

MINISTERIO DE EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, FÍSICO-
QUÍMICAS Y NATURALES APLICADAS A LA INDUSTRIA

MATHEMATICÆ NOTÆ

BOLETIN

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA

DIRECTOR

BEPPPO LEVI

AÑO OCTAVO - FASC. 3-4



ROSARIO
REPUBLICA ARGENTINA
1948

Las "Mathematicae Notae" publican artículos, cuestiones, ejercicios, soluciones y correspondencia. La resolución de las cuestiones propuestas será publicada en números sucesivos de la revista al cabo de un tiempo razonable, a juicio del Director del Instituto, para obtener contestaciones de los lectores; de las cuestiones publicadas bajo el título de ejercicios la dirección se reserva la decisión, en cada caso, de publicar o no las respuestas.

A fin de año se adjudicarán dos premios:

1º Por concurso entre alumnos de la Facultad que contesten satisfactoriamente a cuestiones, problemas o ejercicios.

2º Por concurso entre todos los demás lectores del país o del extranjero que contesten en modo acertado a los mismos.

Los premios consistirán en tratados de extensión cultural o libros de especialización.

Las soluciones deben ser entregadas al Instituto en redacción clara y en hojas distintas para cada cuestión, problema o ejercicio. En cada hoja deberá señalarse el nombre del autor; los alumnos de la Facultad indicarán el año de estudios que cursan en la misma, y, los de primer año, además, la escuela media de la cual provienen. Estos elementos serán tenidos en cuenta para el juicio, conjuntamente con el valor intrínseco de las soluciones y la forma expositiva de las mismas, dándose por la Dirección la máxima importancia a la disposición por la cual se compararán sólo alumnos de igual preparación.

En la sección de Bibliografía se publicarán los análisis críticos de libros recientes que sean enviados al Instituto de Matemática.

I N D I C E

	Pág.
Consideraciones sobre el jacobiano (BEPPO LEVI)	97
Un invariante afin para las curvas convexas del plano (L. A. SANTALÓ) ..	103
Sobre la geometría del triángulo (Problema Nº 144) (PEDRO P. CALLEJA)	112
Generalización del mismo problema (Problema Nº 144) (ENRIQUE FERRARI)	130
Sobre algunas propiedades de las curvas trazadas sobre una superficie reglada (ADOLFO DAGHETTO)	134
Ejercicios y Problemas (Soluciones)	141
Ejercicios y Problemas (Propuestos)	160
Índice de los Ejercicios, Problemas y Cuestiones	162
Bibliografía	168

(I) CONSIDERACIONES SOBRE EL JACOBIANO

POR

BEPPPO LEVI

Fué Jacobi el que primero en 1841⁽¹⁾ puso de relieve que el determinante funcional que en su honor llamamos corrientemente jacobiano ocupa por muchos respectos en la teoría de los sistemas de n funciones de n variables el lugar análogo al de la derivada en la teoría de las funciones de una variable, consideradas aisladamente. Jacobi se refiere esencialmente a las analogías operatorias y sus razonamientos no difieren sustancialmente de los que están actualmente en todos los tratados de análisis infinitesimal. Diez años más tarde, en 1851, Bertrand⁽²⁾ quiso ampliar la analogía con mostrar que aún podían aproximarse las demostraciones de esas propiedades, razonando sobre sistemas de incrementos infinitésimos correspondientes de las variables y de las funciones, así como análogos incrementos se consideran en el caso de una sola variable.

Las consideraciones⁽³⁾ que siguen se inspiran al mismo orden de ideas, pero orientadas hacia otro particular que, más que a las reglas formales de los cálculos, mira a cuestiones de fundamentos; debe recordarse en efecto que ciertas notables propiedades que las funciones derivadas tienen en común con las funciones continuas, se demuestran para las derivadas por conside-

(¹) *De determinantibus functionalibus* - Crelle's Journal 22 - Werke III. V. también: MUIR - *The Theory of determinants in the historical order of Development*. - Vol. I, p. 358 y sig. (1906).

(²) *Mémoire sur le déterminant d'un système de fonctions*. - Journal de Mathématiques (Liouville). T. 16 - p. 212.

(³) Estas consideraciones han tenido su primer incentivo en la lectura de la Nota del señor M. Cotlar que hemos publicado a pág. 79 de este mismo volumen.

raciones topológicas «en grande» y por lo tanto prescindiendo de hipótesis de la continuidad local que serían necesarias si se despreciara su definición como límites.

1. — Sea dado un sistema de funciones reales de n variables reales

$$f_i(x_1 x_2 \dots x_n) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

definidas, continuas y acotadas en un dominio compacto (cerrado) D ; poniendo

$$y_i = f_i(x_1 x_2 \dots x_n) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

se pone una correspondencia entre el dominio D y otro dominio compacto D' de puntos de coordenadas $(y_1 y_2 \dots y_n)$; correspondencia unívoca y continua pasando de D a D' ; no necesariamente unívoca en el sentido inverso, de D' a D .

Supongamos que las funciones (1) sean diferenciables en el sentido de Stolz - Fréchet en todos los puntos que vamos a considerar, de manera que a la sustitución (2) entre las variables x_j e y_i corresponde la sustitución lineal entre los incrementos ⁽⁴⁾

$$dy_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} dx_n \quad (3)$$

y el determinante de esta es el jacobiano del sistema (1)

$$J(x_1 x_2 \dots x_n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \frac{d(f_1 f_2 \dots f_n)}{d(x_1 x_2 \dots x_n)}. \quad (4)$$

⁽⁴⁾ En relación con el programa enunciado en las palabras de introducción, hay que recordar que esta hipótesis es un poco más restrictiva que la simple existencia de las derivadas parciales primeras, siendo para su realización, condición suficiente, pero no necesaria, la continuidad de esas derivadas parciales.

Se sigue que, si en un punto $(x_1 x_2 \dots x_n)$ es $J \neq 0$, es posible elegir el desplazamiento $(dx_1 dx_2 \dots dx_n)$ de manera que el correspondiente desplazamiento $(dy_1 dy_2 \dots dy_n)$ tenga dirección y sentido arbitrarios; si, por contrario $J(x_1 x_2 \dots x_n) = 0$ los valores de las dy_i resultan ligados por al menos una relación lineal para valores arbitrarios de las dx_j (haciendo excepción solamente aquellos desplazamientos $(dx_1 dx_2 \dots dx_n)$ para los cuales los segundos miembros de las (3) resulten nulos).

2. — Consideremos ahora las fronteras de los dominios D y D' que llamaremos respectivamente F y F' . Distinguimos los puntos de F' en dos clases; serán de la *primera clase* los puntos de F' que corresponden únicamente a puntos de F ; de la *segunda clase* los que corresponden a algún punto interno a D (cada una de las dos clases puede eventualmente ser vacía). Los puntos de la primera clase tienen para nuestra investigación actual solamente un interés colateral; en general en los correspondientes puntos (x_j) el jacobiano no será nulo, por cuanto las direcciones (dy_i) hacia el exterior de D' quedan excluidas sin más, por estar los correspondientes desplazamientos (dx_j) dirigidos hacia el exterior de D . Si al contrario se considera un punto P' de la segunda clase y se llama P al punto interno (o uno cualquiera de los puntos internos) a D que le corresponde, el valor de J en P deberá en general ser cero para que queden excluidos conforme a la última observación del n. 1, los desplazamientos (dy_i) que desde P' serían dirigidos hacia el exterior de D' . Podrá sin embargo eventualmente ser $J \neq 0$ si la frontera F' presenta en P' una singularidad de tipo cuspidal, para la cual las direcciones de P' hacia el exterior de D' constituyen un conjunto no denso en ningún cono de vértice P' ; una singularidad esta que por la generalidad de nuestras hipótesis, no podemos excluir.

El conjunto de los puntos de la primera clase es cerrado, porque un punto límite de una sucesión de estos puntos debe corresponder a un punto límite de la sucesión de los puntos correspondientes en D ; y, por estar, por hipótesis, todos estos puntos sobre F , también este punto límite pertenecerá a F . Se sigue que si el punto P' pertenece a la segunda clase, existe un número ρ tal que todos los puntos de F' internos ó sobre el contorno de una esfera de n dimensiones de centro P' y

de radio $\leq \rho$, en el espacio de las (y_i) , son puntos de la segunda clase.

3. — Conservando ahora a P, P', ρ los significados indicados, sobre la parte de F' interna a la esfera de centro P' y radio ρ separemos (para tener en cuenta la posibilidad de correspondencias plurívocas en el sentido de D' a D) la parte que corresponde a puntos de D internos a una esfera de centro P y radio ε , siendo $\varepsilon > 0$ elegido arbitrariamente, convenientemente pequeño. Llamemos a esta parte F'_ε . Sobre F'_ε imaginamos fijado un punto Q' cuya distancia de P' sea $\varepsilon' < \rho:2$ y, con centro Q' y radio $< \frac{1}{2} \varepsilon'$, descrita una esfera. En esta existe una parte constituida por puntos externos a D' ; sea V un punto tal. Entre los puntos de F'_ε habrá alguno en mínima distancia de V , y pues la distancia de Q' a V es $< \frac{1}{2} \varepsilon'$, también esta otra distancia será $< \frac{1}{2} \varepsilon'$; sea R' ese punto; la distancia de R' a Q' es $< \varepsilon'$ y por lo tanto R' es interno a la esfera de centro P' y no puede coincidir con P' ; pero su distancia de P' será $< 2\varepsilon'$.

Llamemos R al punto correspondiente a R' , interno a la esfera de centro P y radio ε ; en el punto R será necesariamente $J=0$, a consecuencia de lo dicho en el n. 1, por cuanto en este punto a un desplazamiento genérico (dx_j) no debe nunca corresponder uno (dy_i) dirigido hacia el interior de la esfera de centro V pasante por R ⁽⁵⁾.

Teniendo ahora presente que los números ε y ε' se pueden elegir arbitrariamente pequeños, inferimos que *cada punto* P

⁽⁵⁾ Analíticamente se infiere la anulación de J en el punto R observando que, si se indican con $(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n)$ las coordenadas de V , en el punto R deben anularse las derivadas parciales del cuadrado de la distancia de V a un punto de D' , es decir

$$\sum_i (\xi_i - f_i(x_1 x_2 \dots x_n))^2 = \text{mín.};$$

$$\sum_i (\xi_i - f_i(x_1 x_2 \dots x_n)) \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n);$$

y, por no pertenecer V a D' ni a su frontera, las diferencias $\xi_i - f_i$ no pueden ser todas nulas.

interno a D al cual corresponda un punto P' de F' de la segunda clase es límite de puntos con la misma propiedad, en los cuales $J=0$. Luego también: si existen puntos de D en los cuales sea $J=0$ siendo los puntos correspondientes de F' de la segunda clase, estos puntos constituyen un conjunto denso en sí.

Notemos todavía que el jacobiano $J(x_1 x_2 \dots x_n)$ es función puntualmente discontinua, por ser tal cada una de las derivadas con las que se compone racionalmente⁽⁶⁾; los puntos donde $J=0$ (o, en general, $J=\text{const.}$) deben por lo tanto ser de continuidad con respecto al conjunto de los puntos límites de los mismos (conjunto derivado)⁽⁷⁾; ellos constituyen luego, respecto de este conjunto, uno de segunda categoría (según Baire) y por lo tanto no numerable.

4.— Hemos notado (n. 1, en nota) que las hipótesis actuales, aun siendo un poco más restrictivas que la simple existencia de las derivadas parciales, no incluyen la continuidad de estas. Si esta continuidad se supone, y por consecuencia la continuidad del jacobiano, todo punto de la segunda clase pudiendo ser aproximado tanto como se quiere por otros puntos de la segunda clase en los cuales $J=0$, corresponderá siempre a este mismo valor de J . En este caso, luego, los puntos a los cuales corresponde $J=0$ y cuyos puntos transformados son puntos frontera de la segunda clase forman un conjunto perfecto.

Si las funciones f_i admitieran las derivadas parciales segundas y por consecuencia J fuera derivable y si en un punto donde $J=0$ una de las derivadas parciales fuera $\neq 0$, entonces, por un teorema conocido, dicho punto pertenecería a un continuo de $n-1$ dimensiones sobre el cual es siempre $J=0$.

5.— Existen ciertamente puntos de F' de la segunda clase si sobre la frontera F de D una de las funciones f_i es cons-

(6) Sin pasar por esta consideración, el jacobiano, apenas sea asegurada su existencia, puede definirse como límite de una sucesión de funciones continuas,

$$J = \lim_{h \rightarrow 0} \det \left\{ \frac{f_i(x_1 \dots x_j + h \dots x_n) - f_i(x_1 \dots x_j \dots x_n)}{h} \right\}$$

de donde sigue la afirmación del texto.

(7) En efecto el valor de la función en los puntos de continuidad es necesariamente esta misma constante.

tante, sin que sea constante en todo D , siendo tal evidentemente cualquier punto donde dicha función alcance su máximo o su mínimo valor ⁽⁸⁾ ⁽⁹⁾. Esta observación puede aplicarse para obtener nuevas proposiciones referentes a un grupo de funciones en número $< n$, al completar a n este número con elegir adecuadamente las nuevas funciones. Así, por ej., *siendo dada una función $f(x, y)$ derivable en todos los puntos de un entorno finito del origen, con derivadas no generalmente nulas, existe en este entorno un conjunto no numerable, denso en sí, de puntos en los cuales*

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} = x : y.$$

Basta observar que

$$x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x}$$

es el jacobiano de $f(x, y)$ y de $\frac{1}{2}(x^2 + y^2 - r^2)$ donde r es el radio de un círculo de centro en el origen, enteramente contenido en el entorno considerado.

ROSARIO, INSTITUTO DE MATEMÁTICA.

⁽⁸⁾ En el caso tratado por el Sr. M. Cotlar en su nota anteriormente citada se trataba con dos funciones, ambas constantes sobre el contorno.

⁽⁹⁾ Si la función considerada fuera constante en todo el dominio, serían nulas idénticamente sus derivadas parciales y el jacobiano se anularía en modo banal en todos los puntos.

UN INVARIANTE AFIN PARA LAS CURVAS CONVEXAS DEL PLANO

POR

L. A. SANTALÓ

1. *Introducción.* Una recta G del plano puede determinarse por su distancia h a un punto fijo O , más el ángulo φ que la normal a la recta forma con una dirección fija del plano (la del eje Ox por ejemplo). En la teoría de probabilidades geométricas, para medir conjuntos de rectas se toma la integral, extendida al conjunto, de la forma diferencial $dh d\varphi$. Esta elección está justificada por ser esta medida la única, salvo un factor constante, que es invariante con respecto al grupo de los movimientos del plano⁽¹⁾. A la expresión $dh d\varphi$ se le llama *densidad* para conjuntos de rectas. Si con esta densidad se calcula la *medida* del conjunto de rectas que cortan a una curva convexa cerrada, se obtiene la *longitud*, es decir, el invariante métrico más simple de la curva.

Si en lugar del grupo de los movimientos, consideramos otro grupo de transformaciones, la densidad anterior para conjuntos de rectas ya no es invariante; para cada grupo se presenta el problema que consiste en hallar una densidad de la forma $f(h, \varphi) dh d\varphi$ que sea invariante respecto las operaciones del grupo, densidad que a veces existirá y otras no.

Por ejemplo, respecto al grupo de las afinidades unimodulares del plano no existe una densidad invariante para conjuntos de rectas⁽²⁾; por este camino no se puede, por tanto, generalizar el resultado métrico mencionado para obtener un invariante

⁽¹⁾ R. DELTHEIL, *Probabilités géométriques*, Paris, 1926.

⁽²⁾ S. S. CHERN, *Sur les invariants intégraux en géométrie*, The Science Reports of National Tsiung Hua University, Serie A. Vol. IV, 1940.

afin de las curvas convexas correlativo a la longitud ordinaria. En cambio, si se considera el grupo de las centro-afinidades unimodulares del plano, es decir, de las afinidades de módulo uno que dejan un punto fijo, entonces existe una densidad para conjuntos de rectas, como veremos en n. 2. Con esta densidad, la medida de las rectas exteriores a una curva convexa que contiene al punto fijo, da un invariante centro-afin de la misma. De esta invariante se puede pasar a un invariante por afinidades unimodulares generales como veremos en los n. 4 y 5.

En el n. 6 se obtienen las desigualdades (6.8) y (6.9) que relacionan este invariante con el área ordinaria limitada por la curva convexa y la longitud afin de la misma.

2. *Densidad de rectas respecto el grupo centro-afin unimodular.* El grupo centro-afin unimodular es el representado por las ecuaciones

$$x' = ax + by, \quad y' = px + qy \quad (2.1)$$

con la condición

$$aq - bp = 1. \quad (2.2)$$

Una recta G de ecuación

$$ux + vy + 1 = 0$$

se transformará por (2.1) en la recta G' de ecuación (poniendo el lugar de x', y' las coordenadas generales x, y)

$$u(qx - by) + v(ax - px) + 1 = 0$$

o sea

$$(qu - pv)x + (av - bu)y + 1 = 0.$$

Es decir, los coeficientes u, v se transforman según las fórmulas

$$u' = qu - pv, \quad v' = av - bu.$$

Por tanto, teniendo en cuenta (2.2),

$$du' dv' = \left| \frac{\partial(u', v')}{\partial(u, v)} \right| du dv = du dv.$$

Esto nos dice que la expresión diferencial $du dv$ es invariante por el grupo (2.1). Como este grupo es transitivo respecto las rectas del plano (que no pasan por O), no puede existir otra expresión de la forma $f(u, v) du dv$ que goce de la misma propiedad, a no ser $f(u, v) = \text{constante}$.

Por tanto, la densidad de rectas respecto el grupo centro-afin unimodular es

$$dG = du dv. \quad (2.3)$$

En lugar de u, v conviene introducir las coordenadas de recta h, φ mencionadas en la introducción. Es

$$u = -\frac{\cos \varphi}{h}, \quad v = -\frac{\sin \varphi}{h}$$

de donde

$$du dv = \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(h, \varphi)} \right| dh d\varphi = \frac{dh d\varphi}{h^3}.$$

La densidad de rectas puede por tanto escribirse en la forma

$$dG = \frac{dh d\varphi}{h^3}. \quad (2.4)$$

3. *Medida de las rectas exteriores a una figura convexa que contiene el origen.* Sea K una figura convexa que contiene el punto O en su interior. Utilizando la densidad (2.4) vamos a hallar la medida de las rectas exteriores a K . Para cada dirección $\varphi (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$, sea $h = h(\varphi)$ la distancia de O a la recta de apoyo de K normal a la dirección φ ($h(\varphi)$ es la llamada *función de apoyo* de K con respecto el punto interior O). Integrando (2.4) se tiene

Por tanto, teniendo en cuenta (2.2),

$$du' dv' = \left| \frac{\partial(u', v')}{\partial(u, v)} \right| du dv = du dv.$$

Esto nos dice que la expresión diferencial $du dv$ es invariante por el grupo (2.1). Como este grupo es transitivo respecto las rectas del plano (que no pasan por O), no puede existir otra expresión de la forma $f(u, v) du dv$ que goce de la misma propiedad, a no ser $f(u, v) = \text{constante}$.

Por tanto, la densidad de rectas respecto el grupo centro-afin unimodular es

$$dG = du dv. \quad (2.3)$$

En lugar de u, v conviene introducir las coordenadas de recta h, φ mencionadas en la introducción. Es

$$u = -\frac{\cos \varphi}{h}, \quad v = -\frac{\sin \varphi}{h}$$

de donde

$$du dv = \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(h, \varphi)} \right| dh d\varphi = \frac{dh d\varphi}{h^3}.$$

La densidad de rectas puede por tanto escribirse en la forma

$$dG = \frac{dh d\varphi}{h^3}. \quad (2.4)$$

3. *Medida de las rectas exteriores a una figura convexa que contiene el origen.* Sea K una figura convexa que contiene el punto O en su interior. Utilizando la densidad (2.4) vamos a hallar la medida de las rectas exteriores a K . Para cada dirección $\varphi (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$, sea $h = h(\varphi)$ la distancia de O a la recta de apoyo de K normal a la dirección φ ($h(\varphi)$ es la llamada *función de apoyo* de K con respecto el punto interior O). Integrando (2.4) se tiene

$$\int_{G.K=0} dG = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_h^{\infty} \frac{dh}{h^3} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{h^2}. \quad (3.1)$$

Este resultado se puede enunciar:

Dada una figura convexa K y un punto interior $O(\xi, \eta)$, la medida de las rectas exteriores a K , invariante con respecto a las afinidades unimodulares que dejan fijo el punto O , esta dada por la integral

$$I(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{h^2} \quad (3.2)$$

siendo $h=h(\varphi)$ la función de apoyo de K con respecto a O .

