UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIOFACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y ESTADÍSTICA

CARRERA DE POSGRADO

ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA ACTUARIAL

Tema: “Una aplicación de la Teoría de Riesgo”

Autor: Héctor Ponce de León

Director: Alfredo Perino

Fecha: 30/06/2025

Contenido

1 Introducción

Este estudio proporciona un marco integral para comprender cómo la aplicación de modelos de estadística actuarial puede influir en la gestión del riesgo y la toma de decisiones en el sector asegurador. Se centra en la aplicación de conceptos de Estadística Actuarial a un conjunto de datos de un ramo específico no vida, para lo cual se desarrollan dos modelos de riesgo. Además, se analiza el impacto que tendría un cambio normativo de Solvencia I a Solvencia II en el cálculo de capitales mínimos, y se evalúa el impacto del reaseguro. Finalmente, para un modelo específico, se aplica el Principio de Utilidad Exponencial para el cálculo de la prima pura.

2 Objetivos

2.1 Objetivo general

Aplicar varios de los conceptos desarrollados en el posgrado "Estadística Actuarial" a un conjunto de datos de un ramo específico no vida. Buscar la mejor aproximación de la cuantía total de siniestros que se ajuste a los datos históricos, aplicar conceptos de simulación para determinar distintos escenarios basados en las distribuciones utilizadas, calcular capitales mínimos basados en distintos supuestos, utilización de R para los distintos modelos de aproximación para la cuantía de siniestros, ver el impacto del reaseguro, entre otros.

2.2 Objetivos específicos

- Desarrollar un modelo de riesgo para la determinación de la distribución del monto total de siniestros, que se ajuste a los datos históricos de un ramo no vida.

  Modelo 1: Determinar las distribuciones para las variables aleatorias N (cantidad de siniestros) y X (cuantía individual de los siniestros), y con ellas estimar la distribución compuesta de la cuantía total de siniestros S.

  Modelo 2: Determinar una aproximación mediante una función gamma a la cuantía total de siniestros S.

- Analizar y medir el impacto que podría tener un cambio de normativa (ir de Solvencia I a Solvencia II) en el cálculo de capitales mínimos para dichos modelos.

- Aplicación del Modelo 1 para analizar el impacto del reaseguro.

- Aplicación del Modelo 2 para el cálculo de la prima pura a través del Principio de Utilidad Exponencial.

3 Teoría de Riesgo

3.1 Teoría de Riesgo Individual y Colectivo

La siniestralidad que experimenta una compañía de seguro durante un período de tiempo es un proceso estocástico con un doble fundamento aleatorio: la aleatoriedad en el número de siniestros y el monto aleatorio de los mismos.

Desde un punto de vista teórico, para representar la siniestralidad de una cartera existen dos teorías de riesgo: teoría de riesgo individual y teoría de riesgo colectivo.

En la **teoría de riesgo individual** se considera el riesgo total de la compañía como el resultado de lo que acontece a las pólizas que componen la cartera de manera individual. Cada unidad asegurada, considerada individualmente, es una unidad de riesgo con capacidad de generar siniestros.

Esta teoría presenta algunos inconvenientes: 1) En la variable aleatoria X_i que se utiliza para representar "cuantía siniestral de la póliza i-ésima", no siempre es admisible la hipótesis de independencia. 2) Si la cartera es pequeña, no es aplicable el Teorema Central del Límite y la aceptación de normalidad. 3) No da respuesta a la Probabilidad de Ruina de la compañía en el futuro. 4) La movilidad de la cartera general dificulta su aplicación.

La **teoría de riesgo colectivo** considera como un todo la colectividad de unidades de riesgos aseguradas, y ello se contrapone a la manera de pensar "individual", que se fija en el riesgo correspondiente a cada póliza. Se trata básicamente de un caso especial de la teoría de los procesos estocásticos, donde, como consecuencia de los siniestros, surgen dos variables aleatorias fundamentales: el *Número de Siniestros* en un período de tiempo y la *Cuantía* de cada uno de ellos.

Basándonos en la **teoría de riesgo colectivo**, sea un proceso aleatorio de un conjunto no determinado de contratos de seguros con vigencia en un periodo de tiempo, donde

- N = variable aleatoria discreta que denota el número de siniestros ocurridos en un intervalo de tiempo, con función de probabilidad f(N).
- X_i= variable aleatoria continua que representa la cuantía de un siniestro individual *i*, con función de probabilidad f(X).
- S = Cuantía total de los N siniestros en el mismo período de tiempo.

Consideremos los supuestos que el número de siniestros y los montos son variables aleatorias independientes, y los montos X_i comparten la misma distribución de probabilidad.

Entonces, el monto total de los siniestros puede representarse de la siguiente manera:

$$S = X_1+X_2 + \ldots.+X_N$$

La función de distribución de la cuantía S se denomina "**Distribución Compuesta**", y se escribe:

$$F(S) = \sum_{N=0}^{\infty} f(N) * V^{(*)N}(S)$$

$V^{(*)N}(S)$: Probabilidad de que habiendo ocurrido N siniestros, la cuantía total sea inferior a un valor particular de S. Es la convolución N-ésima de S, dependiendo de las funciones $f(X_i)$. Su obtención exacta es de difícil resolución, por ello, es el principal problema estadístico su determinación, aunque sea de forma aproximada. Por varias razones su conocimiento es fundamental para la gestión de la empresa, en particular para preservar la solvencia.

Específicamente, conocer la E(S) será determinante para el cálculo de la prima pura, o en su defecto, lograr buenas estimaciones de ella.

$$E(S) = \sum_{N=0}^{\infty} E_S(S/N) * f(N)$$

$$E(S) = E[E(S/N)] = E(X) * E(N)$$

$$V(S) = E[V(S/N)] + V[E(S/N)] = E(N) * V(X) + V(N) * (E(X))^2$$

3.2 Modelo para determinar la distribución de N

Las distribuciones más habituales para modelizar el comportamiento de la variable aleatoria número de siniestros N son: Poisson, Binomial y Binomial Negativa, en el trabajo vamos a utilizar Poisson y Binomial Negativa. Todas estas funciones se utilizan cuando la variable aleatoria es de orden discreto. A modo de ejemplo se detalla alguna de las características de las más usadas.

3.2.1 Distribución de Poisson

La distribución de Poisson modela la probabilidad de ocurrencia de un número específico de eventos en un intervalo de tiempo dado (por ejemplo 1 año), visto como un proceso estocástico correspondiente a un modelo de comportamiento aleatorio de sucesos distribuidos en el tiempo o en el espacio. Se busca conocer la probabilidad f(N,t), de que los N siniestros ocurran en el intervalo (0,t), siendo N la variable aleatoria frecuencia.

Se considera que la ocurrencia de los siniestros responde a los siguientes supuestos:

a) **Tasa constante de ocurrencia:** los siniestros ocurren a una tasa promedio constante λ en un período de tiempo fijo o en una unidad específica (por día, por año, etc.). La probabilidad depende sólo de la longitud del intervalo y no del punto donde éste comienza, y es la misma para todos los intervalos de igual longitud.

b) **No ocurren eventos simultáneos:** en un intervalo de tiempo muy pequeño, la probabilidad de que ocurran dos o más siniestros es prácticamente cero.

c) **Independencia de los siniestros:** la ocurrencia de siniestros en el intervalo que transcurre es independiente de su ocurrencia o no durante intervalos anteriores. Significa que el número de siniestros es independiente de intervalo a intervalo.

Si se verifican los supuestos del modelo, la probabilidad buscada será proporcionada por la siguiente función de probabilidad:

$$f(N,t) = \frac{e^{-\lambda.t}.(\lambda.t)^N}{N!}; N = 0,1,2,3,\ldots$$

Con esperanza y variancia

$$E(N) = \sigma^2(N) = \lambda.t$$

La esperanza $E(N) = \lambda.t$ es el número medio esperado de siniestros ocurridos en el intervalo (0,t). Si se analiza un único período de tiempo, resulta t=1, y la función de probabilidad de Poisson queda

$$f(N) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^N}{N!}; N = 0,1,2,3,\ldots$$

Y, en consecuencia

$$E(N) = \sigma^2(N) = \lambda$$

Donde $E(N) = \lambda$ resulta el número medio de siniestros ocurridos en el intervalo unitario (por ejemplo, un año).

3.2.2 Distribución Binomial Negativa

La Distribución Binomial Negativa (o de Pascal) desempeña un papel importante en la Teoría de Riesgo, utilizándose frecuentemente como reemplazo de la Poisson en los casos donde no se verifican los supuestos establecidos para dicha distribución.

La experiencia muestra que en ciertos casos no se verifica la igualdad entre la media y la variancia del número de siniestros N, donde resulta la varianza es superior a la media.

En casos que existe efecto "contagio", la hipótesis de independencia no se verifica, y la ocurrencia de un siniestro aumenta la probabilidad de otros, al producirse dicho contagio. Por ejemplo, seguros de enfermedad, de incendio, de crédito, etc..

Hay circunstancias que la cartera presenta cierto grado de heterogeneidad, de forma tal que la media del número de siniestros por póliza no es igual en todas ellas, sino que se comporte como una variable aleatoria, a través de la toda la estructura de la cartera.

En ciertos riesgos, no se cumple el hecho de que la probabilidad de siniestro sea constante a lo largo del tiempo, sino que la frecuencia se halla ligada a condiciones meteorológicas, ciclos económicos y sociales, etc.

La Binomial Negativa como tiempo de espera

Se considera el experimento aleatorio en el cual una repetición individual se puede verificar el suceso A o el Ā, con las probabilidades constantes de repetición en repetición:

$$P\{A\} = p\ ;\ P\{\bar{A}\} = q\ ; p + q = 1$$

La variable aleatoria en estudio X es el número de repetición del experimento hasta la aparición del resultado A, por r-ésima vez. Los valores de X

$$X = r, (r + 1), (r + 2), \ldots$$

Por ejemplo, se contempla el suceso "muerte" durante X exposiciones a una enfermedad, donde $P\{A\} = p$ es la probabilidad de ser atacado por la enfermedad en una exposición y $P\{\bar{A}\} = q$ es la probabilidad de no ser atacado por la enfermedad en una exposición. Se supone que la muerte es inexorable después de r ataques de la enfermedad. Se desea saber cuál es la probabilidad de morir después de X exposiciones a la enfermedad, para X=r, (r+1), (r+2), …

En primer lugar, se determina la probabilidad de que en las (r-1) repeticiones se verifique el suceso A, e las (X-r) siguientes repeticiones se verifique el suceso Ā, y en la última repetición se verifique nuevamente A, en ese orden. Entonces

$$p^{r-1}.\,q^{X-r}.\,p = p^{r}.\,q^{X-r}$$

En el caso que no importe el orden de ocurrencia de las (r-1) veces del suceso A y las (X-r) veces el suceso Ā, correspondiente a las (X-1) primeras repeticiones, resulta.

$$f(X) = \binom{X-1}{r-1}.\,p^{r}.\,q^{X-r}\ \ ;\ X = r, (r + 1), (r + 2), \ldots$$

Donde r y p son parámetros de la distribución y además para todo $X < r$, $f(X) = 0$.

