Instituto Politécnico

Universidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de

Cuadriláteros 1º Año

Cód. 1105-19

Corrección y adaptación:
Prof. María del Luján Martínez
Prof. Mónica Napolitano

Matemática

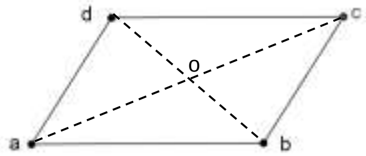
Dpto. de Matemática

Masterización: RECURSOS PEDAGOGICOS

PARALELOGRAMO

Definición

Un **paralelogramo** es un cuadrilátero con sus lados opuestos paralelos



Los paralelogramos poseen las siguientes propiedades

PROPIEDAD 1

En todo paralelogramo, los lados opuestos son congruentes

PROPIEDAD 2

En todo paralelogramo, las diagonales se bisecan

PROPIEDAD 3

En todo paralelogramo, los ángulos opuestos son congruentes

- Demuestra las Propiedades 1, 2 y 3.

¿Qué significa que sea necesario y suficiente?
Un ejemplo: El tomar 2*l* de agua diaria es una condición necesaria para tener una buena salud. Ahora, claro está que sólo de agua no vive el hombre. es decir que no es una condición suficiente.
Investiga "Condición necesaria y suficiente" en Wikipedia y escribe un par de ejemplos cotidianos.

Propiedades recíprocas

Las propiedades anteriores, enuncian las condiciones necesarias de los cuadriláteros que son paralelogramos. ¿Serán suficientes? Es decir, si un cuadrilátero cumple con alguna de esas condiciones, el mismo, ¿será paralelogramo?

PROPIEDAD 4

Si los lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes, entonces es un paralelogramo

PROPIEDAD 5

Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan, entonces el mismo es un paralelogramo

PROPIEDAD 6

Si los ángulos opuestos de un cuadrilátero son congruentes entonces es un paralelogramo.

CONDICIONES NECESARIAS Y SUFICIENTES

- De las propiedades 1 y 4 resulta:

Un cuadrilátero, es paralelogramo si y sólo si los lados opuestos son congruentes

En símbolos:

$$\text{abcd paralelogramo} \Leftrightarrow \overline{ab} = \overline{dc} \wedge \overline{bc} = \overline{ad}$$

- De las propiedades 2 y 5 resulta:

Un cuadrilátero, es paralelogramo si y sólo si las diagonales se bisecan

En símbolos:

$$abcd \text{ paralelogramo} \Leftrightarrow \overline{ao} = \overline{oc} \wedge \overline{bo} = \overline{od}$$

- De las propiedades 3 y 6 resulta:

Un cuadrilátero, es paralelogramo si y sólo si los ángulos opuestos son congruentes

En símbolos:

$$abcd \text{ paralelogramo} \Leftrightarrow \hat{a} = \hat{c} \wedge \hat{b} = \hat{d}$$

- Otra propiedad importante:

Un cuadrilátero, es paralelogramo si y sólo si posee un par de lados opuestos congruentes y paralelos

En símbolos:

$$abcd \text{ paralelogramo} \Leftrightarrow \overline{ab} = \overline{cd} \wedge \overline{ab} \,//\, \overline{cd}$$

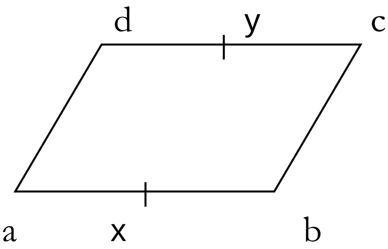
- Demuestra esta propiedad

Problemas

1) Demuestra que las bisectrices de dos ángulos opuestos de un paralelogramo son paralelas.

2) Demuestra que las bisectrices de dos ángulos consecutivos de un paralelogramo son perpendiculares.

3) Si x e y son los puntos medios de los lados opuestos de paralelogramo **abcd** y $\overline{xy} \cap \overline{ac} = \{o\}$, ¿será **o** punto de intersección de las diagonales? Justifica tu respuesta.



