

MINISTERIO DE JUSTICIA E INSTRUCCION PUBLICA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS, Etc.
DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

MATHEMATICÆ NOTÆ

BOLETIN
DEL
INSTITUTO DE MATEMATICA

DIRECTOR
BEPPLO LEVI

AÑO QUINTO - FASC. 4



ROSARIO
REPUBLICA ARGENTINA
1945

Las « Mathematicae Notae » publican artículos, cuestiones, ejercicios, soluciones y correspondencia. La resolución de las cuestiones propuestas será publicada en números sucesivos de la revista al cabo de un tiempo razonable, a juicio del Director del Instituto, para obtener contestaciones de los lectores; de las cuestiones publicadas bajo el título de ejercicios la dirección se reserva la decisión, en cada caso, de publicar o no las respuestas.

A fin de año se adjudicarán dos premios:

1º Por concurso entre alumnos de la Facultad que contesten satisfactoriamente a cuestiones, problemas o ejercicios.

2º Por concurso entre todos los demás lectores del país o del extranjero que contesten en modo acertado a los mismos.

Los premios consistirán en tratados de extensión cultural o libros de especialización.

Las soluciones deben ser entregadas al Instituto en redacción clara y en hojas distintas para cada cuestión, problema o ejercicio. En cada hoja deberá señalarse el nombre del autor; los alumnos de la Facultad indicarán el año de estudios que cursan en la misma, y, los de primer año, además, la escuela media de la cual provienen. Estos elementos serán tenidos en cuenta para el juicio, conjuntamente con el valor intrínseco de las soluciones y la forma expositiva de las mismas, dándose por la Dirección la máxima importancia a la disposición por la cual se compararán sólo alumnos de igual preparación.

En la sección de Bibliografía se publicarán los análisis críticos de libros recientes que sean enviados al Instituto de Matemática.

I N D I C E

	PÁG.
Ejercitaciones sobre la función coseno (M. COTLAR y B. LEVI) .	193
Nuevas consideraciones sobre un problema diofántico (ALBERTO E. SAGASTUME BERRA)	215
Ejercicios y Problemas (Soluciones)	225
Ejercicios y Problemas (Propuestos)	234
Bibliografía	236

DONADO
EN MEMORIA DEL PROFESOR
ING. JORGE A. LOUREIRO

EJERCITACIONES SOBRE LA FUNCION COSENO

por

M. COTLAR y B. LEVI

En una Nota anterior «*Consideraciones sobre una proposición de W. H. Young*» demostramos incidentalmente — y precisamente con el fin de proporcionar un ejemplo — que ninguna sucesión de funciones de la forma $\{\cos n_i x\}$ puede converger ⁽¹⁾ en un conjunto de puntos de medida 2π . Lo esencial de aquella demostración era el hecho de desarrollarse con instrumentos que se pueden decir clásicos. En una Nota que la revista publicó sucesivamente ⁽²⁾ el Sr. R. Boas hizo notar que la proposición resultaba muy simplemente haciendo uso de un conocido lema de Steinhaus ⁽³⁾, el cual depende de nociones sobre

⁽¹⁾ En el enunciado de la pág. 149 se habla de convergencia uniforme; lo cual es necesario si las integrales consideradas en la demostración se quieren tratar en modo elemental; no lo es más hablando de integrales de Lebesgue. Como observamos en otra oportunidad (ver la nota sig.) en el caso en cuestión da lo mismo hablar de convergencia uniforme o no uniforme, porque una sucesión que convergiera no uniformemente en un conjunto de medida 2π , convergería uniformemente en una parte de este conjunto, de medida tan próxima como se quiera a 2π , y se repetiría la contradicción encontrada entonces.

⁽²⁾ R. P. BOAS JR, *Acerca de la sucesión* $\{\cos n_k x\}$, $n_k \rightarrow \infty$ - Math. Notae, Año V, p. 91.

⁽³⁾ El lema de Steinhaus dice: *Para casi todo x se verifica*

$$\overline{\lim} |\cos(n_k x + \alpha_k)| = 1.$$

(Ver por ej. ZIGMUND, *Trigonometrical Series*, p. 267-270). El lector va a reencontrarlo demostrado en las consideraciones que siguen.

La demostración propuesta por el Sr. Boas aplica además el teorema de Riemann-Lebesgue según el cual

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \cos n x dx = 0,$$

la medida de Lebesgue un poco más profundas de las utilizadas en nuestra primera nota, pero tiene en compensación la ventaja de desarrollarse enteramente en el dominio de las funciones de variable real.

1. — En lo que sigue vamos a desarrollar, en este otro punto de vista, algunas consideraciones más sobre las funciones

$$\rho(\cos nx + \alpha) = A(n, \rho, x)$$

donde x es variable en un conjunto E de puntos de la recta real que supondremos generalmente de medida $|E|^{(1)}$ finita $\neq 0$.

cualquiera sea el conjunto E sobre el cual se efectúa la integración. Puede ser interesante notar que con una pequeña modificación del razonamiento de Boas se llega fácilmente a la conclusión deseada por aplicación de este solo teorema y sin aplicar el lema de Steinhaus. Se trata en efecto de demostrar que:

Ninguna sucesión infinita de la forma $\{\cos n_k x\}$ ($n_{k+1} > n_k$) puede converger en todos los puntos de un conjunto E de medida > 0 . Supongamos en efecto que esta convergencia se realizara sobre cierto E ; esto significaría que para cada x de E existiría un N tal que, para $n_k > N$, $n_h > N$

$$|g_{n_k, n_h}^2(x)| = |\cos n_k x - \cos n_h x| < \varepsilon \quad (\alpha)$$

siendo ε fijado arbitrariamente; se sabe, por un teorema de Egoroff que existe entonces un valor de N que vale para todos los x de un conjunto $E_1 \subset E$, todavía de medida tan próxima como se quiere de la medida de E . Después de esto, consideremos

$$\begin{aligned} g_{m,n}^2(x) &= \cos^2 m x + \cos^2 n x - 2 \cos m x \cos n x \\ &= 1 + \frac{1}{2} \cos 2m x + \frac{1}{2} \cos 2n x - \cos(m+n)x - \cos(m-n)x \end{aligned}$$

Suponiendo elegir para m, n valores de la sucesión n_k , mayores de N y cuya diferencia se hace crecer indefinidamente, integrando luego sobre el conjunto E_1 los dos miembros de la última igualdad, llamando $\mu = |E| - \eta$ a la medida de E_1 y teniendo en cuenta (α), se obtiene

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \mu > \int_{E_1} g_{m,n}^2(x) dx &= \int_{E_1} dx + \frac{1}{2} \int_{E_1} \cos 2m x dx + \frac{1}{2} \int_{E_1} \cos 2n x dx - \\ &\quad \int_{E_1} \cos(m+n)x dx - \int_{E_1} \cos(m-n)x dx; \end{aligned}$$

por el teorema de Riemann-Lebesgue, suponiendo m, n y $|m-n|$ suficientemente grandes, la suma de las integrales de cosenos en el segundo miembro puede suponerse en valor absoluto menor de un ε_1 , cualquiera; resulta

$$\varepsilon^2 \mu > \mu - \varepsilon_1 \quad (\beta)$$

Lo cual es absurdo. Es pues absurda la hipótesis de realizarse (α) sobre E .

(¹) En todo lo que sigue el signo $|..|$ significa *medida* según Lebesgue; en particular, si la expresión entre las barras es un intervalo, se tiene la longitud del mismo.

n y ρ son números reales $\neq 0$, que supondremos por comodidad positivos, aunque los resultados se extienden con simples observaciones sobre cambios de signos a números positivos y negativos; según el caso supondremos estos valores fijos o bien variables dentro de una sucesión numerable asignada. En este caso asignaremos un índice ordenador escribiendo n_r y ρ_r y supondremos los n_r crecientes con $\lim n_r = \infty$; α son números reales cualesquiera asignados para cada n ; cuando a n se asigna índice, el mismo índice se pondrá a la α correspondiente.

De las propiedades de la medida de Lebesgue aplicaremos casi únicamente la siguiente:

a) Si un conjunto E de valores de la variable real x tiene medida $|E| > 0$, fijado arbitrariamente un $\varepsilon > 0$, existe siempre algún intervalo I tal que, siendo EI la parte de E contenida en I , es

$$|I| - |EI| < \varepsilon |I|. \quad (1)$$

En los n. 4, 7, 8 tendremos que tratar con algunas otras propiedades.

2. — Una consecuencia inmediata de la propiedad aludida es la siguiente:

Dado un conjunto E de medida $|E| > 0$ y fijado arbitrariamente un β ($-1 < \beta < 1$), se puede determinar un número N_β tal que cualquiera sea $n \geq N_\beta$, existe un conjunto $E_n \subset E$ de medida $|E_n| > 0$ (de la cual asignaremos también una valuación) tal que en todos los puntos de E_n

$$A(n, 1, x) \geq \beta.$$

Pongamos, en efecto

$$\lambda = \arccos \beta \quad (0 < \lambda < \pi);$$

claramente, en cualquier intervalo de la forma $\left(\frac{2k\pi - \pi - \alpha}{n}, \frac{2k\pi + \pi - \alpha}{n}\right)$ existe un intervalo $\left(\frac{2k\pi - \lambda - \alpha}{n}, \frac{2k\pi + \lambda - \alpha}{n}\right)$ de longitud $\frac{2\lambda}{n}$ dentro del cual $\cos(nx + \alpha) \geq \beta$. Los intervalos arri-

ba considerados dividen la recta en una sucesión de intervalos de longitud $\frac{2\pi}{n}$ y, si I es tal que $n > 4\pi : |I|$, indicando con i la parte entera de $n|I| : 2\pi$, dentro del intervalo I estarán siempre por lo menos $i - 1$ de estos intervalos; se sigue que dentro de dicho intervalo I estarán, a mayor razón, al menos $i - 1$ de los aludidos intervalos parciales de longitud $2\lambda : n$; la longitud total de todos los intervalos será luego $\geq (i - 1) 2\lambda : n$. Por otra parte, $i > \frac{n|I|}{2\pi} - 1$. Se sigue que *dentro del intervalo I existe un grupo de intervalos cuya longitud total es*

$$> \left(\frac{n|I|}{2\pi} - 2\right) \frac{2\lambda}{n} = \lambda \left(\frac{|I|}{\pi} - \frac{4}{n}\right) = |I| \left(\frac{\lambda}{\pi} - \frac{4\lambda}{n|I|}\right)$$

en cuyos puntos la función $A(n, 1, x)$ toma sólo valores $\geq \beta$.

Apliquemos esta observación al intervalo I que, respecto de cierto conjunto E realiza (1), donde se haya fijado para ε un valor

$$\varepsilon < (1 - \Theta) \left(\frac{\lambda}{\pi} - \sigma\right) \quad (2)$$

donde Θ y σ son elegidos arbitrariamente con la sola condición de ser

$$\Theta < 1, \quad \sigma < \frac{\lambda}{\pi};$$

elegimos

$$n > N_\beta = \frac{4\lambda}{\sigma|I|} > \frac{4\pi}{|I|};$$

resulta que, mientras

$$|EI| > |I|(1 - \varepsilon) > |I| \left(1 - (1 - \Theta) \left(\frac{\lambda}{\pi} - \sigma\right)\right),$$

la longitud total de los intervalos parciales de I en los que $A(n, 1, x) \geq \beta$ es

$$> |I| \left(\frac{\lambda}{\pi} - \sigma \right)$$

y por lo tanto este conjunto de intervalos parciales contiene una parte E_n de E cuya medida es mayor que

$$|I| \left(1 - (1 - \Theta) \left(\frac{\lambda}{\pi} - \sigma \right) + \left(\frac{\lambda}{\pi} - \sigma \right) - 1 \right) = \Theta \left(\frac{\lambda}{\pi} - \sigma \right) |I|. \quad (3)$$

Nótese que se puede elegir σ pequeño como se quiera, con el solo inconveniente de tener que tomar n más grande; por lo tanto $|E_n|$ se aproxima tanto como se quiera a $\Theta \frac{\lambda}{\pi} |I|$. Puede también elegirse Θ tan próximo como se quiera a 1, pero se influye de esta manera sobre la determinación de I en el sentido de que puede disminuir su longitud, haciendo ilusorio el mejoramiento del coeficiente.

