

# Instituto Politécnico

Universidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de

## Recta en el Plano

## Matemática

Masterización: RECURSOS PEDAGÓGICOS



## 4º Año

Cód. 1405-19

Autoras

Antonela Modica  
Mónica Napolitano



Dpto. de Matemática



## ECUACIÓN VECTORIAL y ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE LA RECTA EN EL PLANO

### Definición: Recta en el Plano como lugar geométrico

Dado un punto  $p_0$  del plano y un vector no nulo  $\vec{u}$ , definimos la recta en el plano  $R$  paralela al vector  $\vec{u}$  y que pasa por el punto  $p_0$  como el lugar geométrico de los puntos  $p$  del plano tales que:

$$\overrightarrow{p_0p} \parallel \vec{u} \quad \text{ó} \quad \overrightarrow{p_0p} = \vec{0}$$

De la definición podemos observar:

$$\text{Si } \overrightarrow{p_0p} \parallel \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{p_0p} = \lambda \vec{u} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (1)$$

$$\text{Observa que si } \lambda = 0 \Rightarrow \overrightarrow{p_0p} = 0 \vec{u} = \vec{0} \quad (2)$$

De (1) y (2) obtenemos que:

$$p \in R \Leftrightarrow \overrightarrow{p_0p} = \lambda \vec{u} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

### Ecuación Vectorial de una recta $R$ en el plano

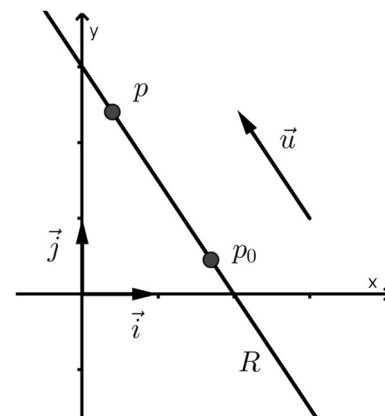
Dados  $p_0 \in R \wedge \vec{u} \parallel R \wedge \vec{u} \neq \vec{0}$ :

$$p \in R \Leftrightarrow \overrightarrow{p_0p} = \lambda \vec{u} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Ahora, fijemos un sistema coordenado  $\{o, \vec{i}, \vec{j}\}$ , como se muestra en la figura de la derecha. Vamos a analizar qué características poseen las coordenadas de los puntos que pertenecen a esta recta.

Sabemos que  $R \parallel \vec{u} = (u_1; u_2)$  y que  $p_0(x_0; y_0) \in R$ .

$$\begin{aligned} p(x; y) \in R &\Leftrightarrow \overrightarrow{p_0p} = \lambda \vec{u} \quad \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x - x_0; y - y_0) = \lambda \cdot (u_1; u_2); \quad \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x - x_0; y - y_0) = (\lambda \cdot u_1; \lambda \cdot u_2); \quad \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = \lambda \cdot u_1 \\ y - y_0 = \lambda \cdot u_2 \end{cases} ; \quad \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \end{aligned}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + \lambda \cdot u_1 \\ y = y_0 + \lambda \cdot u_2 \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

### Ecuaciones Paramétricas de una recta $R$ en el plano

Dados  $p_0(x_0; y_0) \in R \wedge \vec{u} = (u_1; u_2) \parallel R \wedge \vec{u} \neq \vec{0}$ :

$$R) \begin{cases} x = x_0 + \lambda \cdot u_1 \\ y = y_0 + \lambda \cdot u_2 \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

Son las ecuaciones paramétricas de una recta en el plano



#### Ejemplo

Obtiene las ecuaciones paramétricas de la recta  $S \parallel \vec{u} = (2; 1)$  tal que  $p_0(-2; 1) \in S$  y luego:

- Determina las coordenadas de dos puntos de  $S$ .
- Dibuja la recta  $S$ .
- Determina analíticamente si el punto  $q(2; 4) \in S$ .

