

MINISTERIO DE JUSTICIA E INSTRUCCION PUBLICA  
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS, Etc.  
DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

# MATHEMATICÆ NOTÆ

BOLETIN

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA

DIRECTOR

BEPPPO LEVI

AÑO QUINTO - FASC. 2



ROSARIO  
REPUBLICA ARGENTINA  
1945

Las « Mathematicae Notae » publican artículos, cuestiones, ejercicios, soluciones y correspondencia. La resolución de las cuestiones propuestas será publicada en números sucesivos de la revista al cabo de un tiempo razonable, a juicio del Director del Instituto, para obtener contestaciones de los lectores; de las cuestiones publicadas bajo el título de ejercicios la dirección se reserva la decisión, en cada caso, de publicar o no las respuestas.

A fin de año se adjudicarán dos premios:

1º Por concurso entre alumnos de la Facultad que contesten satisfactoriamente a cuestiones, problemas o ejercicios.

2º Por concurso entre todos los demás lectores del país o del extranjero que contesten en modo acertado a los mismos.

Los premios consistirán en tratados de extensión cultural o libros de especialización.

Las soluciones deben ser entregadas al Instituto en redacción clara y en hojas distintas para cada cuestión, problema o ejercicio. En cada hoja deberá señalarse el nombre del autor; los alumnos de la Facultad indicarán el año de estudios que cursan en la misma, y, los de primer año, además, la escuela media de la cual provienen. Estos elementos serán tenidos en cuenta para el juicio, conjuntamente con el valor intrínseco de las soluciones y la forma expositiva de las mismas, dándose por la Dirección la máxima importancia a la disposición por la cual se compararán sólo alumnos de igual preparación.

En la sección de Bibliografía se publicarán los análisis críticos de libros recientes que sean enviados al Instituto de Matemática.

---

## I N D I C E

|                                                                                              | Pág. |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Sobre las medias aritmético-geométricas de Gauss (Segunda Parte)<br>J. V. USPENSKY . . . . . | 57   |
| Una generalización de los factoriales (MISCHA COTLAR) . . . . .                              | 89   |
| Sobre un problema diofántico (BEPPO LEVI) . . . . .                                          | 108  |
| Ejercicios y Problemas (Soluciones) . . . . .                                                | 120  |
| Ejercicios y Problemas (Propuestos) . . . . .                                                | 128  |





## SOBRE LAS MEDIAS ARITMETICO-GEOMETRICAS DE GAUSS

POR

J. V. USPENSKY

(Segunda Parte)

Aunque considerando las medias aritmético-geométricas solo para los números positivos hayamos alcanzado resultados dignos de admiración, nunca entenderemos la verdadera naturaleza de ellas si no las consideramos en toda generalidad para los números complejos cualesquiera. Sean  $a$  y  $b$  dos números complejos de los cuales suponemos solamente que ni uno ni otro sean ceros ni tampoco su suma. El algoritmo de las medias aritmético-geométricas aplicado a ellos engendrará dos sucesiones

$$a, a_1, a_2, \dots \quad (1)$$

$$b, b_1, b_2, \dots \quad (2)$$

los términos de las cuales obedecen a la ley general

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}. \quad (3)$$

A cada paso podemos elegir uno u otro valor de la raíz cuadrada de lo que resulta cierta multiplicidad de las sucesiones (1) y (2). Vamos a demostrar que en todo caso las dos sucesiones tienden a un límite común el cual, sin embargo, varía al variar el modo de elegir las raíces. No podemos pues hablar de una sola media aritmético-geométrica, sino de una infinidad. Entre ellas vamos en seguida a escoger una que llamaremos la media

aritmético-geométrica principal. En la tercera parte de la memoria veremos como las otras medias aritmético-geométricas dependen de la principal.

Para definir la media principal, notamos primero que a menos que  $b/a$  sea un número real negativo, es posible elegir y de único modo las raíces cuadradas de manera que ningún término de las sucesiones (1) y (2) sea cero y que las partes reales de los cocientes

$$\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \dots$$

sean todas positivas. Sea cierta, en efecto, la afirmación para  $n$  cocientes

$$\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \dots, \frac{b_n}{a_n};$$

y vamos a ver que será cierta también para  $b_{n+1}/a_{n+1}$ .

Primero, como  $a_n \neq 0$ ,  $b_n \neq 0$ , por hipótesis, será  $b_{n+1} \neq 0$ . Segundo, por ser positiva la parte real de  $b_n/a_n$ , será por cierto positiva también la parte real de

$$1 + \frac{b_n}{a_n} = \frac{a_n + b_n}{a_n} = \frac{2a_{n+1}}{a_n}$$

y por tanto  $a_{n+1} \neq 0$ .

Por otro lado

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{b_n}} + \frac{\sqrt{b_n}}{\sqrt{a_n}} \right)$$

o bien

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{1}{2} \left( R + \frac{1}{R} \right) \cos \varphi + i \left( R - \frac{1}{R} \right) \sin \varphi,$$

habiendo puesto

$$\xi_n = \frac{\sqrt{b_n}}{\sqrt{a_n}} = R e^{i\varphi}$$



de donde <sup>(1)</sup>

$$R \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{1}{2} \left( R + \frac{1}{R} \right) \cos \varphi.$$

Pero el número  $\xi_n$  no puede ser imaginario puro, porque en tal caso tendríamos  $b_n : a_n < 0$ ; luego será  $\cos \varphi \neq 0$  y de cualquier manera que se elija la raíz cuadrada  $\sqrt{a_n b_n}$  siempre la parte real del cociente  $a_{n+1} : b_{n+1}$  será  $\neq 0$ ; para que sea positiva bastará elegir convenientemente el signo de  $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ . Hay que notar que entonces  $R \xi_n > 0$ . Habiendo supuesto que  $b/a$  no es negativo, por la misma razón podemos elegir  $b_1 = \sqrt{a b}$  de único modo para que sea  $R \frac{b_1}{a_1} > 0$ . Así nuestra afirmación queda demostrada por inducción.

Cuando  $b/a$  es un número negativo hay una manera de elegir  $b_1$  de modo que

$$R \frac{b_1}{a_1} = 0, \quad I \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} > 0;$$

pero entonces serán  $b_2, b_3, \dots$  completamente determinados si les imponemos satisfacer a la condición

$$R \frac{b_2}{a_2} > 0, \quad R \frac{b_3}{a_3} > 0, \dots$$

De tal manera siempre tendremos el algoritmo completamente determinado y ahora debemos demostrar su convergencia. De las fórmulas (3) se deduce

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}} (b_n - a_n)$$

de donde

$$|b_{n+1} - a_{n+1}| = \frac{1}{2} \left| \frac{1 - \xi_n}{1 + \xi_n} \right| |b_n - a_n| \leq \frac{1}{2} |b_n - a_n|$$

(<sup>1</sup>) Los signos  $R, I$  delante de un símbolo numérico están para expresar respectivamente la parte real y el coeficiente de  $i$  en dicho número, y no deben confundirse con las letras de significado numérico, escritas en cursivo, como  $R$  en la misma fórmula.

por no ser la parte real de  $\xi_n$  negativa. Resulta por inducción

$$|b_n - a_n| \leq \frac{|b-a|}{2^n} \quad (4)$$

y por consiguiente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0.$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} a_n &= a + (a_1 - a) + (a_2 - a_1) + \dots + (a_n - a_{n-1}) \\ &= a + \frac{b-a}{2} + \frac{b_1-a_1}{2} + \dots + \frac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2} \end{aligned}$$

y la serie infinita

$$a + \frac{b-a}{2} + \frac{b_1-a_1}{2} + \dots$$

es absolutamente convergente a consecuencia de la desigualdad (4). Ello significa que existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ . A este límite común llamamos la media aritmético-geométrica principal de  $a$  y  $b$  y la designamos con el signo  $M(a, b)$ .

Si  $|a| < \rho$ ,  $|b| < \rho$  es claramente también

$$|a_1| = \left| \frac{a+b}{2} \right| < \rho, \quad |b_1| = |\sqrt{ab}| < \rho;$$

de la misma desigualdad (4) se infiere luego que  $a_n$  y  $b_n$  se acercan a  $M(a, b)$  uniformemente en el dominio

$$a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad a+b \neq 0, \quad |a| < \rho, \quad |b| < \rho.$$

De la definición misma de  $M(a, b)$  se percibe casi inmediatamente que:

1.º

$$M(b, a) = M(a, b)$$



a menos que  $b/a$  sea número negativo (\*).

$$2.^{\circ} \quad M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a, b)$$

para todo número complejo  $\lambda$  no cero.

$$3.^{\circ} \quad M(a, b) = M(a_1, b_1) = M(a_2, b_2) = \dots$$

Tomando  $\lambda = b/a$  de la propiedad 2<sup>a</sup> se sigue

$$M(a, b) = a M(1, b/a)$$

y así el estudio de  $M(a, b)$  se reduce al estudio de la función  $M(1, x)$  de una variable compleja  $x$ .

2. Sea ahora

$$a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad a + b \neq 0, \quad a - b \neq 0.$$

En este caso, de cualquier modo elijamos las raíces cuadradas, ningún término de las sucesiones (1) y (2) será cero y podremos considerar los cocientes

$$\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \dots \quad (A)$$

En efecto, supongamos que

$$a_n \neq 0, \quad b_n \neq 0, \quad a_n + b_n \neq 0, \quad a_n - b_n \neq 0$$

para un cierto valor de  $n$ . Entonces  $a_{n+1} \neq 0, \quad b_{n+1} \neq 0$ ; tampoco puede ser  $a_{n+1} + b_{n+1} = 0$  o  $a_{n+1} - b_{n+1} = 0$  para lo cual sería necesario que

$$\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n} = 0 \quad \text{o bien} \quad \sqrt{a_n} - \sqrt{b_n} = 0,$$

pero en ambos casos  $a_n = b_n$  en contra de la hipótesis. Por no ser cero ninguno de los números  $a, b, a + b, a - b$  queda de-

(\*) Para  $b/a$  negativo serán  $M(1, b/a)$  y  $M(b/a, 1)$  números complejos conjugados.

mostrado por inducción que lo mismo valdrá para los números  $a_n, b_n, a_n + b_n, a_n - b_n$  cualquiera que sea  $n$ .

Si entre los cocientes (A) solamente un número finito tiene la parte real negativa y es  $b_s/a_s$  el último cuya parte real es negativa o cero, claro está que las sucesiones (1) y (2) convergen al límite común igual a la media principal  $M(a_s, b_s)$ .

En el caso que un número ilimitado de los cocientes (A) tengan parte real negativa, las sucesiones (1) y (2) tienden a cero, lo que vamos a demostrar del modo siguiente. Sea  $|a| \leq \rho, |b| \leq \rho$ ; ya notamos que será  $|a_n| \leq \rho, |b_n| \leq \rho$  para todos los valores de  $n$ . Supongamos ahora que

$$\operatorname{Re} \frac{b_n}{a_n} < 0$$

de donde, poniendo

$$a_n = R e^{i\varphi}, \quad b_n = R' e^{i\varphi'} \quad (R, R' \leq \rho)$$

se sigue  $\cos(\varphi' - \varphi) < 0$ . Como

$$|a_n + b_n| = \sqrt{R^2 + R'^2 + 2RR' \cos(\varphi' - \varphi)} < \sqrt{R^2 + R'^2} \leq \sqrt{2} \rho,$$

tendremos

$$|a_{n+1}| < \frac{\rho}{\sqrt{2}}, \quad |b_{n+1}| \leq \rho$$

$$|a_{n+2}| < \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} \rho, \quad |b_{n+2}| < \frac{\rho}{\sqrt{2}} < \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} \rho$$

o sea

$$|a_{n+2}| < \varepsilon \rho, \quad |b_{n+2}| < \varepsilon \rho \quad \text{con} \quad \varepsilon = \frac{2+\sqrt{2}}{4} < 0,9.$$

Será luego también

$$|a_{n+k}| < \varepsilon \rho, \quad |b_{n+k}| < \varepsilon \rho$$



para cualquier  $k \geq 2$ . Supongamos ahora que en la sucesión

$$\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \dots, \frac{b_m}{a_m}$$

haya  $n$  términos con parte real negativa; de la sucesión de los índices de estos términos podremos extraer una sucesión parcial compuesta de un número de términos  $i \geq n/2$  tal que cada uno sobrepase al anterior por lo menos en 2 unidades; llamando  $\alpha, \beta, \dots, \nu$  a estos índices será, por lo dicho,

$$|a_\alpha| \leq \rho, |a_\beta| < \varepsilon \rho, |a_\gamma| < \varepsilon^2 \rho, \dots, |a_\nu| < \varepsilon^{i-1} \rho$$

$$|b_\alpha| \leq \rho, |b_\beta| < \varepsilon \rho, |b_\gamma| < \varepsilon^2 \rho, \dots, |b_\nu| < \varepsilon^{i-1} \rho$$

y por consiguiente

$$|a_m| < \varepsilon^{\frac{n}{2}-1} \rho, \quad |b_m| < \varepsilon^{\frac{n}{2}-1} \rho.$$

Sea ahora  $\eta$  un número positivo dado tan pequeño como se quiera y sea  $r$  un número suficientemente grande para que sea

$$\varepsilon^{\frac{r}{2}} \rho < \eta.$$

Como la sucesión (A) tiene, por hipótesis, una infinidad de términos con parte real negativa, podemos elegir  $m$  bastante grande para que sea  $n \geq r + 2$ . Entonces será  $|a_k| < \eta, |b_k| < \eta$ , siempre que  $k \geq m$  y ello significa que  $\lim a_m = \lim b_m = 0$ . para  $m \rightarrow \infty$ , como habíamos enunciado. Vemos de esta manera que de todos los algoritmos posibles solamente son útiles aquellos para los cuales los cocientes

$$\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \dots$$

tienen parte real positiva desde cierto índice en adelante. En esta parte de la memoria nos limitaremos a las medias principales.

3. - Por no ser ningún término  $a_n, b_n$  igual a cero, podemos poner

$$\frac{1}{a_n} = \alpha_n, \quad \frac{1}{b_n} = \beta_n.$$

De las relaciones (3) resulta

$$\alpha_{n+1} = \frac{2\alpha_n\beta_n}{\alpha_n + \beta_n}, \quad \beta_{n+1} = \sqrt{\alpha_n\beta_n}$$

de donde

$$\beta_{n+1} - \alpha_{n+1} = \frac{\sqrt{\alpha_n}\sqrt{\beta_n}}{\alpha_n + \beta_n} \frac{\sqrt{\beta_n} - \sqrt{\alpha_n}}{\sqrt{\beta_n} + \sqrt{\alpha_n}} (\beta_n - \alpha_n).$$

Pero de acuerdo con lo dicho en el párrafo 1 es

$$R \frac{\sqrt{\beta_n}}{\sqrt{\alpha_n}} \geq 0$$

de lo cual se concluye

$$\left| \frac{\sqrt{\beta_n} - \sqrt{\alpha_n}}{\sqrt{\beta_n} + \sqrt{\alpha_n}} \right| \leq 1$$

y por tanto

$$|\beta_{n+1} - \alpha_{n+1}| \leq \left| \frac{\sqrt{\alpha_n}\beta_n}{\alpha_n + \beta_n} \right| |\beta_n - \alpha_n|.$$

Siendo ahora

$$R \frac{\beta_n}{\alpha_n} \geq 0, \quad |\alpha_n| = r, \quad |\beta_n| = r',$$

tenemos

$$\left| \frac{\sqrt{\alpha_n}\beta_n}{\alpha_n + \beta_n} \right| \leq \frac{\sqrt{rr'}}{\sqrt{r^2 + r'^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$



y por tanto

$$|\beta_{n+1} - \alpha_{n+1}| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} |\beta_n - \alpha_n|, \quad |\beta_n - \alpha_n| \leq \frac{1}{(\sqrt{2})^{n-1}} |\beta_1 - \alpha_1|.$$

Por otro lado

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{\alpha_n}{\alpha_n + \beta_n} (\beta_n - \alpha_n) \quad \text{y} \quad \left| \frac{\alpha_n}{\alpha_n + \beta_n} \right| \leq 1;$$

luego

$$|\alpha_{n+1} - \alpha_n| \leq \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{n-1} |\beta_1 - \alpha_1|.$$

Escribiendo ahora

$$\alpha_n = \alpha_1 + (\alpha_n - \alpha_1) + \dots + (\alpha_n - \alpha_{n-1})$$

y teniendo en cuenta la desigualdad precedente, se tiene

$$|\alpha_n| < |\alpha_1| + |\beta_1 - \alpha_1| \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \dots \right) < |\alpha_1| + 4|\beta_1 - \alpha_1|.$$

Supongamos que con  $a$  y  $b$  variables siempre se verifique

$$|a| > \sigma, \quad |b| > \sigma, \quad |a + b| > \sigma.$$

Entonces

$$|\beta_1| < \frac{1}{\sigma}, \quad |\alpha_1| < \frac{2}{\sigma}, \quad |\alpha_1| + 4|\beta_1 - \alpha_1| < \frac{14}{\sigma}$$

de manera que  $|\alpha_n| < 14/\sigma$  y pasando al límite

$$\frac{1}{|M(a, b)|} < \frac{14}{\sigma} \quad \text{o bien} \quad |M(a, b)| > \frac{\sigma}{14}.$$

4. - En el plano de la variable compleja  $x$  imaginemos que sea practicado un corte a lo largo de la parte negativa del eje

real. Excluyendo los dos lados del corte, a la parte de plano que queda le llamaremos el dominio  $R$ . La media aritmético-geométrica principal  $M(1, x)$  es una función bien determinada de la variable compleja  $x$  en el dominio  $R$ . Es hecho de principal importancia que en todo el dominio  $R$  la media principal  $M(1, x)$  es una función analítica regular (\*), lo que vamos a demostrar del modo siguiente.

