FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERIA Y AGRIMENSURA
Escuela de Formación Básica - Departamento de Matemática

Nociones topológicas en espacios métricos

Marisa Piraino - Julieta Recanzone
Eduardo Santillan Marcus - Dirce Braccialarghe
Sofía Leegstra[1]

2019

[1] {piraino, jureca, edus,dirce, sofia}@fceia.unr.edu.ar

Índice

1. Motivación del presente material

Algunos docentes que trabajamos en la asignatura Cálculo III, asignatura del segundo año de las carreras de Ingeniería, consideramos que hay temas en la bibliografía utilizada en el aula que necesitan un abordaje más profundo. Es por ello que generamos durante el año 2017 espacios de estudio y discusión para fortalecer nuestra formación. Con la intención de que los encuentros sirvan para la reflexión y el enriquecimiento mutuo, las profesoras Marisa Piraino y Julieta Recanzone se encargaron de la organización de los mismos. El segundo de ellos fue organizado para discutir sobre el tema *Nociones topológicas*. A modo de disparador las docentes prepararon un material que fue analizado y resuelto previamente al encuentro. En el mismo se decidió realizar un apunte y se invitó a los docentes del departamento de Matemática a participar en la elaboración del mismo. El presente material, **destinado a docentes**, es una construcción grupal basado en el material puesto a disposición por Marisa y Julieta y en el aporte realizado por distintos docentes del departamento de Matemática de la Escuela de Formación Básica. Esperamos que la propuesta les resulte interesante.

2. ¿Qué es la topología?

La topología (del griego $\tau\acute{o}\pi o\varsigma$, "lugar", y $\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$, "estudio") es la rama de la Matemática dedicada al estudio de aquellas propiedades de los cuerpos geométricos que permanecen inalteradas por transformaciones continuas. Coloquialmente, se presenta a la topología como la «geometría de la página de goma». Esto hace referencia a que, en la geometría euclídea, dos objetos serán equivalentes mientras podamos transformar uno en otro mediante isometrías (rotaciones, traslaciones, reflexiones, etc.), es decir, mediante transformaciones que conservan las medidas de ángulo, área, longitud, volumen y otras.

En topología, dos objetos son equivalentes en un sentido mucho más amplio. Para serlo, han de tener el mismo número de trozos, huecos, intersecciones, etc. En topología está permitido doblar, estirar, encoger, retorcer, etc., los objetos, pero siempre que se haga sin romper ni separar lo que estaba unido, ni pegar lo que estaba separado. Por ejemplo, un triángulo es topológicamente lo mismo que una circunferencia, ya que podemos transformar uno en otra de forma continua, sin romper ni pegar. Pero una circunferencia no es lo mismo que un segmento, ya que habría que partirla (o pegarla) por algún punto.

La topología se interesa por conceptos como proximidad, número de agujeros, el tipo de consistencia (o textura) que presenta un objeto, comparar objetos y clasificar múltiples atributos donde destacan conectividad, compacidad, metricidad o metrizabilidad, entre otros.

Los matemáticos usan la palabra topología con dos sentidos: informalmente es el sentido arriba especificado, y de manera formal es la referencia a una cierta familia de subconjuntos de un conjunto dado, familia que cumple unas reglas sobre la unión y la intersección.

Históricamente la topología surge en el siglo XIX cuando:

- se empiezan a analizar propiedades cualitativas que no dependen de las magnitudes pero que ya permitían distinguir diversos objetos entre sí (extendiendo de esta forma la geometría)

- comienza la necesidad de clarificar la teoría de funciones a valores reales de una variable real

obteniéndose el mayor desarrollo en la segunda dirección.
El surgimiento del cálculo infinitesimal y diferencial, obliga a formalizar las nociones aún entonces vagas de *proximidad* y *continuidad*. Sin embargo es recién a principios de siglo XX que se llega a la definición rigurosa de proximidad, continuidad y propiedad cualitativa.

Breve reseña histórica. [1]
La rama de la Matemática conocida como Topología General tienen sus orígenes en los esfuerzos realizados durante el siglo XIX para conseguir una formulación rigurosa de los fundamentos del Cálculo Diferencial evitando las ideas geométricas e intuitivas que usaron originalmente los *padres* del Cálculo, Isaac Newton y Gottfried Leibniz.
Este interés por el rigor llevó a Augustine Louis Cauchy y a otros matemáticos de su época a formular conceptos precisos tanto de límite como de función real continua. Más tarde, la aparición de extraños ejemplos, como los de funciones continuas que no son derivables en ningún punto, llevaron incluso a la revisión del concepto de número real. Entre las definiciones rigurosas de número real que se establecieron , destacan las de Georg Cantor y Richard Dedekind.
Aunque la noción de espacio abstracto fue ya vislumbrada por Bernhard Riemann, el

desarrollo que llevó a la Topología General actual lo inició Cantor, quien en una serie de trabajos que realizó alrededor de 1880 dio alguna de las nociones topológicas fundamentales como punto de acumulación, conjunto cerrado o conjunto abierto para los espacios euclídeos. Otras importantes nociones y avances posteriores los llevaron a cabo Camille Jordan, Henri Poincaré, Émile Borel y Henri Lebesgue, entre otros. Un resultado de aquella época es el famoso teorema de Borel-Lebesgue sobre la compacidad de un intervalo cerrado.

