Instituto Politécnico

niversidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de

Función Exponencial y Logaritmo

3º Año

Cód. 1307-19

Prof. María del Luján Martínez
Prof. Carla Nápoli
Prof. Jorgelina Osés

Dpto. de Matemática

Matemática

Masterización: RECURSOS PEDAGOGICOS

FUNCIÓN EXPONENCIAL Y FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Se han analizando anteriormente algunas funciones tales como las polinómicas (lineal, cuadrática entre otras), recíprocas etc.

Ahora analizaremos ***la función exponencial y su inversa: la función logarítmica***, las cuales son importantes por sus diversas aplicaciones, como la descripción de crecimientos demográfico, el interés compuesto que produce un capital en un cierto tiempo, la desintegración radiactiva de una sustancia, etc.

FUNCIÓN EXPONENCIAL

Te proponemos el siguiente problema:

Bajo condiciones ideales, un cierto tipo de bacterias tiene una tasa de crecimiento relativo del 220% por hora. Accidentalmente se introduce un determinado número de estas bacterias en un producto alimenticio. Dos horas después de la contaminación, un conteo bacterial muestra que existen aproximadamente 40000 bacterias en el alimento.

a) Determina el número inicial de bacterias introducidas en el alimento
b) Estime el número de bacterias en el alimento 3 horas después de la contaminación.

Manos a la Obra !!!!!!!!

La cantidad inicial de bacterias la llamaremos con M_0 y como se reproducen el 220% después de una hora, la expresión algebraica que modeliza esta situación es:

$$M(1) = M_0 \left(\frac{220}{100}\right)^1 = M_0 \ 2{,}2^1$$

En el momento inicial $M(0) = M_0$.............

Transcurrido un cierto tiempo t, resulta $M(t) = M_0 \ 2{,}2^t$

a) Calcula la masa inicial, teniendo en cuenta que después de dos horas hay 40000 bacterias

$M(2) = M_0 \ 2{,}2^2 \Rightarrow$..

b) Sabiendo que $M_0 \cong$ 8265 podemos estimar que la cantidad de bacterias después de tres horas es: $M(3) = 8265 .(2,2)^3$

$M(3) =$ ……………

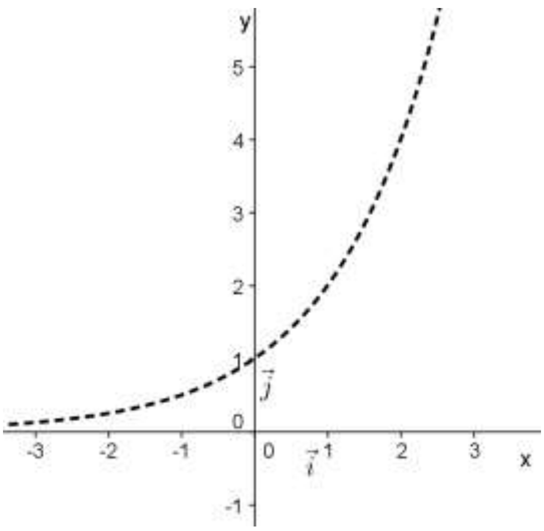
A la función como la analizada en el problema, donde la variable es el exponente de una potencia de una base determinada se las llama ***función exponencial***

Definimos a la función exponencial como :

$$\mathbf{f: R \to R^+ \ / \ f(x) = a^x \ , \ a > 0 \wedge a \neq 1 \quad a \in R}$$

Vamos a observar el comportamiento de esta función para determinar sus características según sea el valor de **a** establecido:

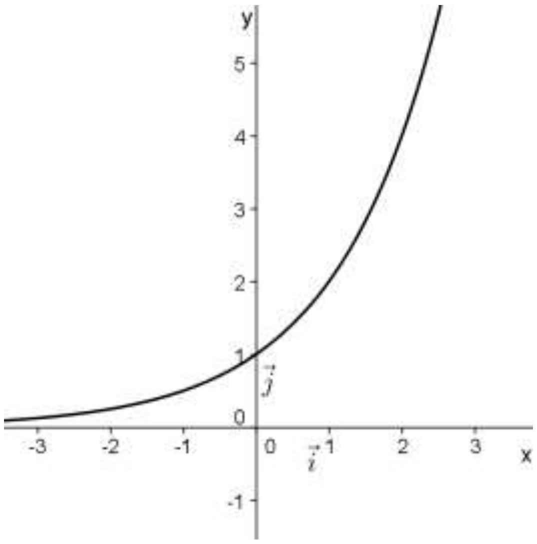
I) Si $\mathbf{a > 1}$ por ejemplo $f(x) = 2^x$



Completa la tabla:

x	-2,5	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = 2^x$							

Si consideramos valores racionales para la variable, en la gráfica quedan “huecos” que se han representado con una línea de trazos.