Resolución:

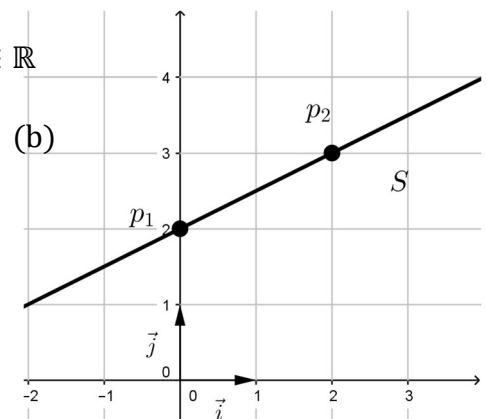
Ecuaciones paramétricas:

$$S) \begin{cases} x = -2 + 2 \cdot \lambda \\ y = 1 + 1 \cdot \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

(a)  $\lambda = 1 \Rightarrow x = 0 \wedge y = 2 \Rightarrow p_1(0; 2) \in S$

$\lambda = 2 \Rightarrow x = 2 \wedge y = 3 \Rightarrow p_2(2; 3) \in S$

(c)  $\left\{ \begin{array}{l} 2 = -2 + 2\lambda \rightarrow \lambda = 2 \\ 4 = 1 + \lambda \rightarrow \lambda = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow q \notin S$



#### OBSERVACIONES IMPORTANTES



- Cada valor real de  $\lambda$  determina un único punto  $p \in R$ , y recíprocamente. Es decir, existe una relación biunívoca entre los parámetros y los puntos de una recta.
- Una recta en el plano posee infinitas ecuaciones paramétricas (esto se debe, por ejemplo, a que existen infinitos vectores paralelos a ella)
- Toda recta en el plano se puede describir con ecuaciones paramétricas.



## ACTIVIDADES

- Determina ecuaciones paramétricas para la recta  $R$  si  $\vec{u} = (2; -2) \parallel R \wedge p(5; 0) \in R$ , y luego:
  - Determina analíticamente si  $q(5; 1) \in R$ .
  - Obtiene la intersección de  $R$  con los ejes coordenados.
- Obtiene las ecuaciones paramétricas de la recta  $\overleftrightarrow{ab}$  siendo  $a(2; 3)$  y  $b(-1; 2)$ .
- Determina ecuaciones paramétricas para la recta  $R$  paralela a la recta  $S) \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 - t \end{cases}; t \in \mathbb{R}$ , y que pasa por el punto  $q(1; 1)$ .
- Determina ecuaciones paramétricas para la recta  $R$  perpendicular a la recta  $S) \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \end{cases}; t \in \mathbb{R}$ , y que pasa por el punto  $q(-1; 1)$ .
- Encuentra, si es que existe, analíticamente el punto de intersección de las rectas:

$$S) \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 4t \end{cases}; t \in \mathbb{R} \quad y \quad R) \begin{cases} x = 6 - 2\lambda \\ y = -3 + 3\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$

- Una partícula se mueve a velocidad constante siguiendo una trayectoria recta descrita en la ecuación  $\begin{cases} x = 4 - t \\ y = 2 + 4t \end{cases}$ , donde  $t$  es el tiempo medido en segundos. Responde:
  - ¿En qué sentido se “traslada” la partícula sobre la recta?
  - ¿Pasa por el punto de coordenadas  $(0; 18)$ ? Si tu respuesta es afirmativa, ¿en qué instante lo hace?
  - En algún instante, ¿se chocará con otra partícula cuya trayectoria es  $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 7 - t \end{cases}$ ?
- Un móvil se desplaza durante 2 horas en línea recta siguiendo la trayectoria descrita por las ecuaciones  $\begin{cases} x = 20t \\ y = 15t \end{cases}$ , donde  $t$  es el tiempo medido en horas; luego de esas dos horas iniciales, cambia la trayectoria, siguiendo en línea recta, pero ésta se describe con  $\begin{cases} x = -10 + 25t \\ y = 30 \end{cases}$ .
  - ¿Cuáles son las coordenadas del punto donde cambia de trayectoria?
  - Realiza un croquis de la trayectoria del móvil
  - Un segundo coche se está desplazando simultáneamente con la trayectoria  $\begin{cases} x = 60 - 3t \\ y = 12t \end{cases}$ . ¿En algún instante se chocarán ambos coches?