A medida que estas ideas se van extendiendo, se empieza a pensar en su aplicación a conjuntos, no ya de puntos, sino de curvas o funciones. Esto llevó al estudio de nociones topológicas en espacios de funciones por parte de matemáticos como, por ejemplo, David Hilbert. De esta manera se iba preparando el terreno para un tratamiento axiomático de la noción de proximidad en espacios abstractos. Esta tendencia se vio acentuada por la importancia que a principios del siglo XX tomó la noción de teoría axiomática, gracias sobre todo a los trabajos sobre los fundamentos de la Geometría del propio Hilbert.

Los primeros intentos para separar lo que hay de común en las propiedades de los conjuntos de puntos y de funciones (sin acudir a la noción de distancia) fueron realizados por Maurice Frechet y Frigyes Riesz en 1906 y 1907, respectivamente. Pero ambas aproximaciones no fueron completamente satisfactorias. También se debe a Frechet la noción de espacio métrico.

La primera definición que recoge la noción actual de espacio topológico es debida a Felix Hausdorff quien en 1914 definió un espacio topológico como un conjunto abstracto dotado de un sistema de entornos con la propiedad de que puntos distintos tienen entornos disjuntos. En la siguiente sección veremos un importante ejemplo de espacio topológico: el espacio métrico. Cualquier espacio métrico es un espacio topológico porque cualquier función de distancia definida sobre un conjunto induce una topología sobre dicho conjunto. Se trata de la topología inducida por las bolas abiertas asociadas a la función distancia del espacio métrico.

3. Espacios métricos

Las nociones de conjunto abierto, conjunto cerrado, conjunto acotado, etc. son utilizadas desde nuestras primeras clases de Cálculo. En esta sección daremos las definiciones de estos conceptos y de los utilizados usualmente.

Definición 1. *Una distancia o métrica en un conjunto X, es una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que satisface las siguientes condiciones:*

i) $\forall x, y \in X, d(x, y) \geq 0$ *y* $d(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$ *(no negatividad).*

ii) $\forall x, y \in X, d(x, y) = d(y, x)$ *(simetría).*

iii) $\forall x, y, z \in X, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(desigualdad triangular).*

Definición 2. *Un conjunto X con una distancia d definida en dicho conjunto, se denomina* ***espacio métrico*** *y se denota (X, d) o sólo con X cuando la omisión de la función d no lleva a confusiones.*

Ejemplo 1. *Consideremos el conjunto $\mathbb{R}^n$ y definamos para $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$, la función*

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Es simple demostrar que $\mathbb{R}^n$ con esta distancia resulta un espacio métrico. A esta distancia se la llama ***distancia euclídea*** *y a $(\mathbb{R}^n, d)$ se le llama* ***espacio métrico euclídeo***.

A partir de la definición de distancia en un conjunto X se definen los siguientes conjuntos particulares.

Definición 3. *Dado un espacio métrico (X, d), si $x_0 \in X$ y $r > 0$, se definen los siguientes subconjuntos de X:*

a) ***Bola abierta de centro*** x_0 ***y radio r***: $B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$

b) ***Bola cerrada de centro*** x_0 ***y radio r***: $\bar{B}(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$

c) ***Esfera de centro*** x_0 ***y radio r***: $S(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) = r\}$

En lo que sigue, veremos qué forma tienen estos conjuntos si consideramos la distancia euclídea.