Sea  $C$  un círculo con centro en un punto  $x_0$  del dominio  $R$  que no tenga ningún punto común con el corte mencionado. Designemos con  $a_n(x)$  y  $b_n(x)$  los términos  $n$ -ésimos del algoritmo en un punto  $x$  interior al círculo  $C$  y supongamos que  $a_n(x)$  y  $b_n(x)$  sean funciones regulares dentro de  $C$  de modo que

$$a_n(x) = a_n(x_0) + \frac{a'_n(x_0)}{1} (x - x_0) + \frac{a''_n(x_0)}{1.2} (x - x_0)^2 + \dots$$

$$b_n(x) = b_n(x_0) + \frac{b'_n(x_0)}{1} (x - x_0) + \frac{b''_n(x_0)}{1.2} (x - x_0)^2 + \dots$$

Entonces es claro que

$$a_{n+1}(x) = \frac{1}{2} (a_n(x) + b_n(x))$$

será también una función regular dentro de  $C$ . Ahora consideremos la raíz cuadrada

$$\omega(x) = \sqrt{a_n(x) b_n(x)} = \sqrt{a_n(x_0) b_n(x_0)} \sqrt{1 + \alpha(x - x_0) + \beta(x - x_0)^2 + \dots}$$

donde

$$\sqrt{a_n(x_0) b_n(x_0)} = b_{n+1}(x_0).$$

---

(\*) Hasta qué punto fué conocida por Gauss la teoría de las funciones analíticas, es cosa difícil de averiguar. Sin embargo su carta famosa a Bessel con fecha 18 de Diciembre de 1811 contiene una enunciación clara del teorema fundamental de Cauchy con alusión a su importancia para el desarrollo de funciones en serie. No es, por tanto, del todo improbable que Gauss poseyera conocimiento de cosas que usamos en nuestra exposición.



Como  $a_n(x)$  y  $b_n(x)$  no se anulan dentro de  $C$  la serie

$$\sqrt{1 + \alpha(x - x_0) + \beta(x - x_0)^2 + \dots},$$

convergente en  $C$ , no se anula allí tampoco. Por consiguiente

$$\sqrt{1 + \alpha(x - x_0) + \beta(x - x_0)^2 + \dots} = 1 + c(x - x_0) + d(x - x_0)^2 + \dots$$

es una función regular dentro de  $C$  y lo mismo vale para  $\omega(x)$ . La parte real de la función regular  $\omega(x)/a_{n+1}(x)$  no se anula dentro de  $C$  y por tanto queda positiva. En efecto, si

$$R \frac{\omega(x)}{a_{n+1}(x)}$$

se anulara en cierto punto  $x_1$  dentro de  $C$  tendríamos

$$\frac{\omega(x_1)}{a_{n+1}(x_1)} = \lambda i$$

con  $\lambda$  real de lo que seguiría (ver § 1)  $\frac{b_n(x_1)}{a_n(x_1)} < 0$ ; en contra de la hipótesis. Por ser la parte real de  $\omega(x)/a_{n+1}(x)$  positiva dentro de  $C$  resulta  $\omega(x) = b_{n+1}(x)$  y así queda demostrado que  $b_{n+1}(x)$  es una función regular dentro de  $C$ . De tal manera vemos que suponiendo  $a_n(x)$  y  $b_n(x)$  regulares dentro de  $C$  lo mismo valdrá para  $a_{n+1}(x)$  y  $b_{n+1}(x)$ . Pero

$$a_1 = \frac{1+x}{2}, \quad b_1 = \sqrt{x},$$

donde la raíz tiene su parte real positiva (ver § 1), son funciones regulares dentro de  $C$ . Queda así demostrado que para un valor cualquiera  $n \geq 1$  los términos  $a_n(x)$  y  $b_n(x)$  son funciones regulares dentro de  $C$  y por tanto en todo el dominio  $R$ . Como la serie

$$M(1, x) = 1 + (a_1(x) - 1) + (a_2(x) - a_1(x)) + \dots$$

es uniformemente convergente en cada parte limitada del domi-

nio  $R$  (ver § 1) mientras sus términos son funciones regulares en él, sigue de un teorema bien conocido que  $M(1, x)$  es regular también en todo el dominio  $R$  y no se anula en él, en consecuencia de la última desigualdad del § 3.

En cuanto a

$$M(1+x, 1-x) = (1+x) M\left(1, \frac{1-x}{1+x}\right),$$

ella será una función regular en el dominio  $R_0$  que se obtiene del plano complejo practicando dos cortes: uno desde el punto 1 a lo largo de la parte positiva del eje real y otro desde el punto  $-1$  a lo largo de la parte negativa del mismo. Así el cociente

$$\frac{M(1-x, 1+x)}{M(1, x)}$$

será una función analítica regular en el dominio  $R'$  que resulta de  $R$  practicando una nueva cortadura desde el punto 1 a lo largo de la parte positiva del eje real.

5. - Por cierto la función  $M(1+x, 1-x)$  queda regular y no se anula en el círculo unitario  $|x| < 1$ . Luego el cociente

$$\frac{1}{M(1+x, 1-x)}$$

puede desarrollarse en serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{2n} \quad (5)$$

con  $c_0=1$  y queda por mostrar de qué manera se obtiene la ley de coeficientes. Tratando el caso de números reales, ya determinamos de dos diferentes maneras ese desarrollo en la Parte Primera. Un tercer método para el mismo fin, también debido a Gauss, es muy ingenioso y vale la pena de explicarlo con toda la brevedad posible. Poniendo

$$x = \frac{2t}{1+t^2}$$



se halla

$$\frac{1}{M(1+x, 1-x)} = \frac{1+t^2}{M((1+t)^2, (1-t)^2)} = \frac{1+t^2}{M(1+t^2, 1-t^2)}.$$

Dividiendo por  $1+t^2$  y luego calculando el último miembro por la simple sustitución de  $t^2$  en cambio de  $x$  en (5) y calculando por otra parte el primer miembro mediante la dada sustitución  $x=2t:(1+t^2)$  resulta

$$\sum c_n t^{4n} = \sum 4^n c_n \frac{t^{2n}}{(1+t^2)^{2n+1}}.$$

Luego sustituyendo el desarrollo

$$(1+t^2)^{-2n-1} = \sum (-1)^k C_{2n+k} t^{2k}$$

e igualando coeficientes de las mismas potencias de  $t$  en ambos miembros logramos las fórmulas

$$g_p = \sum_{n=0}^p (-1)^n 4^n C_{p+n} c_n = \begin{cases} 0 & \text{siendo } p \text{ impar} \\ c_{\frac{p}{2}} & \text{siendo } p \text{ par} \end{cases}$$

de las cuales podemos calcular los coeficientes  $c_1, c_2, c_3, \dots$  paso a paso. Para descubrir la ley general de formación de estos coeficientes conviene considerar las combinaciones

$$\Omega_p = p^2 g_p - (p-1)^2 g_{p-2} = (2p-1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n \Gamma_n c_n$$

donde los coeficientes  $\Gamma_n$  se expresan por <sup>(1)</sup>

$$\Gamma_n = (2n+1) C_{p+n-1}^{2n} + \frac{2n-1}{n^2} C_{p+n-2}^{2n-2},$$

<sup>(1)</sup> En efecto poniendo, como de costumbre,

$$C_{p-2+n}^{2n} = 0 \quad \text{para } n > p-2,$$

puede escribirse

$$\Omega_p = p^2 g_p - (p-1)^2 g_{p-2} = \sum_{n=0}^p (-1)^n 4^n [p^2 C_{p+n}^{2n} - (p-1)^2 C_{p-2+n}^{2n}] c_n;$$

$$\Gamma_0 = 1.$$

Ordenando el último miembro según los coeficientes  $C_{p+n-1}^{2n}$  puede escribirse también

$$\begin{aligned} \Omega_p = (2p-1) [(1-4c_1) - 4 \frac{p(p-1)}{1.2.3} (9c_1 - 16c_2) \\ + 16 \frac{(p+1)p(p-1)(p-2)}{1.2.3.4.5} (25c_2 - 36c_3) - \dots]. \end{aligned}$$

Poniendo sucesivamente  $p=1, 2, 3, \dots$  y teniendo en cuenta los valores de las  $g_p$  hallamos

$$1 - 4c_1 = 0, \quad 9c_1 - 16c_2 = 0, \quad 25c_2 - 36c_3 = 0, \dots$$

de donde

$$c_1 = \frac{1}{4}, \quad c_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{16}, \quad c_3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{25}{36}, \dots;$$

de una manera general

desarrollando cálculos se obtiene fácilmente

$$\begin{aligned} p^2 C_{p+n}^{2n} - (p-1)^2 C_{p-2+n}^{2n} = \\ = \frac{(p+n-2)\dots(p-n+1)}{(2n)!} [p^2(p+n-1)(p+n) - (p-1)^2(p-n)(p-n-1)] \\ = \frac{(p+n-2)\dots(p-n+1)}{(2n)!} (2p-1) [(2n+1)p^2 - (2n+1)p + n^2 + n]. \end{aligned}$$

Por otro lado se tiene igualmente, desarrollando cálculos:

$$\begin{aligned} F_n = (2n+1) C_{p+n-1}^{2n} + \frac{n^2}{2n-1} C_{2n-2}^{p+n-2} = \\ = \frac{(p+n-2)\dots(p-n+1)}{(2n)!} [(2n+1)(p+n-1)(p-n) + 2n^2] \\ = \frac{(p+n-2)\dots(p-n+1)}{(2n)!} [(2n+1)p^2 - (2n+1)p + n^2 + n]. \end{aligned}$$

Resulta así demostrada la fórmula del texto. Debe observarse sin embargo que la deducción es válida solo para  $p > 1$ , pues para  $p = 1$  no existe la  $g_{p-2}$ ; pero, poniendo en este caso

$$\Omega_1 = g_1 = 1 - 4c_1$$

se observa que la fórmula sigue válida.



$$c_n = \left( \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} \right)^2$$

6. - Por ser

$$\Re \frac{b_n}{a_n} \geq 0, \quad n \geq 1,$$

la parte real de la razón

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2}{1 + \frac{b_n}{a_n}}$$

será seguramente positiva. Por la misma razón

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| < 2.$$

Por otra parte, poniendo

$$\frac{\sqrt{b_{n-1}}}{\sqrt{a_{n-1}}} = \xi = R(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

hallamos

$$1 + \frac{b_n}{a_n} = \frac{(1+\xi)^2}{1+\xi^2}$$

y

$$\left| 1 + \frac{b_n}{a_n} \right| = \frac{1+R^2+2R\cos\varphi}{\sqrt{1+R^4+2R^2\cos 2\varphi}}.$$

Por ser la parte real de  $b_{n-1}/a_{n-1}$  no negativa, puesto que  $n \geq 2$ , tenemos  $\cos 2\varphi \geq 0$  y por tanto

$$\left| 1 + \frac{b_n}{a_n} \right| < \frac{(1+R)^2}{\sqrt{1+R^4}} \leq 2\sqrt{2}$$

de modo que

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

para  $n \geq 2$ . Por ser la parte real de  $a_n/a_{n+1}$  positiva, la parte imaginaria del logaritmo principal

$$\log \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

será numéricamente menor de  $\frac{\pi}{2}$  y como por otro lado

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| < 2$$

tendremos la desigualdad

$$\left| \log \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| < \sqrt{(\log 2)^2 + \frac{\pi^2}{4}}.$$

Ahora sean  $a=1, b=\sqrt{1-x^2}$  donde la raíz tiene su parte real positiva, y sea  $x$  contenido en el dominio  $R_0$ . Entonces en el mismo dominio

$$\log \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

será una función regular que toma valor real positivo para  $0 < x < 1$  y hay que notar que ella no cambia al cambiar  $x$  en  $-x$ . Acudiendo ahora a la fórmula (22) de la Primera parte:

$$\frac{\pi}{2} \frac{M(a,b)}{M(a,c)} = \log \frac{4a}{c} - \log \frac{a}{a_1} - \frac{1}{2} \log \frac{a_1}{a_2} - \frac{1}{4} \log \frac{a_2}{a_3} - \dots,$$

pondremos en ella  $a=1, b=\sqrt{1-x^2}$  donde  $0 < x < 1$  lo que nos dará

$$\frac{\pi}{2} \frac{M(1-x, 1+x)}{M(1,x)} = \log \frac{4}{x} - \log \frac{a}{a_1} - \frac{1}{2} \log \frac{a_1}{a_2} - \dots \quad (6)$$



Pero la serie

$$\log \frac{a}{a_1} + \frac{1}{2} \log \frac{a_1}{a_2} + \frac{1}{4} \log \frac{a_2}{a_3} + \dots$$

es uniformemente convergente y sus términos son funciones regulares en el dominio  $R_0$  y por tanto en  $R'(n.4)$ . Luego el segundo miembro de (6) representa una función regular en  $R'$  y lo mismo vale para el primer miembro. Como ambos tienen valores iguales para  $0 < x < 1$  serán iguales en todo el dominio y (6) valdrá en el mismo dominio. Ahora cambiando  $x$  en  $-x$  en (6) y restando tendremos

$$\frac{\pi}{2} \frac{M(1+x, 1-x)}{M(1, -x)} - \frac{\pi}{2} \frac{M(1-x, 1+x)}{M(1, x)} = \log \frac{4}{-x} - \log \frac{4}{x}$$

y como

$$\log \frac{4}{-x} - \log \frac{4}{x} = \pm \pi i$$

según sea positiva o negativa la parte imaginaria de  $x$ , logramos por fin la fórmula importantísima

$$\frac{1}{M(1, -x)} = \frac{1}{M(1, x)} \pm \frac{2i}{M(1+x, 1-x)} \quad (7)$$

donde vale el signo  $+$  o  $-$  según sea .

$$I x > 0 \quad \text{o} \quad I x < 0.$$

7.- La fórmula (7) está establecida sólo cuando la parte imaginaria de  $x$  no es cero. Veamos ahora lo que ocurre cuando  $x$  es un número real. Sea  $x = y - i\varepsilon$  donde  $y$  y  $\varepsilon$  tienen valores positivos excluyendo  $y = 1$ . Sean  $a_n(\varepsilon)$  y  $b_n(\varepsilon)$  los términos del algoritmo aplicado a los números  $a = 1$ ,  $b = -y + i\varepsilon$ .

Los primeros serán

$$a_1(\varepsilon) = \frac{1-y+i\varepsilon}{2}, \quad b_1(\varepsilon) = \sqrt{-y+i\varepsilon}$$

donde la raíz tiene parte real positiva. Haciendo aproximar  $\varepsilon$  a cero  $a_1(\varepsilon)$  y  $b_1(\varepsilon)$  tienden a los límites

$$a_1 = \frac{1-y}{2}, \quad b_1 = i \sqrt{y}$$

con valor positivo de la raíz cuadrada. Sean  $a_2, b_2; a_3, b_3; \dots$  los términos del algoritmo aplicado a  $a_1$  y  $b_1$ . Tenemos

$$\lim a_n = \lim b_n = M(a_1, b_1).$$

Pero por la definición de la media principal que hemos adoptado en § 1

$$M(1, -y) = M(a_1, b_1).$$

Por otra parte se vé fácilmente que

$$\lim a_n(\varepsilon) = a_n, \quad \lim b_n(\varepsilon) = b_n, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

y la convergencia de  $a_n(\varepsilon)$  y  $b_n(\varepsilon)$  al límite  $M(1, -y + i\varepsilon)$  es uniforme en  $\varepsilon$ . Luego

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M(1, -y + i\varepsilon) = M(1, -y).$$

Teniendo en cuenta que la parte imaginaria del cociente

$$\frac{1-x}{1+x} = \frac{1-y+i\varepsilon}{1+y-i\varepsilon} = \frac{1-y^2-\varepsilon^2}{(1+y)^2+\varepsilon^2} + \frac{2\varepsilon}{(1+y)^2+\varepsilon^2} i$$

es positiva, tenemos por la misma razón

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M(1+y-i\varepsilon, 1-y+i\varepsilon) = M(1+y, 1-y).$$

Ahora sustituyendo en la fórmula (7)  $x = -y + i\varepsilon$  y haciendo aproximar  $\varepsilon$  a cero hallamos

$$\frac{1}{M(1, -y)} = \frac{1}{M(1, y)} - \frac{2i}{M(1+y, 1-y)}$$



para un valor cualquiera positivo de  $y$  excluyendo  $y=1$ , es decir cambiando de notación

$$\frac{1}{M(1, -x)} = \frac{1}{M(1, x)} - \frac{2i}{M(1+x, 1-x)} \quad (7')$$

para  $x > 0$ . Cuando  $0 < x < 1$  resulta de la fórmula (7')

$$\frac{1}{M(1, -x)} = \frac{1}{M(1, x)} - \frac{2i}{M(1, \sqrt{1-x^2})} \quad (8)$$

y así el cálculo de  $M(1, -x)$  se reduce al cálculo de dos medias de números positivos. Sea  $x > 1$ ; entonces de la misma fórmula sigue

$$\frac{1}{M(1+x, 1-x)} = \frac{1}{M(x+1, x-1)} - \frac{i}{M(1, x)} = \frac{1}{M(x, \sqrt{x^2-1})} - \frac{i}{M(1, x)}$$

y substituyendo esto en (7') tendremos por fin

$$\frac{1}{M(1, -x)} = \frac{1}{M(1, x)} - \frac{2i}{M(x, \sqrt{x^2-1})}.$$

Lo mismo resulta de la fórmula (8) cambiando en ella  $x$  en  $\frac{1}{x}$  y teniendo en cuenta que, al pasar de valores de  $x$  menores de 1 a valores mayores de 1, para calcular la media aritmético-geométrica principal será necesario cambiar el signo de  $i$ . De tal manera el cálculo de la media  $M(1, -x)$  para  $x$  positivo siempre se reduce al cálculo de dos medias de números positivos.