La esperanza y la variancia

$$E(X) = \frac{r.\,q}{p}\ ; V(X) = \frac{r.\,q}{p^{2}}$$

Interpretación de los parámetros

- X es la variable aleatoria que sigue la distribución Binomial Negativa. En términos actuariales, puede representar el número de pólizas sin siniestros antes de alcanzar un número determinado de pólizas con siniestros.
- r es el número de éxitos antes que termine el conteo. En modelos de siniestros, puede interpretarse como la cantidad de siniestros hasta alcanzar un umbral específico.
- p es la probabilidad de éxito en cada ensayo. En siniestros, puede representar la probabilidad de que un asegurado no tenga siniestros en un período dado.
- q es la probabilidad de fracaso en cada ensayo.

- $\binom{X-1}{r-1}$ es el coeficiente binomial que cuenta las formas en que pueden ocurrir los $X-r$ fracasos antes de obtener los r éxitos.

A efectos prácticos, una vez estimados los parámetros $\hat{E}(N)$ y $\hat{V}(N)$ a partir de los datos, se pueden obtener los parámetros de la distribución Binomial Negativa como sigue:

Si N ~ $Binomial\ Negativa\ (r;\ p)$ entonces los parámetros de esta última distribución se estiman a partir de las siguientes ecuaciones:

$$\hat{E}(N) = \frac{\hat{r}(1-\hat{p})}{\hat{p}}$$
$$\hat{V}(N) = \frac{\hat{r}(1-\hat{p})}{\hat{p}^2}$$

3.3 Modelo para determinar la distribución de X

En la práctica, no siempre es necesario recurrir a una expresión matemática para representar la distribución de la cuantía X de cada siniestro, sino que, con la estimación de los momentos de la variable, sobre la base de valores observados, es suficiente.

Sin embargo, cuando interesa la distribución de valores grandes de X, la información disponible suele ser insuficiente, en tal caso, se suele recurrir a una función analítica para tramos extremos de X, superiores a un valor.

Pero si, los datos son insuficientes para todo el rango de variación de X, no queda otra solución que encontrar una función de X.

El costo de cada siniestro es una variable aleatoria que modeliza una variable económica que se considera continua. En su modelización se puede emplear una amplia gama de distribuciones, según el perfil siniestral de cada cartera. Tradicionalmente se usan: Distribución Lognormal, Pareto I y II, Burr, etc.
A modo de ejemplo se detalla alguna de las características de las dos primeras.

3.3.1 Distribución Log-Normal

Se obtiene mediante la transformación de la distribución Normal de parámetros µ y σ.
Si Z ~ Normal (µ; σ), la variable aleatoria $X = e^Z$ se distribuye Log-Normal:

$$X \sim \text{Log} - \text{Normal}\ (\mu;\ \sigma)$$

Para cualquier valor de X, la Función de Distribución viene dada por:

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma}.\frac{1}{X}.e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log X-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

La esperanza de X viene dada por

$$E(X) = e^{\mu+\frac{1}{2}.\sigma^2}$$

La varianza de X viene dada por

$$V(X) = e^{2\mu+\sigma^2}.\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$$

La distribución Log-Normal es empleada para modelizar la cuantía de los siniestros en seguros porque se ajusta muy bien para describir fenómenos donde los valores pequeños son más probables que los grandes, pero existe una cola que permite la ocurrencia de valores muy altos.

En estadística se la conoce como una distribución de colas largas, es decir, hay una probabilidad alta de que la variable tome valores alejados de la media. Sirve para modelizar siniestros con grandes costos por reclamo.

Los parámetros µ y σ pueden ser obtenidos a partir de los estimadores del valor esperado y varianza de X. Si X ~ Lognormal (µ; σ^2) entonces:

$$\hat{E}(X) = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$$

$$\hat{V}(X) = \left(e^{\sigma^2} - 1\right)e^{2\mu+\sigma^2}$$

De estas ecuaciones se despejan los estimadores $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}$ para ser utilizados en las simulaciones.

3.3.2 Distribución de Pareto

Al igual que en el caso anterior, esta distribución sigue la ley de las colas largas. Esta distribución sirve para modelar variables que tengan un valor mínimo y con alta probabilidad de ser seleccionado.

La distribución de Pareto tiende a cero cuando X tiende a infinito, más lentamente que la distribución Log-Normal, por eso se utiliza para modelar siniestros de elevada cuantía. Se caracteriza por tener una cola pesada en el extremo derecho, lo que significa que hay una alta probabilidad de ocurrencia de valores pequeños, pero una probabilidad decreciente de ocurrencia de valores mayores.

Existen variantes de la distribución de Pareto, denominadas Pareto I y Pareto II. La primera se aplica cuando se tienen observaciones por encima de un determinado valor α, que puede ser un deducible o franquicia. Mientras que la segunda es útil cuando se dispone de todas las observaciones de la cuantía siniestral a partir de cero.

3.3.2.1 PARETO I

La función de distribución acumulada es de la siguiente forma

$$F(X) = 1 - \left(\frac{\alpha}{X}\right)^{\beta} \ ; X \geq \alpha;\ \beta > 0$$

La variable X no puede ser menor a α dado que en ese caso la función tomaría valores negativos.

La función de probabilidad se obtiene derivando F(X),

$$f(X) = \frac{\beta.\alpha^{\beta}}{X^{\beta+1}} \ ; X \geq \alpha;\ \beta > 0$$

El parámetro α es un parámetro de escala, mientras que el parámetro β, es un parámetro de forma. Para α constante, cuanto menor sea β, más elevado es el valor de f(X), en valores suficientemente grandes de X. Es decir, hace más probables siniestros de elevada cuantía cuanto menor sea el parámetro β.

La Esperanza y la Varianza vienen dadas por

$$E(X) = \frac{\beta}{\beta - 1}.\alpha \ ; \forall \beta > 1$$

$$V(X) = \frac{\beta.\alpha^2}{(\beta-2)(\beta-1)^2} \ ; \forall \beta > 2$$

3.3.2.2 PARETO II

La función de distribución acumulada es de la siguiente forma

$$F(X) = 1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha + X}\right)^{\beta} \ ; X \geq 0;\ \beta > 0$$

La función de probabilidad se obtiene derivando F(X),

$$f(X) = \frac{\beta.\alpha^{\beta}}{(\alpha + X)^{\beta+1}} \ ; X \geq 0;\ \beta > 0$$

Al igual que en Pareto I, el parámetro α es un parámetro de escala, mientras que el parámetro β, es un parámetro de forma.

La Esperanza y la Varianza vienen dadas por

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta - 1} \ ; \forall \beta > 1$$

$$V(X) = \frac{\beta.\alpha^2}{(\beta-2)(\beta-1)^2} \ ; \forall \beta > 2$$

3.4 Modelo para determinar la distribución de S

3.4.1 Aproximación gamma de S

Como modelo de aproximación de la variable aleatoria monto total de la siniestralidad (S), utilizaremos una aproximación a través de la función gamma de dos parámetros, como se vio en el posgrado de Estadística Actuarial, esta distribución es muy utilizada para representar la Distribución Compuesta, dado que es una distribución adecuada para modelizar variables aleatorias continuas con asimetría positiva.

La Función Gamma de dos parámetros tiene la siguiente expresión.

$$f(S,\alpha,\beta) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}.S^{\alpha-1}.e^{-\beta.S} \quad ;\alpha,\beta > 0;S > 0$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_{0}^{\infty} S^{\alpha-1}.e^{-S}.dS = (\alpha-1)!$$

La función de distribución acumulada hasta un valor particular de (s) de la variable.

$$F(s,\alpha,\beta) = \int_{0}^{s} \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}.S^{\alpha-1}.e^{-\beta.S}\ dS$$

Si β=1 se obtiene lo que se denomina la Función Gamma de un parámetro.

$$f(S,\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}.S^{\alpha-1}.e^{-S} \quad ;\alpha > 0;S > 0$$

Interpretación de los Parámetros.

Parámetro de “forma” α.

Este parámetro ubica la máxima intensidad en probabilidad. Cuando toma valores aproximados a uno tiene forma muy similar a la exponencial. Cuando toma valores más grandes, el centro de la distribución se desplaza a la derecha y se aproxima a una Normal.

Parámetro de “escala” β.

Este parámetro determina el alcance de la asimetría positiva desplazando la masa de probabilidad en la cola de la derecha. Valores **pequeños de β** hacen que la distribución acumule más densidad de probabilidad en el extremo derecho la cola, alargando su forma y dispersando más la probabilidad. Por lo contrario, valores **grandes de β** llevan a una figura de la función más simétrica y concentrada, con un pico de densidad más elevado.

Esta característica de sus parámetros hace que la función Gamma sea una distribución flexible para ajustar y modelizar distribuciones empíricas con simetrías positivas, tanto de las más concentradas y puntiagudas, como las más dispersas y aplanadas.

Esperanza y Variancia

El momento de orden r viene dado por

$$E(S^r) = \frac{\Gamma(r+\alpha)}{\Gamma(\alpha)} . \beta^{-r}$$

De donde surgen

$$E(S) = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$V(S) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

Estimación de los parámetros

Igualando los momentos teóricos por los experimentales (método de los momentos), Media($\bar{S}$) y Var($\bar{S}$), podemos estimar los parámetros de la función gamma que ajuste a la distribución de la cuantía total de siniestros S.

$$\hat{\alpha} = \frac{(\mathrm{Media}(\bar{S}))^2}{\mathrm{Var}(\bar{S})}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\mathrm{Media}(\bar{S})}{\mathrm{Var}(\bar{S})}$$

Los resultados obtenidos se detallan más adelante.

3.4.2 Distribución compuesta de S

Una vez obtenidas las funciones de distribución para X y N, se necesita “convolucionar” para obtener la función de distribución compuesta de S.

