

MINISTERIO DE JUSTICIA E INSTRUCCION PUBLICA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS, Etc.
DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

MATHEMATICÆ NOTÆ

BOLETIN

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA

DIRECTOR

BEPPPO LEVI

AÑO SEPTIMO - FASC. 1



ROSARIO
REPUBLICA ARGENTINA
1947

Las "Mathematicae Notae" publican artículos, cuestiones, ejercicios, soluciones y correspondencia. La resolución de las cuestiones propuestas será publicada en números sucesivos de la revista al cabo de un tiempo razonable, a juicio del Director del Instituto, para obtener contestaciones de los lectores; de las cuestiones publicadas bajo el título de ejercicios la dirección se reserva la decisión, en cada caso, de publicar o no las respuestas.

A fin de año se adjudicarán dos premios:

1º Por concurso entre alumnos de la Facultad que contesten satisfactoriamente a cuestiones, problemas o ejercicios.

2º Por concurso entre todos los demás lectores del país o del extranjero que contesten en modo acertado a los mismos.

Los premios consistirán en tratados de extensión cultural o libros de especialización.

Las soluciones deben ser entregadas al Instituto en redacción clara y en hojas distintas para cada cuestión, problema o ejercicio. En cada hoja deberá señalarse el nombre del autor; los alumnos de la Facultad indicarán el año de estudios que cursan en la misma, y, los de primer año, además, la escuela media de la cual provienen. Estos elementos serán tenidos en cuenta para el juicio, conjuntamente con el valor intrínseco de las soluciones y la forma expositiva de las mismas, dándose por la Dirección la máxima importancia a la disposición por la cual se compararán sólo alumnos de igual preparación.

En la sección de Bibliografía se publicarán los análisis críticos de libros recientes que sean enviados al Instituto de Matemática.

I N D I C E

	PÁG.
Un método para obtener congruencias de números de Bernoulli (MISCHA COTLAR)	1
Sul problema di Neumann-Dini per la stricia piana indifinita (CARLO BIRINDELLI)	30
Ejercicios y problemas (Resueltos)	65
Ejercicios y problemas (Propuestos)	75
Bibliografía	76

DONADO
EN MEMORIA DEL PROFESOR
INGO. JORGE A. LOUREIRO

UN METODO PARA OBTENER CONGRUENCIAS DE NUMEROS DE BERNOULLI

por

MISCHA COTLAR

En una nota anterior (*) hemos introducido los polinomios $M_n(x)$, $\varphi_n(x)$ y $g_n(x)$ (ver fórmulas (1) y (2)) y hemos indicado sus características principales. Ahora detallaremos un poco más sus propiedades y aplicaciones. Debido a la propiedad característica de nuestros polinomios, que consiste en que se pueden *permutar* entre sí el índice y el argumento para valores enteros del mismo, de toda relación algébrica se deduce otra aritmética válida para los valores enteros del argumento. Esta propiedad de permutabilidad permite establecer diversas relaciones entre los coeficientes de dichos polinomios y los números de Bernoulli. Diversas congruencias clásicas de los números de Bernoulli, y otras posiblemente nuevas, están incluidas en dichas relaciones. De los resultados que creemos nuevos mencionaremos el siguiente: en la teoría clásica es fundamental la congruencia de Voronoi (ver § 4, fórmula (52)) cuya utilidad se debe especialmente a que contiene un parámetro arbitrario s ; en cambio el manejo de esta fórmula queda dificultado por la presencia del factor $e = E(as : p)$; nosotros sustituimos este factor por el más simple $(-1)^e$ (ver fórmula (63)). En todo caso el objeto del presente artículo es mostrar que las propiedades específicas de los polinomios $M_n(x)$, $\varphi_n(x)$, proporcionan un instrumento sencillo para el estudio de los números de Bernoulli, y que la

(*) M. COTLAR. *Estudio de una clase de polinomios de Bernoulli*, Math. Notae, año VI, fas. 2, pág. 69. El lector familiarizado con la teoría de los números Bernoulli puede prescindir de la lectura de la nota citada, completando por propia cuenta alguna que otra demostración, ya que a continuación resumimos los resultados de aquella nota.

noción de permutabilidad constituye un complemento natural a la teoría de sucesiones armónicas de Appel-Nielsen.

* § 1. Los polinomios $\varphi_n(x)$, $g_n(x)$ y $M_n(x)$ pueden definirse por medio de sus funciones generatrices del modo siguiente (**):

$$F(t; x) = e^t(1+t)^x = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \cdot \frac{t^n}{n!} \quad (1)$$

$$G(t; x) = e^{-t}(1-t)^{-x-1} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) \cdot \frac{t^n}{n!} \quad (2)$$

$$\Phi(t; x) = F(t; x) \cdot G(t; x) = \frac{1}{1-t} \cdot \left(\frac{1+t}{1-t}\right)^x = \sum_{n=0}^{\infty} M_n(x) \cdot \frac{t^n}{n!} \quad (3)$$

Adoptaremos para los coeficientes de estos polinomios las notaciones siguientes:

$$\varphi_n(x) = x^n + \varphi_n^1 x^{n-1} + \dots + \varphi_n^r x^{n-r} + \dots + \varphi_n^n \quad (\varphi_n^n = 1) \quad (4)$$

$$g_n(x) = x^n + g_n^1 x^{n-1} + \dots + g_n^r x^{n-r} + \dots + g_n^n \quad (4a)$$

(**) Compárese con las fórmulas (39), (42a) y (55) de nuestra nota anterior.

Aprovechamos la oportunidad para anotar algunos errores de imprenta que se han deslizado en esas fórmulas:

pág. 86 fórm. (37a) dice $\left(1 + \frac{t}{\delta_0}\right)^n e^t$ léase $\left(1 + \frac{t}{\delta_0}\right)^x e^t$
 » 86 » (38a) » $(1 + t/\delta_0)x, e^t$ » $(1 + t/\delta_0)^x e^t$
 » 86 » (39) » $(1+t)x \cdot e^t$ » $(1+t)^x e^t$
 » 93 línea 4 » $(1+tA(t))^n$ » $(1+tA(t))^x$
 » 93 fórm. (49a) » $\left(1 - \frac{t}{\delta(1-t)}\right)^{-x-1}$ léase $\left(1 - \frac{t}{\delta(1+t)}\right)^{-x-1}$
 » 94 línea 5 desde abajo

$$\text{dice } 1 - \frac{2}{\omega} \left(\frac{\omega}{e^\omega + 1} - \frac{2\omega}{e^{2\omega} - 1} \right)$$

$$\text{léase } 1 - \frac{2}{\omega} \left(\frac{\omega}{e^\omega - 1} - \frac{2\omega}{e^{2\omega} - 1} \right).$$

$$M_n(x) = M_n^0 x^n + M_n^1 x^{n-1} + \dots + M_n^r x^{n-r} + \dots + M_n^n (M_n^n = 1) \quad (4b)$$

$$f_n = g_n^n = g_n(0); \quad \varphi_n = \varphi_n^{n-1} = \varphi'_n(0); \quad M_n = M_n^{n-1}. \quad (4c)$$

Para los coeficientes factoriales usaremos análogamente la notación (*)

$$\sigma_n(x) = x(x-1) \dots (x-(n-1)) = x^n + \sigma_n^1 x^{n-1} + \dots + \sigma_n^r x^{n-r} + \dots + \sigma_n^{n-1} x \quad (5)$$

$$\bar{\sigma}_n(x) = (x+1) \dots (x+n) = x^n + \bar{\sigma}_n^1 x^{n-1} + \dots + \bar{\sigma}_n^r x^{n-r} + \dots + \bar{\sigma}_n^{n-1} x + \bar{\sigma}_n^n \quad (5a)$$

se tiene pues: $\sigma_n(x) = (-1)^n \bar{\sigma}_n(-x-1) = \bar{\sigma}_n(x-n)$.

En la nota anterior citada hemos demostrado las siguientes propiedades:

a) La sucesión $\varphi_n(x)$ es *permutable* de 1ª. especie y la $g_n(x)$ de 2da. especie; esto significa que para todo par de enteros n, k , se verifica

$$\varphi_n(k) = \varphi_k(n) \quad (n, k \geq 0) \quad (6)$$

$$(-1)^k g_{k-1}(-n) = (-1)^n g_{n-1}(-k) \quad (n, k \geq 1) \quad (6a)$$

siendo además $\varphi_n(x)$ y $g_n(x)$ polinomios conjugados:

$$g_n(x) = (-1)^n \varphi_n(-x-1). \quad (6b)$$

b) La sucesión $M_n(x)$ es *autoconjugada* y *permutable* de 1ª. y 2ª. especie a la vez:

$$(-1)^n M_n(-x-1) = M_n(x) \quad (7)$$

$$M_n(k) = M_k(n) \quad ; \quad (-1)^k M_{k-1}(-n) = (-1)^n M_{n-1}(-k) \quad (7a)$$

(*) Si $f_n(x)$ es un polinomio de grado n designaremos con $\bar{f}_n(x)$ su "conjugado": $\bar{f}_n(x) = (-1)^n f_n(-x-1)$; análogamente designaremos con $\triangle f = f(x) - f(x-1)$ al operador conjugado del $\triangle f = f(x+1) - f(x)$.

c) Los polinomios φ_n, g_n, M_n están ligados a los polinomios factoriales por las relaciones

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=0}^n C_n^i \sigma_i(x) \quad (8)$$

$$g_n(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} C_n^i \bar{\sigma}_i(x) \quad (8a)$$

$$M_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{2^i}{i!} C_n^i \sigma_i(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \frac{2^i}{i!} C_n^i \bar{\sigma}_i(x). \quad (8b)$$

d) La sucesión $\varphi_n(x)$ es armónica respecto del operador Δ y la $g_n(x)$ respecto del $\bar{\Delta}$, esto es:

$$\Delta \varphi_n(x) = \varphi_n(x+1) - \varphi_n(x) = n \varphi_{n-1}(x) \quad (9)$$

$$\bar{\Delta} g_n(x) = g_n(x) - g_n(x-1) = n g_{n-1}(x). \quad (9a)$$

e) Designando con $\Delta_{<M>}$ y $D_{<M>}$ los operadores

$$\Delta_{<M>} = \frac{1}{2} \Delta - \frac{1}{4} \Delta^2 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2^n} \Delta^n + \dots, \quad (10)$$

$$D_{<M>} = \frac{2B_2(2^2-1)}{2} D + \dots + \frac{2B_{n+1}(2^{n+1}-1)}{(n+1)!} D^n + \dots, \quad (10a)$$

siendo B_n los números Bernoulli y $Df(x) = f'(x)$, se verifica

$$\Delta_{<M>} M_n(x) = D_{<M>} M_n(x) = M_{n-1}(x). \quad (10b)$$

Con los mismos razonamientos se probará que si

$$D_{<\varphi>} = \frac{D}{1!} + \frac{D^2}{2!} + \dots + \frac{D^n}{n!} + \dots \quad (10c)$$

$$D_{<g>} = \frac{D}{1!} - \frac{D^2}{2!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{D^n}{n!} + \dots \quad (10d)$$

se verifica

$$D_{\langle \varphi \rangle} \varphi_n(x) = n \varphi_{n-1}(x) \quad ; \quad D_{\langle g \rangle} g_n(x) = n g_{n-1}(x). \quad (10e)$$

f) Para los polinomios $g_n(x)$ se tiene la relación recurrente

$$\begin{aligned} g_n(x) &= (x+n-1) g_{n-1}(x) + (n-1) g_{n-2}(x) = \\ &= (n+x) g_{n-1}(x) - g_{n-1}(x-1). \end{aligned} \quad (11)$$

Con los mismos razonamientos se probarán las relaciones siguientes:

$$\varphi_n(x) = (x-n+2) \varphi_{n-1}(x) + (n-1) \varphi_{n-2}(x) \quad (11a)$$

$$n M_n(x) = (2x+1) M_{n-1}(x) + (n-1) M_{n-2}(x); \quad (11b)$$

en particular para $x = -1/2$ la última fórmula da

$$M_n\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{n-1}{n} M_{n-2}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \dots \quad (11c)$$

Estas fórmulas recurrentes permiten calcular fácilmente los polinomios φ_n , g_n y M_n ; he aquí una pequeña tabla de los mismos:

n	$\varphi_n(x)$	$g_n(x)$	$M_n(x)$
0	1	1	1
1	$x+1$	x	$2x+1$
2	x^2+x+1	x^2+x+1	$2x^2+2x+1$
3	x^3+2x+1	x^3+3x^2+5x+2	$\frac{4}{3}x^3+2x^2+\frac{8}{3}x+1$
4	$x^4-2x^3+5x^2+1$	$x^4+6x^3+17x^2+20x+9$	$\frac{2}{3}x^4+\frac{4}{3}x^3+\frac{10}{3}x^2+\frac{8}{3}x+1$
5	$x^5-5x^4+15x^3-15x^2+9x+1$	$x^5+10x^4+45x^3+100x^2+109x+44$	$\frac{4}{15}x^5+\frac{2}{3}x^4+\frac{8}{3}x^3+\frac{10}{3}x^2+\frac{46}{15}x+1$

§ 2. Veamos ahora algunas fórmulas fundamentales que se deducen de las propiedades del párrafo anterior.

Como la función generatriz de la fórmula (1) verifica:

$$e^t F(t; x + y) = F(t; x) \cdot F(t; y),$$

reemplazando $F(t; x)$ por su desarrollo (1) e igualando los coeficientes en t^n se obtiene la *fórmula de adición*:

$$\sum_{s=0}^n C_n^s \varphi_s(x + y) = \sum_{s=0}^n C_n^s \varphi_s(x) \varphi_{n-s}(y). \quad (12)$$

En forma análoga se deducen

$$\sum_{s=0}^n C_n^s f_{n-s} \cdot g_s(x + y) = \sum_{s=0}^n C_n^s g_s(x) g_{n-s}(y) \quad (12a)$$

$$\sum_{s=0}^n M_s(x + y) = \sum_{s=0}^n M_s(x) \cdot M_{n-s}(y). \quad (12b)$$

En virtud de la propiedad de permutabilidad las últimas fórmulas dan, para todo par de enteros $k_1 \geq 0, k_2 \geq 0$,

$$\sum_{s=0}^n C_n^s \varphi_{k_1+k_2}(s) = \sum_{s=0}^n C_n^s \varphi_{k_1}(s) \varphi_{k_2}(n-s) \quad (13)$$

$$\sum_{s=0}^n M_{k_1+k_2}(s) = \sum_{s=0}^n M_{k_1}(s) \cdot M_{k_2}(n-s) \quad (13a)$$

$$\sum_{s=0}^n M_{k+1}(s) = \sum_{s=0}^n (2s+1) M_k(n-s). \quad (13b)$$

Transformando los dos miembros de (12b) mediante (7) y escribiendo luego x e y en vez de $-x-1$ y $-y-1$ resulta la fórmula

$$\sum_{s=0}^n (-1)^s M_s(x + y + 1) = (-1)^n \sum_{s=0}^n M_s(x) \cdot M_{n-s}(y) \quad (14)$$

que en virtud de la permutabilidad da, para $k_1 \geq 0, k_2 \geq 0$ enteros,

$$\sum_{s=0}^n (-1)^s M_{k_1+k_2+1}(s) = \sum_{s=0}^n M_{k_1}(s) M_{k_2}(n-s) \quad (14a)$$

y en particular, haciendo $k_2=0$, $k_1=k$,

$$\sum_{s=0}^n (-1)^s M_{k+1}(s) = (-1)^n \sum_{s=0}^n M_k(s). \quad (14b)$$

Haciendo en (14b) sucesivamente $n=n$, $n-1$ y restando se obtiene la (primera) fórmula sumatoria

$$2 \sum_{s=0}^{n-1} M_k(s) = M_{k+1}(n) - M_k(n) \quad (15)$$

que equivale a

$$\Delta \{M_{k+1}(x) - M_k(x)\} = 2 M_k(x). \quad (15a)$$

Poniendo en (14) $y=-x-1$ y teniendo en cuenta (7) y (7a) resulta la fórmula

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=0}^n (-1)^s M_k(-s) M_k(s-n) \\ \sum_{s=0}^n (-1)^s M_k(s) M_k(n-s) \end{aligned} \right\} = \begin{cases} 1 & (n \text{ par}) \\ 0 & (n \text{ impar}) \end{cases} \quad (16)$$

En virtud de la permutabilidad, (11a) y (11b) dan, para $k \geq 0$, $n \geq 0$ enteros,

$$\varphi_k(n) = (k-n+2) \varphi_k(n-1) + (n-1) \varphi_k(n-2) \quad (17)$$

$$n M_k(n) = (2k+1) M_k(n-1) + (n-1) M_k(n-2) \quad (17a)$$

y, como $M_k(x)$ es un polinomio y (17a) se verifica para todo entero n , debe ser

$$x M_k(x) = (2k+1) M_k(x-1) + (x-1) M_k(x-2). \quad (18)$$

De las últimas fórmulas y (7) se deduce fácilmente que

$$(k+1) M_{k+1}(n) = (n+k+1) M_k(n) + n M_k(n-1) \quad (19)$$

$$\begin{aligned} (k+1) M_{k+1}(x) &= (x+k+1) M_k(x) + x M_k(x-1) = \\ &= (x+k+1) M_k(x) + (-1)^k x M_k(-x). \end{aligned} \quad (19a)$$

Escribiendo la misma fórmula (11a) con $n=n+1$ y multiplicando ambos miembros por $\varphi_n(y)/n!$, luego intercambiando x con y y restando, se encuentra

$$\begin{aligned} (x-y) \varphi_n(x) \varphi_n(y) &= \frac{\varphi_{n+1}(x) \varphi_n(y) - \varphi_{n+1}(y) \varphi_n(x)}{n!} + \\ &\quad \frac{\varphi_n(x) \varphi_{n-1}(y) - \varphi_n(y) \varphi_{n-1}(x)}{(n-1)!} \end{aligned}$$

y haciendo $n=0, 1, \dots, n$ y sumando se obtiene la fórmula del tipo «Christoffel»:

$$\sum_{s=0}^n (-1)^{n-s} \frac{\varphi_s(x) \varphi_s(y)}{s!} = \frac{\varphi_{n+1}(x) \varphi_n(y) - \varphi_{n+1}(y) \varphi_n(x)}{n! (x-y)}. \quad (20)$$

Análogamente a partir de (11b) se encuentra:

$$\sum_{s=0}^n (-1)^{n-s} M_s(x) M_s(y) = \frac{(n+1) [M_{n+1}(x) M_n(y) - M_{n+1}(y) M_n(x)]}{2(x-y)}, \quad (20a)$$

que en virtud de la permutabilidad se transforma, para $k_1 \geq 0$, $k_2 \geq 0$ enteros, en

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^n (-1)^{n-s} M_{k_1}(s) M_{k_2}(s) &= \\ &= \frac{(n+1) [M_{k_1}(n+1) M_{k_2}(n) - M_{k_2}(n+1) M_{k_1}(n)]}{2(k_1 - k_2)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Como por (7) es $M_n(x) = (-1)^n M_n(-x-1)$, haciendo en (20a) $y = -x-1$, resultan las fórmulas notables:

$$(2x+1) \sum_{s=0}^n M_s^2(x) = (n+1) M_{n+1}(x) M_n(x) \quad (22)$$

$$(2k+1) \sum_{s=0}^n M_k^2(s) = (n+1) M_k(n+1) M_k(n). \quad (22a)$$

Haciendo en (21) $k_2=0$ se obtiene la (segunda) fórmula sumatoria, con signos alternados,

$$\sum_{s=0}^n (-1)^{n-s} M_k(s) = \frac{n+1}{2k} \{M_k(n+1) - M_k(n)\}. \quad (23)$$

Se obtiene en seguida una relación entre los tres polinomios $M_n(x)$, $\varphi_n(x)$ y $g_n(x)$, observando que la función generatriz de (3) es igual al producto de las funciones generatrices de (1) y (2); luego:

$$M_n(x) = \sum_{s=0}^n \frac{\varphi_s(x)}{s!} \cdot \frac{g_{n-s}(x)}{(n-s)!}. \quad (24)$$

Análogamente se comprueban estas otras relaciones:

$$[\varphi_{n+1}(x) - 1] : x = (-1)^n [g_n(-x) - g_{n-1}(-x) + g_{n-2}(-x) - \dots] \quad (25)$$

$$g_n(x) = (-1)^n [\sigma_n(-x) - C_n^1 f_1 \cdot \sigma_{n-1}(-x) + C_n^2 f_2 \cdot \sigma_{n-2}(-x) - \dots \pm f_n]. \quad (26)$$

Derivando respecto de x la función generatriz de (3) se obtiene

$$\Phi_x(t; x) = \Phi(t; x) \{\lg(1+t) - \lg(1-t)\}$$

de donde resulta la importante relación

$$M'_n(x) = 2 \{M_{n-1}(x) + \frac{1}{3} M_{n-3}(x) + \frac{1}{5} M_{n-5}(x) + \dots\} \quad (27)$$

y del mismo modo, a partir de (1):

$$\varphi'_n(x) = \sum_{s=1}^n (-1)^{s-1} C_n^s (s-1)! \varphi_{n-s}(x). \quad (27a)$$

Derivando (7) y (15a) se obtiene

$$M_n^{(k)}(x) = (-1)^{n+k} M_n^{(k)}(-x-1) \quad (28)$$

$$M_n^{(k)}(x+1) - M_n^{(k)}(x) = M_{n-1}^{(k)}(x+1) + M_{n-1}^{(k)}(x); \quad (28a)$$

haciendo respectivamente $x=0$ y $x=-1$ se deduce de las dos últimas fórmulas que

$$M_n^{(k)}(0) = \begin{cases} M_{n-1}^{(k)}(0) & n+k \text{ impar} \\ M_{n+1}^{(k)}(0) & n+k \text{ par.} \end{cases} \quad (28b)$$

Derivando (11a) y teniendo en cuenta (9) se encuentra

$$\varphi'_{n-1}(x+1) = \varphi'_n(x+1) - (x+1) \varphi'_{n-1}(x) - \varphi_{n-1}(x). \quad (29)$$

Haciendo en (29) $x=\lambda, \lambda-1, \dots, 0$ ($\lambda \geq 0$ entero), y sumando se llega, teniendo en cuenta la propiedad de permutabilidad, a la fórmula

$$\varphi'_{n-1}(\lambda) = \sum_{s=0}^n (-1)^{n-s} \sigma_{n-s}(\lambda) \cdot \varphi'_n(s) - H_{\lambda-1}(n) + (-1)^{\lambda+n} \cdot \lambda! f_{n-1} \quad (30a)$$

siendo $H_\lambda(x)$ un polinomio de grado λ definido por la ley recurrente

$$H_\lambda(x) = \varphi_\lambda(x-1) - (\lambda+1) H_{\lambda-1}(x). \quad (30a)$$

Análogamente se encuentra:

$$g'_{n-1}(-\lambda) = \sum_{s=0}^n (-1)^{n-s} \sigma_{n-s}(\lambda-1) \cdot g'_n(s) + (-1)^{n-1} H^*_{\lambda-2}(n) + (\lambda-1)! f_{n-1} \quad (30b)$$

$$H_\lambda^*(x) = n H^*_{\lambda-1}(x) + g_{n-1}(x). \quad (30c)$$

Finalmente observemos que por ser los polinomios $M_n(x)$, $g_n(x)$, $\varphi_n(x)$ polinomios de Bernoulli (en el sentido de R. Lagrange, ver § 3 de nuestra nota anterior), ellos gozan todavía de todas las propiedades de tales polinomios y en particular de

las propiedades (1—4) citadas en dicho § 3, pág. 81. En general sería interesante hacer el estudio de los polinomios $M_n^{(r)}(x)$, $\varphi_n^{(r)}(x)$, $g_n^{(r)}(x)$, donde el índice (r) tiene el significado definido en el l. c.