El razonamiento anterior se imita cambiando los intervalos

$$\left(\frac{2k\pi - \pi - \alpha}{n}, \frac{2k\pi + \pi - \alpha}{n} \right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{2k\pi - \lambda - \alpha}{n}, \frac{2k\pi + \lambda - \alpha}{n} \right)$$

respectivamente en

$$\left(\frac{2k\pi - \alpha}{n}, \frac{2(k+1)\pi - \alpha}{n} \right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{2k\pi + \lambda - \alpha}{n}, \frac{2(k+1)\pi - \lambda - \alpha}{n} \right)$$

para determinar conjuntos de puntos en los cuales $A(n, 1, x) \leq \beta'$, concluyendo que igualmente *fijado arbitrariamente un β' ($-1 < \beta' < 1$) existe un $N_{\beta'}$ tal que, cualquiera sea $n > N_{\beta'}$, existe un conjunto $E'_n \subset E$ de medida $|E'_n| > 0$ tal que en todos sus puntos $A(n, 1, x) \leq \beta'$.*

3. — Un corolario inmediato de la proposición anterior es el siguiente:

Dada una sucesión infinita de funciones de la forma $A(n_r, 1, x)$ ($n_{r+1} > n_r$) y dado un conjunto cualquiera E de valo-

res de x , de medida $|E| > 0$, de cualquier manera se elijan β y β' tales que $-1 < \beta' < \beta < 1$, existe un número N_β tal que, a cualquier $n_r > N_\beta$ corresponde un $N_{n_r, \beta'}$ tal que, eligiendo arbitrariamente un $n_s > N_{n_r, \beta'}$ existe en E un conjunto parcial toda vía de medida > 0 , para todos cuyos puntos

$$\cos(n_r x + \alpha_r) > \beta, \quad \cos(n_s x + \alpha_s) < \beta';$$

luego

$$\cos(n_r x + \alpha_r) - \cos(n_s x + \alpha_s) > \beta - \beta'.$$

Se puede elegir β tan próximo a 1 como se quiera e igualmente β' próximo a -1 ; resultará $\cos(n_r x + \alpha_r) - \cos(n_s x + \alpha_s)$ tan próximo a 2 como se quiera. Por lo tanto:

Dada una sucesión infinita de funciones de la forma $A(n_r, 1, x)$ en cualquier conjunto E de medida $|E| > 0$ vale la relación

$$\text{extr. sup. } (A(n_r, 1, x) - A(n_s, 1, x)) = 2 \quad (1) \quad (4)$$

Supongamos ahora dada una sucesión de funciones $A(n_r, \rho_r, x)$ y supongamos que siendo E un conjunto de medida > 0 sea ⁽²⁾

$$\overline{\lim} |A(n_r, \rho_r, x) - A(n_s, \rho_s, x)| = \Lambda$$

$$(r, s \rightarrow \infty, x \text{ en } E);$$

⁽¹⁾ El análisis del n. 4 permitirá afirmar más precisamente que, para todos los x de E salvo un conjunto de medida 0,

$$\overline{\lim} A(n_r, 1, x) - \underline{\lim} A(n_r, 1, x) = 2$$

lo que difiere de la (4) por afirmarse aquí que la diferencia entre los dos límites es alcanzada para ciertos x , mientras para la (4) es suficiente que para algún x pueda hacerse $A(n_r, 1, x) - A(n_s, 1, x)$ tan próximo a 2 como se quiera. Esta mayor precisión no interesa a las consideraciones del texto.

⁽²⁾ Recordamos que los conceptos de extr. sup. y lím máx, (o lím sup) difieren por esto, que el extremo superior no puede ser superado, mientras puede serlo el lím, aunque, la posible diferencia en más no podrá superar un ε arbitrariamente fijado con tal que se desprecien los términos de la sucesión de índice menor de uno conveniente. Análogamente para los límites y extremos inferiores.

será

$$\overline{\lim} \rho_r = \frac{\Lambda}{2}. \quad (5)$$

En efecto, poniendo $\overline{\lim} \rho_r = \delta$, se tiene, para r, s bastante elevados

$$(\rho_r, \rho_s) < \delta + \varepsilon,$$

donde ε es arbitrariamente pequeño; luego

$$|\rho_r \cos(n_r x + \alpha_r) - \rho_s \cos(n_s x + \alpha_s)| \leq \rho_r + \rho_s < 2(\delta + \varepsilon);$$

por tanto

$$\overline{\lim} |A(n_r, \rho_r, x) - A(n_s, \rho_s, x)| \leq 2\delta.$$

Por otra parte, si se elige una sucesión parcial de valores de n_r , que llamaremos $\{n_{r'}\}$ tal que

$$\lim \rho_{r'} = \delta,$$

se tiene, para $n_{r'}, n_{s'}$ bastante grandes,

$$|A(n_{r'}, \rho_{r'}, x) - A(n_{s'}, \rho_{s'}, x)| > \delta |\cos(n_{r'} x + \alpha_{r'}) - \cos(n_{s'} x + \alpha_{s'})| - \varepsilon;$$

luego por (4)

$$\lim. \sup. |A(n_{r'}, \rho_{r'}, x) - A(n_{s'}, \rho_{s'}, x)| > 2\delta - \varepsilon.$$

De las dos desigualdades resulta

$$\Lambda = 2\delta$$

que es la (5).

Se sigue que el número Λ definido por (4) es independiente del conjunto E .

Si la sucesión $A(n_r, \rho_r, x)$ tiene en E límite determinado, es $\Delta=0$; luego $\overline{\lim} \rho_r=0$ y por tanto, por ser todas las $\rho_r > 0$, $\lim \rho_r=0$. Se concluye que si una sucesión de funciones $A(n_r, \rho_r, x)$ tiene límite sobre un conjunto de puntos E de medida > 0 , este límite no puede ser sino 0 y $\lim \rho_r=0$. Esta proposición comprende, como caso particular la a la que hemos aludido empezando.

4. — Vamos a profundizar un poco más las proposiciones precedentes. De la proposición del n. 2 sigue fácilmente que:

Dada una sucesión infinita de números n_r , $\lim n_r=\infty$, para todo x , salvo a lo sumo un conjunto de medida 0 es

$$\text{extr. inf. } \cos(n_r x + \alpha_r) = -1, \text{ extr. sup. } \cos(n_r x + \alpha_r) = 1, \quad (6)$$

(los límites siendo tomados por x fijo y $r=1, 2, \dots$).

Consideremos en efecto las funciones

$$f_1(x) = \text{extr. inf. } \cos(n_r x + \alpha_r), \quad f_2(x) = \text{extr. sup. } \cos(n_r x + \alpha_r);$$

es conocido que son funciones de segunda clase de Baire y luego medibles. Siendo β cualquiera tal que $1 > \beta > -1$ sea E_β el conjunto de los puntos x para los cuales $f_2(x) \leq \beta$; la proposición del n. 2 nos dice que no puede ser $|E_\beta| > 0$, porque en ese caso existirían en E_β puntos tales que, para r conveniente $\cos(n_r x + \alpha_r) > \beta$. Es pues $|E_\beta| = 0$.

Dando a β una sucesión de valores

$$\beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \dots \quad \lim \beta_i = 1$$

se determina una sucesión de conjuntos

$$E_{\beta_1} \subset E_{\beta_2} \subset E_{\beta_3} \subset \dots$$

todos de medida 0 y que, en conjunto, contienen todos los puntos en los que $f_1(x) < 1$. Se sabe que la suma de un conjunto numerable de conjuntos de medida 0 tiene medida 0; luego etc.

Análogamente se razona para la $f_2(x)$.

Un uso más completo de la misma proposición del n. 2 nos permite demostrar constructivamente que *dado un conjunto E de medida $|E| > 0$, el conjunto de los puntos de E para los*

cuales extr. sup. $\cos(n_r x + \alpha_r) = 1$ (o extr. inf. $= -1$) tiene la misma medida que E (por lo tanto el complementario tiene medida 0), evitando en el mismo tiempo de tener que preocuparnos de la medibilidad de las funciones $f_1(x), f_2(x)$.

Basta tener en cuenta que de la definición de la medida de Lebesgue sigue en seguida que, dado un conjunto E medible (suma o diferencia de conjuntos medibles) puede determinarse un sistema finito L de intervalos sin puntos comunes, tal que

$$|E| - |EL| < \eta |E|, \quad |L| \leq |E|$$

siendo $\eta > 0$ arbitrario. Puede sin más suponerse $|L| = |E|$. Separemos los segmentos que forman L en dos grupos, L_1 en los cuales se realiza (1) y L_2 en los cuales

$$|I| - |EI| \geq \varepsilon |I|.$$

Se ve fácilmente que

$$|L_2| : |L| \leq \frac{\eta}{\varepsilon}, \quad |L_1| : |L| \geq 1 - \frac{\eta}{\varepsilon}.$$

Damos a ε el significado (2) (n. 2) poniendo

$$\varepsilon = k(1 - \Theta) \left(\frac{\lambda}{\pi} - \sigma \right) \quad (0 < k < 1)$$

y pongamos por simplicidad $\eta = \varepsilon(1 - \varepsilon)$ de manera que $1 - \frac{\eta}{\varepsilon} = \varepsilon$. Teniendo en cuenta siempre que los intervalos que componen L_1 no tienen puntos comunes, la fórmula (3) nos permite determinar un conjunto de intervalos parciales que contiene una parte E_{n_r} de E que tiene medida

$$> \Theta \left(\frac{\lambda}{\pi} - \sigma \right) |L_1| \geq k \Theta (1 - \Theta) \left(\frac{\lambda}{\pi} - \sigma \right)^2 |L|$$

en cuyos puntos, siendo n_r bastante grande,

$$\cos(n_r x + \alpha_r) \geq \beta.$$

Considerando eventualmente sólo una parte $E' \subset E_n$ del conjunto así definido y teniendo en cuenta que se supuso $|L|=|E|$, se puede sustituir en la relación precedente el signo \geq por $=$, concluyendo que

$$|E'| = k \Theta (1 - \Theta) \left(\frac{\lambda}{\pi} - \sigma \right)^2 |E| = p |E|,$$

$$|E - E'| = (1 - p) |E|.$$

Aplicando el resultado obtenido al nuevo conjunto $E - E'$, se separa de él una parte E'' en cuyos puntos, para n_r conveniente

$$\cos(n_r x + \alpha_r) \geq \beta$$

y tal que

$$|E''| = p |E - E'| = p(1 - p) |E|.$$

Razonando ahora análogamente sobre $E - E' - E''$ y sobre los conjuntos análogos obtenidos sucesivamente, se consigue finalmente de separar del conjunto E una parte cuya medida es

$$p(1 + (1 - p) + (1 - p)^2 + \dots) |E| = |E|$$

y tal que en cada uno de sus puntos, para un n_r conveniente, $\cos(n_r x + \alpha_r) \geq \beta$.

Sobre el conjunto último obtenido puede reempezarse a aplicar el procedimiento con un valor de β mayor del anterior. Resulta que, fijada una sucesión

$$-1 < \beta_1 < \beta_2 < \dots, \quad \lim \beta_i = 1,$$

se determina una sucesión de conjuntos

$$E_1 \supset E_2 \supset \dots,$$

cada uno de los cuales tiene siempre la misma medida $|E|$. El

conjunto límite (intersección de todos) tiene luego la misma medida y está constituido únicamente por puntos en los cuales

$$\text{extr. sup. } \cos(n_r x + \alpha_r) = 1. \quad (7)$$

Operando análogamente sobre este conjunto, con sólo cambiar los signos $>$ en $<$ y 1 en -1 , resultará un nuevo conjunto parcial, siempre de la misma medida en el cual se realiza (6).

5. — La afirmación (7) se expresa diversamente diciendo que 1 es punto límite de la sucesión de valores $\{\cos(n_r x + \alpha_r)\}$; y observando que los números α_r están dados arbitrariamente, se puede repetir la misma afirmación para la sucesión $\{\cos(n_r x + \alpha_r + \gamma)\}$ donde γ es arbitrario; y esto significa que la sucesión $\{\cos(n_r x + \alpha_r)\}$ tiene como punto límite $\cos \gamma$.

Concluimos pues: *asignada la sucesión de números reales $\{n_r\}$ con $\lim n_r = \infty$ y la sucesión de los números α_r y fijado arbitrariamente un número c , $-1 \leq c \leq 1$, la sucesión $\{\cos n_r x + \alpha_r\}$ tiene c como punto límite para todos los valores de x de un intervalo (o conjunto) finito, salvo eventualmente un conjunto de medida 0, el cual depende de c .*

Si ahora elegimos en el intervalo $-1-1$ una sucesión de números c_1, c_2, \dots densa y para cada uno consideramos el eventual conjunto de medida 0 excepcional, se infiere fácilmente que para un x cualquiera que no pertenezca a la suma de estos conjuntos excepcionales serán puntos límites de la sucesión $\{\cos(n_r x + \alpha_r)\}$ todos los puntos del intervalo $-1-1$. Es decir que *salvo para los x de un conjunto de medida 0 la sucesión $\{\cos(n_r x + \alpha_r)\}$ es densa en el intervalo $-1-1$.*

Para simplificar la expresión, escribimos $2\pi x$ y $2\pi \alpha_r$ por x y α_r e indiquemos por $\text{mant } \xi$ la parte fraccionaria (mantisa) del número real ξ . Las proposiciones precedentes se expresan entonces en la forma siguiente que interesa a la teoría de los números:

Dada la sucesión $\{n_r\}$, $\lim n_r = \infty$ y la sucesión $\{\alpha_r\}$ ($0 \leq \alpha_r < 1$) la sucesión $\text{mant}\{n_r x + \alpha_r\}$, para cualquier valor de x , salvo un conjunto de medida 0 es denso en el intervalo $0-1$.

Si se supone que la sucesión $\{n_r\}$ sea la sucesión $\{r\}$ de los números enteros positivo, el teorema es bien conocido y se sabe que el conjunto excepcional es el de los números racionales; es por lo tanto no solamente de medida 0 sino numerable; pero la

situación varía si cambiamos la sucesión $\{n_r\}$. En nuestra nota anterior citada ⁽⁵⁾ dimos un ejemplo (y muchos se pueden construir análogamente) en el cual el conjunto excepcional tiene ciertamente la potencia del continuo, porque tiene esa potencia una parte de él, la allí considerada, en la cual $\text{mant } n_r, x$ tiene límite determinado ⁽⁶⁾.

6. — La proposición del n. 4 y también la menos precisa del n. 2 permite afirmar que, *dada una sucesión infinita de funciones $A(n_r, 1, x)$ ($\lim n_r = \infty$), cualesquiera sean el conjunto E , $|E| > 0$ y el número positivo $\gamma < 2$, existe siempre en E algún punto x tal que, para n_r, n_s convenientes*

$$|A(n_r, 1, x) - A(n_s, 1, x)| > \gamma. \quad (8)$$

En los párrafos siguientes vamos a puntualizar algunas relaciones entre los números n_r y n_s en la (8).