De acuerdo con el comportamiento de los datos del ejemplo, sólo consideramos la distribución Binomial Negativa para N, y las distribuciones Pareto I y Log-Normal para X, obteniendo los siguientes modelos compuestos:

Modelo 1: N ~ $Binomial\ Negativa\ (r;\ p)$ y X ~ $Pareto\ I\ (\alpha;\ \beta)$.

Modelo 2: N ~ $Binomial\ Negativa\ (r;\ p)$ y X ~ Log – Normal (μ; σ).

Modelo 3: Aproximamos S con una función gamma de dos parámetros.

Para aproximar la distribución de la siniestralidad de una compañía el método más frecuente que se utiliza es el denominado “Simulación de Montecarlo”.

3.5 Simulación

La simulación es una técnica estadística y computacional que tiene como objetivo “replicar” el comportamiento aleatorio de sistemas reales mediante modelos matemáticos.

La idea es generar números aleatorios uniformemente distribuidos en forma continua en el intervalo (0,1) y, a partir de estos, generar otros valores aleatorios que simulan pertenecer a un determinado modelo de distribución de probabilidad.

De esta manera se obtienen muestras simuladas de determinadas poblaciones hipotéticas con el uso del procesador. Este método de simulación fue creado por John Von Neumann, también conocido como “Método de Montecarlo”.

En definitiva, la simulación consiste en transformar los números aleatorios u_i generados y distribuidos uniformemente en el intervalo continuo (0,1), en números aleatorios x_i distribuidos según la función de interés F(X).

Esta técnica de simulación se aplicó para aproximar la distribución de S en las siguientes etapas:

a. **Primera etapa:** Consiste en simular valores de N para los distintos ejercicios. Siguiendo la técnica descrita anteriormente, y utilizando una distribución base apropiada, por ejemplo, Binomial Negativa, se simulan valores n_i de N (i=1,2, …, j), donde cada n_i representa la cantidad de siniestros del ejercicio i.

   Observación: Para la distribución base Binomial Negativa se utilizan las estimaciones de los parámetros calculados con los valores empíricos, como se detalla al final del apartado 3.2.2..

   Ejemplos de valores de N para 4 ejercicios, con distribución BN:

$$(n1,n2,n3,n4)=(6.698,6.014,5.173,5.908)$$

En el ejercicio 1 ocurrieron 6.698 siniestros, en el ejercicio 2 ocurrieron 6.014 siniestros, etc.

b. **Segunda etapa:** Consiste en simular las cuantías de los n_i siniestros del ejercicio i (i=1,2,…,j), simulados en la primera etapa. Es decir, mediante el uso de una distribución base que refleje el comportamiento de la cuantía de los siniestros, por ejemplo Pareto I y Log-Normal, se generan X_1, X_2, …., X_{ni} importes de siniestros para la cantidad n_i del ejercicio i (i=1,2,…,j).

   Observación 1: Para generar valores de la distribución base Log-Normal y Pareto I, se utilizan las estimaciones de los parámetros calculados con los valores empíricos, como se detalla en los apartados 3.3.1 y 3.3.2.1.

respectivamente.

Ejemplos de cuantías de siniestros X generados con distribución base Log-Normal, para los 4 ejercicios simulados en la etapa anterior:

- 6.698 cuantías X para el ejercicio 1: (6.342,11.733,…,328.371)
- 6.014 cuantías X para el ejercicio 2: (4.524,2.487,…,341.615)
- 5.173 cuantías X para el ejercicio 3: (160.982,5.519,…,32.162)
- 5.908 cuantías X para el ejercicio 4: (12.721,24.454,…,42.299)

Haciendo foco en la simulación del ejercicio 1, el primer siniestro tiene una cuantía de $ 6.342, el segundo siniestro de $ 11.733, y así sucesivamente. El último valor de $ 328.371 corresponde a la simulación de la cuantía del siniestro 6.698.

<u>Observación 2</u>: Esta metodología permite simular fácilmente la aplicación de contratos de reaseguro Exceso de Pérdida (Ver 5.5.3), con distintas prioridades M. Para simular la afectación del reaseguro, simplemente se reemplaza el valor de la cuantía X_k por el valor de la prioridad M, en el caso que X_k >M.

Por ejemplo, si tenemos una prioridad M=250.000, en el primer ejercicio del ejemplo anterior, veríamos reemplazada la última cuantía de 328.371 por la prioridad:

Ejercicio 1 con reaseguro: (6.342,11.733,…,**250.000**)

c. **Tercera etapa:** Consiste en obtener la cuantía total de la siniestralidad S_i para cada ejercicio i (i=1,2,…,j), simulados en las dos etapas anteriores.

$$S_i = \sum_{k=1}^{n_i} X_k \ ; i = 1,2, \dots , j$$

Siguiendo los ejemplos anteriores, calculamos

- $S_1=\sum_{k=0}^{6698} X_k$=6.342+11.733+…+328.371
- $S_2=\sum_{k=0}^{6014} X_k$=4.524+2.487+…+341.615
- $S_3=\sum_{k=0}^{5173} X_k$=160.982+5.519+…+32.162
- $S_4=\sum_{k=0}^{5908} X_k$=12.721+24.454+…+42.299

A partir de las distintas simulaciones de S, el objetivo es estimar la función de densidad de S y calcular las aproximaciones a las medidas buscadas.

En el **Anexo I** se explica brevemente cómo se realiza la metodología de simulación utilizando el software “R”, con las aclaraciones adicionales y ejemplos para su mejor interpretación.

4 Resultados

Los resultados se obtuvieron a partir de los datos correspondientes a una base de 14 años correspondiente a un ramo patrimonial de Incendio (se consideraron los pagos a moneda homogénea).

Las simulaciones fueron realizadas utilizando la herramienta R_Studio. En el ANEXO II se encuentra el código utilizado.

Se utilizó la función 'set-seed(n)' para poder mantener la misma salida de los números aleatorios usados en las distintas simulaciones, dichos valores obtenidos son los que fueron transcriptos en el documento.

4.1 Estimaciones de los parámetros

A partir de los datos se obtienen los estimadores para la media y desvío de la variable aleatoria N:

$$\hat{E}(N) = 6{,}870.85$$
$$\hat{V}(N) = 5{,}547{,}626.9$$
$$\hat{\sigma}(N) = 2{,}355.34$$

Para la variable aleatoria X se obtuvieron los siguientes estimadores:

$$\hat{E}(X) = 102{,}052.42$$
$$\hat{V}(X) = 323{,}842{,}091{,}918.8$$
$$\hat{\sigma}(X) = 569{,}071$$

La distribución utilizada para estimar N es la Binomial Negativa, debido a que analizando los parámetros poblacionales se observa que la variancia es muy superior a la media, por lo que se descarta la distribución de Poisson.

Estimación de los parámetros p y r de la distribución Binomial Negativa se obtienen despejando de las ecuaciones detalladas en 3.2.2..

Parámetros BN
$\hat{p}$ = 0.00123852
$\hat{r}$ = 8.52

Para el monto de los siniestros se utilizaron dos distribuciones Log-Normal y Pareto, las estimaciones de los parámetros se obtienen a partir de 3.3.1 y 3.3.2.

Parámetros Pareto I:
$\hat{\alpha}$ = 51,833.72
$\hat{\beta}$ = 2.032

Parámetros LN:
$\hat{\sigma}^2$ = 3.468
$\hat{\mu}$ = 9.798

Parámetros Gamma:
$\hat{\alpha}$ = 8.3102
$\hat{\beta}$ = $1.18645577099652e - 08$

4.2 Función de distribución de S y Primas Puras de los distintos modelos

La cuantificación de la pérdida agregada S es un pilar fundamental en la gestión del riesgo actuarial. Una vez explorados los métodos de simulación para obtener la distribución de S, esta sección se enfoca en el análisis de su función de densidad de probabilidad (FDP). La FDP, f(s), ofrece una visión detallada de la probabilidad relativa asociada a cada posible valor de la siniestralidad total, siendo crucial para entender la forma, la dispersión y, especialmente, el comportamiento en las colas de la distribución.

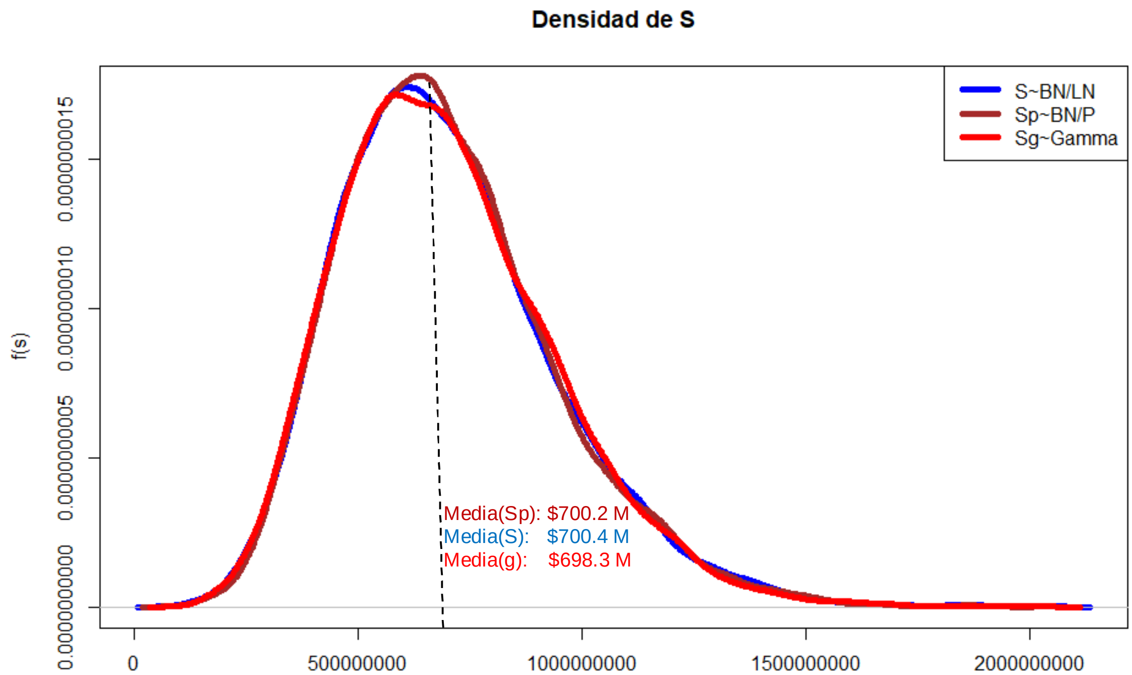
En el marco de este estudio, se han desarrollado tres enfoques para modelar S:

Modelo 1: N ~ $Binomial\ Negativa\ (r;\ p)$ y X ~ $Pareto\ I\ (\alpha;\ \beta)$.
Un modelo compuesto, con frecuencia Binomial Negativa pero con severidades modeladas mediante una distribución de Pareto I

Modelo 2: N ~ $Binomial\ Negativa\ (r;\ p)$ y X ~ $Log -$ Normal (μ; σ).
Un modelo compuesto que conjuga una frecuencia Binomial Negativa con severidades individuales de tipo Log-Normal

Modelo 3: Aproximamos S con una función gamma de dos parámetros.
Una tercera aproximación directa de la distribución de S mediante una función Gamma de dos parámetros.