§ 3. De las fórmulas anteriores se deducen múltiples relaciones para los coeficientes de los polinomios $M_n(x)$, $\varphi_n(x)$, $g_n(x)$. No nos detendremos en detallarlas a todas pues para lo que sigue solo necesitaremos las siguientes relaciones que son consecuencias directas de las fórmulas (8), (11), (18), (26), (27) y (28b) (*):

$$\varphi_n^k = \sum_{s=0}^k C_n^s \sigma_{n-s}^{k-s} = \varphi_{n-1}^k - (n-2) \varphi_{n-1}^{k-1} + (n-1) \varphi_{n-2}^{k-2} \quad (31)$$

$$\varphi_n^k = (-1)^k [g_{n-1}^k - g_{n-2}^{k-1} + g_{n-3}^{k-2} - \dots] \quad (31a)$$

$$g_n^k = g_{n-1}^k + (n-1)(g_{n-1}^{k-1} + g_{n-2}^{k-2}) = \sum_{s=0}^k (-1)^s C_n^s \bar{\sigma}_{n-s}^{k-s} \quad (31b)$$

$$f_n = (n-1)(f_{n-1} + f_{n-2}) = n f_{n-1} + (-1)^n \quad (31c)$$

$$\begin{aligned} M_n^k &= \frac{1}{n} M_{n-1}^{k-1} + \frac{2}{n} M_{n-1}^k + \frac{n-1}{n} M_{n-2}^{k-2} \\ &= \sum_{s=0}^k \frac{2^{n-s}}{(n-s)!} C_n^s \sigma_{n-s}^{k-s} = \sum_{s=0}^k (-1)^s \frac{2^{n-s}}{(n-s)!} C_n^s \bar{\sigma}_{n-s}^{k-s} \end{aligned} \quad (31d)$$

$$M_n^{2k} = M_{n-1}^{2k-1} + \frac{2}{n} M_n^{2k+1}; \quad M_n^{2k+1} = \frac{2}{n-1} M_{n-2}^{2k} + M_{n-2}^{2k-1} \quad (31e)$$

$$M_n^k = M_{n-1}^{k-1} \quad \text{si } k = \text{impar} \quad (31f)$$

$$M_n = M_n^{n-1} = M'_n(0) = 2\{1 + 1/3 + 1/5 + 1/7 + \dots\} \quad (31g)$$

En cambio examinaremos con más detalle algunas propiedades aritméticas sencillas de los coeficientes (**). Para tal fin fijaremos las siguientes

(*) Las propiedades de los coeficientes $f_n = g_n^n$ fueron motivo de un estudio especial en nuestra nota: *Una generalización de los factoriales*, Math. Notae, año V, pg. 89.

(**) Agradezco al Doctor Beppo Levi algunos perfeccionamientos en los teoremas que siguen.

Notaciones: Designaremos con p un número primo impar fijo, de modo que todas las congruencias se tomarán mod p . Si $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ designaremos con $\kappa(a)$ el cociente de Fermat

$$\kappa(a) = (a^{p-1} - 1) : p,$$

y con W_p el de Wilson:

$$W_p = [(p-1)! + 1] : p.$$

Finalmente designaremos con $E(x) = [x]$ la parte entera de x .

Recordemos todavía que los coeficientes factoriales σ_n^r , $\bar{\sigma}_n^r$ (ver fórmula (5)) tienen las siguientes propiedades (**) (de Wilson y Lagrange)

$$\bar{\sigma}_{p-1}^k \equiv 0 \quad (1 \leq k \leq p-2) \quad \bar{\sigma}_{p-1}^{p-1} \equiv -1 \pmod{p}$$

$$\bar{\sigma}_{\mu p}^{r(p-1)} \equiv (-1)^r C_{\mu}^r \quad (r=0, 1, \dots, \mu) \pmod{p}$$

$$\bar{\sigma}_{\mu p}^k \equiv 0 \quad (k \neq r(p-1)) \pmod{p}.$$

De la relación

$$\bar{\sigma}_p^k = \bar{\sigma}_{p-1}^k + p \bar{\sigma}_{p-1}^{k-1}$$

se deduce además, teniendo en cuenta las congruencias de la primera línea,

(**) Estas propiedades y otras análogas resultan inmediatamente aplicando el teorema de identidad de los polinomios a coeficientes enteros, reducidos según el mod p . Resulta que los dos polinomios de grado $p-1$

$$\bar{\sigma}_{p-1}(x) \text{ y } x^{p-1} - 1,$$

por ser los dos $\equiv 0 \pmod{p}$ para $x = -1, -2, \dots, -(p-1)$, y $\equiv -1$ para $x = 0$ tendrán los coeficientes de términos de igual grado congruentes mod. p .

Se sigue entonces que las expresiones $\bar{\sigma}_{p-1}(x)$ y $x^{p-1} - 1$ son equivalentes respecto del mod. p , también cuando se considere x como un símbolo no sustituible por números; la misma observación vale si se comparan $\bar{\sigma}_{p-1}(x+hp)$ y $x^{p-1} - 1$, $x+hp$ y x (h entero); observando entonces que, para μ entero ≥ 1

$\bar{\sigma}_{\mu p}(x) = [\bar{\sigma}_{p-1}(x) \bar{\sigma}_{p-1}(x+p) \dots \bar{\sigma}_{p-1}(x+(\mu-1)p)] [(x+p)(x+2p) \dots (x+\mu p)]$ resulta que la misma equivalencia mod. p existe entre

$$\bar{\sigma}_{\mu p}(x) \text{ y } (x^{p-1} - 1)^{\mu} x^{\mu} = (x^p - x)^{\mu}$$

$$\frac{\bar{\sigma}_p^k}{p} \equiv \frac{\bar{\sigma}_{p-1}^k}{p} (1 < k \leq p-1), \frac{\bar{\sigma}_p^p}{p} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Observando que $\sigma_n^k = (-1)^k \sigma_{n-1}^k$ para $k < n$, $\sigma_n^n = 0$, se obtienen relaciones análogas para los σ_p^k .

Teorema I. Para todo p primo impar se verifican las congruencias siguientes, todas respecto mod p , salvo indicación contraria:

$$\begin{aligned} f_p &= g_p^p \equiv -1; g_p^{p-1} \equiv -1; \\ g_p^k &\equiv 0 \quad (0 < k \leq p-2) \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \varphi_p^p &= 1; \varphi_p = \varphi_p^{p-1} \equiv g_p^{p-1} \equiv -1; \\ \varphi_p^k &\equiv 0 \quad (0 < k \leq p-2) \end{aligned} \quad (32a)$$

$$M_p^p = 1; M_p^k \equiv -2 \frac{\bar{\sigma}_p^k}{p} \equiv -2 \frac{\bar{\sigma}_{p-1}^k}{p} \quad (0 < k \leq p-2) \quad (33)$$

$$\begin{aligned} M_p^1 &\equiv -M_p^p \equiv -1; \\ M_p^{2r+1} &\equiv 0 \quad (3 \leq 2r+1 \leq p-2) \end{aligned} \quad (34)$$

$$pM_p^{p-1} \equiv 2p \pmod{p^2} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} M_{p-1}^0 &\equiv -M_{p-1}^{p-1} \equiv -1; \pmod{p} \\ M_{p-1}^{2r} &= M_p^{2r+1} \equiv 0 \quad (3 \leq 2r+1 \leq p-2) \end{aligned} \quad (36)$$

$$M_{p-2}^{2k-1} \equiv 2M_{p-1}^{2k}; M_{p-3}^{2k-1} \equiv M_{p-1}^{2k+1} + 2M_{p-1}^{2k+3} \quad (37)$$

Demostración. Las congruencias (32), (32a), (33) y (35) resultan inmediatamente de las expresiones (31), (31b), (31d) teniendo en cuenta que $C_p^k \equiv 0$ si $0 < k \leq p-1$, $C_p^p \equiv 1$ y que $\bar{\sigma}_p^k \equiv 0$, $\bar{\sigma}_p^{p-1} \equiv -1$. Las congruencias restantes se deducen de estas teniendo en cuenta (31e) y (31f).

Teorema II. Si $m = p \cdot m'$, $m_1 \equiv m_2 \equiv 0 \pmod{p}$, se tiene:

$$f_m = g_m^m \equiv (-1)^m; \varphi_m = \varphi_m^{m-1} \equiv (-1)^{m-1} g_m^{m-1} \equiv -m' \pmod{p} \quad (38)$$

$$(-1)^{m_1} f_{m_1} \equiv (-1)^{m_2} f_{m_2}; \varphi_{m_1} + E\left(\frac{m_1}{p}\right) \equiv \varphi_{m_2} + E\left(\frac{m_2}{p}\right) \pmod{p}. \quad (39)$$

Demostración. — De $f_m = m f_{m_1} + (-1)^m$ y $m \equiv 0 \pmod{p}$ resulta

$$f_m \equiv (-1)^m \pmod{p}.$$

De (31b)

$$g_m^{m-1} = \sum_{s=0}^{m-1} (-1)^s C_m^s \bar{\sigma}_{m-s}^{m-s-1};$$

siendo $m = pm'$ se ve fácilmente que $C_m^s \equiv 0 \pmod{p}$ para todos los valores de s no múltiplos de p . Resulta luego

$$g_m^{m-1} \equiv \sum_{r=0}^{m-1} (-1)^{rp} C_{pm'}^{rp} \bar{\sigma}_{(m'-r)p}^{(m'-r)p-1};$$

pero, según las fórmulas que preceden $\bar{\sigma}_{(m'-r)p}^{(m'-r)p-1} \equiv 0$, salvo el caso en que fuese $(m'-r)p-1 = h(p-1)$; pero esta eventualidad puede ocurrir únicamente para $h=1$ o bien $h > m'-r$; en este último caso tenemos todavía

$$\bar{\sigma}_{(m'-r)p}^{h(p-1)} \equiv (-1)^h C_{m'-r}^h = 0.$$

Resulta luego finalmente

$$\begin{aligned} g_m^{m-1} &\equiv (-1)^{(m'-1)p} C_{pm'}^{p(m'-1)} \sigma_p^{p-1} \\ &\equiv (-1)^{m-p+1} C_{pm'}^p \equiv (-1)^m m' \pmod{p} \end{aligned}$$

que equivale a la segunda (38), siendo, por (6b) y (9a),

$$\begin{aligned} \varphi_m(x) &= (-1)^m g_m(-x-1) = \\ &= (-1)^m [g_m(-x) - m g_{m-1}(x)] \equiv (-1)^m g_m(-x); \end{aligned}$$

luego

$$\varphi_m^{m-1} \equiv (-1)^{m-1} g_m^{m-1}.$$

Para demostrar la primera parte de (39) basta mostrar que si r es el residuo de $n \pmod{p}$, $(-1)^n f_n \equiv (-1)^r f_r$.

Esta relación es cierta para $r=0$ en virtud de (38), suponiéndola cierta para r ella será cierta para $r+1$ porque

$$\begin{aligned} (-1)^{n+1} f_{n+1} - (-1)^{r+1} f_{r+1} &= (-1)^{n+1} (n+1) f_n - (-1)^{r+1} (r+1) f_r \equiv \\ &\equiv (-1)^{r+1} [(n+1) f_n - (r+1) f_r] \equiv 0. \end{aligned}$$

Para probar la 2ª. parte de (39) observemos que poniendo $\lambda_1 = p \cdot E(m_1 : p)$, $\lambda_2 = p \cdot E(m_2 : p)$, se tiene en virtud de (31a) y de la 1ª. parte de (39) que $\varphi_{m_1} - \varphi_{\lambda_1} \equiv \varphi_{m_2} - \varphi_{\lambda_2}$ lo que en virtud de (38) da la tesis.

Teorema III. Para todo entero n y para $s > 0$ se tiene

$$\sum_{a=1}^{p-1} a^{2n-1} \varphi_{sa-1} \equiv sp^{-2n} \sum_{a=2}^{p-1} a^{2n-1} \varphi_{a-1} - \sum_{a=1}^{p-1} a^{2n-1} E\left(\frac{as}{p}\right) \pmod{p}. \quad (40)$$

Demostración. — Si $a' < p$ es la solución de $sa' \equiv 1 \pmod{p}$, se verifica para todo $a \neq a' : E(as : p) = E((as-1) : p)$. Luego si r es el resto de $sa \pmod{p}$, se tiene (ver (39))

$$\varphi_{as-1} a^{2n-1} \equiv sp^{-2n} \varphi_{as-1} (as)^{2n-1} \equiv sp^{-2n} [\varphi_{r-1} r^{2n-1} - E\left(\frac{as}{p}\right) (as)^{2n-1}].$$

Si a recorre los valores $1, 2, \dots, (p-1)$ salvo a' , r recorre los valores $2, 3, \dots, (p-1)$ y por lo tanto

$$\sum'_{a=1}^{p-1} a^{2n-1} \varphi_{as-1} \equiv sp^{-2n} \sum_{a=2}^{p-1} \varphi_{a-1} a^{2n-1} - \sum'_{a=1}^{p-1} a^{2n-1} E\left(\frac{as}{p}\right),$$

donde $\sum'$ indica «salvo a' »; para $a=a'$ es, en virtud de (38),

$$a'^{2n-1} \varphi_{a's-1} \equiv - (a')^{2n-1} E\left(\frac{a's}{p}\right)$$

que sumado a la congruencia anterior da la tesis.

Finalmente observemos que de (30b) se deduce fácilmente que

$$g'_{m-1}(-\lambda) \equiv (-1)^{\lambda-1} [f_{\lambda-1} g_m^{m-1} - (-1)^m H_\lambda + (\lambda-1)! f_{m-1}] \pmod{p} \quad (41)$$

siendo $m \equiv 0 \pmod{p}$, $H_0 = 1$, $H_n = n H_{n-1} + f_{n-1}$.

§ 4. En este párrafo nos proponemos establecer relaciones entre los coeficientes de nuestros polinomios y los números de Bernoulli, mostrando con algunos ejemplos como diversos teoremas clásicos pueden obtenerse como casos particulares de dichas relaciones. Para los números de Bernoulli usaremos la notación de nuestra nota anterior (*); además designaremos

$$\Sigma_m = 1^m + 2^m + 3^m + \dots + (p-1)^m$$

siendo p un número primo impar, fijo en lo que sigue. De las propiedades de los números de Bernoulli sólo supondremos conocido el teorema básico de Staudt que dice: *los números primos p que dividen el denominador de B_{2n} son aquellos que verifican $2n \equiv 0 \pmod{p-1}$* ; luego si p es un número primo $> 2n+1$ el denominador de B_{2n} no contiene a p como factor. Todas las demás propiedades clásicas que usaremos las deduciremos como aplicaciones de los resultados que iremos encontrando. Así por ejemplo de (33) y (34) resulta el teorema de Glaisher: *si $1 \leq r \leq (p-3):2$, entonces $\bar{\sigma}_{p-1}^{2r+1} \equiv 0 \pmod{p^2}$, $\bar{\sigma}_{p-1}^{2r} \equiv 0 \pmod{p}$* .

Teorema IV. *Si p es primo impar y $2 \leq n = 2k \leq p-1$, se verifica*

$$\frac{2(2^{2k}-1)}{2k} B_{2k} \equiv M_{p-1}^{2k-1} \pmod{p}. \quad (42)$$

(*) En relación con el tema tratado en el presente § ver especialmente: N. NIELSEN: *Traité élémentaire des nombres de Bernoulli* (Paris-Gauthier-Villars-1923) y E. LEHMER. *On congruences involving Bernoulli Numbers*, *Annals of Mathematics*, V 39, 12, 1938. La notación de Nielsen difiere de la nuestra pues él escribe $(-1)^n B_n$ en lugar de B_{2n} ; la notación de Lehmer coincide con la nuestra.

Demostración. — En virtud de (10b) es

$$M_{p-1}(x) = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{2(2^i-1)}{i!} B_i \cdot D^{i-1} M_p(x).$$

Igualando los coeficientes en x^{p-n} , y teniendo en cuenta que $B_{n+1} = B_{2k+1} = 0$, se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^n \frac{2(2^i-1)}{i!} B_i (p-n+1) \dots (p-n+i-1) M_p^{n+1-i} = \\ = \sum_{j=1}^k \frac{2(2^{2j}-1)}{(2j)!} B_{2j} (p-n+1) \dots (p-n+2j-1) M_p^{2k+1-2j} = M_{p-1}^{2k-1}. \end{aligned}$$

Para $j < k$ es $1 < 2k+1-2j < p-1$, y siendo $2k+1-2j$ impar resulta (ver (34)) que $M_p^{2k+1-2j} \equiv 0 \pmod{p}$, de modo que la última congruencia se reduce a

$$M_{p-1}^{2k-1} \equiv \frac{2(2^{2k}-1)}{(2k)!} B_{2k} (p-2k+1) \dots (p-1) \cdot M_p^1;$$

como $M_p^1 \equiv -1$ y $(p-2k+1) \dots (p-1)/(2k)! \equiv -1/2k$, resulta la tesis.

Corolario. Haciendo en (42) $2k = p-1$ y teniendo en cuenta (31g) se obtiene la fórmula clásica de Cauchy-Genocchi:

$$(2^{p-1}-1) B_{p-1} \equiv -\frac{1}{2} M_{p-1}^{p-2} = - \left\{ 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{p-2} \right\} \pmod{p}. \quad (43)$$

Teorema V. Si p es primo impar y $2 \leq n = 2k < p-1$, se tiene

$$\frac{B_{2k}}{2k} \equiv \frac{1}{2} M_p^{2k} \equiv - \frac{1}{2^{2k}-2} \cdot \frac{M_p^{2k+1}}{p} \pmod{p}. \quad (44)$$

mientras que para $2k = p-1$ es

$$B_{p-1} \equiv \frac{1}{M_p^1} \cdot \frac{2^{p-1}-p}{p} \pmod{p}. \quad (45)$$

Demostración. — En virtud de (15) y de la fórmula sumatoria de Euler (ver nuestra nota anterior §, (10)⁽¹⁾) se tiene

$$\frac{1}{2} \{M_{p+1}(x) - M_p(x)\} = \int_0^x M_p(x) dx + \sum_{i=1}^p \frac{B_i}{i!} [M_p^{(i-1)}(x) - M_p^{(i-1)}(0)];$$

luego, igualando los coeficientes de x^{p-n} ,

$$\frac{1}{2} \{M_{p+1}^{n-1} - M_p^n\} = \frac{1}{p-n} M_p^{n+1} - \frac{1}{2} M_p^n + \frac{1}{p-n} \sum_{\mu=2}^n \binom{p-n+\mu-1}{\mu} B_\mu \cdot M_p^{n-\mu+1}.$$

Razonando como en el teorema anterior veremos que la última sumatoria es congruente a

$$\frac{1}{p-n} \binom{p-1}{n} B_n \cdot M_p^1 \equiv \frac{1}{n} B_n.$$

En virtud de (31f) el primer miembro de la penúltima fórmula es igual a cero. En virtud de (34) si $n < p-1$ es $M_p^{n+1} \equiv 0$ y resulta la primera parte de (44); si $n = p-1$ es $M_p^p = 1$, $M_p^{p-1} \equiv \frac{2^p}{p} \pmod{p}$ (ver (35)) y resulta (45). Para demostrar la segunda parte de (44) se hace el mismo razonamiento pero a partir de la segunda fórmula sumatoria (23) en lugar de la (15).

Corolario 1. Comparando la primera parte de (44) con (33) se obtiene la fórmula de Glaisher:

⁽¹⁾ Téngase presente que, siguiendo la costumbre, los extremos de sumación están designados en la fórmula de Euler con una convención distinta que en la (15). Se puede pasar directamente de la fórmula de Euler a (43), (44) sin referirse a (15) observando que, por la propiedad de permutabilidad de las funciones $M_n(x)$.

$$\sum_0^x M_p(x) \equiv \sum_{x=0}^{x-1} M_x(p) \equiv \sum_0^{x-1} M_x^0 = x$$

$$\frac{1}{p} \bar{\sigma}_{p-1}^{2k} \equiv -\frac{B_{2k}}{2k} \pmod{p} \quad (2 \leq 2k \leq p-3). \quad (46)$$

Corolario 2. Multiplicando (45) por $2^{p-1}-1$ y teniendo en cuenta que $M_{p-1} \equiv -1$ (ver (34)), y que $(2^{p-1}-1)/p = \kappa(2)$, obtenemos la fórmula clásica

$$(2^{p-1}-1) B_{p-1} \equiv -\kappa(2) \pmod{p} \quad (47)$$

que comparada con (43) da

$$\kappa(2) \equiv 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{p-2} \pmod{p}. \quad (47a)$$

Nota. La fórmula de Glaisher (46) tiene especial importancia en vista que, según demostró Kummer, la ecuación de Fermat $x^p + y^p + z^p = 0$ no puede ser resuelta en números enteros cada vez que ninguno de los números $B_2, B_4, \dots, B_{p-3}$ no es divisible por p (en tal caso p se llama exponente regular) (*). En virtud de (46) estas condiciones se reducen a la no divisibilidad por p^2 de los coeficientes $\bar{\sigma}_{p-1}^2, \dots, \bar{\sigma}_{p-1}^{p-3}$; y el problema queda reducido al estudio de coeficientes de polinomios simples y fácilmente manejables. Sin embargo la ventaja obtenida es algo aparente, pues no ha cambiado la naturaleza del criterio y además se han introducido congruencias $\pmod{p^2}$ en lugar de $\pmod{p}$.

