conjuntos de la secuencia periódicamente invariante que restringe al estado. Esto se hace formulando la optimización lineal como una minimización de un factor de escala aplicado a dicha secuencia de conjuntos. El escalado debe ser tal que las diferencias entre los estados predichos y las referencias futuras se mantengan dentro de los mencionados conjuntos.

Por su parte, en [11] se formula un control de horizonte deslizante de modo dual como un problema de optimización lineal con varias restricciones, entre ellas que el último estado predicho pertenezca al conjunto invariante que se obtiene de propagar los vértices de los conjuntos (poliédricos) cuasi-invariantes. Este enfoque involucra mucho costo computacional, por más que se propone una técnica de superposición subóptima para reducirlo, y no ofrece ninguna forma sistemática de hallar las realimentaciones de estado (ganancias) que se requieren.

Debido a esas limitaciones, en [9] se plantea una estrategia de MPC de optimización mínimo-máximo cuya restricción terminal emplea secuencialmente conjuntos elipsoidales invariantes extendidos en lugar de un único conjunto invariante. Al ser estas regiones hiperelipsoides, se facilita la obtención de las realimentaciones de estado y se reduce considerablemente la carga numérica ya que mucho del cómputo puede resolverse en forma previa. Esto último es una diferencia importante respecto de otros trabajos como [28, 29], que también tienen leyes de control y conjuntos terminales que varían con el tiempo pero que deben ser recomputados, en principio, en cada instante de muestreo. El controlador propuesto en [9], aplicable para ciertos casos no lineales, permite lograr estabilidad asintótica y uniforme. En [12] estas ideas se extienden agregando, entre otras cosas, la posibilidad de tener restricciones en el estado. A su vez, [30] se basa en [12] para plantear una estrategia MPC robusta y periódica con realimentación de salida para sistemas cuasi-LPV con incertidumbre politópica y perturbaciones acotadas.

---

<sup>4</sup>Usamos esta denominación porque así se lo llama en [10] aunque el esquema entraría dentro de la familia de MPC.

Las ideas de  $p$ -invariancia de [13, 14] son en verdad utilizadas para una estrategia de MPC en [31]. La principal contribución de este último trabajo es más bien metodológica y hace foco en una aplicación concreta para un simulador de manejo. Mediante la utilización de una restricción terminal basada en un conjunto periódicamente invariante, se logra la factibilidad recursiva del problema de optimización que se busca resolver. No se proveen sin embargo, garantías de estabilidad.

Continuando con trabajos que no fueron citados en la subsección anterior, [32] plantea un esquema MPC para sistemas periódicos que garantiza estabilidad asintótica y sirve para el caso lineal así como también para ciertos escenarios no lineales. En esta formulación, se utilizan restricciones y costos terminales variantes en el tiempo de forma periódica pero los conjuntos que definen dichas restricciones no necesariamente tienen la propiedad de ser periódicamente invariantes. Hay que destacar también que en este caso se utilizan hiperelipsoides y no poliedros, a diferencia de [10]. A su vez, los autores muestran que su enfoque, al tener en cuenta explícitamente la estructura periódica de los sistemas considerados, logra mejores propiedades de factibilidad y regiones terminales más grandes que, por ejemplo, [9].

El trabajo [33] utiliza el concepto de invariancia periódica para proponer una estrategia de MPC para sistemas lineales periódicos cuyos estados y entradas están sujetos a restricciones periódicas y además tienen dimensiones que pueden variar con el tiempo. Esto último es interesante para el control de sistemas con entradas asincrónicas. El esquema de MPC propuesto utiliza cíclicamente restricciones terminales con conjuntos periódicamente invariantes y toma para su formulación algunos resultados conocidos de la teoría de reguladores lineales cuadráticos periódicos sin restricciones. A partir de esto los autores demuestran, entre otras propiedades, que su controlador es estabilizante y óptimo.

Además de las complicaciones asociadas con la obtención y el manejo de conjuntos como los mencionados, su uso en MPC acarrea otras limitaciones como ser la reducción de la región de atracción del controlador. Estas dificultades han motivado el desarrollo de esquemas MPC estabilizantes que no imponen restricciones con conjuntos terminales en sus formulaciones. Por ejemplo, en [34] se propone una estrategia de control de horizonte deslizante con un costo de etapa que refleja un criterio económico en lugar de la distancia a una referencia. Luego, por medio de ciertas condiciones verificables, el autor demuestra convergencia al entorno de un estado óptimo. Otro enfoque, presentado en [35, 36], caracteriza una región para la cual la restricción terminal del problema de optimización puede evitarse sin que se pierda la estabilidad asintótica. Luego se prueba que, con una ponderación adecuada del costo terminal, esta región puede ser

agrandada de modo que el dominio de atracción del esquema MPC con restricción terminal sea prácticamente alcanzado.

Otra idea, presentada en [37], es la de MPC contractivo, que utiliza una restricción que fuerza al estado a “contraerse” en términos de cierta norma al final del horizonte de predicción respecto del mismo al comienzo de dicha ventana temporal. Los trabajos [38, 39] extienden este esquema evitando restricciones terminales relacionadas con estabilidad y utilizando en cambio una función de costo variante en el tiempo conformada por dos términos: el primero es uno vinculado al desempeño, ponderado por un estado interno del controlador, y el segundo es un término asociado con la estabilidad que es escalado y se asume que satisface una restricción de contracción. La convergencia del sistema a lazo cerrado es probada con esta estrategia.

A pesar de la existencia de alternativas como las mencionadas en los dos párrafos anteriores, las técnicas estándar actualmente para el diseño de controladores MPC con garantías de estabilidad se apoyan fundamentalmente en el uso de conjuntos y, generalmente, de invariantes. Esto se denomina MPC basado en conjuntos [22, 40]. Sin embargo, debido a sus dificultades prácticas su utilización en aplicaciones es aún muy limitada.

### 1.2.3. Control de Vehículos Mediante MPC

El potencial de la navegación autónoma para mejorar la seguridad, accesibilidad, eficiencia y conveniencia del transporte en general es enorme. Esto justifica la gran importancia que se le ha dado, desde hace ya varias décadas, a intentar desarrollar esta tecnología tanto en la academia como en la industria [41]. Dicho interés ha sido creciente debido a la reducción de costos y tamaños de los dispositivos de cómputo y medición y por el avance de técnicas como la inteligencia artificial [42].

El hecho de que los vehículos con ruedas sean sistemas no holonómicos [43] dificulta considerablemente su maniobrabilidad. Esto ha motivado la utilización de controladores de cierta complejidad, como los de horizonte móvil entre otros [44], para resolver los problemas de seguimiento de trayectoria y de camino. Conceptualmente, estos problemas se diferencian en tener o no una parametrización temporal del estado a seguir. En [45] se aborda el control de trayectoria sobre un robot tipo monociclo (al que también se le suele llamar de tracción diferencial) a partir de una estrategia con realimentación y acción *feedforward*. Dado que se tiene a disposición una trayectoria de referencia factible con las entradas correspondientes, estas últimas pueden aplicarse directamente. La acción por realimentación, utilizada para compensar perturbaciones, se obtiene mediante un esquema MPC lineal formulado con un modelo del error de seguimiento

expresado en el marco de referencia local del robot real. Esta estrategia requiere linealizar la dinámica de dicho error en cada instante de muestreo. Además, se agregan restricciones en velocidad y aceleración para evitar deslizamiento. En [46] se implementa la misma idea pero con MPC explícito [47] y en [48] se utiliza un enfoque similar pero con el modelo del error de seguimiento expresado en un marco de referencia global. En esta última publicación también se compara el esquema de MPC lineal con otro basado en MPC no lineal.

En el trabajo [49] se aplica MPC no lineal aunque con el objetivo de seguir puntos de paso o *waypoints* evitando obstáculos. En este caso no se utiliza un modelo dinámico del error sino directamente el del sistema físico, que es un monociclo. Los autores evitan resolver la optimización que plantean a través de métodos tradicionales. En lugar de eso, aplican una estrategia de búsqueda sistemática que consiste esencialmente en cuantificar las posibles entradas (velocidad lineal y angular), hacer un gran número de simulaciones del sistema a lazo abierto y, mediante una función de costo hecha a medida, seleccionar y aplicar la primera acción de control de la secuencia de entradas cuyo costo haya sido el mínimo. Esta propuesta, cuya implementación se hace en una placa de video, se basa en la idea de MPC con conjunto finito de control (FCS-MPC) que es una estrategia más popular en el campo de la electrónica de potencia.

El enfoque de ventana dinámica presentado en [50] es también un esquema de MPC aunque en dicho trabajo no se lo diga explícitamente<sup>5</sup>. En su formulación los autores utilizan un modelo dinámico de monociclo que considera los límites del par de torsión de los actuadores. A partir de ello, se deriva una expresión aproximada que describe las trayectorias como secuencias de arcos de circunferencia. Luego se plantea una búsqueda de comandos de velocidad longitudinal y rotacional con el fin de maximizar una cierta función objetivo. Esta búsqueda se realiza en un espacio en torno a los valores actuales de dichas variables (por eso el nombre de ventana dinámica) y solo se tienen en cuenta aquellas entradas que evitan colisiones con obstáculos. Hay que aclarar también que en este esquema, del horizonte temporal considerado para las predicciones se prevén cambios de velocidad únicamente en el primer instante de tiempo. Aunque no se lo denomine así en [50], esto sería tomar un horizonte de control unitario.

Existe una enorme cantidad de publicaciones adicionales sobre MPC aplicado a vehículos con ruedas pero no es el objetivo de esta tesis desarrollar con más detalle dicha literatura. En muchos casos estos trabajos incluyen resultados experimentales con plataformas reales [51–54] mientras que en otros el enfoque está puesto más bien sobre

---

<sup>5</sup>Es probable que esto se deba a que los autores, si bien trabajan en robótica, se formaron en ciencias de la computación, no en ingeniería ni control. Además, esta publicación es de cuando el nombre MPC no estaba tan difundido.

propiedades teóricas como lograr acotación final o cierto tipo de estabilidad [55, 56]. Por último, con respecto al uso de MPC en aplicaciones agrícolas, en [57] se hace una revisión amplia, focalizando también en cuestiones de navegación y seguimiento de camino. Muchas de las publicaciones que tratan estos temas se centran en cuestiones como la presencia de deslizamiento [58, 59] y el control con implementos remolcados o tráileres [60, 61].

### 1.3. Organización de la Tesis

Como es habitual, en la primera parte del resto de esta tesis se desarrollan los temas teóricos necesarios para el abordaje de lo posterior. Esto corresponde al Capítulo 2, de preliminares. Allí se dan en forma rigurosa las definiciones de los conjuntos mencionados en esta introducción así como también el concepto de estabilidad práctica, entre varios otros. Se hace además una breve presentación teórica de los controladores MPC.

Luego, cada uno de los Capítulos 3 a 5 contiene, de forma general pero bien definida, una de las contribuciones de esta investigación. En el primero de ellos está la presentación del par de conjuntos interior y exterior como alternativa al RCIS para el diseño de controladores estabilizantes. Se muestran los vínculos que hay entre ellos y los RCIS y, en particular, se prueba que la existencia de dicho par implica la existencia de un RCIS entre ambos. Además, se proveen resultados teóricos que ayudan en la búsqueda de conjuntos interiores y en la verificación del cumplimiento de la propiedad que los define dados los correspondientes conjuntos exteriores, que suelen estar disponibles por ser las regiones objetivo a las que se desea arribar.

En el Capítulo 4 se formula una estrategia de MPC basada en la utilización del par interior-exterior presentado previamente. Se demuestra que dicho esquema, con restricciones y un costo de etapa diferentes a los de otras formulaciones, permite bajo ciertas condiciones garantizar estabilidad práctica y factibilidad recursiva. Se brinda luego un procedimiento sistemático para el diseño del controlador y se analizan los resultados obtenidos, mostrándose también un ejemplo ilustrativo basado en el modelo de un péndulo invertido. Por último, se propone una extensión teórica del esquema desarrollado que permite la utilización de horizontes de control y predicción diferentes.

El capítulo siguiente, a diferencia de los anteriores de naturaleza teórica, se centra en una aplicación concreta en robótica para el agro. Utilizando el esquema mencionado para diseñar controladores MPC estabilizantes, se propone una estrategia de seguimiento de camino para un robot agrícola tipo auto que considera la acción de control (velocidad

de giro de la dirección) como perteneciente a un conjunto finito. El comportamiento de este controlador es analizado mediante simulaciones realistas para comparar su desempeño con el de otra estrategia MPC no lineal.

Finalmente, en el Capítulo 6 se abordan las conclusiones generales de esta tesis y se proponen líneas de investigación futura.

## 1.4. Publicaciones Realizadas

De la investigación llevada adelante resultaron publicados cuatro trabajos en revistas internacionales y cuatro en actas de congresos nacionales. A continuación se mencionan estas publicaciones en el orden cronológico en el que fueron realizadas.

Lo primero que se hizo fue experimental e involucró una evaluación de sistemas visuales de localización y mapeo simultáneos (SLAM) en un conjunto de datos grabados previamente por nuestro grupo de trabajo en un campo de soja. Esto se presentó en un congreso nacional [62] y si bien no se desarrolla en la tesis por no habérselo podido usar para control, su finalidad era poder caracterizar el ruido de medición de este tipo de sistemas para luego utilizar eso en la aplicación de una técnica de control robusto. Dicha evaluación fue luego extendida, analizando cuatro veces más sistemas (de odometría visual-inercial en este caso, no de SLAM visual), liberando el código usado y resolviendo algunos problemas que tenían los datos originales. En este caso, el trabajo fue publicado en una revista internacional [63].

Posteriormente, ya en una línea de control pero aún experimental, se aplicó una estrategia de FCS-MPC al problema de seguimiento de camino con un robot tipo auto para entornos agrícolas. Un congreso nacional fue en donde se presentó este trabajo [64]. La demostración de estabilidad del esquema MPC propuesto en dicha publicación motivó la conceptualización de los conjuntos interior y exterior y la reformulación de la estrategia MPC en términos de dicho par. Estas ideas se presentaron respectivamente en [65, 66], siendo ambas publicaciones en revistas internacionales. En particular, esta última propuesta de MPC también se expuso en un congreso nacional [67], donde además se presentó una implementación en placa de video de la estrategia MPC original no estabilizante [68].

Por último, teniendo ya formulado el esquema MPC basado en el par interior-exterior, lo que se hizo fue volver a abordar la aplicación agrícola de seguimiento de camino con robot tipo auto pero con dicho nuevo controlador. Este trabajo [69], en el que además se propuso una extensión teórica para que sea factible tener horizontes de predicción y control diferentes, fue publicado en otra revista internacional.



# Capítulo 2

## Preliminares

En este capítulo se desarrollan las cuestiones previas que son necesarias luego para introducir los resultados del trabajo. En primer lugar se describe la notación utilizada. Luego se presentan ciertos conceptos relacionados con la idea de estabilidad, definidos de forma particular para esta tesis, junto con las ecuaciones generales de los sistemas usados en los capítulos siguientes. Después se brindan las definiciones formales de los CIS y los RCIS y se presenta uno de los procedimientos más clásicos para el cómputo de los mismos. Finalmente, tomando como base la bibliografía dada por [4, 21, 70], se desarrolla brevemente una introducción teórica sobre la familia de controladores MPC, describiéndose los principales elementos de dichas formulaciones.

### 2.1. Notación

Si bien la simbología introducida en esta sección no es exhaustiva respecto de la usada en toda la tesis, la misma resulta suficiente para comenzar con su lectura. Lo que no esté descripto acá, se explicará cuando sea necesario.

Los conjuntos de números reales, reales no negativos, naturales  $\{1, 2, 3, \dots\}$ , enteros, enteros no negativos y enteros en el intervalo  $[E, F]$  se denotan respectivamente  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$  y  $\mathbb{Z}_{E:F}$ . La función techo de un número  $b \in \mathbb{R}$ , representada así  $\lceil b \rceil$ , se define como  $\min\{z \in \mathbb{Z} : z \geq b\}$ . Para una secuencia  $\{a_1, \dots, a_n\}$  con  $n \in \mathbb{N}$  y un conjunto  $A$ , la notación  $\{a_1, \dots, a_n\} \in A^n$  significa que cada elemento de dicha secuencia pertenece a  $A$ . Dada la entrada de control  $u$  de un sistema, los valores futuros posibles de la misma en el instante  $k + i$  computados en el tiempo  $k$  se denotan  $u_{k+i|k}$ . De modo similar, las predicciones para el instante  $k + i$  del estado  $x$ , basadas en la información disponible hasta el tiempo  $k$  y considerando valores futuros de la acción de control hasta  $k + i - 1$ , son indicados como  $x_{k+i|k}$ . La notación  $\|v\|_2$  se refiere a la norma

euclídea de  $v \in \mathbb{R}^n$ , es decir  $\|v\|_2 \triangleq \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$ . Una bola abierta con radio  $\epsilon > 0$  centrada en  $x \in \mathbb{R}^n$  es denotada  $B(x, \epsilon)$  y se define como  $\{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\|_2 < \epsilon\}$ . Cuando esta bola está centrada en el origen, su notación se simplifica como  $B_\epsilon$ .

## 2.2. Estabilidad Práctica

Consideremos en principio un sistema general de tiempo discreto con perturbaciones descrito por el siguiente modelo no lineal invariante en el tiempo:

$$x_{k+1} = f_p(x_k, u_k, w_k), \quad (2.1)$$

donde  $x_k \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $u_k \in U \subseteq \mathbb{R}^m$  y  $w_k \in W \subset \mathbb{R}^p$  representan el estado, la entrada de control y la perturbación en el tiempo  $k$ , respectivamente. El caso nominal, sin perturbaciones, es también importante para esta investigación por lo que a continuación se muestra su ecuación:

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k). \quad (2.2)$$

Si bien es común que el sistema (2.2) se presente simplemente a partir de tomar  $W = \{0\}$  en (2.1), eso en verdad solo es válido cuando 0 representa el caso sin perturbación (por ejemplo para perturbaciones aditivas). Brindando en cambio las ecuaciones para cada situación de forma independiente, el planteo es más genérico.

Lo que se busca al hacer control es computar, típicamente como función del estado, la entrada a aplicar sobre el sistema para que el mismo evolucione de alguna manera deseada. Matemáticamente esto significa que  $u_k = h(x_k)$ , por lo que reemplazando con esta expresión en (2.1) y (2.2), puede llegarse a los siguientes sistemas autónomos:

$$x_{k+1} = f_p(x_k, h(x_k), w_k) = f_{pa}(x_k, w_k), \quad (2.3)$$

$$x_{k+1} = f(x_k, h(x_k)) = f_a(x_k). \quad (2.4)$$

Tener los sistemas en esta forma es importante porque así se los suele utilizar para presentar definiciones de propiedades de estabilidad, que es lo que nos interesa hacer en esta sección.

La estabilidad de un punto de equilibrio suele caracterizarse en el sentido de Lyapunov, pudiendo el mismo ser inestable, asintóticamente estable o estable pero no asintóticamente. A modo de ejemplo, y por ser una definición básica en teoría de control, a continuación se brinda el concepto de estabilidad asintótica. Esta definición está dada con respecto al origen y en términos de las funciones de clase  $\mathcal{KL}$  [3].

**Definición 1** (Estabilidad Asintótica). El origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable para el sistema (2.4) en  $X$  si existe una función  $\beta(s, k)$  de clase  $\mathcal{KL}$  tal que para cada  $x(0) \in X$ , la solución  $x(k)$  satisface

$$\|x(k)\| \leq \beta(\|x(0)\|, k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Esta definición clásica es también muy usada en la literatura de MPC. Sin embargo, para el tipo de sistemas considerados en esta investigación no es realmente adecuada. Por más que se asuma que  $W$  es un conjunto acotado, si las perturbaciones son no evanescentes en (2.3) entonces en general resulta imposible lograr un comportamiento asintóticamente estable hacia un punto de equilibrio, es decir que no puede garantizarse que el estado converja al mismo. Aunque esto *a priori* no sería un problema para el sistema dado por (2.4), una condición que nos interesa considerar también es que la entrada de control pertenezca a un conjunto finito. Debe notarse que con esta restricción, ni para el sistema perturbado ni para el nominal sería en general esperable que se pueda arribar a un punto de equilibrio.

En cualquiera de estos casos, lo mejor a lo que podría aspirarse en principio es a que el estado llegue a cierta región objetivo, en la que se cumplan los requerimientos de control preestablecidos y que llamaremos  $\Omega_O$ , y que luego las trayectorias se mantengan allí confinadas. A esta propiedad que involucra convergencia en tiempo finito y permanencia en dicho conjunto, la denominaremos estabilidad práctica o acotación final, y cuando se cumpla diremos que el sistema está finalmente acotado por  $\Omega_O$ , que constituye la cota final tal como se define a continuación.

**Definición 2** (Cota Final). Un conjunto  $\Omega_O$  es una cota final para el sistema (2.4) desde la región  $\mathcal{X}$  si para cada condición inicial  $x_0 \in \mathcal{X}$  existe un  $T(x_0) \geq 0$  tal que la solución  $x_k \in \Omega_O$  para todo  $k \geq T(x_0)$ . En el caso de (2.3), se requiere además que esto sea válido para cualquier secuencia infinita de perturbaciones, siendo  $T(x_0)$  independiente de las mismas.

Hay varias observaciones para hacer en relación a esta definición. En primer lugar hay que remarcar que la noción de acotación final es diferente a otras más clásicas como la de [3] y no solo porque esta última está dada para sistemas de tiempo continuo. A pesar de que en ambos casos está presente la idea de convergencia y permanencia, la definición usada en esta tesis es más general puesto que no se plantea en términos de conjuntos de nivel determinados por normas como en [3] sino que se permiten regiones arbitrarias que podrían por ejemplo ser no convexas. Relacionado con esto último está también el hecho de que para la Definición 2 no tenga sentido requerir que desde

versiones reducidas del conjunto  $\mathcal{X}$  el estado también deba llegar a  $\Omega_O$ , que sería una condición análoga a la pedida en [3]. A su vez, la Definición 2 contempla la posibilidad de que haya perturbaciones en el sistema pero no tiene en cuenta que el mismo pueda ser variante en el tiempo como sí se hace en [3], donde se habla de uniformidad.

También debe notarse que el concepto de estabilidad práctica así como se lo plantea, es diferente a otras nociones homónimas de la literatura. La idea presentada en [71], dada en verdad para sistemas de tiempo continuo, impone requerimientos adicionales como que el conjunto de las condiciones iniciales sea un subconjunto de la región objetivo. La misma restricción se considera en [72]. Aunque en este último caso sí está planteada la definición para sistemas de tiempo discreto, se pide también que el conjunto objetivo sea invariante y la convergencia se plantea en términos asintóticos. Para nosotros,  $\Omega_O$  no necesariamente tiene que ser invariante (veremos igualmente que sí debe contener uno) y el estado debe llegar a dicha región en un tiempo acotado.

Por último, aclaramos que la propiedad de estabilidad práctica presentada en esta sección será usada indistintamente a lo largo de esta tesis tanto para el sistema con perturbaciones (2.3) como para el nominal (2.4).

## 2.3. Conjuntos Invariantes

Intuitivamente, lo que no varía cuando se habla de invariancia en control es la región en la cual se encuentra el estado a medida que evoluciona el tiempo. La idea de esta sección es presentar formalmente los conceptos de distintos tipos de conjuntos a los que nos referiremos genéricamente como invariantes y comentar cuestiones relacionadas con su cómputo.

Las siguientes definiciones están basadas en [2] y son dadas teniendo en cuenta los sistemas planteados en la Sección 2.2. Tal como se indicó en la Introducción, aunque no usemos explícitamente el término “positivamente”, siempre se considerarán tiempos no negativos y la invariancia se entenderá en el sentido del avance temporal. Es importante aclarar también que al estar trabajando únicamente con tiempo discreto, siempre habrá existencia y unicidad de solución para cada condición inicial posible, asumiendo que tanto el sistema como el controlador están bien definidos y que este último tiene disponible la medición del estado para computar su correspondiente acción de entrada.

**Definición 3** (Conjunto Invariante). Una región  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto invariante para el sistema (2.4) si para toda condición inicial  $x_0 \in \Omega$ , la solución  $x_k \in \Omega$  para todo  $k > 0$ .

**Definición 4** (Conjunto Invariante Robusto). Una región  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto invariante robusto para el sistema (2.3) si para toda condición inicial  $x_0 \in \Omega$  y cualquier secuencia infinita de perturbaciones en  $W$ , la solución  $x_k \in \Omega$  para todo  $k > 0$ .

**Definición 5** (Conjunto Invariante de Control (CIS)). Una región  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto invariante de control para el sistema (2.2) si existe una función de control  $u_k = h(x_k)$  tal que  $\Omega$  sea un invariante para el sistema a lazo cerrado.

**Definición 6** (Conjunto Invariante de Control Robusto (RCIS)). Una región  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto invariante de control robusto para el sistema (2.1) si existe una función de control  $u_k = h(x_k)$  tal que  $\Omega$  sea un invariante robusto para el sistema a lazo cerrado.

Es interesante notar que existe una vinculación entre invariancia y estabilidad práctica. Dado que para la Definición 2 se requiere, entre otras cosas, que la trayectoria del estado permanezca para siempre (a partir de cierto instante de tiempo) en un conjunto  $\Omega_O$ , este debe contener una región tal que si el estado se encuentra allí, entonces el mismo continúe estando allí en el futuro. En función de esto y considerando las definiciones presentadas en esta sección, puede decirse entonces que la existencia de un conjunto invariante en una dada región es condición necesaria (no suficiente) para que esta última pueda ser prácticamente estable.

### 2.3.1. Cómputo

Aunque los conjuntos invariantes pueden tener formas arbitrarias, la mayoría de los trabajos de la literatura abordan caracterizaciones elipsoidales y poliédricas de dichas regiones [1]. Las hiperelipsoides suelen ser obtenidas con procedimientos basados en la ecuación de Lyapunov (para sistemas lineales), en la ecuación de Riccati o en inecuaciones matriciales lineales [2, 73, 74]. Los poliedros invariantes, en cambio, son generalmente computados usando métodos iterativos que implícitamente confieren ciertas propiedades óptimas [75–77].

Dada la orientación de nuestra investigación, resulta más adecuado focalizarse en los conjuntos poliédricos. Si bien estas regiones sufren del problema de la complejidad de su representación, también presentan ventajas respecto de las hiperelipsoides, fundamentalmente por el hecho de ser menos conservadoras.

Para explicar una de las metodologías constructivas más clásicas de conjuntos poliédricos invariantes, que además se verá que está relacionada con resultados presentados más adelante en esta tesis, es necesario introducir el concepto de conjunto robusto en un paso hacia  $\Omega$ , denotado  $\mathcal{C}_1(\Omega)$  [78]. Nótese que este conjunto permite verificar si

dicha región  $\Omega$  es un RCIS ya que para esto es condición suficiente y necesaria que  $\Omega \subseteq \mathcal{C}_1(\Omega)$ .

**Definición 7** (Conjunto Robusto en un Paso). Dado el sistema (2.1) con los correspondientes conjuntos  $X$ ,  $U$  y  $W$ , y la región  $\Omega \subseteq X$ , el conjunto robusto en un paso hacia  $\Omega$  se define como

$$\mathcal{C}_1(\Omega) \triangleq \{x \in X : \exists u \in U \mid f(x, u, w) \in \Omega, \forall w \in W\}. \quad (2.5)$$

Continuando entonces con lo mencionado, este procedimiento estándar fue presentado primero en [75], en el contexto de la programación dinámica, como solución al problema de alcanzabilidad mínimo-máxima de tiempo infinito, para sistemas de tiempo discreto lineales con perturbaciones. La importancia de este resultado le valió luego ser compendiado en la literatura clásica del control basado en conjuntos [1, 2]. Este enfoque iterativo “hacia atrás” permite obtener el máximo RCIS en cierta región  $R \subseteq X$ . Cuando dicha región  $R$  representa el conjunto en el que el estado debe estar confinado por especificación o requerimientos (típicamente un hiperrectángulo), este máximo RCIS se suele llamar también máximo conjunto admisible. El procedimiento comienza seleccionando  $R_0 = R$  y luego itera para computar la secuencia

$$R_{k+1} \triangleq \mathcal{C}_1(R_k) \cap R. \quad (2.6)$$

Los conjuntos  $R_k$  cumplen con que  $R_{k+1} \subseteq R_k$  y se puede demostrar que el máximo RCIS contenido en  $R$  es  $R_\infty \triangleq \bigcap_{k=0}^{\infty} R_k$ . Debe notarse que si  $R_k = R_{k+1}$  para algún  $k \geq 0$ , entonces  $R_k = R_\infty$ . Esto constituye la base del criterio de detención requerido para implementar este método. También podría pasar que la secuencia (2.6) converja al conjunto vacío, en cuyo caso no existiría RCIS en  $R$ .

Si bien este procedimiento iterativo no es exclusivo para poliedros, partir de un conjunto  $R_0$  con dicha forma garantiza que, para sistemas lineales, se continuarán obteniendo poliedros<sup>1</sup>. Por otra parte, si se comienza con una hiperelipsoide, no necesariamente será una hiperelipsoide aquello a lo que se arrije y la complejidad de representación de los  $R_k$  podría fácilmente ser prohibitivamente elevada.

Con fines ilustrativos, en el Ejemplo 1 se presenta un CIS obtenido para un sistema lineal. El mismo se computó con el *Multi-Parametric Toolbox* 3.0 [79] que es una biblioteca de algoritmos para modelado, análisis, diseño e implementación de controladores óptimos con restricciones. Entre las cosas que se pueden hacer con esta

<sup>1</sup>Claro que la complejidad de estos poliedros podría crecer indefinidamente a medida que se itera.

herramienta, está la obtención de conjuntos invariantes y costos terminales<sup>2</sup> para ciertos tipos de sistemas.

**Ejemplo 1 (CIS).** *Consideremos el sistema de tiempo discreto lineal definido por las matrices*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.004 & 0 \\ 0.16 & 0.999 & 1.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.002 \end{bmatrix}.$$

*Este sistema es una linealización del modelo presentado en el ejemplo del Capítulo 4, pero con otros parámetros, y representa un péndulo invertido.*

*Tomando  $R = \{[x_1 \ x_2 \ x_3]^T \in X : |x_1| \leq 0.1, |x_2| \leq 0.14, |x_3| \leq 0.066\}$  y considerando la entrada en el intervalo  $[-1, 1]$ , el CIS resultante es el de la Figura 2.1. Lo interesante para comentar sobre este conjunto es que el mismo posee 120 caras, lo cual dificulta mucho su utilización.*

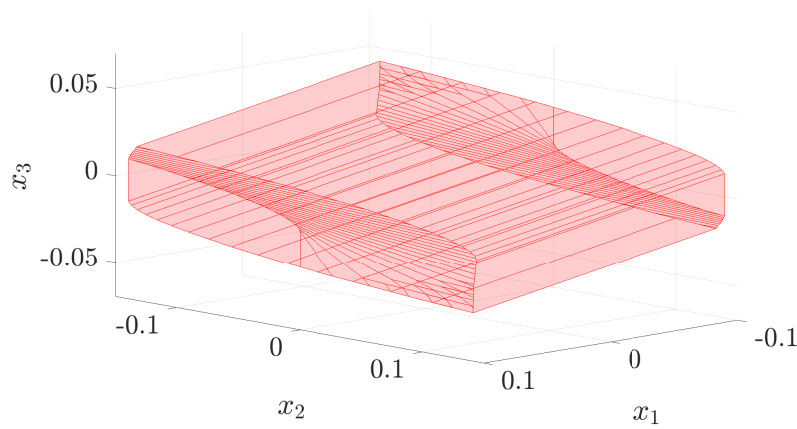


Figura 2.1: Ejemplo de CIS.

<sup>2</sup>En la siguiente sección se hablará sobre los costos terminales, que son muy utilizados en las formulaciones de MPC.

## 2.4. Control Predictivo Basado en Modelo

En esta sección, en primer lugar se describen brevemente algunas ideas que aparecieron con anterioridad en la literatura de control óptimo y que sirven para contextualizar al control predictivo basado en modelo. Luego se desarrollan los aspectos comunes de la mayoría de las estrategias MPC de forma genérica y finalmente se presentan cuestiones relacionadas con la estabilidad de estas formulaciones.

### 2.4.1. Ideas Previas

Como se mencionó en la Sección 1.1, las estrategias MPC tienen su origen en el control óptimo. Esta rama de la teoría de control se caracteriza por utilizar algún índice o indicador de desempeño en sus formulaciones y minimizarlo (o maximizarlo) para hallar la entrada a aplicar sobre el sistema.

Una de las primeras y más básicas técnicas de control óptimo es el regulador cuadrático lineal (LQR). Si bien se desarrolló para tiempo continuo [80], también puede formularse considerando un sistema de tiempo discreto lineal determinístico como el siguiente:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k. \quad (2.7)$$

Este modelo permite predecir la evolución del estado  $N$  instantes de tiempo en el futuro para una dada secuencia de entradas  $\mathbf{u}_0 = \{u_0, \dots, u_{N-1}\}$ . Lo que se hace entonces para la estrategia LQR es penalizar la desviación de las trayectorias del estado y de la entrada respecto del origen (por ejemplo) mediante la siguiente función de costo:

$$J(x_0, \mathbf{u}_0) = x_{N|0}^T P x_{N|0} + \sum_{i=0}^{N-1} x_{i|0}^T Q x_{i|0} + u_{i|0}^T R u_{i|0} \quad (2.8)$$

sujeta a la dinámica (2.7) y donde las matrices  $R$ ,  $Q$  y  $P$  son parámetros de ajuste que definen el peso relativo entre las variables de entrada, de estado y el estado terminal, respectivamente.

Resolviendo entonces el problema de optimización

$$\min_{\mathbf{u}_0} J(x_0, \mathbf{u}_0),$$

se puede hallar la secuencia de entradas óptima, en función de lo que se haya definido para (2.8), a aplicar sobre el sistema. Como esta secuencia de acciones de control depende de la condición inicial, se la suele representar como una realimentación de estados variante en el tiempo.

Es importante mencionar que la obtención de una secuencia finita de entradas óptima no garantiza estabilidad sino solo una respuesta óptima para la ventana temporal considerada. Este problema motivó la aparición de la formulación LQR de horizonte infinito, que se puede demostrar que sí garantiza estabilidad asintótica del sistema nominal. Nótese que en este caso, el término que penaliza el estado terminal en (2.8) se anula.