El gráfico que se presenta a continuación ilustra estas tres densidades estimadas para S. Este análisis visual comparativo es el primer paso para evaluar la consistencia entre los modelos.



Como primera referencia para tener en cuenta, la prima pura promedio anual que se obtiene a partir de los datos de la muestra presentados, es de $ 701 Millones.

Para obtener el valor de la prima pura, se utilizó la función genérica de R “summary” para obtener los principales estadísticos de la función densidad de S de los distintos modelos.

El estadístico de interés principal es la “Media” ya que E(S) nos proporciona el valor de la prima pura. Otro estadístico de interés para la próxima sección es el $VaR\_{99.5}$.

Los valores obtenidos para cada modelo fueron los siguientes:

Resultados de la Simulación en R

Modelo	Min.	1er Quartil	Mediana	Media	Var 99.5%
1 BN/P	117.100.158	527.583.285	671.333.911	700.266.252	1.475.801.954
2 BN/LN	109.094.577	526.057.236	670.524.163	700.426.680	1.478.813.045
3 Gamma	135.644.388	525.402.077	672.204.815	698.341.492	1.456.425.068

Como se puede observar en cuadro anterior, la media de las tres funciones simuladas oscila entre valores próximos a $ 700 Millones.

Dada la similitud de las tres aproximaciones, para los cálculos de las siguientes secciones se elige el valor de la prima pura del **Modelo 2** de $ 700,4 Millones.

5 Solvencia – Antecedentes

5.1 Solvencia I

Para hacer frente al impacto negativo que supone la variabilidad de los riesgos, las entidades financieras, bancos y aseguradoras, deben disponer de un excedente de fondos que sea capaz de absorber las posibles pérdidas que se puedan producir en un futuro.

Para cumplir con este fin, las autoridades económicas del mercado europeo impulsaron en el pasado una serie de medidas que trataban de cuantificar los recursos que habrían de destinarse para garantizar la viabilidad de este tipo de empresa. Para el sector asegurador, las primeras normas surgieron en 1973 y 1979, las que fueron modificándose, llegando a lo que hoy conocemos como **Solvencia I**, que establece normas generales que permiten la determinación del nivel de recursos propios de las aseguradoras sin considerar el perfil de riesgo específico de cada compañía.

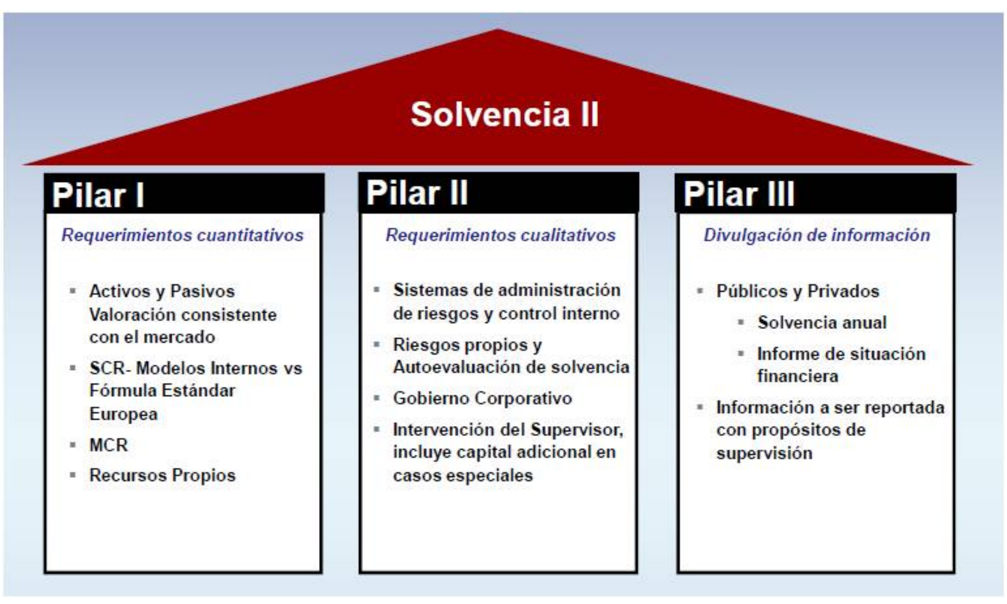
Lo cierto es que esta normativa tiene ciertas limitaciones, con el fin de corregir estas deficiencias, se puso en marcha el proceso de cambio que ha terminado en la directiva 2009/138/CE del Parlamento Europeo, conocida como Solvencia II.

5.2 Solvencia II

Bajo el nombre de Solvencia II se agrupan todas las iniciativas encaminadas a llevar a cabo una revisión de las normas de valoración de la situación financiera de las compañías aseguradoras europeas, con el objetivo de mejorar el control y medición de todos los riesgos. Por lo tanto, se puede afirmar que Solvencia II surge de la preocupación de que las compañías operen con unos fondos propios ***adecuados a los riesgos que asumen***.

Esta normativa se basa en tres pilares generales para su implementación:

Cuadro 1: Pilares de Solvencia II[1]



[1] Fuente: Price Waterhouse Cooper, Proyecto de Solvencia II

SCR (Solvency Capital Requirement): *Capital de Solvencia Obligatorio*, es la cantidad de capital que una aseguradora debe tener disponible para cubrir sus riesgos. Este capital se calcula mediante una fórmula que tiene en cuenta diversos factores de riesgo, incluyendo riesgos de suscripción, mercado, crédito y operacionales.

MCR (Minimum Capital Requirement): *Capital Mínimo Obligatorio*, es el nivel mínimo de capital que una aseguradora debe tener para poder operar en el mercado.

Este trabajo se centrará sólo en conceptos del Pilar I, para lo cual, se propone una metodología para calcular el *capital mínimo* a partir de la verdadera distribución de pérdidas simulados en la sección 4.2..

Utilizando estos resultados y las definiciones que se detallan a continuación, se puede determinar el margen de solvencia mínimo requerido bajo Solvencia II.

5.3 Capitales Mínimos[2]

El concepto de Solvencia Dinámica considera la continuidad del negocio del seguro. Se refiere a la capacidad del asegurador para cumplir con los compromisos que puedan surgir como consecuencia de su actividad futura, en relación con los riesgos que enfrenta el asegurador, derivados de las fluctuaciones aleatorias de la siniestralidad.

Se supone que la prima pura expresa la media de la siniestralidad, y aun suponiendo que el cálculo sea correcto, la siniestralidad anual es una variable aleatoria que fluctuará alrededor de su media. Este riesgo de fluctuación justifica la necesidad de un Margen de Solvencia y las Provisiones para Desviaciones de Siniestralidad, es decir partidas del patrimonio del asegurador, que no estén afectadas a compromisos contraídos en virtud de las primas emitidas por las pólizas en vigencia.

Por ello la legislación vigente exige Capitales y Reservas Mínimas para poder operar.

5.3.1 Capital Mínimo Según Normativa

El marco normativo argentino, bajo la supervisión de la Superintendencia de Seguros de la Nación (SSN), establece un riguroso sistema para el cálculo del capital mínimo que las entidades aseguradoras deben mantener para garantizar su solvencia. El detalle de la reglamentación se puede encontrar en el Artículo 30 del Reglamento General de la Actividad Aseguradora (RGAA).

El artículo establece que la autoridad de control fijará, con criterio uniforme y general, el monto de los capitales mínimos que deben tener las aseguradoras. Este capital se determina como el mayor valor resultante de tres pilares de cálculo distintos, asegurando así que la entidad posea recursos patrimoniales suficientes para hacer frente a sus obligaciones con los asegurados.

Es fundamental destacar que los resultados de los cálculos basados en primas y siniestros son, a su vez, ajustados por un coeficiente que refleja la relación entre los siniestros netos de reaseguro y los siniestros brutos de la compañía. Y, además, se determina como una magnitud **global para el conjunto de todos los ramos** de la empresa.

Los tres pilares para la determinación del capital mínimo son:

Capital Mínimo Fijo: Un monto absoluto establecido por la SSN. Este capital se ha expresado en Unidades de Valor Adquisitivo (UVA), con el objetivo de preservar su valor real ante las fluctuaciones económicas.

Cálculo Basado en Primas: El capital mínimo en función a las Primas y Recargos (12 meses), se aplica un 16%. Este porcentaje ha ido variando en el tiempo, pero siempre se mantuvo entre un 16% y un 18% (una combinación de ambos).

Cálculo Basado en Siniestros: El capital mínimo en función a los Siniestros, un promedio de pagos más reservas (al cierre) de 36 meses, se aplica un 23%.

5.3.2 Críticas a la Normativa

La forma de cálculo que adopta la normativa actual tiene una serie de críticas, alguna de las más importantes se puede detallar en los siguientes puntos.

- Los porcentajes del 16% y 18% son resultados de estudios hechos hace demasiados años, deberían actualizarse.
- El margen de solvencia depende de la cantidad de primas, y no depende para nada de la calidad de los riesgos que generan esas primas.
- El método no contempla en el cálculo los niveles y tipo de plan de reaseguro. Las cesiones sólo entran en la relación entre Siniestralidad neta de reaseguro y siniestralidad bruta, sin que dicho cociente pueda ser inferior a 50%.
- Hay quienes sostienen que el cálculo debe hacerse directamente sobre el monto bruto y no sobre el neto, ignorando el reaseguro, independientemente del límite del 50%. El fundamento es que el riesgo de insolvencia del reasegurador frente al asegurado, lo debe asumir en su totalidad el asegurador directo.
- El margen de solvencia común a todo el mercado no se adapta a la realidad de cada asegurador. Por ejemplo, un asegurador con primas insuficientes podría conformar un margen de solvencia inferior a otro que calculó adecuadamente las primas.
- No se considera en absoluto el riesgo de la inversión de los activos del asegurador. Los requisitos de solvencia se basan exclusivamente en la experiencia siniestral.