Demostraremos primero que si a la limitación $\gamma < 2$ sustituimos la más estrecha

$$\gamma < 1 \quad (9)$$

uno de los números n_r, n_s puede elegirse arbitrariamente por cuanto:

Dado un conjunto E de medida $|E| > 0$ y un número positivo $\gamma < 1$ a cada número n corresponde otro $K_n(E, \gamma)$ tal que, si $\nu > K_n n$ existe en E algún x para el cual

$$|\cos(n x + \alpha) - \cos(\nu x + \mu)| \geq \gamma. \quad (10)$$

El número K_n es no-creciente al crecer n y tiene un límite

⁽⁵⁾ Ver Math. Notae - Año IV - p. 154 - 155.

⁽⁶⁾ Dejamos al lector deducir de los teoremas anteriores consecuencias interesantes expresables en términos de probabilidades como sería la siguiente: La probabilidad de que un número elegido casualmente contenga infinitas veces un grupo de cifras consecutivas asignado (sin limitación al número de cifras del grupo) es 1. Cfr. E. BOREL en *Valeur pratique et philosophie des probabilités* (París, Gauthier - Villars, 1939) llama esos números *normales*.

inferior K que corresponde a un N tal que si $n \geq N$ la (10) se realiza para algún x de E cuando $v > Kn$.

Por la sencillez ponemos $\alpha = \mu = 0$; el lector puede convencerse fácilmente por la demostración que el particular no tiene importancia.

Transformemos ante todo el primer miembro de (10) en la forma

$$|\cos nx - \cos vx| = 2 \left| \sin(v-n) \frac{x}{2} \sin(v+n) \frac{x}{2} \right|; \quad (11)$$

será demostrado (10) si se muestra que puede hacerse separadamente

$$\left| \sin(v-n) \frac{x}{2} \right| \geq \sqrt{\frac{\gamma}{2}}, \quad \left| \sin(v+n) \frac{x}{2} \right| \geq \sqrt{\frac{\gamma}{2}}.$$

Si en las consideraciones del n. 1 ponemos $\beta = \sqrt{\gamma : 2}$ y tenemos en cuenta (9) obtenemos $\lambda > \pi/4$; podemos luego elegir σ y Θ tales que aún

$$\Theta \left(\frac{\lambda}{\pi} - \sigma \right) > \frac{1}{4}$$

y queda entonces definido un N_γ tal que, para $n_1 > N_\gamma$, dentro de un cierto intervalo I existe un conjunto $E_1 \subset E$ de medida

$$> \Theta \left(\frac{\lambda}{\pi} - \sigma \right) |I| > \frac{1}{4} |I|,$$

en el cual (*)

$$\cos \left(n_1 \frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = \sin n_1 \frac{x}{2} \geq \sqrt{\frac{\gamma}{2}}.$$

(*) Evidentemente el divisor 2 que aquí conviene poner a la x no tiene otra influencia que de tener que aplicar lo dicho en el n. 2 al conjunto que se obtiene reduciendo E por semejanza en la razón $\frac{1}{2}$.

Análogamente, eventualmente con atribuir a N_γ otro valor mayor, existe dentro de I otro conjunto $E'_1 \subset E$ en el cual

$$\operatorname{sen} n_1 \frac{x}{2} \leq -\sqrt{\frac{\gamma}{2}},$$

cuya medida es también $> \frac{1}{4}|I|$; y, observando que E_1 y E'_1 no pueden tener puntos comunes, será

$$|E_1 \cup E'_1| > \frac{1}{2}|I|.$$

Pongamos

$$|E_1 \cup E'_1| - \frac{1}{2}|I| = d$$

y consideremos el conjunto G de los puntos que se obtienen multiplicando los puntos de $E_1 \cup E'_1$ por el factor $1+l$ donde l es un número elegido arbitrariamente bajo la condición

$$l \leq \frac{H}{2} \quad H = \frac{p-d}{d},$$

donde p indica un número no menor que $|I|$ y que el máximo valor absoluto de las abscisas de los puntos de I . La medida de G será

$$|G| = (1+l)|E_1 \cup E'_1| = (1+l) \left(\frac{1}{2}|I| + d \right) > \frac{1}{2}|I| + d + ld;$$

luego

$$|G| + |E_1 \cup E'_1| > |I| + 2d + ld;$$

por otra parte G, E_1 y E'_1 están contenidos en un intervalo de longitud ⁽⁸⁾

⁽⁸⁾ En efecto los tres conjuntos están contenidos en el segmento suma de I y del transformado I' de I por la dilatación $1+l$; si $a < b$ son las abscisas de los extremos de I , los extremos I' tienen abscisas $(1+l)a$ y $(1+l)b$ y la longitud total del segmento que contiene I e I' será el máximo de las diferencias

$$\leq |I| + lp.$$

Siendo por definición $l(p-d) < 2d$, los dos conjuntos G y $E_1 \cup E'_1$ tienen puntos comunes. Sea ξ uno de estos puntos, x el punto correspondiente en $E_1 \cup E'_1$; se tiene

$$\left| \operatorname{sen} n_1 \frac{x}{2} \right| \geq \sqrt{\frac{\gamma}{2}}, \quad \left| \operatorname{sen} n_1 \frac{\xi}{2} \right| = \left| \operatorname{sen} n_1 (1+l) \frac{x}{2} \right| \geq \sqrt{\frac{\gamma}{2}}$$

$$2 \left| \operatorname{sen} n_1 \frac{x}{2} \operatorname{sen} n_1 (1+l) \frac{x}{2} \right| \geq \gamma.$$

Comparando con (11) se ve que se habrá encontrado un punto x que realiza (10) si es

$$n_1 = v - n, \quad n_1(1+l) = v + n,$$

es decir

$$n_1 = n \frac{2}{l} \quad v = n \left(1 + \frac{2}{l} \right).$$

Para realizar estas condiciones, con las condiciones complementarias

$$n_1 > N_\gamma, \quad l \leq \frac{H}{2}$$

bastará distinguir dos casos:

1°. $n > N_\gamma : H$; bastará que $v \geq n(1+H)$,

2°. $n \leq N_\gamma : H$; deberá ser $v > n + N_\gamma = n \left(1 + \frac{N_\gamma}{n} \right)$

y se elige

$$b - (1+l)a = |I| - la \leq |I| + |a|$$

$$(1+l)b - (1+l)a = |I| + l|I|$$

$$(1+l)b - a = |I| + lb \leq |I| + l|b|;$$

se ha supuesto $p \geq (|a|, |b|, |I|)$; queda luego establecida la relación del texto.

$$l = \frac{2n}{v-n}.$$

Los números K_n del enunciado valen pues

$$K_n = 1 + H \quad \text{si } n \geq N_\gamma : H$$

$$K_n = 1 + \frac{N_\gamma}{n} > 1 + H \quad \text{si } n < N_\gamma : H.$$

El cálculo del número H depende de la elección de p y d , que, según lo dicho, no están completamente determinados. Para p se puede fijar su mínimo valor; si a, b son las abscisas de los extremos de I , este mínimo es

$$p^* = \text{máx} (|a|, |b|, |a-b|);$$

d depende de la elección de σ y Θ y tiende a su límite superior

$$d^* = \frac{2\lambda}{\pi} - \frac{1}{2}$$

cuando $\sigma \rightarrow 0$, $\Theta \rightarrow 1$; resulta

$$H > \underline{\lim} H = \frac{p^* + \frac{1}{2} - \frac{2\lambda}{\pi}}{\frac{2\lambda}{\pi} - \frac{1}{2}} = H^*.$$

Si para p, d y H se toman los valores extremos así determinados, débese observar que las desigualdades que definen n y v débense entonces interpretar en sentido estricto, porque estos valores extremos podrían no ser alcanzables para la validez de los razonamientos. Se obtiene por tanto para todos los casos la regla

$$v > K_n n$$

$$K_n = K = 1 + H^* \quad \text{para } n \geq N_\gamma : H^* \quad (12)$$

$$K_n = 1 + N_\gamma/n \quad \text{» } n < N_\gamma : H^*.$$

Finalmente se debe notar que, en virtud de la elección arbitraria de n y de la limitación únicamente inferior de v , podrán siempre los valores de estos multiplicadores elegirse en la sucesión $\{n_r\}$.

Queda así definitivamente demostrado la proposición enunciada.

7. — La razón esencial por la cual en el teorema del último párrafo tuvo que limitarse el valor de γ por la desigualdad (9), mientras las proposiciones anteriores deben dejar pensar en la condición más amplia

$$\gamma < 2, \quad (13)$$

debe buscarse, desde el punto de vista sistemático, en haber tenido de realizar la condición de que el conjunto de los puntos de E tales que $\left| \sin (v-n)/2 \right| \geq \sqrt{\gamma} : 2$ llenara más que la mitad del intervalo I definido por las condiciones (1), (2) de los n. 1, 2; desde el punto de vista substancial, ella reside en la validez del teorema para todos los valores de n , pues es evidente que, si el conjunto E y la sucesión $\{n_r\}$ fueran tales que para un cierto grupo de primeros valores del índice r resultara siempre $\cos n_r x$ bastante próximo a 0, no podría la diferencia

$$|\cos n_r x - \cos n_s x|$$

para tales valores de r y para valores cualesquiera de s superar un número conveniente > 1 , pero que puede ser tan próximo a 1 como se quiera.

Podemos por contrario completar la deducción del párrafo 2 demostrando un teorema análogo al del último n.º, con la más amplia condición (13) si nos permitimos de excluir en la sucesión $\{n_r\}$ un cierto grupo de primeros términos. Para este fin es necesario tener en cuenta el siguiente complemento de la proposición a) del n. 1.

b) Dado el conjunto E de medida $|E| > 0$ y un número $\eta > 0$, existe un número $d(\eta) > 0$ y un conjunto asociado $E' \subset E$ de medida $|E'| > 0$ tales que la relación

$$|I| - |E'| < \eta |I| \quad (14)$$

se realiza siempre cuando el intervalo I tiene longitud $|I| < d(\eta)$ y contiene algún punto de E' .

Este teorema equivale en la substancia a la noción de *densidad* introducida por Lebesgue desde 1906⁽⁹⁾. En las líneas siguientes vamos a dar de él una demostración directa y constructiva, que, para la aplicación a nuestro problema, nos parece interesante, precisamente por esta razón de la constructividad.

Por aplicación de la prop. a) (n. 1), supongamos haber determinado un intervalo I^* tal que

$$|I^*| - |EI^*| < \varepsilon |I^*| \quad (*)$$

para un valor de ε que el razonamiento nos mostrará conveniente poner en la forma

$$\varepsilon = \frac{(1-\zeta)\eta}{2(2-\eta)}. \quad (**)$$

Si llamamos

(9) H. LEBESGUE, *Sur les fonctions dérivées*. Rend della R. Accademia dei Lincei (5) XV. *Sur l'Intégration des fonctions discontinues*. Annales de l'École Norm. Supérieure (3) XXVII —1910— p. 405-407. Ver también, aun para bibliografía; HOBSON, *The Theory of functions of a variable real*. 3 ed. Vol. I. 1927 (p. 190-196).

Se llama *densidad* de un conjunto E en un punto P al límite, cuando existe, de la razón $|EI| : |I|$, donde I representa un intervalo que contiene a P y tiende a la longitud 0. Se demuestra que si E tiene medida > 0 , el conjunto de los puntos de E donde la densidad es 1 tiene la misma medida de E . Esto significa que, cualquiera sea P en E —con excepción a lo sumo para los puntos de un conjunto de medida 0—, asignado un η ($1 > \eta > 0$) existe un $\delta_P(\eta) > 0$ tal que, si I es un intervalo conteniendo P y de longitud $\leq \delta_P$, vale $|EI| > |I|(1-\eta)$. El número $\delta_P(\eta)$ depende del punto P ; para demostrar que existe un valor $d(\eta)$ válido para un conjunto de puntos P de medida > 0 basta un simple razonamiento por absurdo, como, por otra parte, aun por absurdo se conduce habitualmente la demostración de que la densidad no podría ser < 1 en un conjunto de medida > 0 . En la aplicación del texto conviene tener un procedimiento de determinación efectiva del número $d(\eta)$ y del conjunto E_1 que permita operar sobre ellos como sobre cantidades conocidas. La demostración presentada no difiere en el concepto de la primitiva de Lebesgue, aunque con algunas variantes y complementos que parecen importantes.

$$C = I^* - EI^*$$

al conjunto complementario de E respecto del intervalo I^* , será $|C| < \varepsilon |I^*|$; puede luego determinarse un conjunto Σ de segmentos cuya longitud total es $|\Sigma| = \sigma < 2\varepsilon |I^*|$ y que contiene en su interior a C . Hágase ahora la construcción siguiente: alárguese cada uno de los segmentos que constituyen Σ a la derecha y a la izquierda en un segmento cuya longitud tenga a la del segmento considerado la razón $1 - \eta/\eta$. Se obtendrá un nuevo sistema Σ' de segmentos cuya suma de las longitudes será $\frac{2-\eta}{\eta} \sigma$, pero en el cual algunos de los segmentos habrán podido venir a sobreponerse parcial o totalmente; alárguese entonces todavía cada una de las prolongaciones indicadas en una cantidad igual a la suma de todos los segmentos de Σ con sus prolongaciones de la misma parte (según la regla indicada) que la prolongación considerada, con sus sucesivas ampliaciones, llegue a alcanzar. El sistema Σ' así modificado llena un cierto sistema Σ'' de segmentos (salvo eventualmente los extremos de éstos) sin puntos comunes, que contiene en su interior al conjunto C y cuya longitud total será $\leq \frac{2-\eta}{\eta} \sigma$ — como se comprueba con un poco de reflexión — y tal que cualquier segmento contenido en I^* y que tenga uno a lo menos de sus extremos no interior a uno de estos segmentos contiene puntos de E y (eventualmente) puntos de C de manera que la medida de la parte de E tiene relación $\geq 1 - \eta$ a la longitud total del segmento.