Teorema VI. Sean: $p = \text{primo impar}$, $0 \leq r < p-1$, t un entero primo con $p-1$, $0 < t < p-1$, y $n = n(t; r)$ la solución de la congruencia $tn + r \equiv 0 \pmod{p-1}$. Entonces se verifica, cualquiera que sea el entero positivo $s \leq p-1$:

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^{p-1} a^r + 2 \sum_{a=1}^{p-1} a^r E\left(\frac{s^t a^t}{p}\right) &= -2t s^t \sum_{a=1}^{p-1} a^{t+r} \kappa(a) - 2s^t t \kappa(s) \sum_{a=1}^{p-1} a^{t+r} - \\ &\quad - 2s^t W_p \sum_{a=1}^{p-1} a^{t+r} - \delta_n s^{nt} M_{p^{p-n}} \pmod{p} \quad (48) \end{aligned}$$

(*) Si B_{p-3} no es divisible por p la ecuación de Fermat no tiene solución en enteros primos con p (CAUCHY); para detalles ver MIRIMANOFF, *Journal für Math.* 115.

donde $\delta_n = 0$ si $n = 0, 1$ y $\delta_n = 1$ en caso contrario, y $\kappa(a)$, W_p son los cocientes de Fermat y Wilson. En particular para $t = 1$ es $n = -r + p - 1$ y (48) se transforma en

$$\sum_{a=1}^{p-1} a^r + 2 \sum_{a=1}^{p-1} a^r E\left(\frac{sa}{p}\right) \equiv -2s \sum_{a=1}^{p-1} a^{r+1} \kappa(a) - 2s \kappa(s) \sum_{a=1}^{p-1} a^{r+1} - \\ - 2s W_p \sum_{a=1}^{p-1} a^{r+1} - \delta_r s^{-r} M_p^{r+1} \pmod{p} \quad (49)$$

donde $\delta_r = 0$ si $r = 0, p-2$ y $\delta_r = 1$ en los demás casos.

Demostración. — Por definición de δ_n se tiene

$$x^r M_p(x^t) = (M_p^0 x^{tp+r} + M_p^{p-1} x^{t+r}) + (M_p^1 x^{t(p-1)+r} + M_p^p x^r) + \\ + \delta_n M_p^{p-n} x^{nt+r} + \sum'_{i=2}^{p-2} M_p^{p-i} x^{i+r}$$

donde Σ' indica salvo $i = n$. Teniendo en cuenta la congruencia (35) el primer paréntesis del segundo miembro se transforma así (supuesto x entero),

$$M_p^0 x^{tp+r} + M_p^{p-1} x^{t+r} \equiv x^{t+r} \left(\frac{2p}{p!} x^{(p-1)t} + \frac{2p}{p} \right) \equiv \\ \frac{2p x^{t+r}}{(p-1)!} \cdot \frac{(x^t)^{p-1-1+1+(p-1)!}}{p} \equiv \\ \equiv \frac{2x^{t+r}}{-1} (\kappa(x^t) + W_p) = -2x^{t+r} \kappa(x^t) - 2x^{t+r} W_p \pmod{p},$$

y en virtud de (34) el segundo paréntesis es $\equiv 0 \pmod{p}$, en cambio todos los coeficientes M_p^{p-i} de Σ' no contienen a p en el denominador; luego poniendo $x = sa$ y sumando para $a = 1, 2, \dots, p-1$, y observando que $\Sigma_{i+r} \equiv 0$ si $i \neq n$, $\Sigma_{n+r} \equiv -1$, tendremos que

$$\sum_{a=1}^{p-1} (sa)^r M_p(s^t a^t) \equiv -2s^{t+r} \sum_{a=1}^{p-1} a^{t+r} \kappa(at s^t) - 2s^{t+r} W_p \sum_{a=1}^{p-1} a^{t+r} - \\ - \delta_n s^{nt+r} M_p^{p-n} \pmod{p}. \quad (48a)$$

El 1er. miembro de la última congruencia se transforma así: llamando $r(a)$ el resto de $s^t a^t \pmod p$ es decir $s^t a^t = p E(s^t a^t : p) + r(a)$ y teniendo en cuenta (35) tendremos

$$M_p(s^t a^t) = 1 + \sum_{i=2}^p M_p^{p-i}(s^t a^t)^i + M_p^{p-1} \left(p E \left(\frac{s^t a^t}{p} \right) + r(a) \right) \equiv \\ 1 + \sum_{i=1}^p M_p^{p-i}(r(a))^i + \frac{2p}{p} E \left(\frac{s^t a^t}{p} \right) = M_p(r(a)) + \frac{2p}{p} E \left(\frac{s^t a^t}{p} \right)$$

Pero por la permutabilidad es $M_p(r(a)) = M_{r(a)}(p)$ y siendo $r(a) < p$ ninguno de los coeficientes del polinomio $M_{r(a)}(x)$ no tienen a p en su denominador y por tanto $M_{r(a)}(p) \equiv M_{r(a)}(0) = 1$, de modo que la última congruencia viene

$$M_p(s^t a^t) \equiv 1 + 2 E \left(\frac{s^t a^t}{p} \right).$$

Llevando la última congruencia en (48a) y observando que $\chi(a^t s^t) = \chi(a^t) + \chi(s^t)$ y que $\chi(a^t) \equiv t \chi(a)$ (en efecto $[(a^t)^{p-1} - 1] : p = [((a^{p-1} - 1) + 1)^t - 1] : p = [(p \chi(a) + 1)^t - 1] : t \equiv t \chi(a) \pmod p$), resulta la tesis.

Corolarios. La fórmula (48) contiene dos parámetros t, r , y relaciona los cocientes de Fermat y Wilson con $E(a:p)$ y M_p^{p-n} ; el último coeficiente se expresa a su vez (teorema V) por los números de Bernoulli. Dando valores particulares a dichos parámetros se obtienen múltiples relaciones, algunas clásicas y otras posiblemente nuevas. Aquí vamos a examinar tan solo el caso más sencillo: $t=1$, es decir la fórmula (49), dejando al lector analizar otros casos particulares.

Para $r = 2k - 1 \neq p - 2$ la fórmula (49) da, en virtud del teorema V,

$$\sum_{a=1}^{p-1} a^{2k-1} E \left(\frac{sa}{p} \right) \equiv -s \sum_{a=1}^{p-1} a^{2k} \chi(a) - \frac{1}{s^{2k-1}} \cdot \frac{B_{2k}}{2k} \pmod p. \quad (50)$$

En particular para $s=1$ se obtiene de (50) la fórmula de Lerch - Nielsen:

$$\frac{B_{2k}}{2k} \equiv - \sum_{a=1}^{p-1} a^{2k} \chi(a) \pmod p. \quad (51)$$

Llevando (51) en (50) resulta el clásico teorema de Voronoi:

$$\frac{(s^{2k}-1)B_{2k}}{s^{2k-1} 2k} \equiv \sum_{a=1}^{p-1} a^{2k-1} E\left(\frac{sa}{p}\right) \pmod{p}. \quad (52)$$

Para $r=0$ (49) da

$$-1 + 2 \sum_{a=1}^{p-1} E\left(\frac{sa}{p}\right) \equiv -2s \sum_{a=1}^{p-1} a \chi(a) \pmod{p}. \quad (53)$$

Para $r=2k$ es $M_{p^{r+1}} \equiv 0$ (ver (36)) y obtenemos de (49) la relación clásica

$$\sum_{a=1}^{p-1} a^{2k} E\left(\frac{sa}{p}\right) \equiv \sum_{a=1}^{p-1} a^{2k+1} \chi(a) \equiv 0 \pmod{p}. \quad (54)$$

Para $r=p-2$ (49) da

$$2 \sum_{a=1}^{p-1} a^{p-2} E\left(\frac{sa}{p}\right) \equiv -2s \sum_{a=1}^{p-1} \chi(a) + 2s \chi(s) + 2s W_p \pmod{p}. \quad (55)$$

Haciendo en la última congruencia $s=1$ obtenemos la fórmula de Nielsen

$$W_p \equiv \sum_{a=1}^{p-1} \chi(a) \pmod{p}. \quad (56)$$

Llevando (56) en (55) resulta

$$\sum_{a=1}^{p-1} a^{p-2} E\left(\frac{sa}{p}\right) \equiv s \chi(s) \pmod{p}; \quad (57)$$

haciendo $s=2$ y comparando con (47) se obtiene la relación conocida

$$\sum_{a=1}^{p-1} a^{p-2} E\left(\frac{sa}{p}\right) \equiv s(1-2^{p-1}) B_{p-1} \pmod{p}. \quad (58)$$

Así pues, la fórmula (49) reúne en una sola diversas congruencias clásicas.

Teorema VII. Sean, como en el teorema anterior: $p =$ primo impar, $0 \leq r < p-1$, t primo con $p-1$, $0 < t < p-1$, y $n = n(t; r)$ la solución de $tn + r \equiv 0 \pmod{p-1}$. Entonces se verifica, cualquiera que sea el entero positivo $s \leq p-1$:

$$s^r \sum_{a=1}^{p-1} (-1)^{r(as)} a^r \equiv -\delta_n M_{p-1}^{p-1-n} \pmod{p} \quad (59)$$

siendo $r(a) = a - pE(a:p)$ y $\delta_n = 0$ si $n=0$, y $\delta_n = 1$ en caso contrario. En particular para $t=1$ se tiene

$$s^r \sum_{a=1}^{p-1} (-1)^{r(as)} a^r \equiv -\delta_r M_{p-1}^r \pmod{p} \quad (60)$$

siendo $\delta_r = 0$ para $r=0$ y $\delta_r = 1$ en caso contrario.

Demostración. — Por definición de δ_n es

$$x^r M_{p-1}(x^t) = (M_{p-1}^0 x^{(p-1)+r} + M_{p-1}^{p-1} x^r) + \\ + \delta_n M_{p-1}^{p-1-n} x^{nt+r} + \sum_{i=1}^{p-2} M_{p-1}^{p-1-i} x^{it+r}$$

donde $\sum'$ indica salvo $i=n$. Como $M_{p-1}^0 = 2^{p-1} : (p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ y $M_{p-1}^{p-1} = 1$, el primer paréntesis del segundo miembro es $\equiv 0 \pmod{p}$ para $x =$ entero. Luego, poniendo $x = as$ y sumando para $a = 1, \dots, p-1$, tendremos

$$\sum_{a=1}^{p-1} a^r s^r M_{p-1}(at^t st) \equiv -\delta_n M_{p-1}^{p-1-n} \pmod{p}. \quad (60a)$$

Como $r(at^t st) \equiv at^t st \pmod{p}$ y ningún coeficiente de $M_{p-1}(x)$ no contiene a p en su denominador es $M_{p-1}(at^t st) \equiv M_{p-1}(r(at^t st)) \pmod{p}$, luego por la permutabilidad y por ser $M_n(x)$ autoconjugado,

$$M_{p-1}(at^t st) \equiv M_{r(at^t st)}(p-1) = (-1)^{r(at^t st)} M_{r(at^t st)}(-p) \equiv (-1)^{r(at^t st)};$$

llevando la última congruencia en (60a) resulta la tesis.

Corolarios. Para $r=2k$ es $p-1-n$ par y (59) da, teniendo en cuenta que $M_{p-1}^{2m} = 0$ (ver (36)):

$$\sum_{a=1}^{p-1} (-1)^{r(as)} a^{2k} \equiv 0 \pmod{p}. \quad (61)$$

Para $r=2k-1 < p-1$ es $n=2m-1$ impar luego por el teorema IV resulta de (59)

$$s^{2k-1} \sum_{a=1}^{p-1} (-1)^{r(as)} a^{2k-1} \equiv \frac{2(2^{-2m}-1)}{2m+1} B_{p-1-2m} \pmod{p} \quad (62)$$

que para $t=1$ da la fórmula notable

$$s^{2k-1} \sum_{a=1}^{p-1} (-1)^{r(as)} a^{2k-1} \equiv -\frac{2(2^{2k}-1)}{2k} B_{2k} \pmod{p}. \quad (63)$$

Comparando la última fórmula con la de Voronoi (52) vemos que ella tiene la ventaja de que en lugar de $E(as/p)$ figura un factor mucho más simple.

Para $s=1$ resulta de (63) la clásica fórmula de Euler

$$-\frac{2(2^{2k}-1)}{2k} B_{2k} \equiv \sum_{a=1}^{p-1} (-1)^a a^{2k-1}. \quad (64)$$

Para $s=2$ es $E(as:p)=0$ si $a \leq (p-1):2$ y $E(as:p)=1$ si $a > (p-1):2$, luego

$$-2(2^{2k}-1) \frac{B_{2k}}{2k} \equiv 2^{2k} \sum_{a=1}^{(p-1):2} a^{2k-1}; \quad (65)$$

análogamente, haciendo $s=3$, $s=4$, se obtienen las fórmulas:

$$\begin{aligned} -\frac{2(2^{2k}-1)B_{2k}}{2k} &\equiv 3^{2k-1} \left\{ \sum_1^{E(p:3)} (-1)^a a^{2k-1} + \sum_{E(p:3)+1}^{E(2p:3)} (-1)^{a-1} a^{2k-1} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{E(2p:3)+1}^{p-1} (-1)^a a^{2k-1} \right\} \pmod{p} \quad (66) \end{aligned}$$

$$-\frac{2(2^{2k}-1)B_{2k}}{2k} \equiv 2^{4k-1} \left\{ \sum_{a=1}^{E(p:4)} a^{2k-1} - \sum_{a=E(p:4)}^{E(2p:4)} a^{2k-1} \right\}. \quad (67)$$

La combinación de las últimas fórmulas puede llevar tal

vez a consecuencias importantes; pensamos estudiar este asunto en otra oportunidad.

Teorema VIII. Si p es primo impar y $0 < 2k < p-1$, se tiene:

$$\frac{(2k+1)(2^{2k}-1)}{2k} B_{2k} \equiv \sum_{a=1}^{p-1} (-1)^{a+1} M_a a^{-1} a^{2k} \pmod{p} \quad (68)$$

donde en virtud de (31g) es

$$M_a = M_a a^{-1} = 2 \left\{ 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2E(a:2)-1} \right\}.$$

Demostración. — Tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^{p-1} a^{2k} M_{p-1}(a) &= \frac{2^{p-1}}{(p-1)!} \sum_{a=1}^{p-1} a^{p-1+2k} + \sum_{a=1}^{p-1} a^{2k} + M_{p-1}^{2k} \sum_1^{p-1} a^{p-1} + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{p-2} M_{p-1}^{p-1-i} \cdot \sum_{a=1}^{p-1} a^{i+2k} \end{aligned}$$

donde Σ' indica salvo $i=n$. Para i par todo coeficiente M_{p-1}^{p-1-i} que figura en Σ' es $\equiv 0 \pmod{p}$ (ver (36)) y $\Sigma_{i+2k} \equiv 0 \pmod{p}$; para i impar es $\Sigma_{i+2k} \equiv 0 \pmod{p^2}$ (*), luego la sumatoria Σ' es $\equiv 0 \pmod{p^2}$. Los dos primeros sumandos del segundo miembro se transforman $\pmod{p^2}$ así:

$$\begin{aligned} \frac{2^{p-1}}{(p-1)!} \sum_{a=1}^{p-1} a^{p-1+2k} + \sum_1^{p-1} a^{2k} &\equiv - \sum_{a=1}^{p-1} a^{p-1+2k} + \sum_1^{p-1} a^{2k} \equiv \\ &\equiv - \sum_1^{p-1} a^{2k} (a^{p-1} - 1) \equiv - \sum_{a=1}^{p-1} a^{2k} \kappa(a) \cdot p \pmod{p^2} \end{aligned}$$

(*) Esto es consecuencia inmediata de las fórmulas de Newton:

$$\Sigma_n + \sigma_{p-1}^1 \Sigma_{n-1} + \sigma_{p-1}^2 \Sigma_{n-2} + \dots = 0$$

y del teorema de Glaisher citado: $\sigma_{p-1}^{2k+1} \equiv 0 \pmod{p^2}$ (ver la demostración al principio de este §).

y en virtud de (51) la última expresión es $\equiv pB_{2k}/2k \pmod{p^2}$.
Luego tendremos

$$\sum_{a=0}^{p-1} a^{2k} M_{p-1}(a) \equiv p \frac{B_{2k}}{2k} - M_{p-1}^{2k} \pmod{p^2}. \quad (68a)$$

Por la permutabilidad y por ser $M_n(x)$ autoconjugado es

$$\begin{aligned} M_{p-1}(a) &= M_a(p-1) = (-1)^a M_a(-p) \\ &\equiv (-1)^a [-M_a^{a-1} p + 1] \pmod{p^2} \end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{a=1}^{p-1} a^{2k} M_{p-1}(a) \equiv p \cdot \sum_{a=1}^{p-1} (-1)^{a+1} M_a^{a-1} \cdot a^{2k} + \sum_{a=1}^{p-1} (-1)^a a^{2k}. \quad (68b)$$

La última suma se transforma así:

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^{p-1} (-1)^a a^{2k} &= \sum_1^{(p-1):2} (-1)^a [a^{2k} - (p-a)^{2k}] \\ &\equiv 2k \sum_1^{(p-1):2} (-1)^a p a^{2k-1} \pmod{p^2} \end{aligned}$$

luego de (68b) y (68a) obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^{p-1} (-1)^{a+1} M_a^{a-1} \cdot a^{2k} + 2k \sum_1^{(p-1):2} (-1)^a a^{2k-1} \\ \equiv \frac{B_{2k}}{2k} - \frac{M_{p-1}^{2k}}{p} \pmod{p}. \quad (68c) \end{aligned}$$

En virtud de (64) es

$$2 \sum_1^{(p-1):2} (-1)^a a^{2k-1} \equiv \sum_1^{p-1} (-1)^a a^{2k-1} \equiv -\frac{2(2^{2k}-1)}{2k} B_{2k}$$

y en virtud del teorema V es (ver (31f))

$$\frac{M_{p-1}^{2k}}{p} = \frac{M_p^{2k+1}}{p} \equiv -\frac{2^{2k}-2}{2k} B_{2k} \pmod{p}$$

y substituyendo en (68c) resulta la tesis.

Nota. — Análogamente al teorema VII también aquí se puede calcular $(sa)^{2k} M_{p-1}(as)$ en lugar de $a^{2k} M_{p-1}(a)$ y se obtendrá entonces una generalización de la fórmula (68) que contendrá un parámetro arbitrario s , pero los cálculos se complican considerablemente.

En todos los teoremas anteriores hemos trabajado con los polinomios $M_n(x)$ únicamente. Aplicando los mismos razonamientos a los polinomios $\varphi_n(x)$ y $g_n(x)$ se establecen relaciones entre los números de Bernoulli y los coeficientes de estos polinomios. Para no complicar la exposición vamos a reunir dichas relaciones en el teorema siguiente omitiendo su demostración, ya que el camino a seguir es siempre el mismo: haciendo uso de la permutabilidad se cambian las sumatorias del tipo $(sa)^n \sum_{a=1}^{p-1} f_k(a)$ por las del tipo $(sa)^n \sum_{a=1}^{p-1} f_a(k)$ y se aplican las congruencias de los coeficientes dadas en los teoremas I, II y III.