Si la variable toma valores irracionales como ser $\sqrt{2}$; π ; $\sqrt[3]{4}$ etc.

Supongamos que se desea calcular $2^{\sqrt{2}}$ no se puede realizar en términos de potencias y raíces de 2. Pero en lugar de ello se pueden emplear aproximaciones

$2^{1{,}41} = 2{,}657371628...$

$2^{1{,}414} = 2{,}66474965...$

$2^{1{,}41421} = 2{,}665137562...$

De esta manera este proceso converge al número cercano $2^{\sqrt{2}}$.

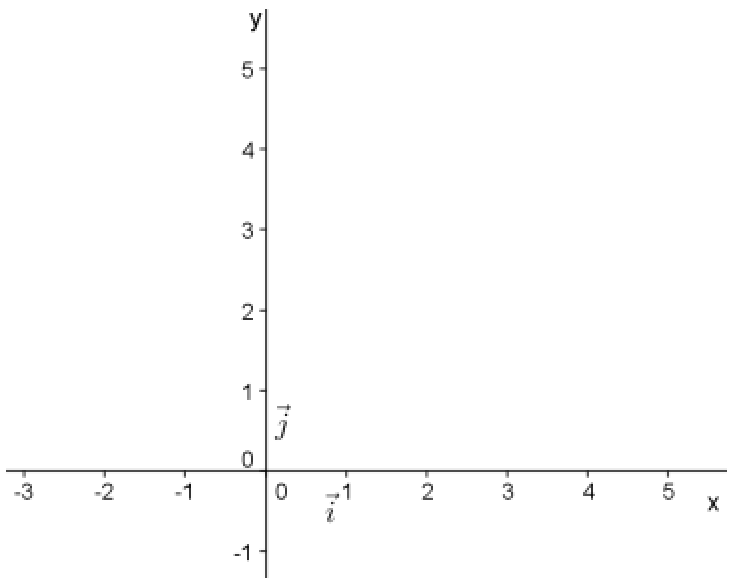
Resulta la gráfica de la función como se muestra a la izquierda

II) Si $\mathbf{0 < a < 1}$ por ejemplo f(x) **=** $\left(\frac{1}{3}\right)^x$

Ya sabemos que los valores que puede asumir x es cualquier real.
Completa la tabla

x	-3	-2	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	2	2,5
$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$									

Efectúa el gráfico correspondiente en el siguiente sistema de coordenadas:



Según el comportamiento de $f(x) = a^x$ completa el siguiente cuadro:

$f(x) = a^x$	$a > 1$	$0 < a < 1$
¿Es biyectiva?		
¿Es par?¿Es impar?		
¿Crece o decrece?		
Analiza la intersección con eje x		
Analiza la intersección con eje y		
Si $x \to +\infty$	$f(x) \to$..............	$f(x) \to$..............
Si $x \to -\infty$	$f(x) \to$..............	$f(x) \to$..............

Observación:

Si el valor de **a** =**1** sucede que f(x) es una función constante.

Para pensar:

Si el valor de a es negativo, ¿qué sucede con la función?

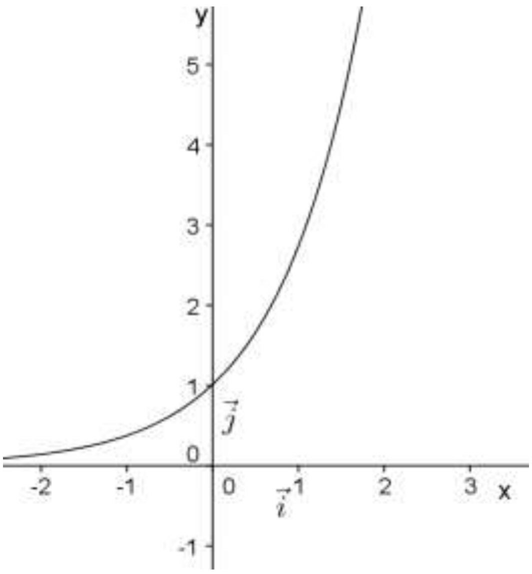
PRÁCTICA:

1) Dada la función $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 2$ realiza las siguientes actividades:
   a) Grafica la función aplicando transformaciones.
   b) Indica el dominio y el conjunto imagen
   c) Grafica $g(x) = -f(x)$.¿Es g creciente?
   d) Analiza la intersección de la función con el eje y

2) Grafica la función del problema inicial de página 1 te puedes ayudar con el software Geogebra.