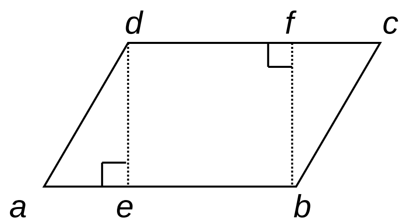
4) H) **abcd** paralelogramo

$\overline{de} \perp \overline{ab}$

$\overline{fb} \perp \overline{dc}$

T) $\overline{de} = \overline{fb}$

Realiza la demostración

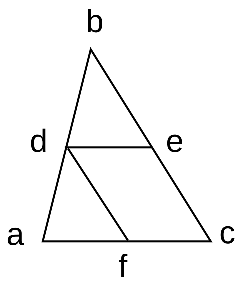


5) H) decf paralelogramo

$\overline{bc} = \overline{ac}$

T) perímetro paralelogramo *decf* $= 2\overline{bc}$

Realiza la demostración



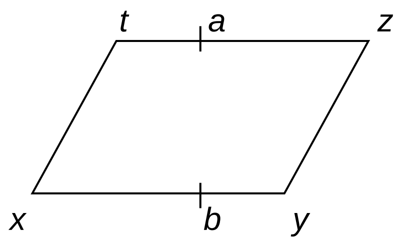
6)

H) **xyzt** paralelogramo

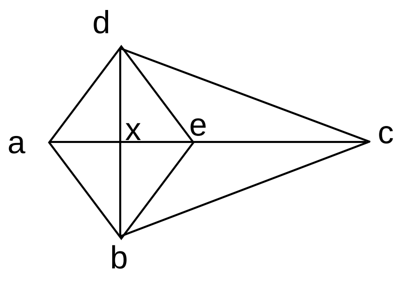
$\overline{by} = \overline{ta}$

T) **tbya** paralelogramo

Realiza la demostración.



7) Sabiendo que $\overline{xc}$ es mediana del $\overset{\Delta}{dbc}$ y que $e\hat{b}d = a\hat{d}b$,, demuestra que **abed** es un paralelogramo



1.1. TRAPECIO

Definición

> Un **trapecio** es un cuadrilátero que posee al menos un par de lados opuestos paralelos

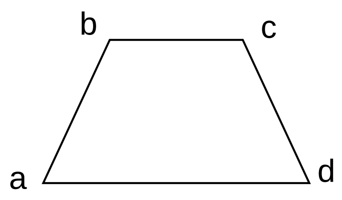
1.2.1 TRAPECIO ISÓSCELES

Definición

> Un trapecio que tiene el par de lados no paralelos congruentes se llama **trapecio isósceles**

En símbolos:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{bc} \parallel \overline{ad} \\ \overline{ab} \nparallel \overline{cd} \\ \overline{ab} \cong \overline{cd} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{abcd trapecio isósceles}$$



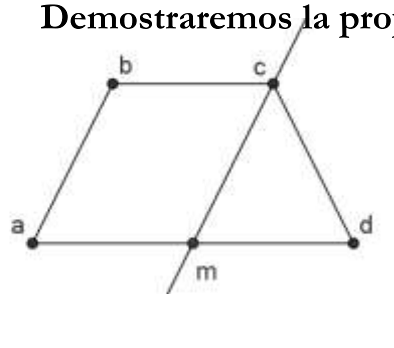
Observación

A cualquiera de los lados paralelos se le llama base del trapecio isósceles.

Propiedades:

(I) En un trapecio isósceles, los ángulos de la base son congruentes.
(II) En un trapecio isósceles, las diagonales son congruentes.

Demostraremos la propiedad I.