Dado que un controlador LQR requiere del conocimiento del estado del sistema y esto no siempre está disponible, en simultáneo con esta estrategia se desarrolló la teoría del filtro de Kalman, un estimador de estado óptimo [81]. Dicho filtro se planteó originalmente para sistemas lineales asumiendo ruido gaussiano de media nula tanto en la medición como en el modelo de proceso. La utilización conjunta de un observador de este tipo junto con una estrategia LQR se suele llamar controlador gaussiano cuadrático lineal (LQG). Aunque no se desarrollará más sobre esto (porque no está directamente relacionado con la tesis), es válido mencionarlo porque los estimadores en general resultan ser fundamentales para la aplicación de estrategias MPC, por el mismo motivo que son importante para el LQR.

### 2.4.2. MPC

Los controladores basados en LQR han sido muy utilizados a pesar de tener algunas limitaciones notables. Un primer inconveniente importante que tienen, y que además constituye una gran diferencia respecto de los esquemas MPC, es su incapacidad para manejar restricciones. Al representar sistemas físicos reales las entradas manipuladas están por lo general limitadas. En casos simples, matemáticamente esto puede describirse así:

$$Eu \leq e,$$

donde

$$E = \begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix} \quad e = \begin{bmatrix} \bar{u} \\ -\underline{u} \end{bmatrix}.$$

En forma similar se pueden plantear restricciones para el estado, la salida e incluso para el cambio en la entrada.

La utilización de estas desigualdades lineales es conveniente cuando se trabaja con sistemas lineales. Sin embargo, si se emplean modelos no lineales, el análisis no se simplifica demasiado por usar dicho tipo de restricciones y por lo general estas pasan a

plantearse en términos de pertenencia a conjuntos, genéricamente:

$$(x, u) \in \Upsilon. \quad (2.9)$$

Esta forma de expresarlas permite también representar dependencias entre el estado y la entrada.

En relación con lo que se acaba de mencionar, otra característica distintiva de las estrategias MPC que las diferencia respecto del LQR es que pueden considerar sistemas no lineales como el de la Ecuación (2.2) en sus formulaciones. En general lo que se asume es que los conjuntos  $X$  y  $U$  son cerrados y la función  $f(x, u)$  es continua.

Por su parte, la función de costo de etapa  $\tilde{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , dependiente del estado y la entrada, no necesariamente tiene que ser cuadrática aunque sí suele requerirse que sea definida positiva. Teniendo en cuenta también un costo terminal  $\tilde{L}_f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , la función de costo MPC resulta:

$$V(x_k, \mathbf{u}_k) = \tilde{L}_f(x_{k+N|k}) + \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{L}(x_{k+i|k}, u_{k+i|k}). \quad (2.10)$$

Finalmente, el problema de control óptimo consiste en la minimización de (2.10) respecto de la secuencia de control  $\mathbf{u}_k$ , sujeta a las restricciones (2.9) y a la dinámica del sistema (2.2) siendo  $x_{k|k} = x_k$ . Es común también agregar la condición de que el último estado predicho  $x_{k+N|k}$  pertenezca a un conjunto  $X_f \subset X$ . Esta restricción terminal se introduce con el objetivo de garantizar ciertas propiedades como se verá a continuación en la última parte de este capítulo.

Al resolver el problema de optimización se encuentra la secuencia de entradas óptima  $\mathbf{u}_k^* \triangleq \{u_{k|k}^*, \dots, u_{k+N-1|k}^*\}$  de la cual, siguiéndose un esquema de horizonte deslizante, solo se aplica el primer elemento y se descarta el resto. Considerándose entonces una ley de control implícitamente definida como  $\kappa_{MPC}(x) \triangleq u_{k|k}^*$ , el sistema a lazo cerrado puede describirse como

$$x_{k+1} = f(x_k, u_{k|k}^*) = f(x_k, \kappa_{MPC}(x_k)).$$

Es importante remarcar el uso de la idea de horizonte deslizante, en la que la ventana temporal considerada para las predicciones se va “corriendo hacia el futuro”. Si bien existen enfoques explícitos, en general en MPC se resuelve en cada instante de muestreo un problema de control óptimo de horizonte finito (que es el que se va “moviendo”), en el que el estado “inicial” es el estimado o medido actualmente, y de la correspondiente secuencia óptima calculada solo se utiliza la primera entrada,

prescindiéndose del resto. Hay que notar que el enfoque planteado es muy diferente respecto de LQR, en donde la optimización se realiza una única vez en forma previa y luego se usa toda la secuencia computada, o la realimentación de estados obtenida.

### Ingredientes para la Estabilidad

Que un controlador permita que el sistema a lazo cerrado sea estable en algún sentido, por ejemplo asintóticamente según la Definición 1, es en general lo primero que se busca al hacer control. En el contexto de MPC sin embargo, una propiedad más básica, en el sentido de que es necesaria para lograr estabilidad, es la factibilidad recursiva del problema de optimización asociado. Que el problema de control óptimo cumpla con esto significa que si se puede resolver inicialmente, entonces siempre podrá resolverse en el futuro.

El trabajo [21] es posiblemente la publicación más influyente en lo que respecta al problema de estabilidad en MPC con restricciones. Los autores logran identificar ciertos “ingredientes” a través de los cuales puede asegurarse estabilidad y, por lo tanto, factibilidad recursiva del problema de optimización. Dichos ingredientes son un costo terminal  $\tilde{L}_f(x)$ , una restricción terminal de pertenencia al conjunto  $X_f$  y un controlador local  $\kappa_f(x)$ . El último elemento es el único que no se presentó previamente en este capítulo y constituye una función de control a aplicar cuando el estado se encuentra en  $X_f$ .

En líneas generales, las demostraciones más clásicas de estabilidad en MPC se basan en la utilización del valor óptimo de la función de costo como función de Lyapunov. En el llamado método directo [21], lo que se hace es plantear una reducción en dicha función de Lyapunov entre instantes sucesivos de control y, a partir de ahí, derivar condiciones que deben satisfacer los mencionados ingredientes para asegurar dicha disminución. Estas condiciones, que permiten luego llegar a la estabilidad asintótica (o exponencial) del conjunto objetivo<sup>3</sup>, son las siguientes:

- $X_f \subset X$  debe ser cerrado y contener al origen,
- $\kappa_f(x) \in U, \forall x \in X_f$ , es decir que la entrada calculada por el controlador local tiene que ser factible,
- $f(x, \kappa_f(x)) \in X_f, \forall x \in X_f$ , lo que significa que  $X_f$  debe ser un CIS al aplicar  $\kappa_f(x)$  y

---

<sup>3</sup>Esto requiere del agregado de algunas hipótesis que no se desarrollan aquí. Para mayor detalle, se recomienda referirse a [21].

- 
- $\tilde{L}_f(f(x, \kappa_f(x))) - \tilde{L}_f(x) + \tilde{L}(x, \kappa_f(x)) \leq 0, \forall x \in X_f$ , que implica que  $\tilde{L}_f(x)$  debe ser una función de Lyapunov local.

# Capítulo 3

## Conjuntos Interior y Exterior

De lo expuesto en el capítulo anterior puede decirse que la idea de invariancia sobre la que se construyen las Definiciones 3–6, de conjuntos invariantes en general, involucra una condición considerablemente restrictiva. Esto se manifiesta en las complejas formas que suelen tener dichos conjuntos, especialmente cuando son poliédricos y máximos (y por lo tanto menos conservadores que las hiperelipsoides). Con el objetivo de mitigar estas dificultades este capítulo presenta el par interior-exterior, que constituye la parte más básica de las contribuciones teóricas de esta tesis. Más precisamente lo que se hace es, dada la región exterior objetivo  $\Omega_O$  mencionada en la Sección 2.2, definir el conjunto interior de control en  $N$  pasos. A partir de allí se estudian las propiedades de este último, proveyéndose algunas herramientas para su cómputo y su utilización en el contexto del diseño de controladores. También se prueba que entre este par de conjuntos necesariamente existe un RCIS.

Los resultados de este capítulo se encuentran publicados en [65].

### 3.1. Conjunto Interior de Control en $N$ Pasos

Consideraremos que para el sistema (2.1) se quiere garantizar que las trayectorias converjan y permanezcan en cierto conjunto objetivo  $\Omega_O$  que denominaremos *conjunto exterior*. Asociado a esta región, la siguiente definición presenta formalmente lo que es un *conjunto interior de control en  $N$  pasos*, que en general llamaremos  $\Omega_I$ .

**Definición 8** (Conjunto Interior de Control en  $N$  Pasos). Dado el sistema (2.1) y una región exterior  $\Omega_O \subseteq X$ , se dice que  $\Omega_I \subseteq \Omega_O$  es un conjunto interior de control en  $N$  pasos si para cada  $x_0 \in \Omega_I$ , existe una secuencia de entradas  $\{u_0, \dots, u_{N-1}\} \in U^N$  tal

que  $x_k \in \Omega_O \ \forall k \in \mathbb{Z}_{1:N}$  y  $x_j \in \Omega_I$  para algún  $j \in \mathbb{Z}_{1:N}$  para cualquier secuencia de perturbaciones  $\{w_0, \dots, w_{N-1}\} \in W^N$ .

*Observación 1.* Para el caso del sistema nominal (2.2), que es el considerado en el siguiente capítulo, se puede tomar la misma definición de conjunto interior de control en  $N$  pasos omitiendo únicamente la parte final de que tenga que ser para cualquier secuencia de perturbaciones  $\{w_0, \dots, w_{N-1}\} \in W^N$ .

La Figura 3.1 muestra un conjunto exterior  $\Omega_O$ , un conjunto interior de control en  $N$  pasos  $\Omega_I$ , un RCIS no convexo  $\Omega$  entre ambos y una trayectoria que comienza desde la condición inicial  $x_0$ . De lo que se ve, puede decirse que  $N \geq 5$ .

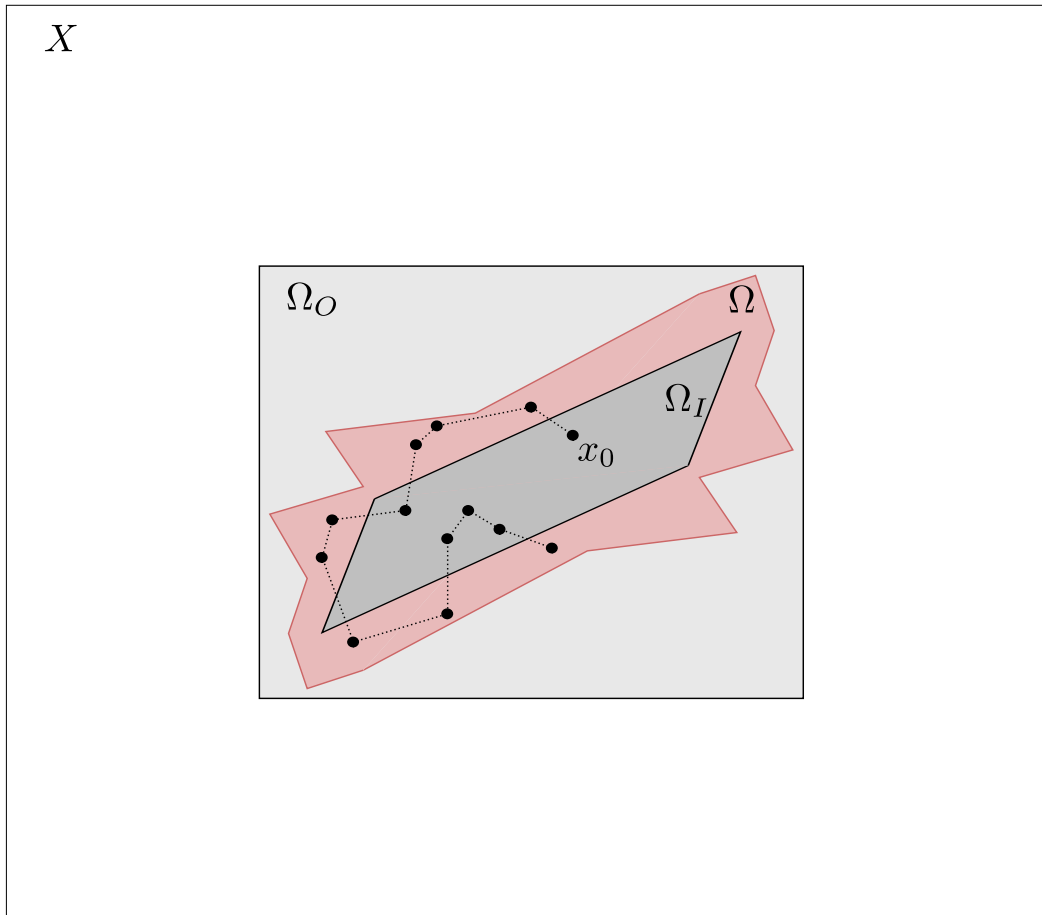


Figura 3.1: Ejemplo ilustrativo de un RCIS no convexo  $\Omega$  con un par de conjuntos interior-exterior más simples,  $\Omega_I$  y  $\Omega_O$ .

Se asumirá que el conjunto exterior  $\Omega_O$  es dado. Si bien esta región objetivo no necesita ser un invariante de control, la misma debería contener un RCIS ya que de otra forma no sería posible asegurar que las trayectorias puedan quedarse en ella. Sin

embargo, en lugar de computar dicho RCIS el objetivo será encontrar un conjunto interior de control en  $N$  pasos  $\Omega_I$ , más simple y que, al verificar la Definición 8 permita que el estado se pueda mantener en  $\Omega_O$ .

Debe notarse que el conjunto interior  $\Omega_I$  estará siempre asociado con un conjunto exterior  $\Omega_O$ . A pesar de esto, por razones de legibilidad y espacio y considerando que dicha región externa siempre será  $\Omega_O$ , no siempre se hará mención explícita de la misma.

Antes de proveer un modo de caracterizar a  $\Omega_I$ , se analizará la existencia de un máximo conjunto interior de control en  $N$  pasos en  $\Omega_O$  y se relacionará esta región con el concepto clásico de RCIS.

### 3.1.1. Máximo Conjunto Interior de Control en $N$ Pasos

En esta subsección se mostrará que dado un conjunto exterior, existe un máximo conjunto interior de control en  $N$  pasos que, si no es el conjunto vacío, resulta ser un RCIS. Además de esto, se probará que esta región puede ser caracterizada como el punto fijo de un simple procedimiento iterativo. Para llegar a estas propiedades, primero se brindarán algunos lemas, corolarios y proposiciones auxiliares.

**Proposición 1.** *Dado el sistema (2.1) y el conjunto exterior  $\Omega_O \subseteq X$ , existe un máximo conjunto interior de control en  $N$  pasos  $\Omega_I^{\text{máx}}$ , siendo  $\Omega_I^{\text{máx}} \triangleq \emptyset$  en caso de que no exista ningún conjunto interior de control en  $N$  pasos en  $\Omega_O$ .*

*Demostración.* Dados dos conjuntos interiores de control en  $N$  pasos,  $\Omega_I^1$  y  $\Omega_I^2$ , puede directamente verse que la unión  $\Omega_I^1 \cup \Omega_I^2$  es también un conjunto interior de control en  $N$  pasos. En consecuencia, un máximo conjunto interior de control en  $N$  pasos existe y consiste de la unión de todos los posibles conjuntos interiores de control en  $N$  pasos. Si no hay ningún conjunto interior de control en  $N$  pasos, luego  $\Omega_I^{\text{máx}} = \emptyset$ .  $\square$

**Lema 1.** *Siendo  $\Omega_I$  un conjunto interior de control en  $N$  pasos para  $\Omega_O$ , el conjunto  $\Omega_I \cup (\mathcal{C}_1(\Omega_I) \cap \Omega_O)$  es también un conjunto interior de control en  $N$  pasos para  $\Omega_O$ .*

*Demostración.* Consideremos  $x_0 \in \mathcal{C}_1(\Omega_I) \cap \Omega_O$  siendo  $\mathcal{C}_1(\Omega_I) \cap \Omega_O$  no vacío (nótese que si fuera vacío, el enunciado del lema se verificaría trivialmente). Luego, existe una entrada  $u_0 \in U$  tal que  $x_1 = f(x_0, u_0, w_0) \in \Omega_I$  para cualquier perturbación  $w_0 \in W$ . Entonces, de la Definición 8, existe una secuencia de entradas  $\{u_1, \dots, u_N\} \in U^N$  tal que  $x_k \in \Omega_O \forall k = \mathbb{Z}_{2:N+1}$  y  $x_j \in \Omega_I$  para algún  $j \in \mathbb{Z}_{2:N+1}$  y para cualquier secuencia de perturbaciones. En consecuencia,  $x_0 \in \mathcal{C}_1(\Omega_I) \cap \Omega_O$  implica que existe una secuencia de entradas  $\{u_0, \dots, u_{N-1}\} \in U^N$  tal que  $x_k \in \Omega_O \forall k = \mathbb{Z}_{1:N}$ . Además, esto y el hecho

de que  $x_j \in \Omega_I$  significa que  $x_{j_1} \in \mathcal{C}_1(\Omega_I) \cap \Omega_O$  para  $j_1 = j - 1 \in \mathbb{Z}_{1:N}$  y para cualquier secuencia de perturbaciones. Luego, resulta que  $\mathcal{C}_1(\Omega_I) \cap \Omega_O$  es un conjunto interior de control en  $N$  pasos y por lo tanto  $\Omega_I \cup (\mathcal{C}_1(\Omega_I) \cap \Omega_O)$  es también un conjunto interior de control en  $N$  pasos.  $\square$

Lo que el Lema 1 establece es que dado un conjunto interior de control en  $N$  pasos  $\Omega_I$ , otro más grande (o igual) puede obtenerse a partir de la unión del mismo con el conjunto  $\mathcal{C}_1(\Omega_I) \cap \Omega_O$ .

Como el máximo conjunto interior de control en  $N$  pasos  $\Omega_I^{\text{máx}}$  no puede “agrandarse”, entonces se puede enunciar este corolario:

**Corolario 1.** *El conjunto  $\Omega_I^{\text{máx}}$  verifica  $\mathcal{C}_1(\Omega_I^{\text{máx}}) \cap \Omega_O \subseteq \Omega_I^{\text{máx}}$ .*

Y esto puede usarse para demostrar el siguiente lema:

**Lema 2.** *Si  $\Omega_I^{\text{máx}}$  no es el conjunto vacío, entonces es un RCIS.*

*Demostración.* Dado cualquier  $x_0 \in \Omega_I^{\text{máx}}$ , existe una secuencia de entradas tal que  $x_k$  permanece en  $\Omega_O$  y pasa por  $\Omega_I^{\text{máx}}$  en algún instante de tiempo  $j \in \mathbb{Z}_{1:N}$  para cualquier secuencia de perturbaciones. Luego,  $x_{j-1} \in \Omega_O$  y  $x_{j-1} \in \mathcal{C}_1(\Omega_I^{\text{máx}})$ . Por lo tanto, del Corolario 1,  $x_{j-1} \in \Omega_I^{\text{máx}}$ . Repitiendo este argumento, resulta que  $x_{j-i} \in \Omega_I^{\text{máx}} \forall i \in \mathbb{Z}_{1:j-1}$ , y finalmente  $x_1 \in \Omega_I^{\text{máx}}$  verificando que  $\Omega_I^{\text{máx}}$  es un RCIS.  $\square$

Ahora, el siguiente resultado puede ser presentado:

**Lema 3.** *Para todo  $N \in \mathbb{N}$ , el máximo conjunto interior de control en  $N$  pasos  $\Omega_I^{\text{máx}}$  es el máximo RCIS contenido en  $\Omega_O$ .*

*Demostración.* Sea  $\Omega^{\text{máx}}$  el máximo RCIS contenido en  $\Omega_O$ . De las Definiciones 6 y 8, puede fácilmente verse que  $\Omega^{\text{máx}}$  es un conjunto interior de control en  $N$  pasos para todo  $N \in \mathbb{N}$ . En consecuencia, para cualquier  $N \in \mathbb{N}$ , resulta que  $\Omega^{\text{máx}} \subseteq \Omega_I^{\text{máx}}$ .

De acuerdo con el Lema 2, dado  $N \in \mathbb{N}$  y el conjunto exterior  $\Omega_O$ , el máximo conjunto interior de control en  $N$  pasos  $\Omega_I^{\text{máx}}$  es un RCIS y entonces  $\Omega_I^{\text{máx}} \subseteq \Omega^{\text{máx}}$ . Luego, considerando que  $\Omega^{\text{máx}} \subseteq \Omega_I^{\text{máx}}$  y  $\Omega_I^{\text{máx}} \subseteq \Omega^{\text{máx}}$ , resulta  $\Omega_I^{\text{máx}} = \Omega^{\text{máx}}$ .  $\square$

Este último lema establece que el máximo conjunto interior de control no depende de  $N$  y que coincide con el máximo RCIS contenido en  $\Omega_O$ . Una consecuencia directa de esto es que una trayectoria que comienza en cualquier conjunto interior de control en  $N$  pasos puede mantenerse por siempre en  $\Omega_O$ , como se indica en el siguiente corolario:

**Corolario 2.** Si  $\Omega_I$  es un conjunto interior de control en  $N$  pasos, luego dado cualquier  $M > 0$ , la condición  $x_0 \in \Omega_I$  implica que existe una secuencia de entradas  $\{u_0, \dots, u_{M-1}\} \in U^M$  tal que  $x_k \in \Omega_O \forall k \in \mathbb{Z}_{1:M}$  para cualquier secuencia de perturbaciones.

Habiéndose expuesto las propiedades estructurales del máximo conjunto interior de control en  $N$  pasos en el Lema 3, podemos establecer una vinculación con las construcciones invariantes de control clásicas. El siguiente teorema plantea que el máximo conjunto interior de control en  $N$  pasos puede ser obtenido como el límite de la iteración de conjuntos del procedimiento estándar de la Ecuación (2.6), inicializado con  $\Omega_O$ .

**Teorema 1.** Consideremos la siguiente sucesión de conjuntos:

$$\Omega_0 = \Omega_O, \quad \Omega_{k+1} = \mathcal{C}_1(\Omega_k) \cap \Omega_O. \quad (3.1)$$

Luego,  $\Omega_I^{\text{máx}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \Omega_k$ .

*Demostración.* Debe notarse primero que como  $\Omega_0 = \Omega_O$ , luego  $\Omega_1 = \mathcal{C}_1(\Omega_0) \cap \Omega_O \subseteq \Omega_0$ . Para utilizar inducción, supongamos que para cierto  $k$ ,  $\Omega_k \subseteq \Omega_{k-1}$ . Por lo tanto,  $\mathcal{C}_1(\Omega_k) \subseteq \mathcal{C}_1(\Omega_{k-1})$ . Luego,  $\Omega_{k+1} = \mathcal{C}_1(\Omega_k) \cap \Omega_O \subseteq \Omega_k = \mathcal{C}_1(\Omega_{k-1}) \cap \Omega_O$ . Esto prueba que para cualquier  $M > 0$ ,  $\Omega_M \subseteq \Omega_{M-1} \dots \subseteq \Omega_1 \subseteq \Omega_0$ . A su vez, esto implica que la secuencia dada por  $\Omega_k$  converge a cierto conjunto  $\Omega_\infty \triangleq \lim_{k \rightarrow \infty} \Omega_k$  (que podría ser el conjunto vacío).

Nótese también que  $\Omega_I^{\text{máx}} \subseteq \Omega_0$  implica que  $\Omega_I^{\text{máx}} = \mathcal{C}_1(\Omega_I^{\text{máx}}) \cap \Omega_O \subseteq \mathcal{C}_1(\Omega_0) \cap \Omega_O = \Omega_1$  y luego  $\Omega_I^{\text{máx}} \subseteq \Omega_1$ . Aplicando esto recursivamente, se llega a que  $\Omega_I^{\text{máx}} \subseteq \Omega_k$  para todo  $k$  y luego  $\Omega_I^{\text{máx}} \subseteq \Omega_\infty$ . Por otra parte, el hecho de que  $\Omega_\infty = \mathcal{C}_1(\Omega_\infty) \cap \Omega_O$  implica que  $\Omega_\infty$  es un RCIS contenido en  $\Omega_O$ . En consecuencia, está también contenido en  $\Omega_I^{\text{máx}}$  que, según el Lema 3 es el máximo RCIS contenido en  $\Omega_O$ . Por lo tanto,  $\Omega_\infty \subseteq \Omega_I^{\text{máx}}$ .

Finalmente, el hecho de que  $\Omega_I^{\text{máx}} \subseteq \Omega_\infty$  y  $\Omega_\infty \subseteq \Omega_I^{\text{máx}}$  implica que  $\Omega_I^{\text{máx}} = \Omega_\infty$ , completando la prueba.  $\square$

Una demostración alternativa para el Teorema 1 puede plantearse basándose en que  $\Omega_I^{\text{máx}}$  es el máximo RCIS contenido en  $\Omega_O$  y que este conjunto puede ser obtenido usando el procedimiento de la Ecuación (2.6).

**Corolario 3.** Dado un conjunto exterior  $\Omega_O$ , cualquier  $N > 0$ , y la sucesión de Ecuación (3.1), un conjunto interior de control no vacío en  $N$  pasos existe si y solo si  $\lim_{k \rightarrow \infty} \Omega_k \neq \emptyset$ .

Otra versión de este corolario es:

**Corolario 4.** *Dado un conjunto exterior  $\Omega_O$ , para cualquier  $N > 0$ , un conjunto interior de control no vacío en  $N$  pasos existe si y solo si  $\Omega_O$  contiene un RCIS.*

### 3.1.2. Caracterización de un Conjunto Interior de Control en $N$ Pasos

La existencia del máximo conjunto interior de control en  $N$  pasos y su caracterización como el resultado de una iteración infinita son de gran valor desde el punto de vista teórico. Sin embargo, en la práctica estamos interesados en caracterizar conjuntos interiores más simples, un objetivo que puede ser alcanzado con la ayuda del siguiente teorema.

**Teorema 2.** *Siendo  $S_0 \subseteq \Omega_O$  un conjunto no vacío, consideremos la sucesión de conjuntos*

$$S_{k+1} = \mathcal{C}_1(S_k) \cap \Omega_O \quad (3.2)$$

*y el conjunto  $T_N \triangleq \bigcup_{k=1}^N S_k$ . Luego,*

1.  $S_0$  es un conjunto interior de control en  $N$  pasos si y solo si  $S_0 \subseteq T_N$ .
2. Cualquier conjunto  $\Omega$  tal que  $S_0 \subseteq \Omega \subseteq T_N$  es un conjunto interior de control en  $N$  pasos.

*Demostración.* 1. ( $\implies$ ) Siendo  $x_0 \in \Omega_O$ , la condición  $x_0 \notin T_N$  implica que  $x_0 \notin \bigcup_{j=1}^N S_j = \bigcup_{j=1}^N \mathcal{C}_1(S_{j-1}) \cap \Omega_O$ . Luego, no puede encontrarse una entrada  $u_0 \in U$  tal que  $x_1 \in \bigcup_{j=0}^{N-1} S_j$  para toda posible perturbación  $w_0 \in W$ . En consecuencia, seleccionando cualquier entrada  $u_0 \in U$ , existe una perturbación  $w_0 = w(x_0, u_0) \in W$  tal que  $x_1 \notin \bigcup_{j=0}^{N-1} S_j$ .

Con la idea de proceder por inducción vemos que, asumiendo que  $x_k \in \Omega_O$ , la condición  $x_k \notin \bigcup_{j=1}^{N-k} S_j = \bigcup_{j=1}^{N-k} \mathcal{C}_1(S_{j-1}) \cap \Omega_O$  implica que seleccionando cualquier entrada  $u_k \in U$ , existe una perturbación  $w_k = w(x_k, u_k) \in W$  tal que  $x_{k+1} \notin \bigcup_{j=0}^{N-k-1} S_j$ .

Luego, para cualquier secuencia de entradas  $\{u_0, \dots, u_{N-1}\} \in U^N$ , existe una secuencia de perturbaciones  $\{w_0, \dots, w_{N-1}\} \in W^N$  tal que  $x_k \notin S_0 \subseteq \bigcup_{j=0}^{N-k} S_j \quad \forall k \in \mathbb{Z}_{1:N}$  asumiendo que  $x_k \in \Omega_O$ . Esto implica que cuando podemos elegir  $x_0$  tal que  $x_0 \in S_0 \subseteq \Omega_O$  y  $x_0 \notin T_N$ , luego  $S_0$  no es un conjunto interior de control en  $N$  pasos porque  $x_k \notin S_0$  para ningún  $k \in \mathbb{Z}_{1:N}$  o porque  $x_k \notin \Omega_O$  para algún  $k \in \mathbb{Z}_{1:N}$ .

En consecuencia,  $S_0 \subseteq T_N$  es una condición necesaria para que  $S_0$  sea un conjunto interior de control en  $N$  pasos.

( $\Leftarrow$ ) La condición  $S_0 \subseteq T_N$  implica que dado cualquier  $x_0 \in S_0$ ,  $x_0 \in S_j = \mathcal{C}_1(S_{j-1}) \cap \Omega_O$  para algún  $j \in \mathbb{Z}_{1:N}$ . En consecuencia, existe una entrada  $u_0 \in U$  tal que  $x_1 \in S_{j-1}$  para cualquier perturbación  $w_0 \in W$ . Luego, por inducción, existe una secuencia de entradas  $\{u_0, \dots, u_{j-1}\} \in U^j$  tal que  $x_1 \in S_{j-1}, \dots, x_j \in S_0$  para cualquier secuencia de perturbaciones. Esto implica que  $S_0$  es un conjunto interior de control en  $N$  pasos.

2. Tomemos  $R_0 = \Omega$  y consideremos la sucesión  $R_{k+1} = \mathcal{C}_1(R_k) \cap \Omega_O$  para  $k \in \mathbb{Z}_{0:N-1}$ . Debe notarse que  $S_0 \subseteq R_0$  implica que  $S_k \subseteq R_k$  para todo  $k \in \mathbb{Z}_{1:N}$  y luego  $T_N \subseteq \bigcup_{k=1}^N R_k$ . En consecuencia, la condición  $\Omega = R_0 \subseteq T_N$  implica que  $R_0 \subseteq \bigcup_{k=1}^N R_k$  y considerando la primera parte de este teorema, esto significa que  $\Omega = R_0$  es un conjunto interior de control en  $N$  pasos.  $\square$

Este último teorema permite computar conjuntos interiores simples empezando con una región interior candidata e iterando hasta que la misma sea cubierta por los sucesivos conjuntos de controlabilidad. Si luego de  $N$  iteraciones la región candidata no es cubierta por  $T_N$ , entonces no era un conjunto interior de control en  $N$  pasos. En ese caso, una posible solución es mantenerse iterando hasta que  $S_0$  sea cubierto, o hasta que  $T_N$  converja sin cubrir  $S_0$  de modo de poder asegurar que  $S_0$  no es un conjunto interior de control en  $N$  pasos para ningún  $N > 0$ .

Si se encuentra que  $S_0$  es un conjunto interior de control en  $N$  pasos pero  $N$  es demasiado grande, entonces el siguiente teorema puede usarse para hallar otro con un  $N$  más pequeño.

**Teorema 3.** *Sea  $S_0$  un conjunto interior de control en  $N$  pasos. Luego, el conjunto  $V_M = \bigcup_{k=0}^M S_k$  para  $M \in \mathbb{Z}_{0:N-1}$  con  $S_k$  definido por la Ecuación (3.2) es un conjunto interior de control en  $(N - M)$  pasos.*

*Demostración.* Sea  $Z_0 = V_M$  y consideremos la sucesión  $Z_{k+1} = \mathcal{C}_1(Z_k) \cap \Omega_O$ . Debemos probar primero que

$$Z_k = \bigcup_{j=k}^{M+k} S_j, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_{0:N-M}. \quad (3.3)$$

Nótese que  $Z_0 = V_M = \bigcup_{j=0}^M S_j$ . Luego, con el objetivo de utilizar inducción vemos que, asumiendo que  $Z_k = \bigcup_{j=k}^{M+k} S_j$  para algún  $k \in \mathbb{Z}_{0:N-M}$ , puede llegarse a que

$$\begin{aligned} Z_{k+1} &= \mathcal{C}_1(Z_k) \cap \Omega_O = \mathcal{C}_1\left(\bigcup_{j=k}^{M+k} S_j\right) \cap \Omega_O \\ &= \bigcup_{j=k}^{M+k} \mathcal{C}_1(S_j) \cap \Omega_O = \bigcup_{j=k}^{M+k} S_{j+1} = \bigcup_{j=k+1}^{M+k+1} S_j, \end{aligned}$$

lo que muestra que la Ecuación (3.3) se verifica. Posteriormente, resulta

$$\hat{T}_{N-M} \triangleq \bigcup_{k=1}^{N-M} Z_k = \bigcup_{j=1}^N S_j = T_N.$$

Como  $S_0$  es un conjunto interior de control en  $N$  pasos, de acuerdo con el Teorema 2, se llega a que  $S_0 \subseteq T_N$ . Luego,

$$\hat{T}_{N-M} = T_N = \bigcup_{j=1}^N S_j = \bigcup_{j=0}^N S_j = \bigcup_{j=0}^{N-M} Z_j$$

lo que significa que  $Z_0 \subseteq \hat{T}_{N-M}$ . Esto, teniendo en cuenta nuevamente el Teorema 2, implica que  $Z_0 = V_M$  es un conjunto interior de control en  $(N - M)$  pasos, completando la demostración.  $\square$

Aunque los resultados de los Teoremas 2 y 3 son útiles para chequear si una región candidata  $S_0$  es un conjunto interior de control en  $N$  pasos, los mismos no sugieren cómo elegir dicho  $S_0$ . No puede proveerse una respuesta general a este problema debido a que la solución dependerá de las suposiciones que se hagan: si el sistema es lineal o no, si posee uno o más puntos de equilibrio o conjuntos límite y si estos son estables o inestables a lazo abierto, si el conjunto de entrada es finito, etc. Lo que sí podemos brindar son las siguientes consideraciones generales que pueden ser tenidas en cuenta siempre ya que son válidas en todos los casos:

- Como todo conjunto interior verifica que  $\Omega_I \subseteq \Omega_I^{\text{máx}}$ , entonces la región candidata  $S_0$  debe estar contenida en cualquier conjunto  $\Omega_k$  de la sucesión de la Ecuación (3.1). Por lo tanto, un posible procedimiento consistiría en computar algunas iteraciones de dicha sucesión y luego tomar un conjunto simple contenido en  $\Omega_k$  como candidato.
- Si se falla al intentar utilizar la primera parte del Teorema 2 y  $S_0$  no es cubierto por  $T_N = \bigcup_{k=1}^N S_k$ , las iteraciones pueden continuarse para valores más grandes de  $N$  hasta que algún conjunto  $S_k$  sea cubierto por  $T_N$ . Si eso ocurre, puede adoptarse  $\Omega_I = S_k$ . En caso de que  $S_k$  tenga una forma demasiado compleja, se puede también explotar la segunda parte de dicho teorema y tomar  $\Omega_I$  tal que  $S_k \subseteq \Omega_I \subseteq T_N$ .
- En muchas ocasiones, seleccionar una región candidata  $S_0$  pequeña funciona. Sin embargo, como se verá en la Sección 3.2, en general será preferible que  $\Omega_I$  sea tan

grande como sea posible. En consecuencia, al igual que antes, puede aprovecharse la segunda parte del Teorema 2 para construir un conjunto interior más grande ubicando algún conjunto más simple  $\Omega$  entre la región candidata  $S_0$  y el conjunto  $T_N$ . Además, esta idea puede usarse recursivamente repitiendo el procedimiento empezando con  $S_0 = \Omega$  e incrementando el tamaño del conjunto interior.