Algunas bases particulares

- $f(x) = e^{x}$

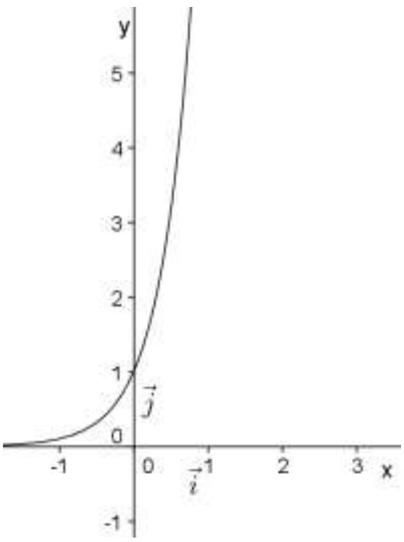


Definición:
Llamamos número neperiano y lo notamos con la letra **e** al número que se aproxima a la siguiente suma:

$$e \cong \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots\ldots + \frac{1}{n!} \qquad n \in N_0$$

El número e no es solución de ninguna ecuación polinómica con coeficientes enteros. Por esta razón se lo llama número trascendente. Siendo Euler el primer matemático que utilizó esta expresión

- $f(x) = 10^{x}$



PRÁCTICA

3) Dadas:

$$f(x) = 3^{x-1} - 3 \qquad g(x) = -2.\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$$

$$h(x) = \frac{1}{2}.e^{x+2} \qquad t(x) = -10^{x} + \frac{3}{2}$$

Realiza las siguientes actividades:

a) Grafica cada una de ellas aplicando transformaciones.

b) Indica el dominio y el conjunto imagen de todas ellas.

c) Determina, si existen, los puntos de intersección de f(x) con los ejes coordenados Analiza la biyectividad de g(x) y de h(x).

d) Grafica $q(x) = \left| t(x) \right|$ a partir de t(x)

4) Una población que experimenta crecimiento exponencial crece según el modelo $n(t) = n_0 .\, e^{r\,t}$ siendo n_0 tamaño inicial de la población, r la tasa relativa de crecimiento y t el tiempo. Si la cuenta inicial de cultivo de bacterias es 500 y la tasa relativa de crecimiento es de 40% por hora

a) ¿Cuál es la función que modela el número de bacterias después de t horas?

b) Estima la cantidad de bacterias después de 10 hs.

c) Gráfica la función n(t) (puedes ayudarte con el Geogebra)

5) El costo de un vehículo todo terreno es de $6200. Si se desprecia a una tasa de 15% por año, su valor dentro de t años puede calcularse mediante la fórmula $A = 6200 \,.\, (0{,}85)^{t}$. Determina el valor que tendrá el vehiculo dentro de 10 años.

6) Una persona inicia sus ahorros con \$2 y casa día duplica la cantidad del día anterior, durante 20 días. Determina:

   a) La fórmula de la función que vincula la cantidad de dinero ahorrado en un tiempo t (en días)

   b) La cantidad de dinero que tendrá el día 12.

   c) La cantidad de días que pasaron para que el dinero ahorrado sea de \$128.

7) Resuelve las siguientes ecuaciones

   a) $2^{x+1} = \sqrt{2}$

   b) $\dfrac{3^{2x+1}}{3^{x-4}} = 81$

   c) $\dfrac{4^{x-1}}{16^{x}} = 1$

   d) $\dfrac{2^{x-1}.4^{x+2}}{8^{1-x}} = 128$

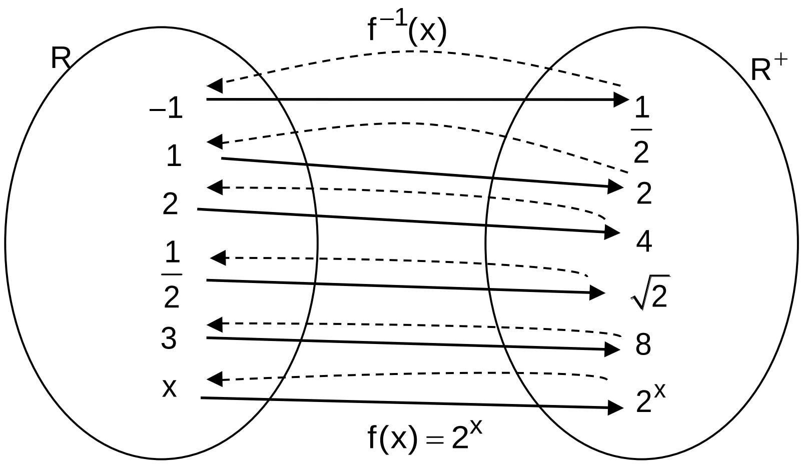
   e) $x^2 2^x - 2^x = 0$

   f) $\left(2^x\right)^{1-x} = \dfrac{1}{16}$

FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Hemos analizado la función exponencial y sabemos que sus condiciones son la base **a positiva y distinta de 1** y sus imágenes están en el intervalo $(0;\infty)$.Esta función es biyectiva y por lo tanto admite una función inversa que llamaremos **función logaritmo de base a.**