H) abcd trapecio isósceles, $\overleftrightarrow{bc} \parallel \overleftrightarrow{ad}$

T) $\hat{a} = \hat{d}$ y $\hat{b} = \hat{c}$

D) Completa las proposiciones y así obtendrás la demostración

Trazamos $\overleftrightarrow{cm} // \overleftrightarrow{ab}$, entonces abcm es un paralelogramo. ¿Por qué?............
Luego

$$\left.\begin{array}{l}\overline{ab}=\overline{cm}\ (1)\\ \overline{ab}=\overline{cd}\ \ (2)\end{array}\right\} \overset{(3)}{\Rightarrow} \overline{cm}=\overline{cd} \overset{(4)}{\Rightarrow} \overset{\triangle}{cmd} \text{ isósceles} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c\hat{m}d \overset{(5)}{=} \hat{d}\\ \hat{a}=c\hat{m}d\ \ (\text{por}(6))\end{array}\right\} \overset{(3)}{\Rightarrow} \hat{a}=\hat{d}$$

Ya demostramos que: $\hat{a}=\hat{d}$ (*)

$$\left.\begin{array}{l}\hat{a}+\hat{b}=2R \text{ por ser conjugados internos en} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \hat{c}+\hat{d}=2R \text{ por ser conjugados internos en} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\hat{a}+\hat{b}=\hat{c}+\hat{d}\\ y(*)\ \hat{a}=\hat{d}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{b}=\hat{c}$$

(1)…………………………………………………………………………

(2)…………………………………………………………………………

(3) Propiedad transitiva

(4)…………………………………………………………………………

(5) En todo triángulo, a lados congruentes se opones ángulos congruentes

(6) Ángulos correspondientes entre …………………………………………

Problemas

8) Demuestra la **Propiedad II**

9) Demuestra que si un trapecio posee el par de ángulos de una base congruentes, entonces el trapecio es isósceles.

10) En el paralelogramo abcd donde $\overleftrightarrow{bc} // \overleftrightarrow{ad}$, sea el punto **m** del lado $\overline{ad}$ y perteneciente a la bisectriz del ángulo interior $\hat{b}$. Sabiendo que $\hat{b}=2\hat{a}$, demuestra que el cuadrilátero bmdc es un trapecio isósceles.

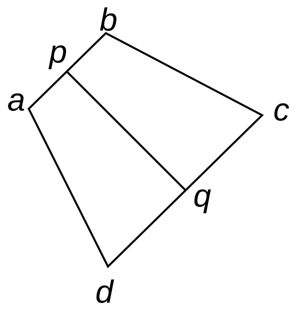
1.2. BASE MEDIA

BASE MEDIA DE UN CUADRILÁTERO

Consideremos la siguiente definición:

> **Base Media de un cuadrilátero** es el segmento determinado por los puntos medios de dos lados opuestos

Simbólicamente:



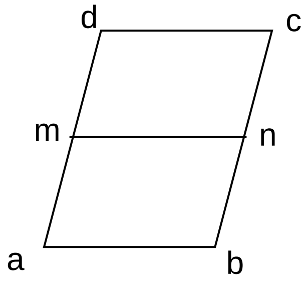
$$\left.\begin{array}{l} p \text{ punto medio de } \overline{ab} \\ q \text{ punto medio de } \overline{cd} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \overline{pq} \text{ base media del abcd}$$

- Construye la otra base media

BASE MEDIA DE UN PARALELOGRAMO

En el caso particular que el cuadrilátero es un paralelogramo pueden demostrarse que:

> La base media de un paralelogramo es paralela y congruente con los lados opuestos del paralelogramo



H) abcd es un paralelogramo
$\overline{mn}$ base media

T) $\overline{mn} \overset{//}{=} \overline{ab}$; $\overline{mn} \overset{//}{=} \overline{dc}$

D) Completando las proposiciones obtendrás la demostración

abcd es un paralelogramo $\Rightarrow \overline{ad} \overset{//}{=} \overline{bc}$ (1)

$$\overline{mn} \text{ base media} \Rightarrow \begin{cases} m\text{..................de } \overline{ad} \Rightarrow \overline{md} = \dfrac{1}{2}\overline{ad} & (2) \\ n\text{..................de } \overline{bc} \Rightarrow \text{.........} = \dfrac{1}{2}\text{.......} & (3) \end{cases}$$

De (1) ;(2) y (3) $\Rightarrow \overline{md} \overset{//}{=} \overline{nc}$ por ser mitades de lados opuestos de un paralelogramo.