Ejemplo 2.

a) *En* $\mathbb{R}$*:*

Bola abierta:

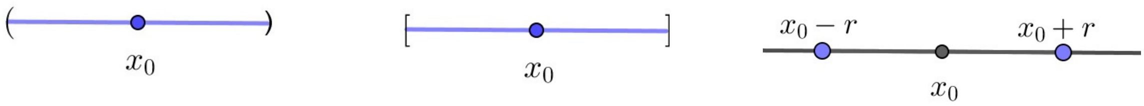
$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} : d(x, x_0) < r\} = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\} = (x_0 - r, x_0 + r)$$

Bola cerrada:

$$\bar{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} : d(x, x_0) \leq r\} = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| \leq r\} = [x_0 - r, x_0 + r]$$

Esfera:

$$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} : d(x, x_0) = r\} = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| = r\} = \{x_0 - r, x_0 + r\}$$



(a) Bola abierta (b) Bola cerrada (c) Esfera

Figura 1: En $\mathbb{R}$

b) *En* $\mathbb{R}^2$*:*

Bola abierta:

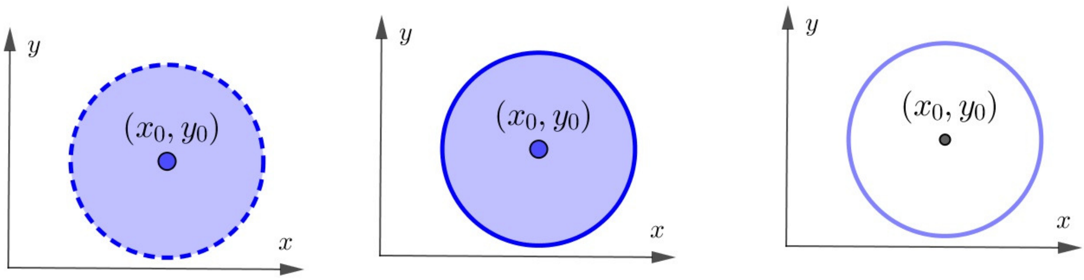
$$B((x_0, y_0), r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d((x, y), (x_0, y_0)) < r\}$$
$$= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\right\}$$

Bola cerrada:

$$\bar{B}((x_0, y_0), r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d((x, y), (x_0, y_0)) \leq r\}$$
$$= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leq r\right\}$$

Esfera:

$$S((x_0, y_0), r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d((x, y), (x_0, y_0)) = r\}$$
$$= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r\right\}$$



(a) Bola abierta (b) Bola cerrada (c) Esfera

Figura 2: En $\mathbb{R}^2$

c) *En* $\mathbb{R}^3$*:*

Bola abierta: $B((x_0, y_0, z_0), r) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : d((x, y, z), (x_0, y_0, z_0)) < r\}$

$$B((x_0, y_0, z_0), r) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < r\right\}$$

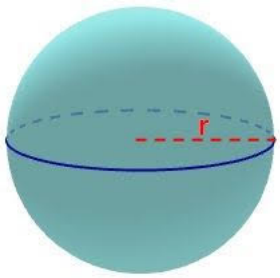


Figura 3: En $\mathbb{R}^3$.

Bola cerrada: $\bar{B}((x_0, y_0, z_0), r) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : d((x, y, z), (x_0, y_0, z_0)) \leq r\}$

$$\bar{B}((x_0, y_0, z_0), r) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \leq r\right\}$$

Esfera: $S((x_0, y_0, z_0), r) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : d((x, y, z), (x_0, y_0, z_0)) = r\}$

$$S((x_0, y_0, z_0), r) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = r\right\}$$

Definición 4. *Un conjunto A incluido en un espacio métrico (X, d) es* ***abierto*** *si para cada $x \in A$ existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$.*

Ejemplo 3. *Toda bola abierta en un espacio métrico* (X, d) *es un conjunto abierto.*

Aquí tenemos una gran familia de conjuntos abiertos y el siguiente resultado nos permite encontrar otros conjuntos abiertos en un espacio métrico.

Teorema 1. *Si* X *es un espacio métrico, entonces:*

1. $\emptyset$ *y* X *son conjuntos abiertos.*
2. *Si* $U_1, U_2, \cdots, U_n$ *son subconjuntos abiertos de* X *entonces* $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ *es abierto.*
3. *Si* $\{U_i\}_{i \in I}$ *(*I *es un conjunto de índices) es una familia de abiertos entonces* $\bigcup_{i \in I} U_i$ *es un conjunto abierto.*

Definición 5. *Si* X *es un espacio métrico, el conjunto* $B \subset X$ *es* ***cerrado*** *si su complemento,* $X - B$*, es abierto.*

Ejemplo 4.

a) El conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 < x \leq \pi\}$ *no es abierto ni cerrado.*

b) Un plano en el espacio es un ejemplo de un conjunto cerrado.

c) El conjunto $\mathbb{R}^2 - \{(x_0, y_0)\}$ *es abierto en* $\mathbb{R}^2$*.*

Definición 6. *Sea* X *un espacio métrico y* $A \subset X$*. Un punto* p *se dice* ***punto interior*** *del conjunto* A *si existe una bola* $B(p, r)$ *incluida en* A*.*

Definición 7. *Sea* X *un espacio métrico y* $A \subset X$*. El* ***interior de*** A *es el conjunto de los puntos interiores de* A *y se simboliza* $\overset{\circ}{A}$*.*