Poniendo para σ su valor y para ε la determinación (**), se obtiene que la longitud total de Σ'' es

$$< (1 - \zeta) |I^*| < I^*.$$

Se sigue que existe un conjunto de puntos de I^* de medida $> \zeta |I^*|$ no pertenecientes a Σ'' y por lo tanto parte de E .

Si ahora, en este conjunto despreciamos los puntos eventuales cuya distancia de los extremos de I^* es $< \frac{\zeta}{3} |I^*|$, quedará un conjunto E' cuya medida será $> \frac{\zeta}{3} |I^*|$, y tal que

cada intervalo que contiene puntos de E' y tiene longitud $< \frac{\zeta}{3} |I^*|$ es completamente interno a I^* y está dividido por ese punto en dos partes, cada una de las cuales tiene por lo menos un extremo externo a Σ'' . E' realiza luego la condición de la prop. b) con

$$d(\eta) = \frac{\zeta}{3} |I^*|.$$

El factor ζ queda arbitrario con la sola condición $0 < \zeta < 1$ y al variar ζ varían $d(\eta)$ y E' ; cuando ζ crece, disminuye ε y esto lleva generalmente a tener que tomar I^* más corto; es decir que en la expresión de $d(\eta)$ los dos factores varían en sentido opuesto. La búsqueda de condiciones de óptimo sólo tendría sentido para cada conjunto particular E totalmente definido; pero tampoco en tal caso tiene interés generalmente.

8. — Vamos a investigar ahora el perfeccionamiento de la prop. del n. 3 según el programa indicado a principio del que precede.

Pongamos

$$\lambda = \arccos \frac{\gamma}{2}$$

y después de fijar ε por la condición (2)

$$\varepsilon < (1 - \Theta) \left(\frac{\lambda}{\pi} - \sigma \right), \quad (2)$$

supongamos elegido en la prop. b) un $\eta \leq \varepsilon$; supongamos luego determinado un intervalo I_1 tal que

$$|I_1| - |E'I_1| < \varepsilon |I_1|.$$

Por el n. 2, puesto

$$N_1 = \frac{4\lambda}{\sigma |I_1|},$$

para cualquier

$$n' \geq \left(N_1, \frac{2\lambda}{d(\eta)} \right) \quad (15)$$

existe un intervalo I_2 de amplitud

$$|I_2| = \frac{2\lambda}{n'} \leq d(\eta) \quad (16)$$

en cuyos puntos

$$\cos n'x \geq \frac{\gamma}{2} \quad (17)$$

y que contiene puntos de E' y luego también de E ; precisamente, a consecuencia de (15) y de la proposición b), la parte de E contenida en I_2 es tal que

$$|I_2| - |EI_2| \leq \eta |I_2| \leq \varepsilon |I_2|;$$

se sigue que, puesto

$$N_2 = \frac{4\lambda}{\sigma |I_2|} = \frac{2n'}{\sigma}, \quad (18)$$

para cada

$$n'' \geq N_2 \quad (19)$$

existen puntos de E en I_2 para los cuales

$$\cos n''x \leq -\frac{\gamma}{2}. \quad (19')$$

De (19), (19') resulta

$$\cos n'x - \cos n''x \geq \gamma \quad (20)$$

que es la condición que se quería realizar. En (18) es $\sigma < \lambda : \pi$

y tan próximo a $\lambda : \pi$ como se quiere; se puede luego sustituir $\sigma = \lambda : \pi$ a la sola condición de poner en (19) $>$ en cambio de \geq ; se obtiene

$$N_2 = \frac{2\pi}{\lambda} n'.$$

Obtenemos pues la conclusión: *asignado arbitrariamente $\gamma < 2$, positivo, basta elegir en la sucesión $\{n_r\}$ un n' superior a cierto límite (15) dependiente únicamente de E y de γ , luego un $n'' \geq (2\pi/\lambda) n'$ para realizar la condición requerida (20).*

BUENOS AIRES

ROSARIO - INSTITUTO DE MATEMÁTICA

NUEVAS CONSIDERACIONES SOBRE
UN PROBLEMA DIOFANTICO

por

ALBERTO E. SAGASTUME BERRA

En dos notas anteriores⁽¹⁾ B. Levi y L. A. Santaló han tratado un problema diofántico que depende de la numeración (decimal) usada, y sugiere por tanto de inmediato la siguiente generalización:

Tres números enteros y positivos expresan las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo; anteponiendo a esos números, escritos en el sistema de numeración de base B, un mismo número⁽²⁾, se obtienen nuevamente los lados de un triángulo rectángulo. Determinar esos tres números.

Adoptaremos las mismas notaciones que en las notas citadas, agregando otras, ahora necesarias. B indicará la base de la numeración.

Según los datos, deben verificarse las ecuaciones correspondientes a [L] (3):

$$m^2 + n^2 - p^2 = 0,$$

$$(aB^x + m)^2 + (aB^y + n)^2 - (aB^z + p)^2 = 0.$$

Restando y dividiendo por a (ya que la solución $a=0$ no interesa) se llega a

⁽¹⁾ B. LEVI, *Mathematicæ Notæ*, 5 (1945) 108-119; L. A. SANTALÓ, *ibid.* 5 (1945), 162-171. Estos trabajos serán en lo sucesivo citados con las abreviaturas [L], [S] respectivamente.

⁽²⁾ No se exige que éste conste de una sola cifra; pero resultará así: véase la fórmula (3).

$$2(mB^x + nB^y - pB^z) + a(B^{2x} + B^{2y} - B^{2z}) = 0,$$

y, por los mismos razonamientos que en [L], se llega a las condiciones

$$y = x = x + t, \quad t \geq 1 \quad (1)$$

y a la ecuación fundamental

$$2bB^t - aB^x = 2m. \quad (2)$$

Como p, n tienen $x + t$ cifras, y

$$m^2 = (p + n)b, \quad b = p - n$$

se tiene

$$m^2 > 2bB^t \cdot B^{x-1} = B^{x-1}(aB^x + 2m),$$

o sea

$$(m - B^{x-1})^2 - B^{2(x-1)} > aB^{2(x-1)+1},$$

y como $m < B^x$, se deduce fácilmente

$$a < B - 2 \quad (3).$$

a debe ser, pues, de una sola cifra en el sistema de base B , y además $B > 3$. El razonamiento hecho generaliza el de [S] (1.6) a (1.8).

Dados a y B , se trata de determinar m (de x cifras, en la numeración de base B) de modo que b , calculado según (2), resulte entero y divisor de m^2 . Además, puesto que

$$\left. \begin{array}{l} p \\ n \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \left(\frac{m^2}{b} \pm b \right) \quad (4)$$

deben ser enteros, es necesario que $\frac{m^2}{b}$ y b sean de igual paridad;

y finalmente, que los valores (4) resulten ambos de $x + t$ cifras.

Como según (2), $2m$ debe ser múltiplo de B , caben dos casos:

$$I: m \equiv 0 \pmod{B}; \quad II: m \equiv 0 \pmod{B}.$$

I: Si, siendo $2m$ múltiplo de B , no lo es m , B debe ser par,

$$B = 2B_0 \quad (5, I)$$

y m debe ser de la forma $m = (2m' + 1)B_0$; con lo cual (2) da

$$2bB^{t-1} - aB^{x-1} = 2m' + 1 \quad (2, I)$$

La paridad de los distintos términos indica inmediatamente que $x=1$, y por consiguiente, $m'=0$, $m=B_0$; y además, a debe ser impar y $t=1$, pues $t>1$ implicaría, en virtud de (3), el absurdo

$$b = \frac{a+1}{2B^{t-1}} < \frac{1}{2}.$$

Como

$$\frac{m^2}{b} = \frac{2B_0^2}{a+1} = \frac{B_0B}{a+1},$$

resulta asimismo $a+1$ divisor de B .

Finalmente, para que p y n , determinados por (4), tengan $x+t=2$ cifras, es necesario y suficiente que

$$2B_0 \leq \frac{B_0^2}{a+1} - \frac{a+1}{4} < \frac{B_0^2}{a+1} + \frac{a+1}{4} < 4B_0^2.$$

La última desigualdad se cumple siempre, y la primera equivale a

$$\left(\frac{a+1}{2} + 2B_0\right)^2 \leq 5B_0^2,$$

de donde

$$\frac{a+1}{2} \leq B_0(\sqrt{5}-2) < \frac{B_0}{4}.$$

Se tiene, en resumen, la solución:

$$\left. \begin{array}{l} p \left\{ \frac{B_0^2}{a+1} \pm \frac{a+1}{4}, \quad m = B_0 \right. \\ a \equiv 1 \pmod{2}, \quad B \equiv 0 \pmod{a+1}, \quad a+1 < \frac{B}{4} \end{array} \right\} \quad (\text{I})$$

Ejemplos: $B=14$, $a=1$ da la solución 7, 24, 25 o, escrita en base 14, $m=7$, $n=1(10)$, $p=1(11)$ (aquí, como en lo que sigue, los números entre paréntesis son *cifras* en la numeración adoptada). La anteposición de la cifra $a=1$ da 17, 11(10), 11(11), o sea 21, 220 y 221, lados de un nuevo triángulo pitagórico.

Para $B=64$ hay soluciones correspondientes a $a=3$ y $a=7$. En el primer caso la solución es $m=(32)$, $n=3(63)$, $p=41$, y para $a=7$, $m=(32)$, $n=1(62)$, $p=22$.

II. Sea ahora m múltiplo de B , y pongamos, como en [L](9),

$$m = B^u m_1, \quad u \geq 1, \quad m_1 \equiv 0 \pmod{B}, \quad (6, \text{II}),$$

de modo que u es el número de ceros que siguen a m_1 . Por consiguiente,

$$u < x, \quad B^{x-u-1} \leq m_1 < B^{x-u} \quad (7, \text{II}).$$

Sustituyendo el valor de m en (2) se obtiene

$$2bB^t - aB^x = 2B^u m_1, \quad (2, \text{II})$$

de la cual resulta $t \geq u$, ya que el primer término debe contener a B a una potencia no menor que la mínima de los otros dos. Hay, pues, dos casos posibles:

$$\text{IIa: } t > u; \quad \text{IIb: } t = u.$$

IIa. La ecuación fundamental (2, II) se transforma en

$$2bB^{t-u} - aB^{x-u} = 2m_1$$

que es la misma (2) con $t-u$, $x-u$ y m_1 en lugar de t , x y

m respectivamente. Puesto que m_1 no es múltiplo de B , podemos aplicar la conclusión del caso I, hallando la solución

$$\left. \begin{aligned} \frac{p}{n} & \left\{ = \frac{B_0^2 B^{2u}}{a+1} \pm \frac{a+1}{4}, \quad m = B^u B_0 \right. \\ a & \equiv 1 \pmod{2}, \quad B = 2B_0 \equiv 0 \pmod{a+1}, \quad a+1 < \frac{B}{4} \end{aligned} \right\} \text{(IIa)}$$

Ejemplo: $B = 20, a = 3$:

$$\frac{p}{n} \left\{ = 20^{2u} \cdot 25 \pm 1, \quad m = 20^u \cdot 10. \right.$$

Así, para $u = 1$, se tienen los valores: (10)0, 14(19) (19), 1501, que forman un triángulo pitagórico, lo mismo que 3(10)0, 314(19) (19), 31501.

II b. $t = u$ es el caso más difícil. (2, II), que ahora se escribe

$$2b - aB^{x-u} = 2m_1,$$

nos dice ante todo que aB^{x-u} debe ser par. Luego, si

$$B = 2^\beta B_1, \quad \beta \geq 0, \quad B_1 \equiv 1 \pmod{2} \quad (8, \text{II b}),$$

$$a = 2^k a_1, \quad k \geq 0, \quad a_1 \equiv 1 \pmod{2} \quad (9, \text{II b}),$$

resulta que

$$k, \beta \text{ no son simultáneamente nulos} \quad (10, \text{II b}).$$

Pongamos todavía:

$$m_1 = 2^h m_2, \quad h \geq 0, \quad m_2 \equiv 1 \pmod{2} \quad (11, \text{II b})$$

$$k_1 = k - 1 + \beta(x - u) \quad (\geq 0) \quad (12, \text{II b})$$

$$v = \min(h, k_1) \quad (13, \text{II b}),$$

y obtendremos:

$$b = 2^v (2^{k_1-v} a_1 B_1^{x-u} + 2^{h-v} m_2) \quad (2, \text{II b}).$$

Es claro entonces que puede escribirse

$$b = 2^{v+l} \cdot c, \quad l \geq 0, \quad c \equiv 0 \pmod{2} \quad (14, \text{II b}),$$

donde, evidentemente,

$$l > 0 \text{ solamente si } h = k_1 (=v) \quad (15, \text{II b}),$$

y además, a causa de (6, II) y (11, II b),

$$c \equiv 0 \pmod{B_1}. \quad (16, \text{II b}).$$

Como b debe dividir a m^2 y, si es par, el cociente debe también ser par, se deduce que

$$v+l > 0 \text{ implica } v+l \leq 2(h+\beta u) - 1. \quad (17, \text{II b}).$$

De la divisibilidad de m^2 por b resulta asimismo que c divide a $B_1^{2u} m_2^2$. Puesto que [a causa de (2, II b), (14, II b)]

$$2^l c = 2^{k_1-v} a_1 B_1^{x-u} + 2^{h-v} m_2 \quad (18, \text{II b}),$$

resulta que los factores primos de c sólo pueden ser elegidos entre los de a_1, B_1 .