Esto nos dice que $I(\xi, \eta)$ tendrá el mismo valor para todas las figuras transformadas de K por una afinidad unimodular que deje fijo $O(\xi, \eta)$. Por ejemplo, si K es una elipse y O siempre el centro, la integral (3.2) tendrá el mismo valor para todas las elipses de la misma área, en particular para el círculo de igual área. Si los semiejes de la elipse son a, b resulta por tanto $I = \pi/ab$.

4. *Estudio de la función $I(\xi, \eta)$.* El valor de $I(\xi, \eta)$, dado por (3.2) depende evidentemente del punto $O(\xi, \eta)$. Cuando O está sobre el contorno de K vale infinito, mientras que para todo punto O interior tiene un valor finito y positivo. Vamos a buscar los puntos interiores $O(\xi, \eta)$ para los cuales $I(\xi, \eta)$ toma un valor estacionario (es decir, se anulan sus derivadas parciales primeras).

Sea O_0 un punto fijo interior a K que tomamos como origen de coordenadas; sea $H=H(\varphi)$ la función de apoyo de K respecto O_0 . La función de apoyo $h=h(\varphi)$ respecto $O(\xi, \eta)$ será

$$h = H - \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi \quad (4.1)$$

y por tanto

$$I(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(H - \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi)^2}.$$

Para que $I(\xi, \eta)$ tenga un valor estacionario debe ser

$$\frac{\partial I}{\partial \xi} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(H - \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi)^3} = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial I}{\partial \eta} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi d\varphi}{(H - \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi)^3} = 0,$$

o sea, deben cumplirse las condiciones

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{h^3} = 0, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi d\varphi}{h^3} = 0. \quad (4.3)$$

Observemos que es

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \xi^2} = 3 \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{(H - \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi)^4} = 3 \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{h^4} \quad (4.4)$$

y análogamente

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \xi \partial \eta} = 3 \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi d\varphi}{h^4}, \quad \frac{\partial^2 I}{\partial \eta^2} = 3 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{h^4} \quad (4.5)$$

y por tanto, según la desigualdad de Schwarz (en la cual el signo $=$ no puede valer en este caso pues las funciones $\sin \varphi, \cos \varphi$ no difieren en un factor constante), es

$$\left(\frac{\partial^2 I}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 - \frac{\partial^2 I}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 I}{\partial \eta^2} < 0. \quad (4.6)$$

Esto nos dice que *todos los puntos estacionarios de la función $I(\xi, \eta)$ son mínimos.*

La superficie $z = I(\xi, \eta)$ definida en el interior de K tiene una sola hoja (puesto que $I(\xi, \eta)$ es uniforme) que se

extiende al infinito únicamente sobre el contorno de K . Por tanto si ella tuviera más de un mínimo relativo, debería tener también otros puntos estacionarios no mínimos, contra lo que acabamos de demostrar ⁽³⁾.

En consecuencia:

Existe un solo punto interior a K para el cual $I(\xi, \eta)$ toma un valor mínimo (que será el mínimo absoluto), el cual está caracterizado por cumplirse en él las condiciones (4.3) ⁽⁴⁾.

Por ejemplo, si K tiene centro de simetría las condiciones (4.3) se cumplen evidentemente para él y por tanto: *para las figuras convexas con centro de simetría, el mínimo de $I(\xi, \eta)$ corresponde al centro de simetría.*

5. *Un invariante afin de las figuras convexas planas.* Si en vez de considerar afinidades que dejen fijo el punto O consideramos afinidades unimodulares generales ⁽⁵⁾, el valor de $I(\xi, \eta)$ correspondiente a K será igual al valor $I(\xi', \eta')$ correspondiente a la figura transformada K' , si ξ', η' es el punto transformado de ξ, η . Por tanto el mínimo de $I(\xi, \eta)$ para K , coincidirá con el mínimo de $I(\xi', \eta')$ para K' . Es decir:

El mínimo de $I(\xi, \eta)$, que representaremos por I_m , es un invariante de K con respecto al grupo de las afinidades unimodulares.

Para el caso de las figuras convexas con centro de simetría, I_m se calcula inmediatamente por (3.2) tomando co-

⁽³⁾ La superficie $z = I(\xi, \eta)$, supuesta cerrada en el infinito tiene la conexión de la esfera. Por tanto entre el número de sus mínimos relativos m , máximos relativos M y puntos de ensilladura (*sattelpunkte*) s , existe la relación

$$-m + s - M = -2.$$

Como, según lo demostrado, debe ser $s = 0$ y $M = 1$ (en el infinito) resulta $m = 1$ como afirmamos. Ver, por ej. M. MORSE, *Relations between the critical points of a real function of n independent variables*, Transactions on the American Mathematical Society, vol. 27, 1925.

⁽⁴⁾ Sería interesante ver si este punto único ξ, η para el cual $I(\xi, \eta)$ es mínimo coincide o no con el *centro de gravedad* de K supuesta esta figura cubierta con masa homogénea. No hemos podido delucidar este asunto.

⁽⁵⁾ Es decir, definidas por las ecuaciones

$$x' = ax + by + c, \quad y' = px + qy + r$$

con $aq - bp = 1$.

mo origen $O(\xi, \eta)$ para definir la función de apoyo $h=h(\varphi)$ el centro de simetría. Se obtiene así, por ejemplo, que para un polígono regular de $2n$ lados el invariante I_m vale

$$I_m = \frac{2n}{R^2} \tan \frac{\pi}{2n} \quad (5.1)$$

siendo R el radio del círculo circunscripto. Si se quiere introducir el área F del polígono (que es también invariante por afinidades unimodulares) resulta

$$I_m = \frac{4n^2}{F} \sin^2 \frac{\pi}{2n}. \quad (5.2)$$

6. *Relaciones entre I_m y otros invariantes afines.* Los invariantes afines más simples de las figuras convexas son el área ordinaria F ⁽⁶⁾ y la longitud afin L_a de su contorno⁽⁷⁾. Queremos ver que relaciones hay entre los invariantes I_m, F, L_a . Para ello es fundamental observar que el valor de I_m está dado por (3.2) cuando se satisfacen las relaciones (4.3). Esto permite utilizar el mecanismo empleado por Blaschke en cuestiones análogas⁽⁸⁾.

Consideremos la curva definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = \int_0^\varphi \frac{\cos \varphi}{h^3} d\varphi, \quad y = \int_0^\varphi \frac{\sin \varphi}{h^3} d\varphi \quad (6.1)$$

la cual será una curva cerrada, según (4.3). La curvatura κ de esta curva vale

$$\kappa = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = h^3 \quad (6.2)$$

(6) Siempre que se habla de invariante afin, se entiende respecto a afinidades unimodulares, o sea, afinidades que conservan las áreas.

(7) Ver. W. BLASCHKE, *Differentialgeometrie* II, Cap. 1, Berlin, 1923.

(8) W. BLASCHKE, *Ueber affine Geometrie VII: Neue Extremeigenschaften von Ellipse und Ellipsoid*, Leipziger Berichte, 69. 1917.

y por tanto es en todo punto $\kappa > 0$; por consiguiente la curva (6.1) es convexa. La representaremos, indistintamente a ella y al recinto convexo que limita, por K^0 . Su elemento de arco vale

$$ds^0 = (x'^2 + y'^2)^{1/2} d\varphi = \frac{1}{h^3} d\varphi. \quad (6.3)$$

La longitud afin L_a^0 de K^0 es, por definición ⁽⁹⁾,

$$L_a^0 = \int_0^{2\pi} \sqrt{\kappa} ds^0 = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{h^2} = 2 I_m. \quad (6.4)$$

Por otra parte, el área mixta de Minkowski entre K^0 y K es también

$$F(K^0, K) = \frac{1}{2} \int h ds^0 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{h^2} = I_m. \quad (6.5)$$

Entre el área F^0 y la longitud afin L_a^0 de K^0 vale la siguiente desigualdad de Blaschke ⁽¹⁰⁾

$$8 \pi^2 F^0 - (L_a^0)^3 \geq 0 \quad (6.6)$$

y entre el área mixta $F(K^0, K)$ y las áreas F^0, F de dos figuras convexas vale la desigualdad de Minkowski

$$(F(K^0, K))^2 - F F^0 \geq 0. \quad (6.7)$$

Teniendo en cuenta (6.4) y (6.5), eliminando F^0 entre (6.6) y (6.7) se obtiene

$$I_m F \leq \pi^2 \quad (6.8)$$

y aplicando la desigualdad general (6.6) a K y teniendo en cuenta (6.8) resulta

⁽⁹⁾ Ver. BLASCHKE, *Differentialgeometrie II*, pág. 32.

⁽¹⁰⁾ W. BLASCHKE, *Differentialgeometrie II*, pág. 61.

$$I_m L_a^3 \leq 8 \pi^4. \quad (6.9)$$

Es inmediato comprobar que para el caso de ser K un círculo (y por tanto para cualquier elipse) en (6.8) y (6.9) valen los signos de igualdad. Además se sabe que en (6.6) el signo de igualdad vale únicamente para las elipses. Por tanto se puede enunciar:

Entre el invariante I_m , el área ordinaria F y la longitud afin L_a de una figura convexa K tienen lugar las desigualdades (6.8) y (6.9), en las cuales el signo = vale únicamente para el caso de ser K una elipse.

BUENOS AIRES, INSTITUTO MATEMÁTICO DE LA UNIVERSIDAD.

LA PLATA, FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS.

SOBRE LA GEOMETRIA DEL TRIANGULO

(PROBLEMA N° 144)

POR

PEDRO PI CALLEJA

El problema propuesto, por indicación de V. Uspensky es el siguiente:

Dado un triángulo ABC , trazar por uno de sus vértices C una transversal tal que los dos triángulos parciales tengan circunferencias de radios iguales.

1. - Resolución algebraica elemental.

Si la transversal CT de longitud t determina sobre el lado c segmentos c_1 y c_2 (fig. 1), los incentros I_1 e I_2 de los triángulos parciales, vienen dados en el sistema de origen C por los vectores de posición

$$\begin{aligned}\overline{CI_1} &= (t \cdot \overline{CA} + b \cdot \overline{CT}) / (b + t + c_1), \\ \overline{CI_2} &= (t \cdot \overline{CB} + a \cdot \overline{CT}) / (a + t + c_2),\end{aligned}\tag{1}$$

en que $b = |\overline{CA}|$ y $a = |\overline{CB}|$. Es oportuno observar que los vectores de posición de los excentros E_1 y E_2 (correspondientes a las circunferencias ex-inscritas dentro de los ángulos C) son

$$\begin{aligned}\overline{CE_1} &= (t \cdot \overline{CA} + b \cdot \overline{CT}) / (b + t - c_1), \\ \overline{CE_2} &= (t \cdot \overline{CB} + a \cdot \overline{CT}) / (a + t - c_2)\end{aligned}\tag{2}$$

De modo análogo, los vectores de posición de los excentros I'_1 o I'_2 correspondientes a las circunferencias ex-inscritas de cada

uno de los triángulos parciales dentro respectivamente del ángulo A o del B (es decir, en la región *exterior* de cada triángulo limitada por la transversal t) vienen dados por

$$\begin{aligned}\overline{CI_1'} &= (b \cdot \overline{CT} - t \cdot \overline{CA}) / (b + c_1 - t), \\ \overline{CI_2'} &= (a \cdot \overline{CT} - t \cdot \overline{CB}) / (a + c_2 - t).\end{aligned}\quad (3)$$

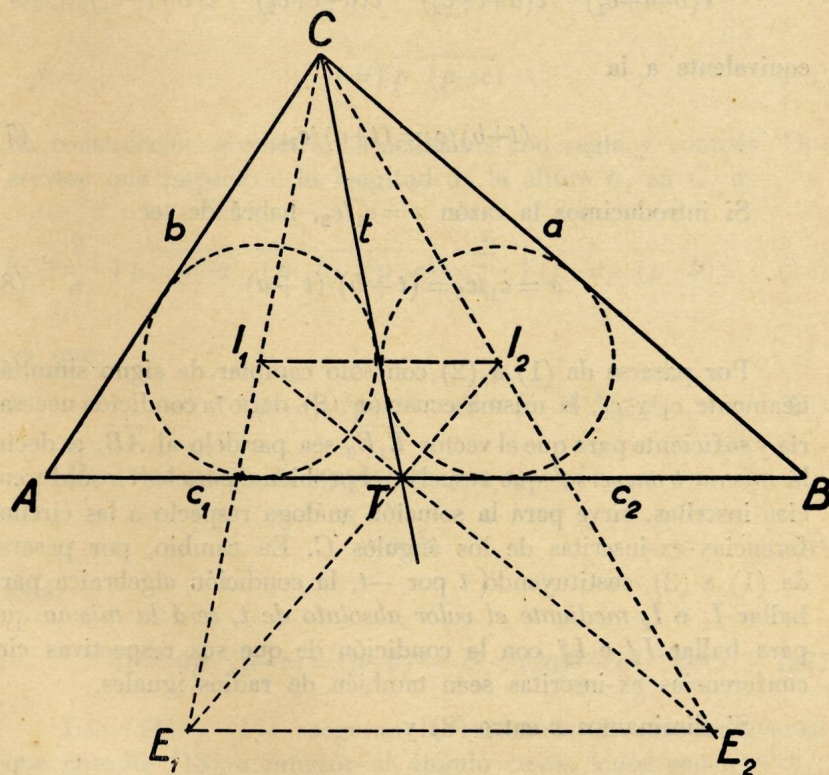


Fig. 1

Sustituyendo

$$\overline{CT} = (c_2 \cdot \overline{CA} + c_1 \cdot \overline{CB}) / c \quad (4)$$

en (1) resulta

$$\overline{CI_1} = \frac{(tc+bc_2)\overline{CA}+bc_1 \cdot \overline{CB}}{c(b+t+c_1)}, \quad \overline{CI_2} = \frac{ac_2 \cdot \overline{CA}+(tc+ac_1)\overline{CB}}{c(a+t+c_2)}. \quad (5)$$

Para que el vector $\overline{I_1 I_2}$ sea paralelo al $\overline{AB}$ es necesario y suficiente que los radios de las circunferencias inscritas sean iguales y también que en (5) se verifique

$$\frac{tc+bc_2}{c(b+t+c_1)} - \frac{ac_2}{c(a+t+c_2)} = \frac{tc+ac_1}{c(a+t+c_2)} - \frac{bc_1}{c(b+t+c_1)} \quad (6)$$

equivalente a la

$$(t+b)/c_1 = (t+a)/c_2. \quad (7)$$

Si introducimos la razón $x=c_1/c_2$, habrá de ser

$$x = c_1/c_2 = (t+b)/(t+a). \quad (8)$$

Por pasarse de (1) a (2) con sólo cambiar de signo simultáneamente c_1 y c_2 , la misma ecuación (8) dará la condición necesaria y suficiente para que el vector $\overline{E_1 E_2}$ sea paralelo al $\overline{AB}$, es decir, la *misma transversal* que resuelve el problema para las circunferencias inscritas, sirve para la solución análoga respecto a las circunferencias ex-inscritas de los ángulos C . En cambio, por pasarse de (1) a (3), sustituyendo t por $-t$, la condición algebraica para hallar I_1 e I_2 mediante el valor absoluto de t , será la misma que para hallar I_1' e I_2' con la condición de que sus respectivas circunferencias ex-inscritas sean también de radios iguales.

Si eliminamos x entre (8) y

$$t^2 = a^2 + \frac{c^2}{(1+x)^2} - \frac{a^2+c^2-b^2}{1+x}, \quad (9)$$

deducida de la fórmula del coseno, se llega a

$$(t^2-a^2) \cdot (2t+a+b)^2 = c^2 \cdot (t+a)^2 - (t+a) \cdot (2t+a+b) \cdot (a^2+c^2-b^2), \quad (10)$$

la que tiene los factores inmediatos $(t+a) \cdot (t+b)$. Suprimiéndolos, obtendremos

$$4t^2 = (a+b)^2 - c^2, \quad (11)$$

e introduciendo

$$2p = a + b + c, \quad (12)$$

resulta

$$t = \sqrt{p \cdot (p-c)} \quad (13)$$

de construcción geométrica sencillísima con regla y compás. Obsérvese que respecto a la longitud de la altura h_3 en C , es

$$h_3 = \frac{2}{c} \cdot \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} = \frac{2t}{c} \cdot \sqrt{(p-a) \cdot (p-b)} \leq t \quad (14)$$

ya que

$$4(p-a) \cdot (p-b) = c^2 - (a-b)^2 \leq c^2. \quad (15)$$

Por otra parte, si suponemos por ejemplo

$$a > b \quad (16)$$

será

$$4t^2 = 4p \cdot (p-c) = (a+b)^2 - c^2 < (2a)^2 - c^2 < 4a^2. \quad (17)$$

Las (14) y (17) aseguran la existencia de una transversal que cumple (13) e interior al ángulo cuyos lados son a y h_3 ; esta transversal es luego ciertamente interior al triángulo si el ángulo A es agudo; en caso contrario observemos todavía que de

$$4t^2 = 4p(p-c) = (a+b)^2 - c^2 = 2(b^2 + ab - bc \cos A)$$

y de $\cos A < 0$ sigue

$$4t^2 > 2b(b+a) > 4b^2,$$

es decir, recordando también (17),

$$a > t > b,$$

que asegura que dicha transversal es interior al ángulo $\hat{ab}$.

Las fórmulas (3) y la observación hecha sobre la sustitución de t en $-t$, nos permiten asegurar que la segunda transversal de longitud (13), más alejada del lado mayor en C , formará triángulos tbc_1 y tc_2a tales que las circunferencias ex-inscritas dentro respectivamente de los ángulos A y B tengan radios iguales. Ambas transversales coinciden con la bisectriz del ángulo C en el caso de que el triángulo dado sea isósceles en C .

En definitiva, la solución elemental del problema de Uspensky puede enunciarse así:

Dado un triángulo ABC , la transversal interior trazada por el vértice C de longitud $\sqrt{p \cdot (p-c)}$ (más cercana al mayor lado en caso de haber dos) divide a dicho triángulo en otros dos cuyas circunferencias inscritas tienen radios iguales.

2. - Otras soluciones elementales del problema de Uspensky.

Es instructivo tratar de resolver el problema propuesto tomando como incógnita la razón x dada en (8). De ésta deducimos

$$t = (ax-b)/(1-x) \quad (18)$$

y utilizando el teorema de Stewart, o bien la expresión de t^2 y a^2 en función del $\cos B$ con $c_2 = c/(1+x)$, eliminemos t en (8), obteniendo la ecuación

$$(1+x^2) \cdot (ax-b)^2 = a^2 \cdot (1-x^2)^2 + c^2 \cdot (1-x)^2 + (b^2-a^2-c^2) \cdot (1-x-x^2+x^3). \quad (19)$$

Dejando de lado las raíces $x=0$, $x=\infty$, de nimia interpretación geométrica y recordando (12), habremos de resolver

$$f(x) = (a^2-p \cdot (p-c)) \cdot x^2 - 2(p-a) \cdot (p-b) \cdot x + b^2-p \cdot (p-c) = 0 \quad (20)$$

con raíces reales, por ser su discriminante

$$(a-b)^2 \cdot p \cdot (p-c) \geq 0. \quad (21)$$

Al mismo tiempo, una al menos de las dos raíces es positiva, ya que

$$(p-a) \cdot (p-b) > 0. \quad (22)$$

Las dos raíces de (20) son iguales sólo y cuando el triángulo es isósceles en $a=b$, dando $x=1$ como raíz doble. Si así no ocurre, el primer miembro de (20) toma los valores

$$f(1) = (a-b)^2 > 0, \quad f(b/a) = -(a-b)^2 \cdot p \cdot (p-c)/a^2 < 0. \quad (23)$$

Suponiendo como antes

$$a > b, \quad (16)$$

se cumplirá

$$4p \cdot (p-c) = (a+b)^2 - c^2 < (2a)^2 - c^2 < 4a^2, \quad (17)$$

y de (23) y (17) deducimos que las dos raíces de (20) serán menores que 1, dando solución sólo la mayor, pues en (18) ha de ser $t > 0$, es decir, $1 > x > b/a$. Bajo la condición (16), la (20) tendrá dos raíces positivas si $b^2 > p \cdot (p-c)$, es decir, si

$$c^2 > (a-b) \cdot (a+3b), \quad (24)$$

pero la menor no da solución por hacer (18) negativa. Puede comprobarse fácilmente que la significación de las dos raíces de (20) es dar a (18) valores opuestos, cosa natural por haber obtenido (20) empleando t^2 . Para verlo, basta sumar

$$\frac{ax_1-b}{1-x_1} + \frac{ax_2-b}{1-x_2} = \frac{(a+b) \cdot (x_1+x_2) - 2ax_1x_2 - 2b}{1-(x_1+x_2)+x_1x_2} = 0, \quad (25)$$

sustituyendo la suma y producto de las raíces por los coeficientes respectivos de (20). La observación ya realizada, proveniente de

las fórmulas (3), nos dice que la segunda raíz de la ecuación (20) da la transversal para la que las circunferencias ex-inscritas antes mencionadas de centros I_1' e I_2' tengan radios iguales.

