Instituto Politécnico

Universidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de

Función Simetrías

1° Año

Cód. 1103-19

María Verónica Filotti
María del Luján Martínez
Mónica Napolitano
Dpto. de Matemática

Matemática

Masterización: RECURSOS PEDAGOGICOS

FUNCIÓN

IDEAS GENERALES

A diario, se presentan situaciones donde se pueden observar relaciones que existen entre dos conjuntos de objetos; como se muestran por ejemplo mediante gráficos, cartogramas, curvas, tablas, etc. Esto es familiar a todo aquél que lee los periódicos o mira televisión.

En realidad se trata de describir relaciones entre dos conjuntos, en forma cuantitativa o cualitativa.

Algunos tipos de estas relaciones los matemáticos las llaman ***funciones***. Así como:

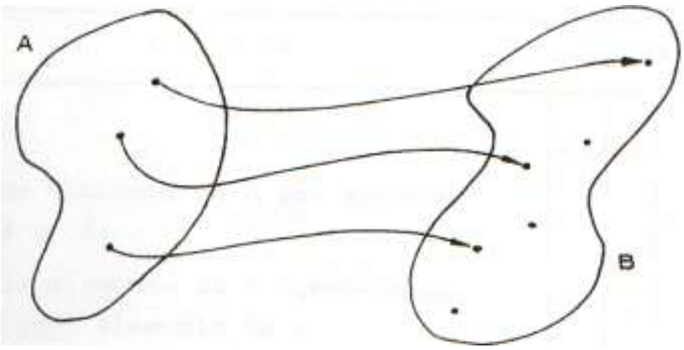
- A cada persona le hacemos corresponder su documento nacional de identidad.
- A cada libro que se produce le hacemos corresponder su ISBN.
- A cada número natural le hacemos corresponder su doble.
- A cada alumno de este curso le hacemos corresponder su pupitre.
- A cada cubo de arista x le corresponde x^3 como su volumen.

La palabra "***función***" fue introducida en Matemática por Leibniz (1673), que utilizaba este término para designar cierto tipo de fórmulas matemáticas. Más tarde se vio que la idea de función de Leibniz tenía un alcance muy reducido, y posteriormente el concepto de función fue experimentando generalizaciones progresivas.

Actualmente la definición de función es la siguiente:

FUNCIÓN: es la terna formada por dos conjuntos y una ley tal que a cada elemento del primer conjunto le hace corresponder un único elemento del segundo conjunto.

Si visualmente esta correspondencia la indicamos por una flecha que parte de cada elemento del conjunto A y llega a un único elemento que le corresponde del conjunto B, resulta:



La representación recibe el nombre de ***diagrama sagitario***

Veamos una situación en la que podemos identificar una función:
Sea:

M = {Alumnos de una división de 1° año del Instituto Politécnico Superior}

P = { 1 ; 2 ; 3 ; 4; 5;.... 35}

y la ley que establece la vinculación entre M y P es :

"a cada alumno hacerle corresponder el número de orden de la lista del curso"

¿De cada elemento de M cuántas flechas parten?..

¿Definen M, P y la ley una función?......................................

¿Por qué?...

Consideremos ahora el conjunto M dado anteriormente, el conjunto T = { 1, 3 , 5 , 7 ,9 }

y la ley :

"a cada alumno hacerle corresponder el dígito con que termina su Documento Nacional de Identidad"

Responde:

¿A cada elemento de M le corresponde un elemento de T?.....................................

¿Por qué?...

¿Definen M, T y la ley dada una función?..

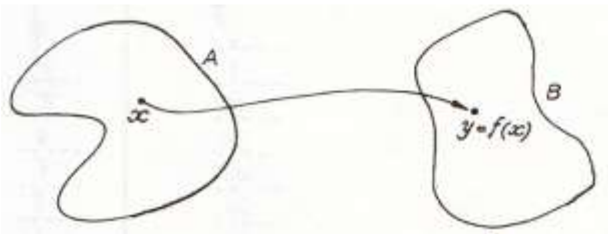
En caso negativo modifica el segundo conjunto para que esta relación resulte una función…………………………………………………………………………………

A continuación introduciremos algunas definiciones y símbolos que utilizaremos para trabajar con las funciones.

- A la ley que vincula los conjuntos la representamos con letras minúsculas f, g, h, etc.
- Al primer conjunto o conjunto de partida lo denominamos ***dominio*** de la función. En general al dominio de la función lo simbolizaremos Dom (.......) colocando dentro del paréntesis la letra con que nombramos a la ley, así Dom (f) ; Dom (g) ...etc. o bien subindicando el nombre del conjunto de partida con el nombre de la ley, por ejemplo A_f.
- Al segundo conjunto se lo llama conjunto de llegada
- A un elemento genérico del dominio lo simbolizamos con la letra **x** (variable independiente) y al que le corresponde en el conjunto de llegada lo simbolizaremos con **y** (variable dependiente) denominada "imagen de **x** por aplicación de la ley dada".
- Si con " f " simbolizamos una ley cualquiera resultará:
  - $f(x)$ se lee “efe de x”
  - $x \to y = f(x)$ se lee "a x le corresponde y, que es imagen de x por aplicación de la ley f ".
  - Si A es el conjunto de partida y B el de llegada también podemos escribir:

$$f : A \to B / x \in A, y = f(x) \in B$$

- Utilizando el diagrama sagitario resulta:



- El conjunto formado por todos los elementos de B que sean imágenes de algún elemento de A se lo denomina "recorrido" o "rango" o "conjunto de las imágenes", y se simboliza Im (…..)colocando dentro del paréntesis la letra con que nombramos a la ley. Así, si la ley la simbolizamos con f , resulta: Im (f) o B_f.

Ejemplo Nº1:

Sea $A = \{0;1;2;.....;10\}$; $B = N_0$ $g : A \to B / g(x) = 2x$. Completa:

a) Dom (g) = ...

b) $g(2)$ = ... $g(10)$ = ... $g(3)$ = ...

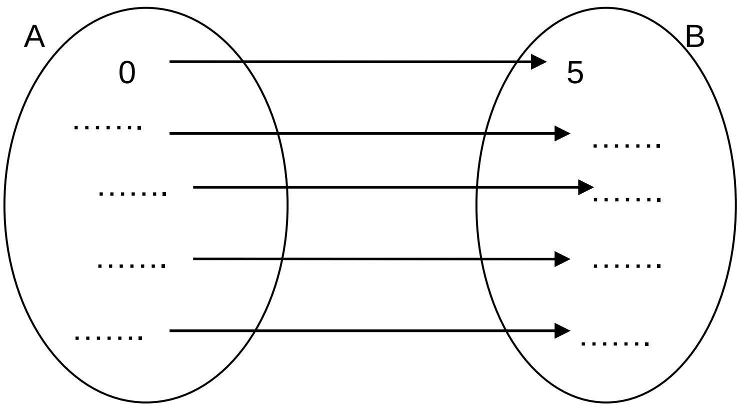
c) $g(x) = 8 \Rightarrow x =$ ....

d) $\text{Im}(g) = B_g$ = ...

e) ¿Es $B_g = B$? .... ¿Por qué? ....