Consideremos la función exponencial $f(x)=2^x$ ¿Cuál es la expresión simbólica de $f^{-1}(x)$? Observa el diagrama sagitario y luego completa :



$f(-1)=\dfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow f^{-1}(\dfrac{1}{2})=$............

$f(1)=2 \quad \Leftrightarrow f^{-1}(2)=$............

$f(3)=$......... $\Leftrightarrow f^{-1}(8)=$............

$f(0)=1 \quad \Leftrightarrow f^{-1}(1)=$............

$f(\sqrt{2})=$....... $\Leftrightarrow f^{-1}(2^{\sqrt{2}})=$...........

$f(2)=$.......... $\Leftrightarrow f^{-1}(4)=$............

Definimos a la función logaritmo de base a, $a>0 \wedge a\neq 1$

$\mathbf{f: R^+ \to R \;/\; f(x)=\log_a x}$

$\mathbf{y=\log_a x \quad \Leftrightarrow \quad x=a^y \quad \Leftrightarrow \quad x=a^{\log_a x}}$

Siendo $\log_a x$ el exponente al cual debe elevarse la base a para obtener x.

En el ejemplo resulta : $\mathbf{f^{-1}(x)=\log_2 x}$

Ejemplos:

a) $\log_3 81 = 4 \Leftrightarrow 3^4 = 81$

b) $\log_5 x = 3 \Leftrightarrow 5^3 = x$