- Tomar  $S_0 = \Omega$  donde  $\Omega$  es un RCIS no máximo contenido en  $\Omega_O$  siempre funcionará porque  $S_0 \subseteq S_1 \subseteq T_N$  en el Teorema 2. Luego, después de computar  $T_N$  y dado que  $T_N \neq S_0$ , un conjunto  $\Omega_I$  más simple puede adoptarse satisfaciendo que  $S_0 \subseteq \Omega_I \subseteq T_N$  y procediendo recursivamente como en el ítem anterior. Una forma de encontrar un RCIS no máximo  $\Omega$  es usando el procedimiento del Teorema 1 reemplazando  $\Omega_O$  por algún conjunto más pequeño  $\tilde{\Omega}_O \subset \Omega_O$  que verifique  $\Omega_I^{\text{máx}} \not\subseteq \tilde{\Omega}_O$ . Dado que  $\tilde{\Omega}_O$  contiene un RCIS, ese procedimiento computará el máximo RCIS allí contenido.
- Suele ocurrir que el máximo RCIS no puede ser computado, *v. gr.* para casos no lineales, pero sí puede ser aproximado, por ejemplo por medio de una linealización del sistema original. En estas situaciones, en virtud de las propiedades presentadas, versiones reducidas de estas aproximaciones pueden ser usadas como conjuntos candidatos  $S_0$  para calcular conjuntos interiores.
- En cualquier caso, usar  $\Omega_I = \Omega_I^{\text{máx}}$  funciona y el Teorema 1 provee un procedimiento para computar dicho máximo conjunto interior. Sin embargo, el objetivo de este trabajo es usar conjuntos más simples que esos que son el resultado de una iteración que quizás lleve a una región con una forma muy compleja. En este trabajo se asume que  $\Omega_I^{\text{máx}}$  resulta demasiado complejo para ser usado en la práctica, lo que justifica la necesidad de usar las aproximaciones dadas por los conjuntos interior y exterior.

Como puede notarse, estas ideas para proponer una región candidata  $S_0$  y obtener el correspondiente conjunto interior de control en  $N$  pasos se basan en el hecho de que este último se encuentra contenido en un máximo RCIS. Sin embargo, es importante destacar que ninguno de los procedimientos requiere computar ni conocer dicho invariante.

## 3.2. Aplicación al Diseño de Controladores

La existencia de un RCIS como  $\Omega_I^{\text{máx}}$  en la región objetivo  $\Omega_O$  es una condición necesaria para la existencia de una ley de control que pueda mantener el estado en

dicho conjunto. Más allá de esto, para muchos esquemas MPC se debe computar explícitamente un RCIS ya que se lo requiere para definir una restricción terminal para los estados predichos. Esto último es clave para asegurar factibilidad recursiva y estabilidad práctica.

Sin embargo, como ya se ha mencionado, en muchas situaciones la obtención de un invariante puede ser muy difícil y/o puede resultar en conjuntos demasiado complejos para ser usados en la práctica. En tales casos, esta región puede ser sustituida por el conjunto objetivo  $\Omega_O$  y una aproximación interna  $\Omega_I$  que verifique la Definición 8. Para mostrar cómo proceder con este reemplazo, consideremos un esquema MPC en el que las predicciones del estado para una secuencia de entradas  $\{u_{k|k}, \dots, u_{k+N-1|k}\}$  y una secuencia de perturbaciones  $\{w_{k|k}, \dots, w_{k+N-1|k}\}$  están dadas por

$$x_{k+j+1|k} = f(x_{k+j|k}, u_{k+j|k}, w_{k+j|k}) \quad (3.4)$$

con  $x_{k|k} = x_k$  y  $j \in \mathbb{Z}_{0:N-1}$ .

El siguiente lema muestra que usar una restricción de paso por el conjunto interior  $\Omega_I$  asegura factibilidad recursiva del esquema MPC. Más precisamente, consideramos que las secuencias de entradas admisibles son aquellas que aseguran que la secuencia de estados predichos pueda pasar por  $\Omega_I$  en el horizonte de predicción y permanecer en  $\Omega_O$  luego de eso. Luego se muestra que si una trayectoria de entrada admisible es encontrada en el instante  $k$ , entonces otra trayectoria de entrada admisible puede ser hallada en el tiempo  $k + 1$ .

**Lema 4.** *Consideremos el sistema (2.1), un conjunto exterior  $\Omega_O$  y un correspondiente conjunto interior de control en  $N$  pasos  $\Omega_I$ . Supongamos que en un esquema MPC, las secuencias de entradas admisibles  $\{u_{k|k}, \dots, u_{k+N-1|k}\} \in U^N$  son aquellas que aseguran que, para cualquier secuencia de perturbaciones, los estados predichos resultantes verifican que  $x_{k+j|k} \in \Omega_I$  para algún mismo  $j \in \mathbb{Z}_{1:N}$  y  $x_{k+i|k} \in \Omega_O \quad \forall i \in \mathbb{Z}_{j:N}$ . Si para el estado  $x_k$  existe una secuencia de entradas admisible, luego una secuencia de entradas admisible existe también para  $x_{k+1}$ .*

*Demostración.* Sea  $\{\check{u}_{k|k}, \dots, \check{u}_{k+N-1|k}\} \in U^N$  la secuencia de entradas admisible obtenida por el esquema MPC tal que  $u_k = \check{u}_{k|k}$ . Consideremos que  $w_k$  es la perturbación real que tiene lugar en el instante  $k$  y que entonces  $x_{k+1} = f(x_k, u_k, w_k)$  es el estado en el tiempo  $k + 1$ .

Sea  $\{\check{x}_{k+1|k}, \dots, \check{x}_{k+N|k}\}$  la secuencia de estados predichos<sup>1</sup> para la secuencia de entradas seleccionada y tomemos  $j \in \mathbb{Z}_{1:N}$  como el mínimo índice tal que  $\check{x}_{k+j|k} \in \Omega_I$  para cualquier secuencia de perturbaciones. Luego, si  $j = 1$  resulta que  $\check{x}_{k+1|k} \in \Omega_I$  para cualquier perturbación  $\check{w}_{k|k}$ . Por lo tanto,  $x_{k+1} \in \Omega_I$  y, de acuerdo con la Definición 8, una secuencia de entradas admisible existe para  $x_{k+1}$ .

En caso de que  $j > 1$ , consideremos una secuencia de entradas tal que  $\hat{u}_{k+i|k+1} = \check{u}_{k+i|k}$  para  $i \in \mathbb{Z}_{1:j-1}$ . Luego, según la definición de  $j$ , resulta que  $\hat{x}_{k+j|k+1} \in \Omega_I$ . En consecuencia, de la Definición 8, una secuencia de entradas  $\{\hat{u}_{k+j|k+1}, \dots, \hat{u}_{k+N|k+1}\} \in U^{N-j+1}$  existe tal que  $\hat{x}_{k+i|k+1} \in \Omega_O$  para todo  $i \in \mathbb{Z}_{j+1:N+1}$  para cualquier secuencia de perturbaciones.

Esto implica que comenzando desde  $x_{k+1}$ , una secuencia de entradas admisible existe  $\{\hat{u}_{k+1|k+1}, \dots, \hat{u}_{k+N|k+1}\} \in U^N$  tal que de la secuencia de estados predichos, uno pertenece a  $\Omega_I$  y todos los posteriores pertenecen a  $\Omega_O$ .  $\square$

El próximo lema plantea que si el estado inicial está en  $\Omega_O$  y existe una secuencia de entrada que lo mantiene en  $\Omega_O$  y hace que el mismo pase por  $\Omega_I$ , será posible mantenerlo por siempre en el conjunto objetivo  $\Omega_O$ . La condición descrita de simultáneamente estar en  $\Omega_O$  y que exista la secuencia de entrada mencionada, implica estar en un invariante contenido en el conjunto exterior. Si la existencia de dicha secuencia de entrada se da para cualquier estado en  $\Omega_O$ , entonces este sería un invariante, o lo que es lo mismo, sería prácticamente estable con  $\mathcal{X} = \Omega_O$  y  $T(x_0) = 0$ , siguiendo la notación de la Definición 2.

**Lema 5.** *Consideremos el sistema (2.1), un conjunto exterior  $\Omega_O$  y un correspondiente conjunto interior de control en  $N$  pasos  $\Omega_I$ . Supongamos que en un esquema MPC, las secuencias de entradas admisibles  $\{u_{k|k}, \dots, u_{k+N-1|k}\} \in U^N$  son aquellas que aseguran que, para cualquier secuencia de perturbaciones, los estados predichos verifican que  $x_{k+j|k} \in \Omega_I$  para algún  $j \in \mathbb{Z}_{1:N}$  y  $x_{k+i|k} \in \Omega_O \quad \forall i \in \mathbb{Z}_{1:N}$ . Si para el estado  $x_k \in \Omega_O$  existe una secuencia de entradas admisible, luego  $x_{k+1} \in \Omega_O$  y una secuencia de entradas admisible existe también para  $x_{k+1}$ .*

Es importante remarcar que aunque ambos lemas requieren que el estado predicho satisfaga que  $x_{k+i|k} \in \Omega_O$ , para el Lema 5 es  $i \in \{1, \dots, N\}$  mientras que para el Lema 4,  $i \in \{j, \dots, N\}$ , siendo  $j$  el tiempo tal que  $x_{k+j|k} \in \Omega_I$ .

El Lema 5, cuya demostración es muy similar a la del anterior, establece que dada una región objetivo  $\Omega_O$ , se puede formular una estrategia MPC tal que el estado

<sup>1</sup>Esta secuencia de estados predichos se asume genérica y representa la que se obtendría para cualquier secuencia de perturbaciones.

permanezca en dicho conjunto incluso sin que el mismo sea invariante. Puede fácilmente verse que, de hecho, el estado quedará confinado en  $\Omega_I^{\text{máx}}$ , el máximo RCIS, aunque este último conjunto no sea conocido.

Con el objetivo de aprovechar estas características en el diseño de un controlador, dada la región objetivo  $\Omega_O$  es necesario computar un conjunto interior  $\Omega_I$  para lo cual el Teorema 2 puede ser usado. En la práctica, el conjunto interior de control en  $N$  pasos debería ser grande. De otro modo, el horizonte  $N$  podría resultar demasiado largo o la región factible podría ser demasiado pequeña. La razón de esto es que  $\Omega_I$  debe ser alcanzado en hasta  $N$  pasos desde el estado inicial por lo que usar un conjunto interior pequeño podría limitar mucho la región desde la cual esto sería posible para el horizonte de predicción considerado.

### 3.3. Ejemplo de Aplicación

A continuación se presenta un ejemplo numérico que ilustra las ventajas de reemplazar un RCIS por una región exterior objetivo y un conjunto interior de control en  $N$  pasos. Consideraremos el sistema no lineal con perturbaciones y conjunto de entrada finito dado por:

$$\begin{cases} i_{k+1} = i_k + \alpha(1 - d_k)v_k + \beta + w_{ik} \\ v_{k+1} = \gamma(1 - d_k)i_k + \delta v_k + w_{vk} \\ d_{k+1} = d_k + \epsilon u_k \end{cases}, \quad (3.5)$$

donde el estado es  $x_k = [i_k \ v_k \ d_k]^T \in X \subseteq \mathbb{R}^3$ , la entrada es  $u_k \in U = \{-1, 1\}$  y  $w_k = [w_{ik} \ w_{vk}]^T \in W = \{[w_i \ w_v]^T \in \mathbb{R}^2 : |w_i| \leq 10^{-4}, |w_v| \leq 2 \cdot 10^{-3}\}$  es una perturbación. Los parámetros son  $\alpha = -0.01$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $\gamma = 10$ ,  $\delta = 0.5$ , y  $\epsilon = 0.02$ . El sistema representa el modelo de un convertidor *boost*<sup>2</sup>, siendo  $i$  la corriente de la inductancia,  $v$  la tensión del capacitor y  $d$  el ciclo de trabajo. Como puede verse de la última ecuación de estado, cada acción de control modifica el ciclo de trabajo en saltos discretos de  $\pm\epsilon = \pm 0.02$ .

Supondremos que la región objetivo es el conjunto exterior  $\Omega_O = \{[i \ v \ d]^T \in X : |i - \bar{i}| \leq 0.06, |v - \bar{v}| \leq 0.5, |d - \bar{d}| \leq 0.015\}$ , donde  $\bar{x} = [\bar{i} \ \bar{v} \ \bar{d}]^T = [2 \ 20 \ 0.5]^T$ . Dada la no linealidad del sistema, el cómputo de un RCIS contenido en  $\Omega_O$  no es simple. Más aún, puede verse que cualquier RCIS en  $\Omega_O$  es disconexo y, por lo tanto, no convexo. Esto se debe a que si  $|d - \bar{d}| < 0.005$ , entonces no hay acción en  $U$  que pueda mantener el estado en  $\Omega_O$ . Además, cuando  $(d - \bar{d}) \in [0.005, 0.015]$ , la única acción

<sup>2</sup>Las ecuaciones se obtuvieron a partir del método de integración de Euler, con un paso de integración de  $10^{-5}$  s, aplicado a un modelo promediado de este convertidor.

de control que puede hacer que el estado permanezca en  $\Omega_O$  es  $u = -1$  y luego de esa acción tendríamos  $(d - \bar{d}) \in [-0.015, -0.005]$ . La situación inversa ocurre cuando  $(d - \bar{d}) \in [-0.015, -0.005]$ . En consecuencia, el único modo de mantener el estado en  $\Omega_O$  es aplicando sucesivamente cada una de las dos acciones de control posibles de manera que el mismo alterne entre las dos regiones disjuntas en las que puede estar.

A pesar de que cualquier RCIS en  $\Omega_O$  es desconexo, un conjunto interior simple de solo seis caras pudo ser hallado. Para lograr esto, considerando que el sistema es no lineal y que posee un conjunto de entrada finito, se procedió tomando una nube de puntos en  $\Omega_O$  y computando algunas iteraciones del Teorema 1. Esto condujo a dos conjuntos de puntos separados (por lo explicado en el párrafo previo) así que se definió una región simple dentro de uno de dichos conjuntos y se la consideró como candidato  $S_0$ . Tomando luego otra nube de puntos en esta última región y calculando 10 iteraciones del Teorema 2, se obtuvo un conjunto de puntos suficientemente denso que cubría con ciertos márgenes a  $S_0$ , verificando que el candidato era en verdad un conjunto interior de control en 10 pasos. Dicho conjunto  $\Omega_I = \{x \in X : Fx \leq g\}$ , donde

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2.53 \cdot 10^{-2} & -9.997 \cdot 10^{-1} \\ 1.24 \cdot 10^{-1} & -3.41 \cdot 10^{-4} & -9.92 \cdot 10^{-1} \\ -1.24 \cdot 10^{-1} & 3.41 \cdot 10^{-4} & 9.92 \cdot 10^{-1} \\ 0 & -2.53 \cdot 10^{-2} & 9.997 \cdot 10^{-1} \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 49.5 \\ 1.572 \\ -24.32 \\ 24.58 \\ -1.065 \\ -48.5 \end{bmatrix} \cdot 10^{-2},$$

y la región exterior objetivo  $\Omega_O$  se muestran en la Figura 3.2 junto con algunas evoluciones del estado.

Para ilustrar el uso de estos conjuntos en el contexto del control predictivo, se diseñó un controlador MPC muy simple con un horizonte de predicción de longitud  $H = N = 10$  en el que solo se consideran aquellas trayectorias de entrada que satisfacen las restricciones del Lema 4 antes de llegar a  $\Omega_I$ . De este modo, se asegura factibilidad recursiva. Una vez que el estado arriba a  $\Omega_I$ , las restricciones a considerar pasan a ser las del Lema 5, asegurando que las trayectorias nunca dejen la región exterior. Más allá de que se debían verificar las restricciones estipuladas, las trayectorias de entrada fueron elegidas minimizando la siguiente función de costo:

$$J(\mathbf{u}_k) = \sum_{i=1}^H \|x_{k+i|k} - \bar{x}\|_2. \quad (3.6)$$

En esta expresión, las secuencias de entradas factibles se escriben como  $\mathbf{u}_k = \{u_{k|k}, \dots, u_{k+N-1|k}\}$  y los estados predichos se computan considerando el caso nominal<sup>3</sup> como

$$x_{k+i+1|k} = f(x_{k+i|k}, u_{k+i|k}, 0)$$

para  $i \in \mathbb{Z}_{0:N-1}$  con  $x_{k|k} = x_k$  y siendo  $f(\cdot)$  el miembro derecho de la Ecuación (3.5). Luego, la entrada en el instante  $k$  es seleccionada como  $u_k = u_{k|k}^*$  donde la secuencia  $\mathbf{u}_k^* = \{u_{k|k}^*, \dots, u_{k+N-1|k}^*\}$  es la que minimiza la función de costo (3.6) de entre el conjunto de aquellas secuencias de control que satisfacen las restricciones mencionadas previamente.

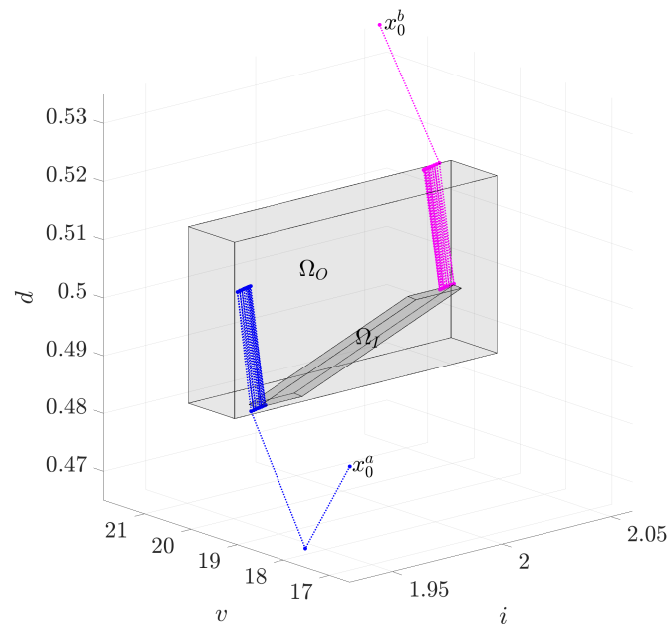
En la Figura 3.2 se pueden ver las trayectorias de estado que se obtuvieron en la simulación del esquema planteado desde diferentes condiciones iniciales que verificaban las restricciones impuestas. Estas evoluciones muestran que, como se indica en los Lemas 4 y 5, la estrategia de control es recursivamente factible y permite que el estado permanezca por siempre en la región objetivo, usando solo un par de conjuntos interior y exterior más simples que cualquier RCIS disconexo.

Es interesante notar que aunque  $\Omega_I$  es un conjunto interior de control en 10 pasos, las trayectorias de la Figura 3.2 reingresan a dicha región tras solo dos pasos. Ocurre sin embargo que para condiciones iniciales muy cercanas a los vértices de  $\Omega_I$ , hay secuencias de perturbaciones para las cuales se necesitan hasta 10 pasos para que el estado pueda volver al conjunto interior.

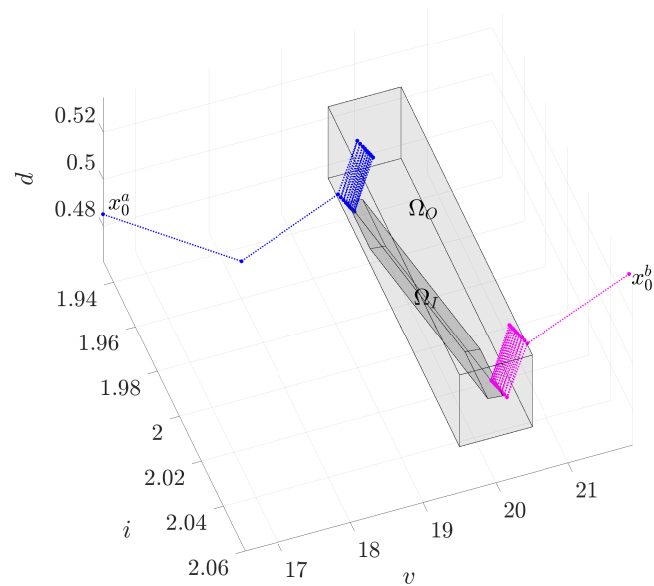
### 3.4. Conclusiones

En este capítulo se introdujo una metodología para reemplazar, a los fines del diseño de controladores, un RCIS por un par de conjuntos más simples que constituyen aproximaciones, una interior y otra exterior, a dicho invariante. Se mostró que dado un conjunto exterior objetivo  $\Omega_O$ , en lugar de computar y usar un complejo RCIS contenido en el mismo, es posible utilizar un simple conjunto interior de control en  $N$  pasos  $\Omega_I$  y aun así asegurar que las trayectorias de estado no abandonarán la región objetivo. También se proveyeron resultados teóricos que relacionan el mencionado conjunto interior de control en  $N$  pasos con la existencia de un RCIS y otros resultados

<sup>3</sup>La consideración del modelo nominal para el cómputo de los estados predichos es compatible con el cumplimiento de las restricciones de los Lemas 4 y 5 si se consideran versiones reducidas de las regiones interior y exterior a las que podemos referirnos como  $\Omega'_I$  y  $\Omega'_O$ . Conceptualmente, al hacer esto se estaría teniendo un margen para que el estado predicho con perturbaciones cumpla con lo solicitado en dichos lemas respecto de los conjuntos  $\Omega_I$  y  $\Omega_O$ .



(a)



(b)

Figura 3.2: Conjuntos interior y exterior y trayectorias de estado desde condiciones iniciales  $x_0^a$  y  $x_0^b$ . Se presentan dos vistas diferentes.

más prácticos que pueden ayudar a construir y caracterizar estos conjuntos interiores. Por último, se mostró cómo un par interior-exterior puede ser usado en el contexto del control predictivo como una manera de reemplazar la clásica restricción terminal de pertenencia a un RCIS para lograr factibilidad recursiva y permanencia del estado en la región objetivo. Todo esto fue acompañado por un ejemplo numérico ilustrativo presentado al final del capítulo.

# Capítulo 4

## MPC con Conjuntos Interior-Exterior

Previamente han sido presentados los conjuntos interior-exterior y, si bien se han abordado aspectos de control en forma genérica, el eje estuvo puesto en el estudio de sus propiedades, su cómputo y su relación con los RCIS. El presente capítulo, en cambio, se focaliza completamente en el desarrollo de una novedosa estrategia MPC basada en dicho par de regiones que es recursivamente factible y logra que el sistema a lazo cerrado posea estabilidad práctica. Entre las características distintivas del esquema propuesto debemos mencionar que utiliza una restricción “de paso” por un conjunto interior en lugar de una terminal a un invariante y que su costo de etapa depende del tiempo predicho y de la pertenencia de la predicción del estado al conjunto objetivo. La técnica desarrollada viene dada junto con un procedimiento sistemático para su diseño y un ejemplo ilustrativo de aplicación.

En [66] fueron publicados los resultados de esta parte de la tesis.

### 4.1. Descripción del Problema

En este capítulo consideraremos el sistema no lineal dado por (2.2), sin perturbaciones, cuya ecuación se vuelve a presentar a continuación para comodidad del lector:

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k). \quad (4.1)$$

Nuevamente se tiene que  $x_k \in X \subseteq \mathbb{R}^n$  y  $u_k \in U \subseteq \mathbb{R}^m$  son los vectores de estado y entrada en el instante  $k$ , respectivamente. En particular ahora se agrega el requerimiento

de que  $X$  y  $U$ , las correspondientes restricciones para las variables mencionadas, sean conjuntos cerrados.

El problema a abordar es el diseño de un controlador MPC, con horizonte de longitud  $N \in \mathbb{N}$ , que garantice estabilidad práctica, es decir que asegure que las trayectorias de estado converjan en tiempo finito y permanezcan en el conjunto objetivo compacto  $\Omega_O \subset X$  satisfaciendo además en todo momento las restricciones definidas por  $U$  y  $X$  para la acción de control y el estado, respectivamente.

Los resultados presentados se basan en la existencia de un conjunto interior de control en  $N$  pasos<sup>1</sup>  $\Omega_I \subseteq \Omega_O$ . Además, se asume también que las condiciones iniciales estarán siempre en el conjunto controlable en hasta  $N$  pasos hacia  $\Omega_I$ , que llamaremos  $C_{\Omega_I}$  y que se define del siguiente modo:

**Definición 9** (Conjunto Controlable en hasta  $N$  Pasos). Dado el sistema (4.1), el horizonte  $N$  y el conjunto interior  $\Omega_I$ , decimos que  $C_{\Omega_I} \subseteq X$  es el conjunto controlable en hasta  $N$  pasos hacia  $\Omega_I$  siempre que si  $x_k \in C_{\Omega_I}$ , entonces existe una secuencia de entradas  $\{u_k, \dots, u_{k+i-1}\} \in U^i$  para algún  $i \in \mathbb{Z}_{1:N}$  tal que  $x_{k+i} \in \Omega_I$  y  $\{x_k, \dots, x_{k+i-1}\} \in X^i$ .

Es interesante hacer algunas observaciones en relación con lo planteado. En primer lugar, aunque la existencia de un conjunto interior de control en  $N$  pasos en  $\Omega_O$  parezca una suposición fuerte, en verdad es muy común requerir que la región (exterior) objetivo sea un CIS en el cual el sistema pueda mantenerse indefinidamente. Por lo tanto, al asumir únicamente que existe un conjunto interior en  $\Omega_O$  se relaja dicho requerimiento. En realidad, como ya se ha mostrado en el Capítulo 3, la existencia de  $\Omega_I$  implica la existencia de al menos un conjunto invariante en  $\Omega_O$ , sin embargo este no tiene que ser computado ni explícitamente usado. Obviamente, en caso de que un CIS en  $\Omega_O$  ya se conozca, se lo podría considerar como  $\Omega_I$  para terminar utilizando alguna formulación MPC más clásica.

Por otra parte, vale la pena comentar que de acuerdo con la Definición 9, recién presentada, y la Definición 8, de conjunto interior de control en  $N$  pasos, resulta  $\Omega_I \subset C_{\Omega_I}$ , una condición relacionada en cierto punto a una suposición de controlabilidad. Sin embargo como  $C_{\Omega_I}$  depende exclusivamente de  $\Omega_I$  y dado que  $\Omega_O$  es un conjunto predefinido, la condición  $\Omega_O \subset C_{\Omega_I}$  no necesariamente se verifica.

<sup>1</sup>Como en este caso el sistema no posee perturbaciones, hay que considerar la Observación 1 en relación con la Definición 8.

## 4.2. Esquema MPC Propuesto

El diseño de nuestra estrategia MPC parte de una función predefinida de costo de etapa preliminar  $\tilde{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ . A partir de esta función de costo de etapa original, se definen

$$\tilde{L}_{\text{máx}} \triangleq \sup_{x \in \Omega_O, u \in U} \tilde{L}(x, u), \quad (4.2)$$

$$\tilde{L}_{\text{mín}} \triangleq \inf_{x \in X \setminus \Omega_O, u \in U} \tilde{L}(x, u). \quad (4.3)$$

Asumiremos que  $\tilde{L}(x, u)$  y los conjuntos  $\Omega_O$  y  $U$  son tales que  $\tilde{L}_{\text{máx}}$  es finito, y  $\tilde{L}_{\text{mín}} > 0$ .

Para asegurar la convergencia del estado desde la región  $C_{\Omega_I}$  hacia  $\Omega_O$ , se propone cambiar la función de costo de etapa original de manera que sea más pequeña en  $\Omega_O$ . Por otro lado, cuando los estados predichos se encuentren fuera de la región objetivo, haremos que el costo se torne más grande en los instantes más alejados en el futuro.

Esto se logra utilizando dos constantes  $c$  y  $r$ , para obtener la función de costo de etapa modificada dependiente del índice  $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , definida como:

$$L(x, u, i) \triangleq \begin{cases} c\tilde{L}(x, u) & \text{si } x \in \Omega_O \\ (1 + (i - 1)r)\tilde{L}(x, u) & \text{si } x \notin \Omega_O \end{cases}, \quad (4.4)$$

donde  $c \geq 0$  y  $r \in [0, 1)$  son tales que

$$cN\tilde{L}_{\text{máx}} \leq r\tilde{L}_{\text{mín}}, \quad (4.5)$$

y donde  $i \in \mathbb{Z}_{1:N}$  es el índice de etapa, es decir el tiempo desde el comienzo del horizonte de predicción.

La idea detrás de usar  $c$  en la Ecuación (4.4) con un valor que satisfaga la condición planteada en (4.5) es priorizar que todos los estados predichos estén en  $\Omega_O$  por encima de cualquier caso en el que tan solo uno quede fuera de dicho conjunto objetivo. Por otra parte, el término  $(i - 1)r$  ocasiona que los estados predichos tengan un costo de etapa más reducido a medida que se aproximan al comienzo del horizonte de predicción. De este modo, si la cola de la trayectoria de entrada óptima en el instante  $k$  es aplicada a partir del tiempo  $k + 1$ , entonces los costos de etapa de los estados predichos fuera de la región objetivo se reducen entre los instantes  $k$  y  $k + 1$ . Como quedará más claro de la demostración del Teorema 4, siempre que esta reducción sea más grande que el costo de etapa de los estados predichos dentro de la región objetivo, una condición

relacionada con la Ecuación (4.5), entonces la función de costo de MPC se reducirá del tiempo  $k$  al  $k + 1$ .

Dada una secuencia de entradas admisible  $\mathbf{u}_k = \{u_{k|k}, \dots, u_{k+N-1|k}\}$  y una secuencia de estados predichos  $\mathbf{x}_k = \{x_{k|k}, \dots, x_{k+N|k}\}$  computados de la siguiente manera:

$$x_{k|k} = x_k, \quad (4.6)$$

$$x_{k+i+1|k} = f(x_{k+i|k}, u_{k+i|k}) \quad (4.7)$$

para todo  $i \in \mathbb{Z}_{0:N-1}$ , definimos la función de costo MPC como<sup>2</sup>

$$V(x_k, \mathbf{u}_k) \triangleq \sum_{i=1}^N L(x_{k+i|k}, u_{k+i-1|k}, i). \quad (4.8)$$

Luego, para un estado  $x_k \in C_{\Omega_I}$ , planteamos el siguiente problema de control óptimo:

$$P(x_k) : V^*(x_k) \triangleq \min_{\mathbf{u}_k \in U_N(x_k)} V(x_k, \mathbf{u}_k), \quad (4.9)$$

sujeto a las Ecuaciones (4.6) y (4.7) y donde  $U_N(x_k)$  denota el conjunto de las secuencias de entradas de control admisibles  $\mathbf{u}_k$  que satisfacen

$$u_{k+i|k} \in U, \quad \forall i \in \mathbb{Z}_{0:N-1}, \quad (4.10)$$

$$x_{k+i|k} \in X, \quad \forall i \in \mathbb{Z}_{1:N}, \quad (4.11)$$

$$x_{k+i|k} \in \Omega_I, \quad \text{para algún } i \in \mathbb{Z}_{1:N}. \quad (4.12)$$

Debe notarse que la clásica restricción terminal de las formulaciones MPC estabilizantes es reemplazada por la menos restrictiva condición (4.12) de “pasar por” el conjunto  $\Omega_I$  en algún instante del horizonte de predicción.

Asumiremos que el problema de control óptimo (4.9) tiene, en cada instante de tiempo  $k$ , al menos una solución<sup>3</sup> dada por la secuencia de entradas óptima  $\mathbf{u}_k^* \triangleq \{u_{k|k}^*, \dots, u_{k+N-1|k}^*\}$ , que tiene asociada la secuencia de estados óptima  $\mathbf{x}_k^* \triangleq \{x_{k|k}^*, \dots, x_{k+N|k}^*\}$  computada como

$$x_{k+i+1|k}^* = f(x_{k+i|k}^*, u_{k+i|k}^*). \quad (4.13)$$

<sup>2</sup>Esta expresión de la función de costo difiere respecto de otras formulaciones en que el estado inicial  $x_{k|k} = x_k$  no es tenido en cuenta (dado que es el mismo para todas las posibles evoluciones del estado predicho). Sin embargo, debe notarse que redefiniendo  $L(x, u, i)$ , la expresión es general y puede incluir términos comúnmente usados como un costo terminal.

<sup>3</sup>Los resultados a los que se arriba en la Sección 4.3 son también válidos cuando la solución no es única.

Finalmente, siguiendo un esquema de horizonte deslizante, el primer elemento de  $\mathbf{u}_k^*$  es aplicado al sistema mientras que el resto se descarta. La ley de control queda entonces implícitamente definida por  $\kappa_{MPC}(x) \triangleq u_{k|k}^*$  y, a lazo cerrado, el sistema puede describirse como

$$x_{k+1} = f(x_k, u_{k|k}^*) = f(x_k, \kappa_{MPC}(x_k)). \quad (4.14)$$

Habiéndose ya presentado completamente el esquema MPC, resulta adecuado hacer algunas observaciones en relación al mismo. Para empezar, aunque el costo de etapa propuesto dado por la Ecuación (4.4) es dependiente del índice, la función de costo MPC definida en (4.8) no es variante en el tiempo. El argumento representativo del tiempo en  $L(x, u, i)$  es el índice de etapa por lo que, desde la perspectiva de la función de costo MPC, estaría fijo yendo siempre de 1 a  $N$ .