$\overline{md} \overset{//}{=} \overline{nc} \Rightarrow$ mdcn es un…………………… pues

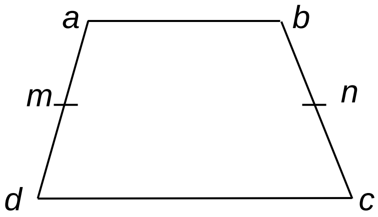
……………………………………………………………………………………..

$$\left.\begin{array}{l} \text{mdcn paralelogramo} \Rightarrow \overline{mn} \overset{//}{=} \overline{dc} \\ \\ \text{abcd paralelogramo} \Rightarrow \overline{ab} \overset{//}{=} \overline{dc} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{mn} \overset{//}{=} \text{.........} \overset{//}{=} \text{..........}$$

BASE MEDIA DE UN TRAPECIO

Cuando el cuadrilátero es un trapecio puede demostrarse que:

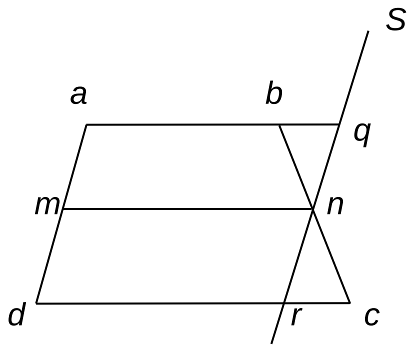
El segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio es paralelo a los otros dos lados y congruente con su semisuma



H) **abcd** es trapecio con $\overline{ab} // \overline{cd}$
$\overline{mn}$ base media

T) $\overline{ab} // \overline{cd} // \overline{mn}$; $\overline{mn} = \dfrac{\overline{ab} + \overline{cd}}{2}$

- Completa las proposiciones para demostrar el teorema.
  Previamente efectuaremos una construcción auxiliar:
  por **n** trazamos una recta ***S*** paralela a $\overline{ad}$ y llamamos $\overleftrightarrow{ab} \cap S = \{q\}$ y $\overleftrightarrow{dc} \cap S = \{r\}$



Comparamos los triángulos $\overset{\Delta}{bqn}$ y $\overset{\Delta}{nrc}$

$\overset{\Delta}{bqn}$ y $\overset{\Delta}{nrc}$ $\left\{\begin{array}{ll} b\hat{n}q = r\hat{n}c & \text{por ....} \\ q\hat{b}n = n\hat{c}r & \text{por ....} \\ \overline{bn} = \overline{nc} & \text{por ....} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{bqn} = \overset{\Delta}{rnc}$ pues ....

....

$\overset{\Delta}{bqn} = \overset{\Delta}{rnc} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \overline{bq} = \overline{rc} \\ \overline{qn} = \overline{nr} \quad (1) \end{array}\right\}$ por ....

aqrd es un paralelogramo por construcción

m punto medio de $\overline{ad}$ por H
n punto medio de $\overline{qr}$ por (1)
$\Rightarrow \overline{mn}$ es ....

De **aqdr** $\Rightarrow \overline{mn} \overset{//}{=} \overline{aq} \wedge \overline{mn} \overset{//}{=} \overline{dr}$ siendo $\overline{aq} \overset{//}{=} \overline{cr}$ de donde

$\boxed{\overline{mn} \,//\, \overline{ab} \,//\, \overline{cd}}$ (Aquí se demuestra la primera parte de la Tesis)

Además

$$\overline{mn} = \overline{aq} \Rightarrow \overline{mn} = \overline{ab} + \overline{bq}$$
$$\overline{mn} = \overline{dr} \Rightarrow \overline{mn} = \overline{cd} - \overline{rc}$$
$$2\overline{mn} = \overline{ab} + \overline{cd}$$