Teorema IX. Sea $p = \text{primo impar}$, $0 < 2n < p-1$, $F_p = (f_p + 1):p$, $\Phi_p = (g_p^{p-1} + 1):p$ (en virtud de (32) F_p, Φ_p son enteros) y $0 < s < p$, $m > 0$. Entonces se verifican las congruencias siguientes:

$$\sum_{a=1}^{p-1} a^{p-2} g_p(-as) \equiv sp [\Phi_p + \kappa(s) - W_p] \pmod{p^2} \quad (69)$$

$$\sum_{a=1}^{p-1} a^{2n-1} g_p(-as) \equiv s^{p-2n} g_p^{2n} - s \cdot s_{p-1}^{2n} - \Sigma_{2n-1} \pmod{p^2} \quad (69a)$$

$$\sum_{a=1}^{p-1} a^{2n} g_p(-as) \equiv -s^{p-1-2n} g_p^{2n+1} - \Sigma_{2n} \pmod{p^2} \quad (69b)$$

$$\sum_{a=1}^{p-1} a^{p-1} g_p(-as) \equiv -\frac{s-1}{2} p - p F_p - \Sigma_{p-1} \pmod{p^2} \quad (69c)$$

$$\sum_{a=1}^{p-1} a^{2n-1} \varphi_{as-1} \equiv s \frac{\bar{\sigma}_{p-1}^{2n}}{p} - \frac{1}{s^{2n-1}} \cdot \frac{g_p^{2n}}{p} \pmod{p} \quad (70)$$

$$\sum_{a=1}^{p-1} a^{p-2} \varphi_{as-1} \equiv s [W_p - \Phi_p - \kappa(s)] \pmod{p} \quad (70a)$$

$$\sum_{a=1}^{p-1} a^{2n} \varphi_{as-1} \equiv \frac{1}{s^{2n}} \cdot \frac{g_p^{2n+1}}{p} \pmod{p} \quad (70b)$$

$$\sum_{a=1}^{p-1} a^{p-1} \varphi_{a-1} \equiv \frac{1}{2} (s-1) + F_p \equiv \frac{1}{2} (s-1) + \sum_1^{p-1} \varphi_{a-1} \pmod{p} \quad (70c)$$

$$\sum_{a=1}^{p-1} a^{2n} \varphi_{as} \equiv -\frac{1}{s^{2n}} [\bar{\sigma}_{p-2}^{2n} + \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{p-3}^{2n-1} + \dots] \pmod{p} \quad (71)$$

$$\sum_{a=1}^{p-1} a^{p-1} \varphi_{as} \equiv -\frac{s+1}{2} \pmod{p} \quad (71a)$$

$$\sum_{a=1}^{p-1} (-1)^{as} f_{a-1} \equiv \sum_{a=1}^{p-1} (-1)^a f_{a-1} \equiv -1 + F_p \pmod{p} \quad (72)$$

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^{p-1} (-1)^{as} a^{2n-1} f_{a-1} &\equiv \\ \frac{1}{s^{2n-1}} &\left[\frac{\bar{\sigma}_{p-1}^{2n} - g_p^{2n}}{p} - (\bar{\sigma}_{p-2}^{2n-1} + \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{p-3}^{2n-2} + \dots) \right] \end{aligned} \quad (72a)$$

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^{p-1} (-1)^{as} a^{2n} f_{a-1} &\equiv \sum_{a=1}^{p-1} (-1)^a a^{2n} f_{a-1} \equiv \\ \frac{1}{s^{2n}} &\left[\frac{g_p^{2n+1}}{p} - \bar{\sigma}_{p-1}^{2n} - \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{p-2}^{2n-1} - \dots \right] \end{aligned} \quad (72b)$$

$$\begin{aligned} (-1)^n \sum_{a=1}^{p-1} a^{2n-1} \varphi_{a+m-1} &\equiv s \cdot \frac{\bar{\sigma}_{p-1}^{2n}}{p} - \frac{1}{s^{2n-1}} \cdot \frac{g_p^{2n}}{p} \\ &+ \frac{1}{s^{2n-1}} [C_m^1 g_{p-1}^{2n-1} + C_m^2 \cdot 1! g_{p-2}^{2n-2} + \dots] \end{aligned} \quad (73)$$

$$\begin{aligned} (-1)^m \sum_{a=1}^{p-1} a^{p-2} \varphi_{a+m-1} &\equiv s \Phi_p + s k(s) - s W_p - s [C_m^1 g_{p-1}^{p-2} + \\ &C_m^2 \cdot 1! g_{p-2}^{p-3} + C_m^3 2! g_{p-3}^{p-4} + \dots] \end{aligned} \quad (73a)$$

$$\begin{aligned} (-1)^m \sum_{a=1}^{p-1} a^{2n} \varphi_{a+m-1} &\equiv \frac{1}{s^{2n}} \left[\frac{g_p^{2n+1}}{p} + C_m^1 g_{p-1}^{2n} + C_m^2 g_{p-2}^{2n-1} + \dots \right] \\ &\quad (74) \end{aligned}$$

$$(-1)^m \sum_{a=1}^{p-1} a^{p-1} \varphi_{a+m-1} \equiv \frac{1}{2} (s-1) + F_p - m \pmod{p}. \quad (75)$$

Sustituyendo en todas estas fórmulas los coeficientes φ_n y g_n^k por sus expresiones (31) se obtendrán múltiples relaciones entre los coeficientes factoriales y los números de Bernoulli.

Terminaremos observando que las propiedades de los polinomios $M_n(x)$ permiten también deducir y generalizar de un modo natural las congruencias de Glaisher que E. Lehmer extendió en su trabajo citado. Así, por ej., como $M_{p-1}^{2r} \equiv 0$ para $2r \leq p-3$, se tiene:

$$\begin{aligned} M_{p-1}^{(p-2k)}(-x-1) &\equiv -M_{p-1}^{(p-2k)}(x) \\ &\equiv -M_{p-1}^{(p-2k)}(-x) + 2(p-2k)! x^{2k-1} \\ M_{p-1}^{(p-2k)}\left(-\frac{p}{2}\right) &\equiv -M_{p-1}^{(p-2k)}\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &\quad - 2(p-2k)! \sum_{r=1}^{(p-1)/2} (-1)^r \left(-\frac{1}{2} + r\right)^{2k-1}; \end{aligned}$$

pero

$$M_{p-1}^{(p-2k)}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \text{ y, por el teor. IV,}$$

$$M_{p-1}^{(p-2k)}\left(-\frac{p}{2}\right) \equiv M_{p-1}^{(p-2k)}(0) \equiv (p-2k)! \frac{2(2^{2k}-1)}{2k} B_{2k};$$

luego resulta la fórmula de Glaisher

$$\sum_{v=1}^{(p-1)/2} (-1)^{r-1} (2r-1)^{2k-1} \equiv 2^{2k-1} \frac{2(2^{2k}-1)}{2k} B_{2k}.$$

Considerando, en vez de la derivada $(p-2k)$ -ma, la integral de $M_n(x)$ de orden $p-2k$, se llega a fórmulas que no figuran en la memoria de Lehmer.

SUL PROBLEMA DI NEUMANN-DINI PER LA STRISCIA PIANA INDEFINITA

di

CARLO BIRINDELLI

Introduzione

In questa nota si viene mostrando come col metodo delle «transformate» ⁽¹⁾ sia consentito risolvere il problema di Neumann-Dini per la striscia sotto condizioni di estrema generalità per quel che concerne il comportamento all'infinito della soluzione. In una successiva verrà soprattutto messo in evidenza come la considerazione e dei casi particolari del problema generale qui trattato implichi la necessità di imporre condizioni restrittive ai dati affinché valgano alcune necessarie notevoli condizioni integrali.

1. — Assegnata la striscia aperta T illimitata del piano per cui la frontiera FT sia costituita dalle due rette $y=0$, $y=a$, con $a>0$, sia assegnata una funzione $f(x, y)$ continua e localmente Hölderiana in $T+FT$ e due funzione $\gamma_0(x)$, $\gamma(x)$, continue in ogni intervallo finito dell'asse x .

Si cercano le funzioni $u(x, y)$ soddisfacenti la equazione

$$\Delta_2 u(x, y) = f(x, y)$$

in T , con $u(x, y)$ e $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$ continue in $T+FT$ e con $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2}$ continue in T , richiedendo che $u(x, y)$ abbia

⁽¹⁾ M. PICONE, *Appunti di Analisi Superiore*, p.p. 775-793; Rondinella, Napoli, 1940.

la $\frac{\partial u}{\partial y}$ eguale alla $\gamma_0(x)$ quando $y=0$ ed eguale invece a $-\gamma(x)$ quando $y=a$, mentre il comportamento all' ∞ richiesto per la soluzione è espresso da condizioni estremamente larghe che più oltre preciseremo.

2. — Procederemo applicando il «metodo delle trasformate». Poichè non è noto il comportamento di $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, lungo FT, conviene in un primo tempo studiare il problema sulla striscia $T_\varepsilon < T$ con FT_ε data da $y=\varepsilon, y=a-\varepsilon$.

Cerchiamo le funzioni $v(y, \varepsilon)$ autosoluzioni della equazione

$$(1) \quad \frac{d^2 v}{dy^2} + \lambda v = 0$$

con le condizioni ai limiti

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dv}{dy} = 0, & \text{per } y = \varepsilon \\ \frac{dv}{dy} = 0, & \text{per } y = a - \varepsilon. \end{cases}$$

La soluzione generale di (1) è

$$(3) \quad v(y, \varepsilon) = A \cdot e^{\sqrt{-\lambda} \cdot y} + B \cdot e^{-\sqrt{-\lambda} \cdot y}$$

e le (2) divengono

$$\begin{aligned} \sqrt{-\lambda} \cdot A \cdot e^{\sqrt{-\lambda} \cdot \varepsilon} - \sqrt{-\lambda} \cdot B \cdot e^{-\sqrt{-\lambda} \cdot \varepsilon} &= 0, \\ \sqrt{-\lambda} \cdot A \cdot e^{\sqrt{-\lambda} \cdot (a-\varepsilon)} - \sqrt{-\lambda} \cdot B \cdot e^{-\sqrt{-\lambda} \cdot (a-\varepsilon)} &= 0, \end{aligned}$$

e di qui si vede come gli autovalori siano dati dai numeri $\lambda_0=0$, $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a-2\varepsilon}\right)^2$ per $n \geq 1$, positivi crescenti. Si trova in corrispondenza, con un facile calcolo, un sistema di autosoluzioni

$$\begin{aligned}
 (3') \quad v_0(y, \varepsilon) &= A'_0, \\
 v_n(y, \varepsilon) &= A'_n \cdot \left[\cos \left(\frac{n\pi y}{a-2\varepsilon} \right) + \operatorname{tg} \left(\frac{n\pi \varepsilon}{a-2\varepsilon} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{a-2\varepsilon} \right) \right] = \\
 &= A''_n \cos \left(\frac{n\pi(y-\varepsilon)}{a-2\varepsilon} \right).
 \end{aligned}$$

Moltiplichiamo i due membri della

$$\Delta_2 u(x, y) = f(x, y)$$

per $v_n(y, \varepsilon)$, nei casi di $n \geq 1$, e poi integriamo rispetto ad y fra ε ed $a - \varepsilon$.

Si ha

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \int_{\varepsilon}^{a-\varepsilon} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot v_n(y, \varepsilon) \cdot dy + \int_{\varepsilon}^{a-\varepsilon} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot v_n(y, \varepsilon) \cdot dy = \\
 = \int_{\varepsilon}^{a-\varepsilon} f(x, y) \cdot v_n(y, \varepsilon) \cdot dy,
 \end{aligned}$$

e qui, ponendo

$$\begin{aligned}
 (5) \quad \int_{\varepsilon}^{a-\varepsilon} f(x, y) \cdot v_n(y, \varepsilon) \cdot dy &= f_n(x, \varepsilon), \\
 \int_{\varepsilon}^{a-\varepsilon} u(x, y) \cdot v_n(y, \varepsilon) \cdot dy &= u_n(x, \varepsilon),
 \end{aligned}$$

avremo, tenendo presente la (1),

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 u_n(x, \varepsilon)}{dx^2} + \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cdot v_n(y, \varepsilon) \right]_{\varepsilon}^{a-\varepsilon} - \int_{\varepsilon}^{a-\varepsilon} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{dv_n(y, \varepsilon)}{dy} \cdot dy = \\
 = \frac{d^2 u_n(x, \varepsilon)}{dx^2} + \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cdot v_n(y, \varepsilon) - u(x, y) \cdot \frac{dv_n(y, \varepsilon)}{dy} \right]_{\varepsilon}^{a-\varepsilon}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{\varepsilon}^{a-\varepsilon} u(x, y) \cdot \frac{d^2 v_n(y, \varepsilon)}{dy^2} \cdot dy = \\
 & = \frac{d^2 u_n(x, \varepsilon)}{dx^2} + \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} v_n(y, \varepsilon) - u(x, y) \cdot \frac{dv_n(y, \varepsilon)}{dy} \right]_{\varepsilon}^{a-\varepsilon} - \lambda_n \cdot u_n(x, \varepsilon) \\
 & = f_n(x, \varepsilon).
 \end{aligned}$$

Ma, per le (2),

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cdot v_n(y, \varepsilon) - u(x, y) \cdot \frac{dv_n(y, \varepsilon)}{dy} \right]_{\varepsilon}^{a-\varepsilon} = \\
 & = -\gamma(x) \cdot v_n(a-\varepsilon, \varepsilon) - \gamma_0(x) \cdot v_n(\varepsilon, \varepsilon).
 \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned}
 (6) \quad \frac{d^2 u_n(x, \varepsilon)}{dx^2} - \lambda_n \cdot u_n(x, \varepsilon) &= \gamma(x) \cdot v_n(a-\varepsilon, \varepsilon) + \\
 &+ \gamma_0(x) \cdot v_n(\varepsilon, \varepsilon) + f_n(x, \varepsilon)
 \end{aligned}$$

la cui soluzione generale è ($n \geq 1$)

$$\begin{aligned}
 (7) \quad u_n(x, \varepsilon) &= C_n \cdot e^{\sqrt{\lambda_n} \cdot x} + D_n \cdot e^{-\sqrt{\lambda_n} \cdot x} + \\
 &+ \int_0^x \frac{-1}{2\sqrt{\lambda_n}} [\gamma_0(s) \cdot v_n(\varepsilon, \varepsilon) + \gamma(s) \cdot v_n(a-\varepsilon, \varepsilon) + \\
 &+ \int_{\varepsilon}^{a-\varepsilon} f(s, t) \cdot v_n(t, \varepsilon) dt] \cdot e^{\sqrt{\lambda_n} \cdot (s-x)} \cdot ds - \\
 &- \int_0^x \frac{-1}{2\sqrt{\lambda_n}} [\gamma_0(s) \cdot v_n(\varepsilon, \varepsilon) + \gamma(s) \cdot v_n(a-\varepsilon, \varepsilon) + \\
 &+ \int_{\varepsilon}^{a-\varepsilon} f(s, t) \cdot v_n(t, \varepsilon) dt] \cdot e^{\sqrt{\lambda_n} \cdot (x-s)} \cdot ds.
 \end{aligned}$$

Effettuando il passaggio al limite in (3) e in (7) facendo tendere ε a 0, dopo avere normalizzato il sistema ortogonale delle $v_n(y, 0) = v_n(y)$ e avere ottenuto

$$v_0(y) = \frac{1}{\sqrt{a}}, \quad v_n(y, 0) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \quad \text{per } n \geq 1,$$

e dopo aver posto $u_n(x, 0) = u_n(x)$, si ottiene che è

$$\begin{aligned} (7') \quad u_n(x) = & C_n \cdot e^{\frac{n\pi x}{a}} + D_n \cdot e^{-\frac{n\pi x}{a}} + \\ & + \int_0^x \frac{-1}{n\pi} \sqrt{\frac{a}{2}} \cdot [\gamma_0(s) + (-1)^n \cdot \gamma(s) + \int_0^a f(s, t) \cdot \cos\left(\frac{n\pi t}{a}\right) dt] e^{\frac{n\pi(s-x)}{a}} \cdot ds \\ & - \int_0^x \frac{-1}{n\pi} \sqrt{\frac{a}{2}} \cdot [\gamma_0(s) + (-1)^n \cdot \gamma(s) + \int_0^a f(s, t) \cdot \cos\left(\frac{n\pi t}{a}\right) dt] e^{\frac{\pi n(x-s)}{a}} \cdot ds. \end{aligned}$$

Lo stesso procedimento, svolto nel caso di $n=0$, porta, in relazione all'autovalore $\lambda_0=0$, dopo avere fatto tendere ε a 0, alla equazione

$$(8) \quad \frac{d^2 u_0(x)}{dx^2} = \frac{1}{\sqrt{a}} [\gamma_0(x) + \gamma(x) + \int_0^a f(x, y) dy]$$

il cui integrale generale è

$$\begin{aligned} (9) \quad u_0(x) = & C_0 + D_0 \cdot x + \\ & + \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^x [\gamma_0(s) + \gamma(s) + \int_0^a f(s, t) dt] \cdot (x-s) \cdot ds. \end{aligned}$$

Posto per $n \geq 1$

$$\frac{-1}{n\pi} \sqrt{\frac{a}{2}} \cdot [\gamma_0(s) + (-1)^n \cdot \gamma(s) + \int_0^a f(s, t) \cdot \cos\left(\frac{n\pi t}{a}\right) \cdot dt] = F_n(s),$$

per $n=0$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} [\gamma_0(s) + \gamma(s) + \int_0^a f(s, t) dt] = F_0(s),$$

si può scrivere

$$u_n(x) = C_n \cdot e^{\frac{n\pi x}{a}} + D_n \cdot e^{-\frac{n\pi x}{a}} + \\ + \int_0^x F_n(s) \cdot e^{\frac{n\pi(s-x)}{a}} \cdot ds - \int_0^x F_n(s) \cdot e^{\frac{n\pi(x-s)}{a}} \cdot ds,$$

per $n \geq 1$, e

$$u_0(x) = C_0 + D_0 \cdot x + \int_0^x F_0(s) \cdot (x-s) \cdot ds$$

per $n=0$,

3. — L'integrale generale della equazione $\Delta_2 u(x, y) = f(x, y)$ è

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(y) \cdot u_n(x)$$

qualora, il che faremo nel corso di questo lavoro, sia possibile stabilire la effettiva convergenza in $T+FT$ di questo sviluppo in serie determinando le costanti C_n e D_n in maniera che ciò avvenga e in modo che oltre valere l'equazione $\Delta u = f$ siano soddisfatte le note condizioni al contorno con in più quelle che imponremo pel comportamento della soluzione per $|x| \rightarrow +\infty$.

Lemma I. — Sia $g(s)$ una funzione continua in ogni intervallo finito e sia $\lim_{s \rightarrow +\infty} g(s) = 0$.

Se a è una costante positiva è

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x g(s) \cdot e^{a \cdot (s-x)} \cdot ds = 0.$$

Così pure è

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^0 g(s) \cdot e^{\alpha \cdot (x-s)} \cdot ds = 0 \quad \text{se} \quad \lim_{s \rightarrow -\infty} g(s) = 0.$$

Infatti per $s \geq x(\epsilon)$, con $x(\epsilon)$ abbastanza grande, è $|g(s)| < \epsilon$, mentre risulta per ogni $|g(s)| < L$ se $L > 0$ è scelto opportunamente grande. Si ha, se $x > x(\epsilon)$,

$$\begin{aligned} \int_0^x |g(s)| \cdot e^{\alpha(s-x)} \cdot ds &< L \cdot \int_0^{x(\epsilon)} e^{\alpha(s-x)} \cdot ds + \epsilon \cdot \int_0^\infty e^{\alpha(s-x)} \cdot ds \\ &< L \cdot e^{\alpha(x(\epsilon)-x)} \cdot x(\epsilon) + \frac{\epsilon}{\alpha}, \end{aligned}$$

da cui facilmente l'asserto,

4. — Ciò premesso cominciamo con l'affrontare il problema della ricerca delle costanti C_0 e D_0 , imponendo che sia

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x, y) \cdot e^{-\frac{\pi}{a}|x|} = 0$$

uniformemente per gli y di $(0, a)$. Riferendoci alla (9) relativa all'autovalore $\lambda_0 = 0$ e tenendo conto della relazione

$$u_0(x) = \int_0^a u(x, y) \cdot v_0(y) \cdot dy = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^a u(x, y) \cdot dy,$$

e della

$$u_0(x) = C_0 + D_0 \cdot x + \int_0^x F_0(s) \cdot (x-s) \cdot ds$$

si ha che per la $u_0(x)$ deve supporsi essere

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u_0(x) \cdot e^{-\frac{\pi}{a}|x|} = 0$$

e affinchè ciò avvenga occorre e basta che $F_0(s)$ sia tale che sussista la

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \int_0^x F_0(s) \cdot e^{-\frac{\pi}{a}|x|} \cdot (x-s) \cdot ds = 0.$$

E facile stabilire come quest'ultima relazione sia effettivamente valida qualora $F_0(s)$ sia tale che esistano due numeri positivi

δ' e δ'' entrambi minori di $\frac{\pi}{a}$ per cui sia

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_0(x) \cdot e^{-\delta' x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} F_0(x) \cdot e^{\delta'' x} = 0.$$

Infatti

$$\begin{aligned} & \int_0^x |F_0(s)| \cdot e^{-\frac{\pi}{a}x} \cdot (x-s) \cdot ds \\ &= \int_0^x |F_0(s)| \cdot e^{-\delta' s} \cdot e^{\delta' (s-x)} \cdot e^{-(\frac{\pi}{a}-\delta')x} \cdot (x-s) \cdot ds \\ &< \int_0^x |F_0(s)| \cdot e^{-\delta' s} \cdot e^{\delta' (s-x)} \cdot e^{-(\frac{\pi}{a}-\delta')x} \cdot x \cdot ds \\ &= \frac{x}{e^{(\frac{\pi}{a}-\delta')x}} \cdot \int_0^x |F_0(s)| \cdot e^{-\delta' s} \cdot e^{\delta' (s-x)} \cdot ds \end{aligned}$$

e, per essere $g(s) = |F_0(s)| \cdot e^{-\delta' s} \rightarrow 0$ per $s \rightarrow +\infty$, l'ultimo membro tende a 0 quando $x \rightarrow +\infty$, in forza del Lemma I.

Analogamente per l'altro caso.

Possiamo dunque concludere che se per due numeri positivi δ' e δ'' entrambi minori di $\frac{\pi}{a}$, le funzioni $\gamma_0(x)$, $\gamma(x)$, $f(x, y)$ soddisfano le condizioni

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \gamma_0(x) \cdot e^{-\delta' x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \gamma(x) \cdot e^{-\delta' x} \\ (*) \quad &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, y) \cdot e^{-\delta' x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \gamma_0(x) \cdot e^{\delta'' x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \gamma(x) \cdot e^{\delta'' x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x, y) \cdot e^{\delta'' x} = 0 \end{aligned}$$

uniformemente per gli y di $(0, a)$, allora risulta

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u_0(x) \cdot e^{-\frac{\pi}{a}|x|} = 0$$

quando nella espressione solita di $u_0(x)$ si attribuiscono valori affatto arbitrari alle costanti C_0 e D_0 . In altre parole $u_0(x)$ resta definito a meno di un termine lineare in x coi due coefficienti C_0 e D_0 affatto arbitrari.