Se puede ahora, siguiendo en esencia el mismo camino que en [L] y [S] obtener una acotación para $2^l c$. Teniendo en cuenta que $p+n = \frac{m^2}{b}$ y que tanto p como n están comprendidos entre B^{x+u-1} y B^{x+u} , se deduce fácilmente de (6, II), (11, II b), (14, II b), que

$$2^{\frac{v+l+1}{2}-h} B^{\frac{x-u-1}{2}} \sqrt{c} < m_2 < 2^{\frac{v+l+1}{2}-h} B^{x-u} \sqrt{c},$$

mientras que (7, II) y (11, II b) dan inmediatamente

$$2^{-h} B^{x-u-1} \leq m_2 < 2^{-h} B^{x-u}. \quad (19, \text{II b}).$$

Para reunir en una ambas acotaciones, observemos que, según (18, II b),

$$B_1 x^{-u} \leq a_1 B_1 x^{-u} < 2^{l+v-k_1} c,$$

y por lo tanto

$$B^{x-u} < 2^{l+v-k+1} c,$$

de donde resulta fácilmente,

$$2^{-h} B^{x-u} < 2^{\frac{v+l+1}{2}} -h B^{\frac{x-u}{2}} \sqrt{c};$$

y de aquí, puesto que $B^{-1} < B^{-\frac{1}{2}}$,

$$2^{-h} B^{x-u-1} < 2^{\frac{v+l+1}{2}} -h B^{\frac{x-u-1}{2}} \sqrt{c}.$$

Con esto las acotaciones para m_2 se transforman, en definitiva, en una sola:

$$2^{\frac{v+l+1}{2}} -h B^{\frac{x-u-1}{2}} \sqrt{c} < m_2 < 2^{-h} B^{x-u}.$$

Sustituyendo ahora m_2 por su expresión según (18, II b) se halla

$$2^{k_1-v} a_1 B_1 x^{-u} + 2^{\frac{l-v+1}{2}} B^{\frac{x-u-1}{2}} \sqrt{c} < 2^l c < 2^{k_1-v} a_1 B_1 x^{-u} + 2^{-v} B^{x-u}.$$

La desigualdad de la izquierda es cuadrática en $2^{\frac{l}{2}} \sqrt{c}$. Resolviéndola y combinándola con la de la derecha, resulta finalmente:

$$2^{-(v+1)} B^{x-u-1} (1 + \sqrt{1+aB})^2 < 2^l c < 2^{-(v+1)} B^{x-u} (a+2) \quad (20, II b).$$

La compatibilidad de estas dos desigualdades se demuestra equivalente a la condición (3) (cfr. [S]).

En algunos casos puede interesar la acotación

$$h < (x-u) \frac{\log B}{\log 2} \quad (21, II b)_4$$

deducida inmediatamente de (19, II b).

Las fórmulas obtenidas permiten, dados B y a , para cada valor de $x-u$, calcular o acotar sucesivamente k_1 , h , l , c , b , m_2 , m , $p+n$ y finalmente, p y n .

Ejemplo: Sea $B=35=B_1$, con $\beta=0$. Por (10, II b), debe ser $k > 0$. Más aún, debe ser $k > 1$; pues $k=1$ da $k_1=0$, luego necesariamente $v=0$, si entonces se supone $h=0$ se obtiene contradicción entre (15, II b) y (17, II b), mientras que $h > 0$ implica $l > 0$ y, siendo entonces b impar, también m^2 : b debe serlo, en contradicción con la hipótesis $h > 0$.

Para $k=2$ hay ya soluciones. Pongamos, para fijar las ideas, $a=4$; de modo que $a_1=1$, $k_1=1$. Para $h=0=v$ se tiene, según (15, II b), $l=0$, con lo cual (20, II b) nos da:

$$35^{x-u-1} \cdot 82,95 < c < 35^{x-u-1} \cdot 105,00.$$

Como c debe ser de la forma $5^x 7^y$, hay solución recién para $x-u=2$, que es

$$c = 5^5 = b.$$

Con esto, sucesivamente:

$$m_2 = 5^5 - 2 \cdot 5^2 7^2 = 3^3 \cdot 5^2, \quad m = 35^u \cdot 3^3 5^2,$$

$$p+n = 35^{2u-1} \cdot 3^6 \cdot 7,$$

y finalmente:

$$\left. \begin{matrix} p \\ n \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} (35^{2u-1} \cdot 3^6 \cdot 7 \pm 5^5), \quad m = 35^u \cdot 3^3 \cdot 5^2$$

$$a=4, \quad B=35$$

Por ejemplo, para $u=1$: $m=(19)(10)0$, $n=21(21)(30)$, $p=2465$.

Otra solución es, para $h=2$, $x-u=1$

$$\left. \begin{matrix} p \\ n \end{matrix} \right\} = 35^{2u} \cdot 2^2 \pm 7^2, \quad m = 35^u \cdot 2^2 \cdot 7$$

$$a=4, \quad B=35$$

Así, para $u=1$: $m=(28)0$, $n=3(33)(21)$, $p=41(14)$.

Hay casos particulares interesantes que, tratados directamente, dan lugar a fórmulas más sencillas o procedimientos más rápidos. Uno de ellos es el $x-u=1$, $\beta > 0$, que nos ha permitido calcular todas las soluciones para $B \leq 20$ en el cuadro siguiente. Debe interpretarse que u varía, en cada una, a partir del mínimo valor que hace que las expresiones de n y p sean enteras y positivas. Para $B=4$ y 8 no hay soluciones de este tipo.

B	a	m	n, p
6	1	$6^u \cdot 5$	$6^{2u-4} \cdot 3^4 \cdot 5^2 \pm 4$
10	1	$10^u \cdot 5$	$10^{2u-2} \cdot 5^3 \pm 5$
	2	$10^u \cdot 6$	$10^{2u-3} \cdot 3^2 \cdot 5^3 \pm 8$
	3	$10^u \cdot 9$	$10^{2u-4} \cdot 3^3 \cdot 5^4 \pm 12$
12	1	$12^u \cdot 6$	$12^{2u-1} \cdot 2 \cdot 3^2 \pm 6$
	1	$12^u \cdot 10$	$12^{2u-2} \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \pm 8$
	5	$12^u \cdot 10$	$12^{2u-1} \cdot 3 \cdot 5 \pm 20$
14	1	$14^u \cdot 7$	$14^{2u} \cdot 7^3 \pm 7$
	1	$14^u \cdot 9$	$14^{2u-5} \cdot 3^4 \cdot 7^5 \pm 8$
	3	$14^u \cdot 11$	$14^{2u-6} \cdot 7^6 \cdot 11^2 \pm 16$
16	1	$16^u \cdot 8$	$16^{2u-1} \cdot 2^5 \pm 8$
	3	$16^u \cdot 12$	$16^{2u} \cdot 2 \pm 18$

<i>B</i>	<i>a</i>	<i>m</i>	<i>n, p</i>
18	1	$18^u \cdot 7$	$18^{2u-5} \cdot 3^{10} \cdot 7^2 \pm 8$
	1	$18^u \cdot 9$	$18^{2u-2} \cdot 3^6 \pm 9$
	1	$18^u \cdot 15$	$18^{2u-4} \cdot 3^9 \cdot 5^2 \pm 12$
	2	$18^u \cdot 14$	$18^{2u-4} \cdot 3^8 \cdot 7^2 \pm 16$
	3	$18^u \cdot 9$	$18^{2u-3} \cdot 3^8 \pm 18$
	4	$18^u \cdot 12$	$18^{2u} \cdot 3^3 \pm 24$
	5	$18^u \cdot 15$	$18^{2u-3} \cdot 3^7 \cdot 5 \pm 30$
	9	$18^u \cdot 15$	$18^{2u-6} \cdot 3^{13} \cdot 5^2 \pm 48$
20	1	$20^u \cdot 6$	$20^{2u-2} \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \pm 8$
	1	$20^u \cdot 10$	$20^{2u-1} \cdot 2 \cdot 5^2 \pm 10$
	2	$20^u \cdot 12$	$20^{2u-1} \cdot 3^2 \cdot 5 \pm 16$
	3	$20^u \cdot 10$	$20^{2u-1} \cdot 5^2 \pm 20$
	3	$20^u \cdot 18$	$20^{2u-2} \cdot 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \pm 24$
	5	$20^u \cdot 14$	$20^{2u-3} \cdot 2 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \pm 32$
	9	$20^u \cdot 18$	$20^{2u-1} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \pm 54$
	11	$20^u \cdot 18$	$20^{2u-3} \cdot 3^4 \cdot 5^3 \pm 64$

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICOMATEMÁTICAS.
LA PLATA.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

SOLUCIONES

N.º 36 — Referido el plano a dos ejes cartesianos rectangulares, x, y se considera: 1º El haz de las cónicas que tienen en el origen O un contacto de tercer orden con el círculo de centro $(r, 0)$ y radio r . 2º El haz de las cónicas que tienen un contacto de tercer orden en el punto $A(1, 0)$ con el círculo que pasa por él y tiene por centro el punto $(1, \frac{1}{r})$. Se pide:

a) Estudiar el lugar geométrico de los puntos ξ, η en los cuales las cónicas de los dos haces que pasan por ellos son tangentes. En particular, siendo B el punto, distinto del O , en que este lugar corta al eje y , demostrar que la tangente al mismo en cada uno de los puntos O, A, B pasa por otro de estos puntos.

b) Obtener una generación proyectiva del lugar mediante haces de rectas y cónicas.

c) Encontrar la envolvente del lugar geométrico precedente al variar r y examinar su comportamiento en el origen O .

SOLUCIÓN.— El círculo de radio r y centro el punto $(r, 0)$ tiene por ecuación

$$x^2 + y^2 - 2rx = 0.$$

Una cónica que tiene un contacto de tercer orden en el origen con este círculo, es la tangente contada dos veces, o sea la cónica degenerada $x^2 = 0$. Por tanto el primer haz del enunciado tiene por ecuación

$$\lambda x^2 + y^2 - 2rx = 0. \quad (1)$$

El círculo que pasa por el punto $A(1, 0)$ y tiene por centro el punto $(1, 1/r)$ es

$$(x-1)^2 + y^2 - \frac{2}{r}y = 0.$$

Lo mismo que antes, considerando la cónica degenerada $y^2=0$, como cónica particular del segundo haz definido en el enunciado, resulta que la ecuación del mismo será

$$(x-1)^2 + \mu y^2 - \frac{2}{r}y = 0. \quad (2)$$

Pasemos ahora a contestar los diferentes puntos del problema.

a) La cónica del haz (1) que pasa por el punto ξ, η está definida por el valor del parámetro

$$\lambda = \frac{2r\xi - \eta^2}{\xi^2} \quad (3)$$

y la cónica del haz (2) que pasa por el mismo punto corresponde al valor

$$\mu = \frac{\frac{2}{r}\eta - (\xi-1)^2}{\eta^2}. \quad (4)$$

La tangente en el punto (ξ, η) a la cónica (1) es la recta

$$(\lambda\xi - r)(x - \xi) + \eta(y - \eta) = 0 \quad (5)$$

donde λ está dado por (3). Análogamente, la tangente a la cónica del haz (2) que pasa por ξ, η en este punto es

$$(\xi-1)(x - \xi) + \left(\mu\eta - \frac{1}{r}\right)(y - \eta) = 0 \quad (6)$$

donde μ está dado por (4). Para que (5) y (6) sean una misma recta debe ser

$$\frac{\lambda\xi - r}{\xi - 1} = \frac{\eta}{\mu\eta - \frac{1}{r}}$$

Sustituyendo en esta expresión los valores (3), (4) y simplificando, se obtiene que el lugar geométrico buscado de los puntos ξ, η en los cuales las cónicas de los haces (1) y (2) resultan tangentes, es la cúbica

$$r^2 \xi^3 + \eta^3 + r \eta^2 \xi - r \eta^2 - r \eta \xi - 2r^2 \xi^2 + r^2 \xi = 0. \quad (7)$$

Se comprueba inmediatamente que esta cúbica pasa por los puntos $O(0,0)$, $A(1,0)$ y $B(0,r)$ ⁽¹⁾.

La tangente en O , dada por los términos de menor grado en (7) es la recta $\xi=0$, que pasa por B .

La tangente en A es la recta $\eta=0$, que pasa por O .

La tangente en B es la recta

$$r\xi + \eta - r = 0$$

que pasa por A .

b) Para obtener una generación proyectiva de la cúbica (7) mediante haces de rectas y cónicas se puede elegir arbitrariamente el haz de rectas, con la única condición de que su centro sea un punto de la cúbica. Tomando, por ejemplo, como centro el origen O , pondremos $\eta/\xi = \rho$ en (7), con lo cual esta ecuación se puede escribir

$$r^2 \xi^2 + r \eta^2 - r \eta - 2r^2 \xi + r^2 + \rho (\eta^2 - r\eta) = 0 \quad (8)$$

que es la ecuación de un haz de cónicas en correspondencia proyectiva con el haz de rectas

$$\eta - \rho\xi = 0. \quad (9)$$

A cada valor de ρ corresponde una cónica (8) y una recta (9) cuyas intersecciones, al variar ρ , describen la cúbica (7).