Hay otros casos donde semejante reducción tiene lugar y quizás vale la pena de discutirlos. Sea  $x$  real y positivo. Entonces

$$M(1 + \sqrt{1+x^2}, 1 - \sqrt{1+x^2}) = M(1, xi).$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{M(1+\sqrt{1+x^2}, 1-\sqrt{1+x^2})} \\ &= \frac{1}{M(\sqrt{1+x^2}+1, \sqrt{1+x^2}-1)} - \frac{i}{M(1, \sqrt{x^2+1})} \\ &= \frac{1}{M(\sqrt{x^2+1}, x)} - \frac{i}{M(1, \sqrt{x^2+1})} \end{aligned}$$

y por tanto

$$\frac{1}{M(1, xi)} = \frac{1}{M(x, \sqrt{x^2+1})} - \frac{i}{M(1, \sqrt{x^2+1})} \quad (9)$$

para  $x > 0$ .

Otro caso notable es el siguiente. Con  $\alpha$  y  $\beta$  números positivos tenemos

$$M(\alpha + i\beta, \alpha - i\beta) = M(\alpha, \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}).$$

$$M(\alpha + i\beta, -\alpha + i\beta) = M(i\beta, i\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) = i M(\beta, \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}).$$

Por otro lado resulta de la fórmula (7)

$$\begin{aligned} \frac{1}{M(\alpha + i\beta, -\alpha + i\beta)} &= \frac{1}{M(\alpha + i\beta, \alpha - i\beta)} - \frac{2i}{M(\alpha + i\beta, 2\sqrt{i}\sqrt{\alpha\beta})} \\ &\quad \left( \sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right); \end{aligned}$$

sustituyendo resulta

$$\frac{2i}{M(\alpha + i\beta, 2\sqrt{i}\sqrt{\alpha\beta})} = \frac{1}{M(\alpha, \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})} + \frac{i}{M(\beta, \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})}.$$

Sea

$$\alpha + i\beta = \sqrt{\frac{s+i}{2}}$$

Entonces

$$4\alpha\beta = 1, \quad \alpha^2 + \beta^2 = \frac{\sqrt{s^2+1}}{2}$$



sucesión discorde de  $n-2$  letras comunes y 1 letra diferente, es

$$J_n = f_{n-2;1} \quad (13)$$

luego por (10):

$$J_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad (14)$$

o sea

$$f_n = (n-1)(f_{n-1} + f_{n-2}) \quad (14a)$$

que es la fórmula a) de Euler.

De (12), (14), (14a) se obtienen fácilmente otras relaciones equivalentes; en efecto (14a) puede escribirse

$$\begin{aligned} f_n - n f_{n-1} &= -(f_{n-1} - (n-1)f_{n-2}) = f_{n-2} - (n-2)f_{n-3} = \dots \\ &= (-1)^n f_0 = (-1)^n \end{aligned}$$

de donde

$$f_n = n f_{n-1} + (-1)^n = n(n-1)f_{n-2} + (-1)^{n-1}(n-1) = \dots \quad (15)$$

$$J_n = \frac{f_n}{n-1} = n f_{n-2} + (-1)^{n-1}. \quad (15a)$$

Análogamente se obtiene

$$J_n = (n-1)J_{n-1} - f_{n-3} \quad (15b)$$

y, por (3),

$$\varphi_n = (n-1)(\varphi_{n-1} + \varphi_{n-2}) = n \varphi_{n-1} + (-1)^{n-1}; \quad (16)$$

luego en particular

$$f_n \equiv 0 \pmod{n-1}; f_n \equiv (-1)^n \pmod{n}; J_n \equiv (-1)^{n-1} \pmod{n}. \quad (17)$$

De las fórmulas (9) y (11) se deduce que si formamos un cuadro (o triángulo) tal que la primera fila se compone de los números factoriales  $1!, 2!, \dots, n!, \dots$ , y las filas sucesivas de

y

$$\frac{\alpha + i\beta}{\sqrt{i}} = \sqrt{\frac{1-si}{2}}.$$

Tomando la raíz de modo que la parte real sea positiva, la fórmula precedente lleva a la relación

$$\frac{2}{M(1, \sqrt{\frac{1-si}{2}})} = \frac{1-i}{M(\sqrt[4]{\frac{1+s^2+s}{2}}, \sqrt[4]{1+s^2})} + \frac{1+i}{M(\sqrt[4]{\frac{1+s^2-s}{2}}, \sqrt[4]{1+s^2})}$$

la cual al cambiar  $i$  en  $-i$  y poniendo  $s = \operatorname{ctg} \varphi$  (donde  $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ) aparece en la forma más elegante

$$\frac{2}{M(1, \sqrt{\frac{1+i \operatorname{ctg} \varphi}{2}})} = \frac{(1+i)\sqrt{\operatorname{sen} \varphi}}{M(1, \cos \frac{\varphi}{2})} + \frac{(1-i)\sqrt{\operatorname{sen} \varphi}}{M(1, \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2})}.$$

Finalmente se halla casi inmediatamente para  $-\pi < \varphi < \pi$

$$M(1, e^{i\varphi}) = e^{\frac{\varphi i}{2}} M(1, \cos \frac{\varphi}{2}).$$

9. - Para establecer algunas otras cosas muy importantes haremos ahora uso de argumentos geométricos y empezaremos por demostrar un lema muy sencillo. Sea (fig. 1)  $OCD$  un triángulo con ángulo agudo en  $O$ ,  $A$  el punto medio del lado  $CD$ ,  $OSP$  la bisectriz del ángulo  $COD = \theta$  y  $ASR$  la bisectriz del ángulo  $OAD$ . Digo que el ángulo  $OSR$  será siempre menor de  $45^\circ$ . Como

$$AO + A\Omega > O\Omega = \Omega T = AT + A\Omega$$

será

$$AO > AT$$

y también

$$\sphericalangle ATO > \sphericalangle AOT.$$



Pero

$$\eta = \angle ATO = 90^\circ - \frac{1}{2} O - C$$

y por consiguiente

$$\varepsilon = \angle AOT < 90^\circ - \frac{1}{2} O - C.$$

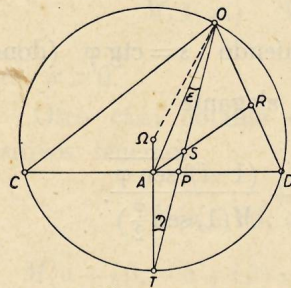


Fig. 1.

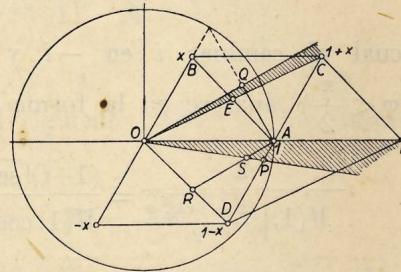


Fig. 2.

Por otra parte

$$\angle OAR = \frac{1}{2} OAD = 90^\circ - \frac{1}{2} D - \frac{1}{4} O - \frac{1}{2} \varepsilon$$

$$\angle OSR = \angle AOT + \angle OAR;$$

luego

$$\begin{aligned} \angle OSR &= 90^\circ - \frac{1}{2} D - \frac{1}{4} O - \frac{1}{2} \varepsilon + \varepsilon = 90^\circ - \frac{1}{2} D - \frac{1}{4} O + \frac{1}{2} \varepsilon < \\ &< 90^\circ + 45^\circ - \frac{C+D+O}{2} = 45^\circ \end{aligned}$$

y el lema queda demostrado.

Para mayor claridad dividiremos la discusión que sigue en cuatro partes.

1º. Sea  $x$  un número complejo tal que

$$|x| \leq 1, \quad \operatorname{Re} x \geq 0, \quad \operatorname{Im} x > 0.$$

En la figura 2  $1, x, 1+x, 1-x$  están representados por los puntos  $A, B, C, D$ . El punto medio  $E$  de  $AB$  representa el número  $\frac{1+x}{2}$  mientras que la raíz cuadrada con parte real positiva está representada por un punto de la bisectriz  $OQ$  del ángulo  $AOB$ . La media principal  $M(1, x)$  estará representada por un punto (no señalado) interior al ángulo  $COQ$ . El punto  $A$  representa la media aritmética de dos números  $1+x$  y  $1-x$  y la media geométrica de ellos con parte real positiva estará representada por un punto de la bisectriz  $OP$  del ángulo  $COD$ . El punto que representa la media principal  $M(1+x, 1-x)$  será interior al ángulo  $AOP$ . De lo dicho sigue que

$$0 < \arg \frac{M(1, x)}{M(1+x, 1-x)} \leq \vartheta$$

donde  $\vartheta$  es la medida del ángulo  $POQ$ . Tracemos  $AR$  bisectriz del ángulo  $OAD$  y por tanto paralela a  $OQ$ ; tenemos  $\sphericalangle POQ = \sphericalangle OSR$ . Los triángulos  $ODF$  y  $ODC$  tienen un lado común  $OD$ . También  $DF = OC$ , pero  $OF \geq CD$ . Luego  $\sphericalangle ODF \geq \sphericalangle COD$  y por tanto será el ángulo  $COD$  agudo o recto. Entonces del lema demostrado sigue  $\vartheta \leq \frac{\pi}{4}$  y por tanto

$$\operatorname{Re} \frac{M(1, x)}{M(1+x, 1-x)} > 0, \quad \operatorname{Im} \frac{M(1, x)}{M(1+x, 1-x)} > 0,$$

2º. Sea  $x$  un número complejo tal que

$$|x| \leq 1, \quad \operatorname{Re} x \geq 0, \quad \operatorname{Im} x < 0.$$

Designando con  $\bar{x}$  el número conjugado de  $x$  serán

$$|\bar{x}| \leq 1, \quad \operatorname{Re} \bar{x} \geq 0, \quad \operatorname{Im} \bar{x} > 0.$$



Luego

$$\operatorname{R} \frac{M(1, \bar{x})}{M(1+x, 1-x)} > 0, \quad \operatorname{I} \frac{M(1, \bar{x})}{M(1+x, 1-x)} > 0.$$

Pero los cocientes

$$\frac{M(1, x)}{M(1+x, 1-x)} \quad \text{y} \quad \frac{M(1, \bar{x})}{M(1+x, 1-x)}$$

son números complejos conjugados y tienen la misma parte real. Por tanto

$$\operatorname{R} \frac{M(1, x)}{M(1+x, 1-x)} > 0, \quad \operatorname{I} \frac{M(1, x)}{M(1+x, 1-x)} < 0.$$

3º. Sea  $|x| > 1$ ,  $\operatorname{R} x \geq 0$ , y la parte imaginaria de  $x$  no nula. Poniendo  $x x_0 = 1$  tenemos

$$\frac{M(1, x)}{M(1+x, 1-x)} = \frac{M(1, x_0)}{M(x_0+1, x_0-1)}.$$

De la fórmula (6) resulta

$$\frac{M(1, x_0)}{M(x_0+1, x_0-1)} = \frac{M(1, x_0)}{M(1+x_0, 1-x_0)} \pm i.$$

valiendo el signo  $+$  o  $-$  según  $\operatorname{I} x > 0$  o  $\operatorname{I} x < 0$ . Luego

$$\frac{M(1, x)}{M(1+x, 1-x)} = \frac{M(1, x_0)}{M(1+x_0, 1-x_0)} \pm i.$$

Por ser  $|x_0| < 1$ ,  $\operatorname{R} x_0 \geq 0$  será

$$\operatorname{R} \frac{M(1, x_0)}{M(1+x_0, 1-x_0)} > 0, \quad \operatorname{R} \frac{M(1, x)}{M(1+x, 1-x)} > 0.$$

4º. Sea ahora  $\operatorname{R} x < 0$ , y la parte imaginaria de  $x$  no nula. De la misma fórmula (7) sigue

$$\frac{M(1+x, 1-x)}{M(1, x)} = \frac{M(1-x, 1+x)}{M(1, -x)} \mp 2i.$$

Por lo dicho la parte real de

$$\frac{M(1-x, 1+x)}{M(1, -x)}$$

es positiva, luego es positiva la parte real de

$$\frac{M(1+x, 1-x)}{M(1, x)}$$

lo mismo que la de

$$\frac{M(1, x)}{M(1+x, 1-x)}.$$

Sigue de esta discusión que la parte real de la razón

$$t = \frac{M(1, x)}{M(1-x, 1+x)}$$

será siempre positiva cualquiera que sea el número complejo  $x$  con parte imaginaria no nula. Además se puede mostrar sin dificultad ninguna que para dos números positivos dados  $\rho$  y  $R$  existe un número positivo  $d(\rho, R)$  tal que dicha parte real será  $> d(\rho, R)$  siempre que

$$R > |x| > \rho, \quad |1-x| > \rho, \quad |1+x| > \rho.$$

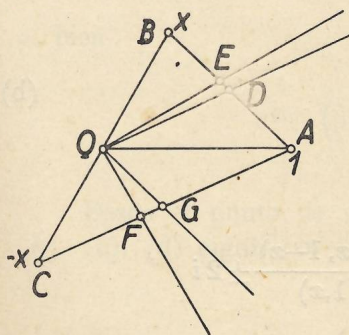


Fig. 3.

10. - Sea  $|x| \leq 1$ ,  $1x \neq 0$ . En la figura anexa  $D$  es el punto medio de  $AB$  y  $OE$  la bisectriz del ángulo  $AOC$ . El punto representante de la media principal está en el ángulo  $DOE$ ; lo mismo el punto que representa la media principal  $M(1, -x)$  está en el ángulo  $FOG$ . Y como  $\angle EOF = 90^\circ$  se ve fácilmente



que

$$\operatorname{Re} \frac{M(1,x)}{M(1,-x)} \geq 0$$

siendo valedero el signo de igualdad sólo cuando  $|x|=1$ . Esta desigualdad sencilla va a conducirnos a consecuencias importantes. Sea

$$t = \frac{M(1,x)}{M(1-x, 1+x)} = \alpha + i\beta;$$

por la (7) será

$$\frac{M(1,x)}{M(1,-x)} = 1 \pm 2i(\alpha + i\beta);$$

luego

$$\operatorname{Re} \frac{M(1,x)}{M(1,-x)} = 1 \mp 2\beta \geq 0$$

donde vale el signo  $-$  o  $+$  según sea  $|x| > 0$  o  $|x| < 0$ . Por tanto tenemos

$$0 < \beta \leq \frac{1}{2} \tag{a}$$

cuando  $|x| > 0$  y

$$-\frac{1}{2} \leq \beta < 0 \tag{b}$$

cuando  $|x| < 0$ . La (7) se escribe

$$\frac{M(1+x, 1-x)}{M(1,-x)} = \frac{M(1-x, 1+x)}{M(1,x)} \pm 2i$$

o

$$\frac{1}{t'} = \frac{1}{t} \pm 2i, \text{ poniendo } t' = \frac{M(1, -x)}{M(1-x, 1+x)} = \alpha' + \beta' i$$

Sea  $|x| > 0$  entonces  $\beta > 0, \beta' < 0$  y de la relación

$$t' = \frac{t}{1+2it} = \alpha' + i\beta' = \frac{\alpha + i\beta}{1-2\beta+2i\alpha}$$

se deduce

$$\beta' = \frac{-2\alpha^2 - 2\beta^2 + \beta}{(1-2\beta)^2 + 4\alpha^2} < 0$$

o bien

$$\alpha^2 + \left(\beta - \frac{1}{4}\right)^2 > \frac{1}{16}. \quad (c)$$

En el caso de ser  $|x| < 0$  tenemos  $\beta < 0, \beta' > 0$  y de la relación

$$t' = \frac{t}{1-2it}$$

sigue

$$\beta' = \frac{2\alpha^2 + 2\beta^2 + \beta}{(1+2\beta)^2 + 4\alpha^2} > 0$$

o bien

$$\alpha^2 + \left(\beta + \frac{1}{4}\right)^2 > \frac{1}{16}. \quad (d)$$

Desde el punto de vista geométrico las desigualdades (a), (b), (c), (d) significan que el punto

$$t = \frac{M(1, x)}{M(1-x, 1+x)}$$



está en el dominio representado en la figura adjunta, de la cual se excluyen los arcos circulares  $b$ ,  $b'$  y el eje real. Debemos recordar que esto vale para  $x$  complejo con módulo  $\leq 1$  y parte imaginaria no nula.

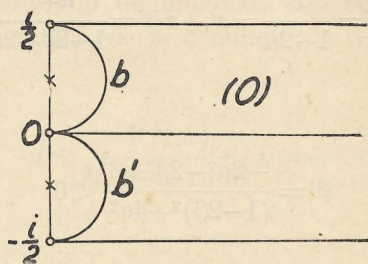


Fig. 4.

Veamos ahora lo que pasa cuando  $|x| > 1$ , siendo todavía la parte real de  $x$  no nula. Poniendo nuevamente  $x_0 = 1$ , tendremos

$$\frac{M(1, x)}{M(1-x, 1+x)} = \frac{M(1, x_0)}{M(1-x_0, 1+x_0)} \pm i.$$

con el signo  $+$  o  $-$  según que sea  $\text{Re } x > 0$  o  $\text{Re } x < 0$ . sea

$$t' = \frac{M(1, x_0)}{M(1-x_0, 1+x_0)}.$$

Entonces  $t = t' + i$  y como  $t'$  está situado en la parte inferior o superior del dominio  $(O)$  según que sea  $\text{Re } x > 0$  o  $\text{Re } x < 0$ . el dominio completo donde cae  $t$  para todos los valores complejos de  $x$  con parte imaginaria no nula será el representado más adelante (fig. 1) del cual hay que excluir los arcos circulares, las líneas  $\text{Re } t = \pm 1$  y el eje real.