Así, pues, tomando el radical positivo, la transversal buscada en (8) viene dada, bajo la hipótesis (16), mediante

$$x = \frac{(p-a) \cdot (p-b) + (a-b) \cdot \sqrt{p \cdot (p-c)}}{a^2 - p \cdot (p-c)} \quad (26)$$

que es siempre posible construir con regla y compás.

Sin embargo, procuremos una construcción más rápida que la proporcionada por (26), mediante la resolución trigonométrica angular del problema.

Si C_1 y C_2 son los ángulos en que la transversal CT divide al ángulo C y se pone

$$2p_1 = c_1 + t + b, \quad 2p_2 = c_2 + t + a, \quad (27)$$

la igual longitud del radio de las circunferencias inscritas en ambos triángulos parciales, viene dada por

$$r = (p_1 - c_1) \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} C_1 = (p_2 - c_2) \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} C_2. \quad (28)$$

Para la transversal buscada se cumple (8), equivalente a

$$c_1 / (p_1 - c_1) = c_2 / (p_2 - c_2). \quad (29)$$

Si se aplica la fórmula del seno y se tienen en cuenta (29) y (28), resulta

$$\frac{a}{b} = \frac{c_2 \cdot \operatorname{sen} C_1}{c_1 \cdot \operatorname{sen} C_2} = \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} C_1}{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} C_2} = \frac{1 - \cos C_1}{1 - \cos C_2}. \quad (30)$$

De la (30) se deduce fácilmente

$$\operatorname{tg} \frac{C_1 - C_2}{4} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{4} = \frac{a - b}{a + b + 2\sqrt{ab}} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{4} = \frac{a + b - 2\sqrt{ab}}{a - b} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{4} \quad (31)$$

en que

$$\delta = \frac{1}{2}(C_1 - C_2) \quad (32)$$

da el ángulo que la bisectriz del ángulo C forma con la transversal buscada. Puede aplicarse el último miembro o el penúltimo de (31), según convenga.

Mediante el ángulo auxiliar ω dado por

$$\text{sen } \omega = (a-b)/(a+b) \quad (33)$$

puede expresarse (31), utilizando (32), en la forma

$$\text{tg } \frac{1}{2} \delta = \text{tg } \frac{1}{2} \omega \cdot \text{tg } (C/4) \quad (34)$$

y construir $\frac{1}{2} \delta$ utilizando la proporción

$$\text{tg } \frac{1}{2} \delta / \text{tg } (C/4) = \text{sen } \frac{1}{2} \omega / \cos \frac{1}{2} \omega. \quad (35)$$

Son fáciles las construcciones correspondientes, ya de los últimos miembros de (31), ya de las (33) y (35).

3. - Resolución proyectiva completa del problema de Uspensky.

Esta explica la resolución algebraica y naturaleza de las soluciones que allí se encuentran, permitiendo además el método referir el problema al triángulo generalizado y por tanto haciendo entrar las circunferencias ex-inscritas. También una pequeña modificación del mismo método permite resolver proyectivamente con la misma sencillez el problema generalizado, consistente en buscar la transversal que dé triángulos parciales cuyas respectivas circunferencias inscritas tengan sus radios en una razón dada k .

Consideremos primero las *bisectrices interiores* w_1 y w_2 correspondientes respectivamente a los ángulos $\hat{bc}$ de vértice A y $\hat{ca}$ de vértice B . Imaginemos los puntos O_n y O_n' de ambas bisectrices puestos en correspondencia de manera que sean centros de circunferencias iguales inscritas a los ángulos respectivos y a un mismo lado de c ; llamaremos a éste, *caso acorde* $w_1 w_2$. Después consideraremos la correspondencia de centros de circunferencias inscritas a distinto lado de c ; llamándole *caso discord* $w_1 w_2$.

En el caso acorde $w_1 w_2$, las rectas paralelas al lado c (fig. 2) determinan sobre las bisectrices w_1 y w_2 dos series proyectivas cuyos pares de puntos homólogos O_n y O_n' son los centros antes dichos. Estas series se proyectan desde el punto C , según dos ha-

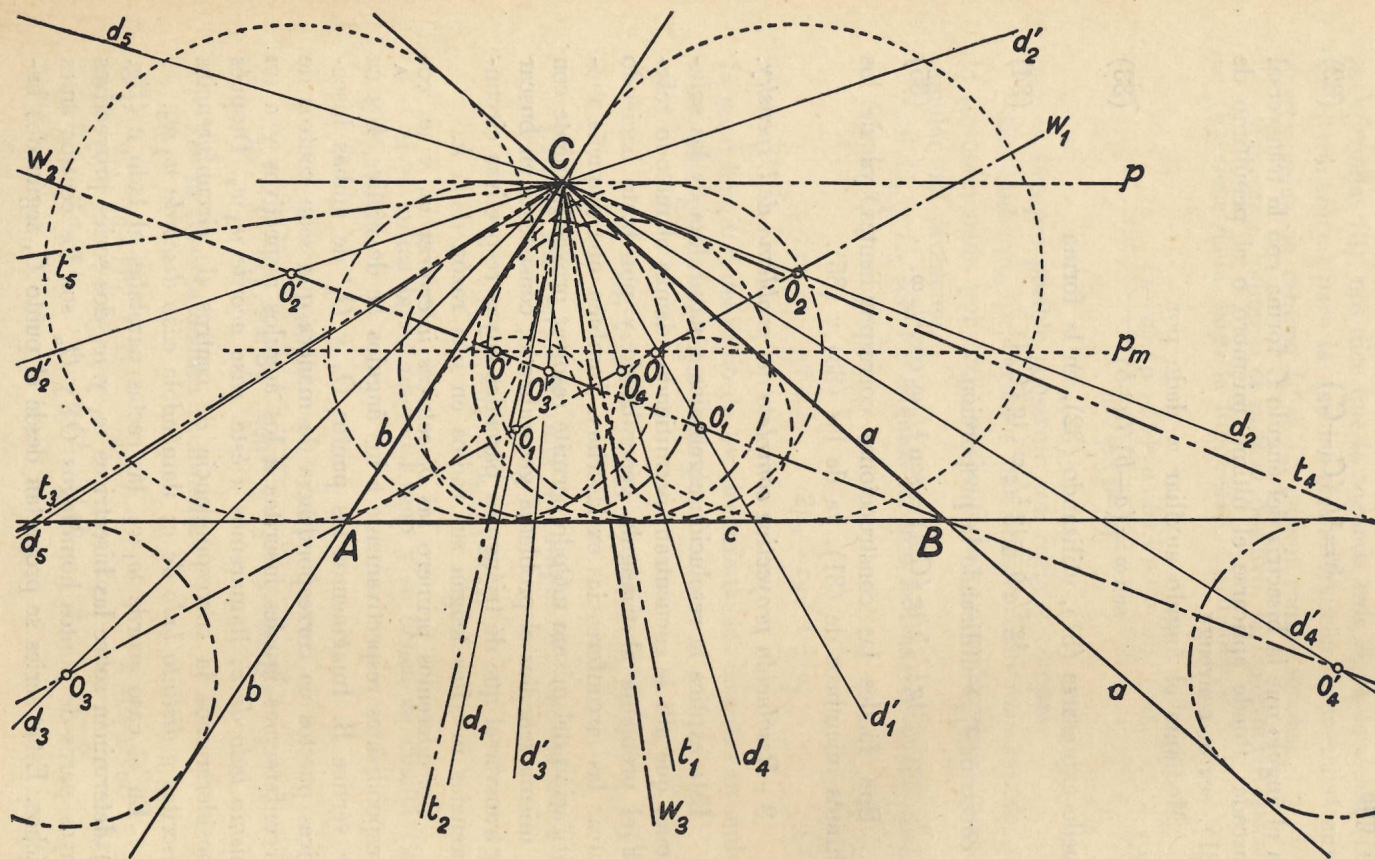


Fig. 2
 d_5 arriba a la izquierda léase d'_5

ces proyectivos superpuestos H_1 y K_2 . En el haz de vértice C , los simétricos coincidentes de los lados b y a respecto a un determinado par de rayos homólogos de la proyectividad anterior, darán transversales solución del problema. Pero los simétricos de los lados b y a respecto a cada par de rayos homólogos r, r' antes dichos *no* dan haces proyectivos. En efecto, introduciendo coordenadas proyectivas $x = \text{tg } \overset{\wedge}{br}$, $x' = \text{tg } \overset{\wedge}{br'}$, y llamando $a = \text{tg } \overset{\wedge}{ba}$, $w_3 = \text{tg } \overset{\wedge}{bw_3}$, $w_1 = \text{tg } \overset{\wedge}{bw_1}$, $w_2 = \text{tg } \overset{\wedge}{bw_2}$, se tendrá

$$(x \ 0 \ w_3 w_1) = (x' a w_3 w_2), \quad (36)$$

de donde

$$x = w_1 w_3 (w_2 - w_3) (x' - a) / ((a(w_1 - w_3) - w_3(w_1 - w_2)) x' - a(w_1 w_2 - w_3^2) - w_2 w_3 (w_3 - w_1)). \quad (37)$$

Si s es el simétrico de b respecto a r y s' el simétrico de a respecto a r' , será

$$x_1 = \text{tg } \overset{\wedge}{bs} = 2x / (1 - x^2), \quad (38)$$

relación no proyectiva entre x y x_1 ; análogamente

$$x_2 = \text{tg } \overset{\wedge}{bs'} = \text{tg } (2 \overset{\wedge}{br'} - \overset{\wedge}{ba}) = (2x' - a(1 - x'^2)) / (1 - x'^2 + 2ax'), \quad (39)$$

que tampoco es proyectiva entre x' y x_2 . La condición $x_1 = x_2$, es decir

$$2x / (1 - x^2) = (2x' - a(1 - x'^2)) / (1 - x'^2 + 2ax'), \quad (40)$$

sustituyendo x por su valor (37), da una ecuación de 4º grado en x' , lo que ya nos dice habrá cuatro centros solución O_n' que correspondientes a cuatro O_n darán cuatro pares de circunferencias tangentes a cuatro transversales solución. Dos de ellas, confundidas en la *paralela* p al lado c trazada por el vértice C , son inmediatas y provienen de la mediatriz p_m de la faja pc , dando O y O' (fig. 2) como centros solución y de la paralela impropia a c

que da O_∞ y O'_∞ como centros en los puntos impropios de w_1 y w_2 . Los centros O y O' corresponden a circunferencias finitas ex-inscritas en los triángulos de lados paralelos (fig. 2) determinados por p en ABC , mientras que los O_∞ y O'_∞ corresponden a circunferencias que se confunden con la recta impropia. Perdiendo esta transversal doble p , las otras dos vamos a hallarlas proyectivamente.

Para esto, hagamos girar de un ángulo $\frac{1}{2}\hat{ab}$, alrededor de su vértice C , el haz K_2 dando un haz H_2 , superpuesto y homólogo del H_1 en una *proyectividad* P_1 . Más aún, en este caso acorde $w_1 w_2$, la P_1 es una involución por corresponderse doblemente los rayos b y w_3 . Es inmediato ver que los pares de rayos homólogos de esta involución no se separan, por lo que ésta es hiperbólica. Su rayo doble o unido d_1 , *interior* y más cercano al lado b del triángulo dado, da la bisectriz del primer triángulo parcial buscado; entonces el rayo simétrico del b respecto a este d_1 , es la transversal *interior* buscada t_1 (más cercana al mayor lado si hay dos interiores), *solución elemental* del problema. En efecto, si d_1' es el rayo obtenido (fig. 2), deshaciendo el giro anterior

$$\hat{bd}_1' = \hat{bd}_1 + \frac{1}{2}\hat{ba}, \quad (41)$$

entonces el rayo t_1 tal que

$$\hat{bt}_1 = 2 \cdot \hat{bd}_1 \quad (42)$$

cumple

$$\hat{td}_1' = \hat{bd}_1' - \hat{bt}_1 = \hat{ba} - \hat{bd}_1' = \hat{d}_1'a, \quad (43)$$

es decir d_1' es la bisectriz del segundo triángulo parcial determinado por t_1 en el triángulo dado.

Pero el mismo razonamiento anterior aplicado al otro rayo doble o unido d_2 de la involución P_1 , demuestra que si d_2' es el rayo obtenido mediante

$$\hat{bd}_2' = \hat{bd}_2 + \frac{1}{2}\hat{ba}, \quad (41')$$

entonces el rayo t_2 tal que (fig. 2)

$$\hat{bt}_2 = 2 \cdot \hat{bd}_2 \quad (42')$$

cumple

$$\hat{t}_2 \hat{d}_2' = \hat{d}_2' \hat{a}. \quad (44)$$

Con esto obtenemos (fig. 2) una transversal t_2 que determina con b y c un triángulo ACT_2 , cuya circunferencia ex-inscrita de centro O_2 en w_1 tiene radio igual a la circunferencia ex-inscrita al triángulo BCT_2 (que t_2 determina con a y c) de centro O_2' en w_2 .

En resumen, los rayos dobles d_1 y d_2 de P_1 determinan en w_1 los centros O_1 y O_2 de dos circunferencias que corresponden a otras dos circunferencias respectivamente iguales de centros O_1' y O_2' en w_2 , formando así los dos pares respectivamente tangentes a las dos transversales solución t_1 y t_2 .

Relacionemos ahora esta resolución proyectiva con la algebraica antes estudiada, en que $O_1 = I_1$; $O_2 = I_1'$; $O_1' = I_2$; $O_2' = I_2'$. Para ello demosetremos previamente que la bisectriz w_1 determina sobre los rayos d_1 y d_2 segmentos iguales

$$\overline{CO_1} = \overline{CO_2}. \quad (45)$$

En efecto, (fig. 3) cortemos la involución P_1 por la bisectriz w_1 y hallemos el centro M de la involución sección, mediante la recta m obtenida girando el ángulo $\frac{1}{2} \hat{ab}$ a la w_2^p , paralela trazada por C a la bisectriz w_2 , pues en P_1 el rayo m es homólogo del w_1^p que proyecta desde C el punto impropio de w_1 . La recta m es perpendicular a la w_1 , porque las dos bisectrices forman un ángulo

$$\hat{w}_1 \hat{w}_2^p = \hat{w}_1 \hat{w}_2 = \frac{1}{2} \hat{ca} + \frac{1}{2} \hat{bc}, \quad (46)$$

que sumado al

$$\hat{w}_2^p \hat{m} = \frac{1}{2} \hat{ab} \quad (47)$$

vale el recto, mitad de la suma de los ángulos del triángulo dado; es decir, el triángulo CMO_2 es rectángulo en M . Es sabido que el centro M de una involución es punto medio del segmento determinado por sus puntos dobles O_1 y O_2 , con lo que queda probado (45).

Correlativamente, la bisectriz w_2 determina sobre d_1' y d_2' segmentos iguales

$$\overline{CO_1'} = \overline{CO_2'}. \quad (45')$$

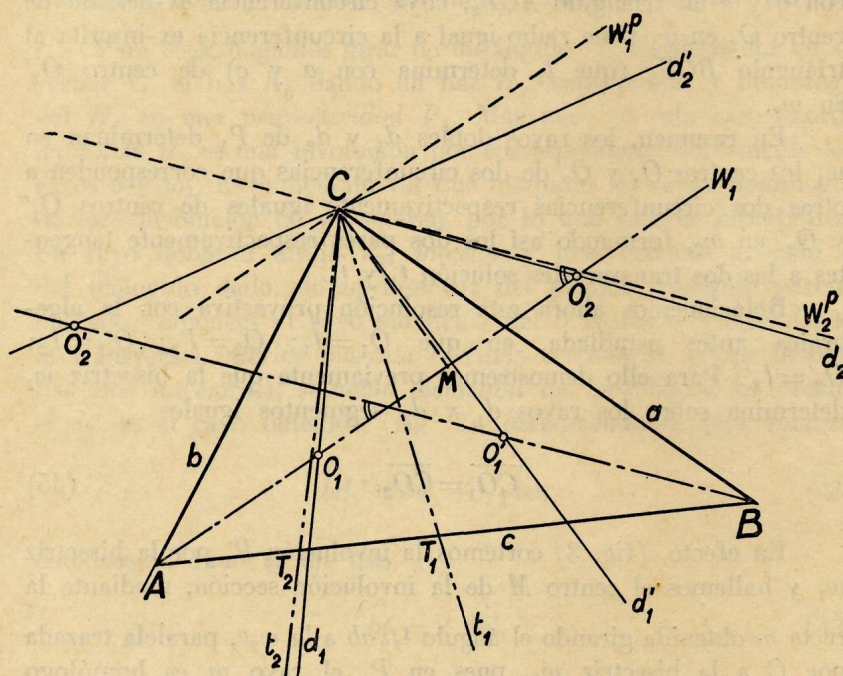


Fig. 3

La letra m , que falta en la figura, designa en el texto la recta CM .

Pasemos ahora a demostrar que la recta c determina sobre las transversales halladas t_1 y t_2 segmentos iguales

$$\overline{CT_1} = \overline{CT_2}. \quad (48)$$

En efecto, (fig. 3) en el triángulo CAT_1 , según (42) se cumple

$$\hat{ct}_1 = \pi - (2 \cdot \hat{d}_1 b + 2 \cdot \hat{b} w_1) = \pi - 2 \cdot \hat{d}_1 w_1; \quad (49)$$

análogamente, en el triángulo CAT_2 , según (42'), se cumple

$$\hat{t}_2 c = \pi - (\hat{c}b + \hat{b}t_2) = \pi - (\pi - 2 \cdot \hat{b}w_1 + \pi - 2 \cdot \hat{b}d_2) = \pi - 2 \cdot \hat{w}_1 d_2. (50)$$

De (49), (50) y (45) se deduce que el triángulo CT_1T_2 es isósceles y por tanto se cumple (48).

Esta condición (48) muestra que las dos transversales t_1 y t_2 que hemos obtenido proyectivamente corresponden a las algebraicas de la ecuación (11) y también de la (20), ilustrando así la interpretación geométrica de las segundas soluciones de dichas ecuaciones.

Con todo esto, aún no hemos agotado la cuestión referente al par de bisectrices interiores w_1 y w_2 , pues sobre ellas se encuentran aún otros centros O_3, O_4, O_5 y O_3', O_4', O_5' (fig. 2) de pares de circunferencias soluciones a *distinto lado de c* respecto a transversales t_3, t_4 y t_5 que se hallan considerando el que hemos llamado *caso discord* w_1w_2 .

Ahora consideraremos la correspondencia puntual proyectiva entre w_1 y w_2 relacionando los centros $O_{\bar{n}}$ y $O_{\bar{n}}'$ de los pares de circunferencias iguales inscritas a los respectivos ángulos, pero situadas a distinto lado de c . Si en el caso acorde el centro $O_n' = O_{\bar{n}}'$ en w_2 era correspondiente de O_n en w_1 , bastará considerar el simétrico del O_n respecto a A para obtener $O_{\bar{n}}$. Estas puntuales se proyectan desde el vértice C según dos haces proyectivos superpuestos H_1' y K_2' . En el haz de vértice C , los simétricos coincidentes de los lados b y a respecto a un determinado par de rayos homólogos de la proyectividad anterior, darán transversales, solución de este caso discord w_1w_2 . Pero los simétricos de los lados b y a respecto a cada par de rayos homólogos antes dicho, tampoco forman aquí una proyectividad. Sin embargo, se podrá emplear un procedimiento análogo al visto en el caso

acorde, haciendo girar de un ángulo $\frac{1}{2}\hat{a}b$, alrededor de su vértice C el haz K_2' , dando un haz H_2' superpuesto y homólogo del H_1' en una *proyectividad* P_1' , que aquí ya *no* es involutoria, pero sí hiperbólica. Los rayos dobles d_3, d_4 de esta proyectividad determinan en w_1 centros O_3, O_4 de dos circunferencias (fig. 2) que corresponden a otras dos respectivamente iguales de centros O_3', O_4' determinados sobre w_2 por los rayos d_3', d_4' que se obtienen girando $\frac{1}{2}\hat{b}a$ los anteriormente hallados d_3, d_4 . Estos dos pares de circunferencias son tangentes a otras dos transversales t_3, t_4 soluciones del problema. La demostración es completamente aná-

loga a la del caso acorde. Para hallar las otras dos soluciones, no tan inmediatas aquí como antes, basta girar de un ángulo $\frac{1}{2}(\pi - \hat{ab})$, alrededor de su vértice C el haz K_2' , dando un haz H_2'' superpuesto y homólogo del H_1' en una proyectividad P_1'' , cuyos rayos dobles darán los centros buscados sobre w_1 , obteniendo los centros correspondientes de w_2 , deshaciendo el giro $\frac{1}{2}(\pi - \hat{ab})$ para cada uno de los rayos dobles hallados. Una de las soluciones debe dar de nuevo el par O_α, O'_α , antes considerado en el caso acorde, correspondiente a la transversal p paralela a la recta c , aquí solución simple. En efecto, (fig. 3) se cumple

$$w_1 w_2 = w_1 c + c w_2 = \frac{1}{2} \hat{ac} + \frac{1}{2} \hat{bc} = \frac{1}{2} (\pi - \hat{ab}). \quad (51)$$

El otro par O_5, O'_5 determinado por d_5, d'_5 (fig. 2), tales que

$$d_5 d'_5 = \frac{1}{2} (\pi - \hat{ba}) \quad (52)$$

corresponde a la transversal t_5 , otra solución del problema propuesto. Todo esto justificado en forma análoga a la vista para el caso acorde.