En segundo lugar, es importante resaltar que hay diferentes (e independientes) condiciones suficientes para que el problema de optimización (4.9) tenga al menos una solución. A continuación se presentan dos ejemplos de estas condiciones:

- Conjunto de entradas de control finito. En este caso siempre hay al menos una secuencia de entradas con el costo mínimo.
- Funciones del sistema y del costo de etapa preliminar,  $f(x, u)$  y  $\tilde{L}(x, u)$  respectivamente, continuas con  $U$  y  $\Omega_I$  compactos. Bajo estas hipótesis, a pesar de que se pierda la continuidad del costo de etapa  $L(x, u, i)$  en la frontera del conjunto objetivo  $\Omega_O$ , se conserva la propiedad de semicontinuidad inferior porque  $L(x, u, i)$  es menor en la parte cerrada de dicha frontera. Luego, puede probarse que la función de costo MPC en sí misma es semicontinua inferiormente (en un conjunto compacto) y esto garantiza (ver [82], Teorema 3 de la Sección 6 en el Capítulo 4) que el problema de minimización tiene al menos una solución. El Apéndice A contiene la demostración correspondiente en la Sección A.1.

Por último, con respecto a la implementación numérica de la estrategia y especialmente considerando la restricción de paso (4.12), una posible solución consiste en resolver  $N$  problemas de optimización más simples, donde la restricción del  $i$ -ésimo problema sea que el estado pertenezca al conjunto interior en el  $i$ -ésimo instante del horizonte de predicción. Luego, la secuencia de control a elegir sería aquella a la que le corresponda el mínimo costo de entre los  $N$  problemas. Hay que notar que una implementación paralela de esta estrategia no tendría que requerir mucho más tiempo de cómputo para ningún horizonte de longitud razonable. Además, aunque esto

pareciera tener asociada una carga computacional muy alta, debe recordarse que la verificación de las condiciones de pertenencia a los conjuntos no es muy costosa dada la sencillez del par interior-exterior.

### 4.3. Análisis de Estabilidad

Para demostrar las propiedades de estabilidad del esquema propuesto, comenzaremos presentando un lema preliminar que vincula la cota  $cN\tilde{L}_{\text{máx}}$  en la función de costo MPC con el hecho de que todos los estados predichos estén contenidos en la región objetivo  $\Omega_O$ .

**Lema 6.** *Consideremos el estado  $x_k \in C_{\Omega_I}$  y una secuencia de entradas admisible  $\mathbf{u}_k$ . Luego, la función de costo (4.8) verifica  $V(x_k, \mathbf{u}_k) \leq cN\tilde{L}_{\text{máx}}$  si y solo si  $x_{k+j|k} \in \Omega_O, \forall j \in \mathbb{Z}_{1:N}$ .*

*Demostración.* Supongamos que para cierto  $j \in \mathbb{Z}_{1:N}$  resulta  $x_{k+j|k} \notin \Omega_O$ . Luego, de la Ecuación (4.4) el costo de etapa de ese estado predicho sería

$$L_{k+j,k} = (1 + (j-1)r)\tilde{L}_{k+j,k} \geq \tilde{L}_{\text{mín}} > 0, \quad (4.15)$$

donde por simplicidad se usó la notación

$$L_{k+j,k} \triangleq L(x_{k+j|k}, u_{k+j-1|k}, j), \quad (4.16)$$

$$\tilde{L}_{k+j,k} \triangleq \tilde{L}(x_{k+j|k}, u_{k+j-1|k}). \quad (4.17)$$

Luego, considerando la Ecuación (4.5), tenemos para  $r \in (0, 1)$  que

$$L_{k+j,k} \geq \tilde{L}_{\text{mín}} \geq \frac{cN\tilde{L}_{\text{máx}}}{r} > cN\tilde{L}_{\text{máx}}$$

contradiciendo que  $V(x_k, \mathbf{u}_k) \leq cN\tilde{L}_{\text{máx}}$ .

Para el caso  $r = 0$ , de acuerdo con (4.5) resulta  $cN\tilde{L}_{\text{máx}} = 0$  y luego la Ecuación (4.15) también contradice que  $V(x_k, \mathbf{u}_k) \leq cN\tilde{L}_{\text{máx}}$ .

Finalmente, de las Ecuaciones (4.2), (4.4) y (4.8) se llega directamente a que  $x_{k+j|k} \in \Omega_O, \forall j \in \mathbb{Z}_{1:N}$  implica que  $V(x_k, \mathbf{u}_k) \leq cN\tilde{L}_{\text{máx}}$ , completando la demostración.  $\square$

El siguiente corolario del Lema 6 establece que cuando el costo óptimo correspondiente a un dado estado es más pequeño que la cota  $cN\tilde{L}_{\text{máx}}$ , entonces el próximo estado estará en  $\Omega_O$ .

**Corolario 5.** *Dada la formulación MPC de la Ecuación (4.9) con  $x_k \in C_{\Omega_I}$ , la condición  $V^*(x_k) \leq cN\tilde{L}_{\text{máx}}$  implica  $x_{k+1} \in \Omega_O$ .*

*Demostración.* El Lema 6 con  $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_k^*$  establece que la condición  $V^*(x_k) \leq cN\tilde{L}_{\text{máx}}$  implica que  $x_{k+1|k}^* \in \Omega_O$ . El resultado se obtiene entonces del hecho de que  $x_{k+1} = x_{k+1|k}^*$ .  $\square$

El siguiente teorema muestra que cuando el costo MPC óptimo tiene un valor que supera  $cN\tilde{L}_{\text{máx}}$  en el instante  $k + 1$  (es decir que la secuencia de estados predichos óptima tiene al menos un estado fuera del conjunto objetivo  $\Omega_O$ ), entonces la misma se redujo respecto del tiempo  $k$  en una cierta cantidad que admite una cota inferior positiva.

**Teorema 4.** *Consideremos la formulación MPC de la Ecuación (4.9). Luego, para cualquier  $x_k \in C_{\Omega_I}$  la condición  $V^*(x_{k+1}) > cN\tilde{L}_{\text{máx}}$  implica*

$$V^*(x_k) - V^*(x_{k+1}) \geq \epsilon \triangleq \frac{r\tilde{L}_{\text{mín}}}{N}. \quad (4.18)$$

*Además, para el caso  $\Omega_I = \Omega_O$ , o siempre que  $x_{k+1|k}^* \notin \Omega_O$ , también se verifica que*

$$V^*(x_k) - V^*(x_{k+1}) \geq \tilde{\epsilon} \triangleq \left(1 - r\frac{N-1}{N}\right)\tilde{L}_{\text{mín}}. \quad (4.19)$$

La demostración de este resultado, presentada luego de este comentario, se basa en la siguiente idea. Después de aplicar el primer elemento de la secuencia de entradas óptima  $\mathbf{u}_k^*$  en el tiempo  $k$ , una estrategia factible para el siguiente instante de control es aplicar la misma secuencia de entradas óptima (removiendo el primer elemento  $u_{k|k}^*$ ) hasta que el estado ingrese a  $\Omega_I$  y luego usar cualquier secuencia de entradas que lo mantenga en  $\Omega_O$ . En consecuencia, si se usara esta estrategia, los estados predichos fuera de  $\Omega_O$  de la secuencia resultante  $\mathbf{x}_{k+1}$  estarían ya presentes en la secuencia óptima previa  $\mathbf{x}_k^*$ . Sin embargo, en el instante  $k + 1$  los costos de etapa de dichos estados fuera de  $\Omega_O$  serán más pequeños que los correspondientes a los mismos estados fuera de  $\Omega_O$  predichos en el tiempo anterior  $k$ , debido al factor  $r$  en la Ecuación (4.4). Esto implicaría una reducción del costo incluso en el caso que la estrategia de usar la misma secuencia de entradas hasta entrar en  $\Omega_I$  no fuera la óptima.

*Demostración.* Sea  $\mathbf{x}_k^* = \{x_{k|k}^*, \dots, x_{k+N|k}^*\}$  la secuencia de estados predichos óptima, computada en el instante  $k$  mediante (4.13). Dada la restricción de la Ecuación (4.12), habrá al menos un estado predicho en  $\Omega_I$  y denotaremos con  $m \in \mathbb{N}$  al mínimo tiempo tal que  $x_{k+m|k}^* \in \Omega_I$ .

Sea  $x_{k+1} = f(x_k, u_{k|k}^*)$  el estado luego de aplicar la entrada  $u_k = u_{k|k}^*$  y consideremos la secuencia de estados predichos

$$x_{k+i+1|k+1} = f(x_{k+i|k+1}, u_{k+i|k+1})$$

con  $x_{k+1|k+1} = x_{k+1}$  y donde la secuencia  $\mathbf{u}_{k+1}$  verifica que  $u_{k+i|k+1} = u_{k+i|k}^*$  para todo  $i \in \mathbb{Z}_{1:m-1}$  y  $u_{k+i|k+1}$  para todo  $i \in \mathbb{Z}_{m:N}$  es tal que  $x_{k+i+1|k+1} \in \Omega_O$  (lo cual es posible por la Definición 8, que básicamente establece que luego de pasar por  $\Omega_I$ , existe una secuencia de entradas admisible que lleva al estado de vuelta a dicho conjunto interior manteniendo la trayectoria contenida en  $\Omega_O$ ). Con esta secuencia de entradas de control, resulta  $x_{k+i|k+1} = x_{k+i|k}^*$  para todo  $i \in \mathbb{Z}_{1:m}$  lo cual significa que  $x_{k+m|k+1} \in \Omega_I$ . Por otra parte, si  $m < N$ , los estados predichos  $x_{k+i|k+1}$  para  $i \in \mathbb{Z}_{m+1:N}$  serán en general diferentes respecto de  $x_{k+i|k}^*$ .

De acuerdo con la Ecuación (4.8), la expresión para  $V^*(x_k)$  es

$$V^*(x_k) = \sum_{i=1}^N L(x_{k+i|k}^*, u_{k+i-1|k}^*, i) \quad (4.20)$$

mientras que el costo asociado a la secuencia  $\mathbf{x}_{k+1}$  es

$$V(x_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1}) = \sum_{i=1}^N L(x_{k+i+1|k+1}, u_{k+i|k+1}, i). \quad (4.21)$$

Hay que notar que por su cualidad de óptimo,  $V^*(x_{k+1}) \leq V(x_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1})$ . En consecuencia, la condición  $V^*(x_{k+1}) > cN\tilde{L}_{\text{máx}}$  implica que  $V(x_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1}) > cN\tilde{L}_{\text{máx}}$ .

Luego, teniendo en cuenta el Lema 6 existe  $j \geq 2$  tal que  $x_{k+j|k+1} \notin \Omega_O$ . Además, como  $\mathbf{u}_{k+1}$  fue computada de manera tal que  $x_{k+i|k+1} \in \Omega_O$  para todo  $i \geq m$ , resulta que  $j < m$ , lo que implica que  $m > 2$  y por lo tanto<sup>4</sup>  $N > 2$ . Como las predicciones  $x_{k+i|k}^*$  y  $x_{k+i|k+1}$  coinciden hasta  $i = m$ , se llega a que

$$x_{k+j|k+1} = x_{k+j|k}^* \notin \Omega_O \quad (4.22)$$

para algún  $j < m$ .

Consideremos ahora los siguientes conjuntos de índices:

- $D_k = \{i \in \mathbb{Z}_{2:m} \mid x_{k+i|k}^* \notin \Omega_O\}$  y

---

<sup>4</sup>El hecho de que  $N > 2$  sea necesario para que  $V^*(x_{k+1}) > cN\tilde{L}_{\text{máx}}$  no significa que la estrategia de control presentada no pueda utilizarse con  $N = 1$  o  $N = 2$ . Ocurre que con estos horizontes tan reducidos, si es factible el esquema, directamente será  $V^*(x_{k+1}) \leq cN\tilde{L}_{\text{máx}}$  y por lo tanto no habría interés en la reducción de costo planteada en este teorema.

$$\blacksquare \bar{D}_k = \mathbb{Z}_{2:m} \setminus D_k.$$

Luego,  $V^*(x_k)$  en la Ecuación (4.20) puede reescribirse como:

$$V^*(x_k) = L_{k+1,k}^* + \sum_{i \in D_k} (1 + (i-1)r) \tilde{L}_{k+i,k}^* + \sum_{i \in \bar{D}_k} c \tilde{L}_{k+i,k}^* + \sum_{i=m+1}^N L_{k+i,k}^* \quad (4.23)$$

con el último término siendo nulo en caso de que  $m = N$  y donde se usó una notación similar a la de las Ecuaciones (4.16) y (4.17) pero para secuencias óptimas  $\mathbf{x}_k^*$  y  $\mathbf{u}_k^*$ .

De forma similar,  $V(x_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1})$  en (4.21) puede reescribirse así:

$$V(x_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1}) = \sum_{i \in D_k} (1 + (i-2)r) \tilde{L}_{k+i,k+1} + \sum_{i \in \bar{D}_k} c \tilde{L}_{k+i,k+1} + \sum_{i=m+1}^{N+1} L_{k+i,k+1}. \quad (4.24)$$

Entonces, teniendo en cuenta que  $x_{k+j+1|k}^* = x_{k+j+1|k+1}$  y  $u_{k+j|k}^* = u_{k+j|k+1}$  para todo  $j \in \mathbb{Z}_{1:m-1}$ , resulta  $\tilde{L}_{k+j,k}^* = \tilde{L}_{k+j,k+1}$ , y restando la Ecuación (4.24) a la (4.23) se obtiene

$$V^*(x_k) - V(x_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1}) = L_{k+1,k}^* + \sum_{i \in D_k} r \tilde{L}_{k+i,k}^* + \sum_{i=m+1}^N L_{k+i,k}^* - \sum_{i=m+1}^{N+1} L_{k+i,k+1}. \quad (4.25)$$

Recordando que al menos un estado  $x_{k+i|k}^* \notin \Omega_O$  con  $i < m$  y como  $r < 1$ , luego,

$$L_{k+1,k}^* + \sum_{i \in D_k} r \tilde{L}_{k+i,k}^* \geq r \tilde{L}_{\min}. \quad (4.26)$$

El término  $\sum_{i=m+1}^N L_{k+i,k}^*$  es no negativo y, considerando que  $x_{k+i|k+1} \in \Omega_O$  para todo  $i > m$ , se obtiene

$$\sum_{i=m+1}^{N+1} L_{k+i,k+1} \leq (N-1)c \tilde{L}_{\max}. \quad (4.27)$$

Luego, de las Ecuaciones (4.25), (4.26) y (4.27), se llega a que

$$V^*(x_k) - V(x_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1}) \geq r \tilde{L}_{\min} - (N-1)c \tilde{L}_{\max} \geq \frac{N-1}{N} (r \tilde{L}_{\min} - Nc \tilde{L}_{\max}) + \frac{r \tilde{L}_{\min}}{N}.$$

De (4.5), tenemos  $Nc\tilde{L}_{\text{máx}} \leq r\tilde{L}_{\text{mín}}$  y entonces, recordando que  $V(x_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1}) \geq V^*(x_{k+1})$ , se obtiene

$$V^*(x_k) - V^*(x_{k+1}) \geq \frac{r\tilde{L}_{\text{mín}}}{N},$$

demostrando que la Ecuación (4.18) se verifica.

En el caso  $\Omega_I = \Omega_O$ , el hecho de que  $m > 1$  implica que  $x_{k+1|k}^* \notin \Omega_I$  lo que a su vez implica que  $x_{k+1|k}^* \notin \Omega_O$ . Entonces, para esta condición y siempre que  $x_{k+1|k}^* \notin \Omega_O$ , la Ecuación (4.26) puede ser reemplazada por

$$L_{k+1,k}^* + \sum_{i \in D_k} r\tilde{L}_{k+i,k}^* \geq \tilde{L}_{\text{mín}}, \quad (4.28)$$

y siguiendo el mismo procedimiento que antes, de las Ecuaciones (4.27) y (4.28) se puede concluir que (4.19) también se verifica, completando la demostración.  $\square$

Aunque ya se haya hecho un comentario sobre esto en la demostración anterior (en una nota al pie de página), es importante volver a mencionar lo siguiente. A pesar de que antes de la Ecuación (4.22) se indica que la condición  $V^*(x_{k+1}) > cN\tilde{L}_{\text{máx}}$  requiere  $m > 2$  y esto implica  $N > 2$ , la conclusión del Teorema 4 es también válida para  $N = 1$  y  $N = 2$ . Básicamente lo que se plantea al indicar esto es que la desigualdad  $V^*(x_{k+1}) > cN\tilde{L}_{\text{máx}}$  dada en el enunciado es solamente posible para  $N > 2$ . Por lo tanto, para  $N = 1$  y  $N = 2$  el costo óptimo en el instante  $k + 1$  será siempre menor que  $cN\tilde{L}_{\text{máx}}$ . Luego, los resultados derivados a continuación basados en este teorema son válidos para todo  $N \geq 1$ .

El siguiente corolario muestra que cuando el costo óptimo se vuelve más pequeño que  $cN\tilde{L}_{\text{máx}}$ , permanece acotado por dicho valor para siempre.

**Corolario 6.** *Consideremos la formulación MPC de la Ecuación (4.9). Si  $x_k \in C_{\Omega_I}$  y  $V^*(x_k) \leq cN\tilde{L}_{\text{máx}}$ , entonces  $V^*(x_j) \leq cN\tilde{L}_{\text{máx}}$ ,  $\forall j \geq k$ .*

*Demostración.* Del Teorema 4 sabemos que  $V^*(x_{k+1}) > cN\tilde{L}_{\text{máx}}$  implica la reducción de costo de la Ecuación (4.18). Esto significaría que  $V^*(x_k) > cN\tilde{L}_{\text{máx}}$  lo que contradiría la hipótesis del corolario. Luego  $V^*(x_k) \leq cN\tilde{L}_{\text{máx}}$  implica  $V^*(x_{k+1}) \leq cN\tilde{L}_{\text{máx}}$  y, repitiendo el razonamiento, se llega a que  $V^*(x_j) \leq cN\tilde{L}_{\text{máx}}$  para todo  $j \geq k$ .  $\square$

Una consecuencia inmediata de los Corolarios 5 y 6 es que cuando el costo óptimo es menor o igual que  $cN\tilde{L}_{\text{máx}}$ , el estado permanece para siempre en  $\Omega_O$ .

**Corolario 7.** *Consideremos la formulación MPC de la Ecuación (4.9). Si  $x_k \in C_{\Omega_I}$  y  $V^*(x_k) \leq cN\tilde{L}_{\text{máx}}$ , entonces  $x_j \in \Omega_O$ ,  $\forall j > k$ .*

Finalmente, el siguiente corolario muestra que el estado arriba en tiempo finito al conjunto objetivo.

**Corolario 8.** *Consideremos la formulación MPC de la Ecuación (4.9) con  $r > 0$  o con  $\Omega_O = \Omega_I$ . Si  $x_k \in C_{\Omega_I}$  y  $V^*(x_k) > cN\tilde{L}_{\text{máx}}$ , luego  $x_{k+i} \in \Omega_O$  para todo  $i > M$ , donde*

$$M \triangleq \left\lceil \frac{V^*(x_k) - cN\tilde{L}_{\text{máx}}}{\alpha} \right\rceil \quad (4.29)$$

con  $\alpha = \tilde{\epsilon}$  (Ecuación (4.19)) siempre que  $\Omega_I = \Omega_O$ , incluso si  $r = 0$ , o  $\alpha = \epsilon$  (Ecuación (4.18)) en cualquier otro caso con  $r > 0$ .

*Demostración.* Supongamos que  $V^*(x_{k+M}) > cN\tilde{L}_{\text{máx}}$ . Luego, según el Corolario 6,  $V^*(x_{k+i}) > cN\tilde{L}_{\text{máx}}$  para todo  $i \in \mathbb{Z}_{0:M-1}$ . Del Teorema 4, la condición  $V^*(x_{k+i+1}) > cN\tilde{L}_{\text{máx}}$  implica

$$V^*(x_{k+i}) - V^*(x_{k+i+1}) \geq \alpha.$$

Sumando miembro a miembro esta última desigualdad para  $i = 0, \dots, M-1$ , obtenemos que

$$V^*(x_k) - V^*(x_{k+M}) \geq M\alpha \geq V^*(x_k) - cN\tilde{L}_{\text{máx}}$$

lo que implica que

$$V^*(x_{k+M}) \leq cN\tilde{L}_{\text{máx}},$$

contradiciendo la suposición inicial y mostrando que  $V^*(x_{k+M}) \leq cN\tilde{L}_{\text{máx}}$ . Entonces, de acuerdo con el Corolario 7 esta condición implica que  $x_{k+i} \in \Omega_O$  para todo  $i > M$ , terminándose la demostración.  $\square$

Resumiendo los resultados de esta sección, se ha dado primero en el Lema 6 una condición de equivalencia entre que la función de costo MPC sea menor o igual que cierta cota y que todos los estados predichos estén en la región objetivo. Luego, en el Teorema 4 se establece que cuando la función de costo MPC es mayor que dicho valor límite, la misma se reduce respecto de su valor previo en una cantidad que admite una cota inferior positiva. Finalmente, los Corolarios 6 y 7 muestran que aplicando la estrategia de control propuesta, el estado del sistema queda confinado para siempre en el conjunto objetivo si llega allí y, en el Corolario 8 se prueba la convergencia en tiempo finito al mencionado conjunto. Estos resultados implican la estabilidad práctica de la formulación planteada desde  $C_{\Omega_I}$  hacia  $\Omega_O$  y siendo el tiempo de convergencia  $T(x_0) = M(x_0) + 1$ .

### 4.3.1. Comentarios Adicionales

El objetivo de esta subsección es brindar una explicación más intuitiva del rol de los parámetros  $c$  y  $r$  en la formulación MPC desarrollada y con eso facilitar la comprensión de los resultados expuestos, especialmente en lo que respecta al Teorema 4 y su demostración. Para esto, la propuesta es analizar un ejemplo ilustrativo que sea simple pero esclarecedor.

Consideremos entonces lo que se muestra en la Figura 4.1. En la misma,  $\Omega_O$  tiene una forma elíptica mientras que  $\Omega_I$  es un paralelogramo.  $C_{\Omega_I}$  no aparece representado gráficamente porque no es relevante para lo que se quiere explicar. La intensidad del gris da una idea intuitiva del costo de etapa  $L$  en cada punto del espacio de estados<sup>5</sup>. Un tono más oscuro corresponde a un mayor costo de etapa así que respecto del centro de la figura, dicho costo crece al movernos hacia la izquierda y hacia la derecha. El hecho de que la parte más oscura dentro de  $\Omega_O$  resulte más clara que cualquier región fuera de  $\Omega_O$  se debe al efecto de la constante  $c$  que satisface (4.5). Esta ecuación implica que  $cN\tilde{L}_{\max} < \tilde{L}_{\min}$ , lo que a su vez significa que es preferible tener todos los estados predichos con el máximo costo de etapa en  $\Omega_O$  antes que tener un único estado predicho con el mínimo costo de etapa fuera de  $\Omega_O$ .

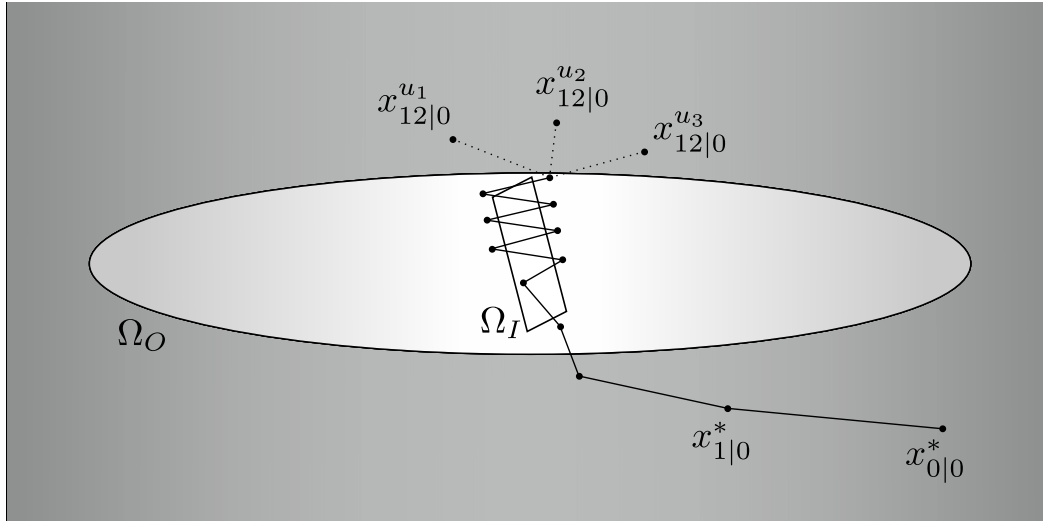


Figura 4.1: Secuencia de estados predichos óptima en  $k = 0$ .

Para explicar el rol de  $r$ , y en última instancia hacer más fácil de seguir la demostración del Teorema 4, en el esquema se muestra también la secuencia de estados

<sup>5</sup>Esto es solo una idea intuitiva porque en verdad  $L$  depende, en general, también de la entrada y del índice de etapa. Sin embargo, para mantener las cosas simples podemos considerar que  $L$  es independiente de la entrada en este caso particular y que  $r$  es un número pequeño.

predichos óptima para cierta condición inicial  $x_0 = x_{0|0}^* \in C_{\Omega_I}$  con  $N = 11$ . Con la intención de mantener la Figura 4.1 entendible, solo se han nombrado explícitamente los estados  $x_{0|0}^*$  y  $x_{1|0}^*$ . Esta trayectoria se trazó en línea sólida mientras que en línea de puntos se ha ilustrado dónde estarían los próximos estados predichos considerando que el conjunto de entrada es finito:  $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ . Debe notarse que estos estados,  $x_{12|0}^{u_1}$ ,  $x_{12|0}^{u_2}$  y  $x_{12|0}^{u_3}$ , quedan fuera del horizonte de predicción actual. Teniendo en cuenta la notación usada en la demostración del Teorema 4, en este caso tendríamos  $m = 4$  dado que el mínimo  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $x_{k+m|k}^* \in \Omega_I$  es 4.

Como no hay perturbaciones, en el instante de control siguiente tenemos  $x_1 = x_{1|1} = x_{1|0}^*$ . Querer usar la misma secuencia de entradas que antes, descartando  $u_{0|0}^*$  y añadiendo  $u_1$ ,  $u_2$  o  $u_3$  al final, sería factible pero no óptimo ya que se obtendría un estado final fuera de  $\Omega_O$  y la Definición 8 asegura que es posible retornar a  $\Omega_I$  sin abandonar  $\Omega_O$  dentro del horizonte de predicción.

Por consiguiente, consideramos otra secuencia de entradas que le permita al estado alcanzar  $\Omega_I$  en la etapa correspondiente a  $m = 4$  y permanecer en  $\Omega_O$  de ahí en más. Esta secuencia de entradas  $\mathbf{u}_1$  se compone de lo mismo que la anterior (descartando  $u_{0|0}^*$ ) hasta el índice  $m - 1 = 3$  y luego, de acciones de control que hacen que el estado se mantenga en  $\Omega_O$ . La Figura 4.2 muestra un ejemplo de cómo podría ser la evolución del estado predicho en este caso.

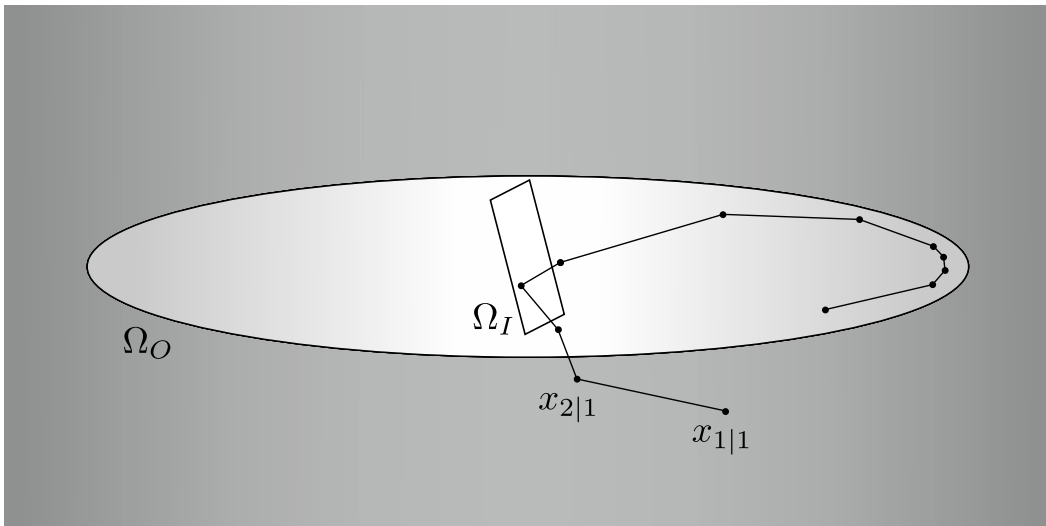


Figura 4.2: Secuencia de estados predichos no necesariamente óptima en  $k = 1$ .

Para comparar el costo obtenido con la secuencia de entradas propuesta  $\mathbf{u}_1$  en el instante  $k = 1$ ,  $V(x_1, \mathbf{u}_1)$ , con el costo óptimo en  $k = 0$ ,  $V^*(x_0)$ , es conveniente

aislar la contribución de  $x_{1|0}^*$  a  $V^*(x_0)$  y separar los otros aportes según a qué grupo correspondan:

(G1) estados predichos hasta  $m$  (incluido) fuera de  $\Omega_O$ ,

(G2) estados predichos hasta  $m$  (incluido) contenidos en  $\Omega_O$  y

(G3) estados predichos luego de  $m$ .

Hay que recordar que por la forma en la que está definida la función de costo MPC en nuestro caso (con los índices comenzando en 1), no se tiene en cuenta la contribución de  $x_{0|0}^*$  a  $V^*(x_0)$  ni la de  $x_{1|1}$  a  $V(x_1, \mathbf{u}_1)$ .

Entonces, la primera contribución positiva a  $V^*(x_0) - V(x_1, \mathbf{u}_1)$  está dada por el costo de etapa de  $x_{1|0}^*$ , que es  $L_{1,0}^*$  según la notación utilizada en la demostración del Teorema 4. Debe notarse que  $L_{1,0}^* \geq \tilde{L}_{\min}$  ya que  $x_{1|0}^* \notin \Omega_O$ . Luego, respecto de la contribución de los costos de etapa del grupo (G1) a  $V^*(x_0) - V(x_1, \mathbf{u}_1)$  podemos decir que esta será mayor o igual que 0 porque  $r$  los reduce en relación con los del tiempo anterior. Sin embargo, como estamos interesados en una cota inferior, para mantener el análisis más simple despreciaremos este aporte. La contribución del grupo (G2) es nula porque los estados predichos hasta  $m$  (incluido) contenidos en  $\Omega_O$  tienen el mismo costo de etapa tanto para  $k = 0$  como para  $k = 1$ . Finalmente, la contribución del grupo (G3) podría ser negativa y en un escenario de peor caso<sup>6</sup> que involucrase estados predichos luego de  $m$  con costo de etapa nulo para  $k = 0$  y con costo de etapa igual a  $c\tilde{L}_{\max}$  para  $k = 1$  podría ser  $-(N - m + 1)c\tilde{L}_{\max} > -(N - 1)c\tilde{L}_{\max}$ .

En este punto hemos básicamente arribado a las Ecuaciones (4.27) y (4.28) de la demostración, siendo esta última la que corresponde al caso en que  $x_{1|0}^* \notin \Omega_O$ , que es lo que se muestra en el ejemplo actual. Luego, considerando (4.5), se puede llegar esencialmente a lo planteado en la Ecuación (4.19):

$$\begin{aligned} V^*(x_0) - V(x_1, \mathbf{u}_1) &\geq \tilde{L}_{\min} - (N - 1)c\tilde{L}_{\max} \\ &\geq \tilde{L}_{\min} - (N - 1)\frac{r\tilde{L}_{\min}}{N} \\ &\geq \left(1 - r\frac{N - 1}{N}\right)\tilde{L}_{\min}. \end{aligned}$$

Un escenario diferente sería el mostrado en la Figura 4.3. En esta ocasión, la contribución positiva a  $V^*(x_0) - V(x_1, \mathbf{u}_1)$  dada por el costo de etapa de  $x_{1|0}^*$  es

<sup>6</sup>Las Figuras 4.1 y 4.2 intentan ilustrar un escenario desfavorable (pero no el peor caso) en el que para  $k = 0$  los estados predichos luego de  $m$  tienen costos de etapa reducidos mientras que para  $k = 1$  tienen costos de etapa elevados.

