



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO  
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y ESTADÍSTICA  
SECRETARIA DE CIENCIA Y TECNOLOGIA E INSTITUTOS DE INVESTIGACIONES

# **Resumen Ampliado**

*Jornadas Anuales*

*“Investigaciones en la Facultad” de  
Ciencias Económicas y Estadística*



**Sebastiani, Camila**  
**Dianda, Daniela**

*Instituto de investigaciones Teóricas y Aplicadas, Escuela de Estadística.*

## **DISCREPANCIAS EN LA EVALUACION DE LA CAPACIDAD DE PROCESOS MULTIVARIADOS<sup>1</sup>**

### **Resumen:**

La calidad y la eficiencia en los procesos productivos son pilares fundamentales para la competitividad en el entorno industrial. Las organizaciones buscan no solo cumplir con las especificaciones de calidad, sino también optimizar continuamente sus procesos para garantizar productos consistentes y conformes. En este sentido, los estudios de capacidad de procesos juegan un papel clave, ya que permiten evaluar si un proceso es capaz de cumplir con las especificaciones de calidad impuestas. La capacidad de un proceso se determina evaluando dos aspectos: la variabilidad, en relación a las especificaciones, y el centrado respecto a los valores objetivos. Esta evaluación se reporta en términos de medidas conocidas como índices de capacidad, las cuales ofrecen una manera de cuantificar la habilidad del proceso para satisfacer las especificaciones. Con el paso del tiempo, la creciente complejidad de los procesos industriales modernos, ha obligado a extender el análisis al contexto multivariado, considerando simultáneamente varias variables, que a su vez pueden estar correlacionadas. A pesar de la existencia de diversas propuestas de indicadores multivariados, no existe un consenso sobre cuál es el más adecuado, ni criterios claros para su elección. Además, la aplicación de diferentes índices al mismo proceso puede generar resultados diferentes, llevando a conclusiones contradictorias. Esta falta de uniformidad dificulta la adopción práctica de estas herramientas. Este trabajo se enfoca en identificar las causas de las diferencias en los resultados de los índices multivariados cuando son aplicados sobre el mismo proceso, con el fin de derivar recomendaciones para su uso.

Palabras claves: Capacidad de procesos, Procesos multivariados, Comparación de indicadores

### **Abstract:**

Quality and efficiency in production processes are fundamental pillars for competitiveness in industrial environments. Organizations seek not only to meet quality specifications but also to continuously optimize their processes to ensure consistent and compliant products. In this context, process capability analysis play a key role, as they allow the evaluation of whether a process is capable of meeting the established quality specifications. Process capability is determined by assessing two aspects: variability in relation to specifications, and centering with respect to target values. This evaluation is expressed in terms of measures known as capability indices, which provide a way to quantify the ability of a process to satisfy specifications. Over time, the increasing complexity of modern industrial processes has led to the extension of this analysis to a multivariate context, considering multiple variables simultaneously, which may also be correlated. Despite the existence of various proposals for multivariate

---

<sup>1</sup> Trabajo elaborado en el marco del Proyecto 80020230200068UR, titulado: "Desarrollos metodológicos para la recolección y análisis de datos en procesos de mejoras continuas", dirigido por Dra. Marta Quaglino.



UNR

indices, there is no consensus on which is the most appropriate, nor are there clear criteria for their selection. Furthermore, applying different indices to the same process may yield different results, leading to contradictory conclusions. This lack of uniformity hinders the practical adoption of these tools. This work focuses on identifying the causes of differences in the results of multivariate indices when applied to the same process, with the aim of deriving recommendations for their use.

Keywords: Process capability, Multivariate Processes, Indices comparison

## Introducción

El análisis de capacidad de procesos fue desarrollado con el objetivo de estudiar el comportamiento de un proceso en relación a una serie de requerimientos establecidos sobre las características de calidad de interés. Esta comparación entre el funcionamiento real del proceso y lo que se requiere del mismo, se resume en lo que se llaman indicadores de capacidad, que reflejan si el proceso funciona de acuerdo a los requerimientos o no (Pearn y Kotz, 2007).

