



Blaconá, María Teresa*

Bussi, Javier**

Ventroni, Nora**

Beltrán, Celina

**Instituto de Investigaciones Teóricas y Aplicadas de la Escuela de Estadística, Facultad de Ciencias Económicas y Estadística. Consejo de Investigaciones, Universidad Nacional de Rosario. E-mail: mblacona@agatha.unr.edu.ar*

*** Instituto de Investigaciones Teóricas y Aplicadas de la Escuela de Estadística, Facultad de Ciencias Económicas y Estadística, Universidad Nacional de Rosario.*

TÓPICOS RECIENTES DE SERIES DE TIEMPO MULTIVARIADAS APLICADOS EN LA ECONOMÍA

I. INTRODUCCIÓN

Un aspecto importante de las ciencias sociales, económicas, políticas, entre otras, es realizar pronósticos con un cierto grado de precisión. En la toma de decisiones, al menos implícitamente, se debe tener alguna idea del futuro.

Se pueden realizar pronósticos a partir de información cualitativa o cuantitativa, a este último tipo pertenecen las series de tiempo que se las puede definir como un conjunto de observaciones pasadas y presentes registradas secuencialmente en el tiempo. Esta información por lo general es bastante limitada, y es a partir de ella que se pretende, mediante un modelo estadístico, conseguir previsiones con un grado de incertidumbre controlable. Por este motivo es importante usar métodos de pronósticos que tengan en cuenta todas las fuentes de información disponibles.

A partir de estas fuentes, se puede contar con una única serie y aplicar modelos para una única variable (univariados); o varias series relacionadas, en cuyo caso puede ser beneficioso utilizar modelos de varias variables (multivariados).

En distintas publicaciones referidas al tema, (libros, revistas especializadas, comunicaciones de congresos) se encuentran preferentemente trabajos tanto teóricos como aplicados que analizan temas sobre series de tiempo univariadas. A modo de ejemplo, si se revisan los artículos presentados en la revista que es publicación oficial del International Institute of Forecasters: International Journal of Forecasting, de los últimos cinco años sólo aproximadamente el 7% de los artículos trata temas referidos a series multivariadas. No obstante, es reconocido por muchos autores que si se cuenta con dos o más series relacionadas se pueden encontrar estimaciones más eficientes y pronósticos más precisos si se trabaja con series multivariadas en lugar que con cada serie en forma univariada.

A modo de ejemplo se pueden mencionar: Peña (2001), realiza simulaciones Monte Carlo, donde compara el desempeño de modelos ARIMA y VARMA y muestra que cuando la dependencia entre las componentes de un vector de series de tiempo es contemporánea, crece la precisión de los pronósticos multivariados respecto de los univariados. Bidarkota (1998), para realizar pronósticos de la tasa real de interés compara los pronósticos contruidos a partir de un modelo univariado de componentes



no observadas, con un modelo bivariado tomando como segunda variable la tasa de inflación, imponiendo restricciones de cointegración entre las dos series. Muestra que el modelo de corrección de error realiza pronósticos post muestrales una etapa hacia delante, más exactos y precisos.

Entre los modelos multivariados más utilizados se pueden distinguir: modelos VAR (Tiao y Box y, 1981), modelos para series cointegradas y modelos de corrección de error (Engle y Granger, 1987), modelos estructurales multivariados (Harvey, 1989).

Hasta hoy día existen controversias sobre cuáles modelos se desempeñan mejor y bajo qué circunstancias. Así mismo, existen varios tópicos para los cuales dichas controversias son más candentes. De dichos tópicos se presentan: i) Modelos VAR y cointegración, ii) Series estacionales y cointegración.

En este trabajo se realiza un breve reseña de los métodos de series de tiempo multivariadas más recomendados en la bibliografía reciente, y se aplican a series argentinas. En la sección II se presentan brevemente los modelos VAR, la definición de cointegración, los modelos VAR restringidos con la ecuación de equilibrio y una aplicación a las series de tasas de desocupación de Gran Rosario y Gran Buenos Aires. En la sección III se realizan los mismos pasos de la sección II pero con modelos estructurales de espacio de estado multivariados. En la sección IV se analizan especialmente los modelos multivariados para series con estacionalidad tanto por medio de los VAR como de los estructurales. En la sección V se realiza una breve discusión y en la sección VI se presentan las referencias bibliográficas.

II. MODELOS VAR

Dadas m series de tiempo $y_1, y_2, \dots, y_m$ conjuntamente con m series individuales ruido blanco $\varepsilon_{1,t}, \varepsilon_{2,t}, \dots, \varepsilon_{m,t}$ organizadas en los vectores $\mathbf{Y}_t$ y $\mathbf{e}_t$ de la siguiente manera:

$$\mathbf{Y}_t = \begin{bmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \\ \vdots \\ y_{m,t} \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{m,t} \end{bmatrix} \quad (II.1)$$

se puede considerar el modelo vectorial autoregresivo de orden p , usualmente referido como VAR(p), el cual se representa a continuación:

$$\mathbf{Y}_t = \begin{bmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \\ \vdots \\ y_{m,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11,1} & \dots & \dots & \phi_{1m,1} \\ \phi_{21,1} & & & \phi_{2m,1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \phi_{m1,1} & \dots & \dots & \phi_{mm,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \\ \vdots \\ y_{m,t-1} \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} \phi_{11,p} & \dots & \dots & \phi_{1m,p} \\ \phi_{21,p} & & & \phi_{2m,p} \\ \vdots & & & \vdots \\ \phi_{m1,p} & \dots & \dots & \phi_{mm,p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,t-p} \\ y_{2,t-p} \\ \vdots \\ y_{m,t-p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{m,t} \end{bmatrix} \quad (II.2)$$

donde $\mathbf{e}_t \sim N(0, \Sigma)$ y las series individuales $\varepsilon_{i,t}$ no están correlacionadas con sus propias observaciones pasadas ni con observaciones pasadas de las otras series correspondientes a los otros errores $\varepsilon_{j,t}$ ($i \neq j$). El modelo se puede escribir en forma más abreviada de la siguiente manera:



$$Y_t = \mu + \Phi_1 Y_{t-1} + \dots + \Phi_p Y_{t-p} + e_t \quad (II.3)$$

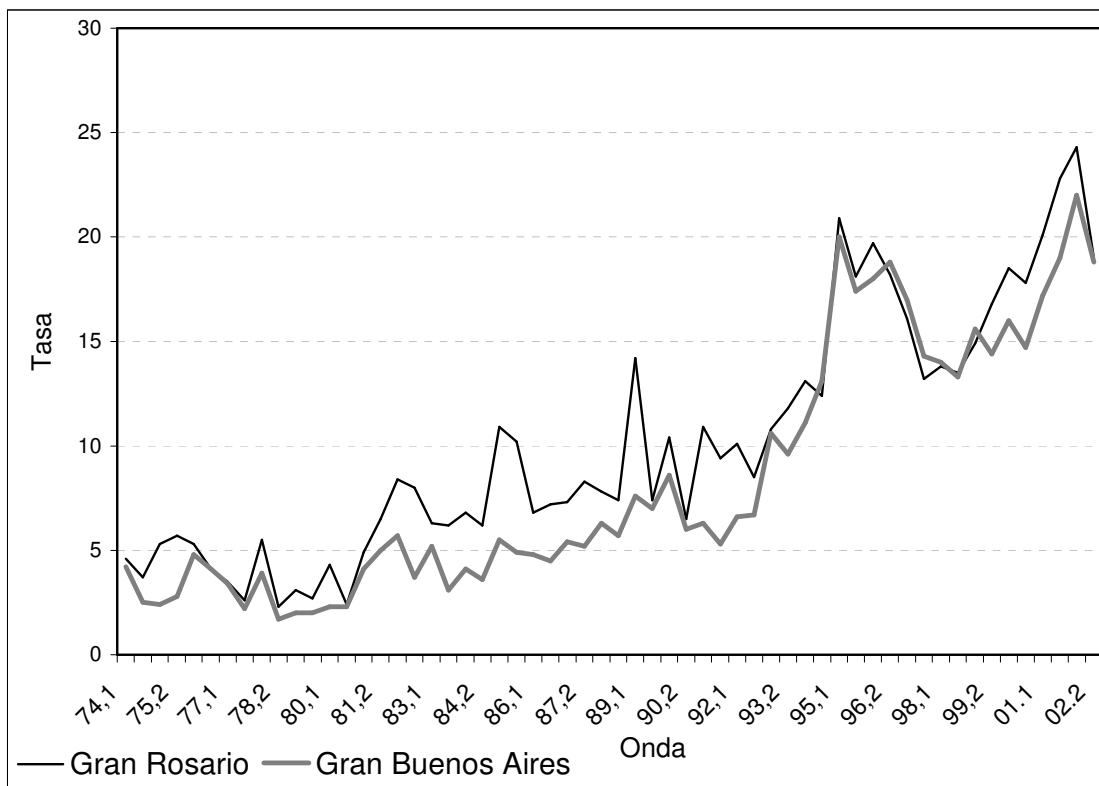
o simplemente:

$$\Phi_p(L)Y_t = \mu + e_t \text{ siendo } \Phi_p(L) = I_m - \Phi_1 L - \dots - \Phi_p L^p$$

II.1 MODELO VAR PARA LAS TASAS DE DESOCUPACIÓN DE GRAN ROSARIO (GR) Y GRAN BUENOS AIRES (GBA)

Los modelos VAR se pueden utilizar para explicar el comportamiento de las tasas de desocupación de GR y GBA. Se cuenta con información desde el año 1974 hasta el año 2002. Las series se muestran en el gráfico II.1.1.

Gráfico II.1.1: Tasa de desocupación de Gran Rosario y Gran Buenos Aires (1ª onda 1974- 2ª onda 2002)



Fuente: INDEC

El modelo ajustado es un VAR(2) con cambios de nivel en la primera onda de 1995 y la segunda onda de 2001. Las ecuaciones para GR y GBA resultan:

$$\Delta Y_t = \begin{bmatrix} \Delta y_{1,t} \\ \Delta y_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11,1} & \phi_{12,1} \\ \phi_{21,1} & \phi_{22,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_{1,t-1} \\ \Delta y_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{11,2} & \phi_{12,2} \\ \phi_{21,2} & \phi_{22,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_{1,t-2} \\ \Delta y_{2,t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{95,1}(t = \tau) \\ I_{01,2}(t = \tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{bmatrix}$$



Donde $\Delta y_{1,t}$ es la diferencia de orden 1 de la tasa de desocupación de GR en el tiempo t e $\Delta y_{2,t}$ es la diferencia de orden 1 de la tasa de desocupación de GBA en t , $\lambda_{i,1}$ y $\lambda_{i,2}$ representan respectivamente los cambios de nivel a partir de la primera onda de 1995 y de la segunda onda de 2002 en la ecuación i -ésima.

II.2 MODELOS VAR Y COINTEGRACIÓN

Desde la publicación de Engle y Granger (1987), el análisis de relaciones de cointegración se ha vuelto una práctica común en los trabajos aplicados de datos macroeconómicos. C. Granger recibió el premio Nobel (The Swedish Academy of Sciences, 2003) por su trabajo científico que incluye la introducción del concepto de cointegración.

II.2.1 COINTEGRACIÓN

Según lo expresado por C. Granger (1981) "Al menos a un nivel sofisticado de la teoría económica, existe la creencia que ciertos pares de variables económicas no deberían divergir mucho una de otra durante mucho tiempo, al menos a largo plazo". La idea subyacente es la de cointegración, la cual permite especificar modelos que captan parte de tal relación.

Definición de cointegración:

Si y_{1t} e y_{2t} son $I(1)$, pero existe una combinación lineal

$$z_t = m + a y_{1t} + b y_{2t}, \quad (II.2.1)$$

la cual es $I(0)$, entonces se dice que y_{1t} e y_{2t} son cointegradas.

Si y_{1t} e y_{2t} tienen media cero y no tienen tendencia determinística, existe una constante A tal que

$$z_t = y_{1t} - A y_{2t}, \quad (II.2.2)$$

es $I(0)$, entonces se dice que y_{1t} e y_{2t} son cointegradas, siendo A el parámetro de cointegración.

La relación $y_{1t} = A y_{2t}$, se puede considerar como la relación de equilibrio a largo plazo, como lo sugieren algunas teorías económicas, y entonces z_t de II.2.1 mide en cuánto el sistema y_{1t} e y_{2t} está fuera de equilibrio. En este caso, se entiende como equilibrio que la tendencia de un sistema económico se mueva a través de una región particular del espacio de resultados posibles. En otras palabras, si y_{1t} e y_{2t} son $I(1)$ pero se "mueven juntas a largo plazo" es necesario que z_t sea $I(0)$. En estos casos las dos series se moverán apartándose dentro de ciertos límites.

Para probar si dos series están cointegradas se realizan dos etapas:

a) se desarrolla la regresión

$$y_{1t} = \psi + \phi y_{2t} + u_t, \quad (II.2.3)$$

se estima por MCO y se obtienen $\hat{\psi}$, $\hat{\phi}$ y $\hat{u}_t$;

b) se considera el test de regresión auxiliar



$$\Delta_1 \hat{u}_t = \pi + \rho \hat{u}_{t-1} + \theta_1 \Delta_1 \hat{u}_{t-1} + \dots + \theta_p \Delta_1 \hat{u}_{t-p} + v_t, \quad (11.2.4)$$

y se evalúa el test t de significación de ρ .

Cuando $\rho=0$, $\hat{u}_t$ tiene raíz unitaria e $y_{1t} - \hat{\psi} - \phi y_{2t}$, es una serie de tiempo no estacionaria, por lo tanto no refleja relación de cointegración.

Cuando $\rho < 0$, esto es cuando $t(\hat{\rho})$ tiene un valor significativo negativo, se dice que y_{1t} e y_{2t} están cointegradas.

Test de cointegración de Johansen

Existen otros tests de cointegración basados en los modelos VAR utilizando la metodología propuesta por Johansen, (1991).

Dado el modelo VAR de orden p :

$$y_t = A_1 y_{t-1} + \dots + A_p y_{t-p} + Bx_t + \varepsilon_t, \quad (11.2.5)$$

donde y_t es un vector k -dimensional de variables $I(1)$ no estacionarias, x_t es un vector compuesto por d variables determinísticas y ε_t es un vector de innovaciones.

El modelo VAR puede ser reescrito como:

$$\Delta y_t = \Pi y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \Gamma_i \Delta y_{t-i} + Bx_t + \varepsilon_t, \quad (11.2.6)$$

$$\text{donde } \Pi = \sum_{i=1}^p A_i - I_k \quad \Gamma_i = - \sum_{j=i+1}^p A_j.$$

En el caso de que la matriz de coeficientes Π tuviera rango $r < k$, entonces existirían las matrices α y β de dimensión $k \times r$, cada una con rango r tal que:

$$\Pi = \alpha \beta' \quad \text{y} \quad \beta' y \text{ estacionario}.$$

El número de relaciones de cointegración es r , cada columna de β es el vector de cointegración. Los elementos de α son los parámetros de ajuste en el modelo de corrección de error. El método consiste en estimar la matriz Π de manera irrestricta y luego testar si se pueden rechazar las restricciones impuestas por el rango reducido de dicha matriz.

En el caso de k variables endógenas, puede haber hasta $k-1$ relaciones de cointegración linealmente independientes. Si no se halla ninguna relación de cointegración, los modelos VAR irrestrictos pueden aplicarse a las series.

Si existe una relación de cointegración en el sistema, entonces una única combinación lineal de las series endógenas $\alpha' \beta y_{t-1}$ se suma a cada ecuación en el modelo VAR, denominado término de corrección del error. Si existieran relaciones de cointegración adicionales, cada una contribuiría con un término de corrección de error que corresponde a una combinación lineal distinta de las series. Si existieran exactamente k relaciones de integración, ninguna de las series tendría raíz unitaria.