5.3.3 Capital Mínimo Según el riesgo

La normativa argentina vigente establece un capital mínimo a partir de fórmulas predefinidas sobre primas o siniestros detallada en la sección anterior. En esta sección se propone, en línea con los principios de Solvencia II, reemplazar este componente por un requisito de capital basado en el riesgo intrínseco de cada compañía.

El término técnico-actuarial para este requisito es, garantizando la el **Margen Mínimo de Solvencia** (MMS). Este se define como el capital necesario para absorber pérdidas inesperadas solvencia con una alta probabilidad (por ejemplo, 99.5%). Su cálculo se fundamenta en el modelado de la distribución de la cuantía siniestral anual agregada (S), considerando las políticas de suscripción, reaseguro y recargos de seguridad propios de la entidad.

El cálculo del MMS se hace en base a los distintos modelos presentados en las secciones anteriores de la distribución de S. Uno de los objetivos del trabajo es medir la diferencia que ocasionaría este cambio de normativa.

El MMS se determina en función del siguiente concepto.

5.3.3.1 Valor a riesgo

El Valor en Riesgo (VaR) es una medida estadística que cuantifica la pérdida potencial máxima de una cartera (de activos, de pasivos o de un negocio completo) durante un período de tiempo específico (por ejemplo 1 año) y para un nivel de confianza determinado.

El valor en riesgo VaR de un portafolio de seguros con un nivel de confianza $(1-\alpha)$ está dado por **el menor** "s" tal que la probabilidad de que las pérdidas excedan "s" es menor o igual a $(1-\alpha)$.

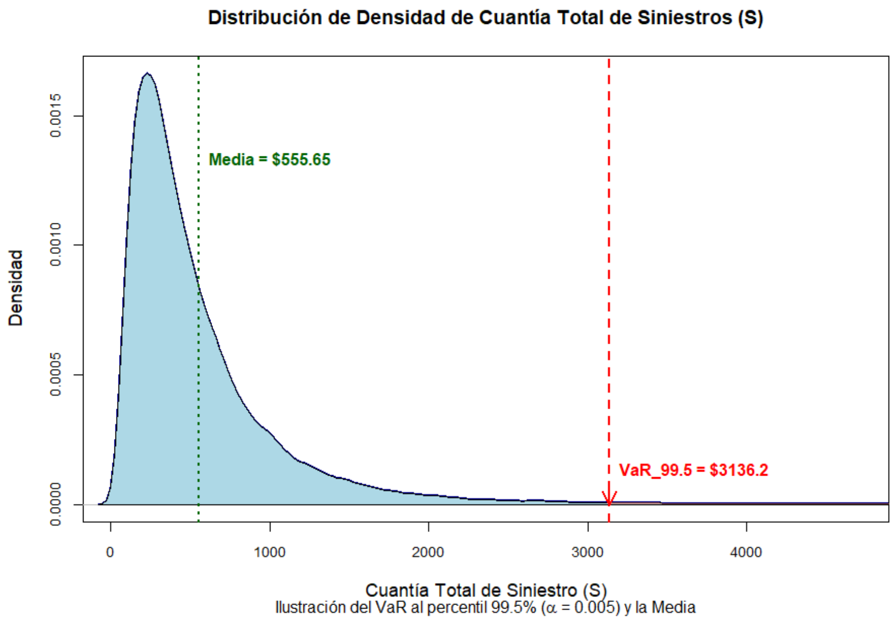
$$VaR_{1-\alpha}(S) = Inf\{s\epsilon R / P(S > s) \leq 1 - \alpha\}, 0 < \alpha < 1$$

Matemáticamente, si S es la variable aleatoria que representa la cuantía total de los siniestros en un período anual, entonces el $VaR_{1-\alpha}(S)$ es **el cuantil 1−α** de su distribución.

$$P\{S > VaR_{1-\alpha}(S)\} = \alpha$$

Por ejemplo, si una compañía de seguros calcula su VaR a un año con un 99.5% de confianza y el resultado es de $3136 millones, significa que hay una probabilidad del 0.5% (o 1 vez cada 200 años) de que las pérdidas en el próximo año superen dicho valor.

Esto se ilustra en el siguiente gráfico.



5.3.3.2 Margen Mínimo de Solvencia

Finalmente, se puede determinar el margen de solvencia necesario para poder operar con un nivel de confianza elegido en un período específico (en general anual).

Llamamos μ al margen de riesgo el cual corresponde al capital necesario para operar en el negocio con un nivel de confianza 1−α, definido de la siguiente manera:

$$\mu = VaR_{1-\alpha}(S) - P$$

siendo P la prima definida de la siguiente manera:

$$P = (1 + \theta) * E(S), \theta > 0$$

El valor esperado E(S) corresponde a la prima pura calculada según los distintos modelos. En general, este importe está cargado con un coeficiente de seguridad θ. En los resultados se utilizó un valor del 5% a modo de ejemplo.

Dicho de otra manera, se busca el Margen Mínimo de Solvencia μ, necesario para garantizar una determinada probabilidad de Ruina o de Insolvencia α, o una probabilidad de solvencia 1−α. La solvencia se comprueba al final del ejercicio, se trata del margen mínimo de solvencia de un año.

Se trata de resolver la siguiente ecuación.

$$P\{S \leq P + \mu\} = 1 - \alpha \quad , \quad 0 < \alpha < 1$$

Resolver la ecuación, exige conocer la función de distribución de S. En muchos casos es muy complejo encontrar la forma exacta, y por eso se estudian modelos de aproximación.

En este trabajo, calculamos el margen de solvencia determinado por cada uno de los modelos de la sección 4.2. En la siguiente sección se pueden apreciar los valores del $VaR\_{99.5}$ para los tres modelos obtenidos en la simulación de R, y en las secciones 5.3.4.2 y 5.3.4.3 se utilizan estos resultados para calcular el margen de solvencia.

5.3.4 Resultados

A partir de los resultados obtenidos según los distintos modelos simulados en R, mostrados en la sección 4.2, se calculan los distintos casos según normativa y según el riesgo.

Cuadro de la sección 4.2.
Resultados de la Simulación en R

Modelo	Min.	1er Quartil	Mediana	Media	Var 99.5%
1 BN/P	117.100.158	527.583.285	671.333.911	700.266.252	1.475.801.954
2 BN/LN	109.094.577	526.057.236	670.524.163	700.426.680	1.478.813.045
3 Gamma	135.644.388	525.402.077	672.204.815	698.341.492	1.456.425.068

5.3.4.1 Según Normativa

Para poder hacer una comparación, en el presente trabajo se adopta una versión simplificada de la normativa ya que, como vimos en 5.3.1. Además, se elige la versión basada en el *Cálculo por Primas* ya que en la práctica suele establecerse como el máximo de los tres pilares y, además, el valor de la siniestralidad total de la cartera utilizada, supera el capital fijo establecido para el ramo.

Finalmente, dada la proximidad de la prima pura obtenida en los distintos modelos, se adopta el **Modelo 2** para los cálculos de las siguientes secciones.

Bajo estas condiciones los resultados obtenidos son los siguientes (se expresan en millones de $).

Prima Pura=E(S)= 700,4 (Modelo 2: Binomial Negativa/Log-Normal)

%Gastos= 45%

Prima Comercial= E(S)/(1-%Gastos) = 700.4/(1-0.45) = 1,273

Capital Mínimo según normativa:

Capital Mínimo= Prima Comercial * 0.16 = 1,273 * 0.16 = 204

5.3.4.2 Según el riesgo

Los resultados obtenidos están expresados en millones de $.

Nivel de confianza=1- α=99.5%.

Prima Pura=E(S)= 700,4 (Modelo 2: Binomial Negativa/Log-Normal)

Coeficiente de Seguridad= 5%

Prima recargada=P= (1+0.05) * 700.4= 735

VaR$_{\_0.995}$= 1.478,8 (Modelo 2: Binomial Negativa/Log-Normal)

Margen de Solvencia= µ =1,479-735=743

Si se compara este valor de $743 Millones con el valor obtenido según la sección anterior de $204 Millones, se observa un incremento del capital mínimo del 265%. Si bien es un ejemplo simplificado, se puede observar que el cambio de normativa podría implicar un fuerte incremento del capital mínimo requerido según el nivel de confianza establecido.

5.3.4.3 Impacto del Reaseguro

A efectos de mostrar el impacto que tiene el reaseguro para mitigar el riesgo, específicamente en la reducción de la prima pura, del capital mínimo requerido según normativa y del margen de solvencia según el riesgo.

Se hace un ensayo de aplicación de un reaseguro de Exceso de Pérdida y, dado la proximidad de los resultados de los distintos modelos vistos en las secciones anteriores, se elige el **Modelo 2** para realizar las comparaciones.

Reaseguro Exceso de Pérdida[2]: Es aquel en que el reasegurador, con relación a determinado ramo o modalidad de seguro, participa en los siniestros de la cedente cuyo importe exceda de una determinada cuantía preestablecida a tal efecto (Prioridad).

Para las distintas prioridades M de 1, 5 y 10 millones de $, se tienen los siguientes estadísticos de la distribución de S en R (distribución del **Modelo 2**).

Resultados de la Simulación en R

M	Min.	1er Quartil	Mediana	Media	3er Quartil	Var 99.5%
1	90.401.836	405.710.040	515.951.172	537.962.586	643.169.649	1.130.027.711
5	107.450.838	495.448.359	630.024.148	657.518.847	785.186.258	1.378.264.096
10	109.094.577	512.729.855	650.899.837	680.249.295	813.964.067	1.416.526.781

[2] Diccionario de Seguros – Fundación Mapfre

Al comparar estos resultados con los obtenidos en el cuadro de la sección 4.2, se puede apreciar el impacto del reaseguro en la reducción de la prima pura según las distintas prioridades:

M1: pasa de $700.4 a $538 millones, una **reducción del 23%.**
M2: pasa de $700.4 a $658 millones, una **reducción del 6%**.
M3: pasa de $700.4 a $680 millones, una **reducción del 3%**.

Notar que para la prioridad M3 de $10 Millones, la prima pura resultante se acerca bastante a la prima sin reaseguro. Esto se explica por la baja frecuencia de los siniestros catastróficos. Para tener una referencia, en la cartera utilizada para el trabajo, el máximo siniestro es de $15 Millones y el que le sigue de $10.5 Millones, con una frecuencia muy baja. Esto también refleja la naturaleza del ramo.