Originalmente, el análisis tuvo un enfoque univariado, considerando individualmente a las distintas variables intervinientes en un proceso. Sin embargo, la creciente complejidad de los procesos industriales modernos, con múltiples variables de calidad correlacionadas, hizo que ese enfoque fuera insuficiente. Así es que el análisis evolucionó a un enfoque multivariado. En ese contexto, existen, hoy en día, variadas propuestas de indicadores unidimensionales y multidimensionales (Dianda, 2015; Chakraborty y Chatterjee, 2021). Sin embargo, a pesar de las diversas opciones, no hay consenso sobre cuál es la más adecuada para cada situación ni criterios claros que guíen en la elección de una alternativa. Más aun, una desventaja de esta situación es que distintos indicadores, aplicados sobre un mismo proceso, pueden arrojar conclusiones contradictorias sobre la capacidad del mismo. Este problema subraya la necesidad de una investigación más profunda para guiar la selección y aplicación de estas herramientas.

## Objetivo

Este trabajo tiene como objetivo analizar el desempeño de dos índices de capacidad para procesos multivariados propuestos en la literatura, comparando su habilidad para reflejar el estado de capacidad real del proceso bajo distintos escenarios, con especial énfasis en la identificación de los factores o características particulares de los procesos, bajo los cuales los índices pueden llevar a conclusiones diferentes.

## Metodología

Las propuestas que se analizan en este trabajo pertenecen al grupo de medidas definidas como cocientes de volúmenes de regiones, que pueden verse como la extensión natural del enfoque de cálculo de los índices univariados más tradicionales. La idea básica es comparar el comportamiento del proceso, el cual está reflejado por su región de variación natural, con las especificaciones impuestas, las cuales conforman una región de especificación.

Siendo  $v$  las variables de calidad de interés en el proceso, la región de variación natural del mismo está delimitada por un contorno de isodensidad bajo la distribución



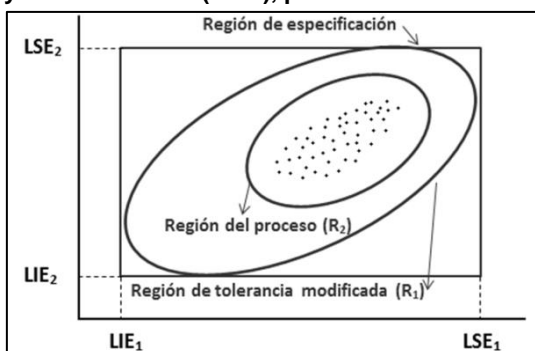
del vector de variables. En este trabajo se asume el supuesto de distribución normal multivariada para dicho vector, de modo que la región de variación natural tiene forma elíptica ( $v = 2$ ), elipsoidal ( $v = 3$ ) o hiperelipsoidal ( $v > 3$ ). Por otro lado, asumiendo que existen especificaciones independientes para cada variable de calidad, la región de especificación queda conformada por el producto cartesiano de intervalos de especificación de cada variable, formando un rectángulo para el caso bidimensional, y paralelepípedos rectangulares o hiperrectángulos, para dimensiones mayores. El desafío en la comparación de esas regiones es la diferencia en formas geométricas.

Diversos autores han propuesto alternativas para lograr una comparación justa entre ellas. De allí surgen las dos propuestas analizadas en este trabajo: una de ellas propone realizar una modificación a la región de especificación para llevarla a la forma elipsoidal; mientras que la otra propone modificar la región del proceso para llevarla a la forma rectangular. A continuación, se definen los índices que se originan con cada propuesta:  $NMC_{pm}$  y  $C_{PM}$ , respectivamente.