Definición 8. *Sea* X *un espacio métrico y* $A \subset X$*. Un punto* p *se dice* ***punto exterior*** *del conjunto* A *si es un punto interior de* $X - A$*.*

Definición 9. *Sea* X *un espacio métrico y* $A \subset X$*. El* ***exterior de*** A *es el conjunto de los puntos exteriores de* A *y se simboliza* $\operatorname{ext}(A)$*.*

Definición 10. *Sea* X *un espacio métrico y* $A \subset X$*. Un punto* p *se dice* ***punto frontera*** *del conjunto* A *si para toda bola* $B(p, r)$*, se tiene que* $B(p, r) \cap A \neq \emptyset$ *y* $B(p, r) \cap (X - A) \neq \emptyset$*.*

Definición 11. *Sea* X *un espacio métrico y* $A \subset X$*. La* ***frontera*** *del conjunto* A *es el conjunto de los puntos frontera. Se simboliza* ∂A*.*

Observación 1. *: A partir de estas definiciones se desprenden las siguientes propiedades:*

a) Un conjunto es abierto si no incluye a ***ningún*** *punto frontera.*

b) Un conjunto es cerrado si contiene a ***todos*** *sus puntos frontera.*

En los ejemplos que siguen, consideraremos la métrica euclídea. En ellos se explicitan el interior, exterior y frontera de cada conjunto, considerando en cada caso el correspondiente universal.

Ejemplo 5. *Sean* $A = (a, b)$*,* $B = [a, b]$ *y* $C = (a, b]$ *donde* $a, b \in \mathbb{R}$ *y* $a < b$*. Resulta*

$$\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{C} = (a, b)$$

$$ext(A) = ext(B) = ext(C) = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$$

$$\partial A = \partial B = \partial C = \{a, b\}$$

Ejemplo 6. *Sea* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : m < d\left((x, y), (0, 0)\right) < n\}$ *donde* $m < n$*.*

$$\overset{\circ}{D} = D \ , \ ext(D) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d\left((x, y), (0, 0)\right) < m\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d\left((x, y), (0, 0)\right) > n\right\}$$

$$\partial D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = m^2\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = n^2\right\}$$

Ejemplo 7. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x + 7\}$

$$\overset{\circ}{E} = \{\} \quad , \qquad ext(E) = \mathbb{R}^2 - E \quad , \qquad \partial E = E$$

Ejemplo 8. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \wedge z > 0\}$

$$\overset{\circ}{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 4 \wedge z > 0\}$$

$$ext(F) = \mathbb{R}^3 - \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \wedge z \geq 0\}$$

$$\partial F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \, , \ z \geq 0\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0 \, , \ x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Ejemplo 9. *G es el plano xy sin el origen de coordenadas.*

a) Considerando a G como subconjunto de $\mathbb{R}^2$

$$\overset{\circ}{G} = G \quad , \qquad ext(G) = \{\,\} \quad , \qquad \partial G = \{(0, 0)\}$$

b) Considerando a G como subconjunto de $\mathbb{R}^3$

$$\overset{\circ}{G} = \{\,\} \quad , \quad ext(G) = \mathbb{R}^3 - \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\} \quad , \quad \partial G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$$

Ejemplo 10. $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 5cost, y = 5sent, z = t\,;\; t \in \mathbb{R}\}$

$\overset{\circ}{H} = \{\,\}$, $ext(H) = \mathbb{R}^3 - H$, $\partial H = H$

3.1. Conjunto conexo - Conjunto conexo por arco

En los libros de texto utilizados habitualmente en el aula encontramos la siguiente definición de conjunto conexo: "*un conjunto es conexo si dos puntos arbitrarios de él, pueden unirse mediante una curva suave a trozos, toda ella situada en el interior del conjunto.*" En realidad, esta definición corresponde a la de **conjunto conexo por arcos**, no a la de **conjunto conexo**.

A continuación presentamos las definiciones necesarias para diferenciar y comprender estos conceptos y estableceremos bajo qué hipótesis estas definiciones resultan equivalentes.