Ejemplo Nº2:

Dados $A = \{x \;/\; x \in N_0 \wedge x < 5\}$; $B = \{\text{dígitos}\}$ y $h : A \to B / h(x) = x + 5$
Completa el siguiente diagrama sagitario:



La correspondencia que se observa en este diagrama también se puede presentar en una tabla, llamada **"Tabla de valores"** que a continuación completarás:

x	h(x)
0	
2	

	8

ACTIVIDADES

1) En la tabla se muestra una función $f / f : N \to N_0$

x	y=f(x)
1	0
2	1
3	2
. . .	. . .

a) Descubre la ley de f, exprésala coloquial y simbólicamente.

b) Completa la tabla con algunos valores.

c) ¿Cuál es la imagen de 2?

d) ¿Cuánto es f(1)?

e) Si f(x)=97, ¿cuál es el valor de x?

f) Confecciona el diagrama sagitario.

g) ¿Puedes encontrar el valor de x tal que f(x) = 2,3? ¿Por qué?

2) Dados: $A = N \wedge B = Q_0^+$ y $g : A \to B / g(x) = x : 2$

a) Escribe el menor elemento del conjunto imagen.

b) ¿Puedes encontrar el mayor elemento de dicho conjunto? ¿Por qué?

c) Calcula $g(10) + g(5) - g(1).g(4)$.

d) Completa: $g(.......) = 20{,}5$

e) Confecciona una tabla de valores con los seis primeros elementos del dominio.

3) Sea la función $f: N_0 \rightarrow N / f(x) = x + 2$.

a) Completa la tabla de acuerdo a los valores indicados de las variables

x	f(x)
	5
10	
	101
234	
	a

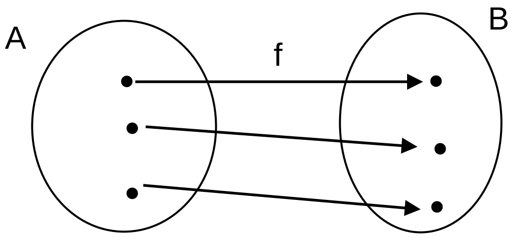
b) Representa en un sistema de coordenadas los siguientes puntos:
a(2; f(2)); b(10; f(10)) y c(0; f(0))

Al conjunto de todos los puntos del plano determinados por los pares (x ;y) ,donde y = f(x) lo llamamos gráfico de la función

FUNCIÓN BIYECTIVA.

<u>Definición</u>

Una función es biyectiva si cada elemento del conjunto de llegada es imagen de un único elemento del dominio.



<u>Simbólicamente</u>

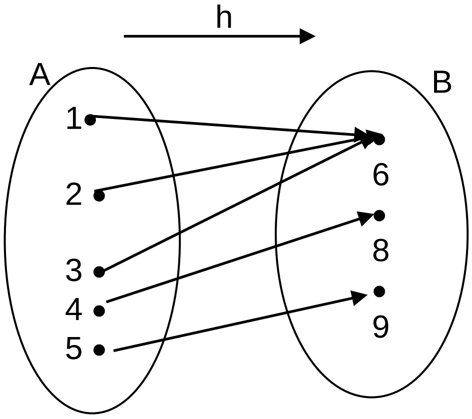
$$\forall y \in B\ \exists!\ x \in A \ / \ f(x) = y$$

$\exists!$ Significa "existe y es único"

- Te proponemos analizar la biyectividad de las funciones de los problemas anteriores.

ACTIVIDADES

4) Observa el siguiente diagrama:



I) Completa :

a) h (1) = **.......** h (2) **= ....** h(4) = **.........**

b) $\left[h(3)\right]^2 - \dfrac{h(4) + h(1)}{2} + \dfrac{1}{3}$ h(5)=.......

c) h (**....**) = 8

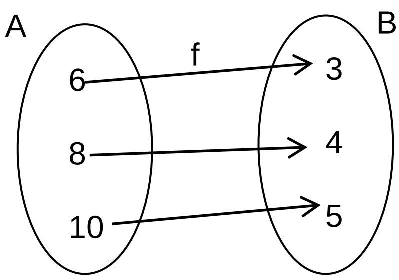
d) h (b) = 9 $\Rightarrow$ b =……..

e) Dom (h) = ………………

f) Im (h) =………………….

II) Responde
¿h es una función biyectiva? ¿por qué?

5) Si f : A $\rightarrow$ B , completa:



a) Dom (f) = **........** Im (f) **= ....**

b) f : A $\rightarrow$B / f (x) = **........**

¿Esta función es biyectiva? ¿por qué?

6) Dadas las funciones:

$$f : N_0 \rightarrow N \quad / \ f(x) = 2x+3$$

$$g : N \rightarrow \{\text{números racionales no negativos}\} / \ g(x) = \frac{1}{3}x$$

I) Completa:

a) f (5) = **..........**

b) f (b) = 20013 $\Rightarrow$ b = **..........**

c) f (f (2)) = f (**........**) = **.......**

d) f (a+2) = **..........**

e) $[g(6)]^3$ = **.........**

f) g (17) + g (5) – g (1) = **.........**

g) g(r) = 33 $\Rightarrow$ r = **........**

h) g (s) = 45 $\Rightarrow$ s = **........**

i) g (g (18)) = **.........**

j) g (3 a) = **.........**

k) f (2) . g (2) - $[g(1)]^3$ = **.......**

l) f (g (120)) = f (**....**) = **........**

m) g (f (17)) = g (**......**) = **........**

n) f (g (3000)) = **...........**

II) Responde: a) ¿ Es f una función biyectiva?.Justifica
b) ¿ Es g(1500) < f(1234)?

7) Se define $f : A \rightarrow B / f(x) = 2x+1$ siendo $A = \{x / x \in N_0 \wedge x < 5\}$; $B = N$:

a) Representa en un sistema de coordenadas todos los pares $(x ; f(x)); x \in A ; f(x) \in B$.

b) ¿Es f una función biyectiva?

c) ¿Es Im(f) igual a B? ¿Por qué?

8) Sea $f : A \rightarrow B / f(x) = \dfrac{x}{5} + 1$, siendo $A = \{5 ; 10 ; 15 ; 20 ; 25\}$ y $B = N_0$:

a) Realiza un diagrama sagitario.
b) ¿Cuál es el recorrido o conjunto imagen de la función?
c) ¿Es f una función biyectiva? Justifica tu respuesta.
d) Si $g : N_0 \rightarrow N / g(x) = x!$, obtiene: $g[f(5)] + g(3)$.

> ***PARA TENER EN CUENTA***
> Si $x \in N \wedge x \geq 2$ se define $x!$ y se lee "factorial de x", al número que representa el producto de los factores de los números naturales consecutivos a partir de 1 y hasta x, es decir: $x! = 1 \times 2 \times 3 \times ..... \times x$
> Además se conviene que:
> $1! = 1$ y $0! = 1$

9) Sea $f : A \rightarrow B \; / \; f(x) = \sqrt{x}$ siendo $A = \left\{ 0 \; ; \; \dfrac{1}{4} \; ; \; 1 \; ; \; 25 \; ; \; 121 \right\}$. Determina B para que f(x) no sea biyectiva. Escribe además B_f.