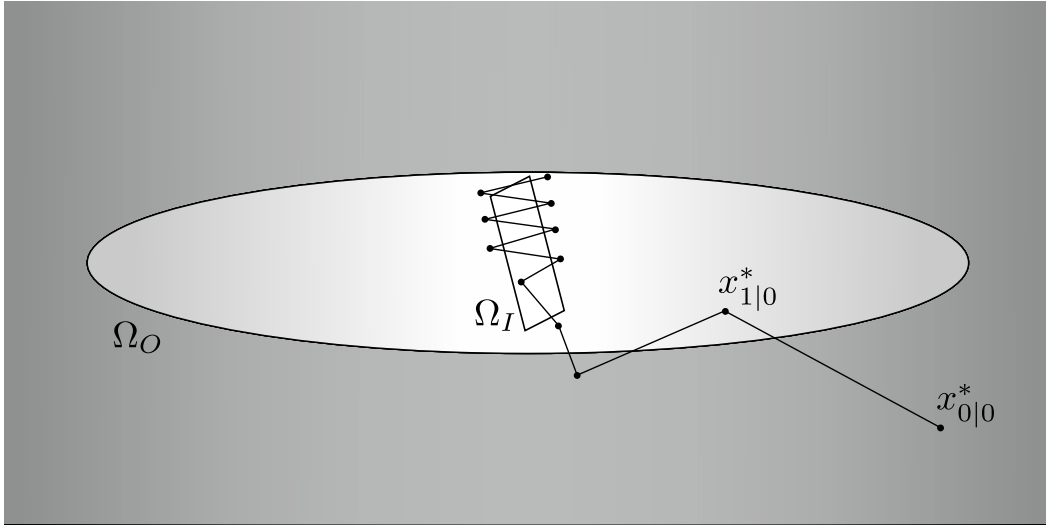


Figura 4.3: Secuencia de estados predichos óptima en  $k = 0$  para otro sistema. En este caso se tiene  $x_{1|0}^* \in \Omega_O$ .

reducida y la despreciaremos. Por otro lado, el aporte de los costos de etapa del grupo (G1) será considerado. Gracias al coeficiente  $r$ , lo que tenemos es  $(1 + (2 - 1)r)\tilde{L}_{2,0}^* - (1 + (2 - 2)r)\tilde{L}_{2,1} = (1 + r)\tilde{L}_{2,0}^* - \tilde{L}_{2,1}$ . Como  $x_{2|0}^* = x_{2|1}$  y  $u_{1|0}^* = u_{1|1}$ , resulta que  $\tilde{L}_{2,0}^* = \tilde{L}_{2,1}$  por lo que la contribución del grupo (G1) tiene una cota inferior de  $r\tilde{L}_{2,0}^* \geq r\tilde{L}_{\min}$ . Asumiendo lo mismo que antes para los grupos (G2) y (G3), hemos ahora arribado a las Ecuaciones (4.26) y (4.27). Entonces, siguiendo los pasos presentados previamente se puede llegar a lo ya visto:

$$\begin{aligned}
 V^*(x_0) - V(x_1, \mathbf{u}_1) &\geq r\tilde{L}_{\min} - (N - 1)c\tilde{L}_{\max} \\
 &\geq \frac{N - 1}{N}(r\tilde{L}_{\min} - Nc\tilde{L}_{\max}) + \frac{r\tilde{L}_{\min}}{N} \\
 &\geq \frac{r\tilde{L}_{\min}}{N}.
 \end{aligned}$$

## 4.4. Diseño del Controlador

El objetivo de esta sección es proveer un procedimiento que permita efectivamente diseñar un controlador basado en la estrategia propuesta. Aunque se puedan definir los distintos elementos que componen nuestra formulación de manera conjunta, a continuación presentamos una posible secuencia ordenada de pasos para determinar dichos parámetros en el Algoritmo 1. Para esto se asume que el conjunto objetivo  $\Omega_O$  ya ha sido definido en función de ciertos objetivos de control preespecificados y

que un conjunto interior de control en  $N$  pasos  $\Omega_I$  es conocido, así como también el correspondiente valor de  $N$ .

**Algoritmo 1.** Procedimiento Secuencial para Diseñar el Controlador.

1. Definir la función de costo de etapa original  $\tilde{L}(x, u) \geq 0$  acorde al problema de control particular a abordar.
2. Encontrar  $\tilde{L}_{\max}$  finito y  $\tilde{L}_{\min} > 0$  considerando las Ecuaciones (4.2) y (4.3).
3. Elegir un valor para  $r$  en el intervalo  $[0, 1)$ .
4. Seleccionar  $c = \frac{r\tilde{L}_{\min}}{N\tilde{L}_{\max}}$  según la Ecuación (4.5), o cualquier valor no negativo menor que eso.

Aunque muchos tipos de funciones para  $\tilde{L}(x, u)$  podrían ser útiles, una cuadrática con su mínimo en  $\Omega_O$  es una opción intuitiva que siempre será apropiada para nuestro esquema. Con estas funciones, la existencia de solución para el problema de optimización (4.9) puede garantizarse (ver Apéndice A, Sección A.1) y los valores de  $\tilde{L}_{\max}$  y  $\tilde{L}_{\min}$  pueden ser fácilmente determinados con herramientas estándar para resolver problemas de programación cuadrática. Además, una función cuadrática  $\tilde{L}(x, u)$  permitiría que estas constantes satisfagan las condiciones requeridas de que  $\tilde{L}_{\max}$  sea finito y  $\tilde{L}_{\min} > 0$ .

## 4.5. Discusión de los Resultados

La idea de esta sección es comentar ciertos aspectos y hacer algunas observaciones respecto de lo desarrollado en este capítulo:

- *Región de atracción:* Como es deseable que  $C_{\Omega_I}$  (y por lo tanto  $\Omega_I$ ) sea tan grande como sea posible (es la región desde la cual la convergencia puede asegurarse) y que el conjunto objetivo  $\Omega_O$  sea tan pequeño como se pueda, la mejor situación se da cuando  $\Omega_O = \Omega_I$ , es decir cuando  $\Omega_I$  es un CIS. Si no es posible encontrar dicho conjunto, o si el mismo es demasiado complejo para ser utilizado en la práctica, tener  $\Omega_I$  cerca de la región objetivo  $\Omega_O$  asegura una región de atracción más grande.
- *Respecto de  $c$ :* Siempre es posible definir  $c = 0$ , sin embargo, usar un valor más grande permite mantener el sistema controlado incluso dentro de la región objetivo, haciendo que el estado se acerque tanto como sea posible a aquel punto que tenga el menor costo. Además, mientras más próximo sea este parámetro a

- 1, más igualmente serán ponderados los estados en la función de costo sin importar si están o no en el conjunto objetivo.
- *Respecto de  $r$* : La constante  $r$  es arbitraria. Un valor grande (cercano a 1) asegura una convergencia más rápida pero distorsiona en mayor medida la función de costo de etapa original o preliminar. Por su parte, un valor pequeño de  $r$ , de acuerdo con la Ecuación (4.5) obligaría a usar un valor pequeño también para la constante  $c$ , con las implicancias correspondientes según el ítem anterior.
  - *Horizonte de predicción*: Hasta ahora siempre se asumió que la longitud del horizonte de predicción era  $N$  mientras que  $\Omega_I$  era un conjunto interior de control en  $N$  pasos. Teniendo en cuenta que un conjunto interior de control en  $N$  pasos es también un conjunto interior de control en  $H$  pasos para cualquier  $H \in \mathbb{N}$  tal que  $H > N$ , el horizonte de predicción del problema de control óptimo (4.9) podría definirse como  $H$ , es decir más extenso que  $N$ . Claramente  $H$  debería ser considerado en toda la formulación (Ecuación (4.5), restricciones dadas por (4.10), (4.11) y (4.12), etc.) lo que significaría un mayor costo computacional pero, asumiendo que un conjunto interior de control en  $N$  pasos es ya conocido, esto podría ser útil para agrandar el dominio de atracción. Una posibilidad para limitar la carga numérica sería usar  $H$  en la formulación hasta que el estado llegue al conjunto interior  $\Omega_I$  y a partir de ese momento, cambiar el horizonte de predicción por  $N$ .
  - *Relación y diferencias con [24]*: Usar  $c = r = 0$  con  $\Omega_I = \Omega_O$  siendo un CIS, permite asegurar convergencia en tiempo finito en un esquema similar al de [24] hasta que la trayectoria ingresa a la región invariante. La única diferencia con esta otra estrategia es nuestra condición de paso que constituye una relajación respecto de la restricción terminal de [24]. Una vez que el estado está en el conjunto objetivo nuestro controlador lo mantendrá allí sin tener que modificar su funcionamiento (incluso si  $c = r = 0$ ) mientras que para [24] es necesario cambiar la ley de control por otra bajo la cual la región objetivo se torne un CIS. Una diferencia entonces entre estos esquemas es que nuestra estrategia nos libera de la tarea de diseñar este otro controlador y además, si  $c$  y  $r$  no son nulos, no solo se mantendrá el estado en el conjunto objetivo sino que además se lo hará permanecer tan cerca como sea posible del estado con menor costo. A pesar de esto, nuestro esquema no asegura estabilidad asintótica a ningún punto contenido en  $\Omega_O$ . Por su parte, [24] sí lo asegura pero porque asume que el controlador local es capaz de hacer eso. Finalmente, yendo más allá del caso con  $\Omega_I = \Omega_O$ ,

la diferencia más importante entre la formulación propuesta y [24] es que para nuestro esquema no se necesita un CIS sino un par de conjuntos interior-exterior más simples.

- *Relación y diferencias con [22]*: Incluso con  $c = r = 0$  y  $\Omega_I = \Omega_O$  siendo un CIS, nuestro esquema propuesto difiere considerablemente del dado en [22]. Bajo estas condiciones, ambos controladores tienen costo de etapa nulo en la región objetivo, sin embargo, en [22] esto no se logra con un escalado como en nuestro caso sino directamente definiendo el costo de etapa mediante distancias euclídeas a conjuntos (consideradas nulas dentro de los mismos). Además, [22] requiere que la región objetivo sea contractiva, no solo invariante, e impone una restricción terminal en el estado de pertenencia a dicho conjunto lo cual es más restrictivo que nuestra condición de paso. Otra diferencia es que nuestro controlador mantiene el estado en la región objetivo (las soluciones están finalmente acotadas) mientras que la estrategia dada en [22] no necesariamente lo hace ya que no cambia la ley de control como se realiza en [24] sino que mantiene el mismo esquema MPC con costo de etapa nulo en el conjunto invariante.
- *Contribuciones e independencia entre ellas*: Las ideas involucradas en la estrategia presentada de MPC basado en conjuntos traen consigo dos importantes contribuciones independientes que, si bien ya han sido mencionadas, hay que destacarlas como tales:
  - (C1) el reemplazo de un conjunto invariante por un par de conjuntos interior-exterior más simples que, sin embargo, mantienen la estabilidad práctica del controlador, y
  - (C2) la posibilidad de continuar controlando en la región objetivo sin conocer ni tener que usar otro controlador local.

La contribución (C1) es particularmente importante cuando se trabaja con sistemas con dificultades como ser no linealidades, modos conmutados, conjuntos de entrada finitos, etc. En general, en estos casos no es factible en la práctica computar ni usar conjuntos invariantes lo que significa que no pueden asegurarse propiedades de estabilidad mediante dichas regiones en los controladores MPC. La contribución (C2) es una diferencia notable respecto de los esquemas MPC de modo dual que requieren un controlador local para el CIS.

Es relevante también explicar por qué estas contribuciones son independientes entre sí. Consideremos por ejemplo solo (C1). Si usamos el par interior-exterior

(sin ser ninguno de dichos conjuntos, invariante) con costo nulo en la región objetivo, es decir  $c = 0$  pero  $r > 0$  por la hipótesis del Corolario 8, mantenemos la estabilidad práctica sin utilizar ningún CIS pero la capacidad de controlar el estado una vez que el mismo arriba al conjunto exterior se pierde. Por otra parte, considerando (C2), si  $\Omega_O = \Omega_I$  que significa que constituyen un invariante, y el costo es reducido pero no anulado en dicha región, el esquema MPC continúa siendo capaz de controlar en el conjunto objetivo y mantiene la estabilidad práctica pero vuelve a ser necesario lidiar con (computar y manipular) CIS.

## 4.6. Ejemplo de Simulación

En esta sección presentamos un ejemplo que ilustra la metodología de diseño propuesta y sus ventajas. El sistema elegido para el mismo es un modelo de tiempo discreto no lineal de un péndulo invertido con rozamiento<sup>7</sup>, dado por las siguientes ecuaciones en diferencias:

$$\begin{cases} \theta_{k+1} = \theta_k + \beta \omega_k \\ \omega_{k+1} = \gamma \sin \theta_k + \delta \omega_k + \zeta \tau_k \\ \tau_{k+1} = \tau_k + \xi u_k \end{cases}, \quad (4.30)$$

donde el estado  $x_k = [\theta_k \ \omega_k \ \tau_k]^T \in X \subseteq \mathbb{R}^3$ , se compone de  $\theta_k$ , el ángulo con respecto al eje vertical,  $\omega_k$ , la velocidad angular y  $\tau_k$ , el par de torsión aplicado. La entrada  $u_k \in U = \{-1, 0, 1\}$  define el cambio en  $\tau_k$  y pertenece a un conjunto finito que está limitado a mantener el par de torsión aplicado o modificarlo en una cantidad fija ( $\pm\xi$ ) en cada instante de control. Los parámetros son  $\beta = 0.01$ ,  $\gamma = 0.4$ ,  $\delta = 9.99 \cdot 10^{-1}$ ,  $\zeta = 1.2$  y  $\xi = 5 \cdot 10^{-3}$ .

El propósito del controlador es asegurar la convergencia del estado al conjunto objetivo  $\Omega_O = \{[\theta \ \omega \ \tau]^T \in X : |\theta| \leq 0.1, |\omega| \leq 0.14, |\tau| \leq 0.066\}$  mostrado en la Figura 4.4. Con este fin, un ingrediente clásico a considerar para una formulación MPC estabilizante tradicional sería una restricción terminal en una región invariante en  $\Omega_O$ . Sin embargo, la no linealidad del sistema y su conjunto de entrada finito hacen que el cómputo del mencionado invariante no solo sea difícil sino también prácticamente inútil dado que incluso si pudiera obtenerse, la complejidad de su representación lo haría inadecuado para la determinación en tiempo real de la condición de pertenencia al

<sup>7</sup>En este caso las ecuaciones se obtuvieron mediante el método de integración de Euler con un paso de integración de  $4 \cdot 10^{-3}$  s.

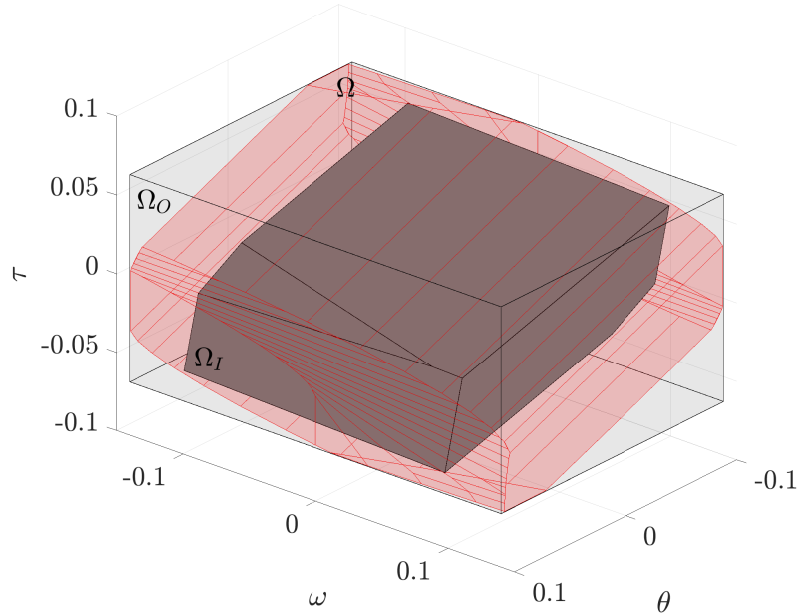


Figura 4.4: Conjuntos  $\Omega_I$ ,  $\Omega_O$  y  $\Omega$  correspondientes al ejemplo.

mismo. Para ilustrar esta situación, la Figura 4.4 también muestra la región invariante  $\Omega$  obtenida mediante [79] para la linealización del sistema (4.30) con el conjunto de entrada infinito no numerable dado por el intervalo  $[-1, 1]$ . Más allá del hecho de que se puede verificar que  $\Omega$  no es invariante para el sistema no lineal con alfabeto finito de entrada, dicha región tiene 70 caras lo cual, aun bajo estas simplificaciones, hace que su descripción matemática sea muy compleja.

En contraposición a esto, un conjunto interior considerablemente más simple puede ser representado por tan solo ocho caras como también se muestra en la Figura 4.4. Esta región poliédrica está dada por  $\Omega_I = \{x \in X : Fx \leq g\}$  con

$$F = \begin{bmatrix} 95.99 & 37.59 & 265.9 \\ -95.99 & -37.59 & -265.9 \\ 10.19 & 91.69 & 0 \\ -10.19 & -91.69 & 0 \\ 100.6 & 13.66 & 24.52 \\ -100.6 & -13.66 & -24.52 \\ 5.765 & 1.094 & 9.294 \\ -5.765 & -1.094 & -9.294 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 6.772 \\ 6.772 \\ 8.151 \\ 8.151 \\ 7.445 \\ 7.445 \\ 0.386 \\ 0.386 \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

El procedimiento seguido para obtener este conjunto fue similar al utilizado en el ejemplo de aplicación del Capítulo 3. Teniendo en cuenta que el sistema es no lineal y que posee un alfabeto de control finito, se tomó una nube de puntos en  $\Omega_O$  y se realizaron algunas iteraciones del Teorema 1. Luego, en función de la disposición de los puntos resultantes, la región definida por (4.31) se propuso como candidata a conjunto interior. Posteriormente se verificó computacionalmente que la Definición 8 se cumple para  $\Omega_O$  y  $\Omega_I$ , siendo  $\Omega_I$  un conjunto interior de control en 9 pasos. Considerando esto, se definió  $N = 9$  como el horizonte de nuestra estrategia MPC.

La verificación numérica se hizo también usando una nube de puntos, esta vez en  $\Omega_I$ , y chequeando que, para cada uno de esos estados, exista una secuencia de entradas de largo menor o igual que  $N$  que haga que el mismo evolucione hacia  $\Omega'_I$  sin salirse de  $\Omega'_O$ , donde estos conjuntos son versiones reducidas de  $\Omega_I$  y  $\Omega_O$  respectivamente. Adoptamos una distancia mínima  $\epsilon$  entre sus fronteras tal que  $\Omega'_I \oplus B_\epsilon \subseteq \Omega_I$  y  $\Omega'_O \oplus B_\epsilon \subseteq \Omega_O$ , donde  $\oplus$  es la suma de conjuntos de Minkowski. Luego verificamos que todo punto en  $\Omega_I$  tuviera su punto más cercano en la nube a una distancia menor que  $\epsilon/K_L$  con  $K_L$  siendo una cota superior para las constantes de Lipschitz de las composiciones hasta  $N$  de la función del sistema  $f(x, u)$  para cada posible secuencia de entradas. De esa forma, el hecho de que todos los puntos de la nube puedan ser llevados hacia  $\Omega'_I$  sin que se salgan de  $\Omega'_O$  implica que todos los puntos en  $\Omega_I$  pueden llevarse a  $\Omega_I$  sin que se escapen de  $\Omega_O$ . Debe notarse que la verificación explicada es una implementación computacional del Teorema 2.

Con el objetivo de diseñar el controlador, se siguió el procedimiento dado en el Algoritmo 1. Supondremos que la función de costo de etapa original a minimizar era  $\tilde{L}(x) = \tilde{L}([\theta \ \omega \ \tau]^T) = \theta^2 + 10^{-4} \omega^2 + 1.44 \cdot 10^{-4} \tau^2$  que penaliza principalmente el error en  $\theta$ . Luego, de acuerdo con las Ecuaciones (4.2) y (4.3) puede obtenerse, resolviendo dos problemas de programación cuadrática, que  $\tilde{L}_{\min} = 6.28 \cdot 10^{-7}$  y  $\tilde{L}_{\max} = 10^{-2}$ . Para terminar de definir todos los parámetros de la función de costo de etapa (4.4) (y el problema de optimización (4.9)) se seleccionó  $r = 0.1$  y se obtuvo  $c \leq 6.98 \cdot 10^{-7}$  de (4.5).

Para verificar que la formulación MPC funcionaba como se esperaba, se simuló el sistema desde condiciones iniciales  $x_0^a = [0.068 \quad -0.36 \quad -7.3 \cdot 10^{-3}]^T$  y  $x_0^b = [-0.073 \quad 0.59 \quad -0.043]^T$ , con dos valores diferentes del parámetro  $c$ : 0 y  $6 \cdot 10^{-7}$ . Las trayectorias obtenidas se muestran en la Figura 4.5.

Puede verse que todas las evoluciones del estado convergen en tiempo finito a la región objetivo  $\Omega_O$  y permanecen allí para siempre a partir de dicho momento. Como se muestra en la Figura 4.5a, cuando  $c = 0$  el controlador propuesto garantiza este

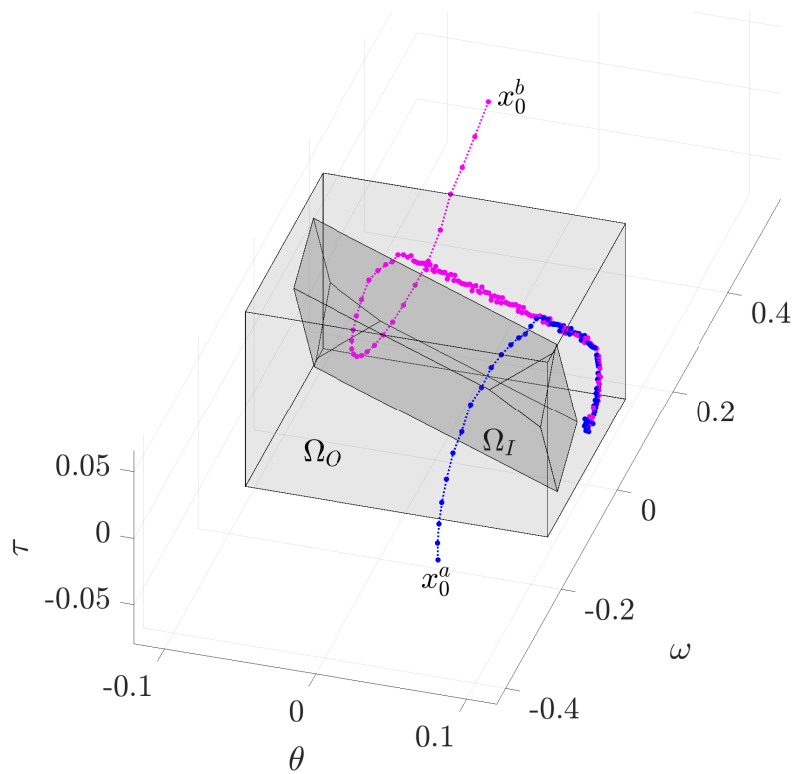
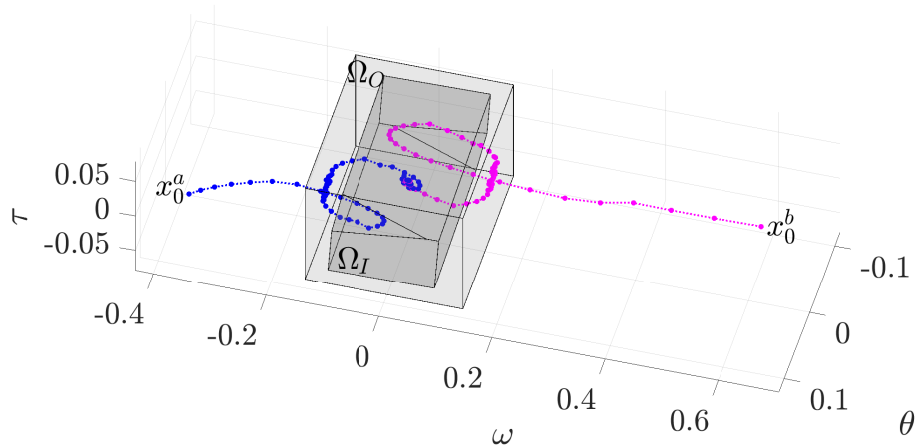
(a) Trayectorias de estado con  $c = 0$ .(b) Trayectorias de estado con  $c = 6 \cdot 10^{-7}$ .

Figura 4.5: Aplicación de nuestra formulación MPC.

comportamiento sin la necesidad de que  $\Omega_O$  sea invariante. Debe notarse que tampoco se requiere conmutar a otro controlador dentro de este conjunto. Estas dos características constituyen diferencias significativas con respecto a los enfoques MPC de modo dual. Otra cuestión interesante para comentar es que, en este caso, las trayectorias del

sistema a lazo cerrado no se mantienen pasando efectivamente por  $\Omega_I$  por más que las secuencias óptimas de control obtenidas garanticen que esto es factible en  $N = 9$  pasos o menos. Finalmente, es también importante mencionar que la existencia de más de una solución para el problema de optimización (4.9) no afecta la propiedad de estabilidad práctica. De las demostraciones presentadas en la Sección 4.3 se puede inferir que cualquier solución mantendría esta propiedad y esto se ejemplifica con las simulaciones numéricas mostradas para  $c = 0$ .

El caso con  $c = 6 \cdot 10^{-7} > 0$  correspondiente a la Figura 4.5b muestra cómo escalar el costo dentro de la región objetivo permite que el esquema también controle el sistema en dicho conjunto. Esto significa que las trayectorias no solo ingresan a  $\Omega_O$  sino que también son llevadas cerca del origen siempre que esto sea posible.

## 4.7. Generalización para Horizontes Diferentes

En esta sección se formula una versión más general del esquema MPC desarrollado previamente para poder utilizar horizontes de predicción y control distintos. Luego, los resultados teóricos ya presentados se extienden para demostrar que el sistema a lazo cerrado con esta nueva estrategia preserva la propiedad de estabilidad práctica.

### 4.7.1. Esquema MPC con Horizontes Diferentes

Nuevamente consideraremos el sistema dado por la Ecuación (4.1) y los correspondientes conjuntos  $X$  y  $U$ . El objetivo de esta estrategia MPC es que el estado arribe en tiempo finito y se quede en el conjunto objetivo compacto  $\Omega_O \subset X$  respetando las restricciones para el estado y la entrada  $y$ , al igual que antes, se asume que existe un conjunto interior de control en  $N$  pasos  $\Omega_I \subseteq \Omega_O$ .

En esta ocasión, dos horizontes *a priori* independientes serán parte de la formulación. Para definirlos consideraremos un elemento del conjunto de entradas,  $\check{u} \in U$ , como la acción de control por defecto. El horizonte de predicción  $H_p$  denotará el largo de la ventana temporal desde el instante actual para la cual el estado será predicho, y tenido en cuenta en la función de costo MPC junto con la entrada. El horizonte de control  $H_c$ , por otra parte, indicará la cantidad de acciones de control consecutivas que no necesariamente serán  $\check{u}$  y que compondrán la secuencia de entradas a considerar a partir del tiempo actual. En general, dado el conjunto interior de control en  $N$  pasos, se tendrá  $N \leq H_c \leq H_p$ . Sin embargo, como un conjunto interior de control en  $N$

pasos es también un conjunto interior de control en  $N'$  pasos con  $N' \geq N$ , siempre será posible tomar  $N' = H_c$ .

Como luego del horizonte de control (y dentro del horizonte de predicción) todas las acciones de las secuencias de entradas son la acción de control por defecto  $\check{u}$ ,  $H_c$  determina la cantidad de variables a optimizar y, por lo tanto, la complejidad del problema de optimización. Luego, desacoplar esta cantidad del horizonte de predicción  $H_p$  podría permitirle al controlador seleccionar entradas de control más adecuadas sin incrementar significativamente la carga computacional. Evidentemente, este será el caso solo si  $\check{u}$  es cuidadosamente elegido para el problema específico que se esté abordando. Aunque en muchas situaciones el origen del espacio de entradas sea un buen candidato para esta acción de control por defecto, dependiendo del caso o si 0 no está disponible en el conjunto de entrada por ejemplo, podría haber otras opciones más convenientes. Se mostrará en el próximo capítulo concerniente a la aplicación en robótica agrícola que, cuando  $\check{u}$  es seleccionado apropiadamente, esto puede ser útil en la práctica, lo cual constituye la principal razón para estar interesados en esta extensión teórica.

Antes de continuar con la formulación debe decirse que de ahora en más  $C_{\Omega_I}$  denotará el conjunto controlable en hasta  $H_c$  pasos<sup>8</sup> hacia  $\Omega_I$  y que la condición inicial del estado se asumirá en dicha región. Será también útil definir el conjunto alcanzable en hasta  $Q$  pasos desde  $\Omega_O$ , simbolizado  $R_{\Omega_O}(Q)$ :

**Definición 10** (Conjunto Alcanzable en hasta  $Q$  Pasos). Dados el sistema (4.1),  $Q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  y la región objetivo  $\Omega_O$ , el conjunto alcanzable en hasta  $Q$  pasos desde  $\Omega_O$  se define recursivamente como

$$R_{\Omega_O}(Q) \triangleq \begin{cases} \emptyset & \text{si } Q = 0 \\ f(\Omega_O \cup R_{\Omega_O}(Q-1), \check{u}) & \text{si } Q > 0 \end{cases},$$

donde  $f(A, \check{u})$  representa el conjunto  $\{x \in X : x = f(x', \check{u}), x' \in A\}$ .

En particular estamos interesados en el caso  $Q = H_p - H_c$ , es decir en el conjunto alcanzable en hasta  $(H_p - H_c)$  desde  $\Omega_O$ . Para simplificar la notación, se hará referencia a esta región como  $R_{\Omega_O}$ .

Ahora, teniendo en cuenta nuevamente la función de costo de etapa original  $\tilde{L}$ , la constante  $\tilde{L}_{\text{máx}}$  se redefine como

$$\tilde{L}_{\text{máx}} \triangleq \sup_{x \in \Omega_O \cup R_{\Omega_O}, u \in U} \tilde{L}(x, u), \quad (4.32)$$

---

<sup>8</sup>Antes eran  $N$  pasos.

con  $\tilde{L}(x, u)$  y los conjuntos  $\Omega_O$ ,  $R_{\Omega_O}$  y  $U$  siendo tales que  $\tilde{L}_{\text{máx}}$  es finito.  $\tilde{L}_{\text{mín}}$  se mantiene como se planteó en (4.3).

Entonces, la función de costo de etapa dependiente del índice propuesta previamente en (4.4) se redefine así:

$$L(x, u, i) \triangleq \begin{cases} c\tilde{L}(x, u) & \text{si } x \in \Omega_O \vee i > H_c \\ (1 + (i - 1)r)\tilde{L}(x, u) & \text{si } x \notin \Omega_O \wedge i \leq H_c \end{cases}, \quad (4.33)$$

con  $c \geq 0$  y  $r \in [0, 1)$  tales que

$$cH_p\tilde{L}_{\text{máx}} \leq r\tilde{L}_{\text{mín}}. \quad (4.34)$$

En este caso, el índice de etapa  $i$  pertenece al conjunto  $\mathbb{Z}_{1:H_p}$ .

La función de costo MPC es similar a la dada en la Ecuación (4.8) pero usando  $H_p$  en lugar de  $N$ :

$$V(x_k, \mathbf{u}_k) \triangleq \sum_{i=1}^{H_p} L(x_{k+i|k}, u_{k+i-1|k}, i), \quad (4.35)$$

donde  $\mathbf{u}_k = \{u_{k|k}, \dots, u_{k+H_p-1|k}\}$  es una secuencia de entradas admisible y  $\mathbf{x}_k = \{x_{k|k}, \dots, x_{k+H_p|k}\}$  es la secuencia de estados predichos obtenidos con las Ecuaciones (4.6) y (4.7) para todo  $i \in \mathbb{Z}_{0:H_p-1}$ .

Finalmente, para un estado  $x_k \in C_{\Omega_I}$ , el problema de control óptimo a resolver es

$$P(x_k) : V^*(x_k) \triangleq \min_{\mathbf{u}_k \in U_{H_p}(x_k)} V(x_k, \mathbf{u}_k), \quad (4.36)$$

sujeto a (4.6) y (4.7) y siendo  $U_{H_p}(x_k)$  el conjunto de las trayectorias de entrada admisibles  $\mathbf{u}_k$ , que satisfacen

$$u_{k+i|k} \in U, \quad \forall i \in \mathbb{Z}_{0:H_c-1}, \quad (4.37)$$

$$u_{k+i|k} = \check{u}, \quad \forall i \in \mathbb{Z}_{H_c:H_p-1} \text{ si } H_c < H_p, \quad (4.38)$$

$$x_{k+i|k} \in X, \quad \forall i \in \mathbb{Z}_{1:H_p}, \quad (4.39)$$

$$x_{k+i|k} \in \Omega_I, \text{ para algún } i \in \mathbb{Z}_{1:H_c}. \quad (4.40)$$

Como se indicó anteriormente, la solución del problema de optimización en el tiempo  $k$  es la secuencia de entradas óptima  $\mathbf{u}_k^* \triangleq \{u_{k|k}^*, \dots, u_{k+H_p-1|k}^*\}$  y la correspondiente secuencia de estados predichos óptima  $\mathbf{x}_k^* \triangleq \{x_{k|k}^*, \dots, x_{k+H_p|k}^*\}$  es la obtenida de la

Ecuación (4.13). Aplicando el enfoque de horizonte móvil, la ley de control implícita que queda definida es  $\kappa_{MPC}(x) \triangleq u_{k|k}^*$  y el sistema a lazo cerrado termina siendo (4.14).

### 4.7.2. Análisis de Estabilidad

Para llegar a los resultados de convergencia en tiempo finito y permanencia en el conjunto objetivo, del controlador MPC presentado, es decir a la garantía de estabilidad práctica, se sigue un enfoque muy similar al ya planteado. Considerando esto y también para mejorar la legibilidad, se han omitido las demostraciones en esta parte de la tesis, quedando las mismas incluidas en el Apéndice A.

El primer paso es establecer una condición en la función de costo MPC que sea equivalente a que todos los estados predichos estén contenidos en el conjunto objetivo  $\Omega_O$ . El siguiente lema presenta tal condición.

**Lema 7.** *Dados el estado  $x_k \in C_{\Omega_I}$  y la secuencia de entradas admisible  $\mathbf{u}_k \in U_{H_p}(x_k)$ , la función de costo (4.35) verifica  $V(x_k, \mathbf{u}_k) \leq cH_p\tilde{L}_{\max}$  si y solo si  $x_{k+j|k} \in \Omega_O, \forall j \in \mathbb{Z}_{1:H_c}$ .*

Como corolario, cuando el valor óptimo de la función de costo MPC correspondiente a algún estado es menor que la cota dada por  $cH_p\tilde{L}_{\max}$ , el estado siguiente pertenecerá a  $\Omega_O$ . Esto es planteado formalmente así:

**Corolario 9.** *Dada la formulación MPC de la Ecuación (4.36) con  $x_k \in C_{\Omega_I}$ , la condición  $V^*(x_k) \leq cH_p\tilde{L}_{\max}$  implica  $x_{k+1} \in \Omega_O$ .*

Esto es una consecuencia directa de que  $x_{k+1}$  sea igual a  $x_{k+1|k}^*$  por la operación a lazo cerrado y porque la dinámica del sistema está dada por (4.1).

Luego, el siguiente teorema brinda una cota inferior positiva para la reducción del costo entre los instantes  $k$  y  $k+1$  cuando el costo MPC óptimo es mayor que  $cH_p\tilde{L}_{\max}$  en el tiempo  $k+1$ , lo que significa que hay un estado predicho óptimo fuera de  $\Omega_O$ .