Passiamo alla ricerca delle costanti C_n e D_n riferendoci alla (7') relativa agli autovalori λ_n per $n \geq 1$, tenendo conto della relazione

$$u_n(x) = \int_0^a u(x, y) \cdot v_n(y) \cdot dy = \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \int_0^a u(x, y) \cdot \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cdot dy.$$

Si ha, per $x > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{u_n(x)}{e^{\frac{\pi}{a}x}} &= \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \int_0^a \frac{u(x, y)}{e^{\frac{\pi}{a}x}} \cdot \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cdot dy = C_n \cdot e^{\frac{(n-1)\pi}{a}x} + \\ &+ D_n \cdot e^{-\frac{(n+1)\pi}{a}x} + \int_0^x F_n(s) \cdot e^{-\frac{\pi}{a}s} \cdot e^{\frac{(n+1)\pi}{a}(s-x)} \cdot ds - \\ &- \int_0^x F_n(s) \cdot e^{-\frac{\pi}{a}s} \cdot e^{\frac{(n-1)\pi}{a}(x-s)} \cdot ds \end{aligned}$$

ove, per le (*), essendo $\lim_{s \rightarrow +\infty} F_n(s) \cdot e^{-\frac{\pi}{a}s} = 0$, il secondo e terzo addendo del secondo membro tendono a 0 per $n \rightarrow +\infty$, per il Lemma I. Se si vuole che sia $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x, y) \cdot e^{-\frac{\pi}{a}|x|} = 0$ uniformemente rispetto agli y di $(0, a)$, si deve avere $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u_n(x) \cdot e^{-\frac{\pi}{a}|x|} = 0$. Affinchè ciò sia si deve ricercare la costante C_n in modo da essere

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{C_n - \int_0^x F_n(s) \cdot e^{-\frac{n\pi}{a}s} \cdot ds}{e^{-\frac{(n-1)\pi}{a}x}} = 0$$

e se $n > 1$, siccome per le (*) risulta certo convergente l' $\int_0^{+\infty} F_n(s) \cdot e^{-\frac{n\pi s}{a}} \cdot ds$, bisogna intanto porre

$$C_n = \int_0^{+\infty} F_n(s) \cdot e^{-\frac{n\pi s}{a}} \cdot ds$$

e osservare poi che il teorema di L'Hospital dà

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^{+\infty} F_n(s) \cdot e^{-\frac{n\pi}{a}s} \cdot ds}{e^{-\frac{(n-1)\pi}{a}x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-F_n(x) \cdot e^{-\frac{n\pi}{a}x}}{-\frac{(n-1)\pi}{a} \cdot e^{-\frac{(n-1)\pi}{a}x}} \\ &= \frac{a}{(n-1)\pi} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x) \cdot e^{-\frac{\pi}{a}x} \end{aligned}$$

ch'è appunto lo 0, sotto le condizioni (*). Per il caso di $n=1$ vale il medesimo risultato ponendo $C_1 = \int_0^{+\infty} F_1(s) \cdot e^{-\frac{\pi}{a}s} \cdot ds$; questo integrale è d'altronde convergente sotto le condizioni (*).

Per x negativo si ha

$$\begin{aligned} u_n(x) \cdot e^{\frac{\pi}{a}x} &= C_n \cdot e^{\frac{(n+1)\pi}{a}x} + D_n \cdot e^{-\frac{(n-1)\pi}{a}x} + \\ &+ \int_0^x F_n(s) \cdot e^{\frac{\pi}{a}s} \cdot e^{-\frac{(n-1)\pi}{a}(x-s)} \cdot ds - \\ &- \int_0^x F_n(s) \cdot e^{\frac{\pi}{a}s} \cdot e^{\frac{(n+1)\pi}{a}(x-s)} \cdot ds = C_n \cdot e^{\frac{(n+1)\pi}{a}x} + \\ &+ D_n \cdot e^{-\frac{(n-1)\pi}{a}x} + \int_0^x F_n(s) \cdot e^{\frac{\pi}{a}s} \cdot e^{\frac{(n-1)\pi}{a}(s-x)} \cdot ds + \\ &- \int_0^x F_n(s) \cdot e^{\frac{\pi}{a}s} \cdot e^{\frac{(n+1)\pi}{a}(x-s)} \cdot ds, \end{aligned}$$

e qui, col solito ragionamento, facendo tendere x a $-\infty$, si vede

che il primo e quarto addendo dell'ultimo membro tendono a 0.
Si deve cercare la costante D_n in modo che sia

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{D_n - \int_{-\infty}^0 F_n(s) \cdot e^{\frac{n\pi}{a}s} \cdot ds}{e^{\frac{(n-1)\pi}{a}x}} = 0.$$

Poichè per le (*) è convergente

$$\int_{-\infty}^0 F_n(s) \cdot e^{\frac{n\pi}{a}s} \cdot ds,$$

bisogna, per $n > 1$, porre

$$D_n = \int_{-\infty}^0 F_n(s) \cdot e^{\frac{n\pi}{a}s} \cdot ds$$

per ottenere poi col teorema di L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\int_{-\infty}^x F_n(s) \cdot e^{\frac{n\pi}{a}s} \cdot ds}{e^{\frac{(n-1)\pi}{a}x}} = \frac{a}{(n-1)\pi} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} F_n(x) \cdot e^{\frac{\pi}{a}x}$$

ch'è appunto lo 0 sotto le condizioni (*). Pel caso di $n=1$

bisogna porre $D_1 = \int_{-\infty}^0 F_1(s) \cdot e^{\frac{\pi}{a}s} \cdot ds$, onde avere il medesimo

risultato; questo integrale è d'altronde convergente sotto le condizioni (*).

Se ne conclude che sotto le condizioni () tutte le $u_n(x)$ sono definite in modo univoco per tutti gli $n \geq 1$ e si ha per esse l'espressione seguente*

$$u_n(x) = \int_x^{+\infty} F_n(s) \cdot e^{\frac{n\pi(x-s)}{a}} \cdot ds + \int_{-\infty}^x F_n(s) \cdot e^{\frac{n\pi(s-x)}{a}} \cdot ds,$$

e risulta, per il ragionamento fatto, che è, uniformemente rispetto alla classe degli $n \geq 0$,

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u_n(x) \cdot e^{-\frac{\pi}{a}|x|} = 0.$$

Si ha dunque che

$$(10) \quad u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(y) \cdot u_n(x) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \cdot [C_0 + D_0 x + \int_0^x F_0(s) \cdot (x-s) \cdot ds] +$$

$$\sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cdot \left[\int_{-\infty}^x F_n(s) \cdot e^{\frac{n\pi(s-x)}{a}} \cdot ds + \int_x^{+\infty} F_n(s) \cdot e^{\frac{n\pi(x-s)}{a}} \cdot ds \right]$$

e la $u(x, y)$ resta definita a meno delle due sole costanti arbitrarie C_0 e D_0 , cioè a meno di un termine lineare in x .

Tenendo conto che nella espressione di $F_n(s)$ vi è a denominatore il numero n e tenendo presente che le $\gamma_0(s)$, $\gamma(s)$, $f(s, t)$ debbono soddisfare le condizioni (*), è chiaro che si può scegliere un numero L positivo opportunamente grande affinché avvenga che, preso δ soddisfacente alla limitazione

$$\left. \begin{matrix} \delta' \\ \delta'' \end{matrix} \right\} < \delta < \frac{\pi}{a},$$

per ogni n ed ogni s sia

$$|F_n(s)| < \frac{L}{n} e^{\delta|s|}.$$

Ne risulta, ad es. per x positivo,

$$\begin{aligned}
 |u_n(x) \cdot v_n(y)| &< \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \left[\frac{L}{n} \cdot e^{-\frac{n\pi x}{a}} \cdot \int_{-\infty}^0 e^{-\delta s + \frac{n\pi s}{a}} \cdot ds + \right. \\
 &+ \frac{L}{n} e^{\delta x} \cdot \int_0^x e^{\delta(s-x) + \frac{n\pi(s-x)}{a}} \cdot ds + \frac{L}{n} e^{\delta x} \cdot \int_x^{+\infty} e^{\delta(s-x) + \frac{n\pi(x-s)}{a}} \cdot ds \Big] = \\
 &= \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \frac{L}{n} \cdot \left[e^{-\frac{n\pi x}{a}} \int_{-\infty}^0 e^{(\frac{n\pi}{a} - \delta)s} \cdot ds + e^{\delta x} \cdot \int_0^x e^{(\delta + \frac{n\pi}{a})(s-x)} \cdot ds + \right. \\
 &+ \left. e^{\delta x} \cdot \int_x^{+\infty} e^{(\frac{n\pi}{a} - \delta)(x-s)} \cdot ds \right] < \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \frac{L}{n} \cdot \left[\frac{e^{-\frac{n\pi x}{a}}}{\frac{n\pi}{a} - \delta} + \frac{e^{\delta x}}{\frac{n\pi}{a} + \delta} + \frac{e^{\delta x}}{\frac{n\pi}{a} - \delta} \right].
 \end{aligned}$$

Se ne conclude, confrontando con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(y) \cdot u_n(x)$ è assolutamente e uniformemente convergente in ogni dominio limitato di $T+FT$ e rappresenta in $T+FT$ una funzione continua $u(x, y)$. La presenza di $e^{\delta x}$ nella espressione maggiorante dei termini $|v_n(y) \cdot u_n(x)|$ con $n \geq 1$, come pure il fatto di essere $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u_0(x) \cdot e^{-\frac{\pi}{a}|x|} = 0$, ci permette di affermare (ripetendo il ragionamento per $x < 0$) che

$$\begin{aligned}
 |u(x, y)| \cdot e^{-\frac{\pi}{a}|x|} &< \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left[\frac{1 + e^{-(\frac{n\pi}{a} + \delta)|x|}}{\frac{n\pi}{a} - \delta} + \frac{1}{\frac{n\pi}{a} + \delta} \right] \right\} \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot L \cdot e^{(\delta - \frac{\pi}{a})|x|} \\
 &+ \frac{1}{\sqrt{a}} |u_0(x)| \cdot e^{-\frac{\pi}{a}|x|},
 \end{aligned}$$

e quindi, per la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\frac{2}{\frac{n\pi}{a} - \delta} + \frac{1}{\frac{n\pi}{a} + \delta} \right],$$

che è, uniformemente rispetto agli y di $(0, a)$,

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x, y) \cdot e^{-\frac{\pi}{a}|x|} = 0$$

per la $u(x, y)$ somma della serie (10). Se ne conclude che.

Sotto le condizioni (), la somma $u(x, y)$ della serie (10) è una funzione continua in $T + FT$ e si ha uniformemente rispetto agli y di $(0, a)$*

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x, y) \cdot e^{-\frac{\pi}{a}|x|} = 0$$

e la serie in questione è uniformemente e assolutamente convergente in ogni dominio limitato di $T + FT$.

Passiamo ora all'analisi delle

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}, \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}.$$

Facciamo la seguente ipotesi per la $f(x, y)$ in aggiunta alle altre già imposte. Supponiamo che lungo le perpendicolari ai due lati di FT , pei segmenti posti in $T + FT$ la $f(x, y)$, per ogni x di $(-\infty, +\infty)$, sia, pensandola funzione di y in $(0, a)$, a variazione limitata e in modo tale che la sua variazione totale $V(x)$ soddisfi la condizione

$$(*) \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} V(x) e^{-\frac{\pi}{a}|x|} = 0.$$

Esaminiamo il comportamento delle due serie ottenute derivando rispetto a x , come pure rispetto ad y , termine a termine la serie (10). Ricordando l'espressione effettiva di $F_n(s)$, si hanno le seguenti due serie:

Derivando termine a termine la serie (10) rispetto ad x si ha

$$(11) \quad \frac{1}{\sqrt{a}} D_0 + \frac{1}{a} \int_0^x [\gamma_0(s) + \gamma(s) + \int_0^a f(s, t) dt] ds + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{n\pi y}{a})}{a} \cdot \left[\int_{-\infty}^x [\gamma_0(s) + (-1)^n \cdot \gamma(s) + \right. \\ \left. + \int_0^a f(s, t) \cdot \cos\left(\frac{n\pi t}{a}\right) dt] \cdot e^{\frac{n\pi(s-x)}{a}} \cdot ds - \right. \\ \left. - \int_x^{+\infty} [\gamma_0(s) + (-1)^n \cdot \gamma(s) + \int_0^a f(s, t) \cdot \cos\left(\frac{n\pi t}{a}\right) dt] \cdot e^{\frac{n\pi(x-s)}{a}} \cdot ds \right].$$

Derivando termine a termine la serie (10) rispetto ad y si ha invece

$$(12) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi y}{a})}{a} \cdot \left[\int_{-\infty}^x [\gamma_0(s) + (-1)^n \cdot \gamma(s) + \right. \\ \left. + \int_0^a f(s, t) \cdot \cos\left(\frac{n\pi t}{a}\right) dt] \cdot e^{\frac{n\pi(s-x)}{a}} \cdot ds + \int_x^{+\infty} [\gamma_0(s) + (-1)^n \cdot \gamma(s) + \right. \\ \left. + \int_0^a f(s, t) \cdot \cos\left(\frac{n\pi t}{a}\right) dt] \cdot e^{\frac{n\pi(x-s)}{a}} \cdot ds \right].$$

Ciò premesso, sia $\bar{\gamma}_0(s)$ la funzione data da $\gamma_0(s)$ laddove questa è non negativa e data da 0 negli altri punti. Sia poi $\bar{\gamma}_0(s)$ la funzione data da $\gamma_0(s)$ laddove questa è non positiva e data da 0 negli altri punti. Nello stesso modo si procede per definire le $\bar{\gamma}(s)$, $\bar{\bar{\gamma}}(s)$ in relazione alla $\gamma(s)$. Si ha così

$$\gamma_0(s) = \bar{\gamma}_0(s) + \bar{\bar{\gamma}}_0(s) \quad , \quad \gamma(s) = \bar{\gamma}(s) + \bar{\bar{\gamma}}(s)$$

ove le funzioni che compaiono nei secondi membri sono ciascuna di segno costante.

Si vede facilmente che ciascuna delle seguenti successioni (per x costante):

$$\bar{e}_n'^0(x) = \int_{-\infty}^x \bar{\gamma}_0(s) \cdot e^{\frac{n\pi(s-x)}{a}} \cdot ds,$$

$$\bar{e}_n''^0(x) = \int_x^{+\infty} \bar{\gamma}_0(s) \cdot e^{\frac{n\pi(x-s)}{a}} \cdot ds,$$

$$\bar{e}_n'^0(x) = \int_{-\infty}^x \bar{\gamma}_0(s) \cdot e^{\frac{n\pi(s-x)}{a}} \cdot ds,$$

$$\bar{e}_n''^0(x) = \int_x^{+\infty} \bar{\gamma}_0(s) \cdot e^{\frac{n\pi(x-s)}{a}} \cdot ds,$$

$$\bar{e}_n'(x) = \int_{-\infty}^x \bar{\gamma}(s) \cdot e^{\frac{n\pi(s-x)}{a}} \cdot ds,$$

$$\bar{e}_n''(x) = \int_x^{+\infty} \bar{\gamma}(s) \cdot e^{\frac{n\pi(x-s)}{a}} \cdot ds,$$

$$\bar{e}_n'(x) = \int_{-\infty}^x \bar{\gamma}(s) \cdot e^{\frac{n\pi(s-x)}{a}} \cdot ds,$$

$$\bar{e}_n''(x) = \int_x^{+\infty} \bar{\gamma}(s) \cdot e^{\frac{n\pi(x-s)}{a}} \cdot ds,$$

è a variazione totale finita e infinitesima ⁽²⁾.

⁽²⁾ Cfr. M. PICONE, *Lezioni sulle serie*, Libreria Veschi, Edizione 1945. Roma, págs. 18-21.

Riportiamo qui, per comodità del lettore, quanto è necessario per la com-

Ma le serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{a} \right)$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \cos \left(\frac{n\pi y}{a} \right)$ hanno la classe delle somme parziali uniformemente limitata in $(0, a-\sigma)$, mentre la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{a} \right)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \left(\frac{n\pi y}{a} \right)$ hanno la classe delle somme parziali uniformemente limitata in (σ, a) , comunque piccolo sia il numero positivo σ prefissato.

Le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \left(\frac{n\pi y}{a} \right)}{a} \cdot \left[\int_{-\infty}^x (-1)^n \cdot \gamma(s) \cdot e^{\frac{n\pi(s-x)}{a}} \cdot ds - \int_x^{+\infty} (-1)^n \cdot \gamma(s) \cdot e^{\frac{n\pi(x-s)}{a}} \cdot ds \right],$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{a} \right)}{a} \left[\int_{-\infty}^x (-1)^n \cdot \gamma(s) \cdot e^{\frac{n\pi(s-x)}{a}} \cdot ds + \int_x^{+\infty} (-1)^n \cdot \gamma(s) \cdot e^{\frac{n\pi(x-s)}{a}} \cdot ds \right]$$

sono di conseguenza uniformemente convergenti in ogni dominio limitato di $T+FT$ di cui nessun punto stia lungo il lato $y=a$ de FT , e la somma della seconda serie (ch'è dunque, come la prima, una funzione continua in $T+FT$, il secondo lato $y=a$ di FT al più escluso) ha valore 0 lungo tutto il lato $y=0$ de FT .

Le altre due serie

prende di cui sopra. Per una successione c_n , di quantità reali o complesse c_n , si chiama *variazione totale* la somma della serie $\sum |c_n - c_{n+1}|$. Si dimostra nel citato Lavoro il seguente *teorema*: se la serie $\sum z_n$ ha minima e massima somma finite, con z_n quantità reali o complesse, e se la successione delle c_n con c_n reali o complesse, è infinitesima e a variazione totale finita, allora la nuova serie $\sum c_n \cdot z_n$ è convergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{n\pi y}{a})}{a} \cdot \left[\int_{-\infty}^x \gamma_0(s) \cdot e^{\frac{n\pi(s-x)}{a}} \cdot ds - \int_x^{+\infty} \gamma_0(s) \cdot e^{\frac{n\pi(x-s)}{a}} \cdot ds \right],$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi y}{a})}{a} \cdot \left[\int_{-\infty}^x \gamma_0(s) \cdot e^{\frac{n\pi(s-x)}{a}} \cdot ds + \int_x^{+\infty} \gamma_0(s) \cdot e^{\frac{n\pi(x-s)}{a}} \cdot ds \right],$$

sono invece uniformemente convergenti in ogni dominio limitato di $T+FT$ di cui nessun punto stia lungo il lato $y=0$ di FT , e la somma della seconda serie (ch'è dunque, come la prima, una funzione continua in $T+FT$, il primo lato $y=0$ di FT al più escluso) ha valore 0 lungo tutto il lato $y=a$ di FT . Concludendo si ha che

Le due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{n\pi y}{a})}{a} \cdot \left[\int_{-\infty}^x [\gamma_0(s) + (-1)^n \cdot \gamma(s)] \cdot e^{\frac{n\pi(s-x)}{a}} \cdot ds - \right.$$

$$\left. - \int_x^{+\infty} [\gamma_0(s) + (-1)^n \cdot \gamma(s)] \cdot e^{\frac{n\pi(x-s)}{a}} \cdot ds \right],$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi y}{a})}{a} \cdot \left[\int_{-\infty}^x [\gamma_0(s) + (-1)^n \cdot \gamma(s)] \cdot e^{\frac{n\pi(s-x)}{a}} \cdot ds + \right.$$

$$\left. + \int_x^{+\infty} [\gamma_0(s) + (-1)^n \cdot \gamma(s)] \cdot e^{\frac{n\pi(x-s)}{a}} \cdot ds \right],$$

sono dunque uniformemente convergenti in ogni dominio limitato interno a T e le loro somme sono quindi funzioni continue almeno in T .

Si osservi d'altra parte che

$$(a) \quad \int_{-\infty}^x e^{\frac{n\pi(s-x)}{a}} \left[\int_0^a f(s, t) \cdot \cos\left(\frac{n\pi t}{a}\right) \cdot dt \right] \cdot ds =$$

$$= e^{-\frac{\pi x}{a}} \int_{-\infty}^x e^{\frac{(n-1)\pi(s-x)}{a}} \left[\int_0^a f(s, t) \cdot e^{\frac{\pi s}{a}} \cdot \cos\left(\frac{n\pi t}{a}\right) \cdot dt \right] \cdot ds,$$

$$(b) \quad \int_x^{+\infty} e^{\frac{n\pi(x-s)}{a}} \left[\int_0^a f(s, t) \cdot \cos\left(\frac{n\pi t}{a}\right) \cdot dt \right] \cdot ds =$$

$$= e^{\frac{\pi x}{a}} \int_x^{+\infty} e^{\frac{(n-1)\pi(x-s)}{a}} \left[\int_0^a f(s, t) \cdot e^{-\frac{\pi s}{a}} \cdot \cos\left(\frac{n\pi t}{a}\right) \cdot dt \right] \cdot ds,$$

e in queste, indicando con $M(s)$ il massimo modulo di $f(s, t)$ per t variabile in $(0, a)$, si ha ⁽³⁾, rammentando quanto si è ammesso per la $f(s, t)$ relativamente alla condizione (*),

$$\left| \int_0^a f(s, t) \cdot e^{-\frac{\pi s}{a}} \cdot \cos\left(\frac{n\pi t}{a}\right) \cdot dt \right| < \frac{4 \cdot [V(s) + M(s)] \cdot e^{-\frac{\pi s}{a}}}{n} \quad \text{per } s > 0,$$

$$\left| \int_0^a f(s, t) \cdot e^{\frac{\pi s}{a}} \cdot \cos\left(\frac{n\pi t}{a}\right) \cdot dt \right| < \frac{4 \cdot [V(s) + M(s)] \cdot e^{\frac{\pi s}{a}}}{n} \quad \text{per } s < 0,$$

ove, per essere

$$\lim_{|s| \rightarrow +\infty} M(s) \cdot e^{-\frac{\pi}{a}|s|} = 0$$

quale conseguenza della (*), e

⁽³⁾ Vedi ad es. M. PICONE, *Appunti di Analisi Superiore*, pag. 176.

$$\lim_{|s| \rightarrow +\infty} V(s) \cdot e^{-\frac{\pi}{a}|s|} = 0$$

per la (*), è

$$\lim_{|s| \rightarrow +\infty} 4[V(s) + M(s)] \cdot e^{-\frac{\pi}{a}|s|} = 0$$

pei numeratori delle frazioni dei secondi membri che maggiorano le coordinate di Fourier in questione; e questa tendenza a 0, per $|s| \rightarrow +\infty$, di queste coordinate di Fourier è uniforme rispetto alla classe dei valori degli n .