En este caso acorde podíamos hallar las dos soluciones inmediatas dadas doblemente por la transversal p mediante procedimiento análogo al empleado en el caso disorde. En efecto, basta girar de un ángulo $\frac{1}{2}(\pi + \hat{ab})$, alrededor de su vértice C , el haz K_2 , para obtener un haz H_2^1 , superpuesto y homólogo del H_1 en una proyectividad P_1^1 , cuyos rayos dobles serán w_1^p y el rayo CO . Ambos rayos corresponden a la misma transversal p . El primer rayo doble de la proyectividad P_1^1 confirma (51); el segundo CO da una demostración indirecta del siguiente teorema, cuya demostración directa dejamos al lector: La paralela media p_m (mediatriz de la faja pc) determina respectivamente sobre las bisectrices w_1 y w_2 dos puntos O y O' que unidos al C forman un ángulo

$$\hat{OCO'} = \frac{1}{2} (\pi - \hat{ab}). \quad (53)$$

Esto es equivalente a afirmar que el incentro $w_1 w_2$ del triángulo dado está en la circunferencia determinada por los puntos O, C y O' .

En definitiva, la resolución del problema para las bisectrices

interiores w_1 y w_2 consiste en utilizar elementos dobles de cuatro proyectividades, que dan numerativamente ocho transversales, de la que la paralela p a la recta c se obtiene triplemente (dos en el caso acorde y otra en el discorde), siendo t_1, t_2, t_3, t_4 y t_5 las otras cinco transversales buscadas (fig. 2). Ellas corresponden a los pares de circunferencias iguales buscadas de centros O_∞, O'_∞ (doble por aparecer en el caso acorde y en el discorde); O, O' ; O_1, O'_1 ; O_2, O'_2 ; O_3, O'_3 ; O_4, O'_4 ; O_5, O'_5 ; resultando en total ocho pares, dos de ellos coincidentes.

El mismo tratamiento proyectivo debería aplicarse al par formado por la *bisectriz exterior* w_1' con la *interior* w_2 , al formado por la *bisectriz interior* w_1 con la *exterior* w_2' y finalmente al formado por el par de *bisectrices exteriores* w_1', w_2' de los respectivos vértices A y B . Cada uno de los casos dichos da ocho transversales, resultando un total general de 32 transversales, no todas distintas, solución completa del problema de Uspensky. Desde luego, la paralela p aparece de nuevo como solución repetida y ya dijimos al establecer las fórmulas (2) que la transversal t_1 vuelve a ser solución en el caso acorde de bisectrices exteriores $w_1'w_2'$.

4. - Problema generalizado

El método proyectivo para atacar el problema en el caso de que se busquen circunferencias inscritas cuyos radios estén en una razón dada $k=r_1/r_2$, se reduce fácilmente al anterior.

Tracemos (fig. 4) una recta c' paralela a la c , tal que

$$\overline{CB'} : \overline{CB} = k \quad (54)$$

y por B' la bisectriz w_2' del ángulo $c'a$, paralela a la w_2 . Bastará entonces asociar de la manera dicha para $k=1$ la bisectriz w_2' con la w_1 (o la w_1') y definir puntuales de centros de circunferencias de igual radio, para hallada la solución en w_2' , pasar por semejanza a la w_2 .

Resolvamos, por ejemplo, el problema en el caso elemental de que las circunferencias buscadas sean precisamente inscritas; aquí resultarán dos soluciones. La primera se halla (fig. 4) asociando w_1 con w_2' , proyectando desde C , girando el haz K_2' en un ángulo $\frac{1}{2}\angle ab$ para obtener H_2' y hallando el rayo doble interior

d_1 (más cercano a b) de la *proyectividad* P_1r , ahora *no involutoria*, entre H_1 y H_2r . El rayo d_1 determina O_1 y aplicándole el giro $\hat{1/2}ba$ se obtiene d_1' que determina O_1r sobre w_2r y O_1' sobre w_2 . Las circunferencias de centros O_1 y O_1' , cuyos radios están en la razón k , son tangentes a la transversal t_1 , simétrica de b respecto a d_1 e inscritas en los triángulos parciales que dicha transversal determina. La segunda solución se halla asociando la *bisectriz exte-*

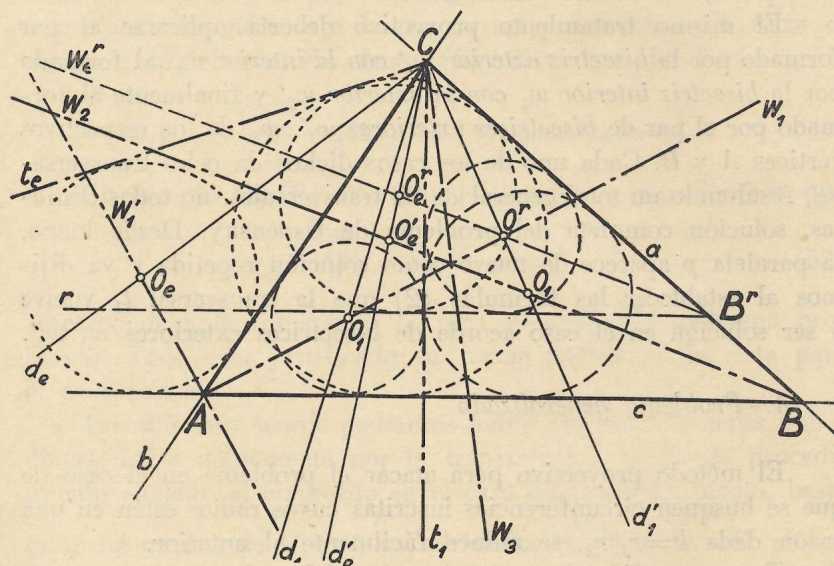


Fig. 4

Para la correspondencia con el texto, las letras O_1r , O_1 , r , w_2r , deben leerse respectivamente O_1r , O_1' , cr , w_2r .

rior w_1' con la *interior* w_2r , motivo que hace prever que en la resolución algebraica la ecuación que dé esta solución será distinta de la que dé la anterior. Efectuando el mismo giro $\hat{1/2}ab$ llegamos en la forma vista anteriormente a una *proyectividad* P_e cuyo rayo doble d_e que determine O_e sobre w_1' más cercano a A, girado $\hat{1/2}ba$ da d_e' , rayo que determine $O_e'r$ sobre w_2r y O_e' sobre w_2 . Las circunferencias de centros O_e y O_e' (fig .4), cuyos radios están en la razón dada k , son tangentes a la transversal t_e , simétrica

de b respecto a d_e , e inscritas en los triángulos que dicha transversal determina con b, c y con a, c . Para $k=1$ dicha transversal t_e se convierte en la paralela p a la recta c , trazada por C .

El mismo método seguido al principiar la resolución algebraica del problema elemental, hace sustituir para k cualquiera, la condición (7) por la

$$\frac{t+b}{c_1} = \frac{t+a+(1-k)c_2}{kc_2} \quad (7')$$

o en la resolución trigonométrica, la (29) por la

$$c_1/p_1 = kc_2/p_2, \quad (29')$$

condiciones geométricas que complican mucho ambas resoluciones. Esto parece dar mayor superioridad y elegancia al método proyectivo expuesto.

San Juan, julio de 1948.

LA PLATA, FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS.

GENERALIZACION DEL MISMO PROBLEMA

POR

ENRIQUE FERRARI

Damos a continuación una resolución algebraica muy elemental del problema 144, que se adapta igualmente a la forma en que éste está propuesto y a la generalización que consiste en suponer dada, aun $\neq 1$ la razón entre los dos círculos inscriptos.

Sea $CT=t$ la transversal buscada. Llamemos p, p_1, p_2 los semi-perímetros de los triángulos ABC , ACT y BCT y ρ, r_1, r_2 los radios de los respectivos círculos inscriptos. Entonces se tiene:

$$r_1 p_1 + r_2 p_2 = \rho p \quad (1)$$

$$p_1 + p_2 = p + t. \quad (2)$$

Es conocido que la longitud del segmento determinado sobre un lado por un vértice y el punto de contacto con el círculo inscripto es igual al semiperímetro menos el lado opuesto a dicho vértice. Por semejanza de triángulos se tiene luego:

$$\frac{r_1}{\rho} = \frac{p_1 - t}{p - a} \quad (3)$$

$$\frac{r_2}{\rho} = \frac{p_2 - t}{p - b} \quad (4)$$

Además supondremos que

$$r_2 = k r_1. \quad (5)$$

Obtenemos así un sistema de cinco ecuaciones en las cinco incógnitas t, r_1, r_2, p_1 y p_2 . De ellas sólo interesa t .

De (3), (4) y (5) resulta

$$\frac{p_1-t}{p-a} = \frac{p_2-t}{k(p-b)};$$

por composición y luego teniendo presente la (2) obtenemos:

$$\frac{p-t}{k(p-b)+(p-a)} = \frac{p_1-t}{p-a} = \frac{r_1}{\rho},$$

de las que deducimos

$$p_1 = \frac{(p-t)(p-a)}{k(p-b)+(p-a)} + t; \quad \frac{r_1}{\rho} = \frac{p-t}{k(p-b)+(p-a)}.$$

Con (2) y (5) de éstas obtenemos:

$$p_2 = \frac{k(p-b)(p-t)}{k(p-b)+(p-a)} + t; \quad \frac{r_2}{\rho} = \frac{k(p-t)}{k(p-b)+(p-a)}.$$

Llevamos estos valores en la (1) previamente dividida por ρ ; por cuanto la (1) es de segundo grado y los sustituidos son todos de primer grado en t , resultará una ecuación en t que será de segundo (a lo sumo). Después de efectuados cálculos muy simples se obtiene en efecto la ecuación:

$$kct^2 + [k^2(p-b) + p-a-kc]pt - [k^2b(p-b) - 2k(p-b)(p-a) + a(p-a)]p = 0. \quad (6)$$

Esta ecuación debe tener una y una sola raíz que responde al problema, como se ve fácilmente por simples consideraciones de continuidad geométrica.

Para verificar analíticamente que esta condición se cumple observemos primero que en el término constante la expresión cuadrática en k , entre corchetes, tiene discriminante negativo, ella es pues definida positiva, de donde sigue que la ecuación en t tiene una sola raíz positiva. Veamos si esta raíz satisface al problema. Supongamos que sea $a \geq b$ y llamemos $f(k, t)$ al primer miembro de la (6).

Como $f(k, \infty) > 0$ y $k > 0$

$$f(k, a) = k^2 p(p-b)(a-b) + \frac{1}{2} k(p-a)(a^2 + c^2 - b^2) > 0,$$

luego deducimos que la raíz en cuestión es menor que a .
Calculando $f(k, b)$ se tiene

$$f(k, b) = \frac{1}{2} k(p-b)(b^2 + c^2 - a^2) - p(p-a)(p-b).$$

Con el $\hat{A}$ obtuso o recto $b^2 + c^2 - a^2 \leq 0$ y por tanto $f(k, b) < 0$:
la raíz que discutimos está comprendida entre b y a .

Cuando el $\hat{A}$ es agudo la consideración de $f(k, b)$ no es discriminante; en cambio la raíz mencionada satisface en este caso al problema geométrico si se demuestra que ella es $\geq$ que la altura del triángulo, mínimo valor que puede tomar t .

Al variar k , la raíz considerada de (6) toma su valor mínimo cuando ella verifica también

$$\frac{\partial f(k, t)}{\partial k} = 2kp(p-b)(t-b) + 2p(p-a)(p-b) - ct(p-t) = 0,$$

de donde resulta

$$k = \frac{(p-t)ct - 2p(p-a)(p-b)}{2p(p-b)(t-b)}.$$

Substituído este valor en la (6) se obtiene con cálculos muy simples

$$[2S^2 - (p-c)(p-t)ct]^2 - 4p(p-c)S^2(t-a)(t-b) = 0,$$

en la que $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$.

Nuestro problema es saber si poniendo t igual a la altura del triángulo $2S/c$ esta ecuación queda satisfecha. Observemos todavía que la expresión de S en función de a, b, c es irracional cuadrática

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

por esta razón, si la condición dicha se realiza para un triángulo genérico, deben anularse separadamente el grupo de los términos de grado par y el grupo de los términos de grado impar en t . Estos dos grupos son, respectivamente,

$$c^2(p-c)^2t^4 + (p^2c^2 - 4S^2)(p-c)^2t^2 + 4S^2(S^2 - p(p-c)ab),$$

y

$$t \cdot p(p-c)^2(8S^2 - 2c^2t^2).$$

La condición requerida se verifica inmediatamente para el segundo grupo; lo mismo ocurre para el primer grupo si se desarrollan cálculos o tan solo se observa que $S^2 - p(p-c)ab = p^2(p-c)^2$.

Queda de este modo probado que el mínimo valor de t que, para un k conveniente pueda satisfacer la (6) es la altura del triángulo; por tanto la raíz positiva t de ella será siempre solución del problema.

Para $k=1$ la (6) se reduce a

$$t^2 = p(p-c).$$

Hemos mencionado arriba cómo se obtiene el segmento $p-c$. El segmento p es el determinado por el vértice C y el punto de tangencia del círculo ex-inscripto al triángulo ABC con un lado del ángulo C . La transversal t es la media geométrica entre estos dos segmentos.

ROSARIO, INSTITUTO DE MATEMÁTICA.

Mientras la Nota que antecede ya estaba en la imprenta hemos recibido del Dr. Sergio Sispanov, actualmente profesor de la Universidad de Cuyo, en San Juan, algunos breves apuntes sobre el mismo problema, cuyo resultado no difiere en lo esencial del arriba obtenido.

La Redacción

SOBRE ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS CURVAS TRAZADAS SOBRE UNA SUPERFICIE REGLADA

POR

ADOLFO DAGHETTO

El problema 116 propuesto en este Boletín, Año VI, fasc. 1, expresaba:

Demostrar las siguientes propiedades referentes a superficies regladas:

a) Sobre cualquier superficie reglada las trayectorias ortogonales de las generatrices son equidistantes (es decir, los segmentos en que dos cualesquiera de ellas cortan a las distintas generatrices, son todos iguales).

b) La condición necesaria y suficiente para que exista una trayectoria oblícuo isogonal de las generatrices tal que todas las trayectorias que cortan las generatrices bajo el mismo ángulo sean equidistantes, es que la reglada sea un cilindro. En este caso la propiedad se realiza para cualquier trayectoria isogonal de las generatrices.

c) Si la superficie reglada no es un cilindro, consideremos la intersección C de un cono director de la reglada con una esfera de centro en el vértice del cono. Suponiendo que existan dos trayectorias isogonales de las generatrices igualmente inclinadas y equidistantes, demostrar que sus tangentes en puntos correspondientes forman ángulos de cosenos opuestos con la tangente en el punto correspondiente de la intersección C mencionada y que los arcos correspondientes en las dos trayectorias son iguales.

En lo que sigue demostraremos las propiedades enunciadas con algunos complementos:

1. — Sea una superficie reglada y sea $\bar{V}(t)$ uno de los dos vectores unitarios dirigidos según las generatrices de la misma, que se supondrá variable con continuidad con el parámetro t , supondremos además que $\bar{V}(t)$ sea derivable respecto t de modo que será constantemente $\bar{V} \times \bar{V}' = 0$. Sean $P(t)$ y $Q(t)$ dos directrices de la reglada. Será

$$Q(t) = P(t) + \lambda(t) \bar{V}(t), \quad (1)$$

siendo $\lambda(t)$ función de t .

Supongamos primero, como dice el aparte a) de la cuestión, que $P(t)$ y $Q(t)$ sean trayectorias ortogonales de la reglada. Esta condición se expresa por

$$P'(t) \times \bar{V}(t) = 0, \quad Q'(t) \times \bar{V}(t) = 0.$$

Tomando la derivada de (1) resulta

$$Q'(t) = P'(t) + \lambda(t) \bar{V}'(t) + \lambda'(t) \bar{V}(t).$$

Multiplicando escalarmente esta última expresión por $V(t)$ y teniendo en cuenta las relaciones anteriores obtenemos

$$\lambda' = 0, \quad \lambda = \text{cte.}$$

Por (1)

$$|\lambda| = |\lambda \bar{V}(t)| = |Q(t) - P(t)|;$$

resulta así

Teorema I. — *Sobre cualquier superficie reglada las trayectorias ortogonales de las generatrices son equidistantes.*

2. — Renunciamos ahora la ortogonalidad y veamos de determinar, en general, pares de curvas $P(t)$, $Q(t)$ isogonales respecto de cada generatriz y equidistantes.

Supongamos por tanto que las curvas $P(t)$, $Q(t)$ corten cada generatriz bajo el mismo ángulo (lo que es parcialmente la hipótesis del aparte b)); será

$$\frac{P' \times \bar{V}}{|P'|} = \frac{Q' \times \bar{V}}{|Q'|}. \quad (2)$$

Si deseamos que las dos curvas sean equidistantes, midiendo las distancias según las generatrices, será

$$Q = P + \lambda \bar{V} \quad (3)$$

donde λ es una constante.

Derivando (3)

$$Q' = P' + \lambda \bar{V}' \quad (3')$$

luego

$$Q' \times \bar{V} = P' \times \bar{V}.$$

Sigue, por (2),

$$|P'| = |Q'| \quad (4)$$

es decir

$$P'^2 = Q'^2 = P'^2 + 2\lambda P' \times \bar{V}' + \lambda^2 \bar{V}'^2,$$

luego

$$2\lambda P' \times \bar{V}' + \lambda^2 \bar{V}'^2 = 0 \quad (5)$$

de donde

$$\lambda = 0 \quad \text{o bien} \quad \lambda \bar{V}'^2 = -P' \times \bar{V}'.$$

La primera solución debe excluirse por insignificante. Resulta pues que debe verificarse una de las dos condiciones:

$$1.^{\circ} \quad \bar{V}' = 0, \quad 2.^{\circ} \quad \frac{P' \times \bar{V}'}{\bar{V}'^2} = \text{const.} = \lambda. \quad (6)$$

La primera está realizada cuando la reglada es un cilin-

dro; la igualdad (5) deja entonces indeterminado tanto P' como λ ; pero si, volviendo a la (3), suponemos en ella λ variable y derivamos, resulta

$$Q' = P' + \lambda' \bar{V}, \quad Q' \times \bar{V} = P' \times \bar{V} + \lambda' \quad (7)$$

luego

$$(Q' \times \bar{V})^2 - Q'^2 = (P' \times \bar{V})^2 - P'^2.$$

Esta igualdad, conjuntamente con (2) y (7) da

$$|Q'| = |P'|, \quad Q' \times \bar{V} = P' \times \bar{V}, \quad \lambda' = 0.$$

Recíprocamente, poniendo en las igualdades (7) $\lambda' = 0$ resulta $Q' \times \bar{V} = P' \times \bar{V}$, $|Q'| = |P'|$ y por consecuencia queda satisfecha la (2). Tenemos por lo tanto

Teorema II.—*Sobre un cilindro dos curvas equidistantes son siempre isogonales y recíprocamente.*

3.—Supongamos ahora $\bar{V}' \neq 0$. Pongamos

$$P(t) = A(t) + \mu(t) \bar{V}(t),$$

donde $A(t)$ es una curva arbitraria (directriz) que suponemos trazada sobre la reglada y tratamos determinar $\mu(t)$ de modo que la curva $P(t)$ sea una de las isogonales antedichas.

Sigue

$$P' = A' + \mu' \bar{V} + \bar{V}' \mu, \quad P' \times \bar{V}' = A' \times \bar{V}' + \mu \bar{V}'^2, \quad (8)$$

y por (5) será

$$\mu = -\frac{\lambda}{2} - \frac{A' \times \bar{V}'}{\bar{V}'^2}, \quad (9)$$

donde λ es una constante arbitraria.

La observación de la fórmula (9) nos lleva directamente a las siguientes conclusiones:

A cada valor de λ corresponde una función $\mu(t)$; luego, una curva $P(t)$ a la cual corresponde una isogonal en distancia constante λ .

Distintas funciones $\mu(t)$ difieren sólo por el valor de la constante $-\frac{\lambda}{2}$.