Autores: Profesor Juan Carlos Bue – Profesora Ma Verónica Filotti

TRANSFORMACIONES RÍGIDAS

El concepto de función que has trabajado te permitirá continuar aprendiendo nuevos temas

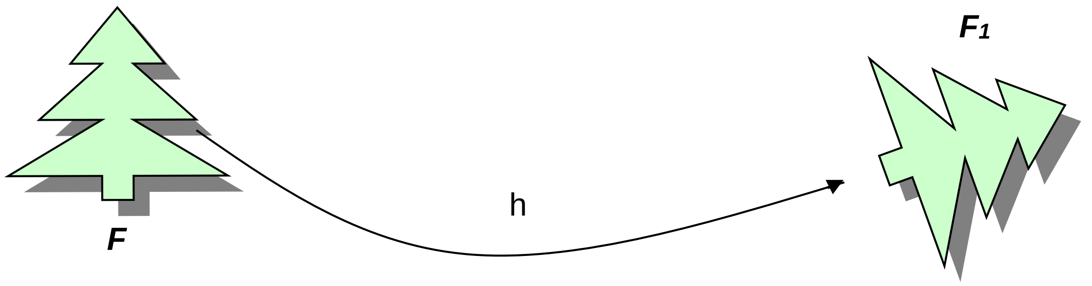
FUNCIÓN PUNTUAL

Una función se denomina puntual o transformación del plano si el conjunto de partida y de llegada son conjuntos de puntos.

Veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo N° 1

La computadora nos ofrece a través de los comandos "copiar" y "pegar" la posibilidad de lograr la imagen de una figura. Una forma más artesanal de conseguir el mismo propósito es a través de un papel de calcar



Consideramos una figura $\mathbf{F} \subset \alpha$ y la ley h ("copiar y pegar")

$$h : F \to F_1 \quad / \quad h(F) = F_1 \qquad ; \quad F_1 \subset \alpha$$

Responde :

- ¿Es biyectiva?...................
- A tres puntos alineados cualesquiera de la F, ¿resultan sus imágenes también pertenecientes a una recta? Y ¿la imagen del que está entre los otros dos estará entre las imágenes de ellos?..
- ¿La figura y su imagen tienen la misma forma?.................

- ¿La figura y su imagen tienen el mismo tamaño?.................

Ejemplo N° 2

Considera un plano π y materialízalo con una hoja de papel.

Dibuja, utilizando una fibra, una recta: R / $R \subset \pi$ y un punto $a \in \pi \wedge a \notin R$.

Ahora, aplicaremos una función puntual $g : \pi \to \pi$ que definimos de la siguiente manera:

"la imagen de un punto, será la marca que se obtiene al plegar la hoja por la recta R".

Dibuja otros puntos b y c que pertenezcan al mismo semiplano que "a" pero no a la recta R y aplícales la ley g. Además, obtiene gráficamente $g(\overline{ab})$

Marca un punto $d \in \overline{ab}$ y luego obtiene su imagen.

Con respecto a R, ¿dónde se encuentran las imágenes de las figuras dibujadas?..

¿Cómo resultan las imágenes de tres puntos alineados?.........................

¿Y la imagen del que está entre dos puntos, estará entre las imágenes de ellos?.................

Marca otro punto p perteneciente a R y aplícale la ley g, ¿qué puedes expresar entre p y g(p)?...

- ¿Es f una función biyectiva? $\underset{\text{si–no}}{.......}$ ¿Por qué?................................
- ¿La figura y su imagen poseen la misma forma? $\underset{\text{si–no}}{.......}$
- Si poseen la misma forma, ¿son del mismo tamaño?........... $\underset{\text{si–no}}{......}$ ....

Estas funciones puntuales que hemos analizado en los ejemplos anteriores reciben el nombre de ***TRANSFORMACIONES RÍGIDAS***.

Si ***f*** es una transformación rígida entonces ***f*** es una ***función puntual biyectiva*** de manera tal **que *una figura y su imagen poseen la misma forma y el mismo tamaño.***

FIGURAS CONGRUENTES

Diremos que

Una figura es congruente con otra si una de ellas es imagen de la otra por aplicación de una transformación rígida.

Utilizaremos el signo = para indicar la congruencia de figuras, aunque no necesariamente significa que es el mismo conjunto de puntos

En símbolos:

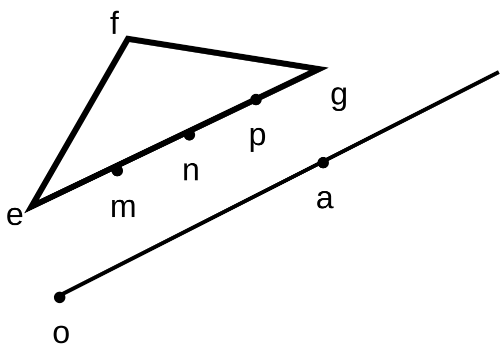
$F_1 = F_2 \Leftrightarrow F_2 = t(F_1)$; t es una transformación rígida

que leemos F_1 congruente con F_2 sí y sólo sí F_2 es imagen de F_1 por aplicación de la transformación rígida **t**

SIMETRÍA AXIAL O REBATIMIENTO

Realiza la siguiente actividad:

Dado el $\overset{\Delta}{efg}$ y la semirrecta $\overrightarrow{oa}$. Utilizando papel de calcar, calca el triángulo y la semirrecta. Obtiene la imagen de ellos, haciendo coincidir las semirrectas



El triángulo que has obtenido, utilizando el papel de calcar, es imagen del $\overset{\Delta}{efg}$.
Teniendo en cuenta esta actividad, completa la siguiente tabla:

	Imagen
e	e’
f	
g	
m	
n	
p	

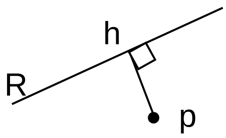
En esta actividad, se ha presentado una transformación rígida, muy particular, conocida con el nombre de ***SIMETRÍA AXIAL O REBATIMIENTO***, que a continuación definiremos

CONCEPTOS IMPORTANTES

- ***DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS***

Llamaremos distancia entre dos puntos a y b y lo indicaremos d(a; b), al segmento $\overline{ab}$

- ***DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA***



Llamaremos distancia del punto p a la recta R y lo notaremos d(p; R), al segmento perpendicular trazado desde el punto a la recta.

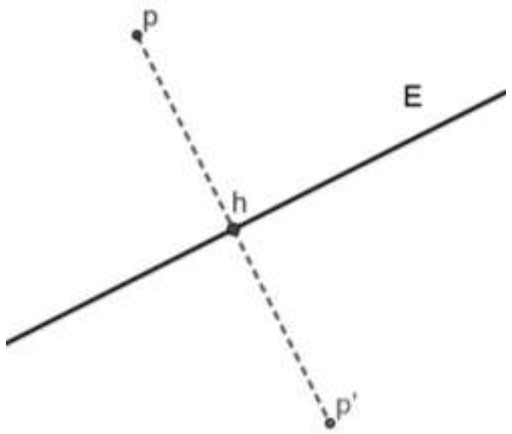
$$d\,(p\,;R) = \overline{ph}$$

- ***MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO***

Es la recta perpendicular a un segmento en su punto medio

Definición

Una SIMETRÍA AXIAL O REBATIMIENTO respecto de una recta E, llamada eje, es una transformación rígida, que aplicada a un punto ***p*** se obtiene ***p’, de forma tal que p y p’ pertenecen a distintos semiplanos respecto de E, pertenecen a una misma recta perpendicular a dicho eje, y se encuentran a igual distancia de E.***



Simetría axial de eje E se simboliza S_E

- $S_E(p) = p' \Rightarrow$ p y p' son simétricos respecto a E
- $S_E(\text{semp}_E(p)) = \text{semp}_E(p')$
- $\overline{ph} = \overline{hp'}$ y $\overleftrightarrow{pp'} \perp E$
- $\forall q \in E:\ S_E(q) = q$

Entonces

En una simetría axial el eje es mediatriz del segmento determinado por un punto y su imagen.