**Teorema 5.** *Consideremos la formulación MPC de la Ecuación (4.36). Luego, para cualquier  $x_k \in C_{\Omega_I}$  la condición  $V^*(x_{k+1}) > cH_p\tilde{L}_{\max}$  implica*

$$V^*(x_k) - V^*(x_{k+1}) \geq \epsilon \triangleq \frac{r\tilde{L}_{\min}}{H_p}. \quad (4.41)$$

Para el caso  $\Omega_I = \Omega_O$ , o siempre que  $x_{k+1|k}^* \notin \Omega_O$ , también se verifica que

$$V^*(x_k) - V^*(x_{k+1}) \geq \tilde{\epsilon} \triangleq \left(1 - r\frac{H_p - 1}{H_p}\right) \tilde{L}_{\min}. \quad (4.42)$$

El próximo corolario plantea que si el valor óptimo de la función de costo MPC se vuelve menor que  $cH_p\tilde{L}_{\text{máx}}$ , entonces permanecerá por debajo de dicha cota para siempre.

**Corolario 10.** *Consideremos la formulación MPC de la Ecuación (4.36). Si  $x_k \in C_{\Omega_I}$  y  $V^*(x_k) \leq cH_p\tilde{L}_{\text{máx}}$ , entonces  $V^*(x_j) \leq cH_p\tilde{L}_{\text{máx}}, \forall j \geq k$ .*

De los Corolarios 9 y 10 puede verse que cuando el costo MPC óptimo es menor o igual que la mencionada cota,  $cH_p\tilde{L}_{\text{máx}}$ , el estado se quedará para siempre en  $\Omega_O$ .

**Corolario 11.** *Consideremos la formulación MPC de la Ecuación (4.36). Si  $x_k \in C_{\Omega_I}$  y  $V^*(x_k) \leq cH_p\tilde{L}_{\text{máx}}$ , entonces  $x_j \in \Omega_O, \forall j > k$ .*

Con estos resultados, se puede demostrar el siguiente corolario sobre convergencia en tiempo finito del estado al conjunto objetivo  $\Omega_O$ .

**Corolario 12.** *Consideremos la formulación MPC de la Ecuación (4.36) con  $\Omega_O = \Omega_I$  o  $r > 0$ . Si  $x_k \in C_{\Omega_I}$  y  $V^*(x_k) > cH_p\tilde{L}_{\text{máx}}$ , luego  $x_{k+i} \in \Omega_O$  para todo  $i > M$ , donde*

$$M \triangleq \left\lceil \frac{V^*(x_k) - cH_p\tilde{L}_{\text{máx}}}{\alpha} \right\rceil \quad (4.43)$$

con  $\alpha = \tilde{\epsilon}$  (Ecuación (4.42)) siempre que  $\Omega_I = \Omega_O$ , incluso si  $r = 0$ , o  $\alpha = \epsilon$  (Ecuación (4.41)) en cualquier otro caso con  $r > 0$ .

Recapitulando entonces lo desarrollado en esta subsección, primero en el Lema 7 se presentó una condición de equivalencia entre los hechos de que todos los estados predichos pertenezcan a la región objetivo y que el costo MPC sea menor o igual que  $cH_p\tilde{L}_{\text{máx}}$ . Después de esto, en el Teorema 5 se plantea que si el valor óptimo de la función de costo MPC está por encima de dicha cota, entonces se reduce en una cuantía que tiene una cota inferior positiva. En los Corolarios 10 y 11 se muestra que si el costo MPC es menor o igual que  $cH_p\tilde{L}_{\text{máx}}$ , luego el estado permanecerá en el conjunto objetivo. Finalmente, en el Corolario 12 se presenta el resultado de convergencia en tiempo finito a  $\Omega_O$  y, con todo esto se puede concluir que el sistema a lazo cerrado logra estabilidad práctica. Debe notarse también que la factibilidad recursiva está garantizada para esta estrategia MPC extendida gracias a las propiedades del conjunto interior  $\Omega_I$ .

## 4.8. Conclusiones

El presente capítulo se focalizó en la presentación de un simple procedimiento para diseñar un esquema MPC de manera tal que el sistema a lazo cerrado logre convergencia en tiempo finito y permanencia en el conjunto objetivo, es decir estabilidad práctica. Dada una función de costo de etapa original  $\tilde{L}(x, u)$  y cierta región  $\Omega_O$  a la cual se desea llegar que incluye un conjunto interior de control en  $N$  pasos  $\Omega_I$ , la formulación propuesta utiliza una versión modificada de dicha función de costo de etapa que tiene en cuenta si los estados predichos están en  $\Omega_O$  o no. El problema de control óptimo es luego restringido por la condición de que la trayectoria predicha tenga al menos un punto de intersección con  $\Omega_I$  en algún instante del horizonte de control. Esta imposición es más relajada que la típica restricción terminal de pertenencia a un CIS, requerida por la mayoría de las estrategias MPC estabilizantes, pero permite igualmente obtener una cota superior teórica para el tiempo de convergencia hacia  $\Omega_O$  y probar que el estado queda finalmente acotado por dicho conjunto.

Siendo las hipótesis consideradas poco restrictivas, los resultados mostrados son generales y válidos para sistemas de clases genéricas y también para conjuntos no convexos. Además, el hecho de que no sea necesario computar ni manipular conjuntos invariantes con formas complejas hace que la metodología propuesta sea particularmente interesante para sistemas conmutados y no lineales. Para ilustrar esto, un ejemplo de simulación con un modelo no lineal con conjunto de entrada finito fue presentado. Allí, también se mostró cómo el esquema MPC puede mantener el sistema controlado cuando el estado está en la región objetivo sin cambiar la estrategia de control por otra diferente para ese conjunto particular.

Por último, al final del capítulo se propuso una extensión de la estrategia MPC desarrollada que permite utilizar distintos horizontes de control y predicción.

# Capítulo 5

## Seguimiento de Camino en Robótica Agrícola

Habiéndose desarrollado todos los aspectos teóricos que hacen a la estrategia de control propuesta en esta tesis, presentaremos la utilización de la misma en un problema concreto: el seguimiento de camino en entornos agrícolas con un robot tipo auto. Luego de la introducción de este capítulo, en donde se da la motivación para nuestro esquema, se plantea el problema específico a resolver, se diseña el controlador mostrando cómo se obtienen los distintos elementos que lo componen y se describen las simulaciones realizadas a partir de un modelo realista de la planta. Finalmente se analizan los resultados, y tras compararlos con lo obtenido al usar otra estrategia de control también basada en MPC no lineal, se sacan conclusiones sobre lo observado.

Lo presentado en este capítulo se encuentra publicado en [69].

### 5.1. Introducción

Dada la importancia de la agricultura como actividad económica, siempre ha habido interés en mejorar los procesos productivos ligados a ella. Recientemente, los avances tecnológicos con su consecuente reducción de costos han hecho aparecer nuevas oportunidades (y desafíos) para automatizar tareas que no eran siquiera imaginadas como posibles algunos años atrás, tales como el fenotipado de cultivos, la exploración de campos y la eliminación de malezas mediante aplicación local de herbicidas o láser, por mencionar algunas [83, 84]. Está claro que para todas estas aplicaciones se requiere navegar autónomamente a través de las plantaciones lo que involucra la resolución de problemas de percepción, planificación y control.

Entre los robots utilizados en ambientes agrícolas, debido a su simplicidad y robustez, es común encontrar plataformas tipo auto [85, 86], en donde las ruedas delanteras son las que determinan la dirección, siempre respetando la geometría de Ackermann. En la mayoría de las aplicaciones agrarias, estos vehículos se desplazan de forma lenta y no necesitan girar rápidamente por lo que sus sistemas de dirección suelen moverse con velocidades limitadas y el ángulo hacia donde apuntan las ruedas delanteras no puede cambiar demasiado entre instantes de muestreo. Al mismo tiempo, siendo el suelo irregular y propenso al deslizamiento por su poca adherencia, no es esperable alcanzar mucha precisión, es decir lograr cambios muy pequeños, al controlar el sistema de dirección. Esto conduce a la idea de pensar que el ángulo de la dirección puede solo modificarse en un valor discreto entre muestras consecutivas o, equivalentemente, que la velocidad del sistema de dirección en cada período de muestreo pertenece a un conjunto finito compuesto únicamente por tres elementos:  $\{-\omega_f, 0, \omega_f\}$ , donde  $\omega_f \in \mathbb{R}_{>0}$  es un valor fijo adecuado.

Aunque pueda parecer una consideración demasiado restrictiva, cuando el período de control es suficientemente corto para la dinámica del sistema, este enfoque no solo es válido sino que también, como veremos, puede ofrecer ciertas ventajas. El esquema de control MPC presentado en este capítulo, basado en lo desarrollado en el capítulo anterior, explota esta idea para hacer seguimiento de camino para robots tipo auto en entornos agrícolas.

Nuestra propuesta puede clasificarse entonces como una estrategia de FCS-MPC. Este tipo de controladores suele encontrarse más comúnmente en el contexto de la electrónica de potencia [87] y entre sus características más importantes debe mencionarse que el problema de optimización asociado se puede resolver fácilmente, teniendo en cuenta explícitamente las no linealidades del sistema y las restricciones en el estado y la entrada.

## 5.2. Formulación del Problema de Aplicación

El objetivo en esta parte de la tesis es diseñar un controlador para el problema de seguimiento de camino en entornos agrícolas, más precisamente para un robot tipo auto desplazándose en tierras arables. El interés está puesto en garantizar que el robot no pise los cultivos y para eso se utilizará la extensión de la estrategia MPC estabilizante presentada al final del Capítulo 4. Se espera que el vehículo no solo pueda seguir las hileras de cultivos sino que también sea capaz de maniobrar eficientemente en las cabeceras del campo.

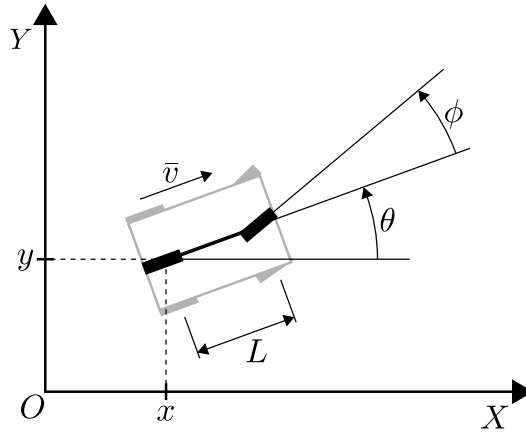


Figura 5.1: Esquema del robot tipo auto, representado por el modelo de bicicleta.

Para el diseño del controlador y como modelo interno del esquema MPC, el siguiente sistema no lineal que representa la ilustración de la Figura 5.1 será considerado:

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + v_k \cos(\theta_k) \Delta t \\ y_{k+1} = y_k + v_k \sin(\theta_k) \Delta t \\ \theta_{k+1} = \theta_k + \frac{v_k}{L} \tan(\phi_k) \Delta t \\ \phi_{k+1} = \phi_k + \omega_k \Delta t \end{cases}, \quad (5.1)$$

donde  $p = [x, y]^T \in \mathbb{R}^2$  es la posición del centro del eje trasero en coordenadas cartesianas,  $\theta \in [-\pi, \pi)$  es la orientación del vehículo,  $\phi \in [-\phi_{max}, \phi_{max}]$  es el ángulo del sistema de dirección con  $\phi_{max} \in (0, \pi/2)$ ,  $v \in \mathbb{R}$  es la velocidad lineal del centro del eje trasero,  $\omega \in \{-\omega_f, 0, \omega_f\}$  es la velocidad del sistema de dirección,  $\Delta t \in \mathbb{R}_{>0}$  es el período de muestreo y  $L \in \mathbb{R}_{>0}$  es la distancia entre ejes. En particular, se considerará que  $\phi_{max} = 0.61$  rad,  $\omega_f = 0.3253$  rad/s,  $\Delta t = 0.2$  s y  $L = 1.58$  m. Estos valores numéricos fueron tomados del robot usado en [85].

El sistema dado por la Ecuación (5.1) se obtiene aplicando el método de *forward Euler* al modelo de bicicleta de tiempo continuo, que es únicamente cinemático, aumentado con la velocidad de la dirección [41]. Este modelo es adecuado a bajas velocidades, es decir cuando las inercias pueden ser ignoradas, que es justamente el caso de la aplicación que nos concierne. Como la idea con la que se busca seguir un camino es cubrir un campo realizando tareas sobre cultivos, la velocidad de avance del robot no puede ser muy alta ni muy cambiante (al menos durante la mayor parte de su recorrido). Debido a esto asumiremos que esta variable podrá ser adecuadamente regulada por un controlador independiente más simple, como un proporcional integral (PI), y la

estrategia MPC solo se encargará de determinar la otra entrada del sistema que es la velocidad de giro de la dirección.

Consideraremos que el camino a seguir se describe mediante un conjunto de *waypoints*<sup>1</sup>  $p_l^w$  con  $l \in \mathbb{N}$  y los correspondientes segmentos que ellos definen. Estas posiciones tienen velocidades lineales de referencia asociadas a ellas que son iguales a una constante, excepto para algunas curvas en las cabeceras, y que son usadas para el modelo interno del esquema MPC. Sin embargo, como se explicó, se asume que tal variable es controlada independientemente en lugar de ser optimizada como parte del problema de control óptimo.

Es importante aclarar que si bien nos referimos a estos puntos como *waypoints* dado que no tienen una parametrización temporal definida, como el objetivo es hacer seguimiento de camino, se requiere que los mismos sean cercanos. Por lo tanto, para obtenerlos se toman las posiciones (y las velocidades lineales mencionadas en el párrafo anterior) de una trayectoria generada a partir del mismo modelo que se emplea internamente en el controlador MPC.

### 5.3. Estrategia Propuesta

En esta sección se procede a diseñar el controlador y se abordan aspectos vinculados a la implementación real del mismo.

#### 5.3.1. Diseño del Controlador

Teniendo en cuenta que el objetivo del controlador es que el sistema a lazo cerrado garantice estabilidad práctica al seguir una línea recta cualquiera (hilera de cultivos), para el diseño del mismo se considerará un escenario simplificado en primera instancia y luego se mostrará que este puede ser fácilmente generalizado. Más específicamente, se asume en primer lugar que el objetivo es seguir el eje de las abscisas. Bajo esta condición y con una velocidad lineal constante de 1.389 m/s (igual a 5 km/h), el modelo dado en (5.1) se simplifica resultando

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + 0.2778 \cdot \sin(\theta_k) \\ \theta_{k+1} = \theta_k + 0.1758 \cdot \tan(\phi_k) \\ \phi_{k+1} = \phi_k + 0.2 \cdot \omega_k \end{cases} \quad . \quad (5.2)$$

---

<sup>1</sup>El subíndice  $l$  se usa para indicar un orden pero el mismo no necesariamente coincide con el tiempo  $k$ .

Luego, el objetivo de ir a lo largo del eje  $X$  se traduce en el de llevar el estado del sistema (5.2) al origen. Sin embargo, como las acciones de control pertenecen a un conjunto finito,  $\{-\omega_f, 0, \omega_f\}$ , no es posible converger a tal estado en general. Debido a eso, definimos la región objetivo como  $\Omega_O = \{[y, \theta, \phi]^T \in \mathbb{R} \times [-\pi, \pi) \times [-\phi_{max}, \phi_{max}] : |y| \leq 0.1, |\theta| \leq 0.046, |\phi| \leq 0.2\}$ . Un margen de 10 cm a cada lado con respecto al eje  $X$  ha sido tenido en cuenta para lograr una navegación segura en el campo considerando un espaciado típico entre filas de cultivos.

En correspondencia con la región objetivo definida  $\Omega_O$ , un conjunto interior de control en 6 pasos que tiene solo ocho caras pudo ser encontrado. Este poliedro está dado por  $\Omega_I = \{x \in \mathbb{R} \times [-\pi, \pi) \times [-\phi_{max}, \phi_{max}] : Fx \leq g\}$ , donde

$$F = \begin{bmatrix} -16.22 & -6.312 & -1.623 \\ 16.22 & 6.312 & 1.623 \\ 0 & 70.45 & 0 \\ 0 & -70.45 & 0 \\ 2.038 & 82.34 & 33.86 \\ -2.038 & -82.34 & -33.86 \\ -0.7399 & -27.12 & 3.149 \\ 0.7399 & 27.12 & -3.149 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 1.332 \\ 1.332 \\ 3.209 \\ 3.209 \\ 3.346 \\ 3.346 \\ 1.743 \\ 1.743 \end{bmatrix}.$$

Los procedimientos utilizados para la obtención y verificación de esta región interior fueron los mismos que los ya explicados en la Sección 4.6, basados en los Teoremas 1 y 2 del Capítulo 3.

Siendo entonces  $\Omega_I$  un conjunto interior de control en 6 pasos, tomaremos  $H_c \geq 6$  como horizonte de control para nuestra estrategia MPC. Debe notarse que aunque no conozcamos el máximo RCIS para este sistema no lineal con alfabeto de control finito y la región objetivo dada, podríamos computar una aproximación linealizando el modelo en el origen y asumiendo una entrada en el intervalo  $[-1, 1]$ . Sin embargo, si hiciéramos eso por ejemplo con el *Multi-Parametric Toolbox* 3.0, obtendríamos un complejo poliedro de 28 caras que de hecho no sería un RCIS para el sistema no lineal (5.2) y por lo tanto la estabilidad no estaría garantizada usándolo como restricción terminal.

La acción de control por defecto del controlador se definió en 0, lo que implica mantener constante el ángulo de la dirección. Esta entrada es la única que le permite al vehículo seguir una línea recta o incluso un arco de circunferencia, que son las formas típicas de los caminos en robótica agrícola.

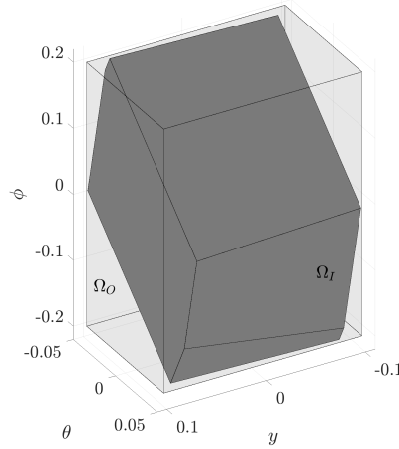


Figura 5.2: Conjuntos  $\Omega_I$  y  $\Omega_O$  correspondientes al ejemplo.

En este punto, el procedimiento a seguir para encontrar el resto de los parámetros de la formulación MPC es el explicado en la Sección 4.4. Consideraremos la siguiente función de costo de etapa cuadrática como nuestra  $\tilde{L}$ :

$$\tilde{L}([y, \theta, \phi]^T) = y^2 + 7.716 \cdot 10^{-2} \cdot \theta^2 + 2.385 \cdot 10^{-3} \cdot \phi^2.$$

Los coeficientes para  $\theta$  y  $\phi$  se definieron en base a cuánto afectarían a  $y$  las desviaciones de dichas variables tras un paso usando una linealización de (5.2) en torno al origen. Por ejemplo, un error unitario en  $\theta$  en el instante  $k$  se convertiría en un error de 0.2778 en  $y$  en el instante  $k + 1$  (suponiendo que no hubiera error previo en  $y$ ) lo que contribuiría a este costo de etapa con  $0.2778^2 = 7.716 \cdot 10^{-2}$ .

Luego, para obtener la función de costo de etapa modificada resta calcular las constantes  $r$  y  $c$ . De las Ecuaciones (4.3) y (4.32) y considerando  $\check{u} = 0$  y un valor máximo de 24 para  $H_p$ , resolviendo las correspondientes optimizaciones no lineales con restricciones<sup>2</sup> se puede obtener que  $\tilde{L}_{\min} = 9.54 \cdot 10^{-5}$  y  $\tilde{L}_{\max} < 17.57$ . Finalmente, eligiendo  $r = 0.1$  se arriba a la condición  $c \leq 2.172 \cdot 10^{-8}$ .

Habiendo definido todos los parámetros de la función de costo de etapa (4.33) y del problema de control óptimo (4.36) de nuestra formulación MPC, explicaremos cómo debe ser modificado el mismo para que el controlador pueda funcionar adecuadamente para cualquier recta distinta del eje de las abscisas. La idea es usar las ecuaciones del sistema original (5.1) como modelo interno pero tomando distancias a la recta a seguir en la función de costo de etapa, es decir, penalizando errores en las coordenadas

<sup>2</sup>Para esto se utilizó la función `fmincon` de MATLAB.

cartesianas  $x$  e  $y$ . Esto mismo se aplica también a las otras variables de estado por lo que la función de costo de etapa  $\tilde{L}$  toma la forma

$$\begin{aligned} \tilde{L}([x - x^r, y - y^r, \theta - \theta^r, \phi - \phi^r]^T) = & (x - x^r)^2 + (y - y^r)^2 + 7.716 \cdot 10^{-2} \cdot (\theta - \theta^r)^2 \\ & + 2.385 \cdot 10^{-3} \cdot (\phi - \phi^r)^2, \end{aligned} \quad (5.3)$$

donde  $[x^r, y^r]^T$  es el punto más cercano a  $[x, y]^T$  en el camino a seguir (descrito por los segmentos definidos por los ya mencionados *waypoints*) y  $\theta^r$  y  $\phi^r$  son los correspondientes ángulos de orientación y dirección requeridos. Hay que notar que cuando el objetivo es desplazarse a lo largo de una recta,  $\phi^r$  es siempre cero. Puede verse y probarse fácilmente mediante una roto-traslación adecuada del estado, que usar (5.3) es equivalente a cambiar el sistema de referencia de un modo tal que el problema termine siendo aquel de seguir el eje  $X$ .

### 5.3.2. Cuestiones de Implementación

Considerando que el conjunto de entrada  $\{-\omega_f, 0, \omega_f\}$  es finito, el problema de control óptimo (4.36) puede resolverse mediante una exploración exhaustiva de las posibles evoluciones del estado para cada trayectoria de entrada admisible y sus respectivos costos. Aunque en principio este enfoque requeriría realizar  $3^{H_c}$  simulaciones por la cardinalidad del conjunto de acciones de control, ofrece la ventaja de considerar fácilmente las no linealidades del modelo dadas en este caso por funciones trigonométricas y saturación en el estado. Además, abordar el problema de optimización de este modo es particularmente adecuado para el esquema de procesamiento paralelo llamado instrucción-única-datos-múltiples (SIMD) por lo que podría implementarse con instrucciones vectorizadas o directamente en un procesador de paralelismo masivo como una unidad de procesamiento gráfico (GPU). Esto se debe a que todas las simulaciones serían computadas con las mismas operaciones dadas por (5.1) pero con diferentes entradas y estados, es decir, con distintos datos.

En esta subsección, dos aspectos específicos de la implementación son abordados. Como el objetivo es efectivamente utilizar el controlador propuesto en una aplicación real en el futuro, el primero de dichos aspectos tiene que ver con la posibilidad de que las restricciones no puedan ser satisfechas en un dado momento. La segunda cuestión se relaciona con reducir la carga computacional del cálculo de los costos.

### Relajación de las Restricciones

Aunque en teoría el controlador MPC propuesto garantiza factibilidad recursiva del problema de optimización y estabilidad práctica del sistema a lazo cerrado, en la práctica podría pasar por ejemplo que si el robot no está lo suficientemente cerca de la referencia al comienzo entonces el estado inicial no esté en  $C_{\Omega_I}$  y el conjunto interior de control no pueda ser alcanzado en  $H_c$  o menos pasos. También podría ocurrir que las discrepancias entre la planta y el modelo, el ruido de medición y/o los errores de estimación hagan que el estado quede fuera de  $C_{\Omega_I}$  en cierto instante de tiempo, conllevando eso nuevamente a la imposibilidad de satisfacer las restricciones del problema de control óptimo. Inclusive, si hubiera una curva, entonces independientemente de que exista o no solución para la optimización, las condiciones no serían aquellas asumidas al diseñar el controlador. En este caso, la velocidad de referencia podría ser diferente respecto de la considerada y, más importante aún, el modelo (5.2) no sería representativo del sistema así como tampoco serían adecuados los conjuntos interior-exterior obtenidos previamente.

Para afrontar estas cuestiones y tener una estrategia MPC más robusta, la misma ha sido implementada de manera tal que si no es posible pasar por  $\Omega_I$  dentro del horizonte de control, es decir que  $x \notin C_{\Omega_I}$ , entonces el problema de control óptimo a resolver es reemplazado por el siguiente:

$$P'(x_k) : V^*(x_k) \triangleq \min_{\mathbf{u}_k \in U'_{H_p}(x_k)} V'(x_k, \mathbf{u}_k), \quad (5.4)$$

sujeto a (4.6) y (4.7), siendo  $U'_{H_p}(x_k)$  el conjunto de trayectorias de entrada admisibles  $\mathbf{u}_k$  que solo satisfacen estas restricciones:

$$\begin{aligned} u_{k+i|k} &\in U, \quad \forall i \in \mathbb{Z}_{0:H_c-1}, \\ u_{k+i|k} &= \check{u}, \quad \forall i \in \mathbb{Z}_{H_c:H_p-1} \text{ si } H_c < H_p, \\ x_{k+i|k} &\in X, \quad \forall i \in \mathbb{Z}_{1:H_p}, \end{aligned}$$

y donde

$$V'(x_k, \mathbf{u}_k) \triangleq \sum_{i=1}^{H_p} \tilde{L}(x_{k+i|k}, u_{k+i-1|k}).$$

A pesar de que no habrá garantías de estabilidad en este caso, se verá en las simulaciones que este enfoque resulta útil en la práctica. Respecto de la implementación, como la estrategia para resolver el problema de optimización se basa en una exploración exhaustiva, este cambio no involucra ni más carga computacional ni demasiadas modificaciones.

### Cómputo Rápido del Costo

Como se explicó al final de la Subsección 5.3.1, el costo de etapa (5.3) requiere computar distancias entre estados predichos y de referencia. Considerando que el camino a seguir está descrito por segmentos definidos por *waypoints*, una forma de encontrar esos estados de referencia sería proyectando cada posición predicha sobre el segmento más cercano para obtener  $x^r$  e  $y^r$  y computando luego  $\theta^r$  y  $\phi^r$  a partir de dichas posiciones proyectadas, tomando pares adyacentes. Hay que notar que haciendo esto, se asociaría a cada estado predicho de cada trayectoria de entrada admisible un estado de referencia en principio diferente. Evidentemente esto involucraría una muy elevada carga computacional.

Otro enfoque sería directamente encontrar el *waypoint* más cercano a la posición medida actual y asociarlo con la misma, evitando así tener que calcular proyecciones. Los *waypoints* sucesivos serían los puntos de referencia para las posiciones predichas sucesivas y, al igual que antes,  $\theta^r$  y  $\phi^r$  podrían ser computados considerando puntos de referencia aledaños. En este caso, todos los estados predichos en cierto instante de tiempo del horizonte de predicción tendrían el mismo estado de referencia para todas las trayectorias de entrada admisibles. A pesar de que este método es mucho más simple y rápido, en verdad no funciona como se esperaba, especialmente cuando el robot está relativamente cerca del camino de referencia.

Una idea a medio camino entre las mencionadas, que es más rápida que la primera y permite obtener un mejor desempeño del controlador que la segunda, consiste en calcular “nuevas” posiciones de referencia sobre los segmentos originales de la siguiente manera. En cada instante de control, se obtiene un primer punto  $p_{k|k}^r = [x_{k|k}^r, y_{k|k}^r]^T$  proyectando la posición medida actual en el segmento de referencia más cercano, cuyos extremos son  $p_l^w$  y  $p_{l+1}^w$ . Esta primera posición es luego usada para interpolar y encontrar las posiciones de referencia sucesivas  $p_{k+i|k}^r$  en los segmentos subsiguientes de manera que la Ecuación (5.5) se satisfaga.

$$\frac{\|p_{k|k}^r - p_l^w\|}{\|p_{l+1}^w - p_l^w\|} = \frac{\|p_{k+i|k}^r - p_{l+i}^w\|}{\|p_{l+i+1}^w - p_{l+i}^w\|}, \quad (5.5)$$

donde  $i \in \mathbb{Z}_{1:H_p}$ .

Este procedimiento es ilustrado en la Figura 5.3. Los *waypoints* se muestran en gris y los segmentos definidos por ellos están representados con línea discontinua. Las posiciones de referencia calculadas están en rojo.

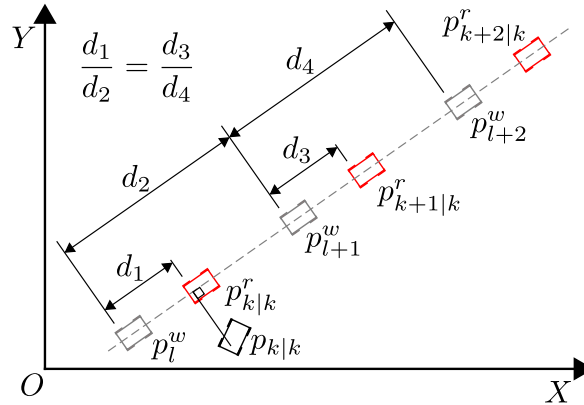


Figura 5.3: Cálculo de la referencia basado en proyección e interpolación.

Una vez que las posiciones de referencia ya han sido calculadas, sus correspondientes velocidades lineales pueden ser computadas considerando las distancias entre posiciones de referencia consecutivas y un tiempo de muestreo  $\Delta t = 0.2$  s. Cuando se sigue una curva o si el perfil de velocidad lineal cambia, estas velocidades de referencia también se modifican. Con respecto a las orientaciones de referencia  $\theta_{k+i|k}^r$ , estas pueden obtenerse de los ángulos de los segmentos definidos por  $p_{k+i|k}^r$  y  $p_{k+i+1|k}^r$ . Una idea similar puede ser aplicada para encontrar referencias del ángulo del sistema de dirección  $\phi_{k+i|k}^r$  basadas en  $\theta_{k+i|k}^r$  y  $\theta_{k+i+1|k}^r$ . Es importante notar que, como se explicó para el segundo enfoque presentado en el segundo párrafo de esta subsección, en este caso todos los estados predichos para cierta etapa  $i$  del horizonte de predicción están asociados con el mismo estado de referencia para todas las trayectorias de estado admisibles.

Si bien el procedimiento presentado parece llevar asociada cierta carga computacional, se debe resaltar que solo es necesario calcular los estados de referencia una vez por instante de control y luego son usados para todas las trayectorias de estado predichas. De esta forma se evita mucho cómputo adicional que se haría si, por ejemplo, cada estado predicho requiriera ser proyectado en el correspondiente segmento más cercano. Además, al haber una asociación temporal entre los estados predichos y los de referencia, los costos MPC pueden ser evaluados con una simple y eficiente implementación SIMD como se mencionó para el cómputo de las simulaciones.

## 5.4. Experimentos

Los resultados teóricos presentados en la Sección 4.7 garantizan estabilidad práctica cuando no hay perturbaciones de ningún tipo por lo que esa no es una condición particularmente interesante para simular y probar cómo se desempeña el controlador.

Un escenario más realista debería incluir no idealidades tales como ruido de medición y diferencias entre planta y modelo. Teniendo esto en cuenta, esta sección describe las simulaciones realizadas que consideraron esos tipos de perturbaciones. Primero presentamos el modelo usado de la planta y los experimentos hechos y luego, los resultados y una discusión sobre los mismos. Para analizar los resultados en el contexto de las soluciones existentes, comparamos el desempeño de nuestro esquema con el de otra estrategia MPC del estado del arte. Todos los modelos y *scripts* requeridos para ejecutar estas simulaciones están disponibles en [https://github.com/CIFASIS/stabilizing\\_fcs\\_mpc\\_application](https://github.com/CIFASIS/stabilizing_fcs_mpc_application).

### 5.4.1. Modelo Realista de Planta

El modelo cinemático aumentado con velocidad de dirección dado por la Ecuación (5.1) es adecuado para el diseño y la operación interna de un controlador MPC. Sin embargo, es demasiado simple para ser utilizado también como planta en una simulación realista.

Dada la inercia que cada componente de un vehículo posee, no es posible imponerle una velocidad lineal al robot. De hecho, se necesita en primer lugar acelerar las ruedas ejerciendo un par de torsión sobre las mismas y es luego la fricción con el piso aquello que permite que el vehículo se desplace. La planta usada en nuestras simulaciones es un modelo dinámico que tiene en cuenta estos aspectos. Como se representa en la Figura 5.4, el robot tiene masa  $M$  e inercia  $J$  con respecto al eje vertical que pasa por su centro de masa indicado por el punto C. Las ruedas tienen inercia  $J_w$  en relación con los ejes perpendiculares a ellas y hay deslizamiento entre las mismas y el piso. Hay que notar que el suelo del campo presenta poca adherencia y es bastante irregular por lo que es importante considerar este último fenómeno. Las velocidades de deslizamiento de las ruedas, en función del coeficiente de fricción  $B_w$ , generan fuerzas proporcionales en el vehículo que lo aceleran. Estas fuerzas también producen pares de torsión, dependientes de las distancias  $L_r$ ,  $L_f$  y  $L_w$ , que hacen rotar al robot respecto del eje perpendicular al piso. Los parámetros  $R$  y  $B_f$  representan el radio de las ruedas y la fricción en sus rodamientos, respectivamente.