Si se cambia el signo de λ la μ se aumenta en λ ; se obtiene luego una curva $Q(t)$ tal que $Q(t) - P(t) = \lambda \bar{V}(t)$ es decir la isogonal de la $P(t)$ antes considerada.

Queda determinada sobre la reglada una serie de pares de curvas tales que cada par corta sobre cada generatriz un segmento de longitud constante (variable de uno a otro par) y el lugar de los puntos medios de estos segmentos es una curva fija correspondiente a $\lambda=0$.

Vamos a demostrar que esta curva fija es la línea de estricción o la línea de retroceso de la reglada según sea esta no desarrollable o desarrollable. Para $\lambda=0$ la (9) da

$$\mu = -\frac{A' \times \bar{V}'}{\bar{V}'^2}; \quad (10)$$

vamos a mostrar que el punto P caracterizado por este valor de μ es el punto de la generatriz considerada que está en mínima distancia de la generatriz próxima. El vector normal común a la generatriz considerada y a la infinitamente próxima está dado por

$$\bar{V} \wedge (\bar{V} + \bar{V}' dt) = \bar{V} \wedge \bar{V}' dt.$$

Notamos que a raíz de $\bar{V}' \neq 0$, $\bar{V} \times \bar{V}' = 0$, es ciertamente $\bar{V} \wedge \bar{V}' \neq 0$; sabemos además que el punto P sobre la generatriz caracterizada por t cuya distancia de la generatriz próxima es mínima, es el punto de la recta

$$A + \mu \bar{V}$$

al cual puede hacerse corresponder un punto

$$A + A' dt + v(\bar{V} + \bar{V}' dt)$$

tal que la recta que une a los dos puntos es paralela al vector $\bar{V} \wedge \bar{V}'$.

Se deben por lo tanto determinar los valores de μ y ν tales que

$$(\mu - \nu) \bar{V} - (A' + \nu \bar{V}') dt = \lambda \bar{V} \wedge \bar{V}'; \quad (11)$$

multiplicando escalarmente por $\bar{V}$ se obtiene

$$\mu - \nu - A' \times \bar{V} dt = 0,$$

luego

$$\nu = \mu - A' \times \bar{V} dt.$$

Reemplazando en (11) deducimos

$$A' \times \bar{V} \cdot \bar{V} - (A' + \mu \bar{V}') = \lambda_1 \bar{V} \wedge \bar{V}',$$

y multiplicando escalarmente esta igualdad por $\bar{V}'$, resulta

$$A' \times \bar{V}' + \mu \bar{V}'^2 = 0.$$

Con ello queda demostrado que la curva P caracterizada por $\mu = -\frac{A' \times \bar{V}'}{\bar{V}'^2}$ es la línea de estricción de la reglada.

Si la reglada es desarrollable nada cambia evidentemente en este razonamiento; pero se sabe que la línea de retroceso es entonces el lugar del punto $Q(t)$ tal que

$$Q'(t) = \sigma \bar{V};$$

si $Q = A + \mu V$, es pues

$$A' + \mu V' = (\sigma - \mu') V,$$

$$A' \times V' + \mu V'^2 = 0,$$

lo que demuestra que Q coincide con el punto P definido por la condición (10) (*).

De todo ello y de las conclusiones obtenidas al pie de la fórmula (9) deducimos el siguiente

Teorema III.—*Dada una reglada, si sobre todas sus generatrices se señalan de una parte y otra del punto que está sobre la línea de estricción dos puntos a distancia fija de este*

(*) En el caso particular en que $A = \text{cte.}$, es decir cuando la reglada es un cono, obtenemos también $\mu = 0$ y la línea de estricción se reduce a un punto.

punto, se construyen dos curvas que cortan a todas las generatrices según ángulos iguales.

4. — Consideremos ahora, como está dicho en el enunciado del problema la indicatriz esférica de la reglada, que se supone no ser un cilindro.

La ecuación vectorial de una curva será $M(t) = O + \bar{V}(t)$; luego el vector tangente a ella será $\bar{V}'(t)$.

Por estar las curvas $P(t)$ y $Q(t)$ cumpliendo con las condiciones (2) y (3) del párr. 2, tenemos

$$Q' = P' + \lambda \bar{V}';$$

sigue

$$Q' \times \bar{V}' = P' \times \bar{V}' + \lambda \bar{V}'^2 = \bar{V}' \times (2P' + \lambda \bar{V}') - P' \times \bar{V}',$$

esto es, por (5),

$$Q' \times \bar{V}' = -P' \times \bar{V}';$$

y, a raíz de (4)

$$\frac{|Q'| |\bar{V}'|}{Q' \times \bar{V}'} = - \frac{|P'| |\bar{V}'|}{P' \times \bar{V}'} \quad (9)$$

es decir, tienen valores opuestos los cosenos de los ángulos que con el vector $\bar{V}'$ forman los vectores tangentes en puntos correspondientes a las curvas $P(t)$ y $Q(t)$.

Además si llamamos con ds y $d\sigma$ los elementos de arco correspondientes a ambas trayectorias $P(t)$ y $Q(t)$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = |P'|^2, \quad \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = |Q'|^2$$

y por (4) sigue,

$$\int_{t_0}^t ds = \int_{t_0}^t d\sigma. \quad (10)$$

Reuniendo los resultados (9) y (10) obtenemos

Teorema IV. — *La tangente a la indicatriz esférica de la reglada en el punto correspondiente forma con las tangentes a las dos curvas ángulos suplementarios y los arcos correspondientes a ambas trayectorias son iguales.*

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

SOLUCIONES

82. Siendo

$$\operatorname{sen} \omega = \sqrt{\frac{4x}{15x+60}}, \quad y = \frac{\omega}{4+x},$$

determinar la constante a de manera que la expresión $x^2 y - ax$ tienda a un límite finito cuando x tiende a infinito y determinar este límite.

Notemos que para x tendiendo a infinito $\operatorname{sen} \omega$ tiende a $2/\sqrt{15}$, por tanto ω tiende a $\arcsen 2/\sqrt{15}$.

De la primera ecuación del enunciado resulta

$$x = \frac{60 \cdot \operatorname{sen}^2 \omega}{4 - 15 \operatorname{sen}^2 \omega}$$

entonces

$$x^2 y - ax = \frac{(15 \cdot \omega \cdot \operatorname{sen}^2 \omega - 4a) 15 \operatorname{sen}^2 \omega}{4 - 15 \operatorname{sen}^2 \omega}.$$

Observemos ahora que para $\operatorname{sen}^2 \omega = 4/15$ el denominador se anula, no así su derivada respecto a $\operatorname{sen} \omega$. Si para $\operatorname{sen}^2 \omega$ tendiendo al mismo límite conseguimos que la fracción que precede tome la forma $0/0$, podremos luego calcular su límite aplicando la regla de L'Hospital. Siempre que el problema tenga solución, el valor buscado de a está determinado por la condición

$$\lim (15 \omega \operatorname{sen}^2 \omega - 4a) = 0;$$

es por lo tanto necesario elegir un valor para

$$\lim \omega = k\pi + (-1)^k \arcsen \frac{2}{\sqrt{15}}$$

es decir fijar un valor para el entero k en el segundo miembro. Llamemos ω_1 este límite; tendremos pues que tomar

$$a = \omega_1.$$

Se tiene entonces

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 y - ax) &= \lim_{\omega \rightarrow \omega_1} 15 \sin^2 \omega \cdot \frac{15 \omega \sin^2 \omega - 4a}{4 - 15 \sin^2 \omega} \\ &= -4 \cdot \lim_{\omega \rightarrow \omega_1} \frac{4 - 15 \frac{\omega}{\omega_1} \sin^2 \omega}{4 - 15 \sin^2 \omega} \omega_1 \\ &= -4 \omega_1 \lim_{\omega \rightarrow \omega_1} \frac{-30 \frac{\omega}{\omega_1} \sin \omega \cos \omega - 15 \frac{1}{\omega_1} \sin^2 \omega}{-30 \sin \omega \cos \omega} \\ &= -4 \omega_1 \left(1 + \frac{1}{2\omega_1} \operatorname{tg} \omega_1 \right) \\ &= -4 \left(\omega_1 + (-1)^k \frac{1}{\sqrt{11}} \right). \end{aligned}$$

Solución por el Ing. E. Ferrari, asistente primero en el Instituto de Matemáticas.

124. Sea una circunferencia de radio r . Por un punto M de un diámetro AB se traza la cuerda PQ perpendicular a AB . Se pide determinar el punto M , de manera que el área del triángulo APQ sea αr^2 . Demostrar, que el problema tiene dos o ninguna solución; determinar los valores de α para los cuales existen soluciones. Cálculo numérico para $\alpha = 1$.

1ª. Solución. — Sea $\vartheta = PAB$, con $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$, aceptando como soluciones límites las áreas nulas correspondientes a $\vartheta = 0$ y $\vartheta = \frac{1}{2} \pi$. Entonces resulta

$$\text{área triáng. } APQ = 2 \sin 2\vartheta \cdot \cos^2 \vartheta \cdot r^2;$$

por lo tanto se tiene

$$\alpha = 2 \sin 2\vartheta \cdot \cos^2 \vartheta. \quad (1)$$

Los valores de α para los cuales el problema tiene solución serán los dados por (1) al variar ϑ en el intervalo $0 - \frac{1}{2}\pi$.

Como para $\vartheta=0$ y $\frac{1}{2}\pi$ la (1) da $\alpha=0$ y valores positivos para los demás ángulos del intervalo, y siendo además α una función continua del ángulo ϑ , sigue que habrá por lo menos un ϑ para el cual es máximo α ; debemos por lo tanto considerar la ecuación que se obtiene igualando a 0 la derivada de (1):

$$\frac{d\alpha}{d\vartheta} = 2^2 \cos \vartheta \cdot \cos 3\vartheta = 0.$$

$\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ da el mínimo $\alpha=0$; luego $3\vartheta = \frac{1}{2}\pi$, o bien $\vartheta = \frac{\pi}{6}$, dará el máximo α .

Reemplazando en la (1) este valor de ϑ se tiene:

$$\alpha_{\text{máx.}} = \frac{3}{4}\sqrt{3}.$$

Por lo tanto habrá solución si

$$0 \leq \alpha \leq 3\sqrt{3}/4 = 1,299. \quad (2)$$

Teniendo presente la continuidad de α y suponiendo que solo se dan valores del intervalo (2), al variar ϑ desde 0 hasta $\pi/6$ el coeficiente $2\sin 2\vartheta \cdot \cos^2 \vartheta$ alcanza cualquiera de estos valores, lo mismo acontece cuando ϑ varía desde $\pi/6$ hasta $\frac{1}{2}\pi$, puesto que los valores mínimos corresponden a los extremos del intervalo y el máximo a un valor intermedio. De esto deducimos que si α varía en el intervalo (2) el problema admite dos soluciones y una para el máximo.

Para determinar, según pide el problema, el caso de $\alpha=1$ notamos que la (1) puede también escribirse

$$\alpha = \frac{4 \operatorname{tg} \vartheta}{(1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta)^2} \quad (3)$$

y si ponemos $z = \operatorname{tg} \vartheta$, $\alpha = 1$, se tiene:

$$z^4 + 2z^2 - 4z + 1 = 0. \quad (4)$$

Se ve en seguida que esta ecuación admite la raíz $z = 1$ (esto se descubre rápidamente también en la (3) y lo mismo acontecería si hiciéramos una figura correspondiente al problema). A esta solución le corresponde

$$\vartheta_1 = \frac{\pi}{4}.$$

El punto M_1 coincide en este caso con el centro O de la circunferencia.

Eliminada la raíz $z = 1$, dividiendo por $z - 1$ la (4), se obtiene la ecuación cúbica

$$z^3 + z^2 + 3z - 1 = 0.$$

Puesto $z = x - \frac{1}{3}$, se obtiene la transformada en x

$$x^3 + \frac{3}{8}x - \frac{52}{27} = 0.$$

Resolvemos a ésta, por ej., empleando las resolventes trigonométricas (Hoüel, pág. XLI, «Tables de Logarithmes a cinq décimales») y obtenemos sucesivamente

$$x = 0,62894; \quad z = 0,29561$$

entonces

$$\vartheta_2 = 16^\circ 28' 05''.$$

Este valor permite colocar al punto M_2 en el segmento OB a una distancia

$$r \cdot \cos 2\vartheta_2 = r \cdot 0,83928.$$

El punto M correspondiente al triángulo de máxima área es el punto medio de OB .

2.^a Solución. — Sea $x=AM$. — Como MP es media proporcional entre x y $2r-x$ se tiene

$$\text{área triáng. } APQ = x \sqrt{(2r-x)x} = \alpha r^2, \quad (1)$$

de donde resulta

$$x^4 - 2r \cdot x^3 + \alpha^2 r^4 = 0.$$

Como resulta más cómodo operar en el círculo de radio 1, poniendo $y=x/r$ se obtiene la ecuación transformada

$$y^4 - 2y^3 + \alpha^2 = 0.$$

Indiquemos con $f(y)$ el primer miembro. Como $f(y)$ presenta dos variaciones de signo, por el teorema de Descartes podemos decir que la (2) tiene 2 ó 0 soluciones positivas. Ya que disponemos del parámetro α , tratemos de definir un intervalo para el mismo dentro del cual la ecuación admita raíces positivas.

Empecemos por observar que $f(0)$ y $f(\infty)$ son positivos. Formemos ahora la ecuación $f'(y)=0$, entonces

$$f'(y) = 2y^2(2y-3) = 0,$$

la cual admite las raíces $y=0$ e $y=3/2$: sólo la segunda interesa para nuestros fines, pues ella separa las dos raíces positivas de (2), en caso de existir. La condición para esto es que $f(0)$ y $f(3/2)$ tengan signos contrarios, por lo tanto debe ser

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{8}\left(\frac{3}{2}-2\right) + \alpha^2 \leq 0,$$

de donde resulta

$$0 \leq \alpha \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Variando α en este intervalo el problema admite dos soluciones y una para el extremo superior.

En el caso particular de ser $\alpha=1$, la (2) se reduce a esta otra

$$y^4 - 2y^3 + 1 = 0. \quad (3)$$

En seguida se comprueba que ella tiene la raíz $y_1 = 1$. La otra raíz y_2 estará comprendida entre $3/2$ y 2 ; la calcularemos empleando cualquier método de aproximación; elejimos el método de Newton.

Empezaremos con el valor aproximado 2 . El incremento h correspondiente a un valor aproximado de y_2 está dado en general por

$$h \cong - \frac{f(y)}{f'(y)}.$$

Entonces, con $y = 2$ resulta $h = -1/8 = -0,125$. Luego $y'_2 = 1,875$.

Con $y = 1,875$ se obtiene $h = -0,0334$, por tanto $y''_2 = 1,8416$.

Calculando con $y = 1,84$ resulta $y'''_2 = 1,83929$, y repetido el cálculo con $y = 1,839$ se obtiene el valor que adoptamos en definitiva

$$y_2 = 1,838287.$$

En consecuencia, para x tenemos los valores

$$x_1 = r \quad \text{y} \quad x_2 = 1,838287 \cdot r.$$

Solución por el Ing. ENRIQUE FERRARI, asistente 1º en el Instituto de Matemática.

N.º 125. — Demostrar que la suma de las tangentes trigonométricas de los ángulos formados por las tangentes a una cónica desde un punto exterior P con un eje de la misma es igual a la suma de las tangentes trigonométricas de los ángulos que forman con dicho eje las rectas que unen P con los vértices de la cónica correspondiente al mismo eje.

La ecuación de una cónica referida a un vértice, al eje que pasa por éste y a la tangente en este vértice es de la forma

$$y^2 - 2px - qx^2 = 0,$$

siendo $q > 0$, $= 0$, < 0 , según se trate de una hipérbola, una parábola o una elipse.

La ecuación conjunta de las dos tangentes a la cónica desde el punto (x_1, y_1) será por consecuencia

$$(y_1 y - p(x + x_1) - q x_1 x)^2 - (y_1^2 - 2p x_1 - q x_1^2)(y^2 - 2p x - q x^2) = 0,$$

es decir, desarrollando cálculos,

$$(2p x_1 + q x_1^2) y^2 - 2(p + q x_1) y_1 y x + \dots = 0.$$

La suma de las tangentes trigonométricas de los ángulos que estas dos rectas forman con el eje x es el coeficiente cambiado de signo del término en xy después de reducir a 1 el coeficiente de y^2 ; esto es

$$\frac{2(p + q x_1) y_1}{(2p + q x_1) x_1}. \quad (1)$$

Por otro lado las coordenadas de los dos vértices de la cónica sobre el eje x son

$$(0, 0) \text{ y } \left(-\frac{2p}{q}, 0\right)$$

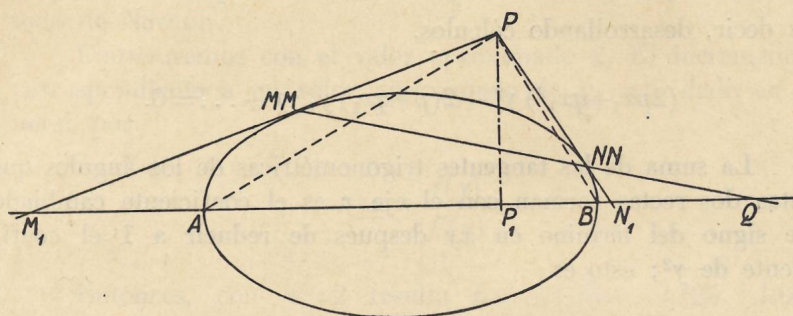
y las tangentes trigonométricas de los ángulos que forman con el eje x las rectas que los unen al punto (x_1, y_1) son respectivamente

$$\frac{y_1}{x_1}, \quad \frac{y_1}{x_1 + \frac{2p}{q}}$$

cuya suma es precisamente (1).

La proposición enunciada queda así verificada por el cálculo; más interesante será hacerla entrar en un concepto general mediante la siguiente demostración geométrica: Plámense AB el eje considerado de la cónica, P el punto del cual se trazan las tangentes, P_1 el pie de la perpendicular conducida de P a AB , M y N los puntos de contacto de las dos tangentes con la cónica y $M_1 N_1$ sus puntos de intersección con la recta AB . Se ve entonces que $MM_1 N_1 N$ constituye un cuadrángulo degenerado ins-

crito en la cónica, del cual dos lados opuestos son las dos tangentes, PM, PN y otros dos coinciden en la recta MN ; si llamamos todavía Q al punto de intersección de MN con AB , el teorema de Desargues nos dice que M_1N_1 y AB son pares de



puntos conjugados en una involución cuyos puntos dobles son Q y su conjugado armónico respecto de A, B , que es precisamente P_1 . Q y P_1 son entonces también conjugados armónicos respecto de M_1, N_1 , de donde sigue

$$\frac{1}{P_1M_1} + \frac{1}{P_1N_1} = \frac{1}{P_1A} + \frac{1}{P_1B} = \frac{2}{P_1Q}.$$

Multiplicando todos los términos por PP_1 queda demostrado el teorema y asignado el valor de la suma constante.

N.º 137. — Determinar la solución en números enteros y positivos de la ecuación indeterminada

$$5x + 7y - 3z = 0,$$

en la que z tiene el valor mínimo.

SOLUCIÓN. — Tomemos el problema en forma más general y propongámonos determinar la solución en números enteros y positivos de la ecuación indeterminada

$$ax + by + cz = k.$$

en la cual z tiene el valor mínimo.

Desde luego se puede suponer $(a, b, c, k) = 1$ y, por conse-

cuencia también, $(a, b, c) = 1$. Indicando entonces con m el m. c. d. de a, b y poniendo $a = ma_1$, $b = mb_1$, será

$$(a_1, b_1) = 1, \quad (m, c) = 1.$$

Supongamos además, como es siempre posible, $a_1 > 0$, $m > 0$.

Pongamos

$$a_1x + b_1y = \zeta;$$

la ecuación anterior se escribe

$$m\zeta + cz = k.$$

Determinemos los números α y β ; γ y δ tales que

$$a_1\alpha + b_1\beta = 1 \quad \text{y} \quad m\gamma + c\delta = 1, \quad (1)$$

lo que se obtiene en seguida, por ej., desarrollando en fracción continua las razones $a_1/b_1, m/c$; resulta

$$x = \alpha\zeta + b_1\lambda, \quad y = \beta\zeta - a_1\lambda$$

$$\zeta = \gamma k + c\mu, \quad z = \delta k - m\mu,$$

siendo λ y μ enteros; luego

$$x = \alpha\gamma k + \alpha c\mu + b_1\lambda$$

$$y = \beta\gamma k + \beta c\mu - a_1\lambda \quad (2)$$

$$z = \delta k - m\mu.$$

Puesto que las soluciones deben ser números positivos, deducimos en seguida que deberá ser

$$\mu < \frac{\delta k}{m},$$

Debemos ahora distinguir dos casos, según sea $b_1 > 0$ o $b_1 < 0$.