Los tests que se pueden realizar incluyen distintas posibilidades acerca de la media de la serie y el tipo de tendencia, como así también acerca de la presencia de



ordenada al origen y/o tendencia determinística en la relación de cointegración.

II.2.2 COINTEGRACIÓN ENTRE LAS SERIES DE TASA DE DESOCUPACIÓN DE GRAN ROSARIO Y GRAN BUENOS AIRES

La tasa de desocupación de ambos aglomerados urbanos tiene un comportamiento similar a través del tiempo, esto fue el motivo de introducir el concepto de cointegración entre ambas series como un medio para ayudar a explicar sus comportamientos.

Sea y_{1t} la serie tasa de desocupación de GR e y_{2t} la tasa de desocupación del aglomerado GBA.

Ambas series presentan raíz unitaria teniendo en cuenta los outliers aditivos (AO) y cambios de nivel que ambas presentan. Para probar la presencia de cointegración y evitar relaciones espúreas se tendrán en cuenta los cambios de nivel comunes a ambas series.

El test de cointegración de Johansen, teniendo en cuenta el cambio de nivel de la 1er. onda de 1995 y 2da. onda de 2001, resulta significativo al 5%. La ecuación de cointegración normalizada es:

$$y_{1t} = 0.921 y_{2t} + 2.41 \quad (\text{II.2.2.1})$$

(17.87)

La relación de equilibrio a largo plazo tiene media distinta de cero y positiva, lo que indicaría que la tasa de desocupación de GR por lo general se mantiene más alta que la tasa de GBA, pero a medida que las tasas van aumentando la brecha se va haciendo más chica.

II.3 MODELOS DE CORRECCIÓN DE ERROR (MEC)

Los modelos de corrección de error son modelos VAR a los cuales se les imponen restricciones dadas por las relaciones de cointegración (Engle and Granger, 1987). Sea un modelo VAR(1) bidimensional escrito de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} 1 & \delta \\ 1 & \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1^* \\ \mu_2^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho_1 & \delta\rho_1 \\ \rho_2 & \eta\rho_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t}^* \\ \varepsilon_{2,t}^* \end{bmatrix} \quad (\text{II.3.1})$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por la inversa de la matriz en el extremo izquierdo de la ecuación y substrayendo $\mathbf{Y}_{t-1}$ de ambos lados de la ecuación resulta:

$$\Delta \mathbf{Y}_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Pi} \mathbf{Y}_{t-1} + \mathbf{e}_t \quad (\text{II.3.2})$$

donde los elementos de $\mathbf{e}_t$ son funciones de los errores de la ecuación anterior y también de η y δ , siendo:



$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} (\eta\rho_1 - \delta\rho_2 - \eta + \delta)/(\eta - \delta) & \eta\delta(\rho_1 - \rho_2)/(\eta - \delta) \\ (\rho_2 - \rho_1)/(\eta - \delta) & (\eta\rho_2 - \delta\rho_1 - \eta + \delta)/(\eta - \delta) \end{bmatrix}$$

$\Pi = \alpha\beta'$ con:

$$\alpha = \begin{bmatrix} \delta(1-\rho_2)/(\eta-\delta) \\ -(1-\rho_2)/(\eta-\delta) \end{bmatrix} \quad y \quad \beta = \begin{bmatrix} 1 \\ \eta \end{bmatrix}$$

El vector β contiene los parámetros de cointegración que determinan la relación a largo plazo entre las dos series. Los elementos de α son los parámetros de ajuste que muestran la velocidad hacia la relación de equilibrio. Esto se puede ver en la siguiente ecuación, con el fin de simplificar la notación, si se indica con α_1 y α_2 a los elementos de la matriz α , resulta:

$$\begin{aligned}\Delta_1 y_{1,t} &= \mu_1 + \alpha_1(y_{1,t-1} + \eta y_{2,t-1}) + \varepsilon_{1,t} \\ \Delta_1 y_{2,t} &= \mu_2 + \alpha_2(y_{1,t-1} + \eta y_{2,t-1}) + \varepsilon_{2,t} \quad .\end{aligned}\tag{II.3.3}$$

Cada una de estas ecuaciones es llamada modelo de corrección de error y el sistema recibe el nombre de modelo vectorial de corrección de error.

II. 3.1 MODELO DE CORRECCIÓN DE ERROR (MEC) PARA LAS TASAS DE DESOCUPACIÓN DE GR Y GBA.

Se estiman distintos modelos para las tasas de desocupación de GR y GBA : un modelo VAR(1) irrestricto, y modelos MEC con retardos 0, 1 y 2. Se selecciona el MEC de retardo 0 en base a los criterios de Akaike y Schwarz. El modelo estimado es el siguiente:

$$\Delta_1 y_{1t} = -0,515 (y_{1,t-1} - 0,921 y_{2,t-1} - 2.413) + 0.06 + 7.367 \text{ IO95_1} + 3.589 \text{ IO01_2}$$

$$\quad \quad \quad (-2.78) \quad \quad \quad (-17.87) \quad \quad \quad (0.20) \quad (3.22) \quad \quad \quad (1.571)$$

$$\Delta_1 y_{2t} = 0,145 (y_{1,t-1} - 0,921 y_{2,t-1} - 2.413) + 0.103 + 7.299 \text{ IO95_1} + 1.429 \text{ IO01_2}$$

$$\quad \quad \quad (1.11) \quad \quad \quad (-17.87) \quad \quad \quad (0.485) \quad (4.52) \quad \quad \quad (0.88) \quad (11.3.1.1)$$



Este resultado muestra que α_2 no es significativo, por lo tanto se puede considerar $\alpha_2=0$, en consecuencia el proceso $y_{2,t}$ es débilmente exógeno para η (Johansen, 1992). Resultado que está en concordancia con el test de causalidad de Granger que evidencia que la tasa de desocupación de GR no es causa de la tasa de GBA ($p=0.632$), en cambio la tasa de desocupación de GBA es causa de la tasa de GR ($p=0.017$).

En estos casos se puede desarrollar el análisis de cointegración con un modelo ECM condicional (MCEC) para $y_{1,t}$ (Bovijk, 1994).

Como $\alpha_2=0$ en (II.3.1.1) se puede escribir

$$y_{2,t} = \mu_2^* + y_{2,(t-1)} + w_{2,1}IO95_1 + w_{2,2}IO01_2 + \varepsilon_{2,t}^*, \quad (\text{II.3.1.2})$$

un camino aleatorio con constante y cambios de nivel para $y_{1,t}$ el MCEC resulta

$$\Delta_1 y_{1,t} = \mu_1 + \alpha_1 y_{2,(t-1)} + \psi y_{1,(t-1)} + w_{1,1}IO95_1 + w_{1,2}IO01_2 + \varepsilon_{1,t}, \quad (\text{II.3.1.3})$$

donde $\psi = \alpha_1 \eta$.

Los parámetros del modelo (II.3.1.3) se pueden estimar por mínimos cuadrados ordinarios. El modelo estimado es:

$$\Delta_1 y_{1,t} = 0.069 - 0.307 y_{2,(t-1)} - 0.804 y_{1,(t-1)} + 2.506 IO95_1 + 1.890 IO01_2 + \varepsilon_{1,t}. \quad (\text{II.3.1.4})$$

Para probar la hipótesis de no cointegración hay que postular la hipótesis nula $\alpha=0$ y $\psi=0$ mediante un test de Wald. La teoría asintótica del test de Wald propuesta por Bovijk(1994) es un χ^2 con valor crítico al nivel de significación 0.01 de 15.22. El valor observado resulta 48.50. Por lo tanto se rechaza la hipótesis de no cointegración.

Se estima (II.3.1.4) por mínimos cuadrados no lineales para obtener el valor de η y se obtiene

$$\Delta_1 y_{1,t} = 1.83 + 0.38 y_{2,(t-1)} - (1.29)(0.38) y_{1,(t-1)} + 7.790 IO95_1 + 4.22 IO01_2 \quad (\text{II.3.1.5})$$

Como el desvío estándar de la estimación de η es 0.21, el intervalo de confianza del 95% cubre el valor uno. En consecuencia el MCEC para $y_{1,t}$ se puede escribir

$$\Delta_1 y_{1,t} = 1.83 + 0.38(y_{2,(t-1)} - y_{1,(t-1)}) + 7.79 IO95_1 + 4.22 IO01_2. \quad (\text{II.3.1.6})$$

Finalmente, esta ecuación expresa el modelo para el incremento de la tasa de desocupación de GR.