Hasta ahora siempre excluimos los valores reales de  $x$ . Queda pues por considerar el cociente

$$t = \frac{M(1, x)}{M(1-x, 1+x)}$$

para valores reales de  $x$ . Sea primero  $0 < x < 1$ ; entonces al

decrecer  $x$  de 1 a 0, la variable  $t$  decrece de  $+\infty$  a 0 y los puntos correspondientes llenan el eje real positivo. Sea, en segundo lugar,  $x > 1$ . Utilizando la fórmula

$$\frac{1}{M(1+x, 1-x)} = \frac{1}{M(x, \sqrt{x^2-1})} - \frac{i}{M(1, x)}$$

válida para  $x > 1$ , deducimos

$$t = \frac{M(1, x)}{M(x, \sqrt{x^2-1})} + i$$

donde se ve que al variar  $x$  el punto  $t$  describe la línea  $It=1$ . Sea, tercero,  $-1 < x < 0$ . Poniendo  $x = -y$  tendremos

$$\frac{1}{t} = \frac{M(1+y, 1-y)}{M(1, -y)}$$

o bien, utilizando la fórmula (8)

$$\frac{1}{t} = \frac{M(1, \sqrt{1-y^2})}{M(1, y)} - 2i = \tau - 2i.$$

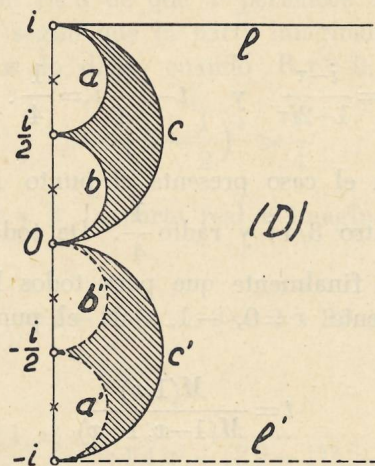


Fig. 5.

Al variar  $y$  de 0 a 1 la cantidad  $\tau$  decrece de  $+\infty$  a 0 y



como  $|t - \frac{1}{4}i| = \frac{1}{4}$ , el punto  $t$  describirá el semicírculo con centro  $\frac{1}{4}i$  y radio  $\frac{1}{4}$ . Sea finalmente  $x < -1$ . Poniendo  $x = -y$  tendremos

$$t = \frac{M(1, -y)}{M(1+y, 1-y)}.$$

Pero (ver § 7)

$$\frac{1}{M(1, -y)} = \frac{-1}{M(1, y)} - \frac{2i}{M(y, \sqrt{y^2-1})} = \frac{-1}{M(1, y)}(1 + 2i\tau)$$

$$\frac{1}{M(1+y, 1-y)} = \frac{1}{M(y, \sqrt{y^2-1})} - \frac{i}{M(1, y)} = \frac{-1}{M(1, y)}(i - \tau)$$

habiendo puesto

$$\tau = \frac{M(1, y)}{M(y, \sqrt{y^2-1})}.$$

Se sigue

$$t = \frac{i - \tau}{1 + 2i\tau} \quad \text{y} \quad |t - \frac{3}{4}i| = \frac{1}{4}.$$

Por tanto en el caso presente el punto  $t$  describe el semicírculo con centro  $\frac{3}{4}i$  y radio  $\frac{1}{4}$ . De toda esta discusión podemos concluir finalmente que para todos los valores de  $x$ , excluyendo solamente  $x=0, -1, +1$ , el punto

$$t = \frac{M(1, x)}{M(1-x, 1+x)}$$

se halla en el dominio ( $D$ ) representado en la figura adjunta; de la cual hay que excluir la línea  $l'$  y los semicírculos  $\alpha'$  y  $\beta'$ .

11. - Trazando dos semicírculos  $c$  y  $c'$  con centros  $\frac{1}{2} i$  y  $-\frac{1}{2} i$  y de radios  $\frac{1}{2}$ , el dominio  $(D)$  quedará dividido en dos partes de las cuales una está rayada en la figura. Digo que los puntos  $t$  correspondientes a valores de  $x$  con parte real positiva están en la parte no rayada y los correspondientes a valores de  $x$  con parte real negativa en la parte rayada, mientras que a los valores de  $x$  que son imaginarios puros corresponden puntos de los semicírculos  $c$  y  $c'$ . Sea

$$\operatorname{Re} x > 0, u = \sqrt{1-x^2}, \operatorname{Re} u > 0, t = \frac{M(1,x)}{M(1,\sqrt{1-x^2})}.$$

Como  $x = \sqrt{1-u^2}$  será

$$t' = \frac{M(1,u)}{M(1,\sqrt{1-u^2})} = \frac{1}{t}.$$

Si  $t$  estuviera en la parte rayada de  $(D)$  el punto  $t'$ , que debe estar en  $(D)$ , pertenecería también al dominio obtenido de la parte rayada después de la transformación  $t' = 1/t$ . Pero este no tiene ningún punto común con  $(D)$ , luego  $t$  y  $t'$  ambos pertenecen a la parte no rayada de  $D$ . Dejamos al lector la demostración fácil de que  $t$  pertenece a la parte rayada o está sobre  $c, c'$  según que la parte imaginaria de  $x$  sea negativa o nula. Por lo dicho cuando  $\operatorname{Re} x > 0, \operatorname{Im} x \geq 0$  tenemos

$$\alpha^2 + \left(\beta - \frac{1}{2}\right)^2 > \frac{1}{4},$$

designando con  $\alpha$  y  $\beta$  la parte real e imaginaria de  $t$ . De la fórmula

$$\frac{M(1,x)}{M(1,-x)} = 1 + 2i(\alpha + i\beta) = 1 - 2\beta + 2i\alpha$$

sigue

$$\left| \frac{M(1,x)}{M(1,-x)} \right| = \sqrt{4\alpha^2 + (2\beta - 1)^2} > 1$$

es decir  $|M(1,x)| > |M(1,-x)|$  a menos que  $x$  sea imaginario puro.



Valiéndonos de esto ya podemos demostrar que la media principal  $M(a, b)$  tiene módulo mayor que cada otra media  $\bar{M}(a, b)$  que nazca del algoritmo donde al menos uno de los cocientes

$$\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \dots$$

tiene parte real negativa (\*). Sea primero  $b_v/a_v$  el único cociente con parte real negativa. Entonces

$$\bar{M}(a, b) = M(a_v, b_v), \quad M(a, b) = M(a_v, -b_v)$$

y por lo dicho

$$|M(a_v, -b_v)| > |M(a_v, b_v)|.$$

Supongamos ahora que sea cierta la proposición cuando  $n$  cocientes

$$\frac{b_\alpha}{a_\alpha}, \frac{b_\beta}{a_\beta}, \dots, \frac{b_\mu}{a_\mu}$$

tienen parte real negativa; se ve en seguida por inducción que ella queda válida cuando tienen parte real negativa  $n+1$  cocientes

$$\frac{b_\alpha}{a_\alpha}, \frac{b_\beta}{a_\beta}, \dots, \frac{b_\mu}{a_\mu}, \frac{b_v}{a_v}.$$

Llamemos en efecto  $\bar{M}(a, b)$  a esta media, y  $\bar{M}(a, b)$  a la que se obtiene cambiando el signo de  $b_v$ ; por hipótesis

$$|\bar{M}(a, b)| = |M(a_\mu, b_\mu)| < |M(a, b)|;$$

pero al formar  $\bar{M}(a, b)$  partiendo de  $a_\mu, b_\mu$  se encuentra un solo cociente con parte real negativa, es decir  $b_v : a_v$ ; por tanto se aplica el resultado anterior por lo cual

$$\bar{M}(a, b) < |M(a_\mu, b_\mu)| < |M(a, b)|.$$

(\*) En la memoria de VON DAVID citada en el párrafo 1 de la Primera parte se halla un razonamiento muy corto, pero que no parece del todo apto para convencer.

## UNA GENERALIZACION DE LOS FACTORIALES

por MISCHA COTLAR

En el fascículo 1 del 4.º año de esta revista, fueron publicadas 2 soluciones, debidas a S. Sispanov y R. Frucht, del siguiente problema propuesto por S. Sispanov en la misma revista: «¿De cuantas maneras diferentes se puede colocar  $n$  torres en el tablero de ajedrez de  $n^2$  casillas de modo que ninguna coma a otra y además una de las diagonales del tablero esté libre de figuras?».

R. Frucht observó que la cuestión propuesta es equivalente a este problema de Euler<sup>(1)</sup>: «hallar el número  $f_n$  de las permutaciones de  $n$  números que no dejan en su lugar ningún número».

En el libro citado de E. Netto encontramos los siguientes resultados referentes a estos números  $f_n$ :

$$a) \quad f_n = (n-1)(f_{n-1} + f_{n-2}) \quad (\text{Euler})$$

$$b) \quad f_n = n f_{n-1} + (-1)^n \quad (\text{Euler})$$

$$c) \quad f_n = n! \left[ \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right] \quad (\text{Oettinger})$$

d)  $f_n$  es el coeficiente de  $x^n$  en el desarrollo en serie de potencias de la función

$$f(x) = -x^{-1} e^{-\frac{1}{x}} \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2 + x} dx,$$

es decir que  $f(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \dots + f_n x^n + \dots$  es la «función generatriz» de  $f_n$  (Cayley).

(1) "Questio curiosa ex doctrina combinationis", ver E. NETTO, *Lehrbuch der Combinatorik*, § 40 2. ed. por V. Brun y Th. Skolem, Teubner, 1927, Berlin-Leipzig; en el mismo tratado el lector hallará referencia sobre el problema de las 8 reinas.



e)  $f_n$  es igual al número de términos del desarrollo de un determinante de  $n$  filas en que son nulos todos los elementos de la diagonal principal.

La relación que existe entre los números  $f_n$  y los factoriales  $n!$ , me hizo pensar que valdría la pena estudiar con más detalle las propiedades de los números  $f_n$ . No es mi propósito abordar aquí un estudio serio de la cuestión, ni sé si tal cosa ya fué hecha anteriormente. Tan solo en la esperanza de inducir a alguno de los lectores a un estudio más profundo, quiero esbozar unas pocas ideas, cuyo desarrollo completo podría resultar, me parece, de cierta utilidad. Además mi exposición está basada en recursos completamente elementales y creo que, saliendo del campo de la matemática elemental, podrán conseguirse resultados que sean algo más que meras curiosidades, como las que aquí expongo. Agradezco mucho al Doctor Beppo Levi las múltiples sugerencias para perfeccionar la redacción del presente artículo.

§ 1. Profundicemos algo las relaciones citadas a), b), c) de Euler y Oettinger.

Para mayor comodidad fijaremos la siguiente terminología:

DEFINICIÓN 1. Dadas dos sucesiones finitas de objetos

$$s_1, s_2, \dots, s_i, \dots, s_m \quad (1)$$

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_m \quad (2)$$

diremos que ellas son *discordes* si para todo  $i$  es  $s_i \neq \sigma_i$ . Diremos que ellas son  $k$  veces *acordes* ( $k \leq m$ ) si para  $k$  índices  $i_1, \dots, i_k$  es

$$s_{i_1} = \sigma_{i_1}, \dots, s_{i_k} = \sigma_{i_k}.$$

Los números  $f_n$  de Euler, citados en la introducción, expresan por lo tanto el número de las permutaciones de  $n$  letras  $a_1, \dots, a_n$  que son discordes con la permutación inicial  $a_1, \dots, a_n$ . Análogamente designaremos con  $f_n^i$  ( $0 \leq i \leq n$ ) el número de permutaciones de  $n$  letras que son  $i$  veces acordes con la permutación inicial; de modo que  $f_n^0 = f_n$  y  $f_n^n = 1$ .



Pongamos además

$$n! - f_n = \varphi_n, \quad n! - f_n^i = \varphi_n^i. \quad (3)$$

Más generalmente, sean

$$a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_n \quad (4)$$

$$\alpha_1, \dots, \alpha_r, b_1, \dots, b_n \quad (5)$$

dos sucesiones que tienen  $n$  letras comunes y  $r$  diferentes; dejando intacta la sucesión (4) consideremos las posibles permutaciones de las letras (5). Podemos entonces poner la

DEFINICIÓN 2. Designaremos con  $f_{n,r}$  el número de las permutaciones de la sucesión (5) que son discordes con la (4); designaremos con  $f_{n,r}^i$  el número de las permutaciones de la sucesión (5) que son  $i$ -veces acordes con la (4).

Tendremos por lo tanto que

$$f_{n,r}^0 = f_{n,r}; \quad f_{n,0}^i = f_n^i; \quad f_{n,0}^0 = f_{n,0} = f_n, \quad (6)$$

de modo que la definición de los números  $f_n$  de Euler se obtiene, como caso particular, para  $r=0$ , de la definición 2 de los números  $f_{n,r}$ .

El concepto de sucesiones discordes permite dar una gran extensión al problema de Euler e introducir números generales dentro de los cuales los  $f_{n,k}$  constituyen a su vez el caso más simple y particular. Con este fin, fijado un grupo o un conjunto determinado  $G$  de permutaciones, diremos que (2) es  $G$ -discorde con la (1), si aplicando a la sucesión (2) todas las permutaciones del sistema  $G$  se obtienen siempre sucesiones discordes con (1). Podemos entonces definir los siguientes números muy generales: designaremos con  $(G)f_{n,r}$  el número de las permutaciones de la sucesión (5) que son  $G$ -discordes con la sucesión (4). El caso más simple es el en que  $G$  se reduce a la sustitución idéntica; en este caso obtenemos los números  $f_{n,r}$  de la definición 2. El problema general de determinar los números  $(G)f_{n,r}$  es evidentemente de una complejidad enorme, pero se puede empezar con los casos de grupos  $G$  posiblemente simples.



En el presente trabajo abordaremos un análisis más o menos detallado tan solo del caso más sencillo posible, o sea de los números  $f_{n,r}$ , y trataremos de mostrar que ya en este caso existe un campo amplio de investigación. En notas sucesivas contamos con volver sobre el argumento estableciendo, entre otras cosas, relaciones entre los números  $f_{n,r}$  los números de Bernoulli y el teorema de Fermat.

§ 2. Consideremos una permutación de (5)  $i$ —veces acorde con la (4); entonces  $i$  letras quedan en su lugar y las  $r+n-i$  letras restantes de (4) y (5) forman sucesiones de  $n-i$  letras comunes y  $r$  letras diferentes que son discordes. Luego con  $i$  letras (de las  $n$  letras comunes) fijadas en su lugar podemos formar  $f_{n-i,r}$  permutaciones de (5)  $i$ —veces acordes con (4). Como de las  $n$  letras comunes se puede elegir  $i$  letras de  $C_n^i$  maneras, siendo

$$C_n^i = \binom{n}{i} = \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{1.2\dots i},$$

resulta inmediatamente que

$$f_{n,r}^i = C_n^i f_{n-i,r}. \quad (7)$$

Pero como toda permutación de (5) es o discorde con (4) o es 1, o 2, o etc. ... veces acorde con ella, es

$$\sum f_{n,r}^i = \text{número permutaciones de la sucesión (5),}$$

luego en virtud de (7) obtenemos

$$f_{n,r} + C_n^1 f_{n-1,r} + C_n^2 f_{n-2,r} + \dots + C_n^n f_{0,r} = (n+r)!. \quad (8)$$

Poniendo en esta fórmula sucesivamente  $n=0, 1, \dots, n$  se obtienen  $n+1$  ecuaciones lineales en las  $n+1$  incógnitas  $f_{0,r}, f_{1,r}, \dots, f_{n,r}$  de las cuales se deducen estos números expresados por medio de los factoriales. Se obtienen con la máxima facilidad estas fórmulas por medio del *cálculo simbólico* <sup>(2)</sup>; si en

(<sup>2</sup>) En el cálculo simbólico una sucesión  $\{U_n\}$  se designa genéricamente con  $U$  y se sustituye  $U_n$  por  $U^n$ , p. ej. la expresión  $f(x) = U_0 + \frac{U_1 x}{1} + \dots +$



efecto en la fórmula (8) se sustituya simbólicamente  $f_{k,r}$  por  $f^k$  y  $(n+r)!$  por  $F^n$ , ella se escribe

$$(f+1)^n = F^n; \quad (8a)$$

el problema de deducir  $f_{n,r}$  de la (8) y de las  $n$  ecuaciones que le preceden es entonces idéntico con el problema de calcular  $f^n$ , expresado por medio de las sucesivas potencias de  $F$  por medio de (8a) y de las relaciones análogas para los valores menores de  $n$ . Pero considerando (8a) como una igualdad algébrica se sigue

$$f+1=F,$$

$$f^n = (F-1)^n$$

y desarrollando el segundo miembro y volviendo luego al significado simbólico se responde sin más al problema.

Luego

$$f_{n,r} = (n+r)! - C^1_n (n+r-1)! + C^2_n (n+r-2)! - \dots + (-1)^n r!, \quad (9)$$

que, para  $r=0$ , da en particular

$$f_n = n! - C^1_n (n-1)! + \dots = \sum_{i=1}^n (-1)^i C^i_n (n-i)! \quad (9a)$$

que es la fórmula c) de Oettinger, citada más arriba.

Consideremos ahora, en particular, dos sucesiones  $a_1, b_1, \dots, b_n$ , y  $a_1, b_1, \dots, b_n$ , que tienen  $n$  letras comunes y una diferente y dejando fija la primera sucesión consideremos aquellas permutaciones de la segunda que son discordes con la primera. Si la permutación considerada tiene en el 1er. lugar la letra  $a_1$ , las letras  $b_1, \dots, b_n$  forman una permutación discorde con las mis-

---

$\frac{U^n x^n}{n!} + \dots$  se escribe simbólicamente:  $f(x) = e^{Ux}$ ; sobre la función en  $U$  así obtenida pueden efectuarse las operaciones fundamentales del Análisis y volviendo a sustituir finalmente los exponentes por índices se llega a resultados correctos. Una exposición sistemática de los fundamentos del cálculo simbólico puede verse en los conocidos tratados de LUCAS, *Théorie de Nombres* y CESARO, *Analisi Algebrica*, o en la memoria primitiva de BLISSARD, *Theory of generic equations*, Quarterly Journal, IV.



mas letras de la primera sucesión; luego tales permutaciones que empiezan con  $a_1$  son en número  $f_n$ . Si la permutación considerada tiene la letra  $a_1$  en otro lugar, cambiando  $a_1$  por  $a_1$  se obtiene una permutación de las letras  $a_1, b_1, \dots, b_n$ , discorde con la 1.<sup>a</sup> sucesión que tiene las mismas letras; luego tales permutaciones son en número de  $f_{n+1}$ . Obtenemos así la relación

$$f_{n;1} = f_{n+1} + f_n \quad (10)$$

y con el mismo razonamientos tendremos

$$f_{n;r} = f_{n+1;r-1} + f_{n;r-1}. \quad (10a)$$

Haciendo  $r=1, 2, \dots, r$  resulta fácilmente de (10a) <sup>(3)</sup>:

$$f_{n;r} = f_{n+r} + C^1_r f_{n+r-1} + \dots + C^r_r f_n. \quad (11)$$

Para  $n=0$ , (11) se reduce a

$$r! = f_r + C^1_r f_{r-1} + \dots + C^r_r f_0 \quad (11a)$$

que se obtiene también haciendo en la fórmula (8),  $r=0$ .