Por lo precedente concluimos que el eje E corta perpendicularmente en su punto medio al segmento cuyos extremos son el punto y su imagen.

En símbolos

$$S_E : \pi \to \pi \ / \ \forall\ p \in \pi \ \ , S_E(p) = p' \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{ph} = \overline{hp'} \\ \overleftrightarrow{pp'} \perp E \end{array} \right\} \Rightarrow E = M_{\overline{pp'}}$$

A la mediatriz de un segmento la notaremos con la letra M colocándole como subíndice el nombre del segmento, en símbolos: $M_{\overline{pp'}}$

***Veamos algunos términos*:**

- Cuando la imagen de un punto es el mismo punto se dice que el punto es **unido.**
- En general cuando la imagen de una figura es la misma figura se dice que la figura es **unida.**

Entonces

El eje de simetría es una recta unida de puntos unidos.

En símbolos: $\mathbf{S_E(E) = E}$

- En una simetría axial, un punto y su imagen se llaman **puntos simétricos** respecto del eje de simetría. Es decir en símbolos

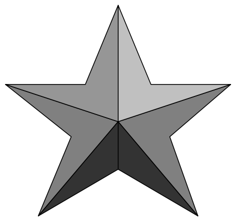
$S_E(p) = q \Leftrightarrow$ p y q son simétricos respecto de E.

- Por extensión, una figura y su imagen, respecto de una simetría axial, se llaman **figuras simétricas** respecto del eje de simetría.

- Una figura que es **doble o unida** en una simetría axial se dice que es una **figura simétrica** respecto de un eje y que dicho eje es **su eje de simetría.**

Ejemplos

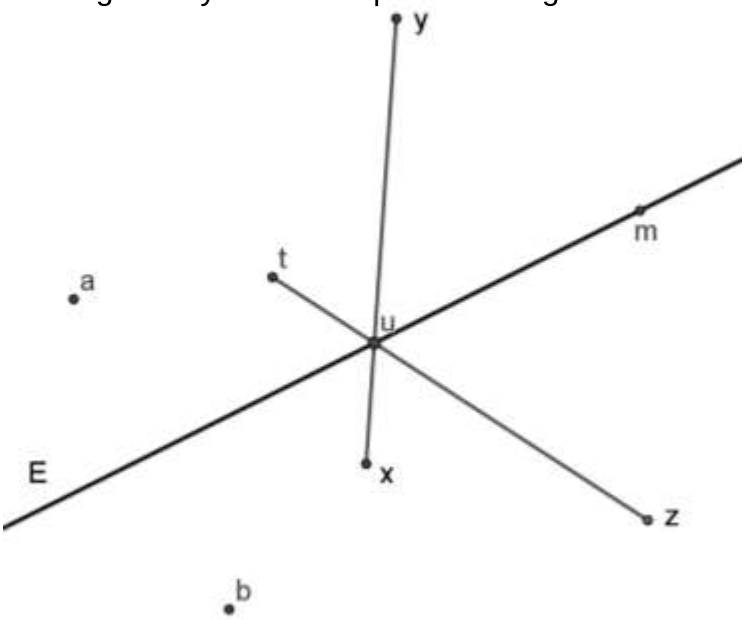
Esta copa es simétrica tiene un eje de simetría Dibújalo



Esta estrella tiene cinco ejes de simetría. Dibújalos

Ejercicios de aplicación

1) Observando el gráfico y los datos que se consignan:



$S_E(a) = b \quad S_E(t) = x \quad S_E(z) = y \quad S_E(u) = u \quad S_E(m) = m$

a) Completa la siguiente tabla

	S_E
b	....
$\overline{xy}$	....
u	....
$\overline{um}$	....
$\overset{\Delta}{uyz}$	....

b) Colorea en azul $t\hat{u}m$ y en rojo $S_E(t\hat{u}m)$

c) ¿Puedes afirmar que $t\hat{u}m = x\hat{u}m$?.¿Por qué ?.

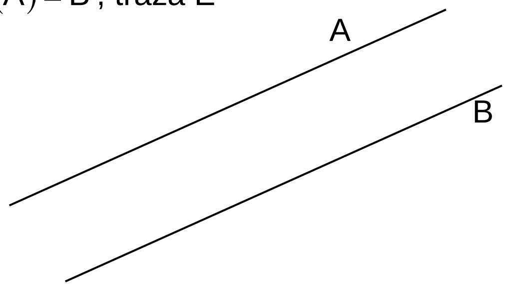
2) Ubica en el siguiente gráfico los puntos x, v, z tales que $S_E(c) = x$; $S_E(d) = v$ y $S_E(z) = f$

De acuerdo con los datos del apartado anterior, resuelve:

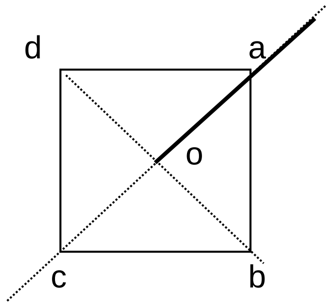
$S_E(a) =$ .... $S_E(\overline{ab}) =$ .... $S_E(E) =$ ....

$S_E\left(\overrightarrow{cd}\right) =$ .... $S_E\left(\overrightarrow{cf}\right) =$ .... $S_E\left(d\hat{c}f\right) =$ ....

3) Si $S_E(A) = B$, traza E



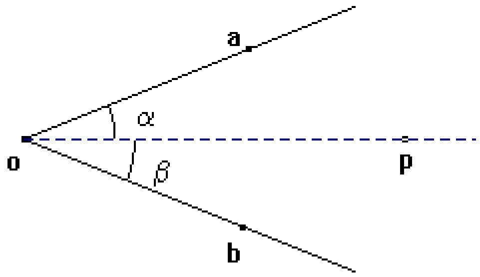
4) Busca la imagen del cuadrado abcd de la figura según la simetría de eje que contiene a la semirrecta $\vec{oa}$



¿Qué ocurre con la imagen obtenida y la figura dada?.Completa:

La recta que incluye la diagonal del cuadrado es.................................

BISECTRIZ DE UN ÁNGULO



A la bisectriz de un ángulo la notaremos con la letra B colocándole como subíndice el nombre del ángulo,
En símbolos:

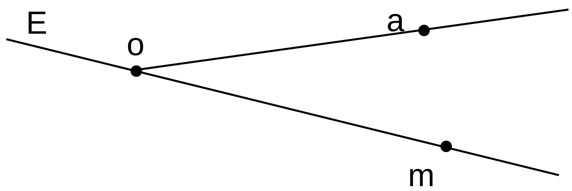
$$\vec{op} = B_{\hat{aob}}$$

$$\hat{\alpha} = \hat{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{op} = B_{\hat{aob}}$$

Definición: Es la semirrecta con origen en el vértice del ángulo que lo divide en dos ángulos congruentes

Ejercicios de aplicación

5) Encuentra la imagen de una semirrecta con origen en el eje de simetría y no incluida en el eje. Grafica y completa:



- Su imagen será .... del mismo origen.
- El origen es un punto...................... por pertenecer al eje.
- Su imagen está en el semiplano.................... al que contiene a la semirrecta dada.