III MODELO DE ESPACIO DE ESTADOS (ESTRUCTURAL) MULTIVARIADO (MEEM)

En forma similar a los modelos de ecuaciones simultáneas aparentemente no correlacionadas (SUR), propuestos por Zellner en 1963, [seemingly unrelated regression equation (SURE) model], Harvey (1989) propone un sistema como un modelo de ecuaciones de series de tiempo aparentemente no correlacionadas (SUTSE), [seemingly unrelated time series equations a SUTSE model].

Sea y_t un vector ($N \times 1$) de observaciones, (en este caso $N=2$), el cual depende de componentes no observables que también son vectores. La relación entre las distintas series se puede observar a través de los disturbios de los distintos componentes. En un modelo con factores comunes, algunas o todas las matrices de covariancias, serán de rango reducido.

La especificación del modelo en el caso de las tasas de desocupación donde existe nivel aleatorio y estacionalidad determinística es del tipo:

$$\begin{aligned} y_t &= \mu_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim NID(0, \Sigma_\varepsilon), \\ \mu_t &= \mu_{t-1} + \eta_t, \quad \eta_t \sim NID(0, \Sigma_\eta), \\ \gamma_t &= \gamma_{t-1}, \end{aligned} \quad (III.1)$$

y_t , μ_t y γ_t son vectores 2×1 ; ε_t y η_t son vectores 2×1 de disturbios normales multivariados, mutuamente no correlacionados en todos los períodos; Σ_ε y Σ_η son matrices de covariancias 2×2 , las diagonales de estas matrices representan las variancias de los hiperparámetros.

III.1 MEEM PARA LAS SERIES TASAS DE DESOCUPACIÓN DE GR Y GBA

El modelo MEEM para las series tasa de desocupación de GR y GBA tiene la siguiente representación:

$$\begin{aligned} y_t &= \mu_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim NID(0, \Sigma_\varepsilon), \quad t = 74.1 \text{ al } 02-2, \\ \mu_t &= \mu_{t-1} + \mathbf{CN}_{95.1} + \mathbf{CN}_{01.2} + \eta_t, \quad \eta_t \sim NID(0, \Sigma_\eta), \\ \gamma_t &= \gamma_{t-1}, \end{aligned} \quad (III.1.1)$$

donde $\mathbf{CN}$ representa el vector de cambio de nivel.

Ambas series presentan nivel aleatorio, estacionalidad fija y cambios de nivel en la primer onda de 1995 y segunda onda de 2001.

III.2 MODELOS DE ESPACIO DE ESTADO CON FACTORES COMUNES

En un modelo de factores comunes, algunos o todos los componentes se pueden trabajar con vectores de disturbios con menos de N elementos. Encontrar factores comunes permite arribar a modelos que pueden tener una interpretación interesante, como así también, brindar inferencias más eficientes.

La presencia de factores comunes significa que las matrices de covariancia de los

disturbios relevantes son menores que de rango completo. Si en el modelo (III.1) se supone que tiene nivel común, entonces el rango de Σ_η será igual a $K=1$ ($K < N$). El modelo con nivel común puede ser escrito:

$$\begin{aligned} y_t &= \Theta \mu_t^* + \mu_\theta + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim NID(0, \Sigma_\varepsilon), \\ \mu_t^* &= \mu_{t-1}^* + \eta_t^*, \quad \eta_t^* \sim NID(0, D), \end{aligned} \quad (III.2.1)$$

η_t^* vector 1x1 (escalar), Θ matriz 2x1 de factores de carga estandarizados (con valores 1 en la diagonal principal), D matriz diagonal en este caso escalar, μ_θ vector 2x1 con los primeros $N-K=1$ elementos iguales a cero y los $K=1$ restantes elementos es un vector $\bar{\mu}$ (escalar).

Se puede volver al modelo original (VII.1) escribiendo $\Theta \mu_t^* + \mu_\theta = \mu_t$ y notando que $\Sigma_\eta = \Theta D \Theta'$ es una matriz singular de rango K . Cuando no existe tendencia común, $N=K$ y la matriz de factores de carga es la descomposición de Cholesky de Σ_η . La presencia de tendencia común en estos modelos es equivalente al concepto de cointegración, donde si las series son integradas de orden uno, existe una matriz A de vectores de cointegración $(N-K) \times N=1 \times 2$ tal que Ay_t es estacionario. Esto es equivalente a $A \Theta = 0$.

III.3 MODELOS DE ESPACIO DE ESTADO CON FACTORES COMUNES PARA GR Y GBA

Las matrices de covariancia estimadas de los disturbios del modelo (III.1.1) son:

$$\hat{\Sigma}_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1.966 & -0.300 \\ -0.300 & 0.076 \end{bmatrix}, \quad \hat{\Sigma}_\eta = \begin{bmatrix} 1.524 & 1.434 \\ 1.434 & 1.350 \end{bmatrix}.$$

La matriz diagonal del nivel es $\hat{D}=1.235$, el vector transpuesto de factores de carga estandarizados del nivel $\hat{\Theta}' = [1.000 \quad 0.941]$, con un vector de constante del nivel transpuesto $\hat{\mu}' = [0.000 \quad -0.832]$.

Ignorando el componente estacional determinístico se puede escribir

$$\begin{aligned} y_{1t} &= \mu_t^* + \varepsilon_{1t}, \\ y_{2t} &= 0.941 \mu_t^* - 0.832 + \varepsilon_{2t}, \end{aligned} \quad (III.3.1)$$

donde μ_t^* es camino aleatorio univariado.

La relación entre el nivel de las dos series al final del espacio de estados, puede escribirse como:

$$\mu_{1t} = 1.062 \mu_{2t} + 0.88.$$

La relación del nivel estocástico entre las tasas de desocupación de GR y GBA, al final del espacio de estados, está en concordancia con la relación de equilibrio a largo plazo, encontrada en la sección II.2.2 y muestra que el nivel de la tasa de GR al final



del período es superior a la de GBA.

IV. SERIES ESTACIONALES MULTIVARIADAS

Una alternativa para determinar el tipo de estacionalidad presente en los datos es aplicar un test para detectar raíces unitarias en la frecuencia cero y en las frecuencias estacionales. Asimismo, es posible caracterizar la relación entre series de tiempo mediante el procedimiento de estimación y test de cointegración estacional.

Las variables cointegradas pueden pensarse provenientes de un proceso llamado Modelo de Corrección de Error. El mecanismo de corrección de error ha sido muy utilizado en diversas aplicaciones en econometría. La idea de los mismos es que el "desequilibrio" que se produce entre las variables en un determinado momento es corregido en los próximos períodos.

La teoría de integración y cointegración estacional es discutida por Hylleberg, Engle, Granger y Yoo (1990). Ellos desarrollan un test para raíces unitarias estacionales y utilizan técnicas para examinar la cointegración en diferentes frecuencias en series económicas. Una extensión de este procedimiento se presenta en Ghysels, Lee y Noh (1994).

Engle, Granger, Hylleberg y Lee (1993) investigan la estimación y el test para cointegración en cada frecuencia, con un procedimiento en dos etapas similar al sugerido por Engle y Granger (1987) para cointegración en la frecuencia cero.

Es muy frecuente, en trabajos empíricos, considerar a la estacionalidad como un ruido molesto que debe ser retirado de las series previo al análisis de las mismas. Por este motivo a menudo se utiliza algún método que permita desestacionalizar las variables y estimar modelos a partir de los datos filtrados. Entre los métodos más utilizados podemos citar el uso de variables dummies, cuya limitación más importante es el suponer la estacionalidad como un fenómeno determinístico, y el uso de filtros del tipo diferencias con respecto al mismo período del año anterior o el método X-11 ARIMA. Estos últimos, si bien asumen a la estacionalidad estocástica, estacionaria, pueden resultar inadecuados cuando las series están estacionalmente integradas.