En el caso de $b_1 < 0$ se responde al problema inmediatamente tomando para μ el máximo entero que cumple esta condición; habrá todavía infinitos valores de λ que, con este μ proporcionan para x e y valores enteros positivos.

En el caso de $b_1 > 0$, para que sean positivos x e y deberá ser

$$-\frac{\alpha(\gamma k + c\mu)}{b_1} < \lambda < \frac{\beta(\gamma k + c\mu)}{a_1} \quad (3)$$

y para esto es condición necesaria que entre los números

$$-\frac{\alpha(\gamma k + c\mu)}{b_1} \quad \text{y} \quad \frac{\beta(\gamma k + c\mu)}{a_1}$$

exista algún entero; luego en primer lugar que

$$-\frac{\alpha(\gamma k + c\mu)}{b_1} < \frac{\beta(\gamma k + c\mu)}{a_1},$$

$$\frac{(\beta b_1 + \alpha a_1)(\gamma k + c\mu)}{a_1 b_1} = \frac{\gamma k + c\mu}{a_1 b_1} > 0;$$

Deberá ser luego, respectivamente, según sea c negativo o positivo,

$$\mu < \frac{\gamma k}{-c} \quad \text{y} \quad \mu > \frac{\gamma k}{-c}.$$

Por cuanto debe además ser $\mu < \frac{\delta k}{m}$, tendremos en los dos casos las acotaciones

$$a) \quad \mu < \text{mínimo} \left(\frac{\delta k}{m}, \frac{\gamma k}{-c} \right),$$

$$b) \quad \frac{\gamma k}{-c} < \mu < \frac{\delta k}{m}.$$

En ambos casos, para que z sea mínimo deberá ser μ lo

más próximo posible de $\frac{\delta k}{m}$. Además deberá ser μ elegido de modo de poder satisfacer a la (3) con λ entero.

Se ve ahora que en el caso b) debiendo μ estar comprendido entre dos límites determinados, puede el problema no tener solución. Por contrario en el caso a), siendo μ acotado de un solo lado, puede tomar valores absolutos grandes como se quiera y puede por tanto el valor absoluto de la diferencia entre los dos miembros extremos de (3) ser grande como se quiera, en particular >1 , lo que asegura la posibilidad de elegir λ satisfaciendo a (3). Luego en el caso a) existe ciertamente λ si

$$\gamma k + c\mu \geq a_1 b_1,$$

$$\mu \leq \frac{\gamma k - a_1 b_1}{-c},$$

y de allí que es condición suficiente para tal existencia que

$$\mu < \text{mínimo} \left(\frac{\gamma k - a_1 b_1}{-c}, \frac{\delta k}{m} \right).$$

Sin embargo no es esta condición necesaria; por lo tanto en el caso a) habrá que experimentar valores de μ comprendidos entre el mínimo de los valores $\left(\frac{\gamma k}{-c}, \frac{\delta k}{m} \right)$ y el máximo entero $\leq \left(\frac{\gamma k - a_1 b_1}{-c}, \frac{\delta k}{m} \right)$ y en el caso b) entre los valores $\frac{\gamma k}{-c}$ y $\frac{\delta k}{m}$ y en ambos casos elegir el más próximo posible a $\frac{\delta k}{m}$.

Como ejemplo de lo anteriormente expuesto vamos a resolver ahora la ecuación propuesta; se tiene

$$a=5, b=7, c=-3, m=1, k=0.$$

De las (1) obtenemos

$$\alpha=3, \quad \beta=-2, \quad \gamma=4, \quad \delta=1$$

y reemplazando en la (3)

$$\mu + \frac{2\mu}{7} < \lambda < \mu + \frac{\mu}{5},$$

o también, a raíz de que debe ser $\mu < 0$,

$$\frac{2|\mu|}{7} > |\lambda| - |\mu| > \frac{|\mu|}{5}.$$

Resulta que debe elegirse $|\mu|$ de manera que entre $\frac{2|\mu|}{7}$ y $\frac{|\mu|}{5}$ caiga un número entero; este entero no podrá ser < 1 y debe por tanto ser

$$\frac{2|\mu|}{7} > 1 \quad |\mu| > \frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2}; \quad |\mu| \geq 4.$$

Se verifica que, para $|\mu| = 4$,

$$\frac{2|\mu|}{7} = \frac{8}{7} > 1, \quad \frac{|\mu|}{5} = \frac{4}{5} < 1,$$

luego tomando $\mu = -4$ resulta $\lambda = -5$ y reemplazando en (3)

$$x = 1, \quad y = 1, \quad z = 4.$$

Finalmente remontándonos a las deducciones anteriores, caso a), verificamos que $\mu = -4$ cumple en efecto con la limitación de ser comprendido entre 0 y $-12 < -\frac{35}{3}$.

Salvo detalles de redacción esta solución pertenece al Sr. GERMÁN FERNÁNDEZ, alumno del 5º año de Matemática de la Facultad de Ciencias físico-matemáticas de la Universidad Nacional de La Plata. Otra solución ha enviado el señor NÉSTOR DISTEFANO alumno de III curso Ingeniería Civil de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad del Litoral.

N.º 138. — a) Demostrar que cualquiera sea el número entero positivo impar N , la sucesión representada por la fórmula

$$\frac{N^{2^n} + 1}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)^{(1)}$$

está constituida por números enteros impares y dos a dos primos entre sí.

b) Lo mismo para la sucesión

$$N^{2^n} + 1, (n = 0, 1, 2, 3, \dots), \text{ si } N \text{ es par.}$$

a) Aplicando las propiedades de las congruencias de números tenemos:

$$\text{si } N \text{ es impar} \quad N \equiv \pm 1 \pmod{4}, \quad N^2 \equiv 1 \pmod{4},$$

luego también para k entero ≥ 0

$$(N^2)^k \equiv 1 \pmod{4}, \quad \frac{N^{2k} + 1}{2} \equiv 1 \pmod{4}$$

en particular para $n \geq 1, k = 2^{n-1}$

$$\frac{N^{2^n} + 1}{2} \equiv 1 \pmod{4}$$

o también $\frac{N^{2^n} + 1}{2} \equiv 1 \pmod{2}$, es decir que la sucesión $\frac{N^{2^n} + 1}{2}$

está constituida por números enteros impares.

Vamos a demostrar que estos números, dos por dos, son primos entre sí:

Sabemos que

$$(N^{2^n})^{2^m} - 1 = (N^{2^n})^{2^m} - 1^{2^m} \equiv 0 \pmod{[N^{2^n} + 1]}$$

para $m \geq 1$.

Teniendo en cuenta la igualdad

$$\frac{N^{2^{n+m}} + 1}{2} = \frac{(N^{2^n})^{2^m} - 1}{2} + 1,$$

⁽¹⁾ En el enunciado propuesto figura también 0 entre los valores de n . Este caso está considerado aparte en la Nota final.

obtenemos pues

$$\frac{N^{2^n+m}+1}{2} \equiv 1 \pmod{(N^{2^n}+1)}.$$

Queda pues demostrado que $\frac{N^{2^n+m}+1}{2}$ y $\frac{N^{2^n}+1}{2}$ no pueden tener factores comunes.

b) En cuanto a la segunda pregunta:

Si N es par $N \equiv 0 \pmod{2} \therefore N^2 \equiv 0 \pmod{2}$

y, para todo $n \geq 0$, $N^{2^n} \equiv 0 \pmod{2}$

es decir

$$N^{2^n}+1 \equiv 1 \pmod{2};$$

luego la sucesión $N^{2^n}+1$ está constituida por números enteros impares, que como veremos son dos a dos primos entre sí.

En efecto, en la igualdad

$$N^{2^n+m}+1 = (N^{2^n})^{2^m} - 1 + 2$$

para $m \geq 1$, tenemos que

$$(N^{2^n})^{2^m} - 1 \equiv 0 \pmod{(N^{2^n}+1)};$$

en consecuencia

$$N^{2^n+m}+1 \equiv 2 \pmod{(N^{2^n}+1)};$$

pero 2 no puede ser factor de $N^{2^n}+1$ que es impar; luego está probado lo enunciado.

Nota. $\frac{N^{2^0}+1}{2} = \frac{N+1}{2}$ no será evidentemente impar para to-

dos los N impares; aparte esto, queda sin embargo cierta también en este caso la otra afirmación, con la misma demostración.

Esta solución es debida al señor Germán Fernández, alumno de 5º año de Matemática de la Facultad de Ciencias físicomatemáticas de La Plata.

N.º 141 — Es sabido que se llama cuadrángulo completo al sistema de 4 puntos del plano, de los cuales nunca tres alineados, y de las 6 rectas que los unen (lados del cuadrángulo). Se ve en seguida que, conociendo los valores de cuatro ángulos independientes formados por cinco de estas rectas, quedan determinados todos los ángulos que ellas forman entre sí. Quedan también determinados los ángulos del lado restante con los precedentes: se pide una fórmula para calcularlos.

Dadas n rectas, y fijado sobre cada una de ellas un sentido, supongámoslas ordenadas en un orden determinado y supongamos conocidos los $n-1$ ángulos que, respecto un sentido de rotación determinado, llevan respectivamente las direcciones positivas de las primeras $n-1$ rectas, cada una sobre la dirección positivas de la siguiente. Para definir el ángulo de dos cualesquiera de las rectas dadas se puede entonces imaginar un circuito formado por esas dos rectas y por las que, en el orden determinado, están entre las dos. La suma de las rotaciones que, siguiendo este circuito, llevan la dirección positiva de la primera de las rectas del circuito nuevamente sobre sí misma será 0 o múltiplo de 2π ; en esta suma el último término mide el ángulo entre las dos rectas consideradas, mientras los términos restantes pertenecen a los $n-1$ ángulos que se suponen conocidos; se tiene por lo tanto una ecuación que determina aquel ángulo. Evidentemente si fuera conocido este ángulo e incógnito uno de los otros del circuito, la ecuación se utilizaría para determinar este último. Queda por lo tanto claro y orgánicamente demostrado que, dadas n rectas, por conocerse $n-1$ ángulos independientes que ellas forman entre sí, pueden calcularse en seguida todos los demás; y queda también definida la condición de independencia de dichos ángulos, consistiendo en que no se pueda separar de ellos un grupo que sean los ángulos de un circuito formado con las rectas dadas.

Poniendo $n=5$ queda demostrado el primer punto del enunciado.

Sea ahora dado un cuadrángulo completo $ABCD$, del cual, teniendo en cuenta lo antedicho, se conocen todos los ángulos que forman entre sí, dos por dos, cinco lados; se pueden siempre suponer ordenados los puntos-vértices del cuadrángulo en modo que el sexto lado sea CD y el problema consiste en determinar el ángulo que CD forma con uno cualquiera de los lados anteriores, quedando entonces, por lo anteriormente dicho, determinado por alguna simple operación de resta, cualquier otro ángulo formado por esta recta con los demás lados del cuadrángulo completo.

Consideremos entonces un lado del cuadrángulo que tenga con CD un vértice común; sea por ej. AD . Pongamos

$$\sphericalangle ADC = x$$

siendo x el ángulo que se debe determinar. En el triángulo ADC pongamos, por brevedad

$$AC = m, \quad AD = n, \quad \sphericalangle ACD = y, \quad \sphericalangle CAD = \alpha.$$

Es

$$x + y = \pi - \alpha$$

$$\frac{m}{n} = \frac{\text{sen } x}{\text{sen } y} = \frac{\text{sen } x}{\text{sen}(x + \alpha)}. \quad (1)$$

Para resolver el problema propuesto es necesario eliminar en esta última ecuación los lados m, n , haciendo recurso únicamente a ángulos entre los primeros 5 lados del cuadrángulo.

Consideremos los dos triángulos ACB , ADB y pongamos

$$AB = p, \quad \sphericalangle ACB = \gamma, \quad \sphericalangle ABC = \beta_1, \quad \sphericalangle ADB = \delta, \quad \sphericalangle ABD = \beta_2;$$

se tiene

$$\frac{m}{p} = \frac{\text{sen } \beta_1}{\text{sen } \gamma}, \quad \frac{n}{p} = \frac{\text{sen } \beta_2}{\text{sen } \delta}$$

y dividiendo una por la otra estas dos ecuaciones obtenemos

$$\frac{m}{n} = \frac{\text{sen } \beta_1 \text{ sen } \delta}{\text{sen } \beta_2 \text{ sen } \gamma}.$$

Comparando con (1) resulta

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}(x+\alpha)} = \frac{\operatorname{sen} \beta_1 \operatorname{sen} \delta}{\operatorname{sen} \beta_2 \operatorname{sen} \gamma}$$

de donde, efectuando el componendo y diviendo,

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen} \beta_1 \operatorname{sen} \delta + \operatorname{sen} \beta_2 \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \beta_2 \operatorname{sen} \gamma - \operatorname{sen} \beta_1 \operatorname{sen} \delta} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Una solución sustancialmente equivalente fué enviada por el señor NESTOR DISTEFANO alumno del III año de ingeniería civil en la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad del Litoral.

N.º 147 — Siendo dada una elipse, se consideran todos los rectángulos que tienen dos lados sobre los ejes de la elipse, y la diagonal opuesta al vértice común (centro de la elipse), tangente a la misma. Se pide estudiar la curva lugar geométrico del cuarto vértice del rectángulo.

Sea

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

la elipse dada.

La diagonal del rectángulo considerado sea tangente a la elipse en el punto (xy) ; su ecuación será

$$\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} = 1, \quad (1)$$

siendo (XY) las coordenadas del punto corriente sobre la tangente.

Por el enunciado del problema las coordenadas del punto que describe la curva coinciden con las coordenadas no nulas de los puntos en que esta recta corta los dos ejes, respectivamente:

$$X = \frac{a^2}{x}, \quad Y = \frac{b^2}{y}$$

Eliminando x e y entre estas dos ecuaciones y la ecuación de la elipse, obtenemos

$$\frac{a^2}{X^2} + \frac{b^2}{Y^2} = 1,$$

es decir

$$X^2 Y^2 - a^2 Y^2 - b^2 X^2 = 0.$$

Se ve en seguida que esta es una curva simétrica respecto al origen y a los ejes, y que el origen pertenece a la curva.

Si ahora ponemos en la ecuación

$$X = \lambda t, \quad Y = \mu t$$

donde suponemos que λ y μ son números arbitrarios fijos, no ambos nulos, y t es variable, resulta

$$\lambda^2 \mu^2 t^2 \left(t^2 - \frac{a^2}{\lambda^2} - \frac{b^2}{\mu^2} \right) = 0,$$

de donde, excluyendo la solución $t=0$, resulta

$$t = \pm \sqrt{\frac{a^2}{\lambda^2} + \frac{b^2}{\mu^2}}$$

$$X = \pm \sqrt{a^2 + \frac{\lambda^2}{\mu^2} b^2} \quad Y = \pm \sqrt{b^2 + \frac{\mu^2}{\lambda^2} a^2}$$

$$X^2 + Y^2 = a^2 \left(1 + \frac{\mu^2}{\lambda^2} \right) + b^2 \left(1 + \frac{\lambda^2}{\mu^2} \right).$$

Al variar la razón $\lambda:\mu$ el segundo miembro de esta última igualdad alcanza un mínimo valor por

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{a}{b}, \quad X^2 + Y^2 = 2(a^2 + b^2);$$

concluimos por lo tanto que la curva considerada contiene el origen de coordenadas como punto aislado; todos los demás.

puntos de la curva son externos a la circunferencia de centro ese punto y radio $\sqrt{2(a^2+b^2)}$ que es tangente a la curva en los 4 puntos de intersección con los dos diámetros conjugados de la cónica simétricos respecto de los ejes.

Resulta además que es siempre $|X| \geq a$, $|Y| \geq b$; y precisamente por λ y $\mu \neq 0$ valen los signos $>$, mientras que por $\lambda \rightarrow 0$ $X \rightarrow \pm a$, $Y \rightarrow \pm \infty$, por $\mu \rightarrow 0$ $X \rightarrow \pm \infty$, $Y \rightarrow \pm b$. Por lo tanto la curva se compone de 4 ramas infinitas que tienen por asíntotas las rectas $X = \pm a$ e $Y = \pm b$.

Poniendo $X = \rho \cos \varphi$, $Y = \rho \sin \varphi$ se expresa la curva en coordenadas polares por la ecuación

$$\rho^2 = \frac{a^2}{\cos^2 \varphi} + \frac{b^2}{\sin^2 \varphi}.$$

Esta solución pertenece al señor NESTOR DISTEFANO, alumno del III curso de Ingeniería Civil en la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad del Litoral. Otra solución fué enviada por el Sr. ORLANDO KANTER, alumno del mismo curso.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

PROPUESTOS

153. — Se considera una elipse de semiejes a, b . Llamando φ al ángulo que una recta por el centro de la elipse forma con el eje mayor, sea $h(\varphi)$ la distancia de dicho centro a la tangente a la elipse perpendicular a esa recta. Se propone calcular la integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{h^2(\varphi)}$$

y demostrar que el producto de ella por el área de la elipse vale $2\pi^2$.

Se propone tratar también el problema análogo en el espacio. Deberá considerarse un elipsoide de ejes a, b, c . Llamando ϑ, φ las coordenadas esféricas (ϑ latitud y φ longitud) de una recta por el centro del elipsoide, se llamará $h(\vartheta, \varphi)$ a la distancia de dicho centro al plano tangente perpendicular a la dirección de coordenadas ϑ, φ y se calculará la integral

$$\iint \frac{\cos \vartheta d\vartheta d\varphi}{h^3(\vartheta, \varphi)}$$

extendida a toda la esfera, es decir para $-\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$ y $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Demostrar que el producto de ella por el volumen del elipsoide vale $16/3 \pi^2$.

Compare el lector con el artículo de L. Santaló en este mismo fascículo.

154. — Integrar la ecuación diferencial

$$(x^2 + y^2) dx + xy dy = (x + y)^3 (xdy - ydx)$$

155. — Demostrar que la función

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} \sum_{i=1}^n i^{p-1} x^i$$

para valores reales de x puede tomar solamente tres valores diferentes. Determinar estos valores indicando los correspondiente valores de x .

156. — Sea C una curva cerrada de Jordán. Sea $f(xy)$ una función real, con derivadas parciales continuas de los primeros órdenes, tal que sobre el contorno de C vale $+\infty$, pero es finita y positiva en todo punto interno a C . Se supone que f tenga dos mínimos relativos en el interior de C . Demostrar que también debe tener otros puntos no mínimos en los cuales $f_x = f_y$.

157. — Se propone demostrar que un poliedro convexo de caras rómbicas debe siempre tener un número de ángulos sólidos triedros ≥ 8 y que el solo cuyos ángulos sólidos sean todos triedros es el hexaedro.

El libro de H. S. M. Coxeter del cual se ocupa una nota bibliográfica en este mismo fascículo, en los §§ 2.7, 2.8 trata del rombododecaedro y del triacontaedro (de 30 caras) y desarrolla algunas consideraciones generales sobre poliedros de caras rómbicas. Parecería interesante completar estas últimas en la dirección señalada en el problema.

158. — Las tablas de integrales elípticas de uso corriente (p. ej. Jahnke - Emde - *Funktionentafeln mit Formeln und Kurven*) permiten conocer los valores de

$$F(\alpha, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi}}$$

con aproximación que, cuando α y φ son ambos muy próximos a 90° , resulta muy grosera. Se propone calcular, con un número de operaciones no excesivamente grande, el valor de la función con 5 decimales exactas para valores de α y φ asignados, en estas condiciones: p. ej. $\alpha = 89^\circ 57'$, $\varphi = 89^\circ$. Se supone disponer de tablas de logaritmos en 7 decimales.

INDICE
DE LOS
EJERCICIOS, PROBLEMAS Y CUESTIONES
PROPUESTOS EN LOS PRIMEROS VIII VOLUMENES DE
"MATHEMATICÆ NOTÆ" Y DE SUS SOLUCIONES

En el prólogo a nuestro primer fascículo, aparecido en 1941, hemos explicado nuestro entendimiento al agregar a cada número algunos problemas, por considerar que en grupo importante de nuestros lectores debía estar constituido por jóvenes que apenas por primera vez se acercaban a las matemáticas superiores y que "...el pensamiento matemático no se forma sino en contacto con los objetos propios de la matemática. Con este intento propondremos problemas y... nos agradaría fueran considerados por los lectores más que todo como estímulo y que las soluciones exorbitaran, en cualquier sentido digno de consideración, de los términos en que los problemas estarán puestos". Esta es todavía nuestra opinión; una teoría matemática no será nunca entendida en su valor por la simple lectura de algún texto, sin tener delante de la mente alguna incognita sobre la cual aquella lectura deba proyectar un poco de luz.