c) $\log_4 1 = 0 \Leftrightarrow 4^0 = 1$

PRÁCTICA

8) Determina el valor de la incógnita en cada caso

a) $x = \log_3 27$

b) $\log_2 x = -2$

c) $y = \log_2 32$

d) $b = \log_{10} 0{,}0001$

e) $\log_4 x = 3$

f) $\log_7 x = -1$

g) $\log_x 4 = -2$

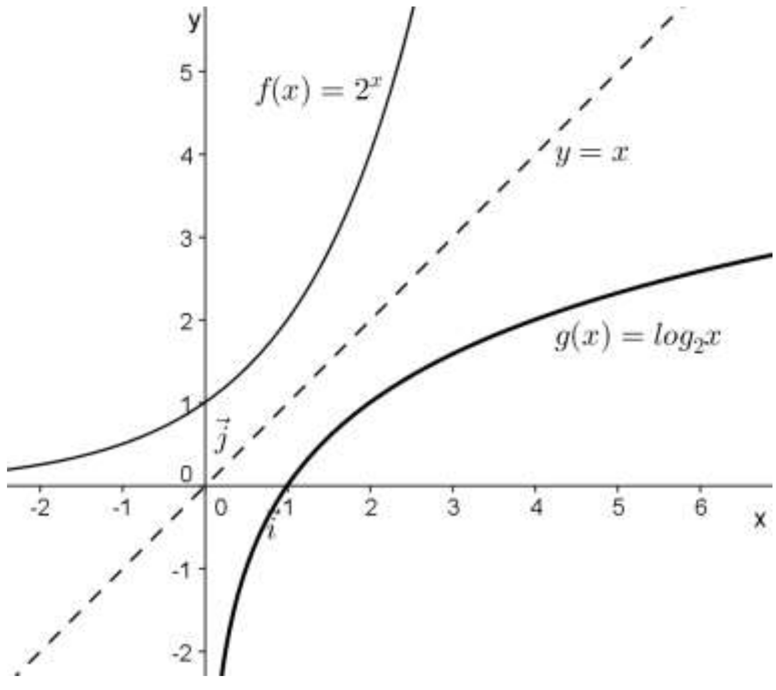
h) $\log_x \frac{1}{3} = 3$

i) $\log_3(2 - x) = 1$

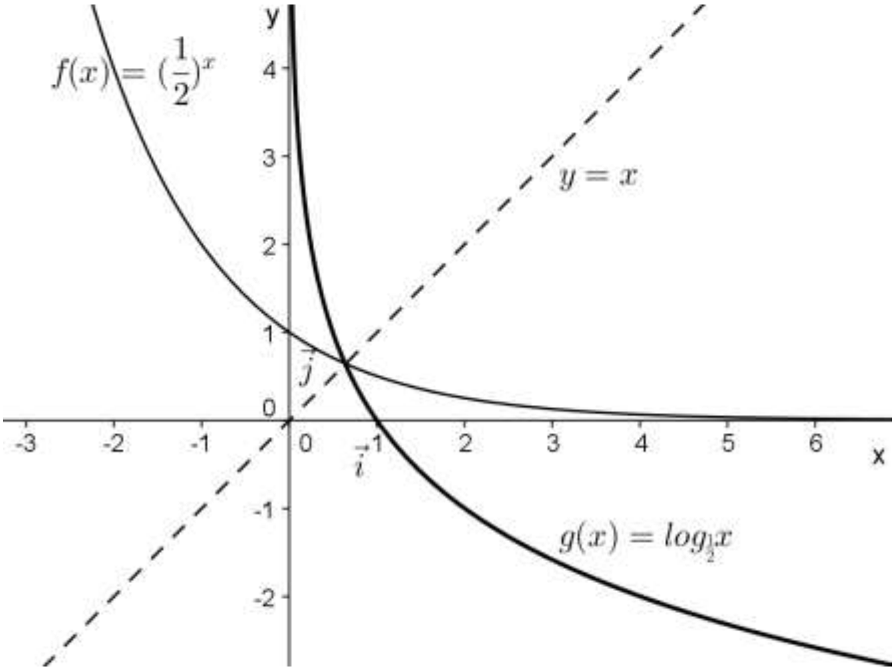
j) $\log_6 x = 0$

La gráfica de una función inversa se obtiene reflejando la de la función original respecto a la recta $y = x$. Siendo la función logaritmo la inversa de la función exponencial, su gráfica resulta:

- Si **$a > 1$**



- Si $0 < a < 1$



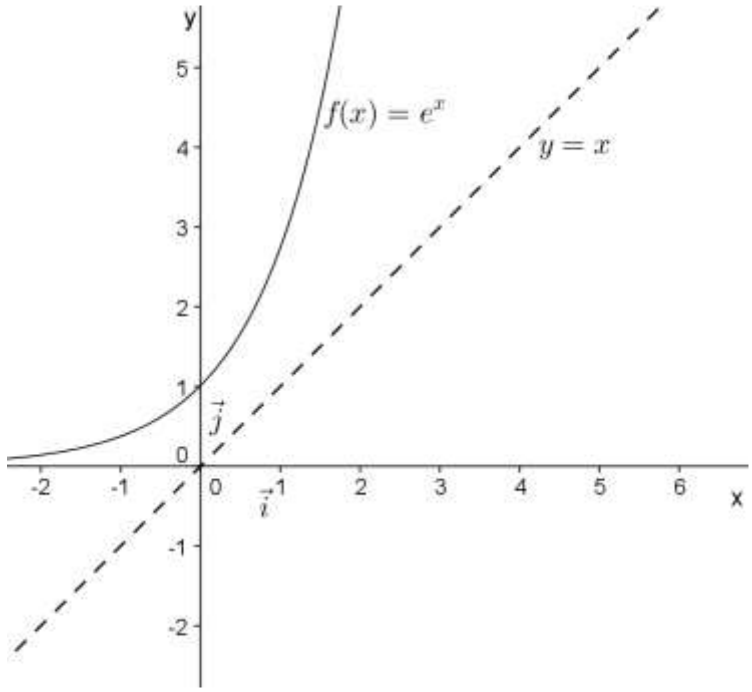
Característica de la función logaritmo $f(x) = \log_a x$.
Completa :

	$a > 1$	$0 < a < 1$
Biyección		
Paridad		
Crecimiento		
Analiza la Intersección con eje x		
Analiza la Intersección con eje y		
Si $x \to 0$	f(x) $\to$..............	f(x) $\to$..............
Si $x \to +\infty$	f(x) $\to$..............	f(x) $\to$..............