En los últimos años se ha incrementado la discusión acerca del tratamiento de la estacionalidad en las series de tiempo. En parte, esta discusión estuvo focalizada en el estudio de raíces unitarias en alguna frecuencia estacional y el desarrollo de distintos métodos de análisis de cointegración, metodología adecuada cuando el patrón estacional varía con el tiempo. Sin embargo, cuando la estacionalidad presenta un comportamiento aproximadamente constante en el tiempo, es posible describirla mediante un conjunto de variables dummies luego de aplicar una diferencia de primer orden, si fuese necesario. Hasta el día de hoy se discute cómo llevar a cabo el proceso de modelización de una serie estacional.

IV.1 INTEGRACIÓN ESTACIONAL

El procedimiento desarrollado por Hylleberg, Engle, Granger y Yoo (HEGY, 1990) permite determinar si en un proceso univariado existe alguna raíz unitaria estacional, como así también en la frecuencia cero.

Considérese a modo de ejemplo, el caso de una serie de tiempo trimestral. Sea y_t



un proceso estocástico univariado

$$y_t = \alpha y_{t-4} + u_t, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (\text{IV.1.1})$$

donde u_t es un proceso estacionario con media cero y variancia constante. El proceso y_t tiene cuatro raíces unitarias cuando $\alpha=1$, una en la frecuencia $\theta=0$, una en $\theta=\pi$, y un par de raíces complejas en las frecuencias $\theta=\pi/2, 3\pi/2$.

El test desarrollado por Hylleberg, Engle, Granger y Yoo (HEGY - 1990) introduce la factorización del polinomio de diferencia estacional $\phi(B)=\Delta^4=(1-B^4)$, donde B es el operador de rezago, y estima por mínimos cuadrados ordinarios la siguiente regresión:

$$y_{4,t} = \pi_1 y_{1,t-1} + \pi_2 y_{2,t-1} + \pi_3 y_{3,t-2} + \pi_4 y_{3,t-1} + \varepsilon_t \quad (\text{IV.1.2})$$

donde

$$\begin{aligned} y_{1,t} &= (1 + B + B^2 + B^3) y_t \\ y_{2,t} &= -(1 - B + B^2 - B^3) y_t \\ y_{3,t} &= -(1 - B^2) y_t \\ y_{4,t} &= (1 - B^4) y_t = \Delta_4 y_t \end{aligned} \quad (\text{IV.1.3})$$

Si es necesario, pueden adicionarse rezagos de y_4 para que los errores sean ruido blanco, como así también componentes determinísticos tales como constante, tendencia y variables dummies estacionales. El objetivo es probar la hipótesis que las raíces del polinomio son 1, -1, i , $-i$. Para la raíz 1, cero ciclos por año, el test consiste en someter a prueba la hipótesis $\pi_1 = 0$, de la misma manera que para la raíz -1, dos ciclos por año, cuya hipótesis correspondiente es $\pi_2 = 0$. Con respecto a las raíces complejas, un ciclo por año, deberá probarse que ambos π_3 y π_4 son igual a cero, mediante un test conjunto. No existirán raíces unitarias estacionales si π_2 y alguno de π_3 o π_4 son diferentes de cero, lo cual requiere el rechazo de ambos test. Para determinar si la serie es estacionaria, es decir que no tiene ninguna raíz unitaria, debe verificarse que cada uno de los coeficientes π_k son no nulos, excepto alguno de π_3 o π_4 . Los valores críticos para estos test se encuentran en las tablas 1a y 1b de HEGY. Las hipótesis alternativas de estacionariedad para éstos son:

- La alternativa para $\phi(1) = 0$ sería $\phi(1) > 0$, lo que significa $\pi_1 < 0$.
- La alternativa estacionaria para $\phi(-1) = 0$ sería $\phi(-1) > 0$, lo que significa $\pi_2 < 0$.
- La alternativa para $|\phi(i)| = 0$ es $|\phi(i)| > 0$ lo que implicaría que π_3 y π_4 no son cero simultáneamente. Una forma de llevar a cabo dicho test es, como se menciona anteriormente, mediante un test F. Sin embargo ésta no es la única estrategia ya que es posible realizar un test bilateral sobre π_4 y, si conduce a un no rechazo, entonces se sigue con un test para $\pi_3 = 0$ versus $\pi_3 < 0$. Sin embargo de esta manera se podría perder potencia cuando el primer supuesto realizado sobre π_4 no está garantizado.

IV.2 INTEGRACIÓN EN LAS SERIES DE INGRESO NACIONAL DISPONIBLE Y CONSUMO NACIONAL DE ARGENTINA

Las series Ingreso Nacional Disponible y Consumo Nacional de Argentina poseen un fuerte componente estacional (Gráfico IV.2.1 y Gráfico IV.2.2) el cual será analizado en los párrafos siguientes.

Gráfico IV.2.1: Logaritmo natural del ingreso bruto disponible a precios del mercado, en Argentina (1993.1 – 2002.1)

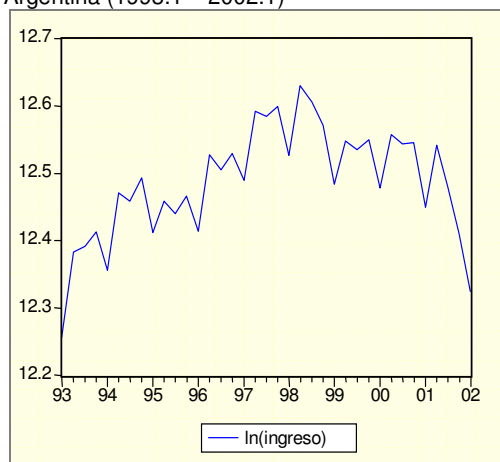
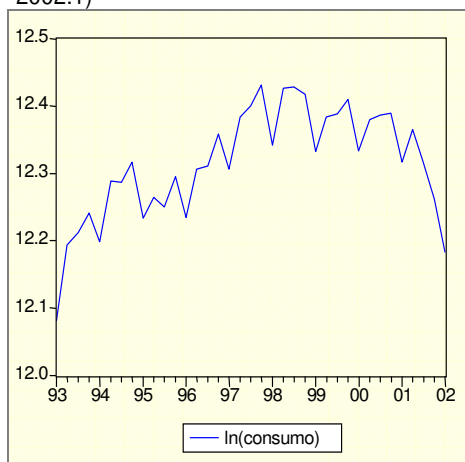


Gráfico IV.2.2: Logaritmo natural de consumo, público + privado, en Argentina (1993.1 – 2002.1)



Fuente: www.indec.mecon.gov.ar

El test HEGY para detectar raíces unitarias estacionales se aplica a las series, incorporando a la regresión auxiliar un intercepto, una pendiente, dummies estacionales y distintos órdenes de rezago para lograr residuos provenientes de un proceso ruido blanco. Los valores críticos fueron extraídos de las tablas 1a y 1b de HEGY 1990 (Pág. 226 - 227).

Los resultados se muestran en las Tablas IV.2.1 y IV.2.2

Tabla IV.2.1: Test de integración estacional en el logaritmo del ingreso disponible.

Rezagos incluidos ^b	Estadísticas t					Raíz unitaria en:
	π_1	π_2	π_3	π_4	$\pi_3 \cap \pi_4$	
1,2,3,4,5,6,7	1.203	-1.568	-0.851 ^a	-1.387	1.370	Todas las frecuencias
Ninguno	-0.119	-3.566**	-1.309 ^a	-2.555**	4.780	Frecuencia cero, y posiblemente anual
1	0.138	-3.735**	-1.925 ^a	-2.89***	5.522*	Frecuencia cero y posiblemente anual

*- significativo al 10%

**_ significativo al 5%

***_ significativo al 1%

a- Dado que no puedo asumir $\pi_4=0$ por haber rechazado dicha hipótesis, no tiene sentido hacer el test para π_3 .

b- En todos los casos, los coeficientes de los rezagos y las diez primeras autocorrelaciones de los residuos resultaron no significativas.