No queremos juzgar cuanto los fines declarados hayan sido alcanzados precisamente en la categoría de lectores a los que nos hemos referido; pero de la mayoría de las cuestiones propuestas fué publicada la solución, en varios casos por la valiosa colaboración de amigos a los cuales estamos cordialmente agradecidos o también, cuando la contestación no llegó de otra manera, por la Redacción misma de la Revista, pues estimamos que no constituye enseñanza lo de dejar abierto un enigma.

Y, pues el número de los problemas ya pasa actualmente de los 150, pensamos conveniente, para completar el programa como fué expuesto, dar de ellos en lo que sigue un elenco numérico, sin reproducir los enunciados, lo que necesitaría espacio excesivo, pero con una alusión suficiente —aún si a veces, y a propósito, un poco enigmática— al tema de referencia y con la indicación del lugar donde el problema fué publicado y dónde la solución, si tal es el caso. Quizas pueda ello despertar alguna útil curiosidad o procurarnos alguna nueva contribución; lo deseamos.

PROBLEMAS Y EJERCICIOS

PROPUESTO			T E M A	RESUELTO	
Nº	Año	Fasc.		Año	Fasc.
1	I	1	Una descomposición de los enteros	I	3-4
2			El perímetro de un triángulo y el círculo inscrito	I	3-4
3			Triángulos en una elipse	I	3-4
4			Las cuerdas de la parábola por el foco	I	3-4
5			Una cúbica plana	II	1
6			El movimiento del péndulo	II	2
7	I	2	Una sucesión de números	II	2
8			Suma de una serie	II	2
9			Los cruces de los caminos	II	1
10			La altura de un triángulo inscripto en un círculo	II	1
11			Area máxima de un segmento circular	II	2
12			Una curva unicursal	III	1
13			Una propiedad de la forma normal de la ecuación cúbica	II	3
14	I	3-4	Un problema elemental de análisis indeterminado	II	3
15			Las inversas de productos de diferencias	III	4
16			Un problema de máximo	III	2
17			Un hiperboloide cúbico	II	3
18			Una paraleja	II	4
19			Una integral en la teoría del mesón	II	4
20	II	1	Emplazar un hexágono regular	II	4
21			Sumas de cuadrados y sumas de inversas ..	II	4
22			Un momento de inercia	II	4
23			Números simétricos	III	2
24			Un límite	II	4
25			Los períodos de vibración de un volante	IV	3
26	II	2	Simple problema sobre un campo cuadrático	III	1
27			Ecuación de 3er. grado dependiente de un parámetro	IV	2
28	II	2	Cero o infinito	III	2
29			Suma máxima de los casquetes esféricos	III	3
30			Una propiedad de los polígonos regulares de número impar de lados	III	1
31			Acotación de la suma de una serie	...	.
32			Movimiento y equilibrio de una barra	III	2
33	II	3	Un límite	III	1
34			Dos identidades trigonométricas	III	3
35			Una propiedad del triángulo rectángulo	III	3

PROPUESTO			T E M A	RESUELTO	
Nº	Año	Fasc.		Año	Fasc.
36			Lugar geométrico determinado por dos haces de cónicas	V	4
37			Ecuación diferencial de un haz de curvas ...	III	3
38			Un problema de equilibrio	III	3
39	II	4	La última cifra de un número entero.....	III	3
40			Un problema de mínima	III	3
41			Una integral de volumen	III	3
42			Una relación entre area y flecha de un segmento circular	III	4
43			Ejercicio de geometría diferencial	III	4
44			Una ecuación resoluble de 5º grado	III	3
45	III	1	Un cuadrado perfecto	III	4
46			¿Cuándo $a^{2n} + b^{2n} + c^{2n} = 0$? (1)	—	—
47			Un haz cuadrático de círculos	III	4
48			Desplazamiento del baricentro por homotecia	III	4
49			Un problema de números figurados	IV	1
50			Una clásica ecuación diferencial lineal.....	V	1
51			Generalización de un ejercicio de Jordán....	III	4
52	III	2	Los cuadrados de números consecutivos	IV	1
53	III	2	Medias aritméticas repetidas de n números .	V	1
54			Una ecuación de 6º grado resoluble	IV	1
55			Ocho torres en el tablero de ajedrez	IV	1
56			Algunas desigualdades en el triángulo.....	—	—
57			Como se divide un campo	IV	2
58			Un problema sobre sección del cono	IV	2
59	III	3	Desigualdad en números positivos	IV	3
60			Otra desigualdad en el triángulo	...	.
61			Un lugar geométrico	IV	4
62			Asíntota y círculo osculador	IV	2
63			El θ en la fórmula de Taylor	V	2
64			Equilibrio indiferente	IV	2
65	III	4	Transversales en un triángulo	V	3
66			Un lugar geométrico en el plano	—	—
67			Un lugar geométrico sobre la esfera	—	—
68			Otra ecuación resoluble de 6º grado	IV	3
69			Construibilidad con regla y compás	—	—
70			Una ecuación diferencial no lineal	IV	3
71	IV	1	Rectas isoclinas a los lados de un triángulo desde los vértices	IV	3
72			Un problema sobre determinación de un triángulo	IV	3

(1) La raya significa que no se publicó solución hasta el presente.

PROPUESTO			T E M A	RESUELTO	
Nº	Año	Fasc.		Año	Fasc.
73			Una integral curvilínea sobre la elipse	IV	4
74			Círculos inscriptos y circunscriptos a un segmento parabólico	IV	4
75			Para que las tres patas de una mesa soporten igual carga	V	1
76	IV	2	Un problema sobre determinantes	VII	1
77			Una propiedad del determinante circulante ..	VII	1
78			Una desigualdad trigonométrica en el primer cuadrante	V	1
79	IV	2	Un problema de máximo	V	2
80			Un ejercicio sobre trayectorias ortogonales ..	V	1
81	IV	3	Secciones circulares en un cilindro elíptico ..	VI	1
82			Condición para un valor asintótico	VIII	3-4
83			El movimiento de un excéntrico	V	3
84			¿Puede el radio del círculo inscripto tener razón racional a los tres lados de un triángulo?	V	2
85			Sobre una ecuación pitagórica	V	2
86	IV	4	Cálculo de un determinante	V	3
87			Partición de un triángulo	V	3
88			Un problema geométrico	VI	1
89			La longitud y el área de una envolvente cerrada	VI	4
90			Una ejercitación sobre integrales elípticas ..	VI	3
91	V	1	Un simple problema sobre números enteros ..	VI	2
92			Una identidad trigonométrica condicionada ..	V	4
93			Límite de una sucesión recurrente	—	—
94			Conos en una esfera	V	4
95			Un lugar geométrico	V	4
96	V	2	Sobre una superficie cuártica	VII	4
97			Un problema de aproximación	—	—
98			Un límite	VI	1
99			Estudio de una cúbica	VI	1
100			Deformación angular máxima por afinidad ..	—	—
101	V	3	Ecuación de 3er. grado cuyas raíces son lados de un triángulo rectángulo	VI	2
102			Las raíces de $(x+i)^n + (x-i)^n = 0$, y $(x+i)^n - (x-i)^n = 0$	—	—
103			Sobre un desarrollo en serie del número e ..	VI	1
104			Una cuártica plana	VI	2
105			El área de un sector	VI	2
106	V	4	Múltiplos de 23	VI	3
107			Un cuadrilátero articulado	VI	3
108			Una ecuación cúbica	—	—

PROPUESTO			T E M A	RESUELTO	
Nº	Año	Fasc.		Año	Fasc.
109			Inversión de una hipérbola	VI	3
110			El cambio de variables en los problemas de máximos y mínimos	VII	4
111	VI	1	Una serie	VI	4
112			Las diferencias sucesivas de un producto ...	VII	2-3
113			Propiedades curiosas de una función	VII	2-3
114			Rombos inscriptos a una elipse	VII	2-3
115			Un lugar geométrico	—	—
116			Las trayectorias isogonales de una superficie reglada	VIII	
117	VI	2	Un ejercicio de álgebra	VII	2-3
118			Un límite	VII	1
119			Otro límite	VII	1
120			Estudio de un lugar geométrico	VII	2-3
121			El problema del mono	—	—
122	VI	3	Igualdades entre determinantes	VII	1
123			Una relación entre las tangentes de los án- gulos de un triángulo	VII	1
124			El área de un triángulo isósceles inscrito en un círculo	VIII	3-4
125			Una propiedad focal de las cónicas	VIII	3-4
126			Ecuaciones de raíces complementarias respec- to la unidad	—	—
127	VI	4	La numeración binaria	—	—
128			La suma de una progresión aritmética.....	—	—
129	VI	4	Un ejercicio de máximos y mínimos	VII	4
130			Acotación de la derivada de una función de 2º grado	VII	4
131			Un ejercicio sobre una curva unicursal	—	—
132	VII	1	Una propiedad de las series a términos posi- tivos	VII	4
133			Sobre convergencia de una sucesión de núme- ros positivos	VII	4
134			Aproximación de una suma de muchos térmi- nos; la serie armónica	—	—
135			Las raíces de una ecuación de 4º grado....	—	—
136			Representación aproximada de $\cosh x$	—	—
137	VII	2-3	Una ecuación indeterminada de 1er. grado ..	VIII	3-4
138			Una sucesión de enteros primos entre sí	VIII	3-4
139			Una envolvente	—	—
140			Lugares geométricos de contacto entre haces de círculos y de rectas	—	—
141			Los ángulos en un cuadrángulo completo ...	VIII	3-4

PROPUESTO			T E M A	RESUELTO	
Nº	Año	Fasc.		Año	Fasc.
142	VII	4	Las cifras de los múltiplos de un número entero.	—	—
143			Propiedades extremales del triángulo equilátero.	—	—
144			Sobre la geometría del triángulo	VIII	3-4
145			Estudio en grande de una función analítica.	—	—
146			Un ejercicio de mecánica.	—	—
147	VIII	1-2	Una curva de 4º orden.	VIII	3-4
148			Una ecuación en derivadas parciales.	—	—
149			Una ecuación indeterminada de 3er. grado.	—	—
150			Un problema de máximo.	—	—
151			Sobre números de Liouville.	—	—
152			La forma de las soluciones de la ecuación $y' = f(y)$.	—	—

C U E S T I O N E S

PROPUESTA			T E M A	CONTESTADA	
Nº	Año	Fasc.		Año	Fasc.
1	1	1	Acotación de $\sin x$	I	1
2			Factorización de las soluciones de una ecuación pitagórica	II	4
3			Sobre los tiempos de caída	III	2
4	I	2	Un problema de geometría proyectiva	II	3
5	II	2	Cálculo de raíces de índices elevados	—	—
6	II	4	Polígonos regulares circunscriptos a un cuadrángulo	III	3
7			El aparato de Mariotte	III	4
8	III	2	Sobre transformación homográfica	IV	2
9			Sobre un teorema de F. FAA DI BRUNO	IV	1
10	III	3	El error en la valuación del área de un polígono	—	—
11			Probabilidad de verificar, en el intervalo $0-1$, $\prod \frac{a_i}{k} < 1$	IV	3
12			Las configuraciones de ocho puntos en un plano	V	3
13	V	1	Sobre transformaciones conformes	—	—
14	V	3	Sobre geometría no euclidiana	—	—

BIBLIOGRAFIA

W. BLASCHKE, *Analytische Geometrie*. Bücher der Mathematik und Naturwissenschaften (Notdruck). Wolfenbütteler Verlagsanstalt, Wolfenbüttel und Hanover, 1948, 152 págs.

— — *Projective Geometrie*, id. id. 1947, 160 págs.

La colección a la que pertenecen estos dos libritos lleva la indicación de "Notdruck", es decir, la advertencia de que se trata de unas ediciones de emergencia dado el estado de la Alemania de post-guerra. La observación, sin embargo, debe entenderse únicamente en cuanto a la calidad y el aprovechamiento del papel, pero no en cuanto la impresión propiamente dicha, que sigue siendo excelente, clara y límpida, como en todos los libros alemanes de matemáticas de antes de la guerra.

Los dos libros que reseñamos forman en conjunto un todo orgánico. Son destinados a los alumnos de los primeros años de la Facultades o Escuelas técnicas; el contenido puede considerarse elemental, pero el punto de vista adoptado es en general el de mostrar caminos hacia horizontes más superiores y poner de manifiesto las ventajas de utilizar, en ciertos momentos, mecanismos de cálculo a menudo olvidados (matrices, cuaterniones, números duales). Contienen muchos teoremas y problemas concretos seleccionados con la habilidad y maestría del autor en todos sus tratados, que no suelen figurar en los tratados corrientes. Un cúmulo de fechas y datos bio y bibliográficos acrecentan el interés de los libros.

En la Geometría Analítica se entra directamente en la del espacio; se presupone, por tanto, un conocimiento de la geometría analítica elemental por parte del lector. Es tratada por el método vectorial y contiene frecuentes aplicaciones a la estática y cinemática del cuerpo rígido. En ciertos momentos se sale del marco que parecería indicar el título para entrar en el estudio de tópicos particulares (cíclidas de Dupin, geodésicas del elipsoide, etc.). Estudia con especial detalle las cuádricas y termina con un resumen, muy útil, de fórmulas y teoremas, algunos no contenidos en el texto.

La Geometría Proyectiva está tratada analíticamente. En ella se estudian con detalle y por separado la parte del plano y la del espacio. Además del estudio de las cónicas y de las cuádricas tienen un capítulo sobre la geometría reglada, otro sobre las geometrías no euclidianas y otro sobre los pares de tetraedros de Möbius (tetraedros que cada uno está al mismo tiempo inscrito y circunscrito en el otro).

Por su contenido variado y por los recursos de cálculo y métodos de de-

mostración utilizados, ambos libros creemos podrían ser de gran utilidad para completar los conocimientos adquiridos por los alumnos de nuestras facultades en los cursos clásicos sobre las materias respectivas, tanto para el estudiante del Doctorado de Matemáticas, como para aquellos de ingeniería que no se sientan del todo desligados con la parte teórica de la matemática.

L. A. SANTALÓ

W. HAACK. *Differentialgeometrie* (Parte I). Bücher der Mathematik und Naturwissenschaften (Notdruck), Wolfenbütterer Verlagsanstalt. Wolfenbüttel und Hanover, 1947. 160 págs.

A la misma colección de los libros reseñados precedentemente pertenece este excelente librito de Geometría Diferencial. En su reducido número de páginas presenta el contenido indispensable para un primer curso de geometría diferencial, con un índice de temas bien seleccionados y claramente expuestos. Se trata de la geometría diferencial de las curvas y superficies, en el espacio de tres dimensiones, desarrollada por el método vectorial. Para el cálculo tensorial y sus aplicaciones a la geometría diferencial de las variedades multidimensionales y del espacio reglado, promete el autor una segunda parte en un próximo volumen.

El contenido del libro es el siguiente: A) Vectores y sus operaciones. B) Curvas en el espacio. C) Elementos de la teoría de superficies (teorema de Meusnier, Euler, hasta el teorema "egregium" de Gauss). D) Representación de superficies (en particular, estudio de las representaciones conformes y equivalentes, con aplicaciones a la cartografía). E) Condiciones de integrabilidad (junto con las fórmulas de las derivadas segundas de Gauss y las de Weingarten). F) Geometría sobre las superficies y superficies de curvatura constante. G) Superficies de área mínima.

La parte F) es particularmente elegante. Introduce el autor, inmediatamente después de la definición de líneas geodésicas, el paralelismo de Levi-Civita, con lo cual puede definir intrínsecamente la curvatura geodésica y demostrar luego la fórmula de Gauss-Bonnet para curvas generales como paso al límite del caso de polígonos geodésicos.

La exposición rigurosa y la impresión clara, a pesar de la calidad del papel y del aprovechamiento de espacio que caracteriza la colección, hacen el libro altamente recomendable.

L. A. SANTALÓ

H. S. M. COXETER. *Regular Polytope*. Methuen et C^o. London, 1948. p. 321 - XX.

Expresa el autor en una de las notas históricas que adornan el libro (p. 13) que Sir D'Arcy W. Thompson le observó una vez que nunca Euclides soñó escribir una Geometría Elemental, sino que lo que realmente escribió Euclides fué un excelente informe (aunque un poco largo) sobre los cinco cuerpos regulares, para el uso de iniciados. La observación en forma un poco chistosa, tiene efectivamente mucho de verdad; pues es bien seguro que el autor de los *Elementos* no entendió escribir un texto para los alumnos de secundaria y que la obra no habría nunca nacido si la admiración por las propiedades de armonía estética de los poliedros regulares o, como se dijo después, platónicos, no hubiera enderezado el pensamiento griego hacia la concepción de una geometría abstracta, independiente de las prácticas necesidades. Ya la pura afirmación de que los poliedros regulares son cinco precisamente, y que no hay posibilidad de otros más, ofrece los rasgos característicos de las conclusiones matemáticas, absolutas y eternas. Y si, al pasar de las dos a las tres dimensiones vemos oponerse a la infinidad de los polígonos regulares con propiedades de simetría muy reducidas y muy simples, el número contado y las propiedades complejas de los poliedros, ¿qué hay que esperar cuando pasamos a mayor números de dimensiones, a los politopos?

Se comprende pues que el estudio del problema haya interesado a muchos matemáticos en el curso de los 2000 años que nos separan de Euclides y de Platon, y haya implicado, en el camino, el recurso y el perfeccionamiento de las más variadas ramas de la matemática, geometría y álgebra, trigonometría y cálculo, cinemática, teoría de los grupos y topología.

El autor distribuye el argumento en 14 capítulos y 8 tablas finales que forman un complemento esencial. Se empieza en el primer capítulo (*Polígono y poliedros*) con una serie de noticias, generalmente simples y más o menos conocidas por quien un poco ha gustado de geometría. El segundo capítulo (*Sólidos regulares y casi-regulares*) ya entra mayormente en profundidad; si llamamos *esfera central* (*mid-sphere*) de un poliedro la esfera inscrita en la red de las aristas, los poliedros regulares se reúnen en pares (salvo el tetraedro que hace par con sí mismo) de recíprocos entre sí en la polaridad respecto de la esfera central, cuya sobreposición define, como parte común, un nuevo poliedro casi-regular, con aristas y diedros iguales, caras regulares, pero no todas iguales, y ángulos sólidos iguales, pero no regulares; mientras el conjunto de los vértices de los dos poliedros determina un nuevo poliedro de caras rómbicas y ángulos sólidos regulares (pero no iguales), mínimo convexo que envuelve a ambos; son el rombododecaedro y el triacontaedro (de 30 caras). En el caso singular de los dos tetraedros regulares recíprocos se obtiene el cubo que, salvo añadir la regularidad, entra bien en la categoría. El capítulo termina con algunas consideraciones generales sobre los poliedros convexos de caras paralelogramáticas, extensión natural de los susodichos, que el autor llama *donodros*. El capítulo tercero trata de los grupos de rotaciones; el cuarto de la división regular del plano y del espacio tridimensional (que el autor dice

“teselacion y panales” (*tessellations and honeycombs*)); y el quinto (*El caleidoscopio*) de los productos de simetrías. Se vuelve luego, después de estas divagaciones en el campo grupal, a consideraciones de forma, en el capítulo VI (*Poliedros estrellados*); pueden obtenerse estos poliedros, sea en modo análogo a los polígonos, por estrellación de los poliedros platónicos, sea también por facetación de los mismos, y figuras más complicadas (casi-regulares) se obtienen por superposición de poliedros estrellados recíprocos respecto de una esfera central. Con el capítulo VII entramos en los espacios de mayor dimensión; el autor se detiene repetidamente sobre el problema de la intuibilidad; recuerda una observación de Poincaré expresando que “un hombre que consagrara en eso su existencia quizás llegaría a figurarse la cuarta dimensión” y admite que a eso hayan llegado efectivamente algunos pocos; desde luego no es éste el problema del matemático, cuya intuición puede concentrarse también en la fórmula. Cómo un polígono regular está determinado por el número de sus lados (o vértices), y un poliedro por los dos números que definen de esta manera las caras y los ángulos sólidos, así procediendo por inducción, se forma, para un politopo en el espacio de n dimensiones un símbolo de $n-1$ números enteros, ordenados, que determina las características de las celdas de menor dimensión que limitan al politopo. Pero esos enteros no pueden ser cualesquiera — como, por otra parte, ya es conocido para el espacio ordinario. Las operaciones elementales de la geometría euclídea (intersección de rectas y de esferas, transporte paralelo) permiten definir en modo intuitivo las generalizaciones inmediatas del tetraedro, del octaedro y del cubo y la partición cúbica del espacio (que el autor representa con las letras $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n$). Y se presenta el hecho curioso que en el espacio de 4 dimensiones todavía, como en el de 3, otros politopos regulares aparecen, y, aun más, el número total sube a 6, mientras que en los espacios de mayor dimensión los primeros aludidos agotan las posibilidades. El cap. VIII, con el título de *truncación*, trata primero de la construcción de los tres poliedros regulares de 4 dimensiones que sobran después de $\alpha_4, \beta_4, \gamma_4$; en efecto uno de ellos se obtiene por truncación del β_4 en modo análogo como el octaedro se obtiene por truncación del tetraedro; los otros dos, recíprocos entre sí, se deducen después con construcción más complicada que no es posible repetir aquí. El capítulo termina con la determinación de algunas propiedades métricas. El cap. siguiente, de sólo 7 páginas, trata de la generalización de la fórmula de Euler a los hiperespacios y los capítulos X, XI, XII generalizan a más dimensiones las consideraciones grupales que, para el caso del espacio, habían formado los capítulos III, IV y V. Por fin el capítulo XIII vuelve al problema de la intuibilidad desde un punto de vista que podría decirse de geometría descriptiva, es decir de conocer los politopos de más dimensiones por sus secciones y proyecciones por y sobre espacios de menor dimensión y el cap. XIV trata de los politopos estrellados y algunas cuestiones conjuntas.