- Si $S_E\left(\overrightarrow{oa}\right) = \overrightarrow{ob}$ $S_E\left(\widehat{aom}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ por lo tanto el $\widehat{aom} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

  $\Rightarrow \overrightarrow{om}$ es.............................del $\widehat{aob}$.

- $S_E\left(\widehat{aob}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ por lo tanto la figura es ....

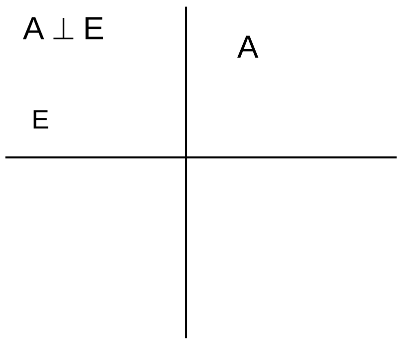
Por lo que podemos concluir que:

El eje de simetría contiene a la bisectriz del ángulo determinado por una semirrecta con origen en el eje y su imagen

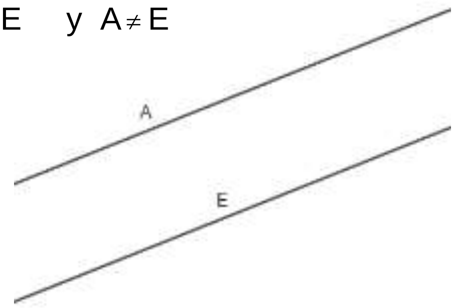
Ejercicios de aplicación

6) Dibuja S_E (A) en cada uno de los siguientes casos

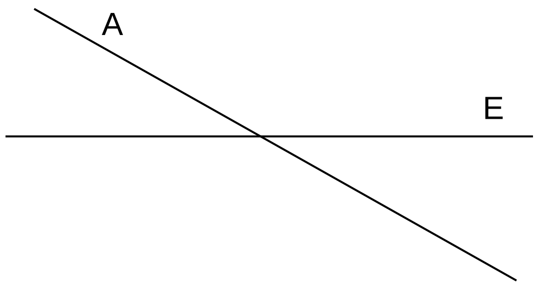
a) $A \perp E$



b) A // E y $A \neq E$



c) $A \not\perp E$ y $A \nparallel E$



Observando las distintas posiciones relativas de una recta y su transformada en una simetría axial, ¿qué puedes concluir?

7) Dibuja un rectángulo abcd y realiza $S_{\overleftrightarrow{cd}}\left(\overset{\Delta}{abc}\right)$

8) Dibuja un triángulo obtusángulo mnp

$$S_{\overleftrightarrow{mp}}\left[S_{\overleftrightarrow{np}}\left(\overset{\Delta}{mnp}\right)\right]$$

9) En cada uno de los siguientes casos, dibuja un triángulo $\overset{\Delta}{mnp}$ y halla S_E $(\overset{\Delta}{mnp})$, sabiendo que:

a) $E // \overleftrightarrow{mn}$ y $E \cap \overset{\Delta}{mnp} = \varnothing$

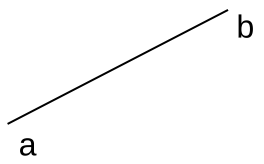
b) $E \cap \overset{\Delta}{mnp} = \{m\}$

c) $E \cap \overset{\Delta}{mnp} = \varnothing$ y E no es paralelo a ninguno de los lados de $\overset{\Delta}{mnp}$

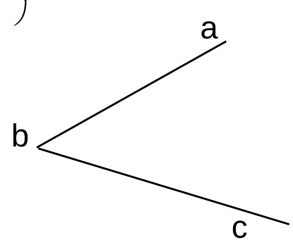
d) $E \cap \overset{\Delta}{mnp} = \overline{ab}$, a $\in$ $\overline{mn}$ y b $\in$ $\overline{np}$

10) Determina el eje de simetría para que resulte:

a) $S_E\left(\overrightarrow{ab}\right) = \overrightarrow{ba}$



b) $S_E\left(a\hat{b}c\right) = c\hat{b}a$



11) En un sistema de coordenadas cartesianas dibuja el triángulo $\overset{\Delta}{mpq}$ siendo $m(2;1)$, $p(4;2)$ y $q(1;3)$

a) Construye el simétrico de $\overset{\Delta}{mpq}$ aplicando $S_E\left(\overset{\Delta}{mpq}\right)$ siendo E una recta paralela al eje de las ordenadas que pasa por el punto p.

b) Indica las coordenadas de los puntos simétricos.

12) Sabiendo que $S_E(\overrightarrow{ba}) = \overrightarrow{bc}$, $\overline{bc} = \overline{ba}$ y $S_E(d) = d$.

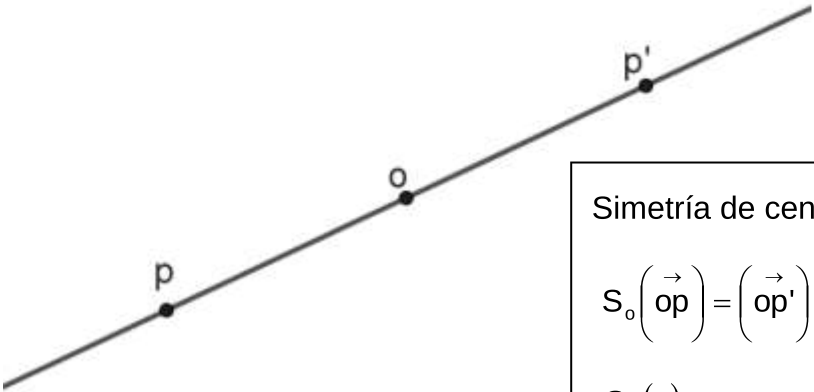
a) Realiza un gráfico

b) Justifica que E es mediatriz del segmento $\overline{ac}$ y $a\hat{b}d = d\hat{b}c$.

SIMETRÍA CENTRAL

Definición:

La SIMETRÍA CENTRAL respecto a un punto o, llamado centro de simetría es una transformación rígida *que aplicada a un punto* ***p*** *se obtiene otro punto* ***p', de forma tal que p y p' pertenecen a semirrectas opuestas de origen o, y están a igual distancia (equidistan) de dicho punto.***



Simetría de centro ***o*** se simboliza **S_o**

$S_o\left(\overrightarrow{op}\right) = \left(\overrightarrow{op'}\right)$ siendo $\overrightarrow{op}$ y $\overrightarrow{op'}$ son opuestas

$S_o(o) = o$

$S_o(p) = p' \Leftrightarrow p$ y p' son **simétricos** respecto de o.

Para tener en cuenta

- El centro de simetría es un punto unido
- $S_o\left(\overleftrightarrow{op}\right) = \overleftrightarrow{op}$

En una simetría central diremos que la imagen de una recta que contiene al centro de simetría es la misma recta o sea que es una recta unida con el único punto unido que es el centro de simetría.