Definición 12. *Si (X, d) e (Y, d') son espacios métricos entonces $f : X \longrightarrow Y$ es continua en $x \in X$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon, x) > 0$ tal que $d'(f(x), f(y)) < \epsilon$ si $d(x, y) < \delta$.*

Ejemplo 1. *Las siguientes funciones son continuas de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$:*

a) $f(x, y) = x + y$.

b) $g(x, y) = xy$.

c) $h(x, y) = \alpha x$, *donde* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Definición 13. *Un **arco** (o **curva**) en un espacio métrico X es una función continua $\alpha : [0, 1] \longrightarrow X$. Los puntos $\alpha(0)$ y $\alpha(1)$ son los **extremos del arco**. Cuando estos coinciden tenemos un **arco cerrado** o **curva cerrada**.*

Definición 14. *Un subconjunto A en un espacio métrico X se dice **conexo por arcos** (o **arco conexo** o **conexo por curvas**) si dados dos puntos de A, existe una curva en A que los une.*

Definición 15. *Un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ se dice **convexo** si dados $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in A$, el segmento $\overline{\boldsymbol{pq}} = \{(1 - t)\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{q} : t \in [0, 1]\}$ está contenido en A.*

Observación 2. *Puede demostrarse que:*

a) Todo conjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ es arco conexo.

b) Las bolas abiertas o cerradas de $\mathbb{R}^n$ son arco conexo.

c) $\mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$ es arco conexo si y sólo si $n \geq 2$. Por lo tanto $\mathbb{R} - \{0\}$ no es arco conexo.

Definición 16. *Un subconjunto A en un espacio métrico X se dice* ***conexo*** *si no existen U y V abiertos en X no vacíos y disjuntos tales que $A = U \cup V$.*

Observación 3. *Como consecuencia de esta definición obtenemos la equivalencia de las siguientes proposiciones:*

a) A es conexo.

b) Si U y V son abiertos tales que $U \cap V = \emptyset$ y $A = U \cup V$ se verifica que $U = \emptyset$ o $V = \emptyset$.

c) Si U y V son abiertos, no vacíos, y tales que $A = U \cup V$, se tiene que $U \cap V \neq \emptyset$

Observación 4. *Si el conjunto universal es conexo, los únicos subconjuntos que son simultáneamente abiertos y cerrados son el vacío y el universal.*

Simbólicamente, si X es conexo y $A \subseteq X$ es abierto y cerrado en X, entonces $A = \emptyset$ o $A = X$.

Observación 5. *La imagen continua de un conexo es un conjunto conexo. Es decir, si X e Y son espacios métricos, $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua y A es un conjunto conexo en X, entonces $f(A)$ es conexo en Y.*

Las demostraciones de los siguientes resultados pueden consultarse en el libro de Pita Ruiz [3].

El siguiente teorema establece una relación entre la definición de conjunto conexo y la de conjunto arco conexo.

Teorema 2. *Si X es un espacio métrico y $A \subseteq X$ es arco conexo, entonces A es conexo.*

La recíproca no siempre es cierta. Por ejemplo, puede demostrarse que el conjunto

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin\left(\frac{1}{x}\right),\ x > 0\right\} \cup \{(0,0)\}$$

es conexo pero no arco conexo.

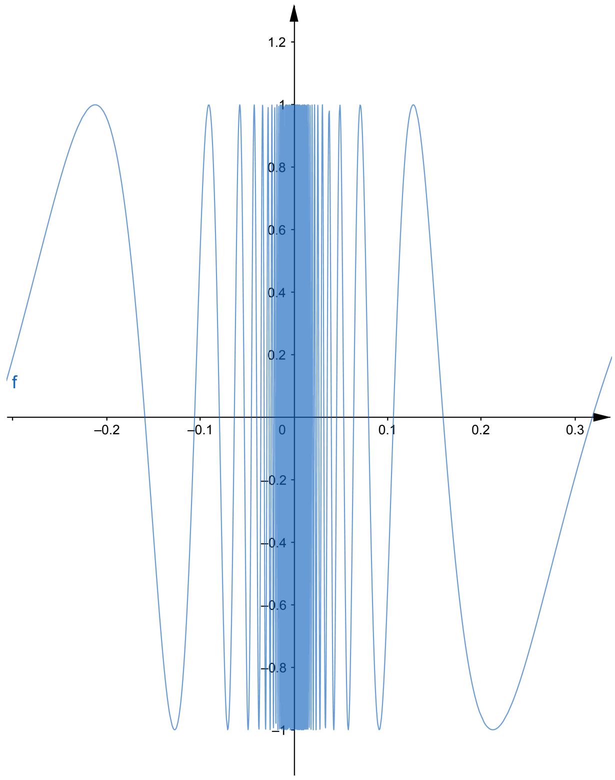


Figura 4: La gráfica de la función $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Este ejemplo muestra claramente que las definiciones de conjunto conexo y arco conexo no son equivalentes. Sin embargo, para conjuntos abiertos, obtenemos este importante resultado:

Teorema 3. *Si A es un conjunto abierto entonces A es conexo si y sólo si A es conexo por arcos.*

3.2. Conjunto simplemente conexo

En el libro de Thomas [4] se define informalmente a una región simplemente conexa como aquella en la que todo lazo puede contraerse a un punto sin salirse de ella. Sin embargo, en este mismo texto se menciona que una región simplemente conexa puede ser considerada como una región "sin agujeros", lo cual sólo es válido en el plano.