⁽¹⁾ Para los dos primeros puntos, puntos bases de los dos haces de cónicas este hecho se preve geoméricamente, pues habrá siempre en cada uno de los haces una cónica tangente en su propio punto base a la del otro que pasa por el.

c) Para hallar la envolvente de las cúbicas (7) al variar r , se debe eliminar este parámetro entre la misma ecuación (7) y su derivada respecto r , que se puede escribir

$$2r\xi(\xi - 1)^2 - \eta(\xi + \eta - \eta\xi) = 0.$$

Despejando r de esta ecuación y sustituyendo en (7) se obtiene, con simples transformaciones

$$\eta^2(4\eta\xi^3 - \eta^2\xi^2 - 6\eta\xi^2 + 2\xi\eta^2 - (\eta - \xi)^2) = 0.$$

La curva representada por esta ecuación se descompone en el eje ξ contado dos veces y la cuártica

$$4\eta\xi^3 - \eta^2\xi^2 - 6\eta\xi^2 + 2\eta\xi^2 - (\eta - \xi)^2 = 0. \quad (10)$$

La primera parte no pertenece propiamente a la envolvente por presentarse en la ecuación como parte común a la curva del sistema correspondiente a $r=0$ y a la curva infinitamente próxima.

La cuártica (10) tiene en el origen un punto doble con la tangente única $\eta = \xi$. Para estudiar la curva en el origen pongamos

$$\eta = \xi + \eta_1.$$

Queda

$$(\xi - 1)^2 \eta_1^2 - 2\xi^2 (\xi - 1) \eta_1 - \xi^3 (3\xi - 4) = 0$$

de donde

$$\eta_1 = \frac{1}{\xi - 1} [\xi^2 \pm 2\xi^{3/2} (\xi - 1)^{3/2}]. \quad (11)$$

Esta expresión nos dice que para ξ próximo a 0, η_1 únicamente será real cuando $\xi(\xi - 1)$ sea positivo, o sea, cuando ξ sea negativo. Además, para ξ tendiendo a cero, el término $2\xi^{3/2} (\xi - 1)^{3/2}$ es infinitésimo de orden menor que ξ^2 y por tanto η_1 cambia de signo según se tome el signo + o el signo - que figuran en (11).

Por consiguiente, la cuártica (10) tiene en el origen un punto de retroceso de primera especie con la tangente $\eta - \xi = 0$, estando la curva situada en el tercer cuadrante.

N.º 92 — Demostrar que si A y B realizan la igualdad

$$\operatorname{sen}(2A + B) = 5 \operatorname{sen} B,$$

se verifica también

$$\operatorname{tg}(A+B) = \frac{3}{2} \operatorname{tg} A.$$

SOLUCIÓN. — La igualdad $\operatorname{sen}(2A + B) = 5 \operatorname{sen} B$, desarrollando el primer miembro se puede escribir

$$2 \operatorname{sen} A \cos A \cos B + \operatorname{sen} B (\cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A) = 5 \operatorname{sen} B. \quad (1)$$

Poniendo $\cos^2 A = 1 - \operatorname{sen}^2 A$ se tiene

$$2 \operatorname{sen} A \cos A \cos B - 2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen}^2 A + \operatorname{sen} B = 5 \operatorname{sen} B$$

o sea

$$\operatorname{sen} A \cos(A + B) = 2 \operatorname{sen} B \quad (2)$$

Pero si en (1) ponemos $\operatorname{sen}^2 A = 1 - \cos^2 A$, se obtiene

$$2 \operatorname{sen} A \cos A \cos B + 2 \operatorname{sen} B \cos^2 A - \operatorname{sen} B = 5 \operatorname{sen} B$$

o sea

$$\cos A \operatorname{sen}(A + B) = 3 \operatorname{sen} B. \quad (3)$$

De (2) y (3) por división se obtiene

$$\operatorname{tg}(A + B) = \frac{3}{2} \operatorname{tg} A$$

que es lo que se quería demostrar.

Esta solución ha sido enviada por el Sr. ARTURO GABRIE VIC, alumno de la Facultad de Ciencias Matemáticas de Rosario. Otra solución análoga se ha recibido del Sr. MOISÉS GRILL, alumno de la misma Facultad.

Nota de la Red. — Menos artificiosa y más corta es la solución siguiente: puesto que se busca una relación entre $A + B$ y A , póngase por claridad

$$A + B = x, \quad A = y$$

resulta

$$2A + B = x + y, \quad B = x - y.$$

La hipótesis se escribe luego

$$\text{sen}(x + y) = 5 \text{sen}(x - y)$$

es decir

$$\text{sen } x \cos y + \text{sen } y \cos x = 5 \text{sen } x \cos y - 5 \text{sen } y \cos x$$

$$4 \text{sen } x \cos y = 6 \text{sen } y \cos x;$$

dividiendo los dos miembros por $4 \cos x \cos y$ se obtiene como se quería

$$\text{tg } x = \frac{3}{2} \text{tg } y.$$

N.º 94 — Sea una esfera de radio R y una recta r cuya distancia al centro O de la esfera sea a . Sea Σ el plano determinado por r y el centro de la esfera. Por r se trazan planos que forman con Σ un ángulo variable ϑ y se consideran los conos de vértice O y base las secciones de estos planos con la esfera. Se pide determinar ϑ de manera que el volumen del cono correspondiente sea máximo.

SOLUCIÓN. — Llamando h a la distancia del centro O de la esfera al plano variable, el radio ρ de la circunferencia sección

de la esfera por dicho plano es tal que $\rho^2 = R^2 - h^2$. Por tanto el volumen del cono del que se habla en el enunciado es

$$V = \frac{1}{3} \pi \rho^2 h = \frac{1}{3} \pi (R^2 - h^2) h. \quad (1)$$

Considerando V como función de h , hay que tener en cuenta que esta variable no es del todo libre, sino que sus valores deben quedar dentro del intervalo $0 \leq h \leq \min(R, a)$; se sabe entonces que los valores extremos de la función se realizan por valores de la variable que anulan la derivada, si estos son interiores al intervalo de variabilidad, o bien en los valores extremos del intervalo. Derivando la expresión de V se obtiene

$$\frac{dV}{dh} = \frac{1}{3} \pi (R^2 - 3h^2);$$

esta derivada es pues 0 para $h = R / \sqrt{3}$. De conformidad a la observación anterior deberán distinguirse dos casos:

1º. $a \geq \frac{R}{\sqrt{3}}$. En este caso el valor $h = R / \sqrt{3}$ es interno al intervalo de variabilidad y para este mismo valor es

$$\frac{d^2V}{dh^2} = -2\pi h < 0;$$

resulta luego que el máximo buscado está dado por $h = R / \sqrt{3}$, o sea, siendo $h = a \operatorname{sen} \vartheta$, por $\vartheta = \operatorname{arc} \operatorname{sen} (R / \sqrt{3})$. El volumen máximo V vale

$$V = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} R^3.$$

En los extremos $h = 0$ y $h = \min(R, a)$ hay dos mínimos del volumen.

2º. $a < \frac{R}{\sqrt{3}}$. En este caso, no hay ningún valor $h \leq a$ que

anule a la derivada (2). Pero por ser esta derivada positiva para valores de h comprendidos entre 0 y a , resulta que V será una función creciente y por tanto alcanzará el máximo para $h=a$. La solución en este caso corresponde pues a $h=a$, o sea, $\vartheta = \pi/2$. El volumen V correspondiente vale

$$V = \frac{1}{3} \pi (R^2 - a^2) a.$$

Esta solución, salvo la consideración del caso 2º, ha sido enviada por el Sr. JOSÉ LAHOZ, alumno de la Facultad de Ciencias Matemáticas, etc., de Rosario. Otra solución, también incompleta, fué enviada por el Sr. A. DAGHETTO, alumno de la Escuela Industrial Anexa.

Nº 95 — Sea la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Por cada cuerda paralela al semieje b como diámetro se describe una circunferencia y por el centro de la elipse se trazan tangentes a la misma.

Se pide hallar la ecuación de la curva lugar geométrico de los puntos de contacto y demostrar que el área que ella encierra vale (*).

$$F = \pi b (\sqrt{a^2 + b^2} - b).$$

SOLUCIÓN. — En primer lugar es evidente que la circunferencia que, de acuerdo al enunciado, se traza con centro en el punto $(x, 0)$ tiene por radio la ordenada y y del punto sobre la elipse que corresponde a la abscisa x .

Consideremos ahora el triángulo rectángulo formado por una de las tangentes a la circunferencia, el radio de la misma correspondiente al punto de contacto y la abscisa x . Indicando con (ρ, ϑ) las coordenadas polares del punto de contacto tenemos

$$\rho^2 + y^2 = x^2,$$

$$\rho \operatorname{tg} \vartheta = y.$$

Reemplazando en la ecuación de la elipse se obtiene

(*) En el enunciado de este problema (Año V, pág. 56) figuraba por error un factor 2 en la expresión del área F , el cual debe suprimirse.

$$\frac{\rho^2(1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta)}{a^2} + \frac{\rho^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta}{b^2} = 1$$

que es la ecuación de la curva pedida.

Observamos que por su construcción esta curva se compone de dos partes simétricas respecto al eje y y de la elipse cada una de las cuales a su vez es simétrica con respecto al eje x .

A esta misma conclusión se llega observando que la ecuación en coordenadas polares no cambia al sustituir ρ por $-\rho$ y ϑ por $-\vartheta$.

El área encerrada por la curva se calcula por la fórmula

$$F = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 d\vartheta.$$

la que, de acuerdo a las simetrías observadas podrá escribirse

$$F = 2 \int_0^{\frac{2\pi}{2}} \frac{1}{2} \rho^2 d\vartheta.$$

De la ecuación de la curva obtenemos

$$\rho^2 = \frac{a^2}{1 + \frac{a^2+b^2}{b^2} \operatorname{tg}^2 \vartheta},$$

luego

$$F = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{1 + k^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta} \quad \left(k^2 = \frac{a^2+b^2}{b^2} \right)$$

Hacemos el cambio de variable

$$\operatorname{tg} \vartheta = t$$

con lo cual

$$F = 2a^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{1+k^2t^2} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt,$$

que se transforma mediante un cálculo simple en

$$\begin{aligned} F &= \frac{2a^2}{1-k^2} \left[\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} - k^2 \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+k^2t^2} \right] \\ &= \frac{2a^2}{1-k^2} \left[\text{arc tg } t - k \text{ arc tg } kt \right]_0^{\infty} = \frac{2a^2}{1-k^2} (1-k) \frac{\pi}{2}; \end{aligned}$$

y recordando el valor de k se obtiene

$$F = \pi b (\sqrt{a^2 + b^2} - b)$$

de acuerdo al enunciado.

Esta solución, salvo algunas simplificaciones en la redacción, ha sido enviada por el Sr. ADOLFO DAGHETTO, alumno de la Escuela Industrial de la Nación, Rosario.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

PROPUESTOS

106. - Demostrar que cualquiera que sea el número entero n la expresión

$$5^{2n+3} - 10 \cdot 2^n$$

es siempre un múltiplo de 23.

107. - Un cuadrilátero articulado tiene dos lados iguales, de

longitud l_1 concurrentes en un vértice A y los otros dos, también iguales, de longitud $l_2 < l_1$, concurrentes en el vértice opuesto B ; estos últimos se prolongan más allá de B por dos apéndices de longitud x . Se pide el máximo valor que puede asignarse a x para que estos apéndices no impidan la libre deformación del cuadrilátero.

108. - Escribir la condición que deben cumplir los coeficientes p, q, r de la ecuación

$$x^3 + px + q = 0$$

para que ella admita dos raíces cuyo producto sea igual a la unidad. Supuesta realizada esta condición, calcular dichas raíces.

109. - Sea la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Se pide hallar la ecuación y el área de la curva inversa de esta hipérbola con potencia de inversión k y centro de inversión el origen de coordenadas.

110. - Se desea una explicación del hecho siguiente:

Supongamos que un problema cualquiera haya conducido a buscar los valores máximos y mínimos de cierta expresión $f(x)$. Si se cambia la variable de referencia en otra t ligada a la x por la transformación $x = \varphi(t)$, habrá que buscar los extremos de la expresión $f(\varphi(t))$. Si ahora se aplica sin reservas la regla de la derivada, se deberá inferir que en la primera posición del problema los extremos buscados corresponden a las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$, mientras que con la segunda posición del problema corresponderán a las soluciones de la ecuación $f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = 0$ que se separan en las dos: $f'(\varphi(t)) = 0$ y $\varphi'(t) = 0$. Es evidente que, sin algún cuidado que se pide especificar, en uno de los dos casos habrá soluciones parásitas o soluciones faltantes.

El lector puede estudiar, por ejemplo, la solución del problema n. 94, publicado en este mismo fascículo, ateniéndose exactamente a lo indicado en el enunciado de tomar como variable independiente el ángulo ϑ .

BIBLIOGRAFIA

Latin American Periodicals currently received in the Library of Congress and in the Library of the Department of Agriculture. The Library of Congress. The Hispanic Foundation, Washington, 1944, 250 págs. Precio \$ 0,45 (moneda americana).

Este interesante Catálogo publicado por la Fundación Hispánica de la Biblioteca del Congreso de Washington, es una segunda edición impresa, corregida y aumentada, de una primera edición preliminar publicada en mimeógrafo en 1941. Contiene una lista muy completa de las principales revistas, boletines, anuarios y memorias publicadas por las Academias, Sociedades científicas, Universidades, Cámaras de Comercio, etc. del Brasil e Hispano-América. Para cada publicación se menciona la entidad editora, fecha inicial de aparición, periodicidad de publicación, precio y otras características principales de la misma.