Sea  $X$  el vector de las  $v$  variables de calidad de interés, para el que se asume distribución conjunta normal, con vector de medias  $\mu$  y matriz de variancias y covariancias  $\Sigma$ . Además, las especificaciones vienen dadas por un vector de valores objetivo  $T$  y vectores  $LIE$  y  $LSE$  que contienen los límites de especificación inferiores y superiores. En lo que sigue se hablará, sin pérdida de generalidad, de volúmenes de regiones y de formas hiperrectangulares o hiperelipsoidales. Los conceptos aplican de manera análoga para áreas de regiones elípticas o rectangulares, si  $v = 2$ , o volúmenes de regiones elipsoidales o de paralelepípedos rectangulares, si  $v = 3$ .

El índice  $NMC_{pm}$  fue propuesto por Shahriari y Abdollahzadeh en 2009. Ellos propusieron modificar la región de especificación, originalmente hiperrectangular, llevándola a hiperelipsoidal. Se define así la región de especificación modificada como el mayor hiperelipsoide centrado en el objetivo, completamente contenido dentro de las especificaciones originales, con ejes paralelos a los de la elipse del proceso (Figura 1).

**Figura 1: Ejemplo ilustrativo de la región de tolerancia modificada según la propuesta de Shahriari y Abdollahzadeh (2009), para  $v=2$ .**





El índice queda definido como:

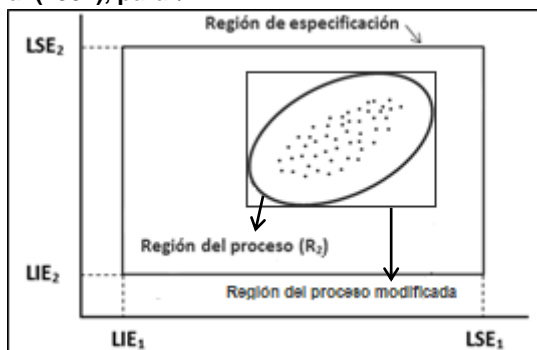
$$\begin{aligned}
 NMC_{pm} &= \frac{\text{Vol}(\text{región de especificación modificada})}{\text{Vol}(\text{región de variación del proceso})} = \\
 &= \left[ \frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}} (\pi c)^{\frac{p}{2}} \left[ \Gamma\left(\frac{p}{2} + 1\right) \right]^{-1}}{|\Sigma|^{\frac{1}{2}} (\pi \chi_{p, 1-\alpha}^2)^{\frac{p}{2}} \left[ \Gamma\left(\frac{p}{2} + 1\right) \right]^{-1}} \right]^{\frac{1}{p}} \cdot [1 + (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{T})' \Sigma^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{T})]^{-\frac{1}{2}} = \frac{c}{\sqrt{\chi_{p, 1-\alpha}^2}} \cdot D^{-1}
 \end{aligned}$$

Se observa que, trabajando algebraicamente el cociente que define al índice, éste puede expresarse como el producto de dos componentes, una que considera la variabilidad del proceso respecto a las especificaciones, y otra que considera la desviación del centrado del proceso respecto del objetivo. En este trabajo, se consideran procesos centrados, de modo que la segunda componente siempre toma el valor 1, por lo que el análisis se enfoca solo en el primer factor.

El índice  $C_{PM}$ , fue propuesto por Hubele et al. en 1991 y luego extendido a procesos multivariados por Shariari et al. en 1995. En este caso, los autores deciden modificar la región del proceso, que originalmente es hiperelipsoidal, transformándola a hiperrectangular. Se considera, entonces, una región del proceso modificada, definida como el menor hiperrectángulo que circunscribe al hiperelipsoide original (Figura 2). La región de tolerancia original tiene por volumen al producto de las amplitudes de tolerancia de cada variable y la región del proceso modificada también tiene por volumen al producto de las amplitudes de variación del proceso en cada variable ( $LSP_i$  y  $LIP_i$ ), obtenidas como las longitudes entre los extremos de las proyecciones del hiperelipsoide sobre cada eje cartesiano. La expresión final del índice resulta:

$$C_{PM} = \left[ \frac{\text{Vol}(\text{región de especificación modificada})}{\text{Vol}(\text{región de variación del proceso})} \right]^{1/v} = \left[ \frac{\prod_{i=1}^v (LSE_i - LIE_i)}{\prod_{i=1}^v (LSP_i - LIP_i)} \right]^{1/v}$$

Figura 2: Ejemplo ilustrativo de la región de tolerancia modificada según la propuesta de Hubele et al (1991), para  $v=2$ .