### ECUACIÓN CANÓNICA (SIMÉTRICA) y CARTESIANA (GENERAL) de la RECTA EN EL PLANO

Las ecuaciones que analizaremos a partir de ahora, suelen llamarse “cartesianas” por el motivo en que las condiciones sobre las coordenadas de los puntos para que pertenezcan a una recta en particular se establecen sólo, algebraicamente, sobre éstas y no “dependen” de otro parámetro, como sucede en las ecuaciones analizadas anteriormente. Estas ecuaciones nos brindan sólo información geométrica de la recta.

Sabiendo que  $R \parallel \vec{u} = (u_1; u_2) \neq \vec{0}$  y que  $p_0(x_0; y_0) \in R$ , se puede escribir:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda \cdot u_1 \\ y = y_0 + \lambda \cdot u_2 \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{Si } u_1 \neq 0 \wedge u_2 \neq 0: \begin{cases} \lambda = \frac{x-x_0}{u_1} \\ \lambda = \frac{y-y_0}{u_2} \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda = \frac{x-x_0}{u_1} = \frac{y-y_0}{u_2}$$

#### Ecuación Canónica o Simétrica de una recta $R$ en el plano

Dados  $p_0(x_0; y_0) \in R \wedge \vec{u} = (u_1; u_2) \parallel R \wedge u_1 \neq 0 \wedge u_2 \neq 0$ :

$$R) \frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2}$$

Es la ecuación simétrica de una recta en el plano



#### Ejemplo

Sea la recta  $S) \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{6}$ :

- Obtiene las componentes de un vector paralelo a  $S$ .
- Calcula las coordenadas de dos puntos pertenecientes a  $S$ .
- Determina analíticamente si el punto  $q(2; 4) \in S$ .

Resolución:

(a)  $\vec{w} = (2; 6) \parallel S$

(b)  $a(1; 3) \in S$

Si  $x = 0 \Rightarrow \frac{-1}{2} = \frac{y-3}{6} \Rightarrow y = 0 \quad \therefore b(0; 0) \in S$

(c)  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{x-1}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2} \\ \frac{y-3}{6} = \frac{4-3}{6} = \frac{1}{6} \end{array} \right\} \Rightarrow q \notin S$



### OBSERVACIONES IMPORTANTES



- ☑ Una recta en el plano posee infinitas ecuaciones simétricas (esto se debe, por ejemplo, a que existen infinitos vectores paralelos a ella)
- ☑ No toda recta en el plano se puede describir con una ecuación simétrica. En efecto:
  - Como  $u_1 \neq 0 \Rightarrow R$  no puede ser vertical.
  - Como  $u_2 \neq 0 \Rightarrow R$  no puede ser horizontal.

Sabiendo que  $R \parallel \vec{u} = (u_1; u_2) \neq \vec{0}$  y que  $p_0(x_0; y_0) \in R$ , se puede escribir:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda \cdot u_1 \\ y = y_0 + \lambda \cdot u_2 \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

Como el vector es no nulo, alguna de sus componentes no debe ser nula, sin pérdida de generalidad, suponemos que  $u_1 \neq 0$ . Así, podemos escribir el parámetro en función de  $x$ ,  $x_0$  y  $u_1$ , es decir:  $\lambda = \frac{x-x_0}{u_1}$  (1)

Entonces como  $y = y_0 + \lambda \cdot u_2$ , podemos sustituir por (1):

$$y = y_0 + \lambda \cdot u_2 = y_0 + \frac{x - x_0}{u_1} \cdot u_2 = \frac{u_1 \cdot y_0}{u_1} + \frac{(x - x_0) \cdot u_2}{u_1}$$