Se comprende que una obra de tal naturaleza no es tarea fácil dada la poca estabilidad de muchas publicaciones y variabilidad de título y periodicidad de muchas otras, por lo cual la fundación editora desea estar informada de las inevitables lagunas o ligeras incorrecciones que, a pesar de haber puesto por su parte el máximo cuidado, pueden haberse escapado y son por otra parte inevitables en catálogos de naturaleza tan amplia como el de referencia.

A este respecto podemos mencionar que, por lo que a la Argentina y en el campo de la Matemática se refiere, notamos a faltar las dos revistas siguientes: *Revista de la Unión Matemática Argentina* (de la que actualmente está en curso de publicación el volumen X) y estas *Mathematicae Notae*.

La utilidad de la obra salta a la vista y la labor de la Fundación Hispánica de la Biblioteca del Congreso de Washington al hacer esta obra de centralización de todas las publicaciones esparcidas en los diversos países de la América Latina, es merecedora de los mayores encomios.

L. A. SANTALÓ

Engineering Preview. An introduction to Engineering including the necessary review of Science and Mathematics. The Macmillan Company, New York 1945; 581 páginas.

“La información científica de este libro podría ser adecuada para el Técnico mientras que es solo una introducción para el Ingeniero”.

Encontramos esta afirmación en el capítulo primero (pág. 5) al final de un párrafo en el que se define al Técnico como alguien que no necesita muchos conocimientos de Matemática o ciencias básicas; que trabaja usual-

mente a las órdenes de un Ingeniero o científico y cuyos conocimientos son prácticos y compuestos más de “como hacer algo” que de “porque se hace”.

Sin ánimo de querer discutir aquí el concepto preferimos interpretar la frase transcripta más arriba refiriéndola a nuestro medio ambiente asignándole entonces este otro sentido:

El Técnico, entendiéndolo por tal el egresado de una Escuela Industrial, por ejemplo, o el bachiller nacional encontrarán en este libro una exposición elemental, aunque muy clara y atrayente de las características y procesos más importantes en la Industria y en la Técnica moderna. Y una de las aspiraciones de los autores es que la lectura del libro pueda eventualmente fortalecer una vocación indecisa o por lo menos alentar al técnico para que trate de mejorar sus conocimientos.

Consta la obra de ocho capítulos escritos por distintos autores, todos ellos de conocida actuación profesional en los Estados Unidos y con la experiencia suficiente para aconsejar al lector en su preparación para la Ingeniería práctica. Damos a continuación un índice de dichos capítulos y sus respectivos autores.

- L. E. GRINTER, *Generalidades en Ciencia e Ingeniería*, “Orientación”.
- H. N. HOLMES, *Química*, “La ciencia de la materia y las moléculas”.
- H. C. SPENCER, *Dibujo Técnico*, “El lenguaje de la ingeniería”.
- R. OLDENBURGER, *Matemática*, “Instrumento universal de la ingeniería”.
- C. O. HARRIS, *La regla de cálculo*, “Cota de armas del ingeniero”.
- R. G. KLOEFFLER, *Luz y Electricidad*, “Sellos de la civilización”.
- V. M. FAIRES, *Mecánica*, “Efectos de las fuerzas”.
- — *Termodinámica*, “Control de calor, frío y energía”.

El primer capítulo contiene observaciones interesantes particularmente sobre la importancia de algunos descubrimientos técnicos de que se da cuenta en un breve panorama histórico. Incluye también una serie de consideraciones sobre la profesión desde el punto de vista social, ético y técnico que a algún lector quizá parezcan a veces un tanto pueriles.

Es interesante un “test” para probar la vocación y aptitudes para la Ingeniería; consta de 25 preguntas divididas en 5 grupos, que el lector debe contestar y calificarse luego según una regla que se indica. Sin embargo el propio autor aconseja no tomar demasiado en serio sus resultados, los cuales “solo servirán al lector para interesarlo en sus propias habilidades y suministrarle una medida, aunque muy grosera, de sus inclinaciones y aptitudes, especialmente aquellas que podrían conducirlo de un modo natural hacia el campo de la técnica”.

A continuación se presenta una rápida reseña de las perspectivas que este campo ofrece hoy al Ingeniero incluyendo algunos detalles particulares sobre ramas tales como: aplicación de la Química en la industria de los llamados materiales plásticos, industrias aeronáutica, eléctrica y metalúrgica.

Un estudio más completo de estas cuestiones se encuentra en los capítulos referentes a la Química, Luz y Electricidad y Termodinámica. En ellos el joven lector trabará conocimiento con algunos de los campos de acción que la Ingeniería le ofrece. Una lectura atenta complementada, llegado el caso, con otras en libros más especializados y con eventuales preguntas a sus profesores

puede proporcionarle una guía bastante segura en la elección de su especialidad.

En cada uno de los capítulos de carácter tecnológico que hemos mencionado se dedican varias páginas a recordar al lector conocimientos que se supone que éste ya posee siendo en ese sentido más extenso que los otros el capítulo referente a la Química. Con el mismo objeto se han redactado las secciones de Matemática y Mecánica; la segunda es bastante más breve que la primera y posiblemente un poco menos clara.

Correspondiendo menos a la principal finalidad del libro hay dos capítulos referente uno al Dibujo Técnico y a la regla de Cálculo el otro; pero por la claridad de exposición y particularmente el primero por la abundancia de detalles y sus magníficas ilustraciones están destinados a convertirse en útiles auxiliares del lector en sus estudios o trabajos futuros.

Finalmente contiene el volumen diversas tablas logarítmicas y trigonométricas, valores de algunas constantes de importancia, gráficos de funciones usuales y tablas de intereses y anualidades.

Cada capítulo contiene buen número de ejercicios y problemas muchos de ellos ya resueltos.

PEDRO E. ZADUNAISKY

CRISTÓBAL DE LOSADA Y PUGA, *Curso de Análisis Matemático*. Tomo I. Edit. Lumen. Lima, 1945.

El ilustre Decano de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Católica de Lima nos ofrece el primero de dos volúmenes de Análisis que representan fundamentalmente el curso que desde varios años está desarrollando a sus alumnos, complementándolo en alguna parte de manera que, como dice el A. en el prólogo, ya puede considerarse el libro como un tratado general de análisis, a la par de otros que se cuentan, no numerosos, en cada uno de los idiomas cultos.

Los argumentos tratados son los clásicos correspondientes al título: Cap. 1, *De los números*. Cap. 2, *VARIABLES Y FUNCIONES* (exposición elemental). Cap. 3, *Límites*. Cap. 4, *VARIABLES Y FUNCIONES* (exp. complementaria). Cap. 5 *Derivadas* (exposición elemental). Cap. 6, *Derivadas de las funciones elementales*. Cap. 7, *Derivadas* (exp. complementaria). Cap. 8, *Infinitamente pequeños y diferenciales*. Cap. 9, *Derivadas sucesivas y diferenciales de orden superior*. Cap. 10, *Aplicaciones inmediatas de las derivadas*. Cap. 11, *Funciones de varias variables independientes*. Cap. 12, *Determinantes funcionales y funciones implícitas*. Cap. 13, *Cambios de variables*. Cap. 14, *Integrales y funciones primitivas*. Cap. 15, *Investigación de las funciones primitivas* (procedimientos de integración). Cap. 16, *Integrales definidas* (exp. complementarias). Cap. 17, *Investigación de las funciones primitivas* (aplicación de los procedimientos de integración). Cap. 18, *Aplicaciones geométricas de la integración*. Cap. 19, *Ecuaciones diferenciales de primer grado*. Cap. 21, *Ecuaciones diferenciales lineales*.

En la intención de conseguir la claridad, la exposición es muy extensa

alcanzando el volumen a las 632 páginas, y la presentación tipográfica, muy cuidada, linda y loable. Muy a propósito el A. indica en el prólogo una repartición de las materias según su importancia inmediata para el estudiante que busque en el libro la preparación a cursos de aplicación como por ej. al de Mecánica, destinando los capítulos o párrafos considerados más esenciales a un primer año de estudio y otros a un segundo conjuntamente con los argumentos que serán tratados en el segundo tomo. Y vemos con placer incluídos entre éstos por ej. el primer capítulo sobre los números, porque consideramos que cuestiones más bien filosóficas que esenciales tienen que ser dejadas a los momentos de esparcimiento; pero deben ser tratadas, cuando uno se decide a encararlas, con profundidad y crítica. La misma cosa diríamos con mayor razón todavía para el cap. 16 o mejor para las secciones C y D del mismo donde se trata de la integral de Stieltjes y de la de Lebesgue, porque consideramos didácticamente impropias ciertas vistas demasiado rápidas y desconectadas de las razones que han llevado a la introducción de los conceptos.

El A. en una nota al principio del prólogo expresa su admiración para la clásica tratadística francesa y en particular para el Lacroix en el cual muchos hemos aprendido, igual como en Bertrand y en Serret, el libre manejo del cálculo. Tal vez convenga atribuir a la intención de conservar la facilidad didáctica de estos maestros del siglo pasado alguna prolixidad y redundancia en ciertos lugares y alguna ligereza en otros que el lector porregirá fácilmente si después de haberse apropiado los fundamentos en forma fácil, intuitiva y diríamos también atrayente, irá a robustecerse en alguna lectura todavía elemental y más difícil antes de lanzarse en los desarrollos más modernos del análisis, siguiendo por demás las indicaciones que el autor proporciona con las frecuentes notas bibliográficas.

Citamos, como ejemplos la deducción de las reglas de derivación en casos particulares por paso al límite cuando la concisión habría podido aconsejar de anticipar algunos simples teoremas generales. O bien la decisión de rechazar las derivadas infinitas sumándolas a los casos de ausencia de la derivada, lo que da posiblemente la ventaja de enunciar como *teorema* que toda función derivable es continua, pero por muchas aplicaciones parece preferible conducirse en modo opuesto y poner la continuidad como condición previa para poder hablar de derivada. O bien todavía una demostración muy breve y sugestiva del teorema del jacobiano (que la anulación idéntica del jacobiano es condición suficiente para la dependencia funcional) que con preferencia declararíamos heurística pues nos parece que a un alumno un poco sutil no puede quitar la duda de que la pretendida dependencia funcional incluya a los valores de las variables. Y así es efectivamente si no se tiene cuidado de poner ciertas condiciones de continuidad en campo limitado, pero no infinitésimo.

Observaciones estas que, por las razones dichas, no alteran la importancia indiscutible de este libro dentro de la tratadística de habla española.

Citaremos, como complemento importante, una buena colección de problemas y ejercicios.

B. LEVI

POLYA G., *How to solve it. — A new aspect of mathematical Method.* Princeton University Press, 1945. 204 págs.

El lector que se detiene delante del escaparate de una librería lee el subtítulo en forma un poco distinta: "A system of thinking which can help you solve any problem" y se queda un poco sorprendido: ¿Es posible enseñar un sistema de pensar que puede ayudarnos a resolver cualquier problema? ¿Es pues que Georg Polya cree posible revelarnos el secreto de sus elegantes hallazgos matemáticos?

Ahora nuestro lector empieza a ojear las primeras páginas; el autor le presenta un imaginario profesor de una matemática muy elemental que trata de conducir un alumno imaginario a la resolución de algunas cuestiones tan simples que el más común de los alumnos verdaderos contesta a la pizarra sin tampoco pensar. Un pretexto por cierto para enseñar al hipotético profesor algunos preceptos didácticos: —que hay que dirigir al alumno a analizar su problema; ayudarlo si, pero no demasiado y más que todo en modo no demasiado evidente; enseñarle a buscar analogías; y algo más por el estilo.

¿Un libro pues de pedagogía matemática, presentado de manera un poco nueva? Es más o menos lo que parecería expresar el otro subtítulo que se lee en la contratapa; sin embargo la conclusión no nos convence.

Si tuviéramos que aceptar esta definición, tendríamos que afirmar nuestra conformidad de principios, pero nuestra convicción que las reglas didácticas deben ser consideradas con extremo cuidado; no es posible enseñar a enseñar porque toda regla didáctica aplicada rutinariamente según un esquema suprime la libertad de pensamiento en el profesor y en el alumno y hace el primero ridículo en proporción que el segundo es inteligente. Y ¿cómo justificar la afirmación del nuevo aspecto del método matemático sino con suponer una enorme difusión de los modos de enseñanza que sólo se preocupan de asegurar materialmente la cantidad de conocimientos que el alumno materialmente ha adquirido? Si así fuera daríamos acaso con el fin verdadero, aun no declarado enteramente, del libro al considerarlo bajo el aspecto del sentido humanístico de la matemática.

Ya debe notar el lector el soplo estético que se manifiesta en la presentación editorial fuera de lo común, que da a la tapa una vinculación especial con el uso del libro; sobre este detalle el A. llama nuestra atención desde las primeras líneas de la introducción donde nos advierte que una breve lista de proposiciones impresas dos veces al principio y al final del libro va a reaparecer repetidamente como un *leitmotiv* en todo el desarrollo. Prefacio e introducción nos ofrecen otros elementos: "El autor recuerda el tiempo cuando era estudiante, un estudiante un poco ambicioso, ardiente para comprender un poco de matemática y de física..." "...la matemática en construcción aparece como una ciencia experimental, inductiva;..." "...el objeto de la eurística tiene muchas conexiones; matemáticos, lógicos, psicólogos, educadores, aun filósofos pueden pretender que varias partes de ella pertenezcan a su dominio particular..." "Hemos mencionado repetidamente al estudiante y al maestro, ... puede ser útil observar que el estudiante puede ser el de una escuela superior

o el alumno de un colegio o cualquier otro que estudia matemática...” “El autor mira la situación... la mayor parte del tiempo (principalmente en la tercera parte) desde el punto de vista de cualquier persona que no sea ni estudiante ni profesor, sino interesado en resolver los problemas que le están delante...”. Y ahora repetiremos nuestra pregunta: ¿un libro pues de técnica pedagógica o no más bien un estudio de psicología? ¿Expresión de una coyuntura ocasional o bien resumen de una larga introspección personal?