I due integrali (a) e (b) vengono di conseguenza maggiorati in modulo dagli altri due seguenti

$$4 \cdot e^{-\frac{\pi x}{a}} \cdot \frac{1}{n} \int_{-\infty}^x e^{\frac{(n-1)\pi(s-x)}{a}} \cdot (V(s) + M(s)) \cdot e^{\frac{\pi s}{a}} \cdot ds,$$

$$4 e^{\frac{\pi x}{a}} \cdot \frac{1}{n} \cdot \int_x^{+\infty} e^{\frac{(n-1)\pi(x-s)}{a}} \cdot (V(s) + M(s)) \cdot e^{-\frac{\pi s}{a}} \cdot ds,$$

che sono, per $n \geq 2$, uniformemente infinitesimi come $\frac{1}{n^2}$ rispetto a tutte le coppie (x, y) relative ai punti $P(x, y)$ appartenenti a qualsiasi dominio limitato appartenente a $T + FT$. Dal confronto con la serie $\sum \frac{1}{n^2}$, si ha che le serie ottenute prendendo come termini n^{mi} i prodotti degli integrali (a) o (b) con l'una o l'altra delle due espressioni trigonometriche $\cos \frac{n\pi y}{a}$, sen $\frac{n\pi y}{a}$, sono assolutamente e uniformemente convergenti in ogni dominio limitato appartenente a $T + FT$ e le loro somme sono quindi funzioni continue in $T + FT$.

Riunendo i risultati sopra visti se ne conclude che le serie (11) e (12) sono uniformemente convergenti in ogni dominio

limitato interno a T e le loro somme sone funzioni, conseguentemente continue entro T , che danno le $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$.

Si è così verificata la continuità richiesta per la $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$ entro T come pure la continuità entro T della $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$.

Mostriamo ora che la $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$ è, come è richiesto, funzione continua in $T + FT$, e ciò sarà implicitamente verificato non appena stabiliremo che è effettivamente dimostrata l'altra condizione espressa dal seguente comportamento di $\frac{\partial u}{\partial y}$:

Se Q è un punto posto lungo il lato $y=a$ di FT è

$$\lim_{P \rightarrow Q} \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\gamma(x_Q);$$

Se Q è un punto posto lungo il lato $y=0$ di FT è

$$\lim_{P \rightarrow Q} \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \gamma_0(x_Q);$$

quando il punto $P(x,y)$ posto entro T tende ad un punto Q posto lungo FT .

Basta evidentemente cercare il comportamento di:

$$\begin{aligned} \alpha) \quad & \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{a} \right) \cdot \int_{-\infty}^x \gamma(s) \cdot e^{\frac{n\pi(s-x)}{a}} \cdot ds + \\ & + \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{a} \right) \cdot \int_x^{+\infty} \gamma(s) \cdot e^{\frac{n\pi(x-s)}{a}} \cdot ds \end{aligned}$$

(ch'è uniformemente convergente, come si è visto, quando x appartiene ad un intervallo finito e y ad un intervallo $(0, a-\sigma)$, con σ positivo comunque piccolo) quando $P(x,y) \rightarrow Q(x_Q, a)$;

$$\beta) \quad \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{a} \right) \cdot \int_{-\infty}^x \gamma_0(s) \cdot e^{\frac{n\pi(s-x)}{a}} \cdot ds +$$

$$+ \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{a} \right) \cdot \int_x^{+\infty} \gamma_0(s) \cdot e^{\frac{n\pi(x-s)}{a}} \cdot ds$$

(ch'è uniformemente convergente, come si è visto, quando x appartiene ad un intervallo finito e y ad un intervallo (σ, a) , con σ positivo comunque piccolo) quando $P(x, y) \rightarrow Q(x_0, 0)$; perchè le altre serie, relative ai termini restanti dello sviluppo (12) di $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$, tendono a 0 quando $P \rightarrow Q$, come segue subito dalle deduzioni sopra svolte.

Svolgeremo l'analisi nel primo caso α), vale a dire in quello per cui Q è lungo il lato $y=a$ di FT .

Scrivendo in termini finiti la serie α) si ottiene che per $0 \leq y < a$ è

$$\alpha') \quad \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{a} \right) \cdot \int_{-\infty}^x \gamma(s) \cdot e^{\frac{n\pi(s-x)}{a}} \cdot ds +$$

$$+ \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{a} \right) \cdot \int_x^{+\infty} \gamma(s) \cdot e^{\frac{n\pi(x-s)}{a}} \cdot ds =$$

$$= \frac{-\operatorname{sen} \left(\frac{\pi y}{a} \right)}{2a} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma(s) \cdot ds}{\cosh \left(\frac{\pi(s-x)}{a} \right) + \cos \left(\frac{\pi y}{a} \right)},$$

mentre per la serie β) si ottiene che per $0 < y \leq a$ è

$$\beta') \quad \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{a} \right) \cdot \int_{-\infty}^x \gamma_0(s) \cdot e^{\frac{n\pi(s-x)}{a}} \cdot ds +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{a} \right) \cdot \int_x^{+\infty} \gamma_0(s) \cdot e^{\frac{n\pi(x-s)}{a}} \cdot ds = \\
 & = \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi y}{a} \right)}{2a} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma_0(s) \cdot ds}{\cosh \left(\frac{\pi(s-x)}{a} \right) - \cos \left(\frac{\pi y}{a} \right)}.
 \end{aligned}$$

Riferendoci dunque partitamente al caso della α), rammentiamo⁽⁴⁾ che il problema di Dirichlet per la striscia, nel caso particolare in cui è 0 il valore della $u(x, y)$ lungo il lato $y=0$ di FT mentre è la costante $\gamma(x_Q)$ il valore assegnato per la $u(x, y)$ lungo l'altro lato $y=a$ di FT , è risolto dalla funzione

$$\gamma(x_Q) \cdot \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi y}{a} \right)}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\cosh \left(\frac{\pi(s-x)}{a} \right) + \cos \left(\frac{\pi y}{a} \right)} \cdot ds.$$

Se ne deduce che è

$$\lim_{P(x,y) \rightarrow Q(x_Q, a)} \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi y}{a} \right)}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma(x_Q)}{\cosh \left(\frac{\pi(s-x)}{a} \right) + \cos \left(\frac{\pi y}{a} \right)} ds = \gamma(x_Q).$$

Ma

$$\lim_{P(x,y) \rightarrow Q(x_Q, a)} \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi y}{a} \right)}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma(s) \cdot ds}{\cosh \left(\frac{\pi(s-x)}{a} \right) + \cos \left(\frac{\pi y}{a} \right)} =$$

$$\gamma(x_Q) + \lim_{P(x,y) \rightarrow Q(x_Q, a)} \left[\frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi y}{a} \right)}{2a} \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} \frac{[\gamma(s) - \gamma(x_Q)] ds}{\cosh \left(\frac{\pi(s-x)}{a} \right) + \cos \left(\frac{\pi y}{a} \right)} \right]$$

(⁴) M. PICONE, *Appunti di Analisi Superiore*, pag. 337-338.

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{a}\right)}{2a} \int_{x+\varepsilon}^{+\infty} \frac{[\gamma(s) - \gamma(x_Q)] ds}{\cosh\left(\frac{\pi(s-x)}{a}\right) + \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)} \Big] \\
 & + \lim_{P(x,y) \rightarrow Q(x_Q,a)} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{a}\right)}{2a} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{[\gamma(s) - \gamma(x_Q)] ds}{\cosh\left(\frac{\pi(s-x)}{a}\right) + \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)},
 \end{aligned}$$

e qui il secondo termine del secondo membro è 0 essendo $\lim_{y \rightarrow a} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{a}\right) = 0$ mentre i due integrali posti entro la parentesi quadra si mantengono limitati mentre x tende ad x_Q poichè mai avviene che la espressione $\cosh\left(\frac{\pi(s-x)}{a}\right) + \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)$ sia 0 o tenda a 0 mentre s varia in $(-\infty, x-\varepsilon)$ o in $(x+\varepsilon, +\infty)$. In quanto al terzo termine del secondo membro, se ε è opportunamente piccolo, si ha, per δ positivo prefissato, quando $P(x, y)$ appartiene ad un intorno opportunamente piccolo del punto Q ,

$$|\gamma(s) - \gamma(x_Q)| \leq |\gamma(s) - \gamma(x)| + |\gamma(x) - \gamma(x_Q)| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

e ciò per ogni s di $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$; risulta di conseguenza

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{a}\right)}{2a} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{\gamma(s) - \gamma(x_Q)}{\cosh\left(\frac{\pi(s-x)}{a}\right) + \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)} ds \right| \\
 & < \delta \cdot \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{a}\right)}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\cosh\left(\frac{\pi(s-x)}{a}\right) + \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)} ds,
 \end{aligned}$$

ove il secondo membro, per $y \rightarrow a$, tende a $\delta \cdot 1 = \delta$. Data l'arbitrarietà di δ , si conclude che è effettivamente

$$\lim_{P(x,y) \rightarrow Q(x_Q, a)} \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\gamma(x_Q)$$

per la α').

Con lo stesso procedimento si vede che

$$\lim_{P(x,y) \rightarrow Q(x_Q, o)} \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \gamma_0(x_Q).$$

La funzione $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$ è dunque funzione continua in $T+FT$ e si riduce a $\gamma_0(x)$ lungo il lato $y=0$ e a $-\gamma(x)$ lungo il lato $y=a$ di FT . Tenendo poi conto della relazione trovata

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x,y) \cdot e^{-\frac{\pi}{a}|x|} = 0,$$

uniformemente rispetto agli y di $(0,a)$, si vede subito, applicando il teorema di Lagrange alla $u(x,y)$ lungo le rette interne a T e parallele ai due lati di FT , ch'è pure soddisfatta l'altra relazione, in T ,

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \cdot e^{-\frac{\pi}{a}|x|} = 0$$

uniformemente rispetto agli y di $(0,a)$.

5. — Affrontiamo ora il problema della ricerca delle costanti C_n e D_n imponendo che sia

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \cdot e^{-\frac{\pi}{a}|x|} = 0$$

uniformemente per gli y di $(0,a)$, supponendo soddisfatte le condizioni $(*)$ e $(\bar{*})$.

Essendo

$$\frac{du_0(x)}{dx} = D_0 + \int_0^x F_0(s) \cdot ds = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \int_0^a \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \cdot dy,$$

ne segue che per la $u_0(x)$ si deve supporre essere

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u'_0(x) \cdot e^{-\frac{\pi}{a}|x|} = 0$$

e affinchè ciò avvenga bisogna e basta chhe $F_0(s)$ sia tale che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{\pi}{a}x} \int_0^x F_0(s) \cdot ds = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{\pi}{a}x} \int_x^0 F_0(s) \cdot ds = 0,$$

vale a dire che sia

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x F_0(s) \cdot e^{-\frac{\pi}{a}s} \cdot e^{\frac{\pi}{a}(s-x)} \cdot ds = \\ = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^0 F_0(s) \cdot e^{\frac{\pi}{a}s} \cdot e^{-\frac{\pi}{a}(x-s)} \cdot ds = 0, \end{aligned}$$

e affinchè ciò sia, per il Lemma I, basta che $F_0(s)$ soddisfi la condizione

$$\lim_{|s| \rightarrow +\infty} F_0(s) \cdot e^{-\frac{\pi}{a}|s|} = 0$$

il che è certamente sotto le condizioni (*), e ciò vale comunque si assegnino le costanti C_0 e D_0 . In altre parole sotto le condizioni (*) la $u_0(x)$ resta definita a meno di un termine lineare in x coi due coefficienti C_0 e D_0 affatto arbitrari e risulta

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u'_0(x) \cdot e^{-\frac{\pi}{a}|x|} = 0.$$

Passiamo al caso di $n \geq 1$. Per la (7') si ha derivando che è

$$u'_n(x) = \frac{n\pi}{a} \cdot \left[C_n \cdot e^{\frac{n\pi x}{a}} - D_n \cdot e^{-\frac{n\pi x}{a}} - \int_0^x F_n(s) \cdot e^{\frac{n\pi(s-x)}{a}} \cdot ds - \right.$$

$$-\int_0^x F_n(s) \cdot e^{\frac{n\pi(x-s)}{a}} \cdot ds \Big] = \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \int_0^x \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \cdot \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cdot dy,$$

da cui

$$\begin{aligned} \frac{u'_n(x)}{e^{\frac{\pi}{a}|x|}} &= \frac{n\pi}{a} \cdot \left[C_n \cdot e^{\frac{n\pi x}{a} - \frac{\pi}{a}|x|} - D_n \cdot e^{-\frac{n\pi x}{a} - \frac{\pi}{a}|x|} - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^x F_n(s) \cdot e^{\frac{n\pi(s-x)}{a} - \frac{\pi}{a}|x|} \cdot ds - \int_0^x F_n(s) \cdot e^{\frac{n\pi(x-s)}{a} - \frac{\pi}{a}|x|} \cdot ds \right] = \\ &= \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \int_0^x \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \cdot e^{-\frac{\pi}{a}|x|} \cdot \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cdot dy \end{aligned}$$

e si vede intanto che per la condizione imposta alla $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$ deve avvenire che

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u'_n(x) \cdot e^{-\frac{\pi}{a}|x|} = 0;$$

dovremo fare la scelta per la costanti C_n e D_n in maniera tale che quest'ultima condizione sia soddisfatta.

Per x positivo e tendente a $+\infty$ il secondo e terzo termine del secondo membro tendono a 0, per il Lemma I, nella espressione di $\frac{u'_n(x)}{e^{\frac{\pi}{a}|x|}}$. E' dunque

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u'_n(x) \cdot e^{-\frac{\pi}{a}x} = \frac{n\pi}{a} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{C_n \int_0^x F_n(s) e^{-\frac{n\pi s}{a}} \cdot ds}{e^{\frac{(n-1)\pi x}{a}}}$$

e se si vuole che questo limite esista finito (eguale a 0) devesi

porre la costante C_n eguale ad $\int_0^{+\infty} F_n(s) \cdot e^{-\frac{n\pi s}{a}} \cdot ds$ dato che per le condizioni (*) questo integrale certo converge; col teorema di L'Hospital risulta per $n \neq 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u'_n(x) \cdot e^{-\frac{\pi}{a}x} = \frac{n}{n-1} \lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x) \cdot e^{-\frac{\pi}{a}x} = 0$$

per le condizioni (*). Per $n=1$ si ha lo stesso risultato per essere

$$u'_1(x) \cdot e^{-\frac{\pi}{a}x} = \frac{\pi}{a} \cdot \left[C_1 - D_1 e^{-\frac{2\pi x}{a}} - \int_0^x F_1(s) \cdot e^{-\frac{\pi s}{a}} \cdot e^{\frac{2\pi(s-x)}{a}} \cdot ds - \int_0^x F_1(s) \cdot e^{-\frac{\pi s}{a}} \cdot ds \right]$$

e il limite, per $x \rightarrow +\infty$, è 0 quando si pone

$$C_1 = \int_0^{+\infty} F_1(s) \cdot e^{-\frac{\pi}{a}s} \cdot ds$$

poichè per il Lemma I il terzo addendo del secondo membro, come pure il secondo, tendono a 0, mentre d'altra parte

$$\int_0^{+\infty} F_1(s) \cdot e^{-\frac{\pi}{a}s} \cdot ds \text{ è convergente per le condizioni (*).}$$

Ripetendo l'analisi precedente per x negativo e facendo poi divergere x negativamente, si vede, sotto le condizioni (*), che affinchè sia $\lim_{x \rightarrow -\infty} u'_n(x) \cdot e^{\frac{\pi}{a}x} = 0$, si deve porre per $n \geq 1$

$$D_n = \int_{-\infty}^0 F_n(s) \cdot e^{\frac{n\pi s}{a}} \cdot ds$$

ove, sempre per le (*), questi integrali sono convergenti, sempre per $n \geq 1$.

Se ne conclude che sotto le condizioni (*) tutte le $u_n(x)$, con $n \geq 1$, sono definite in modo univoco e se ne ha l'espressione, già incontrata nel precedente numero 4,

$$u_n(x) = \int_x^{+\infty} F_n(s) \cdot e^{\frac{n\pi(x-s)}{a}} \cdot ds + \int_{-\infty}^x F_n(s) \cdot e^{\frac{n\pi(s-x)}{a}} \cdot ds$$

e quindi la $u(x, y)$ ha anche in questo caso l'espressione data dalla serie (10), sicchè i due casi trattati al N° 4 e in questo caso si identificano e le condizioni

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u_n(x) \cdot e^{-\frac{\pi}{a}|x|} = 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} u'_n(x) \cdot e^{-\frac{\pi}{a}|x|} = 0,$$

uniformemente rispetto alla classe degli n , per $n \geq 0$, sono simultaneamente verificate assieme. Per quanto al precedente numero è già stato fatto, la somma $u(x, y)$ della serie (10) è funzione continua in $T + FT$, per l'assoluta e uniforme convergenza della serie stessa, in ogni dominio limitato de $T + FT$, e si ha uniformemente rispetto agli y di $(0, a)$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x, y) \cdot e^{-\frac{\pi}{a}|x|} = 0,$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} e^{-\frac{\pi}{a}|x|} = 0,$$

ove la seconda, come si è visto al n° precedente, si deduce dalla prima col teorema di Lagrange.

6.— Da quanto precede si conclude l'equivalenza dei due casi studiati al n° 4 e al n° 5. Li possiamo cioè riunere in uno solo ed enunciare il seguente

Teorema. — Se le due funzioni $\gamma_0(x)$ e $\gamma(x)$ sono continue in ogni intervallo finito dell'asse x e se la $f(x, y)$ è con-

tinua in $T + FT$, ed ivi localmente Hölderiana, ed è tale d'essere, lungo i segmenti posti in $T + FT$ e perpendicolari ai due lati di FT , a variazione limitata in modo tale che la variazione totale $V(x)$ soddisfi la condizione

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} V(x) \cdot e^{-\frac{\pi}{a}|x|} = 0,$$

allora, se per due numeri positivi δ', δ'' minori de $\frac{\pi}{a}$ sono verificate le

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \gamma_0(x) \cdot e^{-\delta' \cdot x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \gamma(x) \cdot e^{-\delta' \cdot x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, y) \cdot e^{-\delta' \cdot x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \gamma_0(x) \cdot e^{\delta'' \cdot x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \gamma(x) \cdot e^{\delta'' \cdot x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x, y) \cdot e^{\delta'' \cdot x} = 0$$

uniformemente rispetto agli y di $(0, a)$, ciascuna delle seguenti tre condizioni da imporre alla $u(x, y)$ per $|x| \rightarrow +\infty$, uniformemente rispetto alle y di $(0, a)$,

$$(a) \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x, y) \cdot e^{-\frac{\pi}{a}|x|} = 0;$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, y) \cdot e^{\frac{\pi}{a}x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cdot e^{-\frac{\pi}{a}x} = 0,$$

$$(\text{oppure } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} e^{\frac{\pi}{a}x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, y) \cdot e^{-\frac{\pi}{a}x} = 0);$$

$$(c) \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} e^{-\frac{\pi}{a}|x|} = 0;$$

porta necessariamente alla validità delle altre, e oltre la (b) è soddisfatta quella in parentesi e viceversa. In altre parole esse condizioni non possono che essere verificate assieme. Le $u(x, y)$ che le verificano e che risolvono il problema di Neumann non possono essere date altro che da quelle aventi il seguente sviluppo

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{a}} \left[C_0 + D_0 \cdot x + \int_0^x F_0(s) \cdot (x-s) \cdot ds \right] + \\ + \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi y}{a} \left[\int_{-\infty}^x F_n(s) \cdot e^{\frac{n\pi(s-x)}{a}} \cdot ds + \int_x^{+\infty} F_n(s) \cdot e^{\frac{n\pi(x-s)}{a}} \cdot ds \right],$$

con $C_0 + D_0 x$ termine lineare in x affatto arbitrario. Si vede poi facilmente che lo sviluppo precedente scritto in termini finiti è espresso dalla

$$(13) \quad u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{a}} \left[C_0 + D_0 \cdot x + \right. \\ \left. \int_0^a \frac{1}{\sqrt{a}} [\gamma_0(s) + \gamma(s) + \int_0^x f(s, t) \cdot dt] \cdot (x-s) \cdot ds \right] \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_0(s) \cdot \log \frac{2[\cosh \frac{\pi(x-s)}{a} - \cos \frac{\pi y}{a}]}{e^{\frac{\pi \cdot |x-s|}{a}}} \cdot ds + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(s) \cdot \log \frac{2[\cosh \frac{\pi(x-s)}{a} + \cos \frac{\pi y}{a}]}{e^{\frac{\pi \cdot |x-s|}{a}}} \cdot ds + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^a f(s, t) \cdot \log \left\{ \frac{2[\cosh \frac{\pi(x-s)}{a} - \cos \frac{\pi(y+t)}{a}]}{e^{\frac{\pi \cdot |x-s|}{a}}} \cdot \right. \\ \left. \frac{2[\cosh \frac{\pi(x-s)}{a} - \cos \frac{\pi(y-t)}{a}]}{e^{\frac{\pi \cdot |x-s|}{a}}} \right\} \cdot ds \cdot dt.$$

Da quanto precede si desume che per dimostrare che il problema proposto ha soluzioni, basterà verificare che la $u(x, y)$ data dalla (13) è effettivamente una soluzione della equazione

$$\Delta_2 u(x, y) = f(x, y).$$

Per far questo cominciamo con l'osservare che nella (13) il fattore logaritmico che moltiplica $\gamma_0(s)$ è per $|s| \rightarrow +\infty$ infinitesimo come

$$\frac{2\pi}{a} \left| \frac{e^{-\frac{\pi \cdot |x-s|}{a}} - \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)}{e^{\frac{\pi \cdot |x-s|}{a}} - \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)} \right|$$

mentre quello di $\gamma(s)$ lo è come

$$\frac{2\pi}{a} \left| \frac{e^{-\frac{\pi \cdot |x-s|}{a}} + \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)}{e^{\frac{\pi \cdot |x-s|}{a}} - \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)} \right|.$$

Ne segue che, per le condizioni (*) cui devono soddisfare le funzioni $\gamma_0(s)$, $\gamma(s)$, $f(s, t)$, i due primi integrali impropri del secondo membro di (13) sono uniformemente convergenti rispetto agli x, y dei punti $P(x, y)$ di qualunque dominio limitato interno a T .