De la construcción de ambos índices se deduce que valores superiores a la unidad señalan procesos cuya variabilidad natural es menor que la variabilidad permitida por las especificaciones. De este modo, si los procesos se encuentran centrados en el objetivo, índices mayores a uno señalan procesos capaces. Por el contrario, valores

menores a la unidad sugieren falta de capacidad, es decir, procesos que operan en una región que excede a la delimitada por las especificaciones.

### **Estudio comparativo y resultados**

Hasta aquí se ha mostrado que existen diversas alternativas para cuantificar la capacidad de un proceso multivariado, generando como interrogante si todas ellas conducen al mismo diagnóstico del proceso. Algunas pruebas empíricas sugieren que esto no siempre es así, por lo que en esta sección se muestran resultados de la investigación llevada a cabo para indagar en este aspecto.

#### Análisis inicial:

En un primer análisis se trabajó con condiciones controladas y simples: principalmente, variancias iguales y misma correlación para cada par de variables. Además, se varió la cantidad de variables ( $v = 2, 3$  y  $5$ ) y el valor de la correlación ( $\rho = \pm 0.9, \pm 0.7, \pm 0.5, \pm 0.05$ ). Por último se variaron los límites de especificación, generando intervalos de tolerancia de diferentes amplitudes y, con ello, diferentes estados de capacidad de los procesos (cuantificada a través de la proporción de productos conformes).

Los resultados bajo estas condiciones mostraron dos particularidades: por un lado que, frente a un escenario fijo, ambos índices arrojan el mismo valor y, por otro lado, que ambos índices son invariantes frente a cambios en el nivel de correlación de las variables. Más aún, este comportamiento se sostuvo al aumentar el número de variables en el proceso. Frente a este hallazgo, se logró comprobar analíticamente que los índices son invariantes frente al nivel de correlación de las variables del proceso y que existen casos particulares, aunque no muy usuales en la práctica, bajo los que los índices resultan completamente equivalentes (Sebastiani, 2025).

#### Análisis posterior:

En una segunda instancia, se retomó el objetivo de encontrar escenarios bajo los cuales los índices arrojaran diferentes resultados. Para ello, se propusieron vectores de variables con diferentes variabilidades, que además resultan más representativos de la práctica industrial real. La correlación se dejó fija en 0.9. La estrategia de búsqueda fue ir variando las magnitudes de las variabilidades y las amplitudes de especificación, para lograr las siguientes cuatro situaciones:

- Escenario 1: Proceso capaz, con ambos índices indicando que el proceso es capaz.
- Escenario 2: Proceso no capaz, con ambos índices indicando que el proceso es no capaz.
- Escenario 3: Proceso capaz, con un índice indicando que el proceso es no capaz, mientras que el otro lo clasifica como capaz.
- Escenario 4: Proceso no capaz, con un índice indicando que el proceso es no capaz, mientras que el otro lo clasifica como capaz.

En la tabla 1 se muestran los resultados para el caso de  $v = 2$  variables. Se observa que en los escenarios 1 y 2, los resultados de los índices son numéricamente diferentes, pero ambos conducen al mismo diagnóstico, el cual, además, coincide con el estado real de capacidad del proceso. En los últimos dos escenarios, se evidencia que las diferencias en los resultados numéricos de ambos índices pueden ser críticas,



llevando a una conclusión errónea respecto del estado de capacidad real de un proceso.