De (10) se deducen fácilmente, como caso particular, las fórmulas de Euler citadas más arriba. En efecto, dada la sucesión  $a_1, \dots, a_n$ , consideremos aquellas permutaciones de la misma que son discordes con ella y que además tienen la letra  $a_1$  en el 2do. lugar. Es evidente, por razones de simetría, que designando con  $J_n$  el número de tales permutaciones, es

$$J_n = \frac{f_n}{n-1} \quad (12)$$

y  $J_n$  es un entero. Pero como las letras restantes forman una

<sup>(3)</sup> La deducción de (11) puede hacerse también por cálculo simbólico, observando que si al símbolo  $f_{n;r}$  se hace corresponder la expresión  $f^n (f+1)^r$ , la (10a) se traduce en la relación algebráicamente evidente:  $f^n (f+1)^r = (f^{n+1} + f^n) (f+1)^{r-1}$ ; basta entonces desarrollar el primer miembro por la fórmula del binomio para expresarlo como suma de términos en los cuales el factor  $(f+1)$  tiene exponente 0. Es evidente que otras fórmulas análogas pueden obtenerse desarrollando tan solo parcialmente el primer miembro. [Esta observación, entre otras, la debo al Dr. B. LEVI].

sucesión discorde de  $n-2$  letras comunes y 1 letra diferente, es

$$J_n = f_{n-2;1} \quad (13)$$

luego por (10):

$$J_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad (14)$$

o sea

$$f_n = (n-1)(f_{n-1} + f_{n-2}) \quad (14a)$$

que es la fórmula a) de Euler.

De (12), (14), (14a) se obtienen fácilmente otras relaciones equivalentes; en efecto (14a) puede escribirse

$$\begin{aligned} f_n - n f_{n-1} &= -(f_{n-1} - (n-1)f_{n-2}) = f_{n-2} - (n-2)f_{n-3} = \dots \\ &= (-1)^n f_0 = (-1)^n \end{aligned}$$

de donde

$$f_n = n f_{n-1} + (-1)^n = n(n-1)f_{n-2} + (-1)^{n-1}(n-1) = \dots \quad (15)$$

$$J_n = \frac{f_n}{n-1} = n f_{n-2} + (-1)^{n-1}. \quad (15a)$$

Análogamente se obtiene

$$J_n = (n-1)J_{n-1} - f_{n-3} \quad (15b)$$

y, por (3),

$$\varphi_n = (n-1)(\varphi_{n-1} + \varphi_{n-2}) = n \varphi_{n-1} + (-1)^{n-1}; \quad (16)$$

luego en particular

$$f_n \equiv 0 \pmod{n-1}; f_n \equiv (-1)^n \pmod{n}; J_n \equiv (-1)^{n-1} \pmod{n}. \quad (17)$$

De las fórmulas (9) y (11) se deduce que si formamos un cuadro (o triángulo) tal que la primera fila se compone de los números factoriales  $1!, 2!, \dots, n!, \dots$ , y las filas sucesivas de



las diferencias de orden  $1, 2, \dots$ , de modo que cada fila es la diferencia de la anterior, se tiene que:  $f_n$  se encuentra en la intersección de la diagonal que parte de  $0!$  con la fila  $n^{\text{ésima}}$ ;  $f_{n,r}$  está situado en la intersección de la diagonal que parte de  $r!$  con la  $n^{\text{ésima}}$  fila;  $J_n = f_{n-2;1}$  está en la fila  $n-2$  y en la diagonal que parte de  $1!$ .

De modo que el estudio de los números  $f_{n,r}$  equivale al estudio de las diferencias de los factoriales y se comprende por lo tanto su importancia para la Aritmética.

He aquí los valores de los 10 primeros números  $f_n$  y  $J_n$  y de algunos  $f_{n,r}$ :

$$f_{nr} \quad (18)$$

| $\begin{smallmatrix} n \\ r \end{smallmatrix}$ | 0   | 1   | 2    | 3     | 4      | 5       | 6       | 7       | 8       | 9       | 10      |
|------------------------------------------------|-----|-----|------|-------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0                                              | 1   | 0   | 1    | 2     | 9      | 44      | 265     | 1854    | 14833   | 133496  | 1334961 |
| 1                                              | 1   | 1   | 3    | 11    | 53     | 309     | 2119    | 16687   | 148329  | 1468457 |         |
| 2                                              | 2   | 4   | 14   | 64    | 362    | 2428    | 18806   | 165016  | 1616786 |         |         |
| 3                                              | 6   | 18  | 78   | 426   | 2790   | 21234   | 183822  | 1781802 |         |         |         |
| 4                                              | 24  | 96  | 504  | 3216  | 24024  | 205056  | 1965624 |         |         |         |         |
| 5                                              | 120 | 600 | 3720 | 27240 | 229080 | 2170680 |         |         |         |         |         |

$$\begin{aligned} J_1=0, J_2=1, J_3=1, J_4=4, J_5=11, J_6=53, \\ J_7=309, J_8=2119, J_9=16187, J_{10}=148329 \end{aligned} \quad (18a)$$

§ 3. En lo sucesivo nos va a interesar el problema de formar una función cuyas derivadas en el origen sean los números  $f_{n,r}$  para  $n$  fijo y  $r$  variable; los coeficientes del desarrollo de Maclaurin de esa función serán pues, los números  $f_{n,r}:r!$ ,

cuyas propiedades nos conviene por lo tanto estudiar ahora. Pondremos luego por brevedad

$$f'_{n;r} = \frac{1}{r!} f_{n;r}. \quad (19)$$

De la fórmula (9) es evidente que también los números  $f'_{n;r}$  serán enteros.

De la tabla (18) se obtiene en seguida la siguiente

$$f'_{nr}$$

| $\begin{smallmatrix} n \\ r \end{smallmatrix}$ | 0 | 1 | 2  | 3   | 4    | 5     | 6     | 7      | 8      | 9      |
|------------------------------------------------|---|---|----|-----|------|-------|-------|--------|--------|--------|
| 1                                              | 1 | 1 | 3  | 11  | 53   | 309   | 2119  | 16687  | 148324 | 146845 |
| 2                                              | 1 | 2 | 7  | 32  | 181  | 1214  | 9403  | 82508  | 808393 |        |
| 3                                              | 1 | 3 | 13 | 71  | 465  | 3539  | 30637 | 296967 |        |        |
| 4                                              | 1 | 4 | 21 | 134 | 1001 | 8544  | 81901 |        |        |        |
| 5                                              | 1 | 5 | 31 | 227 | 1909 | 18089 |       |        |        |        |

Por inducción se demuestran fácilmente las propiedades siguientes:

$$a) \quad f_{n;r} = r f_{n;r-1} + n f_{n-1;r} \quad (n > 0, r > 0) \quad (20)$$

$$f'_{n;r} = f'_{n;r-1} + n f'_{n-1;r}. \quad (20a)$$

$$b) \quad f_{n;r} = (n+r-1) f_{n-1;r} + (n-1) f_{n-2;r} \quad (21)$$

$$f'_{n;r} = (n+r-1) f'_{n-1;r} + (n-1) f'_{n-2;r}; \quad (21a)$$

para  $r=0$ , (21) se reduce a (14a).

$$c) \quad f_{n;r} = (n+r) f_{n;r-1} + n f_{n-1;r-1} \quad (22)$$

$$r f'_{n;r} = (n+r) f'_{n;r-1} + n f'_{n-1;r-1}; \quad (22a)$$



para  $n=0$  la (22) se reduce a  $r! = r(r-1)!$ ; para  $r=1$ , ella se reduce a la (10) después de transformada por la (14a).

d) Combinando las relaciones anteriores se deduce todavía

$$f'_{n;r} = (r+1) f'_{n-1;r+1} - f'_{n-1;r} \quad (23)$$

$$f'_{n;r} = (n+r) f'_{n-1;r} - f'_{n-1;r-1}. \quad (24)$$

e) Las propiedades de los números  $f_{n;r}$  y  $f'_{n;r}$  se aclaran mucho, considerando dichos números como generados por fracciones continuas numéricas. En efecto, consideremos en primer lugar la fracción continua

$$\frac{1}{1+} \left| \frac{2}{2+} \right| \left| \frac{3}{3+} \right| \dots \left| \frac{n-1}{n-1+} \right| \dots \quad (25)$$

y sea  $\frac{P_n}{Q_n}$  el valor de la  $n$ ima reducida de esta fracción, es decir que  $P_n, Q_n$  son los cumulantes correspondientes a esa fracción (al calcular  $P_n, Q_n$  no se debe por lo tanto, hacer ninguna simplificación de fracciones). Entonces para todo  $n$  se tiene

$$P_n = f_n \quad ; \quad Q_n = \varphi_n = n! - f_n; \quad (26)$$

así por ejemplo

$$\frac{f_5}{\varphi_5} = \frac{1}{1+} \left| \frac{2}{2+} \right| \left| \frac{3}{3+} \right| \left| \frac{4}{4+} \right| = \frac{44}{76};$$

$$\frac{f_6}{\varphi_6} = \frac{1}{1+} \left| \frac{2}{2+} \right| \left| \frac{3}{3+} \right| \left| \frac{4}{4+} \right| \left| \frac{5}{5+} \right| = \frac{265}{455} \text{ etc. ...}$$

Si en la reducida anterior modificamos el último término, haciendo

$$\frac{P'_n}{Q'_n} = \frac{1}{1+} \left| \frac{2}{2+} \right| \dots \left| \frac{n-1}{n} \right| \quad (27)$$

se tendrá

$$P'_n = J_{n+1} = \frac{1}{n} f_{n+1} \quad ; \quad Q'_n = \frac{1}{n} [(n+1)! - J_{n+1}]. \quad (28)$$

f) Con las mismas notaciones (es decir sobreentendiendo que el numerador y el denominador son los cumulantes de la fracción continua) tendremos la siguiente expresión para los  $f'_{n,r}$ :

$$\frac{f'_{n+1,r}}{f'_{n,r}} = (n+r) + \frac{n}{r+(n-1)+} \left| \frac{n-1}{r+(n-2)+} \right| \left| \frac{n-2}{r+(n-3)+} \right| \dots \left| \frac{2}{r-1+} \right| \frac{1}{r} \quad (29)$$

que, en particular, para  $r=0$  da

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = n + \frac{n}{n-1+} \left| \frac{n-1}{n-2+} \right| \dots \left| \frac{2}{1+} \right| \frac{1}{0}. \quad (30)$$

g) Haciendo uso de las propiedades de cumulantes podemos dar a la fórmula (29) una forma más útil. En efecto consideremos la fracción continua infinita

$$r + \frac{1}{(r+1)+} \left| \frac{2}{(r+2)+} \right| \left| \frac{3}{(r+3)+} \right| \dots \left| \frac{n}{(r+n)+} \right| \dots$$

y sea  $P''_n(r)/a''_n(r)$  su  $n$ -íma reducida; entonces se tiene

$$P''_n(r) = f'_{n,r} = \frac{1}{r!} f_{n,r}. \quad (31)$$

Esta fórmula nos será útil más adelante; dando a  $r$  valores  $1, 2, \dots$  y aplicando la fórmula (11) obtendremos diversas expresiones para los números  $f_n$ . Haciendo uso de las conocidas propiedades de cumulantes se puede deducir de estas fórmulas nuevas relaciones.

h) De la fórmula (31) obtenemos la siguiente conclusión importante: *para cada  $n$  existe un polinomio en  $x$  de grado  $n$*

$$g_n(x) = g_n^0 x^n + g_n^1 x^{n-1} + \dots + g_n^{n-1} x + g_n^n \quad (32)$$

tal que para todo  $r$  es

$$g_n(r) = f'_{n,r} = \frac{1}{r!} f_{n,r}. \quad (33)$$



De (32) resulta que formando las diferencias sucesivas de una columna cualquiera del cuadro de las  $f'_{n;r}$  resulta la  $n$ -íma diferencia igual a  $n!$ .

§ 4. En este párrafo nos proponemos representar los números  $f_{n;r}$ ,  $f'_{n;r}$  por el método de las funciones generatrices de Laplace y luego generalizar la definición de los mismos números a valores no enteros de  $n, r$ , siguiendo el ejemplo conocido de la extensión de la definición de los factoriales por la función de Gauss

$$F(r) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{r-1} dx.$$

Notamos en efecto que para  $n=0$  se tiene precisamente  $f_{0;r}=r!$  y por tanto pueden considerarse las  $f_{n;r}$ , para  $n$  constante como una generalización de los factoriales.

La función de Cayley, citada al principio de ese artículo  $d$ ), resuelve el problema análogo para  $r=0$  y  $n$  variable; pero esta función es complicada y no manejable. Nosotros buscaremos en cambio una función que pueda representar  $f_{n;r}$  para  $n$  constante (cualquiera) y  $r$  variable. Por eso pongamos

$$F_n(x) = f'_{n;0} + f'_{n;1}x + \dots + f'_{n;r}x^r + \dots; \quad (34)$$

suponiendo, salvo comprobarlo en lo sucesivo, que el segundo miembro tenga radio de convergencia  $>0$  y que  $|x|$  sea menor de ese radio. Se sigue

$$(1-x)F_n(x) = f'_{n;0} + (f'_{n;1} - f'_{n;0})x + \dots + (f'_{n;r} - f'_{n;r-1})x^r + \dots$$

Pero, por (20a)

$$f'_{n;r} - f'_{n;r-1} = n f'_{n-1;r}$$

y, por (15),

$$f'_{n;0} = f_n = n f_{n-1} + (-1)^n = n f'_{n-1;0} + (-1)^n;$$

la anterior relación se escribe pues

$$(1-x)F_n(x) = (-1)^n + nF_{n-1}(x). \quad (35)$$

Tenemos así una fórmula recurrente que va a permitirnos calcular  $F_n(x)$  a partir de

$$F_0(x) = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}.$$

Se ve en seguida que  $F_n(x)$  tendrá la forma

$$F_n(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x)^{n+1}} \quad (36)$$

donde  $P_n(x)$  es un polinomio de grado  $n$  y que la serie (34) será efectivamente convergente para  $|x| < 1$ .

Para calcular los polinomios  $P_n(x)$  se tiene, por (35), la fórmula recurrente

$$P_n(x) = (-1)^n (1-x)^n + nP_{n-1}(x), \quad P_0(x) = 1; \quad (37)$$

y, poniendo

$$P_n(x) = p_n^0 x^n + p_n^1 x^{n-1} + \dots + p_n^n, \quad (38)$$

resulta

$$p_n^0 = 1 \quad (39)$$

$$p_n^k = n p_{n-1}^{k-1} + (-1)^{n+k} C_n^k = n p_{n-1}^{k-1} + \frac{(-1)^{n-k} n!}{k! (n-k)!}. \quad (40)$$

Notando que  $(n-1) - (k-1) = n-k$  y que  $n(n-1)! = n!$  se ve que, sustituyendo en (40) a  $p_{n-1}^{k-1}$  la expresión dada por la misma cambiando  $n$  y  $k$  en  $n-1$  y  $k-1$ , y continuando análogamente, ella se desarrolla en

$$p_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \left[ 1 + (-1)^{n-k} \sum_{i=1}^k \frac{1}{i!} \right] \quad (41)$$



como se comprueba también en seguida por inducción.

Para  $k=n$  se tiene

$$n! \sum_{i=0}^n (-1)^{n+i} \frac{1}{i!} = p_n^n = P_n(0) = F_n(0) = f_n$$

que es la fórmula de Euler-Oettinger.

Se llega a un resultado necesariamente equivalente, pero en forma diferente y notable, con la observación siguiente: de (34), derivando y luego aplicando (22), se obtiene

$$\begin{aligned} F'_n(x) &= \frac{dF_n(x)}{dx} \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} r f'_{n;r} x^{r-1} = \sum_{r=1}^{\infty} (n+r) f'_{n;r-1} x^{r-1} + n \sum_{r=1}^{\infty} f'_{n-1;r-1} x^{r-1} \\ &= (n+1) \sum_{r=1}^{\infty} f'_{n;r-1} x^{r-1} + x \sum_{r=1}^{\infty} r f'_{n;r} x^{r-1} + n \sum_{r=1}^{\infty} f'_{n-1;r-1} x^{r-1} \\ &= (n+1) F_n(x) + x F'_n(x) + n F_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto la función  $F_n(x)$  realiza la ecuación diferencial

$$(1-x) F'_n(x) - (n+1) F_n(x) = n F_{n-1}(x) \quad (43)$$

donde  $F_{n-1}(x)$  debe considerarse como término conocido). Integrando se obtiene

$$F_n(x) = \frac{1}{(1-x)^{n+1}} \left[ \int_0^x n F_{n-1}(x) (1-x)^n dx + f_n \right] \quad (44)$$

fórmula recurrente que permite calcular  $F_n(x)$  partiendo de

$$F_0(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Se reconoce fácilmente también de esta que  $F_n(x)$  tiene la forma (36) realizando los polinomios  $P_n(x)$  la relación

$$P_n(x) = n \int_0^x P_{n-1}(x) dx + f_n \quad (45)$$

$$P_{n-1}(x) = \frac{1}{n} \frac{d}{dx} P_n(x), \quad (46)$$

como por otra parte se reconoce en seguida por (38), (41). Según la terminología de P. Appell los polinomios  $P_n$  forman una *sucesión armónica*. De (45) se deduce en seguida que en (38) será

$$p_n^k = C_n^k f_k,$$

igualdad que equivale a (41) en consecuencia de la propiedad c) de Oettinger. Se obtiene por tanto para  $P_n(x)$  la expresión

$$P_n(x) = x^n + C_n^1 f_1 x^{n-1} + C_n^2 f_2 x^{n-2} + \dots + f_n \quad (47)$$

He aquí las expresiones explícitas de las primeras funciones  $F_n(x)$ :

$$F_0(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$F_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$F_2(x) = \frac{x^2+1}{(1-x)^3}$$

$$F_3(x) = \frac{x^3+3x+2}{(1-x)^4}$$

§ 5. El modo como la fórmula (34) define la función  $F_n(x)$  demuestra en seguida que

$$f_{n;r} = D_x^{(r)} F_n(0).$$

Esta relación nos permite inmediatamente generalizar la definición de  $f_{n;r}$  para un  $r$  real cualquiera  $> 0$  (pero quedando  $n$  entero y fijo).