Debido a la dinámica explicada, para desacoplar y simplificar el diseño del sistema de control, estas plataformas robóticas tipo auto suelen tener controladores de bajo nivel que regulan la velocidad lineal. Dichos controladores comandan actuadores para seguir las referencias recibidas desde el mencionado sistema de control de mayor jerarquía. Nuestro modelo tiene en cuenta la presencia de estos *drivers*. Específicamente, para

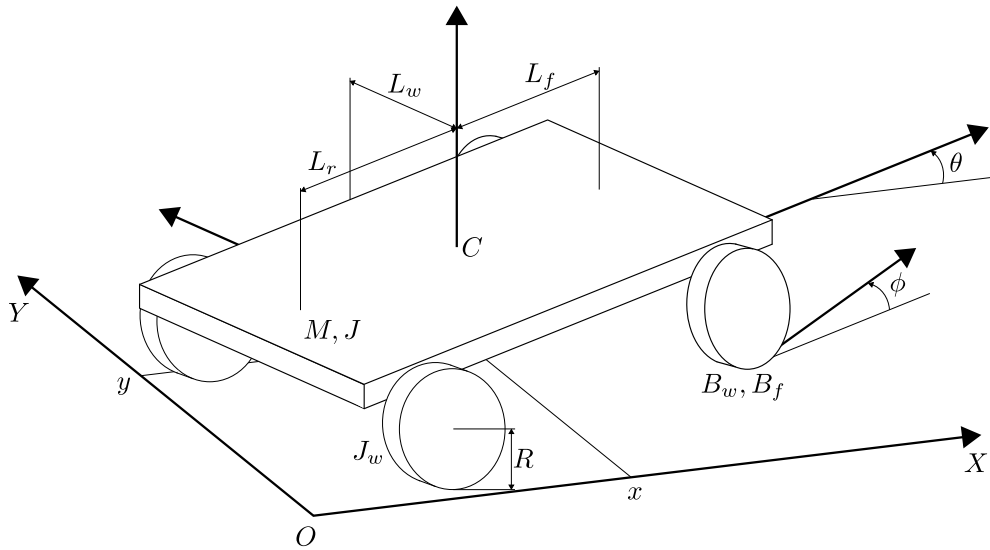


Figura 5.4: Esquema del modelo dinámico del vehículo usado como planta en las simulaciones.

cada rueda y su motor, se ha incluido un PI como el correspondiente controlador de bajo nivel.

Para el sistema de dirección, como la tasa de variación de su ángulo es en general baja, no se tuvo en cuenta un controlador de bajo nivel. En este caso, es suficientemente realista asumir que su velocidad angular puede ser impuesta.

Con todas estas consideraciones, el orden del modelo de la planta resultante es 15. Como puede verse, comparando con el sistema (5.1) cuyo orden es 4, hay significativas diferencias entre planta y modelo. Esto es importante para poner a prueba la robustez y el desempeño de los controladores MPC.

### 5.4.2. Descripción de los Experimentos

Para comparar contra nuestra estrategia estabilizante FCS-MPC consideramos un esquema MPC no lineal al que nos referiremos como NMPC. Este otro controlador es similar al enfoque propuesto porque usa el mismo sistema no lineal como su modelo interno. Además, optimiza la misma variable de entrada que es la velocidad angular de la dirección ya que, al igual que para nuestra estrategia, se asume que la velocidad lineal es regulada por otro controlador más simple. En consecuencia, lo que este esquema NMPC hace es también seguimiento de camino, sin una parametrización temporal. La principal diferencia entre los dos enfoques es el conjunto de entrada y cómo esto determina la forma en la que las correspondientes optimizaciones se resuelven. NMPC calcula la acción de control en el conjunto infinito no numerable  $[-\omega_f, \omega_f]$  en contraposición a

lo que se asumió para el controlador FCS-MPC que es que  $\omega \in \{-\omega_f, 0, \omega_f\}$ . Otra diferencia importante es el hecho de que nuestra formulación incluye restricciones para garantizar estabilidad mientras que la de NMPC no.

Usando el modelo dinámico presentado en la Subsección 5.4.1 como planta, el objetivo de control era seguir tres trayectorias, cada una compuesta de un tramo recto y cierto tipo de curva. Se consideraron los tres giros de cabecera diferentes mostrados en la Figura 5.5, a los que nos referiremos como  $\Omega$ ,  $\Pi$  y  $T$  [88]. Estas trayectorias fueron obtenidas con (5.1), teniendo en cuenta los valores numéricos dados en la Sección 5.2 para los parámetros y la velocidad lineal de 5 km/h para las partes rectas (eventualmente reducida en las curvas).

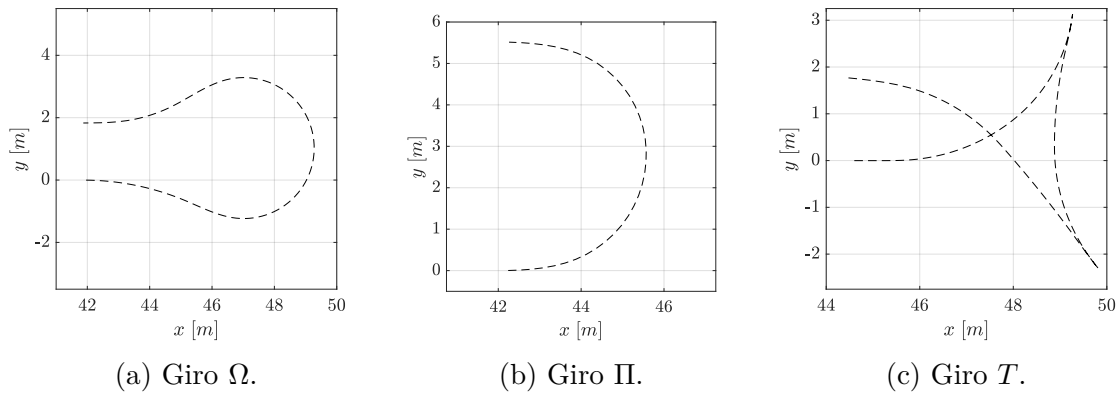


Figura 5.5: Giros de cabecera de referencia usados en las trayectorias.

En las mediciones de las variables de estado  $x$ ,  $y$  y  $\theta$  se añadió ruido de una distribución normal truncada acotada por arriba y por abajo por  $\pm 0.1$ , con media nula y varianza  $\sigma^2 = 9 \cdot 10^{-4}$ . Para cada coordenada cartesiana  $x$  e  $y$  esto representa una desviación estándar de 3 cm y un error máximo de 10 cm, lo cual se asemeja a lo que podría obtenerse con un sistema satelital de navegación global basado en cinemática de tiempo real (RTK-GNSS). Con respecto al ángulo de la dirección  $\phi$ , no agregamos ruido a la medición de tal variable de estado porque en la realidad puede ser fácilmente medida con un codificador rotatorio absoluto, logrando errores despreciables.

Los experimentos fueron hechos en el entorno de simulación Simulink de MATLAB. La función de costo usada para el controlador NMPC fue (5.3), es decir, la misma que luego se modifica para nuestra estrategia estabilizante FCS-MPC. Debe notarse que las entradas de control  $v$  y  $\omega$  no fueron penalizadas. El tiempo de muestreo se definió de  $\Delta t = 0.2$  s, igual al usado para generar los *waypoints*. Para los horizontes, realizamos un análisis exhaustivo teniendo en cuenta cada combinación posible siendo  $H_c \in \mathbb{Z}_{6:10}$  y

$H_p \in \mathbb{Z}_{10:24}$ . El horizonte de control fue elegido de esa forma porque  $\Omega_I$  es un conjunto interior de control en 6 pasos y para mantener acotado el costo computacional de modo que la estrategia FCS-MPC pueda funcionar en tiempo real si se implementa en la práctica<sup>3</sup>. El horizonte de predicción se definió de manera que sea siempre mayor o igual que  $H_c$  y también para limitar la carga numérica. La acción de control por defecto seleccionada fue  $\check{u} = 0$ , como se indicó en la Subsección 5.3.1. Finalmente, las condiciones iniciales involucraron errores de 0.0175 rad en  $\theta$  y 0.05 m en  $y$ .

### 5.4.3. Resultados

La Figura 5.6 muestra algunas de las trayectorias con menos error obtenidas para cada controlador usando el mismo par de horizontes de control y predicción, seleccionados de todas las posibles combinaciones. En particular, estos fueron  $H_c = 9$  y  $H_p = 23$  para estas simulaciones. Los gráficos fueron realizados con la misma escala en ambos ejes por lo que las evoluciones están representadas como se verían en la realidad. Solo se ha mostrado por completo, con su tramo recto, la trayectoria con el giro  $\Omega$ . Esto es en la Subfigura 5.6a, en donde además se encuentra la leyenda con los colores correspondientes a cada curva. Las otras gráficas de la Figura 5.6 presentan vistas más detalladas de los giros de cabecera.

Para comparar el desempeño de los controladores se utilizaron dos índices. El primero de ellos fue la raíz del error cuadrático medio (RMSE) entre las posiciones obtenidas con el controlador y el camino de referencia. Esto se hizo considerando tanto el seguimiento de los surcos en línea recta como los giros de cabecera. Por más que no haya plantas que puedan ser dañadas por el robot en las curvas, el espacio para maniobrar es limitado así que es importante mantener los errores acotados también allí. El segundo índice usado fue el porcentaje de distancia recorrida por fuera del margen de 10 cm a cada lado del camino de referencia. Esto solo se hizo para los tramos rectos donde se siguen las hileras de cultivo, es decir que a diferencia del otro indicador, las curvas no fueron tenidas en cuenta. Un tercer índice usado, solo para evaluar la estrategia FCS-MPC, fue el porcentaje de estados medidos para los cuales no había solución factible para el problema de optimización (4.36). De acuerdo con lo explicado en la Subsección 5.3.2, en estos casos el problema de control óptimo a resolver era el (5.4).

Con el fin de analizar la influencia del uso de distintos horizontes, las Figuras 5.7 y 5.8 muestran algunos mapas de calor. Cada número allí presentado es un promedio de

<sup>3</sup>Consideramos que puede correr en tiempo real si esto es factible con una implementación en MATLAB.

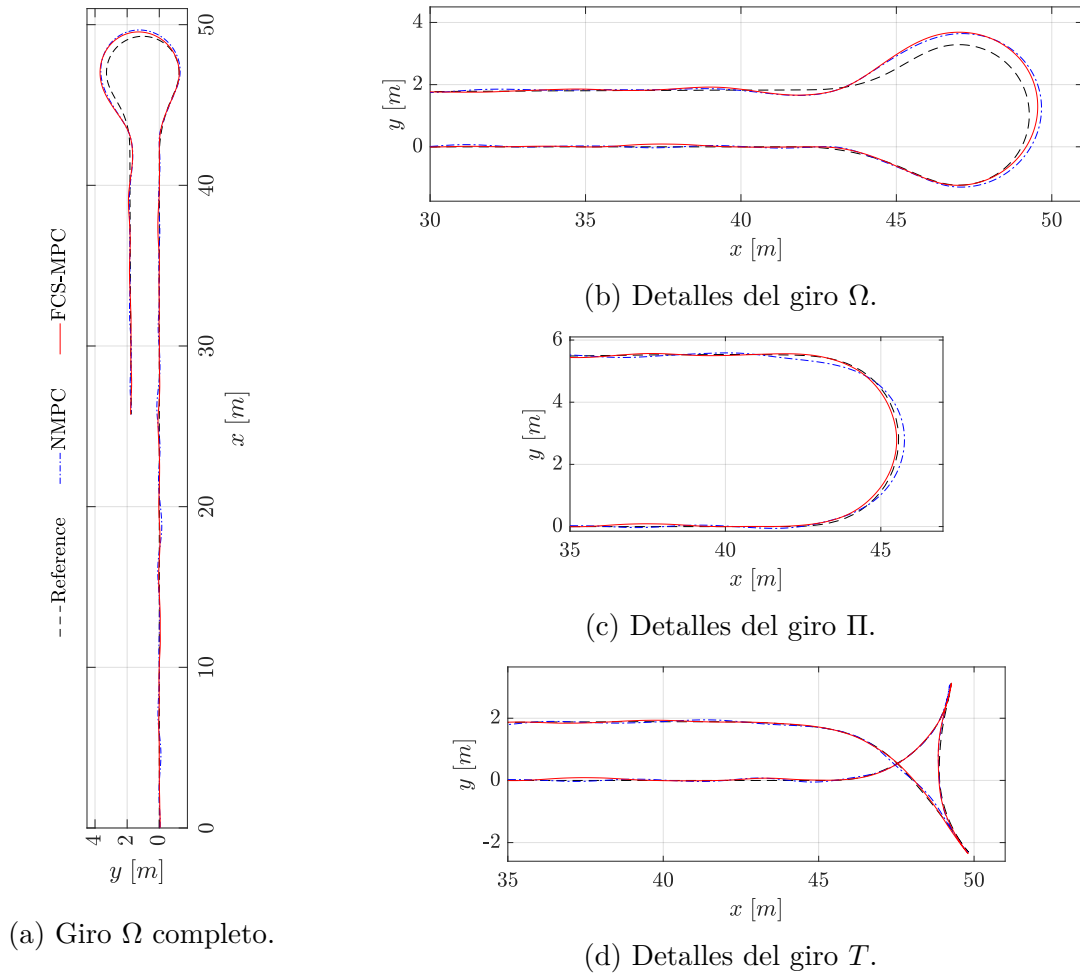


Figura 5.6: Trayectorias obtenidas para cada referencia.

los resultados obtenidos de diez simulaciones para cada par de horizontes, computadas con generadores de ruido de medición con diferentes semillas. La Figura 5.7 denota cómo los horizontes de predicción  $H_p$  más grandes contribuyen a reducir el RMSE para ambas estrategias de control, en particular para la trayectoria con el giro  $\Omega$ . La Subfigura 5.7a muestra que la evolución del RMSE para FCS-MPC es más gradual. En el caso de NMPC (ver Subfigura 5.7b) hay un patrón similar pero con valores más altos (peores) y un cambio más abrupto para horizontes de predicción pequeños. No se presentan todos los mapas de calor promediados por razones de espacio pero los mismos pueden ser obtenidos con los *scripts* del repositorio de Github dado previamente. En la Figura 5.8 se muestra el mapa de calor del porcentaje de no factibilidad para FCS-MPC en la misma trayectoria. Como puede verse, hay una tendencia a que los resultados mejoren (sean más bajos) no solo cuando  $H_p$  se incrementa sino también cuando se

considera un horizonte de control  $H_c$  más grande. Vale la pena aclarar que para el controlador NMPC siempre fue factible la optimización. Claramente, el hecho de que este enfoque no use restricciones relacionadas con la estabilidad ayudó a posibilitar eso.

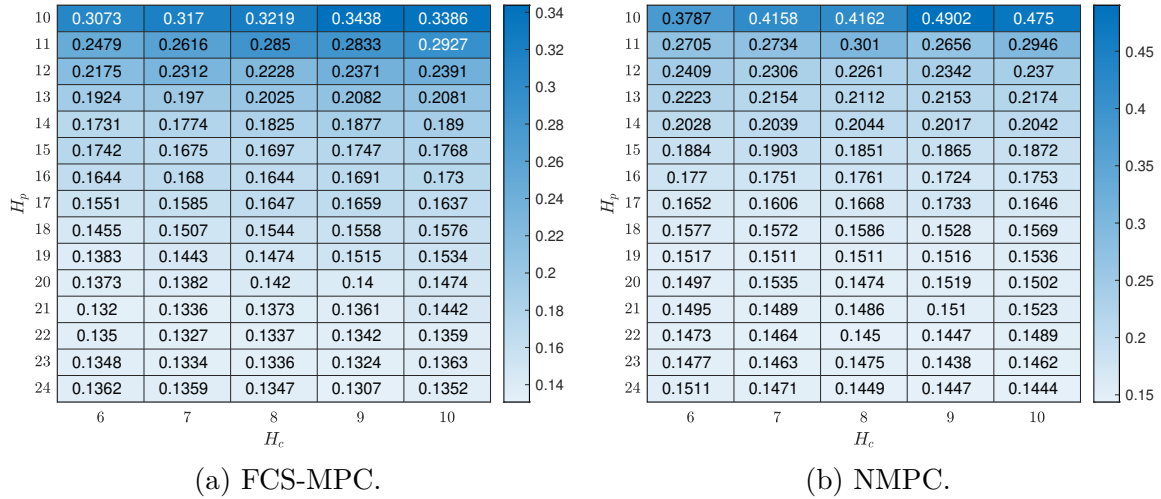


Figura 5.7: Mapas de calor promediados de RMSE en trayectoria con giro  $\Omega$ .

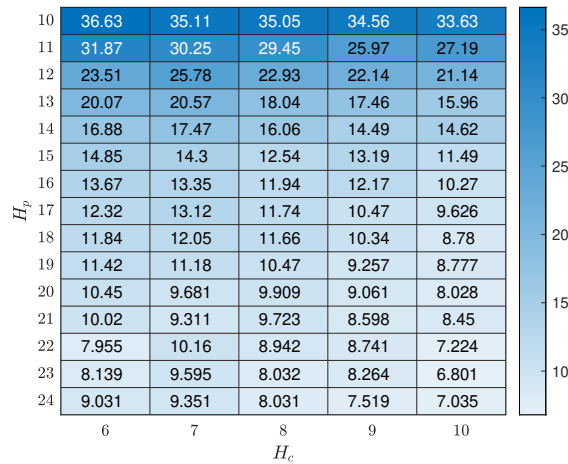


Figura 5.8: Mapa de calor promediado de porcentaje de estados no factibles para FCS-MPC en trayectoria con giro  $\Omega$ .

Finalmente la Tabla 5.1 reporta los mejores valores obtenidos para los índices considerados. Estos son los resultados numéricamente más bajos que pueden verse en los mapas de calor promediados mencionados anteriormente (basados en múltiples simulaciones). Nuestra estrategia de FCS-MPC logra mejores indicadores que el controlador NMPC en todos los casos.

Tabla 5.1: Mejores (más bajos) índices obtenidos para cada controlador en promedio. Los resultados en negrita son los más pequeños entre los controladores.

Control	Fuera márgenes 10 cm [%]			RMSE [m]			No factibilidad [%]		
	Giro $\Omega$	Giro $\Pi$	Giro $T$	Giro $\Omega$	Giro $\Pi$	Giro $T$	Giro $\Omega$	Giro $\Pi$	Giro $T$
FCS-MPC	<b>0.377</b>	<b>0.518</b>	<b>0.0994</b>	<b>0.131</b>	<b>0.0420</b>	<b>0.0305</b>	6.80	4.98	5.18
NMPC	5.67	5.43	4.11	0.144	0.0561	0.0466	–	–	–

#### 5.4.4. Discusión de lo Observado

Con respecto al desempeño, en términos de RMSE y porcentaje de distancia recorrida por fuera de los márgenes de 10 cm a cada lado del camino, el esquema FCS-MPC logró los mejores resultados en todas las trayectorias. Aunque esto sea antintuitivo dado que su entrada está restringida a pertenecer a un conjunto finito mientras que para NMPC puede variar en un continuo, esta diferencia es en realidad parte de las causas de lo observado. El problema subyacente es la robustez de estos controladores frente a perturbaciones. Lo que las simulaciones muestran es que NMPC se ve mucho más afectado por las perturbaciones que FCS-MPC en general. Se realizaron experimentos sin ruido de medición (pero manteniendo las discrepancias entre planta y modelo) y el desempeño obtenido con NMPC mejoró significativamente. Esto se relaciona con el hecho de que esta estrategia puede ajustar con mucha más resolución su acción de control y es capaz de distinguir mejor entre diferentes secuencias de entrada por su función de costo de etapa no escalada. Cuando el estado del robot es perfectamente conocido, estas características son deseables. Sin embargo, si ese no es el caso, dichas propiedades no son útiles y pueden incluso conducir a peores resultados. Por otro lado, como los experimentos numéricos mostraron, nuestra estrategia que no tiene en cuenta perturbaciones de ningún tipo en su formulación es más robusta porque usa un alfabeto de control finito y una función de costo de etapa modificada que genéricamente reduce la penalización en el conjunto objetivo.

En relación con la no factibilidad de nuestro esquema, esta se debe a que el conjunto interior se computó sin tener en cuenta las discrepancias planta-modelo y la presencia de ruido. Sin embargo, debemos enfatizar que esta no factibilidad corresponde a los puntos para los cuales el algoritmo no puede encontrar una trayectoria de entrada que lleve al estado al conjunto interior en la ventana temporal del horizonte de control. En ese caso, el controlador simplemente usa una secuencia de entradas que minimice los costos relajando las restricciones como se explica en la Subsección 5.3.2. En consecuencia, en la práctica, el algoritmo se mantiene funcionando pero no puede asegurar que la

trayectoria continuará dentro de los márgenes de 10 cm. En cualquier caso, el porcentaje de distancia navegada por fuera de esos márgenes es casi despreciable (más de un orden de magnitud por debajo del 5%).

Los resultados de probar distintas combinaciones de horizontes de predicción y control se encuentran básicamente sintetizados en las Figuras 5.7 y 5.8. Para ambos controladores se observó la misma tendencia, con la diferencia de que para NMPC los valores de los índices resultaron peores. Como se muestra por ejemplo en la Figura 5.7, aumentar  $H_p$ , y específicamente hacerlo más grande que  $H_c$ , es importante para reducir el RMSE en la trayectoria con el giro  $\Omega$ . Esto también ayuda a disminuir el porcentaje de distancia navegada por fuera de los márgenes de 10 cm. Incrementar  $H_p$  permite al robot seguir mejor la curva y, por lo tanto, salir de la misma más cerca y con una mejor orientación respecto del camino, haciendo que sea posible reducir los errores entre la referencia y las posiciones obtenidas. Del mismo modo, cuando  $H_p$  se reduce, aparecen oscilaciones al salir del giro que ocasionan valores altos de RMSE. Sumado a esto, como puede verse en la Figura 5.8, incrementar ambos horizontes claramente reduce el porcentaje de estados medidos para los cuales no es factible el problema de optimización (4.36). Esto era esperado, no solo por la explicación previa en relación con salir de las curvas con buena orientación sino también porque horizontes de control más altos implican más oportunidades para satisfacer la restricción (4.40), que es el principal obstáculo para lograr factibilidad. Este comportamiento ligado al aumento de  $H_c$  se observó para todas las trayectorias. Teniendo en cuenta lo mencionado, lo que las Figuras 5.7 y 5.8 muestran no es solo que incrementar los horizontes es útil sino también la importancia de la extensión teórica propuesta en la Sección 4.7.

Con respecto a la carga computacional, vale la pena mencionar que los tiempos de procesamiento requeridos por nuestra estrategia no imponen una limitación para esta aplicación. Una implementación en MATLAB, con horizontes  $H_c = 9$  y  $H_p = 24$ , requiere aproximadamente 100 ms para calcular la acción de control, lo cual representa la mitad del tiempo disponible considerando que el período de muestreo se definió en 200 ms. A su vez, otra implementación de un enfoque similar [68] en una placa Jetson TX2 de Nvidia, que es una plataforma embebida con GPU, permitió ejecutar el control en tiempo real con  $H_c = 15$  y  $H_p = 25$ . Por su parte, NMPC mostró un desempeño muy parecido con respecto a FCS-MPC en relación con el tiempo de cómputo en MATLAB.

Más allá del esquema NMPC específico presentado en este estudio, comparando la propuesta de FCS-MPC con controladores MPC más tradicionales, lo que se destaca de nuestro enfoque es la facilidad con la cual se puede resolver el problema de optimización asociado, teniendo en cuenta que se utiliza un modelo interno no lineal y que esto no

compromete las garantías de estabilidad. Esta simplicidad, que aparece por la reducida resolución en la acción de control, hace que la implementación de nuestra estrategia sea más directa que las de otras que se basan en algoritmos de punto interior o conjuntos activos [4]. Además, es importante destacar lo fácil que es considerar restricciones en el estado y la entrada.

Un último aspecto a comentar es sobre la oscilación (*chattering*) en la acción de control. Dado que la estrategia FCS-MPC tiene que elegir una entrada de un conjunto compuesto por tan solo tres elementos, el lector podría pensar que nuestro controlador involucra cambios rápidos y continuos entre  $\pm\omega_f$ . Si bien es posible ver ciertas oscilaciones de este tipo en la velocidad angular de la dirección, este comportamiento no es en verdad muy pronunciado y es similar al observado con el enfoque NMPC, que puede variar su entrada en un intervalo real. Considerando un robot mecánicamente bien diseñado, con velocidades angulares de la dirección relativamente bajas y un período de muestreo no demasiado corto, estas oscilaciones no deberían ser un problema al accionar el correspondiente motor.

## 5.5. Conclusiones

La versión más general de la estrategia de control propuesta en esta tesis, que permite usar horizontes de control y predicción diferentes, se utilizó para diseñar un controlador estabilizante para un robot agrícola tipo auto en una aplicación de seguimiento de camino. Una característica distintiva de la propuesta desarrollada es que se asume que la entrada a aplicar está en un conjunto finito compuesto de tan solo tres elementos. Aunque esto significa una reducción considerable en la resolución de la acción de control, simplifica la búsqueda de solución del problema de optimización incluso para sistemas no lineales y facilita la consideración de restricciones en el estado y/o la entrada.

Se realizaron simulaciones realistas, que incluyeron ruido de medición y considerables discrepancias entre planta y modelo, con diferentes caminos a seguir. Estas pruebas sirvieron para analizar el desempeño del controlador diseñado y compararlo con otro enfoque MPC no lineal, que no tiene la limitación de un alfabeto finito de entrada. Se constató que a pesar de considerar un conjunto finito de acciones de control, nuestra estrategia de FCS-MPC funcionó bien y fue capaz de lograr mejor desempeño y mayor robustez que el controlador NMPC. Esto va más allá del hecho de que bajo ciertas hipótesis, nuestra propuesta puede brindar garantías de estabilidad mientras que la de NMPC no. Las simulaciones también mostraron los beneficios de usar diferentes valores

para los horizontes de control y predicción, específicamente con  $H_p > H_c$ , cuando se busca un mejor desempeño en la aplicación agrícola abordada.

# Capítulo 6

## Conclusiones Generales y Trabajo Futuro

Como cierre de esta tesis, este último capítulo presenta las conclusiones generales de lo realizado y posibles líneas de trabajo futuro sobre las cuales se podría seguir investigando.

### 6.1. Conclusiones Generales

El punto de partida para todo lo propuesto y desarrollado a nivel teórico en esta investigación fue la conceptualización de los conjuntos interior y exterior,  $\Omega_I$  y  $\Omega_O$  respectivamente, como alternativa a los invariantes. Si bien dicho par de regiones puede verse como una aproximación a estos últimos, es más que eso ya que existe una condición matemática que los define que esencialmente establece que si se está en el conjunto de adentro entonces se puede retornar al mismo en a lo sumo una cantidad fija y finita de pasos, sin salirse del de afuera. Debe notarse que esta propiedad es más débil que la invariancia y en esto radica la principal ventaja de las regiones interior-exterior. Esta relajación permite que los conjuntos sean más simples lo cual es particularmente interesante al considerar sistemas más generales que los lineales, para los que usualmente es imposible hallar regiones invariantes factibles de ser usadas en la práctica.

Habiéndose definido los conjuntos interior y exterior, lo que se hizo posteriormente en el Capítulo 3 fue probar que el  $\Omega_I^{\max}$  es el máximo RCIS contenido en  $\Omega_O$ . Se llega entonces a que entre un  $\Omega_I$  cualquiera (no necesariamente el máximo) y  $\Omega_O$  existe siempre un invariante, siendo este el vínculo entre estas tres regiones. En dicho capítulo

también se presentaron resultados relacionados con la construcción y la caracterización de los conjuntos interiores, basados en procedimientos recursivos.

Posteriormente se abordó la utilización del par interior-exterior en el contexto del control propiamente dicho. Se propuso un esquema MPC con estas regiones y se demostró que al utilizarlo, el sistema a lazo cerrado logra la estabilidad práctica del conjunto exterior, es decir que el estado converge en tiempo finito al mismo y, a partir de ese momento, queda para siempre allí. Para implementar nuestra estrategia se requiere partir de una función de costo de etapa  $\tilde{L}(x, u)$  arbitraria y de una región objetivo  $\Omega_O$  con un correspondiente conjunto interior de control en  $N$  pasos  $\Omega_I$ . Luego se construye una nueva función de costo de etapa que se reduce dentro de  $\Omega_O$  y se vuelve más grande a medida que se incrementa el índice de etapa. Finalmente se plantea un problema de control óptimo con la restricción de que el estado predicho pase por  $\Omega_I$  en algún instante del horizonte de predicción que no necesariamente debe ser el último. Como puede notarse, esta condición es más relajada que la restricción terminal clásica de pertenencia a un invariante empleada en las formulaciones MPC estabilizantes más comunes.

Hay varios aspectos que pueden mencionarse como ventajas de la estrategia desarrollada. En primer lugar, gracias a que las hipótesis consideradas son en general poco restrictivas, los resultados a los que se arribó son válidos para clases generales de sistemas. En particular, como no se requieren conjuntos invariantes, nuestro esquema resulta de particular interés para sistemas conmutados y no lineales, por ejemplo. Por otra parte, el hecho de que la estrategia propuesta pueda continuar controlando dentro de la región objetivo sin depender de otro controlador específico diseñado a tal fin como ocurre con los esquemas de modo dual, es también algo destacable. Por último, gracias a la extensión teórica desarrollada al final del Capítulo 4, podemos también decir que el enfoque MPC propuesto permite utilizar horizontes de control y predicción distintos, sin que esto afecte ninguna de las propiedades previamente mencionadas.

Si bien se mostraron ejemplos ilustrativos de lo planteado a medida que se desarrollaban las contribuciones teóricas, el Capítulo 5 se destinó íntegramente a la presentación de una aplicación práctica y concreta de nuestra estrategia de control. El problema específico a resolver fue el de seguimiento de camino con un robot agrícola tipo auto. Por más que todos los experimentos se hicieron en el entorno Simulink de MATLAB, se abordaron en detalle los aspectos de la implementación y se utilizó un modelo detallado de la planta para que las simulaciones fueran realistas. Las pruebas involucraron un estudio exhaustivo de combinaciones de horizontes de control y predicción y una comparación contra otra estrategia de control basada en MPC no lineal. De

los resultados obtenidos puede decirse que nuestra estrategia mostró mejor desempeño y mayor robustez. Esto es muy notable si tenemos en cuenta que la acción de control de la misma se consideró restringida a pertenecer a un conjunto finito de solo tres elementos mientras que al otro controlador NMPC se le permitió seleccionar su entrada de un conjunto infinito no numerable. A pesar de que nuestro esquema FCS-MPC utiliza un alfabeto finito, esto facilita la resolución del problema de optimización y la contemplación de restricciones en el estado y la entrada aun siendo el sistema no lineal. Vale la pena también mencionar que las simulaciones mostraron lo ventajoso de emplear horizontes de control y predicción diferentes para obtener un mejor desempeño.

## 6.2. Trabajo Futuro

Una primera línea de interés para continuar con la investigación es el diseño de procedimientos sistemáticos para computar conjuntos interiores de control. En el Capítulo 3 se dieron algunos resultados y consideraciones en relación con esto pero aún hay mucho trabajo para hacer en este sentido. Sería interesante desarrollar una biblioteca para resolver esta cuestión, comenzando con casos particulares más simples como el de entrada finita, por ejemplo, para luego generalizar a sistemas con otras características. A su vez, si bien desde la concepción de estas ideas se planteó al conjunto exterior como la región objetivo y por lo tanto, aquella que ya está disponible, también valdría la pena considerar el problema más genérico de, dados dos elementos de la terna  $\Omega_O$ ,  $\Omega_I$  y  $N$ , hallar el restante de forma sistemática. Esto sería de interés cuando se sabe que el factor limitante en la formulación del problema no es precisamente el conjunto objetivo sino la capacidad de cómputo o las posibilidades de restringir el problema de control óptimo para que la trayectoria estimada pase por una cierta región.

Con respecto a la estrategia de control MPC propuesta en el Capítulo 4, algo pendiente de estudiar con mayor detalle es la resolución del problema de optimización asociado. Al presentarlo, considerando la restricción particular que posee su formulación se menciona la posibilidad de plantear la implementación numérica mediante la resolución de  $N$  problemas de optimización distintos con restricciones independientes. Si bien esto es factible, sería interesante buscar formas más eficientes de abordarlo.

Otra línea de trabajo posible en relación con nuestro esquema de control sería la extensión del mismo al caso robusto. A pesar de haber visto para la aplicación agrícola de seguimiento de camino que el esquema propuesto presenta cierta robustez a las discrepancias entre planta y modelo y al ruido de medición, el planteo teórico no

contempla actualmente ningún tipo de perturbación. Una primera forma de encarar esto podría ser entonces mediante la consideración de perturbaciones acotadas no evanescentes, que conllevarían a cambiar los CIS por RCIS en la formulación MPC. Otra idea para plantear esto sería considerando perturbaciones no acotadas caracterizadas por distribuciones de probabilidad. En este último caso habría que extender los conceptos de conjuntos invariantes probabilísticos y acotación final [89].

# Bibliografía

- [1] F. Blanchini and S. Miani, *Set-theoretic methods in control*. Birkhäuser, 2015.
- [2] F. Blanchini, “Set invariance in control,” *Automatica*, vol. 35, no. 11, pp. 1747–1767, 1999.
- [3] H. K. Khalil, *Nonlinear systems*, vol. 3. Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, 2002.
- [4] J. B. Rawlings, D. Q. Mayne, and M. Diehl, *Model predictive control: theory, computation, and design*, vol. 2. Nob Hill Publishing Madison, WI, 2017.
- [5] S. V. Rakovic and M. Baric, “Parameterized robust control invariant sets for linear systems: Theoretical advances and computational remarks,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 55, no. 7, pp. 1599–1614, 2010.
- [6] C. Liu, F. Tahir, and I. M. Jaimoukha, “Full-complexity polytopic robust control invariant sets for uncertain linear discrete-time systems,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 29, no. 11, pp. 3587–3605, 2019.
- [7] B. Decardi-Nelson and J. Liu, “Computing robust control invariant sets of constrained nonlinear systems: A graph algorithm approach,” *Computers & Chemical Engineering*, vol. 145, p. 107177, 2021.
- [8] J. M. Bravo, D. Limon, T. Alamo, and E. F. Camacho, “On the computation of invariant sets for constrained nonlinear systems: An interval arithmetic approach,” *Automatica*, vol. 41, no. 9, pp. 1583–1589, 2005.
- [9] Y. I. Lee, M. Cannon, and B. Kouvaritakis, “Extended invariance and its use in model predictive control,” *Automatica*, vol. 41, no. 12, pp. 2163–2169, 2005.
- [10] F. Blanchini and W. Ukovich, “Linear programming approach to the control of discrete-time periodic systems with uncertain inputs,” *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 78, no. 3, pp. 523–539, 1993.
- [11] Y. I. Lee, “Receding-horizon control for input constrained linear parameter-varying systems,” *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, vol. 151, pp. 547–553, September 2004.
- [12] Y. I. Lee and B. Kouvaritakis, “Constrained robust model predictive control based on periodic invariance,” *Automatica*, vol. 42, no. 12, pp. 2175–2181, 2006.