Tabla IV.2.2: Test de integración estacional en el logaritmo del consumo total.

Rezagos incluidos	Estadísticas t					Raíz unitaria en:
	π_1	π_2	π_3	π_4	$\pi_3 \cap \pi_4$	
1,2,3,4,5,6,7	2.411	0.380	-1.795	-0.190	1.631	Todas las frecuencias
Ninguno	-0.119	-3.463**	-1.301 ^a	-2.523**	4.636	Frecuencia cero y anual
1	0.084	-2.711	-1.081 ^a	-2.398**	3.417	Frecuencia cero, bianual y posiblemente también en la anual

*- significativo al 10%

**_ significativo al 5%

***_ significativo al 1%

a- Dado que no puedo asumir $\pi_4=0$ por haber rechazado dicha hipótesis, no tiene sentido hacer el test para π_3 .

b- En todos los casos, los coeficientes de los rezagos y las diez primeras autocorrelaciones de los residuos resultaron no significativas.



Dado que los residuos de la regresión auxiliar sin rezagos resultan ruido blanco y el término de tendencia resulta no significativo en todos los casos, no es necesaria la inclusión de estos términos en la regresión. Las tablas IV.2.3 y IV.2.4 presentan los resultados obtenidos en el test HEGY mediante una regresión auxiliar que no contiene rezagos de las variables ni tendencia determinística. Asimismo, se adicionan los test conjuntos propuestos por Ghysels, Lee y Noh (1994) correspondientes a los tres coeficientes estacionales, $F_{2,3,4}$ y a los cuatro coeficientes, $F_{1,2,3,4}$, cuyos valores críticos se encuentran en el apéndice C (pag 440 - 441)

Tabla IV.2.3: Test de integración estacional en el logaritmo del ingreso disponible con regresión auxiliar sin tendencia y sin rezagos.

Rezagos incluidos	Estadísticas t					Raíz unitaria en:
	π_1	π_2	π_3	π_4	$\pi_3 \cap \pi_4$	
Ninguno	-1.255	-4.004***	-1.38 ^a	-2.695**	5.377	Frecuencia cero y posiblemente anual

$$F_{2,3,4}=59,88*** \quad F_{1,2,3,4}=54,55***$$

*- significativo al 10%

**_ significativo al 5%

***_ significativo al 1%

- a- Dado que no puedo asumir $\pi_4=0$ por haber rechazado dicha hipótesis, no tiene sentido hacer el test para π_3 .
b- En todos los casos, los coeficientes de los rezagos y las diez primeras autocorrelaciones de los residuos resultaron no significativas.

Tabla IV.2.4: Test de integración estacional en el logaritmo del consumo total con regresión auxiliar sin tendencia y sin rezagos.

Rezagos incluidos	Estadísticas t					Raíz unitaria en:
	π_1	π_2	π_3	π_4	$\pi_3 \cap \pi_4$	
Ninguno	-1.423	-3.785***	-1.35 ^a	-2.736**	5.396	Frecuencia cero y posiblemente anual

$$F_{2,3,4}=60,82*** \quad F_{1,2,3,4}=58,04***$$

*- significativo al 10%

**_ significativo al 5%

***_ significativo al 1%

- a- Dado que no puedo asumir $\pi_4=0$ por haber rechazado dicha hipótesis, no tiene sentido hacer el test para π_3 .
b- En todos los casos, los coeficientes de los rezagos y las diez primeras autocorrelaciones de los residuos resultaron no significativas.

Según los resultados obtenidos por los distintos test, no está muy definido que tipo de estacionalidad está presente en los datos. En ambas series económicas, es evidente la presencia de raíz unitaria en la frecuencia cero ($H_0: \pi_1=0$), como así también es claro que en la frecuencia bianual se rechaza dicha hipótesis ($H_0: \pi_2=0$). Con respecto a la frecuencia anual, tanto para el ingreso como para el consumo, el test t para el coeficiente π_4 resulta significativo indicando la ausencia de raíz unitaria pero el test conjunto basado en la estadística F se contradice con esta afirmación. En Ghysels, Lee y Noh (1994) se demuestra que los test t secuenciales para π_3 y π_4 , a diferencia del test conjunto $F_{3,4}$, tiende a sobrestimar el nivel de significación nominal del test.

IV.3.COINTEGRACIÓN ESTACIONAL

Existe una consecuencia en la modelización de las relaciones entre series



económicas cuando alguna raíz unitaria estacional está presente en los datos, lo que deriva en el concepto de cointegración. Si por ejemplo, dos variables están estacionalmente integradas, es posible que exista una combinación lineal de ellas en la cual alguna raíz unitaria estacional se haya eliminado.

IV.3.1 MÉTODO DE DOS PASOS

Engle, Granger, Hylleberg y Lee (EGHL, 1993) propusieron un método, consistente en dos pasos, para probar si existe cointegración estacional y no estacional.

En el caso de cointegración en todas las frecuencias en una serie de tiempo bivariada (y_t, x_t), las siguientes combinaciones lineales serán estacionarias

$$\begin{aligned} z_{1,t} &= y_{1,t} - \alpha_1 x_{1,t} \\ z_{2,t} &= y_{2,t} - \alpha_2 x_{2,t} \\ z_{3,t} &= y_{3,t} - \alpha_3 x_{3,t} - \alpha_4 x_{3,t-1} \end{aligned} \quad (IV.3.1.1)$$

donde

$$\begin{aligned} w_{1,t} &= (1 + B + B^2 + B^3)w_t \\ w_{2,t} &= -(1 - B + B^2 - B^3)w_t \\ w_{3,t} &= -(1 - B^2)w_t \end{aligned} \quad (IV.3.1.2)$$

con w_t representando a y_t o x_t y $w_{j,t}$ a $y_{j,t}$ o $x_{j,t}$, para $j=1,2,3$.

El primer paso consiste en estimar los coeficientes $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ por mínimos cuadrados ordinarios, incluyendo en cada una de las regresiones de cointegración, si fuese requerido, una parte determinística (dummies estacionales, tendencia e intercepto).

En el segundo paso, los residuos estimados de las regresiones de cointegración son evaluados para determinar si son estacionarios. Esto se realiza mediante las siguientes regresiones auxiliares

$$\begin{aligned} (1-B)\hat{z}_{1,t} &= \pi_1 \hat{z}_{1,t-1} + \sum_{i=1}^{t_1} \gamma_i (1-B)\hat{z}_{1,t-i} + \varepsilon_t \\ (1+B)\hat{z}_{2,t} &= \pi_2 (-\hat{z}_{2,t-1}) + \sum_{i=1}^{t_2} \gamma_i (1+B)\hat{z}_{2,t-i} + \varepsilon_t \\ (1+B^2)\hat{z}_{3,t} &= \pi_3 (-\hat{z}_{3,t-2}) + \pi_4 (-\hat{z}_{3,t-1}) + \sum_{i=1}^{t_3} \gamma_i (1+B^2)\hat{z}_{3,t-i} + \varepsilon_t \end{aligned} \quad (IV.3.1.3)$$

La hipótesis nula de no cointegración en la frecuencia cero y bianual, corresponde a $\pi_1=0$ y $\pi_2=0$, respectivamente y para la frecuencia anual, la hipótesis nula de no cointegración es $\pi_3=0$ y $\pi_4=0$ simultáneamente, la cual se realiza mediante un test conjunto. Para las frecuencias cero y bianual, la distribución de las estadísticas t son las obtenidas por Engle y Granger (1987), mientras que para el caso de la frecuencia anual, los valores críticos de la distribución son presentados en EGHL (1993).



IV.3.2 MODELOS VAR ESTACIONALES

Un procedimiento alternativo, que extiende el enfoque máximo verosímil de Johansen (1988, 1991) y Johansen – Juselius (1990), fue sugerido por Lee (1992). El mismo no requiere conocimiento previo acerca de las raíces unitarias presentes en cada frecuencia.