El libro se compone de tres capítulos o partes: *En la clase*; *Cómo resolverlo* (diálogo); *Breve diccionario de eurística*.

La primera es la que hemos ojeado empezando nuestra exposición; se proponen algunas cuestiones muy simples, problemas o teoremas por demostrar, como pretexto para dar algunos consejos didácticos; acertados ciertamente, pero que podrían sustituirse, en cada caso particular, por otros (y el autor encuentra también la ocasión para advertirnos de esta no-determinación); pues la sugestión que el profesor debe dar al alumno no está determinada por la cuestión, sino por el alumno mismo (Nos acordamos haber dicho alguna vez a los nuestros: dígame Ud. cualquier cosa le parezca que tenga sentido y que se relacione con el problema; sobre aquella razonaremos y veremos). De cualquier modo esta primera parte es muy corta, no más que 31 página.

La segunda parte es más corta todavía, apenas 3 páginas y es, bajo la forma de un diálogo, como un resumen de las enseñanzas que han brotado de la primera.

El libro es pues la tercera parte (168 páginas); pero, ¿por qué diccionario? No ciertamente según el significado común de la palabra. Se trata de una serie de artículos más o menos largos caracterizados cada uno por una breve frase y ordenados según la letra inicial de ésta. Cada frase es el principio de un pensamiento; ordenar los pensamientos según un orden alfabético debe por cierto sonar un poco raro al lector; pero el autor ha renunciado de propósito a buscar, para los pensamientos una presentación más orgánica porque en la unidad cada uno habría tenido que renunciar a alguna parte de su complejidad. Los pensamientos se entrelazan entre sí; nunca hay pensamiento simple, aislado y puro; para entender nosotros nuestro propio pensamiento hemos de volver infinitas veces sobre él. ¿Qué orden mejor entonces que el alfabético para reencuentrarlos al momento oportuno? Desde las primeras páginas de la introducción nos advierte el autor: “...Hay un artículo-clave sobre *eurística moderna* el cual explica la conexión de la mayor parte de los artículos y el plan subyacente al *diccionario*”; y cómo, estando escrito en inglés, la frase empieza con la M de “modern”, queda la clave escondida propiamente en la mitad del capítulo. Esto quiere decir que para leer y entender hay que volver varias veces sobre nuestros pasos.

El diccionario empieza pues con “analogía”, pasa a través de alguna “idea brillante, luz improvisa” (“Bright idea, seing the light”), de “descomponer y recomponer”, llega a la “modern heuristie” y termina con “working backward” trabajar a la inversa, el antiguo método de suponer el problema resuelto o de análisis y síntesis como se lo llama en el último libro de los elementos de Euclides, con alguna reflexión sobre la psicología común, más posiblemente a los animales que a los hombres de “rodear el obstáculo”, no sin

haber tirado una flecha contra el “tradicional profesor de matemática de la leyenda popular”.

Libro que no está hecho para ser leído seguidamente, sino para invitar a la reflexión y alguna vez a un momento de esparcimiento.

B. LEVI

HUYGENS - FRESNEL. *La teoría ondulatoria de la luz*. Introducción y notas de CORTÉS PLA. Editorial Losada. Biblioteca Teoría e Historia de las ciencias. 1945. pág. 301.

La lectura, en su forma original, de los trabajos que señalan el punto de partida de los grandes descubrimientos y de las teorías fundamentales de la física no es solamente curiosidad histórica; es enseñanza de método científico que difícilmente puede encontrarse en los tratados donde la preocupación sistemática lleva fácilmente a ocultar los detalles que no cuadran en el marco teórico elegido.

En este pequeño volumen el ing^o Cortés Pla nos ofrece la traducción castellana de dos pequeños tratados, el uno publicado en 1690 por Cristian Huyghens con el título de “Tratado de la luz”, el otro publicado en 1822 por Agustín Fresnel con el título “Naturaleza de la luz” en apéndice a la traducción francesa de la *Química* de Th. Thomson. Muy oportunamente el título elegido para presentarlos conjuntamente indica no solamente el vínculo histórico que los reúne, sino aun lo que modernamente queda de las intuiciones directrices de los autores. Sin ninguna duda nosotros no podemos más aceptar la afirmación de Huygens de que “...en la verdadera filosofía... se concibe la causa de todos los efectos naturales por razones de mecánica”; y mientras Fresnel orientaba su concepción de la naturaleza de la luz sobre la mecánica del sólido elástico a cuya fundamentación el contribuyera contemporáneamente, nosotros vemos en ese *quid* que es soporte de las ondas algo diferente que masas materiales en movimiento; sin embargo mucha parte de los razonamientos y de las intuiciones de los dos autores quedan aplicables, o cuando menos sugestivas para raciocinios más completos.

¿Cuáles son las razones de Huygens para rechazar la teoría balística de la luz que, sostenida por la autoridad de Newton, seguirá recogiendo para más de un siglo las preferencias? La extrema velocidad de la luz y la propiedad de atravesarse los rayos uno con el otro sin sufrir cada uno por el choque. Pero, muy justamente, diríamos aun con un exceso de modernidad, Huygens es muy ambiguo sobre el medio, el éter, y el mecanismo de la propagación. La onda de Huygens no es todavía el movimiento sinusoidal que podrá resultar cómodo a Fresnel para explicar la interferencia, sino más bien impulsión; y la propagación rectilínea tendrá una media justificación geométrica y de máximo que necesitará todavía mucho camino para resultar satisfactoria. Las consideraciones sobre la reflexión y refracción quedan completamente válidas. El Cap. V, “De la

extraña refracción del cristal de Islanda'' es un magnífico ejemplo de análisis experimental. Este mismo carácter repite en muchas partes el opúsculo de Fresnel el cual nos lleva en el mismo tiempo a una exposición sistemática que, en su esencial, ha sido mantenida casi inalterada después en los tratados de física.

El Ing^o Pla ha agregado a la traducción una valiosa introducción histórica resumiendo las ideas y los descubrimientos que en el campo de la luz han llevado de las inseguras y ambiguas concepciones de los griegos hasta la concepción maxwelliana; dos noticias bio-bibliográficas sobre los autores y muchas notas de carácter crítico y bibliográfico a distintos puntos de la exposición.

B. LEVI

- El precio de suscripción a «Mathematicae Notae» es de 8 \$ (m/n.) anuales.
- El Instituto de Matemática publica también una colección de Notas y Memorias bajo el título «Publicaciones del Instituto de Matemática de la Facultad de Ciencias etc.», cuyo precio de suscripción es de 10 \$ (m/n.) por volumen. Se pueden adquirir los fascículos sueltos de las publicaciones al precio señalado en la pág. 4 de esta misma tapa.
- Para todo lo relacionado al Instituto, a las Publicaciones y a «Mathematicae Notae» dirigirse al Director del Instituto de Matemática — Avenida Pellegrini 250 — Rosario (R. Argentina).
- Para suscripciones y adquisición de los fascículos sueltos dirigirse al Director del Instituto o bien al Bibliotecario de la Facultad de Ciencias Matemáticas, etc., Avenida Pellegrini 250, Rosario (Rep. Argentina). Los importes deberán remitirse en efectivo o bien por giros postales o bancarios pagaderos en la ciudad de Rosario, con preferencia sobre el Banco de la Nación Argentina.
- Los suscriptores en la República Oriental del Uruguay pueden dirigirse al señor Prof. Rodolfo F. Sayagués, Constituyente 1863, Montevideo.

INDICE DEL FASCICULO 1

	PÁG.
Sobre las medias aritmético-geométricas de Gauss (Primera Parte)	
(J. V. USPENSKY)	1
Un teorema sobre representación conforme (LUIS A. SANTALÓ)	29
Acerca de la sucesión $\{\cos n_k x\}$, $n_k \rightarrow \infty$ (RALPH P. BOAS, Jr.)	41
Breve nota bibliográfica sobre el problema nº 50 (PEDRO E. ZADUNAISKY)	42
Ejercicios y problemas (Soluciones)	47
Ejercicios y Problemas (Propuestos)	55
Cuestiones	56

INDICE DEL FASCICULO 2

	PÁG.
Sobre las medias aritmético-geométricas de Gauss (Segunda Parte)	
J. V. USPENSKY	57
Una generalización de los factoriales (MISCHA COTLAR)	89
Sobre un problema diofántico (BEPPO LEVI)	108
Ejercicios y Problemas (Soluciones)	120
Ejercicios y Problemas (Propuestos)	128

INDICE DEL FASCICULO 3

	PÁG.
Sobre las medias aritmético-geométricas de Gauss - Tercera (última)	
Parte J. V. USPENSKY	129
Complemento a la Nota: Sobre un problema diofántico (L. A. SANTALÓ)	162
Solución a la cuestión Nº 12	172
Ejercicios y Problemas (Soluciones)	180
Resultado del Concurso entre solucionistas de problemas propuestos en el Año Cuarto (1944)	190
Ejercicios y Problemas (Propuestos)	191
Cuestiones	192

Fascículos aparecidos en las "PUBLICACIONES" del Instituto de Matemáticas

		m\$.n.
Vol. I.	1 - B. LEVI — Sobre el sistema $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xy) dx = p(y); \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xy) dy = q(x)$	1.00
	2 - L. A. SANTALÓ — Geometría integral de figuras ilimitadas	1.80
	3 - F. AMODEO — Origen y desarrollo de la Geometría proyectiva. Trad. de Nicolás y José Babini	8.00
	4 - B. LEVI — Una teoría intuicionista de las funciones racionales enteras de una variable	1.00
Vol. II.	1 - P. MONTEL — Funciones armónicas y subarmónicas	1.00
	2 - G. FUBINI — La ley de la media para funciones no derivables. B. LEVI — Sobre un teorema de Weierstrass, el teorema de Rolle y el anterior teorema de Fubini	1.00
	3 - L. A. SANTALÓ — Una demostración de la propiedad isoperimétrica del círculo	1.20
	4 - L. A. SANTALÓ — Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas	1.50
	5 - I. Antecedentes de la creación del Instituto. — II. Acto de inauguración oficial del Instituto. — C. PLA, Origen y propósitos del Instituto. — J. REY PASTOR, La matemática italiana en el último medio siglo y la posición del Dr. Beppo Levi en ella. — B. LEVI, Evolución del pensamiento matemático	1.50
	6 - E. GASPAR — Fórmulas integrales referentes a intersección de una figura plana con bandas variables	1.50
	7 - A. ROSENBLATT — Sobre el teorema de los grandes números en la teoría de la probabilidad	1.00
	8 - M. COTLAR — Sobre conjuntos no medibles y generalización de la integral de Lebesgue - Prólogo por B. Levi	1.50
	9 - B. LEVI — La noción de "dominio deductivo" como elemento de orientación en las cuestiones de fundamentos de las teorías matemáticas	1.50
Vol. III.	1 - Homenaje a la memoria de V. Volterra y J. J. Thomson. C. PLÁ — Semblanza de Sir Joseph J. Thomson. B. LEVI — La personalidad de Vito Volterra	1.00
	2 - G. FUBINI — Algunas propiedades de los grupos discontinuos finitos	2.50
	3 - B. LEVI — Teoría de la integral de Lebesgue independiente de la noción de medida	3.00
	4 - B. LEVI — Sobre la inversión de una integral definida	1.20
	5 - L. A. SANTALÓ — Curvas extremales de la torsión total y curvas-D.	2.00
	6 - A. TERRACINI — Orígenes de algunos conceptos geométricos	2.00
	7 - L. A. SANTALÓ — Complemento a la Nota "Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas"	1.00
Vol. IV.	1 - L. A. SANTALÓ. — Sobre ciertas variedades con carácter de desarrollable en el espacio euclidiano de cuatro dimensiones	3.00
	2 - M. COTLAR — Funciones univalentes sobre un conjunto de puntos del contorno de un dominio de holomorfismo	2.00
	3 - JOSÉ L. MASSERA. — Fórmulas en diferencias finitas con aplicación a la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales de primer orden	3.50
	4 - A. KOMISCHKE. — Sobre las relaciones entre la luz y la gravitación	2.50
	5 - R. LAGUARDIA y B. LEVI. — Sobre la representación por integrales de algunas funciones definidas por desarrollos de Taylor y aplicación a las soluciones de ecuaciones en derivadas parciales	2.00
Vol. V y VI.	Memorias ofrecidas por varios amigos, alumnos y admiradores en homenaje al Dr. Julio Rey Pastor	
Vol. VII.	1 - J. C. VIGNAUX y M. COTLAR. — Las familias totalmente normales de funciones analíticas	6.00
	2 - J. V. USPENSKY. — Sobre el problema de la ruina de los jugadores	2.50
	3 - F. I. TORANZOS — Sobre proyectividad en los espacios de Hilbert	1.00
En preparación:	4 - E. A. SAGASTUME BERRA — El álgebra moderna y sus problemas	
Vol. VIII.	1 - B. LEVI - C. DEMARÍA - L. A. SANTALÓ — Estudios numerativos sobre las variedades de contacto de las superficies en un espacio de n dimensiones	