- 
- [13] M. Soyer, S. Oлару, K. Ampountolas, S. Scialanga, and Z. Fang, “Periodic set invariance as a tool for constrained reference tracking,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 53, no. 2, pp. 6905–6910, 2020.
- [14] M. Soyer, S. Oлару, and Z. Fang, “From constraint satisfactions to periodic positive invariance for discrete-time systems,” in *59th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pp. 4547–4552, IEEE, 2020.
- [15] N. Athanasopoulos, A. I. Doban, and M. Lazar, “On constrained stabilization of discrete-time linear systems,” in *21st Mediterranean Conference on Control and Automation*, pp. 830–839, IEEE, 2013.
- [16] M. Lazar, A. I. Doban, and N. Athanasopoulos, “On stability analysis of discrete-time homogeneous dynamics,” in *17th International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC)*, pp. 297–305, IEEE, 2013.
- [17] M. Dehghan and C.-J. Ong, “Discrete-time switching linear system with constraints: Characterization and computation of invariant sets under dwell-time consideration,” *Automatica*, vol. 48, no. 5, pp. 964–969, 2012.
- [18] W. Lombardi, S. Oлару, G. Bitsoris, and S.-I. Niculescu, “Cyclic invariance for discrete time-delay systems,” *Automatica*, vol. 48, no. 10, pp. 2730–2733, 2012.
- [19] G. Bitsoris and E. Gravalou, “Design techniques for the control of discrete-time systems subject to state and control constraints,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, no. 5, pp. 1057–1061, 1999.
- [20] F. Blanchini, F. Mesquine, and S. Miani, “Constrained stabilization with an assigned initial condition set,” *International Journal of Control*, vol. 62, no. 3, pp. 601–617, 1995.
- [21] D. Q. Mayne, J. B. Rawlings, C. V. Rao, and P. O. M. Scokaert, “Constrained model predictive control: Stability and optimality,” *Automatica*, vol. 36, no. 6, pp. 789–814, 2000.
- [22] A. Anderson, A. H. González, A. Ferramosca, and E. Kofman, “Finite-time convergence results in robust model predictive control,” *Optimal Control Applications and Methods*, vol. 39, no. 5, pp. 1627–1637, 2018.
- [23] M. Kögel and R. Findeisen, “Stability of NMPC with cyclic horizons,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 46, no. 23, pp. 809–814, 2013.
- [24] P. O. M. Scokaert, D. Q. Mayne, and J. B. Rawlings, “Suboptimal model predictive control (feasibility implies stability),” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, no. 3, pp. 648–654, 1999.
- [25] B. Picasso, S. Pancanti, A. Bemporad, and A. Bicchi, “Receding-horizon control of LTI systems with quantized inputs,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 36, no. 6, pp. 259–264, 2003. IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems 2003, St Malo, Brittany, France, 16-18 June 2003.

- 
- [26] R. P. Aguilera and D. E. Quevedo, “On the stability of MPC with a finite input alphabet,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 44, no. 1, pp. 7975–7980, 2011. 18th IFAC World Congress.
- [27] E. D. Sontag, “Smooth stabilization implies coprime factorization,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 34, no. 4, pp. 435–443, 1989.
- [28] M. V. Kothare, V. Balakrishnan, and M. Morari, “Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities,” *Automatica*, vol. 32, no. 10, pp. 1361–1379, 1996.
- [29] W.-J. Mao, “Robust stabilization of uncertain time-varying discrete systems and comments on “an improved approach for constrained robust model predictive control”,” *Automatica*, vol. 39, no. 6, pp. 1109–1112, 2003.
- [30] J. Hu and B. Ding, “A periodic approach to dynamic output feedback MPC for quasi-LPV model,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 66, no. 5, pp. 2257–2264, 2021.
- [31] M. Soyer, S. Olaru, and Z. Fang, “A novel motion cueing algorithm based on real-time optimization and periodic invariant sets,” in *2020 IEEE Conference on Control Technology and Applications (CCTA)*, pp. 19–24, IEEE, 2020.
- [32] C. Böhm, S. Yu, and F. Allgöwer, “Predictive control for constrained discrete-time periodic systems using a time-varying terminal region,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 42, no. 13, pp. 537–542, 2009. 14th IFAC Conference on Methods and Models in Automation and Robotics.
- [33] R. Gondhalekar and C. N. Jones, “MPC of constrained discrete-time linear periodic systems – a framework for asynchronous control: Strong feasibility, stability and optimality via periodic invariance,” *Automatica*, vol. 47, no. 2, pp. 326–333, 2011.
- [34] L. Grüne, “Economic receding horizon control without terminal constraints,” *Automatica*, vol. 49, no. 3, pp. 725–734, 2013.
- [35] D. Limon, T. Alamo, F. Salas, and E. Camacho, “On the stability of constrained MPC without terminal constraint,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 51, no. 5, pp. 832–836, 2006.
- [36] D. Limon, A. Ferramosca, I. Alvarado, and T. Alamo, “Nonlinear MPC for tracking piece-wise constant reference signals,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 63, no. 11, pp. 3735–3750, 2018.
- [37] S. L. de Oliveira Kothare and M. Morari, “Contractive model predictive control for constrained nonlinear systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, no. 6, pp. 1053–1071, 2000.
- [38] M. Alamir, “A new contraction-based NMPC formulation without stability-related terminal constraints,” in *10th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems (NOLCOS)*, 2016.

- [39] M. Alamir, “Contraction-based nonlinear model predictive control formulation without stability-related terminal constraints,” *Automatica*, vol. 75, pp. 288–292, 2017.
- [40] S. V. Raković, “Set theoretic methods in model predictive control,” in *Nonlinear model predictive control*, pp. 41–54, Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [41] B. Paden, M. Čáp, S. Z. Yong, D. Yershov, and E. Frazzoli, “A Survey of Motion Planning and Control Techniques for Self-Driving Urban Vehicles,” *IEEE Transactions on Intelligent Vehicles*, vol. 1, no. 1, pp. 33–55, 2016.
- [42] Y. Ma, Z. Wang, H. Yang, and L. Yang, “Artificial intelligence applications in the development of autonomous vehicles: a survey,” *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, vol. 7, no. 2, pp. 315–329, 2020.
- [43] A. De Luca, G. Oriolo, and C. Samson, *Feedback control of a nonholonomic car-like robot*, pp. 171–253. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1998.
- [44] J. M. Snider, “Automatic steering methods for autonomous automobile path tracking,” *Robotics Institute, Pittsburgh, PA, Tech. Rep. CMU-RITR-09-08*, 2009.
- [45] G. Klančar and I. Škrjanc, “Tracking-error model-based predictive control for mobile robots in real time,” *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 55, no. 6, pp. 460–469, 2007.
- [46] I. Maurović, M. Baotić, and I. Petrović, “Explicit model predictive control for trajectory tracking with mobile robots,” in *IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM)*, pp. 712–717, 2011.
- [47] A. Bemporad, F. Borrelli, and M. Morari, “Model predictive control based on linear programming - the explicit solution,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 47, no. 12, pp. 1974–1985, 2002.
- [48] F. Kühne, J. M. Gomes da Silva Jr., and W. Fetter Lages, “Mobile robot trajectory tracking using model predictive control,” in *II IEEE latin-american robotics symposium*, vol. 51, 2005.
- [49] D.-K. Phung, B. Hérissé, J. Marzat, and S. Bertrand, “Model predictive control for autonomous navigation using embedded graphics processing unit,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 50, no. 1, pp. 11883–11888, 2017.
- [50] D. Fox, W. Burgard, and S. Thrun, “The dynamic window approach to collision avoidance,” *IEEE Robotics & Automation Magazine*, vol. 4, no. 1, pp. 23–33, 1997.
- [51] P. Falcone, F. Borrelli, J. Asgari, H. E. Tseng, and D. Hrovat, “Predictive active steering control for autonomous vehicle systems,” *IEEE Transactions on control systems technology*, vol. 15, no. 3, pp. 566–580, 2007.
- [52] G. V. Raffo, G. K. Gomes, J. E. Normey-Rico, C. R. Kelber, and L. B. Becker, “A predictive controller for autonomous vehicle path tracking,” *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 10, no. 1, pp. 92–102, 2009.

- [53] T. M. Howard, C. J. Green, and A. Kelly, “Receding horizon model-predictive control for mobile robot navigation of intricate paths,” in *Field and Service Robotics* (A. Howard, K. Iagnemma, and A. Kelly, eds.), (Berlin, Heidelberg), pp. 69–78, Springer Berlin Heidelberg, 2010.
- [54] R. Verschueren, S. De Bruyne, M. Zanon, J. V. Frasch, and M. Diehl, “Towards time-optimal race car driving using nonlinear MPC in real-time,” in *53rd IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 2505–2510, 2014.
- [55] F. Xie and R. Fierro, “First-state contractive model predictive control of nonholonomic mobile robots,” in *2008 American Control Conference*, pp. 3494–3499, 2008.
- [56] M. Salazar, A. Alessandretti, A. P. Aguiar, and C. N. Jones, “An energy efficient trajectory tracking controller for car-like vehicles using model predictive control,” in *2015 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pp. 3675–3680, 2015.
- [57] Y. Ding, L. Wang, Y. Li, and D. Li, “Model predictive control and its application in agriculture: A review,” *Computers and Electronics in Agriculture*, vol. 151, pp. 104–117, 2018.
- [58] R. Lenain, B. Thuilot, C. Cariou, and P. Martinet, “High accuracy path tracking for vehicles in presence of sliding: Application to farm vehicle automatic guidance for agricultural tasks,” *Autonomous Robots*, vol. 21, no. 1, pp. 79–97, 2006.
- [59] E. Kayacan, E. Kayacan, H. Ramon, and W. Saeys, “Towards agrobots: Identification of the yaw dynamics and trajectory tracking of an autonomous tractor,” *Computers and Electronics in Agriculture*, vol. 115, pp. 78–87, 2015.
- [60] J. Backman, T. Oksanen, and A. Visala, “Navigation system for agricultural machines: Nonlinear model predictive path tracking,” *Computers and Electronics in Agriculture*, vol. 82, pp. 32–43, 2012.
- [61] E. Kayacan, H. Ramon, and W. Saeys, “Robust trajectory tracking error model-based predictive control for unmanned ground vehicles,” *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 21, no. 2, pp. 806–814, 2016.
- [62] R. Comelli, T. Pire, and E. Kofman, “Evaluation of visual SLAM algorithms on agricultural dataset,” in *Workshop on Information Processing and Control (RPIC)*, pp. 1–6, 2019.
- [63] J. Cremona, R. Comelli, and T. Pire, “Experimental evaluation of visual-inertial odometry systems for arable farming,” *Journal of Field Robotics*, vol. 39, no. 7, pp. 1121–1135, 2022.
- [64] R. Comelli, E. Kofman, and D. Feroldi, “MPC con conjunto finito de control para seguimiento de camino,” in *Workshop on Information Processing and Control (RPIC)*, pp. 1–6, 2021.
- [65] R. Comelli, S. Olaru, and E. Kofman, “Inner–outer approximation of robust control invariant sets,” *Automatica*, vol. 159, p. 111350, 2024.

- [66] R. Comelli, A. H. González, A. Ferramosca, S. Oлару, M. M. Seron, and E. Kofman, “Simplified design of practically stable MPC schemes,” *Systems & Control Letters*, vol. 180, p. 105626, 2023.
- [67] R. Comelli, A. H. González, A. Ferramosca, S. Oлару, and E. Kofman, “Estabilidad práctica en control predictivo basado en modelo mediante conjuntos interior-exterior,” in *Matemática Aplicada, Computacional e Industrial (MACI)*, pp. 1–4, 2023.
- [68] R. Comelli, E. Kofman, C. Bederián, and N. Wolovick, “Control predictivo basado en modelo con entrada finita para seguimiento de camino acelerado con GPU,” in *Matemática Aplicada, Computacional e Industrial (MACI)*, pp. 1–4, 2023.
- [69] R. Comelli, S. Oлару, M. M. Seron, and E. Kofman, “Application of a stabilizing model predictive controller to path following for a car-like agricultural robot,” *Optimal Control Applications and Methods*, 2024.
- [70] M. A. Abbas, *Non-linear model predictive control for autonomous vehicles*. PhD thesis, University of Ontario Institute Of Technology, 2011.
- [71] J. La Salle and S. Lefschetz, *Stability by Liapunov’s direct method with applications by Joseph L Salle and Solomon Lefschetz*. Elsevier, 2012.
- [72] R. P. Aguilera and D. E. Quevedo, “Stability analysis of quadratic MPC with a discrete input alphabet,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 58, no. 12, pp. 3190–3196, 2013.
- [73] A. B. Kurzhanski and P. Varaiya, “Ellipsoidal techniques for reachability analysis,” in *International workshop on hybrid systems: Computation and control*, pp. 202–214, Springer, 2000.
- [74] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear matrix inequalities in system and control theory*. SIAM, 1994.
- [75] D. P. Bertsekas, “Infinite time reachability of state-space regions by using feedback control,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 17, no. 5, pp. 604–613, 1972.
- [76] P.-O. Gutman and M. Cwikel, “An algorithm to find maximal state constraint sets for discrete-time linear dynamical systems with bounded controls and states,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 32, no. 3, pp. 251–254, 1987.
- [77] M. A. B. Sassi, A. Girard, and S. Sankaranarayanan, “Iterative computation of polyhedral invariants sets for polynomial dynamical systems,” in *53rd IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 6348–6353, IEEE, 2014.
- [78] E. C. Kerrigan, *Robust constraint satisfaction: Invariant sets and predictive control*. PhD thesis, University of Cambridge UK, 2001.
- [79] M. Herceg, M. Kvasnica, C. N. Jones, and M. Morari, “Multi-parametric toolbox 3.0,” in *European Control Conference (ECC)*, pp. 502–510, July 2013. <http://control.ee.ethz.ch/~mpt>.

- [80] R. E. Kalman, “Contributions to the theory of optimal control,” *Bol. soc. mat. mexicana*, vol. 5, no. 2, pp. 102–119, 1960.
- [81] R. E. Kalman, “A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems,” *Journal of Basic Engineering*, vol. 82, pp. 35–45, 03 1960.
- [82] N. Bourbaki, *Elements of mathematics: General topology, part 1*. Springer Berlin, Heidelberg, 1966.
- [83] R. R. Shamshiri, C. Weltzien, I. A. Hameed, I. J. Yule, T. E. Grift, S. K. Balasundram, L. Pitonakova, D. Ahmad, and G. Chowdhary, “Research and development in agricultural robotics: A perspective of digital farming,” *International Journal of Agricultural and Biological Engineering*, vol. 11, no. 4, pp. 1–14, 2018.
- [84] A. Pretto, S. Aravecchia, W. Burgard, N. Chebrolu, C. Dornhege, T. Falck, F. Fleckenstein, A. Fontenla, M. Imperoli, R. Khanna, F. Liebisch, P. Lottes, A. Milioto, D. Nardi, S. Nardi, J. Pfeifer, M. Popović, C. Potena, C. Pradalier, E. Rothacker-Feder, I. Sa, A. Schaefer, R. Siegwart, C. Stachniss, A. Walter, W. Winterhalter, X. Wu, and J. Nieto, “Building an aerial-ground robotics system for precision farming: An adaptable solution,” *IEEE Robotics and Automation Magazine*, vol. 28, no. 3, pp. 29–49, 2021.
- [85] T. Pire, M. Mujica, J. Civera, and E. Kofman, “The Rosario dataset: Multisensor data for localization and mapping in agricultural environments,” *International Journal of Robotics Research*, vol. 38, no. 6, pp. 633–641, 2019.
- [86] M. G. Salas Fernandez, Y. Bao, L. Tang, and P. S. Schnable, “A high-throughput, field-based phenotyping technology for tall biomass crops,” *Plant Physiology*, vol. 174, no. 4, pp. 2008–2022, 2017.
- [87] J. Rodriguez, M. P. Kazmierkowski, J. R. Espinoza, P. Zanchetta, H. Abu-Rub, H. A. Young, and C. A. Rojas, “State of the art of finite control set model predictive control in power electronics,” *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, vol. 9, no. 2, pp. 1003–1016, 2013.
- [88] I. Ait, E. Kofman, and T. Pire, “A travelling salesman problem approach to efficiently navigate crop row fields with a car-like robot,” *IEEE Latin America Transactions*, vol. 21, no. 5, pp. 643–651, 2023.
- [89] E. Kofman, J. A. De Doná, and M. M. Seron, “Probabilistic set invariance and ultimate boundedness,” *Automatica*, vol. 48, no. 10, pp. 2670–2676, 2012.



# Apéndice A

## Otras Demostraciones

### A.1. Existencia de Solución de la Optimización 4.9

**Lema.** Consideremos las hipótesis dadas en las Secciones 4.1 y 4.2. Si  $\tilde{L}(x, u)$  y  $f(x, u)$  son continuas,  $U$  es acotado (es decir, compacto porque ya se indicó que debía ser cerrado) y  $\Omega_I$  es cerrado (lo que significa que es compacto también dado que se requirió que esté incluido en  $\Omega_O$  que es acotado) entonces el problema de control óptimo (4.36) tiene solución.

*Demostración.* Por construcción y debido a la continuidad de  $\tilde{L}$ ,  $L$  satisface que

$$L(x, u, i) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \inf \{L(x', u, i) : x' \in X \cap B(x, \epsilon)\}. \quad (\text{A.1})$$

Ahora consideremos las variables  $\bar{u}_j = [u_{k|k}^T \dots u_{k+j-1|k}^T]^T$  para todo  $j \in \mathbb{Z}_{1:N}$  con  $u_{k|k}, \dots, u_{k+j-1|k}$  siendo los elementos de una secuencia de entradas que pertenece a  $U_N(x_k)$ , es decir que satisfacen las restricciones del problema de control óptimo (4.36). Denotaremos entonces  $\bar{U}_j(x_k)$  a los conjuntos de  $\bar{u}_j$  para todo  $j \in \mathbb{Z}_{1:N}$ .

Definimos ahora las funciones  $\bar{g}_j : \bar{U}_j(x_k) \rightarrow X$  y  $\bar{h}_j : \bar{U}_j(x_k) \rightarrow U$ , parametrizadas por  $j \in \mathbb{Z}_{1:N}$ , como sigue:

$$\bar{g}_j(\bar{u}_j) = f(\dots (f(x_k, u_{k|k}), \dots), u_{k+j-1|k}), \quad (\text{A.2})$$

$$\bar{h}_j(\bar{u}_j) = u_{k+j-1|k}. \quad (\text{A.3})$$

$\bar{g}_j(\bar{u}_j)$  representa un estado predicho obtenido con  $\bar{u}_j$  comenzando desde algún  $x_k$  fijo y  $\bar{h}_j(\bar{u}_j)$  mantiene solo la última entrada de  $\bar{u}_j$ . Debe notarse que, como estas funciones son continuas, para cualquier  $\bar{u}_j \in \bar{U}_j(x_k)$ ,  $x = \bar{g}_j(\bar{u}_j)$  y  $\epsilon > 0$ , existe algún  $\bar{\delta}_j > 0$  tal que  $\bar{g}_j(\bar{u}_j)$  mapea el conjunto  $\bar{U}_j(x_k) \cap B(\bar{u}_j, \bar{\delta}_j)$  a alguna región  $A \subseteq X \cap B(x, \epsilon)$ .

Ahora aprovechamos (A.2) y (A.3) para definir las funciones  $\bar{L}_j : \bar{U}_j(x_k) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  como  $\bar{L}_j(\bar{u}_j) = L(\bar{g}_j(\bar{u}_j), \bar{h}_j(\bar{u}_j), i)$ , y por (A.1) tenemos que

$$\bar{L}_j(\bar{u}_j) = \lim_{\bar{\delta}_j \rightarrow 0} \inf \{ \bar{L}_j(\bar{u}'_j) : \bar{u}'_j \in \bar{U}_j(x_k) \cap B(\bar{u}_j, \bar{\delta}_j) \}. \quad (\text{A.4})$$

Luego, la función de costo MPC (4.35) puede representarse, para algún  $x_k$  fijo, mediante  $\bar{V} : \bar{U}_N(x_k) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , definido como

$$\bar{V}(\bar{u}_N) = \sum_{j=1}^N \bar{L}_j(\bar{u}_j),$$

donde cada  $\bar{u}_j$  se obtiene de  $\bar{u}_N$ . Considerando ahora (A.4), resulta que

$$\bar{V}(\bar{u}_N) = \sum_{j=1}^N \lim_{\bar{\delta}_j \rightarrow 0} \inf \{ \bar{L}_j(\bar{u}'_j) : \bar{u}'_j \in \bar{U}_j(x_k) \cap B(\bar{u}_j, \bar{\delta}_j) \}.$$

Notando que  $\bar{\delta}_N \rightarrow 0$  para  $\bar{U}_N(x_k) \cap B(\bar{u}_N, \bar{\delta}_N)$  implica  $\bar{\delta}_j \rightarrow 0$  para  $\bar{U}_j(x_k) \cap B(\bar{u}_j, \bar{\delta}_j)$  para cada  $j$ , y considerando que  $\bar{u}_j$  puede obtenerse de  $\bar{u}_N$ , podemos escribir

$$\begin{aligned} \bar{V}(\bar{u}_N) &= \lim_{\bar{\delta}_N \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N \inf \{ \bar{L}_j(\bar{u}'_j) : \bar{u}'_j \in \bar{U}_N(x_k) \cap B(\bar{u}_N, \bar{\delta}_N) \} \\ &\leq \lim_{\bar{\delta}_N \rightarrow 0} \inf \left\{ \sum_{j=1}^N \bar{L}_j(\bar{u}'_j) : \bar{u}'_j \in \bar{U}_N(x_k) \cap B(\bar{u}_N, \bar{\delta}_N) \right\} \\ &\leq \lim_{\bar{\delta}_N \rightarrow 0} \inf \left\{ \sum_{j=1}^N \bar{L}_j(\bar{u}'_j) : \bar{u}'_j \in \bar{U}_N(x_k) \cap B(\bar{u}_N, \bar{\delta}_N) \right. \\ &\quad \left. \setminus \{ \bar{u}_N \} \right\} = \lim_{\bar{u}'_N \rightarrow \bar{u}_N} \inf \bar{V}(\bar{u}'_N). \end{aligned}$$

Hemos llegado entonces a que  $\bar{V}$  es semicontinua inferiormente en cada punto del conjunto compacto  $\bar{U}_N(x_k)$ . Mediante el teorema del valor extremo generalizado para espacios métricos (ver Teorema 3 de la Sección 6 en el Capítulo 4 de [82]), esto significa que  $\bar{V}$  tiene un mínimo en dicho conjunto, lo que completa la demostración.  $\square$

## A.2. Lema 7

*Demostración.* Consideremos que  $x_{k+j|k} \notin \Omega_O$  para algún  $j \in \mathbb{Z}_{1:H_c}$ . De la Ecuación (4.33), resulta que su costo de etapa sería similar al presentado en (4.15):

$$L_{k+j,k} = (1 + (j - 1)r)\tilde{L}_{k+j,k} \geq \tilde{L}_{\text{mín}} > 0, \quad (\text{A.5})$$

donde nuevamente se usa la notación definida en las Ecuaciones (4.16) y (4.17).

Luego, teniendo en cuenta la condición (4.34) con  $r \in (0, 1)$ , tenemos que

$$L_{k+j,k} \geq \tilde{L}_{\text{mín}} \geq \frac{cH_p\tilde{L}_{\text{máx}}}{r} > cH_p\tilde{L}_{\text{máx}}$$

lo que contradice que  $V(x_k, \mathbf{u}_k) \leq cH_p\tilde{L}_{\text{máx}}$ .

Debe notarse que si  $r = 0$ , de la Ecuación (4.34) resulta  $cH_p\tilde{L}_{\text{máx}} = 0$  y entonces la Ecuación (A.5) también contradice que  $V(x_k, \mathbf{u}_k) \leq cH_p\tilde{L}_{\text{máx}}$ .

Para probar la implicancia en el otro sentido debemos considerar primero que siendo  $\{x_{k+1|k}, \dots, x_{k+H_c|k}\} \in \Omega_O^{H_c}$ , según las Ecuaciones (4.32) y (4.33), la contribución de estos estados predichos al costo MPC está acotada superiormente por  $cH_c\tilde{L}_{\text{máx}}$ . Además, dada la Definición 10 y teniendo en cuenta que  $x_{k+H_c|k} \in \Omega_O$  y  $u_{k+i|k} = \check{u}, \forall i \in \mathbb{Z}_{H_c:H_p-1}$  (si  $H_c < H_p$ ), resulta que  $\{x_{k+H_c+1|k}, \dots, x_{k+H_p|k}\} \in R_{\Omega_O}^{H_p-H_c}$ . Esto significa que el aporte de la parte final de la secuencia de estados predichos al costo está acotada superiormente por  $c(H_p - H_c)\tilde{L}_{\text{máx}}$ . Sumando los dos términos, se puede llegar fácilmente a que  $V(x_k, \mathbf{u}_k) \leq cH_p\tilde{L}_{\text{máx}}$ , completándose la prueba.  $\square$

## A.3. Teorema 5

*Demostración.* Sea  $\mathbf{x}_k^* = \{x_{k|k}^*, \dots, x_{k+H_p|k}^*\}$  la secuencia de estados predichos óptima en el tiempo  $k$ , obtenida de (4.13). Hay que notar que debido a la restricción (4.40) debe haber al menos una de dichas predicciones en  $\Omega_I$ . Denotaremos  $m \in \mathbb{Z}_{1:H_c}$  al mínimo tiempo tal que  $x_{k+m|k}^* \in \Omega_I$ .

Sea  $x_{k+1} = f(x_k, u_{k|k}^*)$  el estado después de aplicar la acción de control  $u_k = u_{k|k}^*$  y consideremos la secuencia de estados predichos dados por

$$x_{k+i+1|k+1} = f(x_{k+i|k+1}, u_{k+i|k+1})$$

siendo  $x_{k+1|k+1} = x_{k+1}$  y donde la secuencia de entradas  $\mathbf{u}_{k+1}$  es tal que  $u_{k+i|k+1} = u_{k+i|k}^*$  para todo  $i \in \mathbb{Z}_{1:m-1}$  y  $u_{k+i|k+1}$  para todo  $i \in \mathbb{Z}_{m:H_c}$  permite que  $x_{k+i+1|k+1} \in \Omega_O$ . Esta

última condición es factible por la Definición 8. De ser  $H_c < H_p$ , el resto de  $\mathbf{u}_{k+1}$  estaría compuesto de acciones de control por defecto  $\check{u}$  y la parte final de  $\mathbf{x}_{k+1}$  pertenecería a  $R_{\Omega_O}$ . Con esta secuencia de entradas, obtenemos  $x_{k+i|k+1} = x_{k+i|k}^*$  para todo  $i \in \mathbb{Z}_{1:m}$ , lo que implica que  $x_{k+m|k+1} \in \Omega_I$ . Por otra parte, siempre que  $m < H_c$ , los estados predichos  $x_{k+i|k+1}$  para  $i \in \mathbb{Z}_{m+1:H_c}$  (y de hecho para  $i \in \mathbb{Z}_{m+1:H_p}$ ) serán en general diferentes respecto de  $x_{k+i|k}^*$ .

Ahora debe notarse que por su cualidad de óptimo  $V^*(x_{k+1}) \leq V(x_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1})$ , así que la condición  $V^*(x_{k+1}) > cH_p \tilde{L}_{\text{máx}}$  implica que  $V(x_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1}) > cH_p \tilde{L}_{\text{máx}}$ . Luego, según el Lema 7 existe  $j \in \mathbb{Z}_{2:H_c+1}$  tal que  $x_{k+j|k+1} \notin \Omega_O$ . Además, dado que  $\mathbf{u}_{k+1}$  fue computada de manera que  $x_{k+i|k+1} \in \Omega_O$  para todo  $i \in \mathbb{Z}_{m:H_c+1}$ , resulta que  $j < m$  (lo que a su vez implica que  $m > 2$ ) y debido al hecho de que las predicciones  $x_{k+i|k}^*$  y  $x_{k+i|k+1}$  son iguales hasta  $i = m$ , se llega a que

$$x_{k+j|k+1} = x_{k+j|k}^* \notin \Omega_O$$

para algún  $j < m$ .

Habiéndose arribado a este punto, consideremos los siguientes conjuntos de índices:

- $D_k = \{i \in \mathbb{Z}_{2:m} \mid x_{k+i|k}^* \notin \Omega_O\}$  y
- $\bar{D}_k = \mathbb{Z}_{2:m} \setminus D_k$ .

Luego, de la Ecuación (4.35),  $V^*(x_k)$  puede ser escrito como

$$V^*(x_k) = L_{k+1,k}^* + \sum_{i \in D_k} (1 + (i-1)r) \tilde{L}_{k+i,k}^* + \sum_{i \in \bar{D}_k} c \tilde{L}_{k+i,k}^* + \sum_{i=m+1}^{H_p} L_{k+i,k}^* \quad (\text{A.6})$$

donde el último término es nulo si  $m = H_p$  y se usó una notación semejante a la de las Ecuaciones (4.16) y (4.17) pero para las secuencias óptimas  $\mathbf{x}_k^*$  y  $\mathbf{u}_k^*$ .

De forma análoga,  $V(x_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1})$  puede ser expresado como

$$V(x_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1}) = \sum_{i \in D_k} (1 + (i-2)r) \tilde{L}_{k+i,k+1} + \sum_{i \in \bar{D}_k} c \tilde{L}_{k+i,k+1} + \sum_{i=m+1}^{H_p+1} L_{k+i,k+1}. \quad (\text{A.7})$$

Entonces, teniendo en cuenta que  $x_{k+j+1|k}^* = x_{k+j+1|k+1}$  y  $u_{k+j|k}^* = u_{k+j|k+1}$  para todo  $j \in \mathbb{Z}_{1:m-1}$ , resulta  $\tilde{L}_{k+j,k}^* = \tilde{L}_{k+j,k+1}$ , y sustrayendo la Ecuación (A.7) de (A.6) llegamos a que

$$V^*(x_k) - V(x_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1}) = L_{k+1,k}^* + \sum_{i \in D_k} r \tilde{L}_{k+i,k}^* + \sum_{i=m+1}^{H_p} L_{k+i,k}^* - \sum_{i=m+1}^{H_p+1} L_{k+i,k+1}. \quad (\text{A.8})$$

Dado que, como se explicó anteriormente al menos un estado predicho óptimo  $x_{k+i|k}^* \notin \Omega_O$  con  $i < m$  y considerando que  $r < 1$ , luego

$$L_{k+1,k}^* + \sum_{i \in D_k} r \tilde{L}_{k+i,k}^* \geq r \tilde{L}_{\min}. \quad (\text{A.9})$$

El término  $\sum_{i=m+1}^{H_p} L_{k+i,k}^*$  es no negativo y para  $\sum_{i=m+1}^{H_p+1} L_{k+i,k+1}$ , como el primer caso de la función de costo de etapa definida por partes en (4.33) puede aplicarse a  $x_{k+i|k+1}$  para todo  $i > m$  (porque por la Definición 8 es posible tener  $x_{k+i|k+1} \in \Omega_O$  o porque  $i > H_c$ ), resulta

$$\sum_{i=m+1}^{H_p+1} L_{k+i,k+1} \leq (H_p - 1)c \tilde{L}_{\max}. \quad (\text{A.10})$$

Entonces, considerando las Ecuaciones (A.8), (A.9) y (A.10), se llega a que

$$V^*(x_k) - V(x_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1}) \geq r \tilde{L}_{\min} - (H_p - 1)c \tilde{L}_{\max} \geq \frac{H_p - 1}{H_p} (r \tilde{L}_{\min} - H_p c \tilde{L}_{\max}) + \frac{r \tilde{L}_{\min}}{H_p}.$$

Recordando la Ecuación (4.34) y que  $V(x_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1}) \geq V^*(x_{k+1})$ , obtenemos

$$V^*(x_k) - V^*(x_{k+1}) \geq \frac{r \tilde{L}_{\min}}{H_p},$$

lo que verifica la Ecuación (4.41).

Si  $\Omega_I = \Omega_O$ , la condición  $m > 1$  significa que  $x_{k+1|k}^* \notin \Omega_I$  y esto implica que  $x_{k+1|k}^* \notin \Omega_O$ . En general, siempre que  $x_{k+1|k}^* \notin \Omega_O$ , la Ecuación (A.9) puede ser reemplazada por

$$L_{k+1,k}^* + \sum_{i \in D_k} r \tilde{L}_{k+i,k}^* \geq \tilde{L}_{\min}, \quad (\text{A.11})$$

y siguiendo los mismos pasos que antes, de (A.10) y (A.11) puede llegarse a la Ecuación (4.42), completándose la prueba.  $\square$

## A.4. Corolario 10

*Demostración.* Del Teorema 5 se sabe que  $V^*(x_{k+1}) > cH_p \tilde{L}_{\max}$  implica la reducción del costo de la Ecuación (4.41). Esto implicaría que  $V^*(x_k) > cH_p \tilde{L}_{\max}$  lo que contradiría la hipótesis del corolario. Entonces tenemos que  $V^*(x_k) \leq cH_p \tilde{L}_{\max}$  implica  $V^*(x_{k+1}) \leq cH_p \tilde{L}_{\max}$  y, repitiendo el razonamiento, se puede llegar a que  $V^*(x_j) \leq cH_p \tilde{L}_{\max}$  para todo  $j \geq k$ .  $\square$

## A.5. Corolario 12

*Demostración.* Asumamos que  $V^*(x_{k+M}) > cH_p\tilde{L}_{\text{máx}}$ . Entonces, del Corolario 10 tenemos que  $V^*(x_{k+i}) > cH_p\tilde{L}_{\text{máx}}$  para todo  $i \in \mathbb{Z}_{0:M-1}$  y del Teorema 5 sabemos que

$$V^*(x_{k+i}) - V^*(x_{k+i+1}) \geq \alpha. \quad (\text{A.12})$$

Sumando miembro a miembro (A.12) para todo  $i \in \mathbb{Z}_{0:M-1}$ , se llega a lo siguiente:

$$V^*(x_k) - V^*(x_{k+M}) \geq M\alpha \geq V^*(x_k) - cH_p\tilde{L}_{\text{máx}}$$

lo que significa que

$$V^*(x_{k+M}) \leq cH_p\tilde{L}_{\text{máx}}.$$

Debe notarse que esto contradice la suposición inicial y prueba que  $V^*(x_{k+M}) \leq cH_p\tilde{L}_{\text{máx}}$ . Finalmente, del Corolario 11 esta condición implica que  $x_{k+i} \in \Omega_O$  para todo  $i > M$ , lo que completa la demostración.  $\square$