$\boxed{\overline{mn} = \text{..................}}$ (se demuestra la segunda parte de la tesis)

BASE MEDIA DE UN TRIÁNGULO

Si se extiende la definición de base media de un cuadrilátero para un triángulo resulta:

> **Base Media de un triángulo** es el segmento que posee como extremos los puntos medios de dos lados

PROPIEDAD

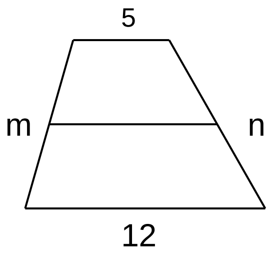
> La **base media** respecto a un lado del triángulo, es paralela y congruente con la mitad del mismo

Se puede demostrar esta propiedad

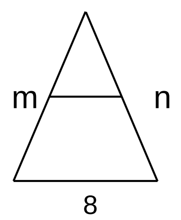
Problemas

11)Calcula la medida de la base media $\overline{mn}$, en cada caso

a)

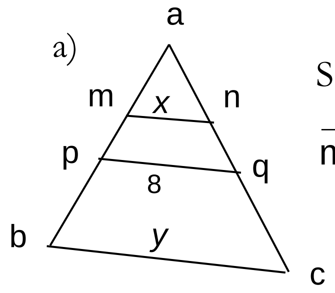


b)



12) Calcula x e y si $\overline{mn}$ // $\overline{pq}$ // $\overline{bc}$

a)

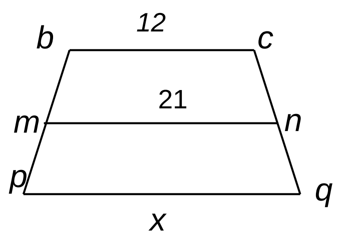


Sabiendo que:

$\overline{mn}$ base media $\overset{\Delta}{paq}$

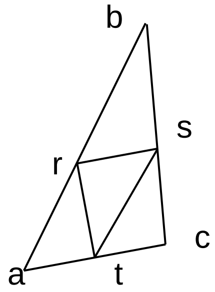
$\overline{pq}$ base media $\overset{\Delta}{abc}$

b)



$\overline{mn}$ base media pbcq

13) r, s y t son puntos medios de los lados del $\overset{\Delta}{abc}$ cuyos lados miden:

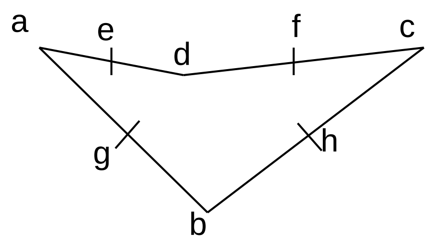


$\overline{ac} = 23\,cm$, $\overline{bc} = 32\ cm$ y $\overline{ab} = 45\ cm$

Halla el perímetro del $\overset{\Delta}{rst}$

14) Si x, y, t son puntos medio de los lados $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ y $\overline{ac}$ respectivamente del $\overset{\Delta}{abc}$, demuestra que xyct es un paralelogramo

15)



e, f, g y h son los puntos medios de los lados consecutivos de un cuadrilátero no convexo de la figura. ¿Será **efgh** un paralelogramo?. Justifica tu respuesta.

PROPIEDAD

Toda recta paralela a un lado de un triángulo trazada por el punto medio de otro de los lados, interseca al tercer lado en el punto medio de éste.

Se puede demostrar esta propiedad

Problema

16) Prueba que el segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio biseca a las dos diagonales.

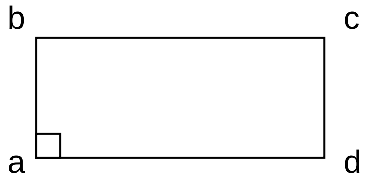
2 PARALELOGRAMOS PARTICULARES

Paralelogramos particulares son el rectángulo, el rombo y el cuadrado.