- $S_o\left(\overline{op}\right) = \overline{op'} \Rightarrow \overline{op} = \overline{op'}$, **o** es punto medio del segmento $\overline{pp'}$

En una simetría central, el centro de simetría es punto medio del segmento determinado por un punto y su imagen.

- En una simetría central a una figura y su imagen se las llama **simétricas** entre sí, respecto del centro.

  En símbolos:

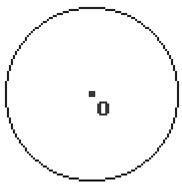
  $S_o(F) = G \Leftrightarrow F$ y G son simétricas entre sí respecto del centro

- Una figura es simétrica respecto de un punto, si es doble o unida en la simetría central que tiene por centro a dicho punto, y éste es el centro de simetría de la figura.

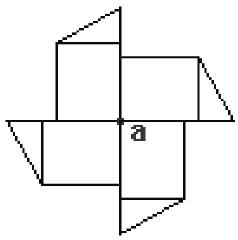
  En símbolos:

  $S_o(F) = F \Leftrightarrow F$ es simétrica respecto de *o*

  Ejemplos:



Este círculo es simétrico respecto de *o*



Esta figura es simétrica respecto de *a*

Ejercicios de aplicación

13) En el siguiente gráfico:

a) Ubica los puntos x, y, u, v y w tal que

$$x = S_a(b), \quad y = S_a(c), \quad u = S_a(d), \quad v = S_a(e), \quad w = S_a(f)$$

•c

•d •b

•a •e

•f

b) Completa:

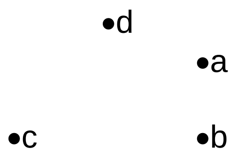
$S_a(a) =$ .... $S_a(\overline{fe}) =$ ....

$S_a(\overline{ca}) =$ .... $S_a(\overrightarrow{fb}) =$ ....

$S_a(\overleftrightarrow{ad}) =$ .... $S_a(e\hat{f}b) =$ ....

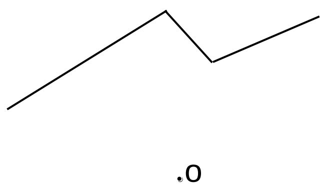
14) En el siguiente gráfico dibuja, con distintos colores:

$S_a(\overrightarrow{cd})$, $S_a(b\hat{c}d)$, $S_a(a\hat{b}c)$ y ubica al punto *x* tal que $S_a(x) = d$

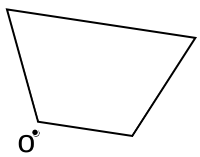


15) En cada uno de los siguientes apartados determina la imagen de la figura correspondiente por una simetría central, siendo el centro de simetría el punto señalado

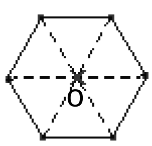
a)



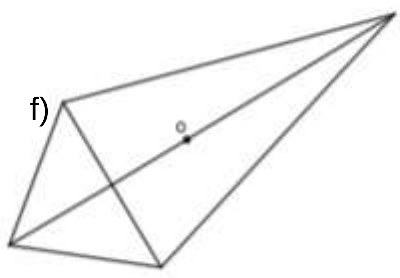
b)



c)



f)



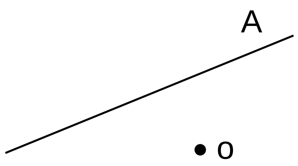
16) Dibuja un triángulo $\overset{\Delta}{uxv}$ y $S_x\left(\overset{\Delta}{uxv}\right)$

17) Dibuja un triángulo obtusángulo mnp

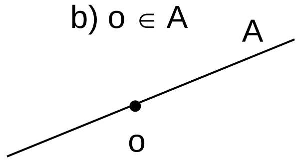
$$S_E\left[S_o\left(\overset{\Delta}{mnp}\right)\right] \; , E \perp \overline{mp} \; / \; E \cap \overline{mp} = \{p\}$$

18) Dibuja $S_o(A)$ en cada uno de los siguientes casos:

a) $o \notin A$



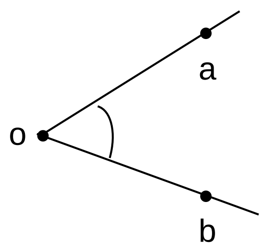
b) $o \in A$



Del ejercicio anterior, podemos concluir

Dos rectas simétricas en una simetría central son paralelas.
En una simetría central, las únicas rectas unidas son las que contienen al centro de simetría.

19) Dado $a\hat{o}b$, dibuja $S_o\left(a\hat{o}b\right)$



La imagen de un ángulo con vértice en el centro de simetría es su opuesto por el vértice.

Completa:

$$\left.\begin{array}{l} S_o\left(\overrightarrow{oa}\right) = \text{...........} \\ S_o\left(\overrightarrow{ob}\right) = \text{...........} \end{array}\right\} \Rightarrow S_o\left(a\hat{o}b\right) = \text{.............}$$

Por definición de congruencia de figuras, $a\hat{o}b$ es congruente con su imagen, entonces concluiremos que:

Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes

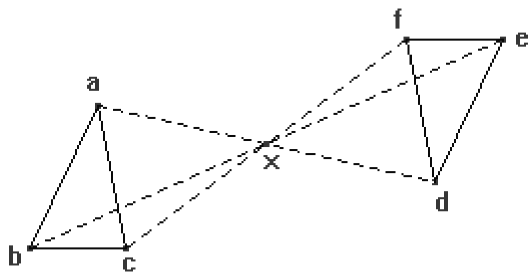
20) Responde:

a) ¿Qué condición debe cumplir una semirrecta para que en una simetría central su imagen sea la semirrecta opuesta?

b) ¿Qué condición debe cumplir una recta para que en una simetría central sea una recta unida?

21) Si $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$ se bisecan en un punto o, justifica que $\overline{ac} = \overline{bd}$ y $\overline{ac} \parallel \overline{bd}$

22) En la figura *x* es el punto medio de $\overline{ad}, \overline{be}$ y $\overline{cf}$. Justifica que $a\overset{\Delta}{b}c$ y $f\overset{\Delta}{e}d$ son congruentes.