Para estos escenarios bivariados resulta sencillo representar gráficamente las diferentes regiones involucradas en el cálculo de los índices, ayudando a visualizar la relación de regiones en los diferentes casos y a comprender por qué los índices además de arrojar resultados distintos, conducen a diferentes conclusiones (Figura 3). Por ejemplo, en el escenario 4 se observa que la variable  $X_1$  es altamente capaz y la variable  $X_2$  es no capaz. El índice  $C_{PM}$ , compensa las áreas rectangulares que quedan por fuera de la región de especificación original, por áreas dentro de especificación, pero de muy poca chance de ocurrencia para el proceso. Por el contrario, el índice  $MNC_p$  penaliza el mal desempeño de  $X_2$ , ya que al modificar la región de especificación, elimina regiones muy probables para el proceso y que técnicamente están dentro de las especificaciones originales.

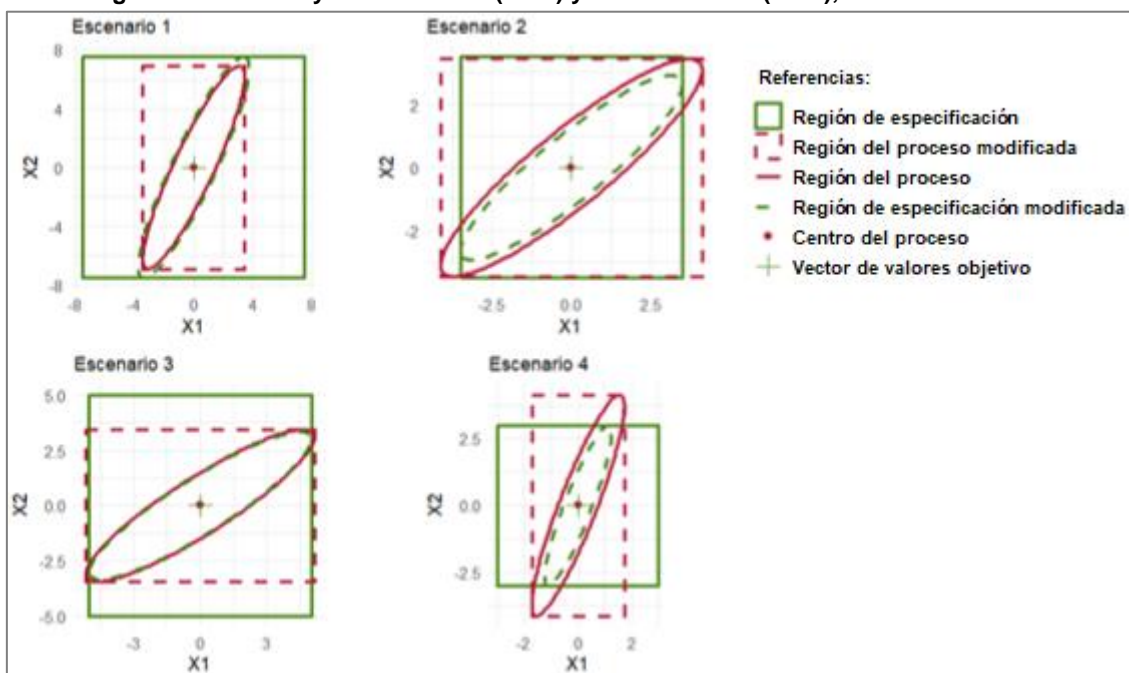
Para los casos de  $v = 3$  y  $v = 5$  variables, se observan patrones de comportamiento similares a los identificados en el caso bivariado.

Tabla 1: Resultados de los índices bajo los cuatro escenarios, para  $v = 2$ .

Escenario	$MNC_{pm}$		$CPM$	
	Valor	Diagnóstico	Valor	Diagnóstico
1 - Proc. capaz	1,09	Capaz	1,54	Capaz
2 - Proc. no capaz	0,85	No capaz	0,93	No capaz
3 - Proc. capaz	0,97	No capaz	1,19	Capaz
4 - Proc. no capaz	0,73	No capaz	1,13	Capaz

**Nota:** se resaltan en color verde los casos en los que el diagnóstico a través del índice coincide con el estado de capacidad real del proceso y en rojo los casos en los que no.