2.1 RECTÁNGULO

Definición:

Un **rectángulo** es un paralelogramo con un ángulo recto



- Demuestra que el rectángulo **abcd** es un CUADRILÁTERO EQUIÁNGULO

Veamos una propiedad importante de los rectángulos:

PROPIEDAD

Las diagonales del rectángulo son congruentes

- *Efectúa su demostración*

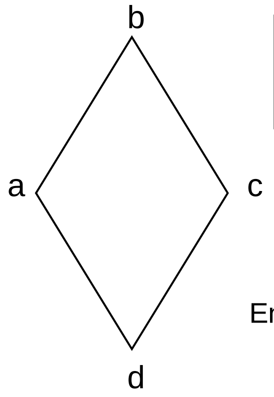
Propiedad recíproca

Si un paralelogramo tiene sus diagonales congruentes es un rectángulo

- *Efectúa su demostración*

2.2 ROMBO

<u>Definición</u>



Un rombo es un paralelogramo con dos lados consecutivos congruentes

En la figura $\overline{ab} = \overline{bc}$

- Demuestra que un rombo es un CUADRILÁTERO EQUILÁTERO

Veamos una propiedad importante de los rombos:

PROPIEDADES

- ***Las diagonales del rombo son perpendiculares.***
- ***Las diagonales del rombo son bisectrices de los ángulos opuestos.***

- *Efectúa las demostraciones correspondientes*

Propiedades recíprocas

- ***Si las diagonales de un paralelogramo son perpendiculares, el paralelogramo es un rombo.***
- ***Si las diagonales de un paralelogramo son bisectrices de los ángulos opuestos , el paralelogramo es un rombo***

- *Efectúa las demostraciones correspondientes*

2.3 CUADRADO

Definición:

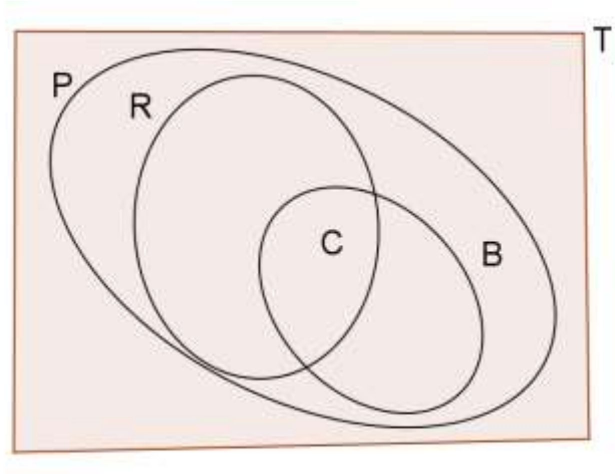
Un **cuadrado** es un cuadrilátero regular

➢ Completa:

Un cuadrado es un rectángulo porque ....

Un cuadrado es un rombo porque...

➢ Veamos un diagrama que muestre la relación de inclusión entre los conjuntos



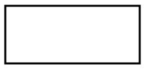
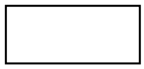
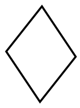
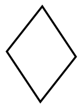
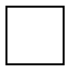
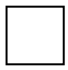
T = {trapecios}

P = {paralelogramos}

R = {rectángulos}

B = {rombos}
C = {cuadrados}

SINTESIS

NOMBRE	CUADRILÁTERO	PARALELOGRAMO CON:	PROPIEDADES DE LAS
RECTÁNGULO	 equiángulo	 un ángulo recto	-Se bisecan mutuamente -Son congruentes
ROMBO	 equilátero	 dos lados consecutivos congruentes	-Se bisecan mutuamente -Son perpendiculares -Bisecan a los ángulos opuestos
CUADRADO	 equilátero y equiángulo	 un ángulo recto y dos lados consecutivos congruentes	-Se bisecan mutuamente -Son congruentes -Son perpendiculares -Bisecan los ángulos opuestos