Si ha poi:

per $x > s$

$$\frac{\partial}{\partial x} \log \frac{\cosh\left(\frac{\pi(x-s)}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)}{e^{\frac{\pi \cdot |x-s|}{a}} - \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) - e^{-\frac{\pi(x-s)}{a}}}{\cosh\left(\frac{\pi(x-s)}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)} \cdot \frac{\pi}{a};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \frac{\cosh\left(\frac{\pi(x-s)}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)}{e^{\frac{\pi(x-s)}{a}} - \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)} = \frac{1 - \cosh\left(\frac{\pi(x-s)}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)}{[\cosh\left(\frac{\pi(x-s)}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)]^2} \cdot \frac{\pi^2}{a^2};$$

per $x < s$

$$\frac{\partial}{\partial x} \log \frac{\cosh(\frac{\pi(x-s)}{a}) - \cos(\frac{\pi y}{a})}{e^{\frac{\pi \cdot |x-s|}{a}}} = \frac{e^{\frac{\pi(x-s)}{a}} - \cos(\frac{\pi y}{a})}{\cosh(\frac{\pi(x-s)}{a}) - \cos(\frac{\pi y}{a})} \cdot \frac{\pi}{a};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \frac{\cosh(\frac{\pi(x-s)}{a}) - \cos(\frac{\pi y}{a})}{e^{\frac{\pi \cdot |x-s|}{a}}} = \frac{1 - \cosh(\frac{\pi(x-s)}{a}) \cos(\frac{\pi y}{a})}{[\cosh(\frac{\pi(x-s)}{a}) - \cos(\frac{\pi y}{a})]^2} \cdot \frac{\pi^2}{a^2};$$

per $x \geq s$

$$\frac{\partial}{\partial y} \log \frac{\cosh(\frac{\pi(x-s)}{a}) - \cos(\frac{\pi y}{a})}{e^{\frac{\pi \cdot |x-s|}{a}}} = \frac{\sin(\frac{\pi y}{a})}{\cosh(\frac{\pi(x-s)}{a}) - \cos(\frac{\pi y}{a})} \cdot \frac{\pi}{a};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \log \frac{\cosh(\frac{\pi(x-s)}{a}) - \cos(\frac{\pi y}{a})}{e^{\frac{\pi \cdot |x-s|}{a}}} = \frac{\cosh(\frac{\pi(x-s)}{a}) \cdot \cos(\frac{\pi y}{a}) - 1}{[\cosh(\frac{\pi(x-s)}{a}) - \cos(\frac{\pi y}{a})]^2} \cdot \frac{a^2}{\pi^2};$$

per $x > s$

$$\frac{\partial}{\partial x} \log \frac{\cosh(\frac{\pi(x-s)}{a}) + \cos(\frac{\pi y}{a})}{e^{\frac{\pi \cdot |x-s|}{a}}} = \frac{-e^{\frac{\pi(s-x)}{a}} - \cos(\frac{\pi y}{a})}{\cosh(\frac{\pi(x-s)}{a}) + \cos(\frac{\pi y}{a})} \cdot \frac{\pi}{a};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \frac{\cosh(\frac{\pi(x-s)}{a}) + \cos(\frac{\pi y}{a})}{e^{\frac{\pi \cdot |x-s|}{a}}} = \frac{1 + \cosh(\frac{\pi \cdot |x-s|}{a}) \cdot \cos(\frac{\pi y}{a})}{[\cosh(\frac{\pi(x-s)}{a}) + \cos(\frac{\pi y}{a})]^2} \cdot \frac{\pi^2}{a^2};$$

per $x < s$

$$\frac{\partial}{\partial x} \log \frac{\cosh(\frac{\pi(x-s)}{a}) + \cos(\frac{\pi y}{a})}{e^{\frac{\pi \cdot |x-s|}{a}}} = \frac{e^{\frac{\pi(x-s)}{a}} + \cos(\frac{\pi y}{a})}{\cosh(\frac{\pi(x-s)}{a}) + \cos(\frac{\pi y}{a})} \cdot \frac{\pi}{a};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \frac{\cosh(\frac{\pi(x-s)}{a}) + \cos(\frac{\pi y}{a})}{e^{\frac{\pi \cdot |x-s|}{a}}} = \frac{1 + \cosh(\frac{\pi(x-s)}{a}) \cdot \cos(\frac{\pi y}{a})}{[\cosh(\frac{\pi(x-s)}{a}) + \cos(\frac{\pi y}{a})]^2} \cdot \frac{\pi^2}{a^2};$$

per $x \geq s$

$$\frac{\partial}{\partial y} \log \frac{\cosh(\frac{\pi(x-s)}{a}) + \cos(\frac{\pi y}{a})}{e^{\frac{\pi \cdot |x-s|}{a}}} = \frac{-\sin(\frac{\pi y}{a})}{\cosh(\frac{\pi(x-s)}{a}) + \cos(\frac{\pi y}{a})} \cdot \frac{\pi}{a};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \log \frac{\cosh(\frac{\pi(x-s)}{a}) + \cos(\frac{\pi y}{a})}{e^{\frac{\pi \cdot |x-s|}{a}}} = \frac{-1 - \cosh(\frac{\pi(x-s)}{a}) \cdot \cos(\frac{\pi y}{a})}{[\cosh(\frac{\pi(x-s)}{a}) + \cos(\frac{\pi y}{a})]^2} \cdot \frac{\pi^2}{a^2};$$

e di qui si ha che

$$\Delta_2 \log \frac{\cosh(\frac{\pi(x-s)}{a}) - \cos(\frac{\pi y}{a})}{e^{\frac{\pi \cdot |x-s|}{a}}} = \Delta_2 \log \frac{\cosh(\frac{\pi(x-s)}{a}) + \cos(\frac{\pi y}{a})}{e^{\frac{\pi \cdot |x-s|}{a}}} = 0.$$

Nei due primi integrali impropri del secondo membro della (13) i due fattori logaritmici di $\gamma_0(s)$ e $\gamma(s)$ sono funzioni armoniche in x, y se $P(x, y)$ è entro T , per ogni valore di s , mentre quello di $f(s, t)$,

$$\log \frac{2 \cdot [\cosh(\frac{\pi(x-s)}{a}) - \cos(\frac{\pi(x-s)}{a})]}{e^{\frac{\pi \cdot |x-s|}{a}}},$$

nel terzo integrale improprio, è funzione armonica rispetto ad x, y e rispetto ad s, t , ma è singolare quando $P(x, y) \equiv Q(s, t)$, con $P(x, y)$ interno a T .

Dalle precedenti espressioni trovate per le derivate prime e seconde, si ha, per le (*), la convergenza uniforme anche degli integrali impropri ottenuti derivando, una o due volte, sotto il segno di integrale nel secondo e terzo termine del secondo membro della (13), rispetto ai punti $P(x, y)$ di ogni dominio limitato *interno* a T . E altresì chiaro che, per le stesse ragioni, anche il quarto integrale del secondo membro di (13) come quelli ottenuti derivando, una o due volte, sotto il segno di integrale presentano il medesimo comportamento di cui sopra, qualora l'integrazione doppia relativa alla seconda frazione del fattore logaritmico si estenda non a T ma a $T - C_{\rho+\rho'}$ e l'insieme dei punti $P(x, y)$, rispetto a cui si vuole la convergenza uniforme dei vari integrali impropri, sia C_ρ , ove $C_{\rho+\rho'}$ e C_ρ sono gli interni circolari, di raggi $\rho + \rho'$ e ρ , di un punto $P_0(x_0, y_0)$ interno a T , intendendo che C_ρ abbia distanza > 0 dai lati della striscia T : si può dunque, per $P(x, y)$ in C_ρ e $Q(s, t)$ in $T - C_{\rho+\rho'}$, derivare una o due volte sotto il segno d'integrale esteso a $T - C_{\rho+\rho'}$, rispetto ad x ed y .

Se ne conclude che, ad esempio nel punto $P_0(x_0, y_0)$ è, tenendo conto della (8),

$$(14) \quad \Delta_2 u(x_0, y_0) = \frac{1}{a} [\gamma_0(x_0) + \gamma(x_0) + \int_0^a f(x_0, t) dt] -$$

$$- \frac{1}{a} [\gamma_0(x_0) + \gamma(x_0) + \int_0^a f(x_0, t) dt] + f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0).$$

Infatti basta tenere conto che è

$$\frac{\cosh(\frac{\pi(x-s)}{a}) \mp \cos(\frac{\pi y}{a})}{e^{\frac{\pi \cdot |x-s|}{a}}} = \frac{\pi}{a} \left[\frac{\sinh(\frac{\pi(x-s)}{a})}{\cosh(\frac{\pi(x-s)}{a}) \mp \cos(\frac{\pi y}{a})} \mp 1 \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \log \frac{\cosh(\frac{\pi(x-s)}{a}) - \cos(\frac{\pi(y+t)}{a})}{e^{\frac{\pi(x-s)}{a}}} =$$

$$\frac{\pi}{a} \cdot \left[\frac{\sinh(\frac{\pi(x-s)}{a})}{\cosh(\frac{\pi(x-s)}{a}) - \cos(\frac{\pi(y+t)}{a})} \mp 1 \right]$$

(col segno superiore o l'inferiore secondochè $x \geq s$) e che posto $r = \text{dist } Q(s, t) P_0(x_0, y_0)$ la funzione

$$g(P_0, Q) = \log \frac{1}{r} - \frac{1}{2} \log \frac{\cosh(\frac{\pi(x_0-s)}{a}) - \cos(\frac{\pi(y_0-t)}{a})}{e^{\frac{\pi \cdot |x_0-s|}{a}}}$$

è regolare nel punto $P_0(x_0, y_0)$, e ch'è invece di singolarità per la funzione sottraendo del secondo membro; si verifica infatti che lungo i raggi P_0Q è $\lim_{Q \rightarrow P_0} g(P_0, Q) = \log \frac{\pi}{a\sqrt{2}}$. Se ne deduce la (14), tenendo conto dell'ipotesi d'essere la funzione $f(x, y)$ localmente Hölderiana in $T + FT$, come pure la continuità entro T delle $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

RESUELTOS

N.º 76 — Sea un determinante de orden, n en el cual sea nulo el primer elemento de la fila de orden $h+1$, sean nulos los 3 primeros elementos de la fila de orden $h+2$, en general sean nulos los $2r-1$ primeros elementos de la fila de orden $h+r$. Todos los demás elementos se suponen literales y no nulos. Determinar el número de los términos no nulos del desarrollo.

SOLUCIÓN. — Imaginemos desarrollar el determinante mediante la regla de Laplace, según los menores extraídos de las dos primeras columnas. De estos menores serán $\neq 0$ sólo los siguientes:

1º. $\binom{h}{2}$ extraídos de las primeras h filas, cada uno con 2 términos.

2º. h extraídos combinando la $h+1$ -ma fila con cada una de las anteriores y dando lugar, cada uno a un solo término no nulo.

Resultan así en todo h^2 términos, cada uno de los cuales se encuentra multiplicado por un determinante de la misma forma del dado, pero de orden $n-2$, siendo además substituído h por $h-1$. Llamando en general por $f(h, n)$ el número de los términos del desarrollo de un determinante del tipo considerado, por determinados valores de h y n , se tiene por tanto la relación

$$f(h, n) = h^2 f(h-1, n-2) \quad (1)$$

Luego, por recorrenencia,

$$\begin{aligned} f(h, n) &= h^2 (h-1)^2 f(h-2, n-4) \\ &= h^2 (h-1)^2 (h-2)^2 f(h-3, n-6) = \dots; \end{aligned}$$

en esta reducción sucesiva tendremos que pararnos cuando

$$h-r = n-2r-1$$

es decir $r = n-h-1$, $h-r = 2h-n+1$, $n-2r = 2h-n+2$.

Los determinantes así obtenidos como últimos ya no serán más del tipo del dado, sino que tendrán un solo elemento 0 como último de la primera columna; desarrollando este determinante según esta primera columna se obtienen

$$(2h-n+1)(2h-n+1)! = (2h-n+1)^2(2h-n)!$$

términos. El número buscado se expresa luego por

$$f(h, n) = [h(h-1) \dots (2h-n+1)]^2 (2h-n)! = \frac{h!^2}{(2h-n)!} \quad (2)$$

Como verificación, sustituyamos en los dos miembros de (1); resulta

$$\frac{h!^2}{(2h-n)!} = \frac{h^2(h-1)!^2}{(2(h-1)-(n-2))!}$$

Se debe notar que el resultado, en su forma más concisa, queda válido sólo hasta que $2h-n \geq 0$; en caso contrario el segundo miembro de (2) da directamente $f(h, n) = 0$. En efecto el determinante propuesto vendría entonces a contener una fila de 0 y sería sin más nulo.

N.º 77. — Sea el determinante llamado circulante:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \dots & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

donde cada fila se obtiene como permutación circular de la anterior. Demostrar que sustituyendo todos los elementos de una fila cualquiera por una constante k el valor del determinante queda el mismo cualquiera que sea la fila sustituida.

SOLUCIÓN. — Supongamos, en el determinante del enunciado, haber sustituido los elementos de la primer fila por la constante k , tendremos:

$$(1) \quad k \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \dots & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

y debemos demostrar que si sustituimos los elementos de la fila de orden p por k el determinante obtenido es igual al (1). Tomemos primeramente $p=2$, es decir, el determinante en el cual han sido sustituidos los elementos de la fila de orden 2 por la constante k . Para demostrar la identidad de los dos determinantes, debemos hacer pasar la primer fila a último lugar y las demás al anterior, con lo cual tendremos $(n-1)$ permutaciones entre filas; luego debemos efectuar permutaciones entre columnas haciendo pasar a primera la columna que ocupa el n -ésimo lugar y al lugar siguiente todas las demás, con lo cual tendremos nuevamente $(n-1)$ permutaciones y el total de éstas será $2(n-1)$.

Sea ahora el mismo determinante circulante en el cual se hayan sustituido los elementos de la fila de orden p por k , es fácil ver que para pasar de éste determinante al (1) debemos efectuar primeramente una permutación entre filas. Si en el caso de ser $p=2$ el número de permutaciones era $(n-1)$, cuando p toma valores arbitrarios será: $(n-1)(p-1)$ permutaciones entre filas. Luego permutaremos columnas y recordando la forma de obtener una fila de la anterior deducimos que debemos efectuar, para llegar al determinante (1) $(p-1)(n-1)$ permutaciones más. Por tanto el determinante se multiplica por $(-1)^{2(p-1)(n-1)}=1$ y resulta la proposición del enunciado.

Una generalización inmediata sería la de demostrar que si sustituimos los elementos de una columna cualquiera por k el valor del determinante es el mismo. Para ello podríamos aplicar a las columnas lo efectuado para las filas, pero una demostración más inmediata es la de cambiar en el determinante las filas por las columnas, con lo cual, como se sabe, el determinante no cambia.

Esta solución es debida al Sr. Adolfo Daghetto, alumno de la Facultad de C. Matemáticas de la Universidad N. del Litoral (Rosario).

N.º 118. — Calcular el límite para $x \rightarrow 0$ de la expresión:

$$\frac{3(x^2+1)^2 \operatorname{arctg} x - 5x^3 - 3 \operatorname{sen} x}{x^5}$$

SOLUCIÓN. — 1. Como se trata de una indeterminación de tipo 0/0 aplicaremos varias veces la regla de L'Hospital y tendremos sucesivamente:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(x^2+1)^2 \operatorname{arctg} x - 5x^3 - 3 \operatorname{sen} x}{x^5} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12x(x^2+1) \operatorname{arctg} x - 12x^2 + 3(1 - \cos x)}{5x^4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12(3x^2+1) \operatorname{arctg} x - 12x + 3 \operatorname{sen} x}{20x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6}{5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \frac{4(3x^2+1) + (\cos x - 4)(x^2+1)}{20x^2(x^2+1)} = \infty; \end{aligned}$$

siendo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(3x^2+1) + (\cos x - 4)(x^2+1)}{20x^2(x^2+1)} = \frac{1}{0} = \infty.$$

2. Si efectuamos el desarrollo en serie de $\operatorname{sen} x$ y $\operatorname{arctg} x$ y después de simplificar dividimos numerador y denominador por x^5 obtendremos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(x^2+1)^2 \operatorname{arctg} x - 5x^3 - 3 \operatorname{sen} x}{x^5} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(x^2+1)^2 \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots\right) - 5x^3 - 3\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)}{x^5} \end{aligned}$$

Desarrollando los productos en el numerador, el primer término que no es cero resulta

$$6x^3 - \frac{x^3}{3} - 5x^3 + \frac{x^3}{2} = cx^3 \quad (c \neq 0);$$

siendo el denominador infinitésimo de orden >3 , el límite de la fracción es ∞ .

Las dos soluciones que preceden de este problema son debidas al Sr. ADOLFO DAGHETTO, alumno de la Facultad de C. Matemáticas de la Universidad N. del Litoral (Rosario).

N.º 119. — Demostrar que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=0}^p n^m}{(p+1)^{m+1}} = \frac{1}{m+1}.$$

SOLUCIÓN. — Se sabe (ver p. ej. E. Cesáro, *Analisi Algebrica*, p. 98, Teor. IV) que se tiene

$$\lim (a_n/b_n) = \lim (a_n - a_{n-1}) / (b_n - b_{n-1})$$

para n tendiendo al infinito y cuando b_n creciendo siempre sobrepasa cualquier límite.

Este teorema, aplicado a nuestro caso nos da

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=0}^p n^m}{(p+1)^{m+1}} &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{(p+1)^{m+1} - p^{m+1}}{p^m} = \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p \left[\left(\frac{1}{p} + 1 \right)^{m+1} - 1 \right]} \end{aligned}$$

y desarrollando por la fórmula del binomio el denominador de la última fracción tendremos finalmente:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=0}^p n^m}{(p+1)^{m+1}} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p \left[(m+1) \frac{1}{p} + \frac{m(m+1)}{2} \frac{1}{p^2} + \dots \right]} = \frac{1}{m+1}$$

tal como se deseaba demostrar.

Esta solución es debida al Sr. ADOLFO DAGHETTO, alumno de la Fac. de C. Matemáticas (Rosario).

122. Demostrar las igualdades

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & d_1 & d_2 \\ b & d_1 & 0 & d_3 \\ c & d_2 & d_3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & ad_3 & bd_2 & cd_1 \\ ad_3 & 0 & 1 & 1 \\ bd_3 & 1 & 0 & 1 \\ cd_1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & d_1^2 & d_2^2 \\ b^2 & d_1^2 & 0 & d_3^2 \\ c^2 & d_2^2 & d_3^2 & 0 \end{vmatrix} \quad (1)$$

$$= -2[(abd_2d_3)^2 + (acd_1d_3)^2 + (bcd_2d_1)^2] -$$

$$+ [(ad_3)^4 + (bd_2)^4 + (cd_1)^4] =$$

$$= - (ad_3 + bd_2 + cd_1) (ad_3 + bd_2 - cd_1) (ad_3 - bd_2 +$$

$$+ cd_1) (-ad_3 + bd_2 + cd_1)$$

SOLUCIÓN. — Para demostrar la primer igualdad multipliquemos respectivamente por $d_1 d_2 d_3$, d_3 , d_2 y d_1 , la primera, segunda, tercera y cuarta columnas que figuran en el determinante de la izquierda; luego dividamos por $d_3 d_3$, $d_1 d_3$, $d_1 d_2$ respectivamente la segunda, tercera y cuarta filas del mismo. Sabiendo que de esta manera se ha multiplicado y dividido sucesivamente el determinante primitivo por $(d_1 d_2 d_3)^2$, resulta evidente la proposición del enunciado.

En cuanto a la segunda igualdad, desarrollando el determinante que figura en el primer miembro, que llamaremos D , por los elementos de la primer fila y columna, obtendremos sucesivamente:

$$D = 2(a^2 b^2 \begin{vmatrix} d_1^2 d_3^2 \\ d_2^2 0 \end{vmatrix} - a^2 c^2 \begin{vmatrix} d_1^2 0 \\ d_2^2 d_3^2 \end{vmatrix} + b^2 c^2 \begin{vmatrix} 0 d_1^2 \\ d_2^2 d_3^2 \end{vmatrix}) - (a^4 \begin{vmatrix} 0 d_3^2 \\ d_3^2 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ b^4 \begin{vmatrix} d_2^2 0 \\ 0 d_2^2 \end{vmatrix} + c^4 \begin{vmatrix} 0 d_1^2 \\ d_1^2 0 \end{vmatrix}) = (ad_3)^4 + (bd_2)^4 + (cd_1)^4 -$$

$$- 2[(ab d_2 d_3)^2 + (acd_1 d_3)^2 + (bcd_2 d_1)^2]$$

(1) En el enunciado (Año VI, p. 196) se ha deslizado en este desarrollo un error de signo.

sumando y restando $2(abd_2d_3)^2$ a esta última expresión y agrupando los términos convenientemente, podremos poner

$$D = [(ad_3)^2 + (bd_2)^2 - (cd_1)^2]^2 - 4(ad_3bd_2)^2$$

que todavía admite la descomposición en factores

$$D = [(ad_3 - bd_2)^2 - (cd_1)^2][(ad_3 + bd_2)^2 - (cd_1)^2]$$

o

$$D = (ad_3 - bd_2 - cd_1)(bd_2 - cd_1 - ad_3)(cd_1 - ad_3 - bd_2)(ad_3 + bd_2 + cd_1)$$

Esta solución es debida al Sr. ADOLFO DAGHETTO, alumno de la Facultad de C. Matemáticas de Rosario. Otra solución análoga se ha recibido del señor DESIDERIO LÓPEZ, alumno de la misma Facultad.