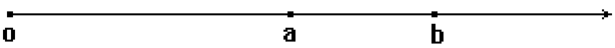
Ángulos cuyos lados son respectivamente paralelos a los lados de otro

Con el propósito de ampliar el estudio sobre la simetría central, introducimos la siguiente definición:

> ***Dos semirrectas paralelas son del mismo sentido, si:***
> ***a) estando en la misma recta, una incluye a la otra,***
> ***b) estando en rectas paralelas distintas, se encuentran incluidas en un mismo semiplano respecto de la recta que determinan sus orígenes***

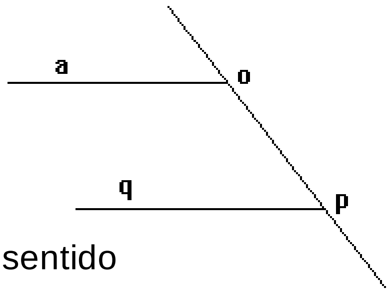
Simbólicamente:

a)



$$\overrightarrow{ab} \subset \overrightarrow{oa} \quad \Rightarrow \overrightarrow{ab} \ \text{ y } \ \overrightarrow{oa} \ \text{ son del mismo sentido}$$

b)



$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{oa} // \overrightarrow{pq} \wedge \overleftrightarrow{oa} \neq \overleftrightarrow{pq} \\ \overrightarrow{oa} \subset \text{semp}_{\overleftrightarrow{op}}(a) \\ \overrightarrow{pq} \subset \text{semp}_{\overleftrightarrow{op}}(a) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{oa} \text{ y } \overrightarrow{pq} \ \text{ son del mismo sentido}$$

> ***Dos semirrectas paralelas son de distinto sentido, si:***
> ***a) estando en la misma recta, no incluye una a la otra,***
> ***b) estando en rectas paralelas distintas, se encuentran incluidas en distintos semiplanos respecto de la recta que determinan sus orígenes***

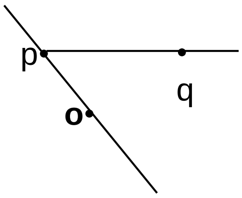
Propiedad

> ***Dos semirrectas paralelas y de distinto sentido son simétricas respecto del punto medio del segmento determinado por sus orígenes***

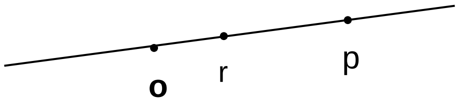
Realiza la siguiente ***Actividad***:

Dibuja :

a) $S_o(\overrightarrow{pq})$



b) $S_o(\overrightarrow{rp})$



Completa:

- En el a) $\overrightarrow{pq}$ y $S_o(\overrightarrow{pq})$ son ....paralelas y de ...., por lo tanto son simétricas respecto del................del segmento determinado por ....
- En el b) $\overrightarrow{rp}$ y $S_o(\overrightarrow{rp})$ son ....y de ...., por lo tanto son simétricas respecto del...

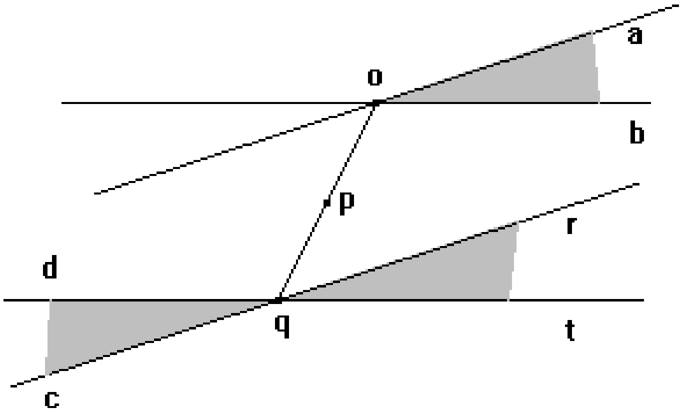
Aplicando la última propiedad enunciada ***comparemos pares de ángulos*** cuyos lados sean respectivamente:

- ***Semirrectas paralelas y del mismo sentido.***
- ***Semirrectas paralelas y orientadas en sentido contrario.***

Gráficamente: $\hat{boa}$ y $\hat{tqr}$ tienen por lados semirrectas paralelas y de igual sentido y

$\hat{aob}$ y $\hat{dqc}$ tienen por lados semirrectas paralelas y de distinto sentido

Llamamos *p* al punto medio de $\overline{oq}$, y apliquemos S_p, completa la tabla de correspondencia entre los elementos y/o figuras y sus respectivas imágenes.



S_p	
o	------------
$\overrightarrow{oa}$	-------------
$\overrightarrow{ob}$	-------------
$\widehat{aob}$	-------------

$\Rightarrow \widehat{aob} = \widehat{cqd}$ (*)

Los ángulos $\widehat{cqd}$ y $\widehat{rqt}$ sus lados son semirrectas opuestas por lo tanto son ángulos opuestos por el vértice y por propiedad de los mismos son congruentes (**)

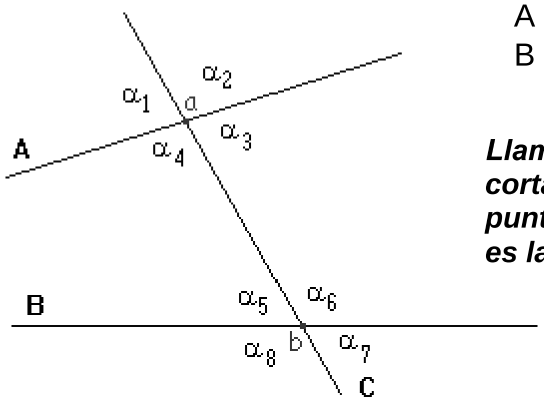
$$\left.\begin{array}{l} \text{De (*)} \ \ \widehat{aob} = \widehat{cqd} \\ \text{De (**)} \ \ \widehat{cqd} = \widehat{rqt} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{aob} = \widehat{rqt} \ \text{ por propiedad transitiva}$$

Conclusión:

Los ángulos cuyos lados son semirrectas paralelas de igual (o distinto) sentido son congruentes

ÁNGULOS FORMADOS POR DOS RECTAS CORTADAS POR UNA TERCERA

Consideremos dos rectas A y B cortadas por una tercera C como muestra la figura.

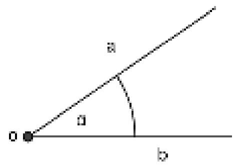


$A \cap C = \{a\}$
$B \cap C = \{b\}$

Llamamos "transversal" a la recta que corta a dos rectas coplanares en dos puntos distintos. En nuestro caso, C es la transversal

Con estos datos quedan determinados ángulos convexos, entre los que distinguiremos los que hemos nombrado en la figura con $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_3, \hat{\alpha}_4, \hat{\alpha}_5, \hat{\alpha}_6, \hat{\alpha}_7, \hat{\alpha}_8$

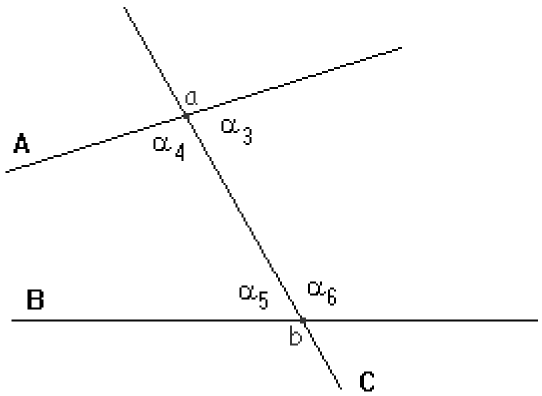
<u>Para tener en cuenta</u>: otra forma de simbolizar un ángulo:



$\hat{\alpha} = a\hat{o}b$

Estos ocho ángulos reciben nombres especiales como veremos:

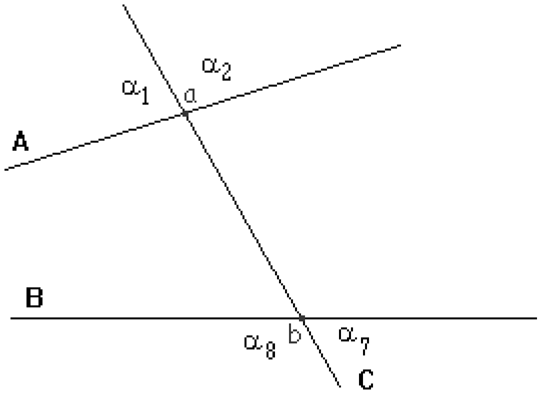
Ángulos interiores o internos



son los incluidos en semp A (b) $\cap$ semp B (a)

o sea $\hat{\alpha}_3, \hat{\alpha}_4, \hat{\alpha}_5$ y $\hat{\alpha}_6$

Ángulos exteriores o externos



son los no incluidos en $semp_A(b) \cap semp_B(a)$

o sea $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_7$, y $\hat{\alpha}_8$

Si consideramos un par cualquiera de esos ocho ángulos puede suceder:

- que tengan el mismo vértice. En ese caso son opuestos por el vértice o adyacentes.
- que tengan distinto vértice. En este segundo caso también serán clasificados asignándoles nombres especiales. Los pares de ángulos interiores de distinto vértice se clasifican en:

Alternos internos: es el par de ángulos internos de distinto vértice que se encuentran en distintos semiplanos respecto de la transversal.
En nuestro caso

$$\left.\begin{matrix} \hat{\alpha}_3 \text{ y } \hat{\alpha}_5 \\ \hat{\alpha}_4 \text{ y } \hat{\alpha}_6 \end{matrix}\right\} \text{son alternos internos}$$

Alternos externos: es el par de ángulos externos de distinto vértice que se encuentran en distintos semiplanos respecto de la transversal.
En nuestro caso

$$\left.\begin{matrix} \hat{\alpha}_1 \text{ y } \hat{\alpha}_7 \\ \hat{\alpha}_2 \text{ y } \hat{\alpha}_8 \end{matrix}\right\} \text{son alternos externos}$$

Conjugados internos: es el par de ángulos internos de distinto vértice que se encuentran en el mismo semiplano respecto de la transversal.
En nuestro caso

$$\left.\begin{matrix}\hat{\alpha}_3 \text{ y } \hat{\alpha}_6 \\ \hat{\alpha}_4 \text{ y } \hat{\alpha}_5\end{matrix}\right\} \text{son conjugados internos}$$

Conjugados externos: es el par de ángulos externos que se encuentran en el mismo semiplano respecto de la transversal.
En nuestro caso

$$\left.\begin{matrix}\hat{\alpha}_1 \text{ y } \hat{\alpha}_8 \\ \hat{\alpha}_2 \text{ y } \hat{\alpha}_7\end{matrix}\right\} \text{son conjugados externos}$$

Ángulos correspondientes: es el par de ángulos de distinto vértice, uno interno y otro externo, que se encuentran en el mismo semiplano respecto de la transversal.

En nuestro caso

$$\left.\begin{matrix}\hat{\alpha}_1 \text{ y } \hat{\alpha}_5 \\ \hat{\alpha}_2 \text{ y } \hat{\alpha}_6 \\ \hat{\alpha}_3 \text{ y } \hat{\alpha}_7 \\ \hat{\alpha}_4 \text{ y } \hat{\alpha}_8\end{matrix}\right\} \text{son correspondientes}$$

En general, los ángulos alternos, conjugados o correspondientes no revisten mayor trascendencia, excepto en el caso en que alguno de esos pares sean congruentes o que las rectas que son cortadas por una tercera sean paralelas. A estas dos últimas situaciones se refieren las consideraciones siguientes.

Si A *//* *B* y la recta *C* es la transversal(lo que abreviadamente indicamos A *//B* $\not\parallel$ *C)* resulta que en cualquier par de ángulos alternos los lados de uno son semirrectas paralelas y de distinto sentido con respeto a los lados del otro.

Resulta, por propiedades de la simetría central que tales pares de ángulos son congruentes.

De ello podemos concluir:

Los ángulos alternos determinados por dos rectas paralelas cortadas por una tercera son congruentes

También observemos que en **cualquier par de ángulos correspondientes entre rectas paralelas, los lados de uno son semirrectas paralelas y de igual sentido a los lados del otro**, luego:

Los ángulos correspondientes determinados por dos rectas paralelas cortadas por una tercera son congruentes.

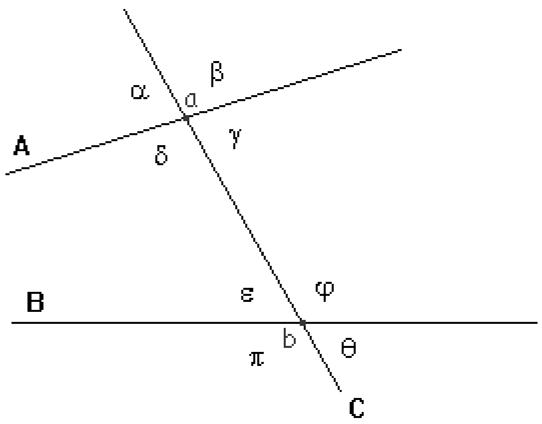
Son ciertos además los enunciados recíprocos de los anteriores:

Si los ángulos alternos son congruentes, las rectas que los determinan son paralelas

Si los ángulos correspondientes son congruentes, las rectas que los determinan son paralelas

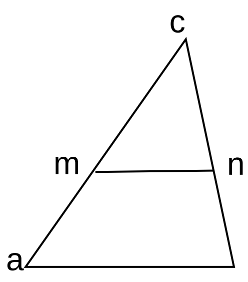
PARTE PRÁCTICA

23) Según la figura, nombra todos los pares de:

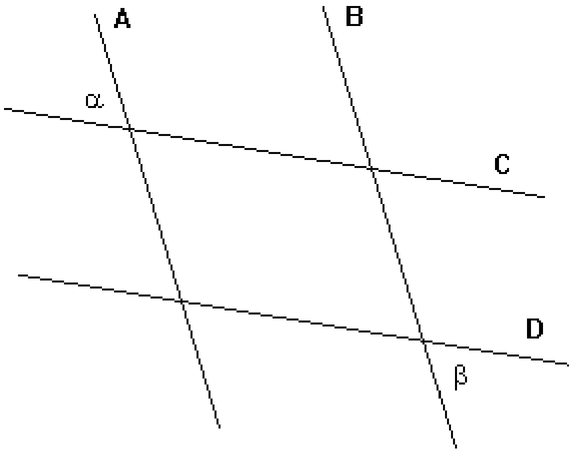


a) ángulos alternos internos
b) ángulos alternos externos
c) ángulos conjugados internos
d) ángulos conjugados externos
e) ángulos correspondientes

24) Dado el $\overset{\Delta}{abc}$ con $\overleftrightarrow{mn} // \overleftrightarrow{ab}$, justifica que los $\overset{\Delta}{abc}$ y $\overset{\Delta}{mnc}$ tienen sus ángulos respectivamente congruentes



25) Si *A // B* y *C // D,* justifica que $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$



Bibliografía : Transformaciones rígidas –Buschiazzo-Cattaneo- Hinrichsen-Filiputti
Geometria -Tirao
Geometría - Clemens/ O"Daffer /Cooney
Matemática 2 Bogani-Estévez-Oharriz. Editorial Plus Ultra