En cuanto al impacto del reaseguro en capitales mínimos requeridos por normativa y el margen de solvencia según el riesgo, los resultados para las distintas prioridades son los siguientes.

Prioridad M (en Millones)	Según Normativa			Según el Riesgo			Dif. % (MSM/CMN)
	Prima Pura (Modelo 2)	Prima Comercial (Gto 45%)	Capital Mínimo (16%* PC)	VaR_99.5%	Prima Recargada (Cof. Seg. 5%)	Margen de Solvencia Mínimo	
1	537.962.586	978.113.793	156.498.207	1.130.027.711	564.860.715	565.166.996	261%
5	657.518.847	1.195.488.813	191.278.210	1.378.264.096	690.394.789	687.869.307	260%
10	680.249.295	1.236.816.900	197.890.704	1.416.526.781	714.261.760	702.265.021	255%
Sin Reaseguro	700.426.680	1.273.503.055	203.760.489	1.478.813.045	735.448.014	743.365.031	265%

El impacto del reaseguro sobre el Capital Mínimo es el mismo que para la prima pura ya que son proporcionales, es decir, se produce una reducción del 23%, 6% y 3% respectivamente para cada prioridad.

En cuanto al impacto del reaseguro sobre el Margen de Solvencia Mínimo, si se comparan los valores de cada prioridad con el resultado obtenido sin reaseguro ($743 Millones), las diferencias son similares, con reducciones que van desde el 24%, 7% y 6% respectivamente.

Por último, el impacto del reaseguro sobre el supuesto de cambio de normativa de Capital Mínimo (Solvencia I) a Margen de Solvencia Mínimo según el riesgo (Solvencia II), no muestra grandes cambios al resultado obtenido sin reaseguro (incremento del 265%). En este caso, los incrementos del margen van del 261%, 260% y 255% respectivamente según las prioridades.

6 Principio de Utilidad Exponencial para S

Aprovechando el punto 3.4.1 de la aproximación de S a través de la función gamma, se desarrolla una aplicación del cálculo de la prima pura a través del principio de utilidad exponencial.

6.1 Desarrollo teórico

Utilizando la función de pérdida

$$L(S,P) = \frac{1}{k}(e^{kS} - e^{kP})^2 \qquad k > 0,$$

donde k es la "constante de aversión al riesgo". Minimizando la esperanza de la función de pérdida, se obtiene el resultado para la prima de riesgo[3]

$$P = \frac{1}{k}\log E(e^{kS})$$

Aplicando este resultado para el caso de una distribución gamma de parámetros α y β, se puede obtener la prima P en función de los parámetros. Para ello calculamos lo siguiente:

$$E(e^{kS}) = \int_0^\infty e^{kS} f(S)dS = \int_0^\infty e^{kS} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} S^{\alpha-1} e^{-\beta S} dS \qquad (*)$$

Haciendo el cambio de variable $Z = (\beta - k)S$, se tiene

$$S^{\alpha-1} = \frac{Z^{\alpha-1}}{(\beta-k)^{\alpha-1}} \text{ , } dZ = (\beta - k)dS$$

Teniendo en cuenta la definición de $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty Z^{\alpha-1} e^{-Z} dZ$

y reemplazando todo en la integral (*), se obtiene el siguiente resultado:

$$E(e^{kS}) = \left(\frac{\beta}{\beta - k}\right)^\alpha$$

De esta manera se tiene la expresión de la prima P obtenida con el principio de Utilidad Exponencial aplicado a la distribución gamma de 2 parámetros:

$$P = \frac{1}{k}\log\left(\frac{\beta}{\beta - k}\right)^\alpha$$

6.2 Resultado de la Prima Pura

[3] Unidad 5 – Tarificación Seguros Patrimoniales - Posgrado de Estadística Actuarial

Como se pudo ver en 4.2 el valor de la media de la cuantía total de siniestros según el modelo gamma E(S)= 698 (en millones de $).

Aplicando el valor de los parámetros α y β estimados en 4.1 y tomando

k= β/2= 5. 93227885498259 e-09 >0

Se obtiene el valor de P= 971, un 39% más que la media E(S). A medida que se reduce k se obtienen valores más cercanos a la media. Por ejemplo, para

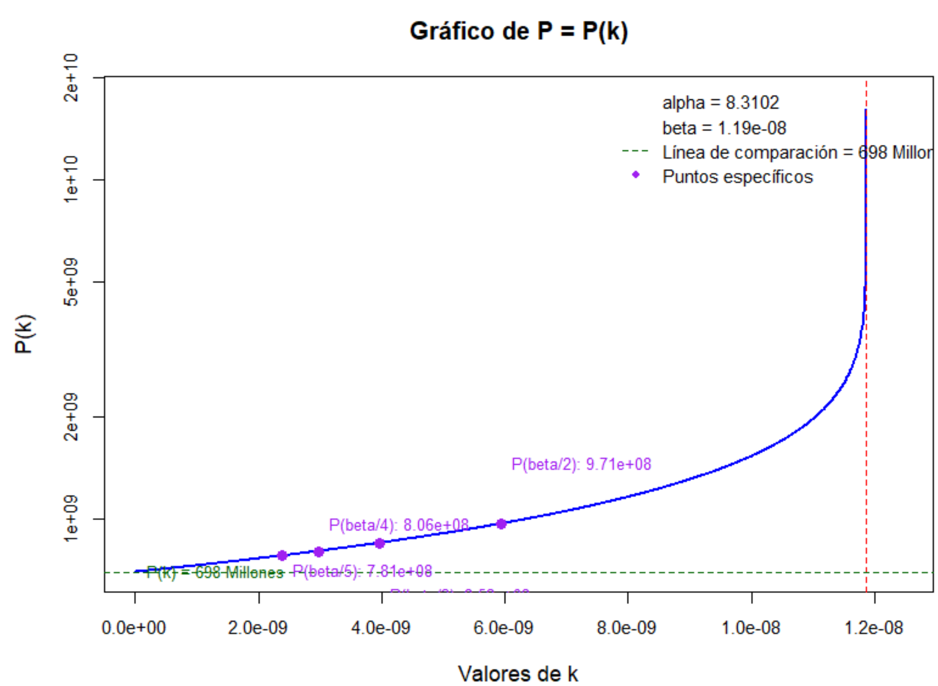
k= β/5= 2. 37291154199303e-09 >0

Se obtiene el valor de P= 781. Como se pudo ver en la teoría de riesgo, si k tiende a cero, la prima obtenida por el Principio de Utilidad Exponencial tiende a la media:

$$k \to 0 \quad \Rightarrow P = \frac{1}{k} \log E(e^{kS}) \to E(S)$$

Esto se puede observar en el siguiente gráfico de P como función de la *constante de aversión al riesgo* k, para los parámetros estimados en 4.1. α = 8.3102 y β= 1.18645577099652$e-08$

$$P = P(k) = \frac{1}{k} \log\left(\frac{\beta}{\beta - k}\right)^{\alpha}, 0 < k < \beta$$



7 Conclusiones

A lo largo del presente trabajo, se ha acometido la tarea de aplicar conceptos fundamentales de la estadística actuarial al análisis de un conjunto de datos de un ramo específico no vida, con el fin último de robustecer la comprensión y gestión del riesgo inherente a la actividad aseguradora.

Los objetivos propuestos han sido abordados sistemáticamente. Se desarrollaron y compararon dos modelos principales para la distribución de la cuantía total de siniestros, S: un modelo compuesto, que considera explícitamente la frecuencia (N) y la severidad (X) de los siniestros (explorando distribuciones Binomial Negativa para N, y Log-Normal y Pareto I para X mediante simulación de Montecarlo), y un modelo de aproximación directa de S utilizando la distribución Gamma. Es destacable que, a pesar de las diferencias conceptuales en su construcción, las funciones de densidad de S obtenidas a partir de estos tres enfoques presentaron una considerable similitud, otorgando consistencia a los resultados.

El análisis se extendió al impacto normativo, evaluando las diferencias en el cálculo de capitales mínimos al transitar de un esquema de Solvencia I a Solvencia II. Esta comparativa subraya la sensibilidad de los requerimientos de capital a la metodología y a los parámetros de riesgo subyacentes, donde una adecuada modelización de S resulta crucial.

Asimismo, se cuantificó el efecto del reaseguro (específicamente Exceso de Pérdida) sobre la distribución de pérdidas netas para el Modelo 2 ($N \sim BN, X \sim LN$), demostrando su rol como herramienta mitigadora. En cuanto a las dos situaciones planteadas en 5.3.4.1 y 5.3.4.2, es evidente que un cambio en la normativa que implique mayores exigencias produciría grandes cambios en Capitales Mínimos, más de un 260% en el ejemplo mostrado.

Adicionalmente, la utilización de la herramienta R para la implementación de las simulaciones y estimaciones ha sido instrumental, permitiendo manejar la complejidad computacional inherente a los modelos compuestos y facilitando la reproducibilidad de los resultados.

Finalmente, se pudo ver un ejemplo de aplicación en la determinación de la prima de riesgo bajo la metodología del Principio de Utilidad Exponencial, donde se pudo comparar con el método del Principio de Prima de Equilibrio ($P_R=E(X)$). En el ejemplo, dado una constante de aversión muy baja (la mitad del Beta de la distribución Gamma), las primas resultan un 39% superior. Si se reduce la constante a la quinta parte del Beta, la prima del método se aproxima a la media.

8 NEXO I

8.1 Metodología de la Simulación en R

Este anexo describe el proceso de simulación Monte Carlo utilizado para modelar la distribución de la cuantía de siniestros agregada (S). El objetivo es generar un gran número de posibles resultados anuales de siniestralidad para analizar su distribución y calcular métricas de riesgo. El proceso se descompone en los siguientes pasos lógicos.

8.1.1 Paso 1: Reproducibilidad y Número de Iteraciones

Para cualquier estudio basado en simulación, es fundamental garantizar la **reproducibilidad**, es decir, que los resultados puedan ser obtenidos nuevamente si se ejecuta el mismo código. En R, esto se logra fijando una "semilla" para el generador de números aleatorios.

Adicionalmente, se define el número de iteraciones (años a simular), que para este trabajo se fijó en j=10,000 para asegurar la convergencia de la distribución.

```
R
# Fijamos la semilla para garantizar la reproducibilidad de los resultados.
# Cualquier persona que use la semilla 123 obtendrá la misma secuencia de números "aleatorios".
set.seed(123)

# Cantidad de Iteraciones (años a simular) para el método de Montecarlo.
j <- 10000
```

8.1.2. Paso 2: Simulación de la Frecuencia de Siniestros (N)

El primer componente aleatorio del modelo es el número de siniestros por año (N). Se asume que N sigue una distribución Binomial Negativa, cuyos parámetros (k y p) fueron estimados previamente.