Trabajando algebraicamente la expresión, queda:

$$\begin{aligned} u_1 y &= u_1 y_0 + u_2 x - u_2 x_0 \\ u_2 x - u_1 y + u_1 y_0 - u_2 x_0 &= 0 \\ u_2 x + (-u_1)y + [u_1 y_0 - u_2 x_0] &= 0 \end{aligned}$$

Renombramos las constantes, para que quede más prolijo:

$$\begin{aligned} a &= u_2 \\ b &= (-u_1) \\ c &= u_1 y_0 - u_2 x_0 \end{aligned}$$

Así, la ecuación queda:

$$ax + by + c = 0$$

### Ecuación Cartesiana o General de una recta $R$ en el plano

$$R) ax + by + c = 0$$

Es la ecuación general de una recta en el plano, donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son coeficientes de la ecuación,  $y$ ,  $a$  y  $b$  no pueden ser simultáneamente nulos.

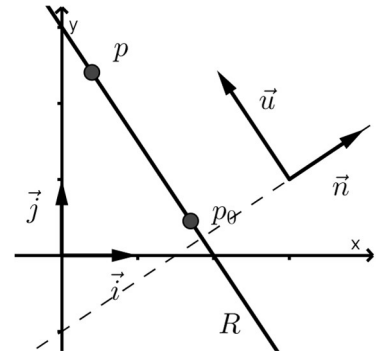


### Interpretación geométrica de los coeficientes $a$ y $b$

Sabemos que el vector  $\vec{u} = (u_1; u_2) \parallel R$ ; llamemos  $\vec{n}$  al vector formado por los coeficientes  $a$  y  $b$ , es decir  $\vec{n} = (a; b)$ , que es un vector no nulo.

$$\begin{aligned}\vec{n} \times \vec{u} &= (a, b) \times (u_1; u_2) = (u_2; -u_1) \times (u_1; u_2) \\ &= u_2 u_1 + (-u_1) u_2 = 0\end{aligned}$$

Así, entonces:  $\vec{n} \times \vec{u} = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{n} \perp R$



Con este resultado podemos observar que la ecuación cartesiana es muy fácil de utilizar si lo que se tiene por dato ya no es un vector paralelo a la recta sino uno perpendicular, pues sus componentes son los primeros dos coeficientes de la ecuación.



### Ejemplo

1) Obtene<sup>1</sup> la ecuación cartesiana de la recta  $S \perp \vec{u} = (2; 1)$  tal que  $p_0(-2; 6) \in S$  y luego:

- Determina las coordenadas de dos puntos de  $S$ .
- Determina analíticamente si el punto  $q(2; 4) \in S$ .

*Resolución:*

Ecuación cartesiana:  $S) ax + by + c = 0$

$$a = 2 \wedge b = 1$$

$$S) 2x + 1y + c = 0 (*)$$

Como  $p_0(-2; 6) \in S$ , sus coordenadas cumplen la ecuación (\*), entonces:

$$S) 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 6 + c = 0$$

$$\therefore c = (-2)$$

$$\therefore S) 2x + y - 2 = 0$$

(a) Para determinar coordenadas de puntos de paso se suele asignar un valor a una de las variables  $x$  o  $y$ , luego obtener la restante.

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \quad \therefore p_1(0; 2) \in S$$

$$\text{Si } y = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \quad \therefore p_2(1; 0) \in S$$

(b) Si un punto pertenece a una recta, sus coordenadas deben cumplir con la ecuación, así que deberemos reemplazar, hacer las cuentas y verificar:

$$2 \cdot 2 + 4 - 2 = 6 \neq 0$$

$$\therefore q \notin S$$

<sup>1</sup> Obtener la ecuación cartesiana de una recta, implica obtener los valores de sus coeficientes.



2) Obtene la ecuación general de la recta  $\overleftrightarrow{pq}$ , siendo  $p(-2; 3)$  y  $q(2; 4)$

El vector  $\overrightarrow{pq} = (4; 1) \parallel \overleftrightarrow{pq}$ , entonces el vector  $\vec{n} = (1; -4) \perp \overleftrightarrow{pq}$  (¿por qué?)