Con el fin de aclarar este concepto y formalizar la definición de conjunto simplemente conexo debemos comenzar abordando el significado de **homotopía**. Una noción intuitiva de este concepto es la siguiente:

Dadas dos curvas $\mu, \lambda : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ cuya imagen está contenida en $X \subseteq \mathbb{R}^n$ con mismos puntos iniciales y finales, una **homotopía** es una deformación continua de la curva λ a la curva μ, la cual se efectúa dentro del conjunto X.

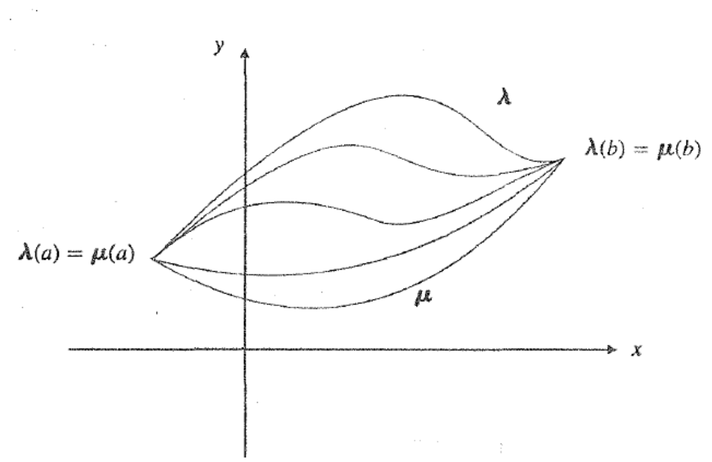


Figura 5: Homotopía entre la curva λ y la curva μ.

La definición formal puede consultarse en el libro de Pita Ruiz ([3]) o en la bibliografía de topología general.

Observación 6.

a) La relación de homotopía es una relación de equivalencia entre las curvas en X que conectan dos puntos de X.

b) El hecho de que dos curvas $\mu, \lambda : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ sean o no homotópicas, depende no solo de las curvas μ, λ sino también del conjunto X en que se encuentran sus imágenes.

Definición 17. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y sean $\lambda, \mu : [a, b] \to X$ dos curvas cerradas. Se dice que estas curvas son **libremente homotópicas** (en X), si hay una función continua $H : [a, b] \times [0, 1] \to X$ (llamada **homotopía libre**) de modo que:*

- $H(s, 0) = \lambda(s), \qquad H(s, 1) = \mu(s), \qquad \forall s \in [a, b]$
- $H(a, t) = H(b, t), \qquad \forall t \in [0, 1]$

Así, una homotopía libre entre las curvas cerradas λ y μ, es una deformación continua de λ a μ (que, según las condiciones (a) comienza en λ y termina en μ) de manera que, según la condición (b), las "etapas intermedias" de la deformación siempre son curvas cerradas. En forma esquemática esto se ve en la figura 6.

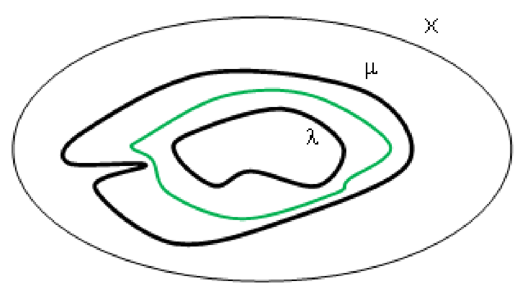


Figura 6: Las curvas λ y μ son libremente homotópicas en X

Ejemplo 11.

Las circunferencias concéntricas de radio 1 y 2 respectivamente son libremente homotópicas (ver figura 7)
En efecto, consideremos las curvas $\lambda, \mu : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$,