En efecto se generaliza, según Riemann y Liouville, la definición de la derivada de índice  $r$  de una función  $F(x)$  a valores de  $r=p$ , real, no entero,  $>0$  poniendo

$$m < p \leq m+1 \quad (m \text{ entero})$$

$$D_x^p F(x) = \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} \left[ \frac{1}{\Gamma(m+1-p)} \int_a^x (x-t)^{m-p} F(t) dt \right] \quad (a < x). \quad (48)$$

Podemos luego definir  $f_{n;p}$  para todos los valores positivos de  $p$  por la fórmula

$$f_{n;p} = D_x^p F_n(0). \quad (49)$$

Recordando la expresión (36) de  $F_n(x)$ , podemos todavía dar a esta fórmula una forma más explícita. Para eso notamos que por un teorema clásico<sup>(4)</sup> la (36) puede escribirse, para  $x < 1$ ,

$$F_n(x) = \int_0^\infty e^{(x-1)t} Q_n(t) dt \quad (50)$$

donde  $Q_n(t)$  es todavía un polinomio de grado  $n$ . Después de esto, un teorema de Widder y C. V. L. Smith sobre las derivadas de la integral de Laplace<sup>(5)</sup> nos permite escribir la (49) en la forma

$$f_{n;p} = \int_0^\infty e^{-tp} Q_n(t) dt. \quad (51)$$

(<sup>4</sup>) Ver por ej. NÖRLUND - *Séries d'interpolation*, n. 87 (Collection Borel) o también los apuntes de clase de REY PASTOR: *Séries e Integrales* FL. Para un estudio más profundo ver: DOETSCH, *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation* o WIDDER, *The Laplace Transform*.

(<sup>5</sup>) C. V. L. SMITH, *The fractional derivative of a Laplace integral*-Duke math. Journal, 8, 1941. Para  $p$  entero esta fórmula se demuestra inmediatamente derivando respecto a  $x$  bajo el signo de integración (v. también la fórmula (53)) y poniendo  $x = 0$ .

Se calcula fácilmente el polinomio  $Q_n(t)$  volviendo a la definición (34) de  $F_n(x)$

$$F_n(x) = f'_{n;0} + f'_{n;1}x + \dots + f'_{n;r}x^r + \dots$$

y observando que análogamente

$$F_{n-1}(x) = f'_{n-1;0} + f'_{n-1;1}x + \dots + f'_{n-1;r}x^r + \dots;$$

luego

$$\frac{d}{dx} F_{n-1}(x) = f'_{n-1;1} + \dots + (r+1) f'_{n-1;r-1}x^r + \dots$$

y por tanto, teniendo en cuenta la fórmula (23),

$$F_n(x) = \frac{d}{dx} F_{n-1}(x) - F_{n-1}(x). \quad (52)$$

Poniendo en la fórmula (50)  $n-1$  en cambio de  $n$  y derivando respecto de  $x$  se obtiene, siempre en la hipótesis de  $x < 1$

$$\frac{d}{dx} F_{n-1}(x) = \int_0^{\infty} e^{(x-1)t} t Q_{n-1}(t) dt \quad (53)$$

y sustituyendo en (52), resulta

$$\int_0^{\infty} e^{(x-1)t} Q_n(t) dt = \int_0^{\infty} (t-1) e^{(x-1)t} Q_{n-1}(t) dt.$$

Esta igualdad se realiza por

$$Q_n(t) = (t-1) Q_{n-1}(t) \quad , \quad Q_n(t) = (t-1)^n. \quad (54)$$

La fórmula (51) resulta así

$$f_{n;p} = \int_0^{\infty} e^{-t} t^p (t-1)^n dt. \quad (55)$$



La fórmula (55) (o la (54)) permite deducir nuevas relaciones entre los números  $f_n$ . Así por ejemplo se verifica fácilmente que

$$\frac{x^k}{(1+x)^{n+1}} = -\frac{1}{n!} \int_0^\infty e^{-xt} \frac{d^k}{dt^k} [e^{-t} t^n] dt \quad (x > -1);$$

y, como en virtud de (36), (47) es

$$F_n(-x) = \frac{(-1)^n x^n}{(1+x)^{n+1}} + \dots + (-1)^{n-k} C_n^k f_k \frac{x^{n-k}}{(1+x)^{n+1}} + \dots + \frac{f_n}{(1+x)^{n+1}},$$

resulta

$$F_n(-x) = -\frac{1}{n!} \int_0^\infty e^{-xt} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k f_k \frac{d^k}{dt^k} [e^{-t} t^n] dt.$$

de la cual, en virtud de (50), (54) sigue

$$e^{-t} (1-t)^n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k f_k \frac{d^k}{dt^k} [e^{-t} t^n]. \quad (56)$$

Igualando en (66) los coeficientes en iguales potencias de  $t$  obtendremos nuevas relaciones interesantes entre los números  $f_n$ .

§ 6. Finalmente, nos falta todavía definir  $f_{n;r}$  para los valores no enteros de  $n$ . Esto se puede hacer fácilmente en base de la propiedad (46) de los polinomios  $P_n(x)$ . En efecto, en primer lugar dicha propiedad nos permite definir los polinomios  $P_n(x)$  para valores  $n = \nu$  no enteros del índice  $n$ , en la siguiente forma:

$$P_\nu(x) = D_x^{m+1-\nu} [P_{m+1}(x)] \quad (57)$$

siendo  $m < \nu \leq m+1$ ,  $m = \text{entero}$ .

Una vez definido  $P_\nu(x)$ , se define inmediatamente  $F_\nu(x)$  como

$$F_v(x) = \frac{P_v(x)}{(1-x)^{v+1}} \quad (58)$$

y por analogía con (49) se obtiene la definición de  $f_{v;\rho}$  como

$$f_{v;\rho} = D_x^\rho [F_v(0)] \quad (59)$$

lo que resuelve completamente el problema de interpolación de los números  $f_{n;r}$ . Dejamos a cargo del lector el cálculo efectivo de  $P_v(x)$  y la representación por la integral de Laplace de la función  $F_v(x)$ . Comparando entre sí las diversas formas de  $f_{v;\rho}$  así como su desarrollo en fracción continua indicada en el § 3, se obtendrán múltiples e interesantes relaciones entre los números  $f_n$ . Estas diferentes expresiones analíticas de  $f_{v;\rho}$  sirven no solamente para estudiar los números  $f_n$ ; ellas pueden aplicarse por ejemplo para vincular diferentes integrales definidas cuyo cálculo presenta dificultades. Así p. ej., si quisiéramos calcular los  $f_{n;\rho}$  directamente de la definición (49), sin pasar por la integral de Laplace, ya para  $n=0$  nos encontraríamos con las integrales del tipo

$$-\frac{\rho}{\Gamma(1-\rho)} \int_0^1 \frac{t^{-\rho}}{(1+t)^2} dt$$

que fueron estudiadas por varios autores (compárese Rey Pastor, *Elementos de teoría de funciones*, 1942, § 69, V. II) o Brownwich, *Theory of infinite series*, 175, ej. 3). Finalmente la definición de  $f_{v;\rho}$  para valores reales de  $v, \rho$  permite introducir en vez de una serie de Taylor con coeficientes  $f_{n;r}$  (como lo es la (34)), series de Dirichlet con coeficientes  $f_{n;\rho}$  o las integrales

$$\int_0^\infty e^{-xt} f_{n;t} dt, \int_0^\infty e^{-xt} f_{t;\rho} dt, \int_0^\infty \frac{e^{-t} t^\rho (1-t)^n}{t-x} dt, \text{ etc.}$$



## SOBRE UN PROBLEMA DIOFANTICO

por

BEPPPO LEVI

Se trata del problema n. 85 cuyo enunciado reza:

*Tres números enteros expresan las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo; anteponiendo a cada uno la misma cifra se obtienen nuevamente los lados de un triángulo rectángulo. Determinar estos tres números.*

A este problema llegaron dos respuestas, una del estudiante A. Ulanovsky del 2.º año de Ingeniería Civil de nuestra Facultad, la otra de un lector de Coronda que quiso mantenerse incógnito; las dos proporcionan la solución 5, 12, 13; 15, 112, 113 (I) y apresurándose excesivamente en las conclusiones, por razones diferentes, excluyen la existencia de otras.

Por lo contrario el problema presenta cierto interés precisamente en la determinación de dichas soluciones menos evidentes que vamos a desarrollar a continuación.

En la primera impostación del problema nos dirigiremos sobre las líneas de la solución de Coronda, que es preferible por su forma concisa.

1. - Sean  $m, n, p$  los tres lados del primer triángulo

$$m \leq n < p \quad (1)$$

y sean respectivamente  $x, y, z$  los números de sus cifras

$$x \leq y \leq z; \quad (2)$$

sea  $a$  la cifra que se debe anteponer a los números  $m, n, p$  para obtener las longitudes de los lados del segundo triángulo; estos lados tendrán pues las expresiones

$$a \cdot 10^x + m, \quad a \cdot 10^y + n, \quad a \cdot 10^z + p$$

y deben realizarse las dos igualdades

$$m^2 + n^2 = p^2 \quad (3)$$

$$(a \cdot 10^x + m)^2 + (a \cdot 10^y + n)^2 = (a \cdot 10^z + p)^2.$$

Desarrollando los cuadrados, restando y observando que debe ser  $a \neq 0$  se sigue

$$a = 2 \frac{p \cdot 10^z - m \cdot 10^x - n \cdot 10^y}{10^{2x} + 10^{2y} - 10^{2z}}. \quad (4)$$

Debe ser  $a$  entero y

$$1 \leq a \leq 9. \quad (5)$$

Se sigue en seguida que no puede ser  $x = y = z$  porque en este caso la (4) daría

$$a = 2 \frac{p - (m + n)}{10^x}$$

que no puede ser positivo por ser siempre  $p < m + n$ . Notamos ahora que por ser  $p < 2n$ , el número  $p$  puede a lo sumo tener una cifra en más que  $n$ ; podemos por lo tanto hacer dos hipótesis:

$$z = y \quad \text{o bien} \quad z = y + 1.$$

La segunda se excluye en seguida observando que de ella resulta

$$p > 10^y, \quad p \cdot 10^z > 10^{2y+1}$$

$$m \leq n < 10^y, \quad m \cdot 10^x + n \cdot 10^y < 2 \cdot 10^{2y};$$

por lo tanto el numerador de (4) resulta positivo; por lo contrario en el denominador

$$10^{2x} + 10^{2y} \leq 2 \cdot 10^{2y}, \quad 10^{2z} = 10^{2y+2},$$

por lo que el denominador resultaría negativo, en contra de la condición (5). Se sigue que, en el caso de existir solución del problema, deberá ser

$$y = z = x + t, \quad t \geq 1$$



$$a = 2 \frac{(p-n)10^y - m \cdot 10^x}{10^{2x}} = \frac{(p-n)10^t - m}{5 \cdot 10^{x-1}}.$$

Pongamos por brevedad

$$p - n = b. \quad (6)$$

Deberá realizarse la ecuación indeterminada

$$10^t b - 5 \cdot 10^{x-1} a = m \quad (7)$$

mientras el número  $b < m$  deberá ser divisor de

$$p^2 - n^2 = m^2. \quad (8)$$

Distinguimos desde un principio dos casos:

1.º  $x=1$ . La ecuación (7) se reduce a

$$10b - 5a = m, \quad m \text{ número de una cifra;}$$

debe por lo tanto ser  $m$  divisible por 5 y luego

$$m=5 \quad 2b = a + 1.$$

Se sigue que  $a+1$  debe ser par y  $(a+1):2$  debe ser divisor de 25, menor que 5; por lo tanto  $a+1=2$ ,

$$a=1, \quad m=5, \quad n = \frac{25+1}{2} = 12, \quad p = \frac{25-1}{2} = 13. \quad (I)$$

2.º  $x > 1$ . Siendo entonces  $t \geq 1$ ,  $x-1 \geq 1$ , el número  $m$  debe ser múltiplo de 10.

Pongamos

$$m = 10^u m_1, \quad m_1 \text{ no divisible por } 10 \quad (9)$$

$$x-1 \geq u \geq 1. \quad (10)$$

Quedan dos casos como posibles

$$a) \quad x-1 = u \leq t, \quad b) \quad x-1 > u = t. \quad (11)$$

2. - El caso  $a)$  se trata más fácilmente y va a darnos efectivamente dos soluciones. Hagamos al efecto las observaciones siguientes:

Por la hipótesis  $a)$  resulta

$$m = 10^u m_1 < 10^x = 10^{u+1} \quad (12)$$

$$n > 10^{y-1} = 10^{u+t}, \quad p > 10^{u+t}$$

luego

$$p + n > 2 \cdot 10^{u+t}. \quad (13)$$

Además, sustituyendo en (7) resulta

$$b = \frac{5a + m_1}{10^{t-u}} \quad (14)$$

y, por (8),

$$p + n = \frac{10^{u+t} m_1^2}{5a + m_1}. \quad (15)$$

De (12), (13) y (15) se sigue

$$m_1 < 10, \quad \frac{m_1^2}{5a + m_1} > 2 \quad (16)$$

las que equivalen a

$$5 \leq m_1 \leq 9.$$

Más precisamente de la segunda (16) se deduce que puede ser

$$\begin{array}{ll} m_1 = 5 & \text{solo para } a = 1 \\ m_1 = 6 & \text{solo para } a \leq 2 \\ m_1 = 7 & \dots\dots\dots a \leq 3 \\ m_1 = 8 & \dots\dots\dots a \leq 4 \\ m_1 = 9 & \dots\dots\dots a \leq 6. \end{array} \quad (17)$$



Los valores de  $a$  y  $m_1$  están además limitados por la condición de hacer enteros los valores de  $b$  y  $p+n$  y de la misma paridad. Para  $m_1 \neq 5$  el numerador de (14) no puede ser múltiplo de 5; se sigue que será necesariamente

$$t = u$$

salvo el caso de  $m=5$  en el cual, para  $t=u+1$  resulta  $b=1$ ; esto impone que  $p+n$  sea impar y, por (15), resulta  $n=0$ , contra la hipótesis inicial  $x>1$ .

Para  $t=u$  debemos distinguir:

$$1) \quad m_1=5, \quad a=1 \quad \text{da} \quad b=10 \quad p+n=10^{2u-1} \cdot 25.$$

Para dar una expresión explícita de  $p, n, m$  nos conviene escribir

$$u = v + 1;$$

resulta

$$\frac{p-n}{2} = 5, \quad \frac{p+n}{2} = 10^{2v} \cdot 125$$

$$p = 10^{2v} \cdot 125 + 5, \quad n = 10^{2v} \cdot 125 - 5, \quad m = 10^{v+1} \cdot 5, \quad a = 1. \quad (\text{II})$$

Para  $v=0$  se reobtiene la solución (I), solo multiplicada por el factor insignificante 10; para  $v>0$  se obtiene una serie infinita de nuevas soluciones:

$$\begin{aligned} p &= 12505, & n &= 12495, & m &= 500 \\ p &= 1250005, & n &= 1249995, & m &= 5000 \end{aligned}$$

.....

2) Para  $5 < m_1 \leq 8$ , tomando en cuenta la tabla (17), se ve que la expresión (15) de  $p+n$  puede resultar entera solo si  $5a+m_1$  resulta una potencia de 2; siendo entonces  $b$  par, debe ser también par  $p+n$ , y para realizar las dos condiciones bastará elegir  $u$  bastante elevado. Se nota que para

$$m_1=6 \quad a=2 \quad 5a+m_1=16=2^4;$$

y no hay entre los valores posibles de  $m_1$  y  $a$  otros que hagan  $5a+m_1$  potencia de 2.

3) Para  $m_1=9$ , el numerador y denominador de (15) pueden tener el factor común 3 para  $a=3$  y  $a=6$ ; se ve fácilmente que por

$$m_1=9 \quad a=3 \quad 5a+m_1=3 \cdot 8$$

y no hay otro modo de obtener que el denominador tenga, además del factor 3, solo factores 2.

Se obtienen por tanto las soluciones:

$$2) \quad m_1=6, \quad a=2, \quad u \geq 2, \quad u=v+2$$

$$p=10^{2v} \cdot 5^4 \cdot 18 + 8, \quad n=10^{2v} \cdot 5^4 \cdot 18 - 8, \quad m=10^{v+2}6 \quad (\text{III})$$

y pues, variando  $v$  se obtiene la nueva serie infinita

$$\begin{aligned} p &= 11258, & n &= 11242, & m &= 600 \\ p &= 1125008, & n &= 1124992, & m &= 6000 \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$3) \quad m_1=9, \quad a=3, \quad u \geq 2, \quad u=v+2$$

$$p=10^{2v} \cdot 5^4 \cdot 27 + 12, \quad n=10^{2v} \cdot 5 \cdot 27 - 12, \quad m=10^{v+2} \cdot 9 \quad (\text{IV})$$

y pues, la serie infinita

$$\begin{aligned} p &= 16887, & n &= 16863, & m &= 900 \\ p &= 1687512, & n &= 1687488, & m &= 9000 \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

3. - Pasando ahora al caso b), la fórmula (7) se convierte en

$$b=5 \cdot 10^{x-u-1} a + m_1 \quad (18)$$

que será siempre entera; siendo  $x-u-1 \geq 1$  este valor de  $b$  tendrá la misma paridad de  $m_1$ ; pero, siendo  $p+n=m^2$ :  $b=10^{2u}m_1^2$ :  $b$ , no pueden resultar  $p+n$  y  $b$  de la misma paridad si no son ambos pares. Resulta que debe necesariamente ser  $m_1$  par y convendrá poner

$$m_1=2^h m_2, \quad h \geq 1, \quad m_2 \text{ impar}$$



y, por la hipótesis que  $m_1$  no es múltiplo de 10, resultará también que

$m_2$  no es múltiplo de 5.