Se genera un vector N de j elementos, donde cada elemento N[i] representa la cantidad de siniestros ocurridos en el año simulado i.

```
R

#Parámetros k y p de la Binomial Negativa (calculados en el script principal)
p <- 0.0012385
k <- 8.50978

# Se crea un vector N para almacenar el número de siniestros de cada uno de los j años.
N <- rep(0, j)

# Bucle para simular j valores de la frecuencia de siniestros.
for (i in 1:j) {
  # Para cada año i, generamos un número aleatorio de siniestros.
  N[i] <- rnbinom(n = 1, size = k, prob = p)}

# Ejemplo: mostramos el número de siniestros para los primeros 5 años simulados.
# N[1] = 7096, N[2] = 6588, ...
print(N[1:5])
```

8.1.3 Paso 3: Simulación de la Cuantía Individual de Siniestros (X)

Una vez que sabemos *cuántos* siniestros ocurrieron en cada año, simulamos la *cuantía* o el costo de cada uno de ellos (X). Por ejemplo, en el modelo 2, se asume que X sigue una distribución Log-Normal.

Para gestionar eficientemente estos valores, se crea una matriz X. Cada fila i de la matriz contendrá las cuantías de los N[i] siniestros del año i. Para que la matriz sea rectangular, su número de columnas se fija como el máximo número de siniestros ocurrido en un año (max(N)). Las celdas no utilizadas en filas con menos siniestros se rellenan con ceros, lo cual no afecta la suma total.

```
R
# Parámetros mu y sigma2 de la Log-Normal (calculados en el script principal)
mu <- 11.23
sigma2 <- 2.26

# Creamos una matriz de ceros con j filas y max(N) columnas.
X <- matrix(data = 0, nrow = j, ncol = max(N))

# Bucle anidado: se recorre cada año (i) y cada siniestro de ese año (k).
for (i in 1:j) {
  # El bucle interno se ejecuta N[i] veces (el número de siniestros de ese año).
  for (k in 1:N[i]) {
    # Simulamos el costo del siniestro k del año i y lo guardamos en la matriz.
    X[i, k] <- rlnorm(n = 1, meanlog = mu, sdlog = sqrt(sigma2))  }}
```

8.1.4 Paso 4: Cálculo de la Siniestralidad Total (S)

Con la matriz de cuantías individuales completa, el importe total de la siniestralidad para cada año simulado (S_i) se obtiene simplemente sumando los valores de cada fila. El resultado es un vector S de j elementos, que representa la distribución empírica de la siniestralidad total anual.

R
```
# Se crea un vector S para almacenar la siniestralidad total de cada año.
S <- rep(0, j)

# Se recorre cada fila (año) de la matriz X y se suman sus elementos.
for (i in 1:j) { S[i] <- sum(X[i, ])}

# Ejemplo: mostramos la siniestralidad agregada para los primeros 5 años simulados.
# S[1] = 722,868,775, S[2] = 693,908,095, ...
print(S[1:5])
```

Este vector S es el resultado principal de la simulación y la base para el análisis de riesgo, cálculo de primas y capital.

8.1.5 Paso 5: Modelado de un Reaseguro de Exceso de Pérdida

La misma metodología permite evaluar el efecto de un contrato de reaseguro. Para un reaseguro de Exceso de Pérdida con una prioridad (retención) de M, el costo para la aseguradora de un siniestro individual de cuantía X es min(X,M).

Para modelarlo, se crea una nueva matriz XM, donde cada siniestro que supera la prioridad M es reemplazado por el valor de M.

Para ilustrar de manera visual cómo se aplica la prioridad del reaseguro, consideremos un pequeño ejemplo hipotético. Supongamos que tenemos una matriz de siniestros brutos con 5 años (filas) y 8 siniestros (columnas), y se ha establecido una prioridad M = 1,000,000.

R
```
# Matriz X (Siniestros Brutos)
# Matriz XM (Siniestros Netos de Reaseguro)
# Filas: Años simulados
# Columnas: Siniestros individuales

> X[, 1:8]
          [,1]      [,2]       [,3]       [,4]        [,5]       [,6]      [,7]       [,8]
[1,]   6342.590  11733.51 328371.378  20541.734   22918.209 439373.791 42502.831   1707.512
[2,]   4524.995   2487.95 134615.350   1025.964   23291.605   5934.656  4305.224  13353.197
[3,] 160982.183   5519.02  32162.370   6555.522   38213.685   1548.990 54901.623 180705.743
[4,]  12721.928  24454.03  42299.296 137565.578 2739561.662 672317.191 39324.232  13508.887
[5,]  28828.257 172262.81   2805.672   6577.620    5571.327   5703.875 82747.217   7946.769
> XM[, 1:8]
          [,1]      [,2]       [,3]       [,4]        [,5]       [,6]      [,7]       [,8]
[1,]   6342.590  11733.51 328371.378  20541.734   22918.209 439373.791 42502.831   1707.512
[2,]   4524.995   2487.95 134615.350   1025.964   23291.605   5934.656  4305.224  13353.197
[3,] 160982.183   5519.02  32162.370   6555.522   38213.685   1548.990 54901.623 180705.743
[4,]  12721.928  24454.03  42299.296 137565.578 1000000.000 672317.191 39324.232  13508.887
[5,]  28828.257 172262.81   2805.672   6577.620    5571.327   5703.875 82747.217   7946.769
```

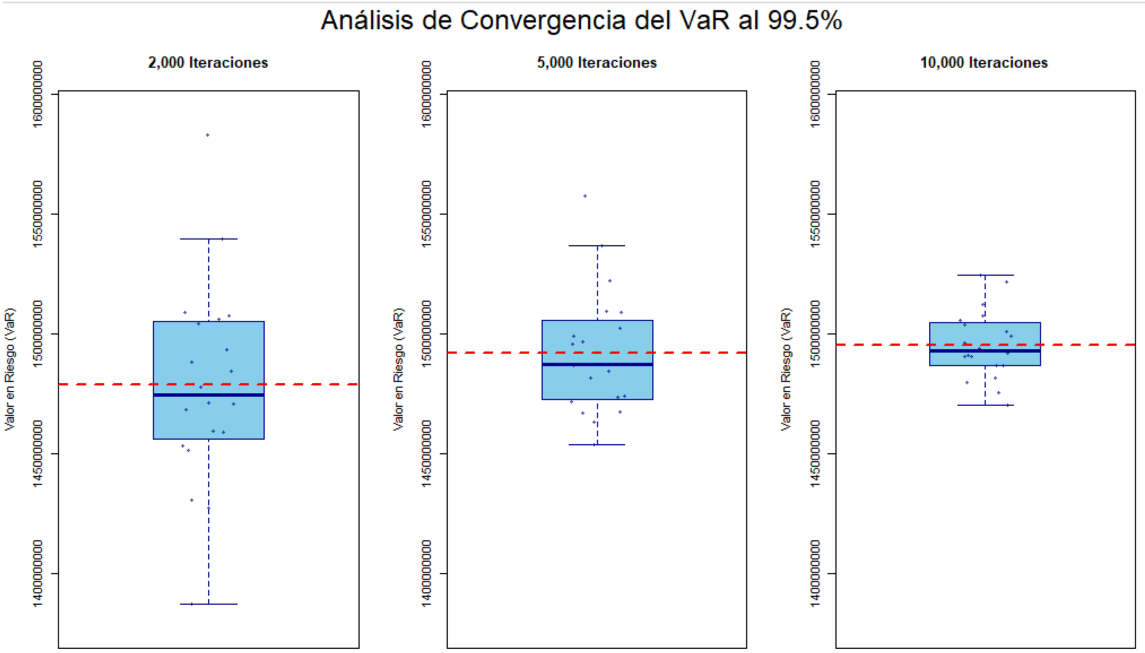
Luego, se suma cada fila de esta nueva matriz XM para obtener el vector S_M de siniestralidad neta de reaseguro.

```r
R
# Se define una prioridad, por ejemplo, M = 1,000,000.
M1 <- 1000000

# Se crea una nueva matriz XM para los siniestros netos.
XM1 <- matrix(data = 0, nrow = j, ncol = max(N))

# Se aplica la prioridad a cada siniestro simulado.
for (i in 1:j) {  for (k in 1:N[i]) { XM1[i, k] <- min(X[i, k], M1) }}

# Finalmente, se calcula el nuevo vector de siniestralidad agregada neta.
S_M1 <- rep(0, j)
for (i in 1:j) { S_M1[i] <- sum(XM1[i, ])}

# Ejemplo: comparamos la siniestralidad del primer año, bruta y neta.
# S[1] = 722,868,775
# S_M1[1] = 533,375,191
print(paste("Siniestralidad Bruta Año 1:", round(S[1])))
print(paste("Siniestralidad Neta Año 1:", round(S_M1[1])))
```

Este proceso, replicado para diferentes distribuciones y estructuras de reaseguro, constituye el núcleo del análisis presentado en esta monografía.