Figura 3: Regiones de especificación y del proceso, originales y modificadas, conforme a las metodologías de Shahriari y Abdollazadeh (2009) y Shahriari et al. (1995), en los cuatro escenarios.



## Conclusiones

Los principales hallazgos de este trabajo resaltan diferencias importantes en la interpretación y clasificación de la capacidad del proceso entre los índices  $NMC_{pm}$  y  $C_{PM}$ . Se demostró que los índices coinciden en sus resultados sólo bajo condiciones muy específicas: todas las variables con igual variancia e iguales especificaciones. Si alguna de estas condiciones no se mantiene, los índices pueden arrojar diferentes resultados y llevar a conclusiones contradictorias.

El índice  $NMC_{pm}$  se mostró más sensible a la no capacidad de alguna de las variables del proceso, mientras que el índice  $C_{PM}$  es más optimista, compensando con el buen desempeño de las restantes variables. Esta discrepancia es crucial, ya que un mismo proceso puede ser clasificado como "capaz" por un índice y como "no capaz" por el otro, lo cual introduce una notable confusión en la toma de decisiones.

Se destaca, también, el hallazgo sobre la no influencia del coeficiente de correlación en el valor de los índices  $NMC_{pm}$  y  $C_{PM}$ . Esta conclusión resultó válida tanto para procesos con variancias iguales como desiguales, reforzando el hecho de que la correlación, por sí misma, no es un factor influyente en la diferencia de estos índices bajo las condiciones estudiadas.

A partir de las conclusiones derivadas del estudio, se recomienda que, al utilizar estas herramientas en la práctica, se complemente el análisis multivariado con un estudio univariado de cada variable por separado, ya que esto permite identificar comportamientos individuales que pueden influir en la elección del índice más adecuado. Además, la naturaleza del proceso bajo estudio, es decir, su temática o contexto específico, es un factor determinante a la hora de elegir qué índice utilizar dependiendo de la gravedad que conlleve declarar incorrectamente un proceso como capaz o no capaz.

Por último, se destaca que la investigación realizada no abarca la totalidad de las posibles líneas de análisis. Además de los factores ya explorados, pueden existir otros factores para los cuales los resultados de los índices no coinciden, lo cual abre espacio para futuras investigaciones en esta línea.

## Referencias Bibliográficas

Chakraborty A., Chatterjee M. (2021). *Handbook of Multivariate Process Capability Indices*. CRC Press.

Dianda, DF. (2015). Estudio estadístico de sistemas de medida e indicadores de capacidad de procesos multivariados, en contextos de mejora de la calidad y la productividad. Tesis Doctoral, Universidad Nacional de Rosario.

Dianda, D., y Fernández, J. (2024). Análisis de capacidad de procesos multivariados. En *Métodos estadísticos aplicados en la industria*. Universidad Nacional de Rosario.

Hubele, N.F., Shahriari, H., Cheng, C.S. (1991). A bivariate process capability vector, in statistics and design in process control, in *Statistical Process Control in Manufacturing* edited by Keats, J.B. and Montgomery, D.C. Marcel Dekker, New York, pp.299-310.



Pearn, W.L., Kotz, S. (2007). Encyclopedia and Handbook of Process Capability Indices. Series on Qualitym Reliability and Engineering Statistics. Singapore: WorldScientific.

Sebastiani, C. (2025). Evaluación Comparativa de Índices de Capacidad Multivariados: Escenarios Basados en Dimensionalidad, Capacidad y Correlación. Tesina de Grado. Licenciatura en Estadística. UNR.

Shahriari, H., Hubele, N.F., Lawrence, F. P. (1995). A multivariate process capability vector. Proceedings of the 4th Industrial Engineering Research Conference, Institute of Industrial Engineers, pp.304-309.

Shahriari, H., & Abdollahzadeh, M. (2009). A new multivariate process capability vector. Quality Engineering, 21(3), 290-299.