$$\lambda(s) = (\cos s, \sin s)$$

$$\mu(s) = (2\cos s, 2\sin s)$$

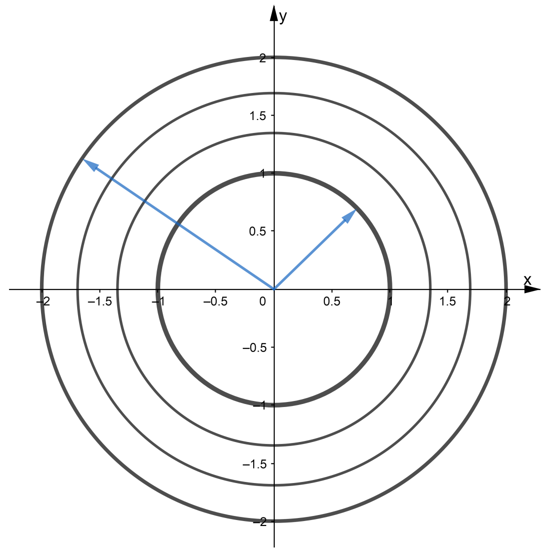


Figura 7: La homotopía libre entre las curvas λ y μ

Sea $H : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, *tal que:*

$$H(s,t) = t\mu(s) + (1-t)\lambda(s) = ((t+1)\cos s, (t+1)\sin s)\,.$$

Se tiene que H *es una homotopía libre entre* λ *y* μ *ya que es claramente continua y verifica:*

$H(s, 0) = \lambda(s), \qquad H(s, 1) = \mu(s), \qquad \forall s \in [0, 2\pi]$

$H(0, t) = H(2\pi, t), \qquad \forall t \in [0, 1]$

Observemos que los pasos intermedios de esta homotopía son circunferencias concéntricas de radio $t + 1$ *con* $t \in (0, 1)$.

Definición 18. *Se dice que el conjunto* $A \subseteq X$ *es* ***simplemente conexo****, si* A *es conexo por arcos y además todo curva cerrada* $\lambda : [a, b] \to A$ *es libremente homotópica a una curva constante* $\mu : [a, b] \to A$, $\mu(s) = p \in A$.

La curva constante a la que se refiere la definición anterior, es aquella cuya imagen consta solamente de un punto. Entonces un conjunto simplemente conexo es aquél en el cual todo curva cerrada se puede deformar de manera continua hasta "convertirla" en un solo punto, de manera que todas las curvas en el proceso de deformación queden contenidas dentro del conjunto.

Ejemplo 12. *Todo conjunto convexo es simplemente conexo.*

En efecto, si $A \subseteq X$ es convexo, cualquier curva cerrada $\lambda : [a, b] \to A$ se deforma al punto $\mathbf{p} \in A$ por medio de la homotopía libre $H : [a, b] \times [0, 1] \to A$, $H(s, t) = t\mathbf{p} + (l - t)\lambda(s)$.

En particular, entonces, las bolas en el espacio métrico X y todo el espacio X son ejemplos de conjuntos simplemente conexos.

Ejemplo 13. *La región del plano entre dos circunferencias concéntricas es un ejemplo de un conjunto NO simplemente conexo.*

Podemos afirmar que todo conjunto en $\mathbb{R}^2$ que tenga "agujeros" no es simplemente conexo. Sin embargo, en el espacio existen regiones con "agujeros" que sí son simplemente conexas.

Ejemplo 14. *El sólido limitado por dos esferas concéntricas ES simplemente conexo, como muestra la figura 8 ("durazno sin carozo")*

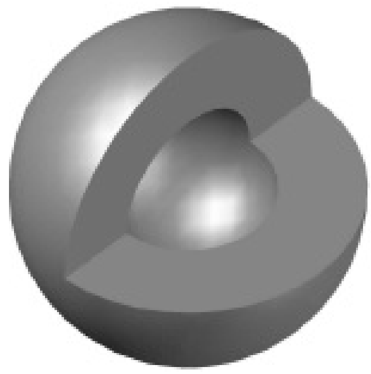


Figura 8

Ejemplo 15. *El sólido limitado por la superficie tórica de parametrización*

$$\boldsymbol{r}(u, v) = (R \cos u + r \cos v \cos u, R \sin u + r \cos v \sin u, r \sin v)$$

con $u, v \in [0, 2\pi]$, *es un conjunto NO simplemente conexo (ver figura 9).*

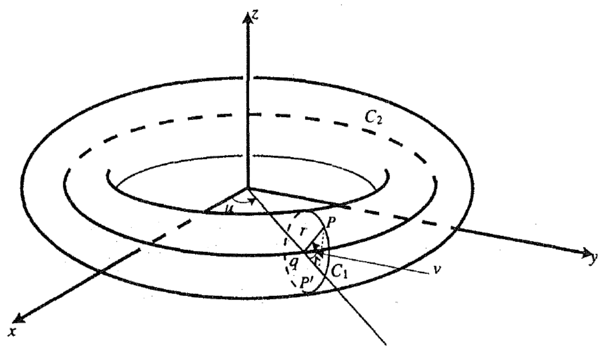


Figura 9: Toro

Podemos esquematizar las propiedades de conexión de un conjunto $A \subseteq X$ a través de las siguientes implicancias:

CONVEXO $\Longrightarrow$ SIMPLEMENTE CONEXO $\Longrightarrow$ ARCO CONEXO $\Longrightarrow$ CONEXO

Las implicancias recíprocas son falsas en general. La recíproca de la última (CONEXO $\Longrightarrow$ ARCO CONEXO) es verdadera cuando el conjunto es abierto.