Para la comodidad de los cálculos sucesivos nos conviene también poner en evidencia los eventuales factores 2 de  $a$ ; recordando que  $a < 10$  tendremos luego

$$a = 2^k a_1, \quad k \leq 3, \quad a_1 \text{ impar}$$

y precisamente

$$\begin{aligned} a &= 1, 3, 5, 7, 9 \quad \text{para } k=0 \\ a_1 &= 1 \text{ o } 3 \quad \text{para } k=1 \\ a_1 &= 1 \quad \text{para } k=2 \text{ o } 3. \end{aligned} \quad (19)$$

Con estas posiciones resulta

$$m = 5^u 2^{u+h} m_2 \quad (20)$$

$$b = 5^{x-u} 2^{x-u-1+k} a_1 + 2^h m_2; \quad (21)$$

de tal manera resulta  $b$  divisible por 2 a la potencia mínima entre  $x-u-1+k$  y  $h$ ; y no podrá ser divisible por una potencia de 2 superior si no son iguales estos dos exponentes; en estas condiciones el número  $b$  y el número  $m^2$  no pueden tener, además de tal mínima potencia, otro factor común que factores del m.c.d.  $(a_1, m_2)$ , con exponente no mayor que en este m.c.d., si ellos se encuentran todavía en  $m_2$  después de división por ese m.c.d., y, en caso contrario, con exponente a lo sumo doble. Pongamos todavía en evidencia este m.c.d. escribiendo

$$\text{m.c.d. } (a_1, m_2) = d, \quad a_1 = da_2, \quad m_2 = dm'_2. \quad (22)$$

Por lo dicho, este divisor común a  $b$  y  $m^2$  será pues  $\leq d^2 \leq a_1^2$ ; por otra parte es  $x-u \geq 2$  y por tanto, después de dividir  $b$  por aquella mínima potencia de 2, queda un cociente  $> 5^2 a_1 > a_1^2$ ; se sigue que, en la hipótesis de que los

dos exponentes de 2 en el segundo miembro de (21) no fuesen iguales,  $b$  no podría ser divisor de  $m^2$ . Obtenemos que para que nuestro problema tenga solución es necesario que

$$x - u - 1 + k - h = 0 \quad (23)$$

y que  $b$  resulte divisible por una potencia de 2 de exponente  $\geq h$ ; pondremos luego

$$b = 2^h(5^{x-u} a_1 + m_2) = 2^{h+l} c \quad (24)$$

$$l \geq 0, \quad c \text{ divisor de } d^2.$$

Comparando con el exponente  $2u + 2h$  de 2 en  $m^2$ , y teniendo en cuenta que, después de dividir  $m^2$  por  $2^{h+l}$  el cociente tendrá todavía que ser número par, se obtiene

$$l \leq 2u + h - 1, \quad u \geq \frac{l - h + 1}{2}. \quad (25)$$

Resumiendo tenemos finalmente las igualdades

$$5^{h-k+1} a_2 + m'_2 = 2^l \frac{c}{d} \quad (26)$$

$$p + n = 5^{2u} 2^{2u+h-l} \frac{m_2^2}{c} \quad (27)$$

y las condiciones

$$5^{h-k} 2^{-k} \leq m_2 < 5^{h-k+1} 2^{1-k} \quad (28)$$

$$5^{h-k} 2^{l-k+1} < \frac{m_2^2}{c} < 5^{h-k+1} 2^{l-k+2}. \quad (29)$$

Para seguir en la discusión vamos ahora a considerar particularmente el caso

$$a_1 = c = d = 1,$$

La tabla (19) muestra que este puede presentarse para cualquier valor de  $k \leq 3$ . Dejaremos al lector completar el análisis para los otros casos.



En esta hipótesis las fórmulas (26), (28), (29) se escriben más simplemente

$$5^{h-k+1} + m_2 = 2^l \quad (30)$$

$$5^{h-k} \cdot 2^{-k} \leq m_2 < 5^{h-k} \cdot 2^{-k} \cdot 10 \quad (31)$$

$$5^{h-k} \cdot 2^{l-k+1} < m_2^2 < 5^{h-k} \cdot 2^{l-k+1} \cdot 10. \quad (32)$$

Se ve en seguida que, para que (30) sea compatible con las desigualdades (31), (32) es necesario que

$$5^{h-k} \cdot 2^{-k} \sqrt{10} < 5^{\frac{h-k}{2}} \cdot 2^{\frac{l-k+1}{2}};$$

en efecto, en la hipótesis contraria sería

$$5^{h-k+1} \geq 2^{l+k},$$

mientras, combinando la (31) con (30), se obtendría

$$2^l \geq 5^{h-k+1} + 5^{h-k} \cdot 2^{-k}$$

es decir

$$2^{l+k} \geq 5^{h-k}(5 \cdot 2^k + 1),$$

en evidente contraposición con la anterior. Se sigue fácilmente que

$$5^{h-k} \cdot 2^{-k} < 5^{\frac{h-k}{2}} \cdot 2^{\frac{l-k+1}{2}}$$

y

$$5^{h-k} \cdot 2^{-k} \cdot 10 < 5^{\frac{h-k}{2}} \cdot 2^{\frac{l-k+1}{2}} \sqrt{10}$$

de modo que (31) y (32) se resumen en la única desigualdad

$$5^{\frac{h-k}{2}} \cdot 2^{\frac{l-k+1}{2}} < m_2 < 5^{h-k+1} \cdot 2^{1-k}. \quad (33)$$

Combinando ahora esta desigualdad con (30) se obtiene

$$2^l > 5^{h-k+1} + 5^{\frac{h-k}{2}} \cdot 2^{\frac{1-k}{2}} 2^{\frac{l}{2}} \quad (34)$$

$$2^l < 5^{h-k+1}(1 + 2^{1-k}). \quad (35)$$

La (34) se resuelve como una desigualdad cuadrática en  $2^{\frac{l}{2}}$  obteniendo

$$2^{\frac{l}{2}} > \frac{5^{\frac{h-k}{2}}}{2} \left( 2^{\frac{1-k}{2}} + \sqrt{2^{1-k} + 20} \right). \quad (36)$$

Para explicitar mejor las desigualdades (35), (36) conviene pasar a los logaritmos en base 2 y se obtiene finalmente la condición

$$\begin{aligned} 2,3(h-k) + \left( 2,3 + \frac{\log(1+2^{1-k})}{\log 2} \right) &> l \\ &> 2,3(h-k) + 2 \left[ \frac{\log(2^{\frac{1-k}{2}} + \sqrt{2^{1-k}+20})}{\log 2} - 1 \right] \end{aligned} \quad (37)$$

donde se ha escrito 2,3 como valor aproximado de  $\log 5 : \log 2$ , lo que es generalmente suficiente para el cálculo, en consideración de que se trata únicamente de encerrar el número entero  $l$  entre dos valores convenientes. En casos particulares podrá ser necesaria una mayor aproximación, y notaremos que más precisamente

$$\log 5 : \log 2 = 2,322 \dots$$

Puesto que  $k$  puede solo tomar los valores 0, 1, 2, 3, es fácil averiguar por el cálculo inmediato que efectivamente

$$2,3 + \frac{\log(1+2^{1-k})}{\log 2} > 2 \left[ \frac{\log(2^{\frac{1-k}{2}} + \sqrt{2^{1-k}+20})}{\log 2} - 1 \right];$$

pero podemos asegurarnos de eso a priori observando que el primer miembro de (33) es mayor que el último, siempre que

$$l < 2,3(h-k) + 5,6 - k$$

y esta desigualdad está realizada siempre cuando lo es la pri-



mera (37). Después de esto, observando que el número  $\log 5 : \log 2$  es irracional y recordando que el conjunto de las partes no enteras de los múltiplos de un número irracional es denso en el intervalo  $0-1$ , podemos afirmar que *para cada  $k$  existe una infinidad de pares de enteros  $h, l$  que realizan la desigualdad (37)*.

A cada una de las ternas  $(k, h, l)$  así determinadas, corresponde una serie infinita de triángulos rectángulos que realizan el problema según la hipótesis *b*) (11). En efecto, conociendo  $k, h, l$  la (30) permite determinar un correspondiente valor de  $m_2$ , y la (25) proporciona una acotación inferior para  $u$ ; se elige  $u$  entero arbitrario realizando esta condición; la (23) proporciona en consecuencia el valor de  $x$ , y (27) el valor de  $p+n$ . Pues  $p-n=b=2^{h+l}$ , se está en condición de determinar  $p, n, m$ . Como en los casos de las fórmulas (I), (II), (III), (IV) se ve que a cada determinación de los números

$$h, k, l, m_2$$

corresponde toda una serie infinita de triángulos al variar  $u$  por enteros sucesivos. En estos triángulos los valores de  $m$  difieren uno de otro únicamente por el número de cifras 0 con las que terminan; por lo contrario en los números  $p, n$  las últimas cifras son siempre  $\neq 0$ , y se pasa de uno a otro triángulo por evidentes alteraciones de las cifras.

Damos dos ejemplos:

Poniendo  $k=0, h=1$ , la (37) resulta

$$2,3 + 3,9 = 6,2 > l > 2,3 + 3,22 = 5,5$$

$$l=6$$

luego

$$u \geq 3 \quad u = v + 3 \quad (v \geq 0)$$

$$x = u + 2 = v + 5; \quad y = z = 2u + 2 = 2v + 8$$

$$a = 1, \quad b = 2^7 = 128, \quad \frac{p-n}{2} = 64, \quad m_2 = 39$$

$$\frac{p+n}{2} = 10^{2v} \cdot 5^6 \cdot 39^2 = 10^{2v} \cdot 23765625, \quad m = 10^v \cdot 78000. \quad (V)$$

Dando a  $v$  los valores enteros  $0, 1, 2, \dots$  se obtiene

$$p = 23765689, \quad n = 23765561, \quad m = 78000$$

$$p = 2376562564, \quad n = 2376562436, \quad m = 780000$$

.....

Poniendo  $h=2$  se habría obtenido  $l=8, u \geq 4$ , etc.

Si en vez ponemos  $k=1$ , se averigua que la condición (37) solo puede verificarse por valores de  $h$  relativamente separados,  $h=4, 7, \dots$ ; para  $h=4$  se encuentra  $l=10, u \geq 4$ . Pondremos luego

$$k=1, \quad h=4, \quad l=10, \quad n=v+4$$

$$x=u+4=v+8, \quad y=z=2u+4=2v+16 \quad (\text{VI})$$

$$a=2, \quad b=2^{14}=16384, \quad m_2=399$$

$$\frac{p-n}{2}=8192$$

$$\frac{p+n}{2}=10^{2v+1} 5^7 \cdot 399^2 = 10^{2v} \cdot 124375781250$$

$$m=10^v \cdot 63840000$$

de donde la sucesión de soluciones

$$p = 124375789442, \quad n = 124375773058, \quad m = 63840000$$

$$p = 12437578133192, \quad n = 12437578116808, \quad m = 638400000$$

.....

a las cuales corresponde, para anteponer, la cifra 2.

Dejamos al cuidado del lector completar el estudio considerando los distintos casos que todavía quedan por examinar, según el plan anteriormente desarrollado.



## EJERCICIOS Y PROBLEMAS

### SOLUCIONES

N.º 63 — Sea  $f(x)$  una función con derivadas hasta el orden  $n+p$  ( $n \geq 1$ ,  $p \geq 1$ ) en un entorno del punto  $x = a$  y supongamos que de las derivadas de órdenes superiores a  $n$ , sea la  $(n+p)$ -ésima la primera derivada de  $f(x)$  tal que

$$\lim_{x \rightarrow a} f^{(n+p)}(x)$$

sea finito y diferente de cero.

Con estas hipótesis demostrar que puesto

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + h\vartheta_n)$$

es

$$\lim_{x \rightarrow a} \vartheta_n = \left[ \frac{p!}{(n+1)(n+2)\dots(n+p)} \right]^{\frac{1}{p}}$$

¿Cómo habrá que modificar la proposición si se supone que  $f^{(n+p)}(x)$  existe pero no tiene límite determinado para  $x \rightarrow a$ ?

SOLUCIÓN. — Se tiene

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + h\vartheta_n)$$

y también

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+p}}{(n+p)!} f^{(n+p)}(a + \vartheta h)$$

siendo  $0 < \vartheta_n < 1$ ,  $0 < \vartheta < 1$ .

De estas igualdades se deduce

$$\frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + h\vartheta_n) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+p}}{(n+p)!} f^{(n+p)}(a + \vartheta h).$$

Dividiendo ambos miembros de esta igualdad por  $\frac{h^n}{n!}$  y teniendo en cuenta que

$$f^{(n)}(a + h \vartheta_n) = f^{(n)}(a) + \frac{(h \vartheta_n)^p}{p!} f^{(n+p)}(a + \bar{\vartheta} \vartheta_n h)$$

donde  $0 < \bar{\vartheta} < 1$ , se tiene

$$\frac{(\vartheta_n h)^p}{p!} f^{(n+p)}(a + \bar{\vartheta} \vartheta_n h) = \frac{h^p}{(n+1)(n+2)\dots(n+p)} f^{(n+p)}(a + \bar{\vartheta} h),$$

y dividiendo ambos miembros por  $\frac{h^p}{p!}$  resulta

$$\vartheta_n^p f^{(n+p)}(a + \bar{\vartheta} \vartheta_n h) = \frac{p!}{(n+1)(n+2)\dots(n+p)} f^{(n+p)}(a + \bar{\vartheta} h). \quad (\text{I})$$

Pasando al límite para  $h \rightarrow 0$ , en virtud de la condición de que el límite de  $f^{(n+p)}(x)$  sea diferente de cero, resulta

$$\lim_{h \rightarrow 0} \vartheta_n^p = \frac{p!}{(n+1)(n+2)\dots(n+p)}. \quad (\text{II})$$

Por ser siempre  $\vartheta_n > 0$ , esta fórmula equivale a la que se pedía demostrar en el enunciado.

Utilizando el resto de Peano, no es necesario suponer la continuidad y tampoco la existencia de la derivada  $f^{(n+p)}(x)$  en un intervalo conteniente el punto  $a$ , sino que basta suponer la existencia de  $f^{(n+p)}(a)$ ; en lugar de la igualdad (I) se obtiene esta otra

$$\vartheta_n^p [f^{(n+p)}(a) + \varepsilon] = \frac{p!}{(n+1)(n+2)\dots(n+p)} [f^{(n+p)}(a) + \varepsilon']$$

donde  $\varepsilon$  y  $\varepsilon'$  tienden a cero cuando  $h \rightarrow 0$ . Por tanto, siendo  $f^{(n+p)}(a) \neq 0$ , resulta de nuevo la igualdad (II), sin necesidad de haber supuesto la existencia del límite de  $f^{(n+p)}(x)$  para  $x \rightarrow a$ , ni tampoco suponer la existencia de esta derivada fuera del punto  $a$ .

Esta solución, así como el enunciado del problema, es debida al Dr. EDISON FARAH, de la Facultad de Filosofía, Ciencias y Letras de Sao Paulo, Brasil.



N.º 79 — Sea un triángulo  $ABC$ . Sobre la prolongación del lado  $BC$  se da un punto  $L$ . Trazando una recta variable por este punto  $L$ , sean  $E, G$  los puntos en que corta a los lados  $AC$  y  $AB$  respectivamente. Se pide determinar esta recta de manera que el triángulo determinado por los puntos  $E, G$  y otro punto  $M$  elegido sobre  $BC$  sea máximo.

1ª SOLUCIÓN. — Llamando  $\varphi$  al ángulo que forma la recta variable  $LE$  con el lado  $BC$ , la superficie del triángulo  $MGE$ , del cual tenemos que calcular su máximo, está dado por

$$S = \frac{1}{2} LM \cdot LE \cdot \text{sen } \varphi - \frac{1}{2} LM \cdot LG \cdot \text{sen } \varphi.$$

Tomando un sistema de coordenadas rectangulares con el origen en  $L$  y eje de abscisas la recta  $LC$ , tendremos las coordenadas de los siguientes puntos:

$$L(0,0), \quad B(b,0), \quad C(c,0), \quad A(a_1, a_2), \quad G(g_1, g_2), \quad E(e_1, e_2)$$

y poniendo  $LM = d$ ,  $p = e_2 - g_2$ , el área  $S$  se puede escribir

$$S = \frac{1}{2} d \cdot GE \cdot \text{sen } \varphi = \frac{1}{2} d \cdot p. \quad (1)$$

El problema se reduce, por tanto, a determinar la recta  $LE$  de manera que  $p$  sea máximo.