Asumiendo que el vector de variables de dimensión $k \times 1$, $\mathbf{Y}_t$, está estacionalmente integrado, el siguiente modelo VAR de orden p para datos trimestrales

$$\mathbf{Y}_t = \Phi_1 \mathbf{Y}_{t-1} + \Phi_2 \mathbf{Y}_{t-2} + \dots + \Phi_p \mathbf{Y}_{t-p} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad t = 1, 2, \dots, T$$

puede describirse como

$$\Delta_4 \mathbf{Y}_t = (I - B^4) \mathbf{Y}_t = \Pi_1 \mathbf{Y}_{1,t-1} + \Pi_2 \mathbf{Y}_{2,t-1} + \Pi_3 \mathbf{Y}_{3,t-2} + \Pi_4 \mathbf{Y}_{3,t-1} + \Phi \mathbf{D}_t + \sum_{j=1}^p \Gamma_j \Delta_4 \mathbf{Y}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad (\text{IV.3.2.1})$$

donde $\mathbf{Y}_{1,t} = (I + B + B^2 + B^3) \mathbf{Y}_t$, $\mathbf{Y}_{2,t} = (I - B + B^2 - B^3) \mathbf{Y}_t$, $\mathbf{Y}_{3,t} = (I + B^2) \mathbf{Y}_t$, $\mathbf{D}_t$ son los componentes determinísticos (posiblemente dummies estacionales, intercepto y tendencia), las matrices Π_j tienen dimensión $k \times k$ y los $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ son vectores, de dimensión $k \times 1$, independientes de variables con distribución normal.

Si las matrices Π_1 , Π_2 o Π_3 y Π_4 tienen rango completo, las series no presentan raíces unitarias en las correspondientes frecuencias, mientras que si el rango es cero, entonces no existen relaciones de cointegración en dicha frecuencia. En el caso en que el rango de Π_i es $0 < r_i < k$, significa que es posible expresar $\Pi_i = \mathbf{B}_i \mathbf{C}_i'$ donde $\mathbf{B}_i$ y $\mathbf{C}_i$ son matrices de dimensión $k \times r_i$ tales que $\mathbf{C}_i' \mathbf{Y}_{i,t-1}$ es estacionario aunque $\mathbf{Y}_{i,t}$ no lo sea. Las matrices $\mathbf{C}_i$ se denominan matrices de cointegración.

Para realizar el test de razón de verosimilitud es necesario realizar algunas definiciones. Sea $\mathbf{R}_{0t}$ la serie de los residuos obtenidos de regresar a $\Delta_4 \mathbf{Y}_t$ sobre las diferencias rezagadas y los componentes determinísticos del modelo, mientras que $\mathbf{R}_{kt}$ es la serie de los residuos de regresar cada $\mathbf{Y}_{k,t-1}$ sobre las diferencias rezagadas y los términos determinísticos, para $k=1, 2, 3$ y 4 . A continuación se detallan los tests de cointegración en cada frecuencia.

IV.3.2.1 Test de cointegración en la frecuencia cero:

Cuando se quiere probar cointegración en la frecuencia cero, en presencia de alguna raíz unitaria estacional, la hipótesis de interés es

$$H_0) \text{rango}(\Pi_1) \leq r < k,$$



es decir que existen matrices $\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{C}_1$ de rango r , tal que $\Pi_1 = \mathbf{B}_1 \mathbf{C}_1'$, esto significa que existen a lo sumo r vectores de cointegración en la frecuencia cero. La estadística del test de razón de verosimilitud para dicha hipótesis es,

$$-2\ln(Q) = -T \sum_{i=r+1}^k \ln(1 - \lambda_{1,i})$$

donde $\lambda_{1,i}$, $i=r+1, \dots, k$, son las $(k-r)$ menores correlaciones canónicas parciales al cuadrado de $\mathbf{R}_1$ con respecto a $\mathbf{R}_0$, dados $\mathbf{R}_2$, $\mathbf{R}_3$ y $\mathbf{R}_4$. La distribución de la estadística para la frecuencia cero y para las demás frecuencias estacionales están tabulados en Lee-Siklos (1995).

IV.3.2.2. Test de cointegración en la frecuencia bianual:

Para probar si los componentes de $\mathbf{Y}_t$ están o no cointegrados en la frecuencia bianual, en presencia de raíz unitaria en la frecuencia cero y/o en otra frecuencia estacional la hipótesis de interés es

$$H_0) \text{ rango}(\Pi_2) \leq r < k.$$

El test se desarrolla de la misma manera que para la frecuencia cero pero ahora se utiliza $\mathbf{R}_2$ en lugar de $\mathbf{R}_1$. Por lo tanto, la estadística del test de razón de verosimilitud para dicha hipótesis es,

$$-2\ln(Q) = -T \sum_{i=r+1}^k \ln(1 - \lambda_{2,i})$$

donde $\lambda_{2,i}$, $i=r+1, \dots, k$, son las $(k-r)$ menores correlaciones canónicas parciales al cuadrado de $\mathbf{R}_2$ con respecto a $\mathbf{R}_0$, dados $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_3$ y $\mathbf{R}_4$.

IV.3.2.3. Test de cointegración en la frecuencia anual:

Para evaluar la posibilidad de cointegración en la frecuencia anual es necesario considerar en forma simultánea a las matrices Π_3 y Π_4 . Sin embargo, basados en la estructura del mecanismo de corrección de error dado en (IV.3.2.1) podemos asumir $\Pi_4 = \mathbf{0}$ con un pequeño efecto sobre el test de cointegración estacional en la frecuencia anual cuando la cointegración es contemporánea (Lee, 1992). De esta forma es posible realizar el test de cointegración examinando la matriz Π_3 únicamente, en cuyo caso la hipótesis se reduce a

$$H_0) \text{ rango}(\Pi_3) \leq r < k$$



y la estadística del test de razón de verosimilitud, asumiendo $\Pi_4=0$, puede ser expresada como

$$-2\ln(Q) = -T \sum_{i=r+1}^k \ln(1 - \lambda_{3,i})$$

donde $\lambda_{3,i}$, $i=r+1, \dots, k$, son las $(k-r)$ menores correlaciones canónicas parciales al cuadrado de R_3 con respecto a R_0 , dados R_1 y R_2 .

IV.4 COINTEGRACIÓN ESTACIONAL EN LAS SERIES DE INGRESO NACIONAL DISPONIBLE Y CONSUMO NACIONAL DE ARGENTINA

Se aplica la metodología presentada para estudiar la cointegración entre las series de ingreso y consumo nacional en Argentina. En una primera instancia se lleva a cabo el test de cointegración, en dos pasos, propuesto en EHGL (1993). Para obtener el filtro adecuado al aplicar este método es necesario tener en cuenta la información acerca de la presencia de raíces unitarias estacionales en las series en estudio. Como se expresó en secciones anteriores, ambas series económicas presentarían raíces unitarias en la frecuencia cero y en la frecuencia anual. Por lo tanto, se investiga la existencia de cointegración en dichas frecuencias.

En este caso, las combinaciones lineales de las series filtradas son:

$$\begin{aligned} Z_{1,t} &= x_{1,t}^* - \alpha_1 y_{1,t}^* \\ Z_{3,t} &= x_{3,t}^* - \alpha_3 y_{3,t}^* - \alpha_4 y_{3,t-1}^* \end{aligned} \quad (IV.4.1)$$

donde

$$w_{1,t}^* = (1 + B^2)w_t \quad w_{3,t}^* = -(1 - B)w_t$$

son las series filtradas de modo tal de remover todas las raíces unitarias presentes excepto la de la frecuencia en la cual se evaluará la cointegración y w_t representa a y_t y x_t , ingreso y consumo en logaritmo natural, respectivamente. La tabla IV.4.1 muestra los resultados del test de cointegración basado en los residuos estimados para la frecuencia cero y anual.

Tabla IV.4.1: Test de cointegración en la frecuencia cero y anual, método EGHL.