Observación 7. *Algunos autores, como por ejemplo Thomas[4], definen conjunto simplemente conexo sin requerir que el mismo sea conexo por arcos, modificándose algunas de las implicancias establecidas anteriormente.*

4. Más ejemplos

Los ejemplos de las siguientes tablas se consideran con la métrica usual correspondiente.

La primera tabla está resuelta, aunque recomendamos analizar y justificar las respuestas. Dejamos como ejercicio para el lector completar las tablas 2 y 3.

TABLA 1

	Conjunto	**Abierto**	**Cerrado**	**Ninguno**
1	Conjunto vacío	$\times$	$\times$	
2	$(a,b) : a < b, a, b \in \mathbb{R}$	$\times$		
3	$[a,b] : a \leq b, a, b \in \mathbb{R}$		$\times$	
4	$(a,b] : a < b, a, b \in \mathbb{R}$			$\times$
5	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : m < d((x,y),(0,0)) < n\}$ donde $m < n$	$\times$		
6	$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x,y,z \in \mathbb{Z}\}$		$\times$	
7	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 < x \leq \pi\}$			$\times$
8	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x + 7\}$		$\times$	
9	$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq \frac{2}{5}\right\}$		$\times$	
10	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x.y < 0\}$	$\times$		

	Conjunto	**Abierto**	**Cerrado**	**Ninguno**
11	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x.y\leq 0\}$		$\times$	
12	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x.y< \pi\}$	$\times$		
13	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x.y\leq \pi\}$		$\times$	
14	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2<x^2+y^2\leq \pi\}$			$\times$
15	$\mathbb{R}^2-\{(x_0,y_0)\}$	$\times$		
16	Un plano en el espacio		$\times$	
17	Un plano en el espacio sin un punto			$\times$
18	El espacio sin un punto	$\times$		
19	El espacio sin una recta	$\times$		
20	El espacio sin un plano	$\times$		
21	La región entre dos esferas concéntricas, sin incluirlas	$\times$		
22	$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z\geq\sqrt{x^2+6y^2}\right\}$		$\times$	
23	$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=5cost, y=5sent, z=t\}$ con t$\in\mathbb{R}$		$\times$	
24	$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{25}=1\right\}$		$\times$	

TABLA 2

	Conjunto	**Interior**	**Exterior**	**Frontera**
1	$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x,y,z \in \mathbb{Z}\}$			
2	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 < x \leq \pi\}$			
3	$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq \frac{2}{5}\right\}$			
4	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x.y < 0\}$			
5	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x.y \leq 0\}$			
6	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x.y < \pi\}$			
7	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x.y \leq \pi\}$			
8	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 < x^2 + y^2 \leq \pi\}$			
9	Un plano en el espacio			
10	El espacio sin un punto			
11	El espacio sin una recta			
12	El espacio sin un plano			
13	La región entre dos esferas concéntricas, sin incluirlas			
14	$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq \sqrt{x^2 + 6y^2}\right\}$			
15	$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{25} = 1\right\}$			

Tabla 3

	Conjunto	Cvx	S-C	A-C	Cnx
1	$(a, b] : a < b,\ a, b \in \mathbb{R}$				
2	$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \in \mathbb{Z}\}$				
3	$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x + 7\}$				
4	$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq \frac{2}{5}\right\}$				
5	$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x.y < \pi\}$				
6	$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 < x^2 + y^2 \leq \pi\}$				
7	El plano sin un punto cualquiera				
8	El espacio sin un punto cualquiera				
9	El espacio sin una recta				
10	La región entre dos esferas concéntricas				
11	$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x.y < 0\}$				
12	El espacio sin el plano $y = 3$				
13	$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq \sqrt{x^2 + 6y^2}\right\}$				
14	$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 5cost, y = 5sent, z = t;\ t \in \mathbb{R}\}$				

Referencias para esta tabla:

Cvx: Convexo.

S-C: Simplemente Conexo.

A-C: Arco Conexo.

Cnx: Conexo.

Referencias

[1] Ayala R., Domínguez E., Quintero A. , Elementos de la Topología General, Addison-Wesley Iberoamericana, 1997, Capítulo 2.

[2] Bussotti, P., *On the Genesis of the Lagrange Multipliers*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol 117, Nro. 3, pgs. 453-459, 2003.

[3] Pita Ruiz, C., Calculo Vectorial – Prentice Hall – 1995.

[4] Thomas, George B. Jr., Cálculo Varias Variables, Undécima Edición, Pearson Educación, 2006.