8 ANEXO II: Script R Completo

Para determinar el número de simulaciones necesarias, se realizó un análisis de estabilidad sobre la métrica clave del Valor en Riesgo (VaR) al 99.5%. Se observó que, con 10,000 simulaciones, el Coeficiente de Variación (CV) de la estimación del VaR es inferior al 1%, lo cual se considera un nivel de convergencia robusto para los fines de este estudio. Por lo tanto, se adoptó este número de iteraciones para la generación de los resultados finales.




```
###################### MODELO PARA LA CUANTÍA TOTAL DE SINIESTROS S ##############################
#install.packages("dplyr")
#library(dplyr)

# Fijamos la semilla para garantizar la reproducibilidad de los resultados
set.seed(123)

# Para evitar la notación científica (ej. 1.2e+08) en los resultados
options(scipen = 999)

# ---- FUNCIONES AUXILIARES PARA FORMATEO ----
# Función para imprimir resúmenes con formato de miles y sin decimales
imprimir_resumen <- function(objeto) {
  # Usamos round() para quitar decimales antes de formatear
  print(format(round(summary(objeto), 0), big.mark = ".", decimal.mark = ","))
}

# Función para imprimir cuantiles con formato de miles y sin decimales
imprimir_cuantiles <- function(objeto, probs = NULL) {
  if (is.null(probs)) {
    # Usamos round() para quitar decimales antes de formatear
    print(format(round(quantile(objeto), 0), big.mark = ".", decimal.mark = ","))
  } else {
    print(format(round(quantile(objeto, probs = probs), 0), big.mark = ".", decimal.mark = ","))
  }
}
```

```
# ---- FIN DE FUNCIONES AUXILIARES ----


#Cantidad de Iteraciones para Montecarlo
j=


#Inicia vectores en cero para luego cargar
S=rep(0,j)
Sp=rep(0,j)
Sexp=rep(0,j)

####DIST. DE N: Suponemos que es Binomial Negativa ################

E_N= 6870.85
S2_N=5547626.9

# Despeje los parámetros de Binomial Negativa: k y p de la formulas de E_N y V_N

p= (E_N)/(S2_N)
k= (E_N^2)/(S2_N-E_N)

print(p)
print(k)


N2=rep(0,j)

for (i in 1:j)
{ N2[i]=rnbinom(1,k,p)}

N=N2
N[1:10]
##################################  DIST. DE X: cuantía individual de los siniestro

############# CASO 1: X-Lognormal(mu,sigma^2) #################################

xmedia= 102052.42
s2=323842091918.8

# Despeje los parámetros sigma y mu

sigma2=log((s2/(xmedia)^2)+1)
mu= log(xmedia)-(sigma2/2)

print(paste("Parámetro sigma2 LN: ",sigma2))
print(paste("Parámetro mu LN: ",mu))

#se toma el máximo de los valores simulados de N para teber una matriz rectangular de las X
#se inicializa en cero matrices X

X1=matrix(data=0,j,max(N))
XM1=matrix(data=0,j,max(N)) #EXL con prioridad M1
XM2=matrix(data=0,j,max(N)) #EXL con prioridad M2
XM3=matrix(data=0,j,max(N)) #EXL con prioridad M3

########################### Inicializo las prioridades
M1<-1000000
M2<-5000000
M3<-10000000

########################## Carga vectores Cuantías X

for(i in 1:j)
{ for (k in 1:N[i])
{X1[i,k]=rlnorm(1, meanlog = mu, sdlog = sqrt(sigma2))
XM1[i,k]=min(X1[i,k],M1)
XM2[i,k]=min(X1[i,k],M2)
XM3[i,k]=min(X1[i,k],M3)
}}
X=X1

X[1:10,1:8]
XM1[1:10,1:8]
####################### X-Pareto(alpha,beta) ##########################
```

```
a=((xmedia^2)+2*s2)/s2
b= ((a-1)*xmedia)/a

print(paste("Parámetro de Pareto P_alfa: ",a))
print(paste("Parámetro de Pareto P_beta: ",b))

#se inicializa en cero
X2=matrix(data=0,j,max(N))

for(i in 1:j)
{ for (k in 1:N[i])
{u=runif(1,0,1)
X2[i,k]=b/(u^(1/a))}}

Xp=X2

Xp[1:10,1:8]  #Se muestra los primeros valores de la matriz Xp

########################### DISTRIBUCIONES DE S ###########################################
# S   -> Compuesta BN + LN
# S_M   -> Compuesta BN + LN con los X netos de la prioridad
# Sp  -> Compuesta BN + P

#Inicia vectores en cero para luego cargar

S=rep(0,j)
Sp=rep(0,j)
S_M1=rep(0,j)
S_M2=rep(0,j)
S_M3=rep(0,j)

#########################

for (i in 1:j){ S[i]    =sum(X[i,])
S_M1[i] =sum(XM1[i,])
S_M2[i] =sum(XM2[i,])
S_M3[i] =sum(XM3[i,])
Sp[i]   =sum(Xp[i,])}

S[1:10]
S_M1[1:10]

########################### APROXIMACIÓN Gamma DE S UTILIZANDO LOS VALORES DE LA EMPÍRICA #########

#estimación de los parámetros de la función g
media<- mean(S)
varianza<-var(S)
print(format(round(media,0), big.mark="."))
print(format(round(varianza,0), big.mark="."))

media_p<- mean(Sp)
varianza_p<-var(Sp)
print(format(round(media_p,0), big.mark="."))

S_Alfa<-media^2/varianza
S_Beta<-media/varianza

print(paste("Parámetro Alfa de Gamma: ",S_Alfa))
print(paste("Parámetro Beta de Gamma: ",S_Beta))


gama3<-2*sqrt(S_Alfa)/sqrt(S_Beta)
print(paste("Coefciente de asimetría de g: ", gama3))

#se generan j valores aleatorios con los parámetros calculados para una dist. gamma
g<- rgamma(j,shape=S_Alfa,scale = 1/S_Beta)
Sg<-density(g)

##################################### gráfica de las aproximaciones de S

plot(density(S),main="Densidad de S",xlab="s",ylab="f(s)",col = "blue",lwd=5)
lines(density(Sp),lwd=5,col="brown")
lines(Sg,lwd=5,col="red")
legend("topright", legend=c("S~BN/LN", "Sp~BN/P", "Sg~Gamma"), col=c("blue", "brown", "red"), lwd=5)
```

```r
##################################### medidas de las dos aprox de S
imprimir_resumen(S)
imprimir_cuantiles(S)
imprimir_cuantiles(S, probs = seq(0.99, 1, 0.005))

imprimir_resumen(Sp)
imprimir_cuantiles(Sp)
imprimir_cuantiles(Sp, probs = seq(0.99, 1, 0.005))

imprimir_resumen(g)
imprimir_cuantiles(g)
imprimir_cuantiles(g,probs = seq(0.99, 1, 0.005))


##################################### Valores de S para las distintas prioridades M1, M2 y M3
imprimir_resumen(S_M1)
imprimir_cuantiles(S_M1)
imprimir_cuantiles(S_M1,probs = seq(0.99, 1, 0.005))

imprimir_resumen(S_M2)
imprimir_cuantiles(S_M2)
imprimir_cuantiles(S_M2,probs = seq(0.99, 1, 0.005))

imprimir_resumen(S_M3)
imprimir_cuantiles(S_M3)
imprimir_cuantiles(S_M3,probs = seq(0.99, 1, 0.005))


##################################### Capitales Minimos
# Cálculo del VaR al 99.5%

Confianza<-0.995
P_Gastos<-0.45

##################################### Capitales Minimos según normativa

Prima_Comercial_S<- mean(S)/(1-P_Gastos)
print(paste("Prima S:", format(Prima_Comercial_S, big.mark = ".", decimal.mark = ",", nsmall = 0)))

CM_Normativa<- Prima_Comercial_S*0.16
print(paste("Capital Mínimo Requerido 1 x Normativa:", format(CM_Normativa, big.mark = ".", decimal.mark = ",", nsmall = 0)))

#################################### Capitales Minimos según Riesgo - y efecto Reaseguro

#Primas Puras de S y para cada Prioridad M
Prima_S<-mean(S)
Prima_SM1<-mean(S_M1)
Prima_SM2<-mean(S_M2)
Prima_SM3<-mean(S_M3)

#Valor a riesgo y capital
S_ordenado <- sort(S)
VaR_S <- quantile(S_ordenado, Confianza)
CM_S<-VaR_S-Prima_S

print(paste("Prima Pura S:", format(Prima_S, big.mark = ".", decimal.mark = ",", nsmall = 0)))
print(paste("VaR S ", Confianza*100, "% de confianza:", format(VaR_S, big.mark = ".", decimal.mark = ",", nsmall = 0)))
print(paste("CM_S:", format(CM_S, big.mark = ".", decimal.mark = ",", nsmall = 0)))

##SM1
SM1_ordenado <- sort(S_M1)
VaR_SM1 <- quantile(SM1_ordenado, Confianza)
CM_SM1<-VaR_SM1-Prima_SM1

print(paste("Prima_SM1:", format(Prima_SM1, big.mark = ".", decimal.mark = ",", nsmall = 0)))
print(paste("VaR_SM1 al ", Confianza*100, "% de confianza:", format(VaR_SM1, big.mark = ".", decimal.mark = ",", nsmall = 0)))
print(paste("CM_SM1:", format(CM_SM1, big.mark = ".", decimal.mark = ",", nsmall = 0)))

##SM2
SM2_ordenado <- sort(S_M2)
VaR_SM2 <- quantile(SM2_ordenado, Confianza)
CM_SM2<-VaR_SM2-Prima_SM2

print(paste("Prima_SM2:", format(Prima_SM2, big.mark = ".", decimal.mark = ",", nsmall = 0)))
print(paste("VaR_SM2 al ", Confianza*100, "% de confianza:", format(VaR_SM2, big.mark = ".", decimal.mark = ",", nsmall = 0)))
print(paste("CM_SM2:", format(CM_SM2, big.mark = ".", decimal.mark = ",", nsmall = 0)))
```

```r
##SM3
SM3_ordenado <- sort(S_M3)
VaR_SM3 <- quantile(SM3_ordenado, Confianza)
CM_SM3<-VaR_SM3-Prima_SM3

print(paste("Prima_SM3:", format(Prima_SM3, big.mark = ".", decimal.mark = ",", nsmall = 0)))
print(paste("VaR_SM3 al ", Confianza*100, "% de confianza:", format(VaR_SM3, big.mark = ".", decimal.mark = ",", nsmall = 0)))
print(paste("CM_SM3:", format(CM_SM3, big.mark = ".", decimal.mark = ",", nsmall = 0)))


######################################## APLICACIÓN PRINCIPIO DE UTILIDAD EXPONENCIAL para Sg
#Defino coeficiente de aversión al riesgo

k1<-S_Beta/2
k2<-S_Beta/5

print(paste("Constante de aversión al riesgo k=b/2:", k1))
print(paste("Constante de aversión al riesgo k=b/5:", k2))

#calculo la E(e(kS)) según la teoría desarrollada en el punto 4.1.1

expected_value1 <- ((S_Beta) / ((S_Beta) - k1))^S_Alfa
expected_value2 <- ((S_Beta) / ((S_Beta) - k2))^S_Alfa

prima_exp1 <- log(expected_value1)/k1
prima_exp2 <- log(expected_value2)/k2

print(paste("Prima Pura según Principio de Utilidad Exponencial (k=b/2):", format(prima_exp1, big.mark = ".", decimal.mark = ",",
nsmall = 0)))
print(paste("Prima Pura según Principio de Utilidad Exponencial (k=b/5):", format(prima_exp2, big.mark = ".", decimal.mark = ",",
nsmall = 0)))
```