Estadísticas del test ()	
Frecuencia cero (t)	Frecuencia anual (F)
-1.202	17.768*

*Significativa al 5%

De los resultados precedentes se concluye que en la frecuencia cero no se rechaza la hipótesis de no cointegración mientras que en la frecuencia anual existe evidencia de cointegración entre las series de ingreso y consumo.

Resultados similares se obtienen con el método de ecuaciones múltiples



propuesto por Lee (1992). Cabe señalar que para aplicar este método no es necesario utilizar información previa sobre la existencia de raíces unitarias en las distintas frecuencias. Para la elección de p se tuvo en cuenta los criterios de selección de modelos de Akaike (AIC) y Schwarz (SC), como así también la inspección de la función de autocorrelación de los residuos. La tabla IV.4.2 presenta el modelo VAR ($p=0$) expresado en (IV.3.2.1). En esta aplicación el vector bivariado $\mathbf{Y}_t$ corresponde a

$$\mathbf{Y}_t = \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}.$$

El test de cointegración en cada una de las frecuencias se presenta en la tabla IV.4.2. Es posible observar que en la frecuencia cero no se rechaza la hipótesis de no cointegración en la frecuencia cero (rango nulo de la matriz Π_1) y de no existencia de raíz unitaria en la frecuencia bianual (rango completo de la matriz Π_2). En la frecuencia anual se rechaza la hipótesis de no cointegración, indicando que existe un vector $\mathbf{C}'_3$ (de dimensión 1×2) de modo tal que $\mathbf{C}'_3 \mathbf{Y}_{3,t-1}$ es estacionario.

Tabla IV.4.2: Test de cointegración estacional (Lee, 1992)

Test de cointegración estacional		
Frecuencia	Rango(Π_k)=0	Rango(Π_k)=1
Cero	9.65	4.12
Bi anual	39.07*	9.24*
Anual	31.81*	8.5

* Significativo a un nivel del 5%.

IV.5 MODELO ESTRUCTURAL BIVARIADO

El modelo estructural univariado hallado para cada una de las series en estudio posee una tendencia con intercepto fijo y pendiente estocástica, estacionalidad determinística e irregular.

Teniendo en cuenta esta información, se ajusta un modelo Estructural Bivariado. El modelo resultante presenta dos intervenciones en el nivel, en los períodos 1995-2 y 2001-4.

Este modelo determina que la estacionalidad es determinística, es decir que el comportamiento estacional de cada una de las series se mantiene invariante en el tiempo, al igual que el nivel (aunque fue necesario incluir dos intervenciones). La pendiente de las series son estocásticas, esto es, las pendientes varían a través del tiempo y además, el modelo contempla un vector de error aleatorio. Cabe señalar que, a diferencia del modelo ajustado previamente, esta metodología modela la serie sin aplicar diferenciación alguna.

Dado que la estacionalidad se ha establecido como determinística, esto es, el patrón estacional no cambia en el tiempo, no se intenta incorporar una relación de cointegración estacional en el modelo estructural mediante la admisión de componentes estacionales comunes en las series.



Las estimaciones al final del estado indican que la estacionalidad y el nivel son significativos como así también las intervenciones incorporadas al modelo. La pendiente, que resultó ser una componente aleatoria al hallar una variancia significativa para su término de error, muestra un valor al final del período no significativo ($p=0.2042$ y $p=0.1616$ para el ingreso y el consumo respectivamente). Es decir, que la pendiente va fluctuando a través del tiempo pero al final del período en estudio, la misma es nula.

V.- Discusión

En este trabajo se realiza un breve reseña de los métodos de series de tiempo multivariadas, recomendados en bibliografía reciente, con aplicaciones realizadas sobre series argentinas.

Se presentan brevemente los modelos VAR, la definición de cointegración, los modelos VAR restringidos con la ecuación de equilibrio y una aplicación a las series de tasas de desocupación de Gran Rosario y Gran Buenos Aires.

Se revisan los mismos conceptos expresados en el párrafo anterior pero a través de modelos estructurales de espacio de estado multivariados.

Ambos tipos de modelos permiten analizar características importantes de series de tiempo multivariadas, como por ejemplo, el concepto de cointegración y encontrar una relación de equilibrio entre las series intervinientes.

Se revisan también estos dos tipos de modelos para series que presentan estacionalidad a través de las series Ingreso Nacional Disponible y Consumo Nacional de Argentina.

En futuras investigaciones se piensa profundizar en los supuestos que se deben cumplir para que estos modelos sean válidos.

VI. Referencias Bibliográficas

Bidarkota, Prasad V., 1998. "The comparative forecast performance of univariate and multivariate models: an application to real interest rate forecasting," *International Journal of Forecasting*, 14(4), 457-468, 12.

Box, G.E.P., Jenkins, G.M., (1970). "*Time Series Analysis, Forecasting and Control*". San Francisco: Holden-Day.

Boswijk, H.P., (1994). "Testing for an Unstable Root in Conditional and Structural Error Correction Models", *Journal of Econometrics*, 63, 37-60.

Dickey, D.A., and W.A. Fuller, (1979), "Distribution of the Estimators for Autorregressive Time Series With a Unit Root", *Journal of the American Statistical Association*, 74, 427-431.

Engle, R.F., Granger, C.W.J., (1987): "Co-Integration and error correction: representation, estimation and testing". *Econometrica* 55, 251-276.

Engle, R.F., Granger, C.W.J., Hylleberg, S., Lee, H.S. (1993) "Seasonal cointegration". *Journal of Econometrics* Nro. 55, Pág. 275-298.



Eviews (1997). User`s Guide, Quantitative Micro Software, Irvine CA.

Franses, P.H., (1998). *"Time Series Models for business and economic forecasting"*. Cambridge University Press.

Franses, P.H., Haldrup, M., (1994). "The Effects of Additive Outliers on Test for Unit Roots and Cointegration". *Journal of Business and Economic Statistics* 12, 471-478.

Granger, C.W.J., (1981). "Some Properties of Time Series Data and Their use in Econometric Model Specification", *Journal of Econometrics*, 121-130.

Ghysels, E., Lee, H.S., Noh, J. (1994) "Testing for unit roots in seasonal time series". *Journal of Econometrics* Nro. 62, Pág. 415-442.

Harvey, A.C. (1989). *"Forecasting Structural Time Series and the Kalman Filter"*. Cambridge, U.K. Cambridge, University Press.

Hylleberg, S., Engle, R.F., Granger, C.W.J., Yoo, B.S. (1990) "Seasonal integration and cointegration". *Journal of Econometrics* Nro. 44, Pág. 215-238.

Johansen, S., (1991). "Estimation and Hypothesis Testing of Cointegration Vectors in Gaussian Vector Autoregressive Models", *Econometrica*, 59, 1551-1580.

(1992). "Cointegration in Partial Systems and the Efficiency of Single-Equations Analysis, *Journal of Econometrics*, 52, 389-402.

Peña, D., (2001): "Some results on forecasting with multivariate time series", *9ª Escola de Séries Temporais e Econometria*. Programa e Resumo, 35.

Perron, P., (1989). "The Great Crash, the Oil Price Shock, and the Unit Root Hypothesis", *Econometrica*, 57, 1361-1401.

(1990). "Testing for a Unit Root in a Time Series with a Changing Mean". *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 8, pp. 153-162.

Phelps, E.S., (1972). "The Statistical Theory of Racism and Sexism", *American Economic Review*, Vol. LXII, 659-661.

Phillips, P. C. B., (1987), ""Time Series Regression with a Unit Root", *Econometrica*, 55, 277-301.

STAMP 5.0, London School of Economics, UK.

Tiao, G.C., and Box, G.E.P. (1981). "Modeling Multiple Time Series with Applications," *Journal of the American Statistical Association*, 76, 802-816.

Zellner, A., (1962). "An Efficient Method of Estimating Seemingly Unrelated Regressions and Test of Aggregations Bias", *Journal of the American Statistical Association*, 57, 348-368.



Zivot, Eric and Andrews, Donald W.K. (1992), "Further Evidence on the Great Crash, the Oil-Price Shock and the Unit-Root Hypothesis", *Journal of Business & Economic Statistics*, July, Vol 10, No 3, July, pp 251-270.