Función logaritmo natural o neperiano

La función logaritmo natural o neperiano es la función inversa de la función exponencial $f(x) = e^x$ y su notación es $g(x) = \ln x$, que se refiere al $\log_e x$

Actividad:
Grafica la función $g(x) = \ln x$ a partir de la gráfica de $f(x) = e^x$

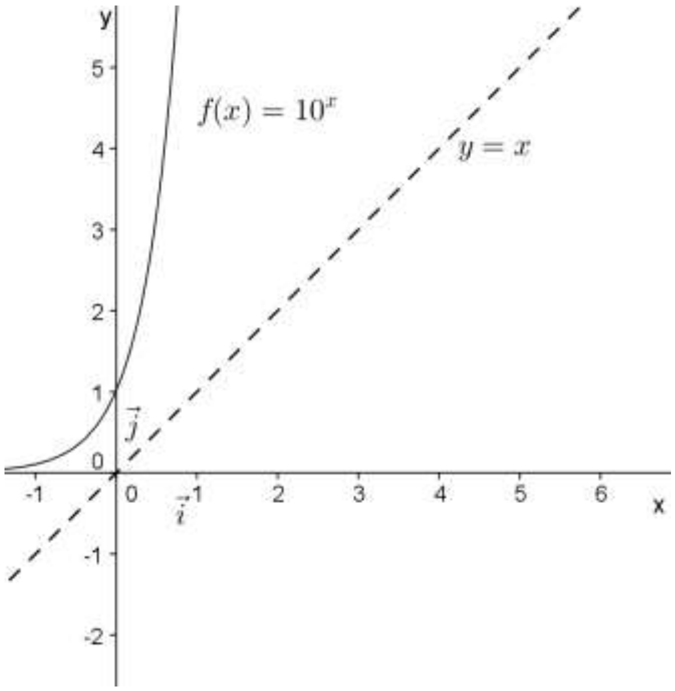


Función logaritmo decimal

La función logaritmo decimal es la función inversa de la función exponencial $f(x) = 10^x$ y su notación es $g(x) = \log x$, que se refiere al $\log_{10} x$

Actividad:

Grafica la función $g(x) = \log x$ a partir de la gráfica de $f(x) = 10^x$



PRÁCTICA

9) Dadas:

$f(x) = \log_2(x-3)$ $\quad g(x) = -2 + \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$ $\quad k(x) = -2^{x+2} + 1$

$h(x) = \log(-x)$ $\quad t(x) = -2\ln(x-1) + 1$ $\quad r(x) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$

I) Para cada una de ellas determina:
   a) Su gráfica aplicando transformaciones
   b) El dominio y el conjunto imagen
   c) Los puntos de intersección con los ejes coordenados, si es posible
   d) Analíticamente la ley de función inversa

II) Determina los elementos de los siguientes conjuntos:

$A = \{x / f(x) > 0\}$ $\quad C = \{x / k(x) \le 0\}$ $\quad B = \{x / g(x) < 0\}$

10) La edad de un objeto antiguo se puede determinar por la cantidad de carbono 14 radiactivo que permanece en él. Si D_0 es cantidad original de carbono 14 y D es la cantidad restante, entonces la edad A del objeto (en años) se determina por $A = -8267\ln\left(\frac{D}{D_0}\right)$.Calcula la edad de un objeto si la cantidad D de carbono 14 que permanece en el objeto es 73% de la cantidad original D_0..

PROPIEDADES ARITMÉTICAS DE LOS LOGARITMOS

Las propiedades aritméticas que a continuación se desarrollan son válidas también en las funciones logarítmicas.

$$\forall \mathbf{a} > \mathbf{0} \;\; ,\mathbf{a} \neq \mathbf{1} \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^{+} \;;\; \mathbf{y} \in \mathbf{R}^{+} \quad \mathbf{r} \in \mathbf{R}$$

P1) El logaritmo en cualquier base de 1 es cero

En símbolos:

$$\mathbf{\log_a 1 = 0}$$

Demostración : $\log_a 1 = 0 \Leftrightarrow a^0 = 1$ por (1) (1) Definición de logaritmo

P2) El logaritmo en cualquier base de la base es uno

En símbolos:

$$\mathbf{\log_a a = 1}$$

Demostración : $\log_a a = 1 \Leftrightarrow a^1 = a$ por (1)

P3) El logaritmo en cualquier base de la multiplicación de dos números es igual a la suma de los logaritmos de los factores, en dicha base.

En símbolos: $\mathbf{\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y}$

Demostración:

Llamamos:

$\log_a x = p \Leftrightarrow a^p = x$ Por (1)

$\log_a y = q \Leftrightarrow a^q = y$ Por (1)

Multiplicando miembro a miembro, tenemos

$$a^p.a^q = x.y$$

Aplicando la propiedad de producto de potencias de igual base resulta:

$$a^{p+q} = x.y \underset{(1)}{\Rightarrow} \log_a (x.y) = p + q$$

Sustituyendo p y q resulta:

$$\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$$

P4) El logaritmo en cualquier base de un cociente de dos números es igual a la resta de los logaritmos de los números, en dicha base.