Observación. — El segundo determinante se obtiene del primero sustituyendo cada letra por su cuadrado. Si el primero se considera en la forma del segundo miembro se ve en seguida que se transforma en sí mismo si se aplica una sustitución circular a las últimas tres filas y luego a las últimas tres columnas. Esto equivale a permutar circularmente las letras a, b, c y al mismo tiempo las d_3, d_2, d_1 . Si formamos ahora los términos del determinante que provienen de multiplicar el elemento ad_3 por el menor complementario se obtiene

$$-ad_3 \begin{vmatrix} ad_3 & 1 & 1 \\ bd_2 & 0 & 1 \\ cd_1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -abd_2d_3 - acd_1d_3 + a^2d_3^2$$

Aplicando las permutaciones indicadas se obtienen los términos

$$-bcd_1d_2 - bad_3d_2 + b^2d_2^2, \quad -cad_3d_1 - cbd_2d_1 + c^2d_1^2;$$

sumando resulta el desarrollo del determinante

$$(ad_3)^2 + (bd_2)^2 + (cd_1)^2 - 2(abd_2d_3 + bcd_1d_2 + cad_3d_1).$$

Sustituyendo ahora cada letra por su cuadrado se obtiene el desarrollo del segundo determinante.

N.º 123.— Demostrar que para todo triángulo acutángulo ABC se verifica

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C \geq 3\sqrt{3}$$

SOLUCIÓN.—I. El problema consiste en hallar el mínimo de la función $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C$ donde las variables A, B, C por las condiciones del enunciado, son ángulos positivos menores que $\frac{\pi}{2}$ y ligados por la relación $A + B + C = \pi$, o sea $\operatorname{tg}(A+B+C)=0$. Por lo tanto, siguiendo el método de Lagrange, hay que extremar

$$\varphi = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C - \lambda \operatorname{tg}(A+B+C)$$

cuyas derivadas parciales igualadas a cero dan las ecuaciones:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial A} = \frac{1}{\cos^2 A} - \frac{\lambda}{\cos^2(A+B+C)} = \frac{1}{\cos^2 A} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial B} = \frac{1}{\cos^2 B} - \frac{\lambda}{\cos^2(A+B+C)} = \frac{1}{\cos^2 B} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial C} = \frac{1}{\cos^2 C} - \frac{\lambda}{\cos^2(A+B+C)} = \frac{1}{\cos^2 C} - \lambda = 0$$

Se sigue, eliminando λ ,

$$\cos^2 A = \cos^2 B = \cos^2 C$$

y, teniendo en cuenta la condición que A, B, C sean menores que $\frac{\pi}{2}$ y por tanto los cosenos son positivos,

$$\cos A = \cos B = \cos C; \quad A = B = C = \frac{\pi}{3}$$

Se nota, por otra parte, que la expresión propuesta puede tomar, por valores convenientes de los ángulos, valores grandes

como se quiera, por lo cual el extremo encontrado es ciertamente un mínimo. Siendo $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, resulta demostrada la proposición propuesta.

II - Veamos de resolver ahora el mismo problema siguiendo un método más elemental. Por las condiciones impuestas tenemos enseguida

$$\operatorname{tg} C = -\operatorname{tg} (A+B) = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B - 1}$$

y reemplazando en la expresión del enunciado y poniendo $\operatorname{tg} A = x$ y $\operatorname{tg} B = y$ se obtiene

$$\frac{xy(x+y)}{xy-1};$$

de esta expresión debemos buscar los extremos: derivando respecto cada una de las variables, e igualando a cero los numeradores, se obtiene

$$(2xy+y^2)(xy-1) - y^2x(x+y) = 0$$

$$(2xy+x^2)(xy-1) - x^2y(x+y) = 0;$$

son estas ecuaciones que deben ser realizadas por los valores de x e y que hacen mínima la expresión propuesta. Desarrollando algunos cálculos las ecuaciones se escriben:

$$y(x^2y-2x-y) = 0$$

$$x(y^2x-2y-x) = 0.$$

Este sistema se satisface por

$$x = y = 0$$

o bien

$$x^2y - 2x - y = 0, \quad y^2x - 2y - x = 0.$$

La primer solución debe excluirse porque correspondería a $A=B=0$, $C=\pi$, lo que contradice a la condición de que el triángulo sea acutángulo (aun cuando se admitieran soluciones límites). Sumando y restando las otras dos ecuaciones se obtiene

$$(xy-3)(x+y)=0$$

$$(xy-1)(x-y)=0.$$

La primera ecuación se realiza con $x+y=0$ que debe excluirse porque suponemos A y B positivos, o bien $xy=3$ que, sustituyendo en la segunda ecuación da $x-y=0$,

$$x=y=\sqrt{3}$$

Resulta así

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} B = \sqrt{3}, \quad \operatorname{tg} C = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Con la misma observación anterior queda asegurado que el extremo correspondiente a estos valores es un mínimo.

Esta solución se debe al señor ADOLFO DAGHETTO, alumno del 1er. año de la Facultad y ayudante en el Instituto.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

PROPUESTOS

132. Siendo $\{\sigma_n\}$ una sucesión de números positivos y $S_n = \sum_{i=1}^n \sigma_i$, demostrar que es condición necesaria y suficiente para que la serie $\sum \sigma_n S_n$ sea convergente, que sea convergente la $\sum \sigma_n$.

133. Dada una sucesión de números positivos $\{a_n\}$ y fijado arbitrariamente un número positivo s_1 , queda definida una sucesión de números positivos s_n realizando la relación recurrente

$$s_{n+1}^2 - s_n s_{n+1} = a_n.$$

Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que la sucesión $\{s_n\}$ tenga límite finito es que la serie $\sum a_n$ sea convergente.

134. Calcular con error < 1 y con error $< 0,1$ la suma de los primeros 10^7 términos de la serie armónica; lo mismo para la suma de los primeros 10^{100} términos.

135. Siendo λ, μ parámetros reales, determinar las condiciones a las cuales deben satisfacer estos parámetros para que la ecuación

$$(1 + \lambda x)^2 (1 + x^2) = \mu x^2,$$

- 1º. Tenga raíces reales;
- 2º. Tenga raíces positivas o negativas;
- 3º. Discutir el número de las mismas.

Guía. — La contestación a la primera pregunta es parcialmente inmediata. Se aconseja entonces poner $\mu = v^2$, y considerar la intersección de las curvas

$$(1 + \lambda x)^2 - v^2 y^2 = 0, \quad (1 + x^2) y^2 - x^2 = 0$$

136. Determinar un polinomio que para todos los valores de x tales que $|x| \leq 100$ represente el valor de $\cosh x$ con un error $< 10^{-2}$.

BIBLIOGRAFIA

- J. W. A. YOUNG. *Fines, valor y métodos de la enseñanza matemática en la escuela primaria y secundaria* (Selección de la obra *The Teaching of Mathematics in the Elementary and Secondary School*). Introducción por el Prof. Emanuel S. CABRERA (Traducción por Carlos Luzuriaga). Editorial Losada. Buenos Aires, 1947 (pág. 222), \$ 7 m. arg.

La primera edición del original inglés es de 1906; pero los 40 y más años transcurridos no han podido quitar actualidad a la obra, pues los problemas didácticos y pedagógicos y aun sus soluciones comparten con la filosofía esta característica: de ser perennemente iguales e igualmente apasionantes. Y aun cuando así no fuera, hay que añadir que las repetidas ediciones, de las que la última es de 1928, han dado modo al autor de mantener el libro al día con algunas noticias de importancia que debemos lamentar no sean mayormente señaladas con fechas (véanse por ej. los Cap. V y VIII); y la Introducción y muchas Notas agregadas por el Ing. E. S. Cabrera con su conocida competencia y su entusiasmo de maestro, nos llevan, en lo que se refiere a la Argentina, hasta los años más recientes señalando interesantes directivas en la práctica pedagógica. También pertenece al Ing. Cabrera la selección efectuada dentro de la obra original con el fin de "hacer resaltar el valor del aspecto formativo de la matemática" resumiendo la parte didáctica y eliminando todos aquellos datos que durante los cuatro últimos decenios han cambiado.

Además de dicha Introducción, el libro se compone de ocho capítulos: I - Propósito y valor del estudio de la matemática en la enseñanza primaria y secundaria. II - Métodos y modos. III - El método heurístico. IV - El modo individual. V - El movimiento de Perry: El método de laboratorio. VI - Puntos diversos de métodos y modos. VII - Definiciones y axiomas. VIII - El valor disciplinario del estudio de la matemática.

En un argumento como el presente creemos que el valor máximo de la palabra —sea ella escrita o pronunciada— está en invitar a reflexionar y a dudar; si, como hemos dicho, los problemas didácticos y pedagógicos no menos que sus soluciones son perennemente iguales, esto depende de que ellos varían con las disposiciones de inteligencia y de carácter y con la formación de cada hombre que en ellos quiera fijarse, mientras que, tomados en conjunto, no representan más que la invariable naturaleza humana. Por esta razón, bien es posible señalar los errores, pero no es posible indicar preceptos y describir el método bueno; con respecto a la matemática el mejor maestro será aquel que con más amplitud sabrá descubrir en ella todos los matices de la vida, desde la simple graciosidad de una observación o de un resultado hasta el triunfo logrado contra una dificultad rebelde.

Muchas cosas del libro podrá luego considerar el lector como información y recuerdo de opiniones expresadas en contingencias determinadas, muchas veces aun lugares comunes, así por ej. los intentos de encontrar una definición para la matemática o la disputa entre método deductivo e inductivo, y si una u otra cosa sea la matemática; las que, como decíamos, despertaran su reflexión y sus dudas; mientras tanto, para apoyar estas dudas, encontrará también conclusiones interesantes. Si está convencido del viejo lema pedagógico que para cada alumno pediría su propio maestro, se lanzará con entusiasmo a través del capítulo IV sobre el modo individual y se encontrará sorprendido por la conclusión final, expresando ciertamente una verdad práctica: "El resultado: A causa de algunas o de todas las desventajas citadas, casi todos los maestros que conozco que habrían adoptado este modo, lo han abandonado en su forma extrema..."; y si entonces se deja atraer por la idea de sustituir el laboratorio de clase al natural laboratorio de la vida, encontrará también en el capítulo siguiente los méritos y los deméritos, posiblemente no todos, del método correspondiente.

El capítulo primero y el último, entre sí estrechamente ligados, es donde mayormente el autor se presenta en su personalidad de ex-profesor de pedagogía matemática de la Universidad de Chicago, buscando una respuesta a la cuestión de cuál sea la función educacional de la enseñanza de la matemática y fijando luego la razón del libro: "Si aceptamos que el alumno normal *pueda* entender la matemática inteligentemente" —y se supone sin más que la respuesta sea afirmativa— "recae sobre nosotros, los profesores de la materia, la pregunta: ¿Por qué no lo hace? Esta creencia y este problema son los motivos que han inspirado la preparación del presente trabajo". Los valores del estudio de la matemática resume el autor, como conclusión del primer capítulo, en: su valor utilitario, su valor como tipo fundamental de pensamiento, como instrumento para el estudio de la naturaleza y como modelo especialmente bueno de ciertas formas importantes del pensamiento. Quizás en este último grupo deba colocarse la discusión del capítulo VIII; diremos de paso que la presentación, con la que empieza el capítulo, del *test* usados en el gran ejército de los Estados Unidos para discriminar las aptitudes intelectuales de los aspirantes podrá servir de diversión también para un lector muy superficial; pero en la discusión que sigue parece el autor encontrarse embarazado entre cierta incredulidad frente a la posibilidad de sacar informaciones fehacientes de preguntas tan ingenuas cuyo resultado parece poder ser fácilmente influenciado por una corta preparación *ad hoc* y la autoridad de una comisión de los más prominentes psicólogos de los EE. UU. ¿Si de verdad son válidas las conclusiones, entonces un poco de preparación matemática llevará fácilmente a triunfar de esta prueba y de otras hechas con *tests* más complicados! El autor da cuenta de algunos que han sido usados para exámenes de matemática. Sobre este procedimiento que parece interesar a muchos maestros de las escuelas norteamericanas, hemos leído aun recientemente frecuentes artículos en el órgano del Consejo Nacional de Profesores de Matemática *The Mathematics Teacher*. Desde luego, es imposible enunciar conclusiones sin que, explícitas o sobreentendidas, hayan hipótesis y axiomas; y lo que en este caso actúa como axiomas son los fines que queramos imponer al hombre y a su cultura.

B. LEVI

E. S. CABRERA y H. J. MEDICI. *Geometría Analítica*, con Prólogo de F. D. Jaime. Buenos Aires. Librería del Colegio, 1847, p. 458. - \$ 12 m/arg.

Con el título algo genérico de *Geometría Analítica* nos ofrecen los AA. con este libro de muy linda presentación un nuevo eslabón de su ya muy extensa y conocida obra didáctica, tendiendo a subir más alto hacia los grados universitarios. Hemos dicho "algo genérico" porque, para corresponder exactamente al título, deberíamos esperar que la obra se completara con algun volumen más; el libro se refiere únicamente a Geometría analítica plana y aun dentro de un determinado marco de programa escolar. Es esta una observación que encontramos hecha ya por el autor del Prólogo, expresando el deseo al cual nos unimos de ver la pronta aparición de un volumen que considere la geometría del espacio. He aquí por lo tanto un sumario del contenido, según el índice mismo: Cap. I - Abseisa de un punto situado sobre un eje. Cap. II - Coordenadas cartesianas y polares. Cap. III - Transformación de coordenadas cartesianas. Cap. IV - La ecuación lineal y la línea recta. Cap. V - Posiciones relativas de dos rectas en un plano. Cap. VI - Estudio de la circunferencia. Cap. VII - Estudio de la parábola. Cap. VIII - Estudio de la elipse. Cap. IX - Estudio de la hipérbola. Cap. X - Ecuación de segundo grado con dos incógnitas. Cap. XI - Curvas algebraicas de orden superior al segundo y otras trascendentes de común aplicación.

Hay por tanto, por lo que se vé en seguida, y más todavía cuando con la lectura nos fijamos en detalles, un plan didáctico cuidadosamente estudiado para responder, en lo que se refiere a la elección de los argumentos, a las exigencias de programas escolares impuestos en gran parte por la tradición, y al mismo tiempo obedecer a ciertos principios logicistas y facilitar el estudio al alumno más allá, diríamos, de lo que el mismo podría atreverse a pedir; contribuyen para este último fin la ya aludida hermosa presentación, las figuras claras y numerosas, y un empeño cuidadosamente sostenido en conservar a la exposición una forma rigurosamente categórica, según un formalismo lógico bien definido, por división de los razonamientos en teoremas, reglas, definiciones, condiciones necesarias y suficientes, etc., que, mediante el orden metódico, tiende a ayudar la memoria. Quizá pueda dudarse también que esta misma precisión metodológica vaya a imponer un cuidado especial al profesor que dirige la clase para evitar que los menudos pedacitos de la deducción puedan transformarse en las respuestas materialmente preparadas para las bolillas. Sirve para aliviar todavía el esfuerzo mental del estudiante el capítulo de Introducción donde se resumen fórmulas y nociones de trigonometría, de álgebra y aún de geometría, no todas extrañas propiamente a la geometría analítica entendida en sentido convenientemente amplio, pero que se suponen adquiridas en cursos anteriores y que en el curso de la exposición deberán encontrar aplicación.

El libro responde luego plenamente a un cierto grado de información como corresponde a los fines de determinadas escuelas secundarias, principalmente de carácter técnico; numerosos ejercicios puestos al final de cada capítulo concurren en modo eficaz a ese fin; también responde a cierta forma de gimnasia y precisión mental, por cuanto se quiera asignar ese fin al estudio de la

matemática. Más dudosos nos encontraríamos en las conclusiones si verdaderamente tuvieran que atribuírsele al libro los fines de la cultura universitaria. Muy a propósito recuerdan los autores desde las primeras líneas que la *geometría analítica es un método*. Así ella ha surgido ya en la mente de Descartes, y esa es su originalidad en comparación con otros capítulos de las matemáticas que llevan el mismo título de *geometría*; un método que le permitió a su inventor incluir en la geometría las entonces llamadas curvas mecánicas. La razón del éxito conseguido por la nueva geometría no fué que ella permitiera reconstruir la teoría de las cónicas que Descartes, como también Newton todavía un siglo más tarde, aceptaban según Apolonio, sino de ampliar el alcance de los métodos geométricos liberándolos de la atadura a la gráfica construibilidad y a la tridimensionalidad espacial; y de ser después el instrumento dúctil para proporcionar representaciones de funciones, derivadas, integrales, etc.

Me parece por eso necesario que hasta para nuestros estudiantes universitarios sea más el instrumento que no las teorías particulares lo que debe interesar, debiéndose considerar aquellas más bien como ejemplos y modelos. La geometría analítica es un desenvolvimiento del más antiguo cálculo segmentario, del cual también desciende el álgebra ⁽¹⁾; en ella además pasa en segundo orden cualquier teoría se quiera profesar alrededor de la noción de número; por eso considero improductivo lo de insistir en distinguir entre los entes geométricos y su medida en la aplicación de las operaciones algebraicas, aun cuando se puedan citar pretendidos maestros de la didáctica que, en un supuesto homenaje al valor lógico formativo de la matemática, lo hayan hecho argumento para un pesado cuanto inocente rigor que no es materialmente posible mantener de verdad, porque las demostraciones tendrían que alargarse en inútiles menudencias; pero más importante es observar que la distinción entre la magnitud y su medida, hasta tanto máximamente se opera exclusivamente sobre una determinada clase de magnitudes homogéneas, es inoperante y contraria a las costumbres de la práctica, generándose así en el alumno un juicio equivocado sobre el valor y los fines de la enseñanza. Pertenecen posiblemente al mismo renglón, aunque sobre un plano un poco diferente, las notas de realidad, mientras de puntos y coordenadas imaginarios no se ha tenido todavía oportunidad de hablar, y alguna otra pequeñez de vocabulario. Cae

⁽¹⁾ Pueden todavía considerarse a este respecto como un modelo de importancia didáctica las primeras líneas de "La Geometrie" de Descartes: "Como toda la aritmética está compuesta por cuatro o cinco operaciones que son la adición, ... igualmente en la geometría con respecto a las líneas (segmentos) que se buscan, no hay otra cosa que hacer para prepararlas a ser conocidas sino sumarles o restarles otras, o bien, habiendo fijada una, que yo llamaré la unidad para mantener mejor la analogía con los números, y que puede ordinariamente elegirse arbitrariamente, y luego siendo dadas otras dos, encontrar una cuarta que sea respecto una de estas como la otra respecto de la unidad, lo que es lo mismo que la multiplicación; o también encontrar una cuarta que sea a una de las dos como la unidad es respecto de la otra, lo que es lo mismo que la división... Y yo no tendré reparos en introducir en la geometría estos términos de la aritmética con el fin de hacerme más comprensible... Pero frecuentemente no es necesario trazar estas líneas en el papel, sino que es suficiente indicirlas por medio de letras..."

a propósito señalar aquí que, sin la introducción, con oportuna definición, de puntos imaginarios es imposible definir en términos geométricos, la noción de orden de una curva, salvo pasar por vías desacostumbradas y torcidas; debe por tanto considerarse como una inadvertencia que en la pág. 109 se alude, para tal definición, aunque en forma totalmente incidental, al “máximo número de puntos reales” que la curva puede tener comunes con una recta del plano; si así fuera, todas las curvas convexas (como, para hacer un ejemplo, la cuartica $x^4 + y^4 = a^4$) serían cónicas; el grado es fenómeno esencialmente algebraico, adherente a la representación cartesiana, e irreducible a la forma gráfica.

B. LEVI

CRISTÓBAL DE LOSADA Y PUGA. *Curso de análisis matemático*. Tomo II. Lima. Editorial Lumen, 1947 (p. 700).

El ilustre profesor y ex-rector de la Universidad Católica de Lima (Perú) da a la luz el segundo volumen de su gran tratado de Análisis matemático. Con término genérico podría caracterizarse el tema desarrollado aquí como *aplicaciones*, comprendiendo seis capítulos sobre Series en general, Series de potencias, Fórmula de Taylor en varias variables, Curvas planas, Curvas alabeadas, Superficies, Cálculo aproximado de integrales, Integrales impropias. Diferenciación de funciones definidas por integrales, Integrales curvilíneas y diferenciales totales, Integrales múltiples.

Como el tomo anterior, el libro se caracteriza por el cuidado y la prolijidad, sea de la presentación editorial, sea de la exposición didáctica, llamando frecuentemente la atención del lector, tanto en el curso de las demostraciones como en escolios aparte, sobre detalles característicos de las cuestiones al estudio. El capítulo sobre integración aproximada (numérica, gráfica y mecánica) tiene extensión mucho mayor de lo que da la costumbre, con un estudio detallado de los planímetros.

Cada capítulo está acompañado por muchos ejercicios con frecuentes indicaciones para guiar al estudioso en la solución. Cierran el volumen tablas numéricas de logaritmos en 4 decimales, de los valores naturales de las funciones trigonométricas, de potencias, raíces y logaritmos naturales de los 100 primeros números enteros, de los log. nat. $n/10$ y $n/100$ ($1 \leq n \leq 9$), de las $n!$ y $1:n!$ ($1 \leq n \leq 20$), de las funciones hiperbólicas y exponencial.

B. LEVI

- El precio de suscripción a “*Mathematicae Notae*” es de 8 \$ (m/n) anuales.
- El Instituto de Matemática publica también una colección de Notas y Memorias bajo el título “Publicaciones del Instituto de Matemática de la Facultad de Ciencias etc.”, cuyo precio de suscripción es de 10 \$ (m/n) por volumen. Se pueden adquirir los fascículos sueltos de las publicaciones al precio señalado en la pág. 4 de esta misma tapa.
- Para todo lo relacionado al Instituto, a las Publicaciones y a “*Mathematicae Notae*” dirigirse al Director del Instituto de Matemática — Avenida Pellegrini 250 — Rosario (R. Argentina).
- Para suscripciones y adquisición de los fascículos sueltos dirigirse al Director del Instituto o bien al Bibliotecario de la Facultad de Ciencias Matemáticas, etc., Avenida Pellegrini 250, Rosario (Rep. Argentina). Los importes deberán remitirse en efectivo o bien por giros postales o bancarios pagaderos en la ciudad de Rosario, con preferencia sobre el Banco de la Nación Argentina.
- Los suscriptores en la República Oriental del Uruguay pueden dirigirse al señor Prof. F. Sayagués, Constituyente 1863, Montevideo.