Por simple relación de triángulos se tiene:

$$\frac{g_1 - b}{a_1 - b} = \frac{g_2}{a_2}, \quad \frac{e_1 - c}{a_1 - c} = \frac{e_2}{a_2}, \quad \frac{e_1}{e_2} = \frac{g_1}{g_2}$$

o sea

$$(I) \quad a_2(g_1 - b) - g_2(a_1 - b) = 0$$

$$(II) \quad a_2(e_1 - c) - e_2(a_1 - c) = 0 \quad (2)$$

$$(III) \quad e_1 g_2 - e_2 g_1 = 0.$$

Se trata de hallar el extremo de la función  $p = e_2 - g_2$ , con los vínculos (2). Lo resolveremos por el método de los coeficientes indeterminados. Poniendo

$$F = e_2 - g_2 + \lambda_1 [a_2(g_1 - b) - g_2(a_1 - b)] + \lambda_2 [a_2(e_1 - c) - e_2(a_1 - c)] \\ + \lambda_3 [e_1 g_2 - g_1 e_2]$$

deberá ser

$$\frac{\partial F}{\partial e_1} = \lambda_2 a_2 + \lambda_3 g_2 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial e_2} = 1 - \lambda_2(a_1 - c) - \lambda_3 g_1 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial g_1} = \lambda_1 a_2 - \lambda_3 e_2 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial g_2} = 1 - \lambda_1(a_1 - b) + \lambda_3 e_1 = 0.$$

De estas ecuaciones se deduce fácilmente

$$(IV) \quad a_2 e_1 - (a_1 - b) e_2 - a_2 g_1 + (a_1 - c) g_2 = 0$$

que junto con las ecuaciones (2) forma el sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas que permite resolver el problema.

Sumando las ecuaciones (I) y (IV) y restando la (II) se obtiene, después de dividir por  $c - b$ ,

$$e_2 + g_2 = a_2 \quad (3)$$

ecuación que expresa una propiedad interesante: el máximo se obtiene cuando el punto medio del segmento  $GE$  está sobre la recta paralela a  $BC$  a distancia  $a_2/2$ .

Gráficamente se obtiene la solución del problema determinando el punto de intersección de la curva lugar de los puntos medios de los diferentes segmentos  $GE$  con la recta  $a_2/2$ .

Tal curva es evidentemente una hipérbola, determinada por pasar por  $A, L$  y el punto medio del segmento  $BC$  y por tener por puntos del infinito los de las rectas  $AB, AC$ . En efecto la anterior definición puede interpretarse diciendo que la curva es el lugar de los puntos de intersección de cada recta del haz de centro  $L$  con la recta por  $A$  conjugada armónica de la paralela por  $A$  a la anterior respecto de las rectas  $AB, AC$ . La



recta  $y=a_2/2$  cortará a la hipérbola en dos puntos, uno interior al triángulo y que determina la solución del problema, siendo punto medio de un segmento cuyos extremos están sobre las rectas  $AB, AC$  entre  $A$  y la recta  $BC$ ; el otro, al contrario, es exterior al triángulo, siendo punto medio de un segmento cuyos extremos están fuera del ángulo  $ALC$ .

Sustituyendo en la ecuación (III) los valores de  $e_1$  y  $g_1$  deducidos de las (I) y (II) resulta

$$(b e_2 - c g_2) a_2 + (c - b) e_2 g_2 = 0$$

y reemplazando  $e_2$  por su valor  $e_2 = a_2 - g_2$  deducido de (3) se tiene finalmente

$$(c - b) g_2^2 + a_2 (b + c) g_2 - a_2 (c - b + a_2 b) = 0, \quad (4)$$

ecuación de segundo grado en  $g_2$  cuya raíz positiva nos dará la solución.

Es interesante observar que la posición de la recta  $LGE$  a la cual corresponde el máximo es independiente de la posición del punto  $M$ , puesto que la ecuación (4) no depende de dicho punto. Por lo contrario varía con  $M$  el valor de la área y el máximo maximorum corresponde a  $M \equiv C$ , pues entonces el triángulo  $MGE$  tiene máxima la altura correspondiente al lado  $GE$ .

Esta solución ha sido enviada por el Sr. MILTON AGUSTÍN QUIROGA, alumno de la Escuela de Ingeniería de San Juan.

NOTA DE LA R. — Estimamos de interés para el lector presentar a continuación otra solución del mismo problema, de fundamento geométrico y posiblemente más simple.

Se tiene

$$\Delta DEM = LEM - LDM;$$

tomando como base común de los dos triángulos del segundo miembro el segmento  $LM$  que es asignado, se ve que los dos triángulos y su diferencia son proporcionales respectivamente a las alturas

$$Dd = h_d, \quad Ee = h_e$$

y a su diferencia

$$h_e - h_d = H$$

y el triángulo  $DEM$  será máximo cuando es máxima  $H$ . Desde luego se obtiene el resultado, implícito en el enunciado del problema, de que la posición de máximo depende de la elección del punto  $L$ , pero no de  $M$ .

Pongamos

$$\sphericalangle BLD = \varphi, \quad \sphericalangle CBA = \beta \quad \sphericalangle BCA = \gamma;$$

es

$$h_d = LD \operatorname{sen} \varphi \quad h_e = LE \operatorname{sen} \varphi$$

$$LD = LB \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\beta - \varphi)} \quad LE = LC \frac{\operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen}(\gamma + \varphi)}$$

es decir, poniendo  $LB = b$ ,  $LC = c$

$$h_d = b \frac{\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen}(\beta - \varphi)}, \quad h_e = c \frac{\operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen}(\gamma + \varphi)}.$$

Derivando respecto  $\varphi$

$$h'_d = b \operatorname{sen} \beta \frac{\cos \varphi \operatorname{sen}(\beta - \varphi) + \operatorname{sen} \varphi \cos(\beta - \varphi)}{\operatorname{sen}^2(\beta - \varphi)} = b \frac{\operatorname{sen}^2 \beta}{\operatorname{sen}(\beta - \varphi)}$$

$$h'_e = c \frac{\operatorname{sen}^2 \gamma}{\operatorname{sen}^2(\gamma + \varphi)}.$$

La condición de máximo  $H' = 0$  se traduce luego en la ecuación

$$\frac{\operatorname{sen}(\beta - \varphi)}{\operatorname{sen}(\gamma + \varphi)} = \sqrt{\frac{b}{c}} \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \gamma} = k \quad (1)$$

donde todas las raíces se han tomados positivas por el significado geométrico de los términos. De (1) se obtiene

$$\frac{\operatorname{sen}(\beta - \varphi) + \operatorname{sen}(\gamma + \varphi)}{\operatorname{sen}(\gamma + \varphi) - \operatorname{sen}(\beta - \varphi)} = \frac{1 + k}{1 - k}$$



es decir, transformando las sumas en productos

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\gamma - \beta}{2} + \varphi \right) = \frac{1-k}{1+k} \operatorname{tg} \frac{\beta + \gamma}{2}.$$

Esta fórmula permite calcular el ángulo  $\varphi$ . Se puede también encontrar una construcción geométrica directamente observando que (1) traduce el problema: determinar dos ángulos  $(\beta - \varphi)$ ,  $(\gamma + \varphi)$  cuya suma es dada y es dada la razón de los senos; lo que equivale a decir: construir los ángulos a la base de un triángulo del cual está dado el ángulo al vértice (el suplementario de  $\beta + \gamma$ ) y la razón de los dos lados.

Bastará por tanto sobre una recta  $r$  fijar 4 puntos  $\lambda, \mu, \nu, \rho$  de manera que  $\lambda\mu : \mu\nu$  sea igual a la dada razón y  $\rho$  sea el conjugado armónico de  $\mu$  respecto  $\lambda, \nu$  (de manera que  $\lambda\rho : \nu\rho$  será también igual a dicha razón); trazando la semicircunferencia de diámetro  $\mu\rho$  y sobre  $\lambda\nu$  el arco capaz del dado ángulo, el punto de intersección  $\sigma$  formará con  $\lambda, \nu$  un triángulo semejante al que se buscaba.

N.º 84 — Determinar un triángulo de lados enteros circunscripto al círculo de radio unidad.

SOLUCIÓN. — Si  $a, b, c$  son los lados del triángulo buscado, pongamos  $2p = a + b + c$ . El radio del círculo inscrito es sabido que se expresa por

$$r = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a+b+c}. \quad (1)$$

Para que sea  $r=1$  debe ser, por tanto,

$$4(a+b+c) = (b+c-a)(a+c-b)(a+b-c). \quad (2)$$

Pongamos

$$b+c-a=A, \quad a+c-b=B, \quad a+b-c=C \quad (3)$$

con lo cual (2) se escribe

$$4(A+B+C)=ABC. \quad (4)$$

Esta igualdad nos dice que por lo menos uno de los números enteros  $A, B, C$  es par. Supongamos que sea el  $A$ . De (3) se deduce

$$2c=A+B, \quad 2b=A+C \quad (5)$$

igualdades que, siendo  $A$  par, demuestran que también  $B$  y  $C$  deben ser pares. Pongamos, pues,  $A=2A_1$ ,  $B=2B_1$ ,  $C=2C_1$ ; la (4) se escribe

$$A_1+B_1+C_1=A_1B_1C_1. \quad (6)$$

Considerando la función  $A_1B_1C_1-(A_1+B_1+C_1)$  se ve en seguida que es función creciente de cada variable para valores de ellas mayores de la unidad; se sigue que, ordenadas estas en orden de magnitud, por ej.,  $A_1 \leq B_1 \leq C_1$ , al variar estas variables la función pasa una y una sola vez por el valor cero. Basta entonces probar con las ternas: 1, 1, 1; 1, 1, 2; 1, 2, 2; 1, 1, 3; 1, 2, 3; se encuentra que esta última realiza la ecuación. Se tiene, por tanto,  $A_1=1$ ,  $B_1=2$ ,  $C_1=3$ , o sea,  $A=2$ ,  $B=4$ ,  $C=6$  con lo cual, de las ecuaciones (3) se deduce:

$$a=5, \quad b=4, \quad c=3.$$

Luego el único triángulo posible es el de lados 3, 4 o 5.

De este problema se ha recibido una solución del Sr. MARIO RIBONE RUBÉN, que llega al mismo resultado, pero supone de antemano que el triángulo sea rectángulo.



## EJERCICIOS Y PROBLEMAS

### PROPUESTOS

96. - Estudiar la superficie

$$x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2 + 2 x y z = 0$$

determinando los puntos y líneas múltiples, los conos y planos tangentes en estos puntos y líneas, el máximo de la distancia de sus puntos al origen. Determinar su intersección con la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

y el mínimo tetraedro que la contiene.

97. - Encontrar la fracción que más aproxima por defecto a  $\frac{1587}{3670}$  teniendo su denominador menor que 3669.

98. - Hallar el límite, para  $x \rightarrow 0$ , de la expresión

$$\frac{1}{x} \left( \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right) - 1.$$

99. - Se tiene la cúbica

$$(x - 12a)^3 + 27a[y^2 + (x - 8a)^2] = 0$$

y se pide:

1º. Demostrar que tiene un punto doble en el origen y determinar las tangentes en el mismo.

2º. Demostrar que en el intervalo  $0 \leq x \leq 9a$  la curva describe un circuito cerrado. Hallar la longitud de este circuito y el volumen descrito por el mismo al girar alrededor del eje  $x$ .

100. - Dada una afinidad plana determinar un par de vectores cuyo ángulo sufre la máxima deformación.

- El precio de suscripción a «Mathematicae Notae» es de 8 \$ (m/n.) anuales.
- El Instituto de Matemática publica también una colección de Notas y Memorias bajo el título «Publicaciones del Instituto de Matemática de la Facultad de Ciencias etc.», cuyo precio de suscripción es de 10 \$ (m/n.) por volumen. Se pueden adquirir los fascículos sueltos de las publicaciones al precio señalado en la pág. 4 de esta misma tapa.
- Para todo lo relacionado al Instituto, a las Publicaciones y a «Mathematicae Notae» dirigirse al Director del Instituto de Matemática — Avenida Pellegrini 250 — Rosario (R. Argentina).
- Para suscripciones y adquisición de los fascículos sueltos dirigirse al Director del Instituto o bien al Bibliotecario de la Facultad de Ciencias Matemáticas, etc., Avenida Pellegrini 250, Rosario (Rep. Argentina). Los importes deberán remitirse en efectivo o bien por giros postales o bancarios pagaderos en la ciudad de Rosario, con preferencia sobre el Banco de la Nación Argentina.
- Los suscriptores en la República Oriental del Uruguay pueden dirigirse al señor Prof. Rodolfo F. Sayagués, Constituyente 1863, Montevideo.

---



---

#### INDICE DEL FASCICULO 1

|                                                                                                | Pág. |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Sobre las medias aritmético-geométricas de Gauss (parte primera)                               |      |
| (J. V. USPENSKY) . . . . .                                                                     | 1    |
| Un teorema sobre representación conforme (LUIS A. SANTALÓ) . . . .                             | 29   |
| Acerca de la sucesión $\{\cos n_k x\}$ , $n_k \rightarrow \infty$ (RALPH P. BOAS, Jr.) . . . . | 41   |
| Breve nota bibliográfica sobre el problema nº 50 (PEDRO E. ZADUNAISKY)                         | 42   |
| Ejercicios y problemas (Soluciones) . . . . .                                                  | 47   |
| Ejercicios y Problemas (Propuestos) . . . . .                                                  | 55   |
| Cuestiones . . . . .                                                                           | 56   |



# Fascículos aparecidos en las "PUBLICACIONES" del Instituto de Matemáticas

|              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | m\$.n. |
|--------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| Vol. I.      | 1 - B. LEVI — Sobre el sistema $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xy)dx=p(y); \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xy)dy=q(x)$                                                                                                                                                                                                   | 1.00   |
|              | 2 - L. A. SANTALÓ — Geometría integral de figuras ilimitadas .. . . .                                                                                                                                                                                                                                                       | 1.80   |
|              | 3 - F. AMODEO — Origen y desarrollo de la Geometría proyectiva.<br>Trad. de Nicolás y José Babini .. . . .                                                                                                                                                                                                                  | 8.00   |
|              | 4 - B. LEVI — Una teoría intuicionista de las funciones racionales enteras de una variable .. . . .                                                                                                                                                                                                                         | 1.00   |
| Vol. II.     | 1 - P. MONTEL — Funciones armónicas y subarmónicas .. . . .                                                                                                                                                                                                                                                                 | 1.00   |
|              | 2 - G. FUBINI — La ley de la media para funciones no derivables.<br>B. LEVI — Sobre un teorema de Weierstrass, el teorema de Rolle y el anterior teorema de Fubini .. . . .                                                                                                                                                 | 1.00   |
|              | 3 - L. A. SANTALÓ — Una demostración de la propiedad isoperimétrica del círculo .. . . .                                                                                                                                                                                                                                    | 1.20   |
|              | 4 - L. A. SANTALÓ — Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas .. . . .                                                                                                                                                                                                                             | 1.50   |
|              | 5 - I. Antecedentes de la creación del Instituto.<br>II. Acto de inauguración oficial del Instituto.<br>C. PLÁ — Origen y propósitos del Instituto.<br>J. REY PASTOR — La matemática italiana en el último medio siglo y la posición del Dr. Beppo Levi en ella.<br>B. LEVI — Evolución del pensamiento matemático .. . . . | 1.50   |
|              | 6 - E. GASPARE — Fórmulas integrales referentes a intersección de una figura plana con bandas variables .. . . .                                                                                                                                                                                                            | 1.50   |
|              | 7 - A. ROSENBLATT — Sobre el teorema de los grandes números en la teoría de la probabilidad .. . . .                                                                                                                                                                                                                        | 1.00   |
|              | 8 - M. COTLAR — Sobre conjuntos no medibles y generalización de la integral de Lebesgue - Prólogo por B. Levi .. . . .                                                                                                                                                                                                      | 1.50   |
|              | 9 - B. LEVI — La noción de "dominio deductivo" como elemento de orientación en las cuestiones de fundamentos de las teorías matemáticas .. . . .                                                                                                                                                                            | 1.50   |
| Vol. III.    | 1 - Homenaje a la memoria de V. Volterra y J. J. Thomson.<br>C. PLÁ — Semblanza de Sir Joseph J. Thomson.<br>B. LEVI — La personalidad de Vito Volterra .. . . .                                                                                                                                                            | 1.00   |
|              | 2 - G. FUBINI — Algunas propiedades de los grupos discontinuos finitos                                                                                                                                                                                                                                                      | 2.50   |
|              | 3 - B. LEVI — Teoría de la integral de Lebesgue independiente de la noción de medida .. . . .                                                                                                                                                                                                                               | 3.00   |
|              | 4 - B. LEVI — Sobre la inversión de una integral definida .. . . .                                                                                                                                                                                                                                                          | 1.20   |
|              | 5 - L. A. SANTALÓ — Curvas extremales de la torsión total y curvas-D.                                                                                                                                                                                                                                                       | 2.00   |
|              | 6 - A. TERRACINI — Orígenes de algunos conceptos geométricos .. .                                                                                                                                                                                                                                                           | 2.00   |
|              | 7 - L. A. SANTALÓ — Complemento a la Nota "Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas" .. . . .                                                                                                                                                                                                     | 1.00   |
| Vol. IV.     | 1 - L. A. SANTALÓ. — Sobre ciertas variedades con carácter de desarrollable en el espacio euclidiano de cuatro dimensiones .....                                                                                                                                                                                            | 3.00   |
|              | 2 - M. COTLAR — Funciones univalentes sobre un conjunto de puntos del contorno de un dominio de holomorfismo .. . . .                                                                                                                                                                                                       | 2.00   |
|              | 3 - JOSÉ L. MASSERA. — Fórmulas en diferencias finitas con aplicación a la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales de primer orden                                                                                                                                                                                | 3.50   |
|              | 4 - A. KOMISCHKE. — Sobre las relaciones entre la luz y la gravitación                                                                                                                                                                                                                                                      | 2.50   |
|              | 5 - R. LAGUARDIA y B. LEVI. — Sobre la representación por integrales de algunas funciones definidas por desarrollos de Taylor y aplicación a las soluciones de ecuaciones en derivadas parciales .....                                                                                                                      | 2.00   |
| Vol. V y VI. | (En preparación).                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |        |
|              | Memorias ofrecidas por varios amigos, alumnos y admiradores en homenaje al Dr. Julio Rey Pastor .....                                                                                                                                                                                                                       |        |
| Vol. VII.    | 1 - J. C. VIGNAUX y M. COTLAR. — Las familias totalmente normales de funciones analíticas .....                                                                                                                                                                                                                             | 6.00   |
|              | 2 - J. V. USPENSKY. — Sobre el problema de la ruina de los jugadores                                                                                                                                                                                                                                                        |        |