En símbolos

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

P5) El logaritmo de una potencia de un número es igual al exponente multiplicado por el logaritmo del número , en dicha base.

$$\log_a x^r = r.\log_a x$$

Dejamos como problema la demostración de la P4) y P5)

P6) Cambio de base

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \qquad b > 0 \quad b \neq 1$$

Demostración:

$\log_a x = t \Leftrightarrow a^t = x$

Aplicando logaritmo en base b, a ambos miembros, obtenemos:

$\log_b a^t = \log_b x$

Por propiedad (5)

$$t.\log_b = \log_b x \qquad \Rightarrow \qquad t = \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

PRÁCTICA:

11) Si $\log_a N = 2$ y $\log_a(32N) = 5$ ¿Cuánto vale a?

12) Demuestra

a) $\log_a(\frac{1}{b}) = -\log_a b$

b) $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n}\log_a b$

c) $\log_a(a^n) = n$

13) Expresa como suma algebraica o logaritmo de una única expresión según corresponda:

a) $\log_b(\frac{a^3 b}{d}) =$

b) $\log_b(\frac{1}{b-c}) =$

c) $\ln\sqrt{x\sqrt{x+1}} =$

d) $1-\log_a c - \log_a b =$

e) $3\log_b c + \frac{1}{2}\log_b a =$

f) $\ln(x^2+x+1) - 3\ln(x+2) + \ln x =$

g) Sabiendo que el $\log_b a = c$ calcula en función de c: $\log_b\left(\frac{a^{-6}a^4\sqrt[6]{a^5}}{a^{-5}}\right)$

14) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\log_2(\log_3 x) = 1$

b) $\log\left(\log 10^y\right) = 1$

c) $\left(\frac{2}{5}\right)^x = 12$

d) $x = \log_3 2 + \log_3 \frac{3}{2}$

e) $3^{2x+1} = 2^{2x+1}$

f) $y = \log_3\left(\frac{5}{3}\right) - \log_3 15$

g) $\log_2 y + \log_4 y = 5 + \log_{16} y$

h) $3\log_2 x - 2\log_4 x = 2$

i) $\log_4(2x^2+31x)=2$

j) $\log_5\left(\log_2(\log_3 9)\right) = x$

k) $\log_{\sqrt{3}} y + 2\log_3 y = -\log_{\frac{1}{3}} y^{-1}$

l) $\log_{2\sqrt{2}} h - \log_8(3h) = 1$

m) $3^{x-1} = 2^{2x+1}$

n) $e^{2x} - 3.e^x + 2 = 0$ sugerencia $e^x = y$

o) $e^{4x} + 4.e^{2x} - 21 = 0$

p) $e^x - 12e^{-x} - 1 = 0$

Respuestas a los ejercicios propuestos

1) a) A cargo del alumno.
   b) $Dom(f)=\Re \qquad \mathrm{Im}(f)=(-2;+\infty)$
   c) $g(x)$ *es creciente*
   d) $f(x)\cap eje\ y=\left\{\left(0;-\frac{3}{2}\right)\right\}$

2) A cargo del alumno.

3) a) A cargo del alumno.
   b) $Dom(f)=\Re \qquad \mathrm{Im}(f)=(-3;+\infty)$
   $Dom(g)=\Re \qquad \mathrm{Im}(g)=(-\infty;0)$
   $Dom(h)=\Re \qquad \mathrm{Im}(h)=(0;+\infty)$
   $Dom(t)=\Re \qquad \mathrm{Im}(t)=\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$
   c) $f(x)\cap eje\ x=\{(2;0)\} \qquad f(x)\cap eje\ y=\left\{\left(0;-\frac{8}{3}\right)\right\}$
   $g(x)\cap eje\ x=\{(1;0)\} \qquad g(x)\cap eje\ y=\{(0;-2)\}$
   No existe la intersección de $h(x)$ *con el eje* $x \qquad h(x)\cap eje\ y=\left\{\left(0;\frac{1}{2}e^2\right)\right\}$
   $t(x)\cap eje\ x=\{(0{,}18;0)\} \qquad t(x)\cap eje\ y=\left\{\left(0;\frac{1}{2}\right)\right\}$
   d) $g(x)$ *es biyectiva* – $h(x)$ *es biyectiva*
   e)A cargo del alumno

4) a) $n(t)=500.e^{0,4t}$ b)27300 bacterias c)A cargo del alumno

5) El valor del vehículo dentro de 10 años será aproximadamente $1220

6) a) $f(t)=2^{t+1}$ b) El día 12 tendrá $8192 c)Pasaron 6 días

7) a) $x=-\frac{1}{2}$
   b) x = -1
   c) $x=-1$
   d) $x=\frac{7}{6}$
   d) $x=\frac{7}{6}$
   e) $x=1 \ \vee \ x=-1$
   f) $x=\frac{1-\sqrt{17}}{2} \vee x=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$