Como dijimos en principio el libro termina con VIII tablas en las cuales estan resumidas las propiedades características de los objetos geométricos encontrados; cada capítulo, con una sola excepción, termina con un párrafo destinado a notas históricas, casi siempre con interesantes detalles biográficos y anecdóticos; muchas figuras y reproducciones fotográficas contribuyen a obje-

tivar la descripción geométrica y una amplia bibliografía y un índice sistemático terminan el volumen que se presenta, también editorialmente, en forma particularmente elegante.

B. LEVI

L. GODEAUX. *Géométrie Algébrique*. Preface de René Garnier. T. IER. *Transformations birationnelles. Géométrie projective hyperspatiale*. Liège. Sciences et Lettres. 1948. 236 págs.

Lucien Godeaux, bien conocido por uno de los más eminentes cultores de la geometría algebraica, nos ofrece con este libro el primer volumen de un curso, del cual se promete la continuación en dos otros volúmenes de próxima aparición. Hemos dicho curso y no tratado, no solamente para estar de acuerdo con algunas palabras con las que termina la muy breve introducción del A., sino también porque creemos expresar el verdadero propósito que el mismo se ha propuesto, puesto que todo el texto, empezando por la elección de los temas y el orden de los capítulos y siguiendo con la estricta uniformidad del método corresponde perfectamente para poner lo más prontamente el lector en posesión de los conceptos fundamentales, mas bien que para dar completa información de la variedad de los desarrollos. Método y lenguaje estrictamente clásico y geométrico que constituye también una nota interesante en el actual momento en el cual la tendencia parece hacerse más abstracta, más crítica y formalmente algebraica.

Se supone que el lector está en posesión de las nociones fundamentales de carácter proyectivo sobre curvas y superficies algebraicas, en el plano y en el espacio, noticias estas que pueden fácilmente buscarse en otros volúmenes del A. (*Leçons de Géométrie analytique à trois dimensions* (1945); *Introduction à la géométrie supérieure* (1946); a este último se hace frecuente referencia a lo largo del actual). El primer capítulo (*Puntos singulares de las curvas planas*) empieza por lo tanto sin más preámbulos con el estudio de las transformaciones cremonianas cuadráticas, instrumento llave para la descomposición de las singularidades de las curvas. El autor llega a estas transformaciones por la consideración simultánea de dos reciprocidades, artificio didácticamente interesante y de sabor estrictamente geométrico, aunque sin vinculación con los fines actuales. Sigue con la definición de los *puntos infinitamente próximos de los diferentes órdenes* respecto de un punto singular de una curva plana, y con la definición de los caracteres de composición, que se aplica al cálculo de la multiplicidad de intersección. La independencia de tal definición de los parámetros variables en las transformaciones cuadráticas utilizadas (que geométricamente queda implícita en dicha aplicación) se admite tácitamente como intuitiva, siguiendo en esto una costumbre histórica.

El capítulo siguiente trata en general de las transformaciones cremonianas planas; un párrafo inicial introduce en los conceptos generales relativos a sistemas lineales, aun no homaloidicos de curvas planas y a la conclusión se

trata, como ejemplo interesante, el problema de la determinación de los sistemas homaloidicos (cuatro en todo) cuyos puntos bases tienen todos la misma multiplicidad.

Los dos capítulos que siguen están dedicados a las transformaciones birracionales (cremonianas) entre espacios lineales en tres dimensiones, lo que lleva a estudiar la representación de un plano sobre una superficie racional, deduciendo en mientras algunos números característicos de estas superficies. Se estudian en particular algunas transformaciones clásicas.

Una segunda parte del volumen está destinada a la geometría proyectiva hiperspacial; los dos primeros capítulos (VI y VII) se refieren a tópicos generales; el VIII trata de las curvas racionales por medio de su representación normal, la que se aplica luego al estudio de las involuciones unicursales; el capítulo IX está análogamente destinado a las superficies racionales, lo que lleva a la consideración especial de la superficie de Steiner, de la superficie de Veronese y por fin de las variedades de Corrado Segre (cap. X). El capítulo XI está destinado al estudio de la cuádrica en el espacio de 5 dimensiones como representativa del espacio reglado.

El eminente profesor de la Sorbonne que acompaña la publicación de este volumen con su presentación, pone de particular relieve la importancia del libro para interesar al estudiante francés en una rama geométrica que tiene poca consideración en los cursos tradicionales; la observación podría extenderse; se trata de teorías que, principalmente en su aspecto geométrico, se han desarrollado principalmente en Alemania primero y después en Italia; L. Godeaux, que se complace en considerarse alumno y continuador de la escuela italiana, está por cierto particularmente indicado para esta divulgación, aun para un círculo mucho más amplio que el de los estudiosos para los cuales el francés es idioma nacional.

B. LEVI

GIOVANNI SANSONE. *Equazioni differenziali nel campo reale. Parte seconda.* Bologna. Zanichelli, 1949. 475 págs. XVI.

Hemos presentado en el fascículo anterior (p. 89) la primera parte de este notable tratado. Esta segunda parte, ella también en segunda edición, puede definirse como dirigida, en su concepto general, al estudio en grande de las propiedades que corresponden a las funciones, consideradas en su recorrido total, por el hecho de satisfacer a neterminado tipo de ecuaciones diferenciales, las que, en efecto constituyen la definición misma de las funciones consideradas, independientemente de la posibilidad de representarlas por expresiones analíticas formadas con funciones conocidas. Es en efecto este el caso más importante y más común actualmente, frecuente para las ecuaciones que se presentan en las aplicaciones prácticas de la mecánica y de la física.

El primer capítulo del volumen (que en la numeración general de la obra lleva el número VII) trata del *Comportamiento asintótico de las integrales* donde, sin embargo, la palabra "asintótico" debe entenderse sucesivamente

en todas sus distintas acepciones; puede entenderse en el sentido de *estabilidad a la Dirichlet* cuando para pequeñas variaciones de los valores iniciales, las integrales sufren variaciones pequeñas en todo el intervalo de variabilidad de la variable, desde $-\infty$ hasta $+\infty$; o bien una *estabilidad a la Routh*, cuando la variabilidad de las soluciones queda acotada sólo bajo alguna condición restrictiva; puede entenderse, por contrario en el sentido de que, teniendo la ecuación un punto singular en el infinito, se pueda encontrar de ella soluciones representables por desarrollos asintóticos en el sentido de Poincaré; o puede entenderse también en el sentido que se busquen soluciones que, para $x \rightarrow \infty$ tiendan a límite finito. Hay que notar que en todos estos casos (como para muchos otros resultados de la teoría de las ecuaciones diferenciales) juega un papel muy importante la linealidad de las ecuaciones. Al caso particular de la ecuación $y'' + A(x)y = 0$ dedica el A. consideración particular, con resultados de Kneser, Ascoli, Fubini, Armellini, Tonelli, Sansone.

El capítulo siguiente VIII, vuelve sobre problemas existenciales de las soluciones a los cuales ya se refiere el cap. I del volumen anterior; pero se trata aquí de considerarlos, como arriba dijimos, en grande, y particularmente de encarar las limitaciones que sufren las afirmaciones de existencia y de unicidad (Peano, Perron, Caratheodory, Rosenblatt, Bompiani, Tonelli, etc.). Se incluyen en este capítulo los teoremas oscilatorios y problemas de valores al contorno para ecuaciones diferenciales de segundo orden.

El capítulo IX está destinado a las singularidades; aun aquí la singularidad se entiende bajo distintos aspectos; tenemos en el § 1 el examen de los puntos singulares (de atracción y de repulsión de las soluciones) con la clasificación de Poincaré; y tenemos en el § 2 las integrales singulares con sus relaciones a la solución general. El capítulo X trata de operadores diferenciales y operadores integrales; los primeros, esencialmente lineales y de uso para escalar la resolución de ecuaciones lineales de orden superior; los segundos, representados principalmente por la transformación de Laplace, que transforman en ecuaciones integrales los problemas relativos a ecuaciones diferenciales lineales. El capítulo termina con breves indicaciones sobre los métodos operacionales de Heaviside y de Giorgi.

El capítulo XI se refiere al cálculo numérico y gráfico de las soluciones, incluyendo la integración mecánica.

Por fin el capítulo XII, el más extenso de todos, ocupando un cuarto del volumen completo, trata de algunas ecuaciones especiales que las prácticas aplicaciones han señalado en los años recientes y a cuyo estudio el autor del libro ha dado aún recientemente contribuciones de nota: § 1. Movimiento de un punto pesado en un medio resistente; § 2. Ecuación de las vibraciones amortiguadas; § 3. Ecuación de las oscilaciones de relajación (de Liénard) § 4. Vibraciones amortiguadas del péndulo; § 5. Ecuación del equilibrio de las esferas gaseosas politrópicas; § 6. Ecuación del movimiento electrónico en el magnetron de Hull; § 7. Ecuación de Thomas-Fermi; § 8. Ecuación de Schrödinger.

Como el volumen anterior, integran el presente un índice de autores citados y un índice analítico.

Table of Scattering Functions for Spherical Particles. Department of Commerce. National Bureau of Standards. Applied Mathematics Series (4). United States Government Printing Office, Washington, 1948, 119 págs.

Los modernos fundamentos de la teoría de la dispersión de la luz debida a la incidencia contra un medio constituido por pequeñas partículas de diámetro comparable con la longitud de onda, como se debe imaginar la estratosfera terrestre, fueron establecidos por Gustav Mie en una memoria célebre "*Beiträge trüber Medien*", publicada en 1908 en los *Annalen der Physik*. Suponiendo que el cuerpo refringente sea una pequeña esfera de las aludidas dimensiones, cuyo radio se representa por r y cuyo índice de refracción se representa por m , Mie ha dado fórmulas para determinar, en función de estos elementos y de la longitud de onda de la luz incidente, las características de intensidad en distintas direcciones de las ondas difractadas. Recíprocamente, por el conocimiento de la distribución angular de la luz difractada se puede remontar al análisis del medio actuante en cuanto al tamaño y a la condensación de las partículas constituyentes se refiere. Estas tablas estan destinadas a facilitar los cálculos relativos.

Precede un corto pero interesante prefacio de J. A. Stratton resumiendo la historia del problema que encuentra su primer origen en la búsqueda de una explicación de los colores del cielo. La hipótesis de que ellos dependan de la acción de cierta materia muy finamente distribuida en los espacios remonta a Leonardo de Vinci y a Newton; con más fundamento ella ha sido valorizada en los tiempos modernos, primero por medio del experimento por Tindall, luego por el cálculo por lord Rayleigh, M. Garnett y G. Mie.

Las tablas se dividen en cuatro partes destinadas, la primera a permitir el cálculo de las intensidades en las distintas direcciones de las dos componentes del rayo reflejado, polarizadas respectivamente según el plano de observación (plano del rayo incidente y del reflejado) y según la normal a éste, en el caso de la luz natural y suponiendo transparente la partícula dispersante; la segunda, en las mismas condiciones da, para el índice de refracción 1,5 la dispersión total; la tercera se refiere a la análoga cuestión para material absorbente y la cuarta a algunos casos, particularmente interesantes para las aplicaciones del radar, en los cuales conviene tener en cuenta también el poder absorbente del medio.

Precede a las tablas una breve introducción, conteniendo la explicación de los símbolos y las fórmulas fundamentales sobre las cuales las tablas han sido calculadas, cuyo interés está acrecentado por los informes que se pueden recabar sobre etapas parciales del cálculo de las tablas.

B. LEVI

Table of Sines and Cosines to Fifteen Decimal Places at Hundredths of a Degree. U. S. Department of Commerce. National Bureau of Standards. Applied Mathematics Series — 5 — United States Government Printing Office. Washington, 1949, págs. 95.

Para responder a las necesidades de los calculistas en astronomía, geodesia, navegación, balística, radar y de las investigaciones sobre instrumentos ópticos, aeronavegación, cohetes, estas tablas contienen, como dice el título, los valores naturales de senos y cosenos en 15 decimales por centésimos de grado. Para mantener este grado de aproximación la interpolación por partes proporcionales deja de ser aplicable, pues daría exacta sólo la séptima decimal; las tablas están por tanto ordenadas para utilizar las diferencias segundas por medio de la fórmula de Everett. Los valores de estas diferencias segundas están inscriptos en una columna aparte al lado del valor del término central de la diferencia y en una tablita suplementaria de dos páginas están dados los valores con 8 decimales de los coeficientes de la fórmula correspondientes a los incrementos por intervalos de $1:10^4$ de grado. Otra pequeña tabla suplementaria reproduce los valores de los senos y cosenos por grados enteros con 30 decimales como fueron publicados en 1848 por Herrmann en los *Sitzungsberichte* de la Academia de Viena.

En una introducción de las tablas H. E. Salzer ofrece algunas noticias sobre el método usado para la calculación de las tablas sobre otras tablas análogas existentes y detalla, con ejemplos, los cálculos necesarios para la interpolación directa e inversa.

B. LEVI

R. GIANNARELLI - E. LEONARDI. *L'istruzione universitaria e pre-universitaria in Italia e all'estero.* Firenze. Le Monnier. 1949. 430 págs.

Aunque el argumento de este volumen se aleja completamente del interés matemático, puede ser en el momento actual de la vida cultural e intelectual de interés general para estudiantes y profesores una breve noticia.

Ello entiende proporcionar, para los interesados italianos y extranjeros los informes esenciales sobre los argumentos siguientes:

Ordenamiento de las Universidades e Institutos superiores en Italia.

Síntesis de los ordenamientos análogos en los demás países y valor comparativo de los títulos de estudio.

Informaciones sobre la instrucción artística, técnica, profesional, clásica, científica y magistral en Italia.

Para responder a las necesidades de lectores que tienen poco dominio del italiano, las partes que se refieren a la admisión de extranjeros en las escuelas italianas están presentadas en traducción francesa e inglesa en dos ediciones especiales que llevan respectivamente los títulos: *L'instruction universitaire et préuniversitaire en Italie et à l'étranger.* *University and Pre-university Education in Italy and Abroad.*

- El precio de suscripción a “*Mathematicae Notae*” es de 8 \$ (m/n) anuales.
- El Instituto de Matemática publica también una colección de Notas y Memorias bajo el título “Publicaciones del Instituto de Matemática de la Facultad de Ciencias etc.”, cuyo precio de suscripción es de 10 \$ (m/n) por volumen. Se pueden adquirir los fascículos sueltos de las publicaciones al precio señalado en la pág. 4 de esta misma tapa.
- Para todo lo relacionado al Instituto, a las Publicaciones y a “*Mathematicae Notae*” dirigirse al Director del Instituto de Matemática — Avenida Pellegrini 250 — Rosario (R. Argentina).
- Para suscripciones y adquisición de los fascículos sueltos dirigirse al Director del Instituto o bien al Bibliotecario de la Facultad de Ciencias Matemáticas, etc., Avenida Pellegrini 250, Rosario (Rep. Argentina). Los importes deberán remitirse en efectivo o bien por giros postales o bancarios pagaderos en la ciudad de Rosario, con preferencia sobre el Banco de la Nación Argentina.
- Los suscriptores en la República Oriental del Uruguay pueden dirigirse al señor Prof. F. Sayagués, Constituyente 1863, Montevideo.

INDICE DEL FASCICULO 1-2

	Pág.
Sobre las relaciones entre las mutuas distancias de cuatro puntos de una puntual (ALEJANDRO TERRACINI)	1
Ensayo histórico y crítico sobre la aritmética de los conjuntos y el problema del continuo (B. LEVI)	6
Una extensión del teorema de Rolle para transformaciones continuas del plano (MISCHA COTLAR)	79
Ejercicios y problemas (Propuestos)	85
Bibliografía	87

Fascículos aparecidos en las "PUBLICACIONES" del Instituto de Matemáticas

		m\$ n.
Vol. I.	1 - B. LEVI — Sobre el sistema $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xy) dx = p(y); \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xy) dy = q(x)$	1.00
	2 - L. A. SANTALÓ — Geometría integral de figuras ilimitadas	1.80
	3 - F. AMODEO — Origen y desarrollo de la Geometría proyectiva. Trad. de Nicolás y José Babini	8.00
	4 - B. LEVI — Una teoría intuicionista de las funciones racionales enteras de una variable	1.00
Vol. II.	1 - P. MONTEL — Funciones armónicas y subarmónicas	1.00
	2 - G. FUBINI — La ley de la media para funciones no derivables. B. LEVI — Sobre un teorema de Weierstrass, el teorema de Rolle y el anterior teorema de Fubini	1.00
	3 - L. A. SANTALÓ — Una demostración de la propiedad isoperimétrica del círculo	1.20
	4 - L. A. SANTALÓ — Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas	1.50
	5 - I. Antecedentes de la creación del Instituto. — II. Acto de inauguración oficial del Instituto. — C. PLA, Origen y propósitos del Instituto. — J. REY PASTOR, La matemática italiana en el último medio siglo y la posición del Dr. Beppo Levi en ella. — B. LEVI, Evolución del pensamiento matemático	1.50
	6 - E. GASPAR — Fórmulas integrales referentes a intersección de una figura plana con bandas variables	1.50
	7 - A. ROSENBLATT — Sobre el teorema de los grandes números en la teoría de la probabilidad	1.00
	8 - M. COTLAR — Sobre conjuntos no medibles y generalización de la integral de Lebesgue - Prólogo por B. Levi	1.50
	9 - B. LEVI — La noción de "dominio deductivo" como elemento de orientación en las cuestiones de fundamentos de las teorías matemáticas	1.50
Vol. III.	1 - Homenaje a la memoria de V. Volterra y J. J. Thomson. C. PLÁ — Semblanza de Sir Joseph J. Thomson. B. LEVI — La personalidad de Vito Volterra	1.00
	2 - G. FUBINI — Algunas propiedades de los grupos discontinuos finitos	2.50
	3 - B. LEVI — Teoría de la integral de Lebesgue independiente de la noción de medida	3.00
	4 - B. LEVI — Sobre la inversión de una integral definida	1.20
	5 - L. A. SANTALÓ — Curvas extremales de la torsión total y curvas-D.	2.00
	6 - A. TERRACINI — Orígenes de algunos conceptos geométricos	2.00
	7 - L. A. SANTALÓ — Complemento a la Nota "Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas"	1.30
Vol. IV.	1 - L. A. SANTALÓ. — Sobre ciertas variedades con carácter de desarrollable en el espacio euclidiano de cuatro dimensiones	3.00
	2 - M. COTLAR — Funciones univalentes sobre un conjunto de puntos del contorno de un dominio de holomorfismo	2.00
	3 - JOSÉ L. MASSERA. — Fórmulas en diferencias finitas con aplicación a la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales de primer orden	3.50
	4 - A. KOMISCHKE. — Sobre las relaciones entre la luz y la gravitación	2.50
	5 - R. LAGUARDIA y B. LEVI. — Sobre la representación por integrales de algunas funciones definidas por desarrollos de Taylor y aplicación a las soluciones de ecuaciones en derivadas parciales	2.00
Vol. V y VI.	Memorias ofrecidas por varios amigos, alumnos y admiradores en homenaje al Dr. Julio Rey Pastor	30.00
Vol. VII.	1 - J. C. VIGNAUX y M. COTLAR. — Las familias totalmente normales de funciones analíticas	6.00
	2 - J. V. USPENSKY. — Sobre el problema de la ruina de los jugadores	2.50
	3 - F. I. TORANZOS — Sobre proyectividad en los espacios de Hilbert	1.00
	4 - E. A. SAGASTUME BERRA — El álgebra moderna y sus problemas	2.00
Vol. VIII.	1 - B. LEVI - L. A. SANTALÓ - C. DEMARÍA — Estudios numerativos sobre las variedades de contacto de las superficies en un espacio de n dimensiones	4.50
	2 - G. GRIOLI. — Sul comportamento di un vincolo concentrato nel centro di una piastra circolare	2.00
	3 - M. COTLAR - E. ZARANTONELLO. — Grupos semiordenados y L-ideales de Riess-Birkhoff	6.00
	4 - P. CAPELLI. — Algunas observaciones sobre las funciones univalentes y una clase particular de las mismas	