Problemas

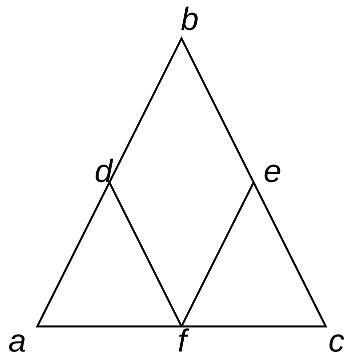
17)Justifica la veracidad de las siguientes proposiciones:

a) Todo rombo es un paralelogramo
b) Un rectángulo es un trapecio
c) Un cuadrado es un paralelogramo
d) Algunos paralelogramos son rombos
e) Todos los cuadrados son rombos
f) Las diagonales de un cuadrado se bisecan
g) Las rectas que incluyen a las diagonales de un rombo son eje de simetría del mismo

18)Responde y justifica:

a) Un cuadrilátero que tenga un par de lados consecutivos congruentes, ¿es un rombo?
b) Un cuadrilátero que tenga dos ángulos rectos, ¿es un rectángulo?

21)



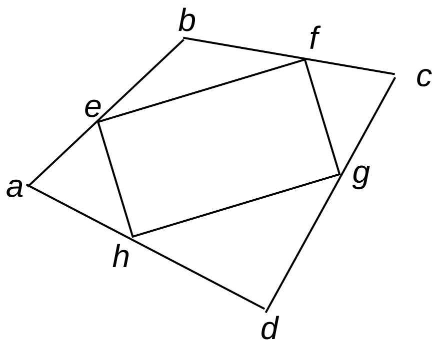
H) d punto medio de $\overline{ab}$
e punto medio de $\overline{bc}$
f punto medio de $\overline{ac}$
$\overline{ab} = \overline{bc}$

T) **dbef** rombo

Realiza la demostración.

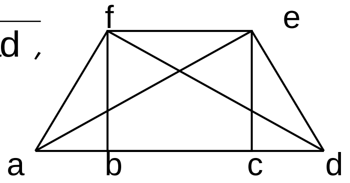
22) Demuestra cada propuesta con respecto al dibujo de la derecha:

H) *abcd* paralelogramo
e, *f*, *g* y *h* puntos medios de los lados.
T) efgh paralelogramo



AUTOEVALUACIÓN

1) En la figura es $\overline{fb} \perp \overline{ad}$, $\overline{ec} \perp \overline{ad}$,
   $\overline{af} = \overline{ed}$ y $\overline{fb} = \overline{ec}$
   Demuestra que $\overline{ae} = \overline{fd}$

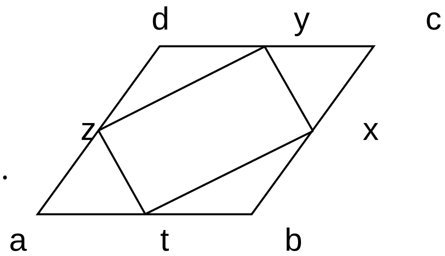


.

2) En el paralelogramo *abcd* traza las perpendiculares a la diagonal $\overline{ac}$ desde *b* y *d* y llama *r* y *s* a los respectivos pies de tales perpendiculares. Demuestra que *rdsb* es un paralelogramo.

3) Demuestra que los segmentos que unen los puntos medios de los lados opuestos de un cuadrilátero se bisecan mutuamente.

4) Sean **x, y, z** y **t** los puntos medios de los lados del rombo **abcd**. Demuestra que **xyzt** es un rectángulo.



5) En un paralelogramo **abcd** con $\overline{ad} > \overline{ab}$, la bisectriz $\hat{a}$ corta a $\overline{bc}$ en *g* y la del $\hat{b}$ interseca a $\overline{ad}$ en *h*. Demuestre que **abgh** es un rombo.

BIBLIOGRAFIA

- Apunte "El Universo de los cuadriláteros" Hinrichsen-Buschiazzo-Cattaneo Impreso en el instituto Politécnico 1985
- Geometría Serie Awli - Clemens - Editorial Addison Wesley Longman –Impreso en Mexico - Año 1998