8)

a) $x = 3$

b) $x = \frac{1}{4}$

c) $y = 5$

d) $b = -4$

e) $x = 64$

f) $x = \frac{1}{7}$

g) $x = \frac{1}{2}$

h) $x = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$

i) $x = -1$

j) $x = 1$

9) I)

a) A cargo del alumno

b) $Dom(f) = (3;+\infty)$ $\quad \mathrm{Im}(f) = \Re$ $\quad Dom(h) = (-\infty;0)$ $\quad \mathrm{Im}(h) = \Re$

$Dom(g) = (-1;+\infty)$ $\quad \mathrm{Im}(g) = \Re$ $\quad Dom(t) = (1;+\infty)$ $\quad \mathrm{Im}(t) = \Re$

$Dom(k) = \Re$ $\quad \mathrm{Im}(k) = (-\infty;1)$ $\quad Dom(r) = \Re$ $\quad \mathrm{Im}(r) = (-2;+\infty)$

c) $f(x) \cap eje\, x = \{(4;0)\}$ $\quad$ *No tiene intersección con el eje y*

$g(x) \cap eje\, x = \left\{\left(-\frac{8}{9};0\right)\right\}$ $\quad g(x) \cap eje\, y = \{(0;-2)\}$

$h(x) \cap eje\, x = \{(-1;0)\}$ $\quad$ *No tiene intersección con el eje y*

$t(x) \cap eje\, x = \left\{\left(\sqrt{e}+1;0\right)\right\}$ $\quad$ *No tiene intersección con el eje y*

$k(x) \cap eje\, x = \{(-2;0)\}$ $\quad k(x) \cap eje\, y = \{(0;-3)\}$

$r(x) \cap eje\, x = \{(0;0)\}$

d) $f^{-1}(x) = 2^x + 3$ $\quad k^{-1}(x) = \log_2(1-x) - 2$

$g^{-1}(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} - 1$ $\quad r^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{x+2}{2}\right)$

$h^{-1}(x) = -(10^x)$

$t^{-1}(x) = e^{\left(\frac{-y+1}{2}\right)} + 1$

II) $A = (4;+\infty)$ $\quad B = \left(-\frac{8}{9};+\infty\right)$ $\quad C = [-2;+\infty)$

10) 2602 años

11) $a = \sqrt[3]{32} = 2\sqrt[3]{4}$

12) A cargo del alumno

13)

a) $3\log_b a + 1 - \log_b d$

b) $-\log_b(b-c)$

c) $\frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{4}\ln(x+1)$

d) $\log_a\left(\frac{a}{cb}\right)$

e) $\log_b\left(c^3\sqrt{a}\right)$

f) $\ln\frac{(x^2+x+1)x}{(x+2)^3}$

g) $\frac{23}{6}c$

14)

a) $x = 9$

b) $y = 10$

c) $x = \dfrac{\log 12}{\log \frac{2}{5}}$

d) $x = 1$

e) $x = -\dfrac{1}{2}$

f) $y = -2$

g) $y = 16$

h) $x = 2$

i) $x = \dfrac{1}{2} \quad \vee \quad x = -16$

j) $x = 0$

k) $y = 1$

l) $h = 24$

m) x=ln 6/ln 0.75

o) $x = \ln\sqrt{3}$

p) $x = \ln 4$

BIBLIOGRAFIA:

- Matemática /Polimodal Funciones 1 Altman-Comparatone-Kurzrok. Editorial Longseller . Año 2002- Bs As –Argentina
- Matemática /Polimodal Funciones 2 Altman-Comparatone-Kurzrok. Editorial Longseller . Año 2002- Bs As –Argentina
- Matemática Zapico- Micelli-Tajeyan-Vera Ocampo. Editorial Santillana .Serie Perspectiva- Año 2008-Bs As-Argentina
- Matemáticas.Bachillerato 2 Guzmán-Colera-Salvador .Editorial Amaya- Año 1987-Madrid-España
- Precálculo .Stewart-Redlin-Walson Tercera edición-Editorial Thomson Learning- Año 2001 –México DF México
- Precálculo –J.Douglas Faires- James DeFranza . Editorial Internacional Thomson .Editores 2º edición. Año 2001-México DF-México
- Apunte de Función cuadrática, Función exponencial y su inversa-Ecuaciones. Editado en el Instituto Politécnico Superior. 3ºaño .Año 2011 - Cod 1310