Con esto  $a = 1 \wedge b = -4$

$$\overleftrightarrow{pq} x - 4y + c = 0$$

Como  $p(-2; 3) \in \overleftrightarrow{pq}$ :  $\overleftrightarrow{pq}(-2) - 4 \cdot 3 + c = 0 \Rightarrow c = 14$

$$\therefore \overleftrightarrow{pq} x - 4y + 14 = 0$$

### OBSERVACIONES IMPORTANTES



- Una recta en el plano posee infinitas ecuaciones cartesianas (esto se debe, por ejemplo, a que existen infinitos vectores perpendiculares a ella)
- Toda recta en el plano se puede describir con ecuaciones cartesianas.
- $(0; 0) \in S) ax + by + c = 0 \Leftrightarrow c = 0$



### ACTIVIDADES

8. En cada caso, determina la ecuación cartesiana de la recta  $R$ :

a.  $p(3; 1) \in R \wedge \vec{n} = (2; -4) \perp R$

b.  $p(2; -3) \in R \wedge \vec{u} = (1; -4) \parallel R$

c.  $p(2; 1) \in R \wedge S) 2x + y + 1 = 0 \perp R$

d.  $p(-5; 2) \in R \wedge T) \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \end{cases}$  es perpendicular a  $R$

e.  $\vec{u} = (1; -4) \parallel R \wedge p \in R$ , además  $p \in S \cap T$ , siendo  $S)x - y + 1 = 0$  y  $T) \frac{x+2}{4} = \frac{y-3}{-4}$

9. Determina la ecuación canónica de la recta que:

a. es paralela al vector  $\vec{u} = (-1; 2)$  y contiene al punto  $p(5; -1)$

b. pasa por los puntos  $p(2; 3)$  y  $q(-1; 5)$

c. es perpendicular al vector  $\vec{n} = (3; -7)$  y pasa por el origen de coordenadas.

10. Determina, en cada caso, la intersección de las rectas  $R$  y  $S$ :

a.  $R) 2x + 5y - 4 = 0 \wedge S) x - y + 5 = 0$

b.  $R) \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \end{cases}; t \in \mathbb{R} \wedge S) 2x - y - 5 = 0$

c.  $R) 3x + y - 4 = 0 \wedge S) 6x + 2y + 5 = 0$

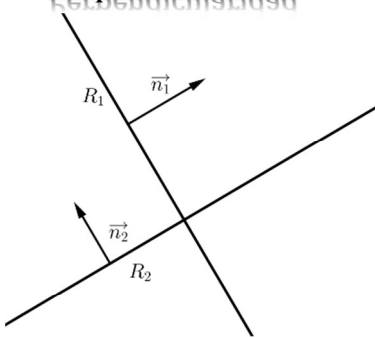
### ESTUDIO ANALÍTICO DE LAS POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS EN EL PLANO DADAS SUS ECUACIONES CARTESIANAS

Tenemos las rectas  $R_1) a_1x + b_1y + c_1 = 0$  y  $R_2) a_2x + b_2y + c_2 = 0$ . Veamos qué información podemos extraer de sus posiciones relativas mediante el estudio de los coeficientes de las mismas.

Recordemos que de las ecuaciones cartesianas podemos “leer” vectores perpendiculares a las rectas, así entonces:

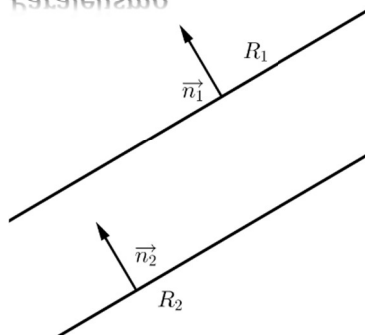
$$\vec{n}_1 = (a_1; b_1) \perp R_1 \wedge \vec{n}_2 = (a_2; b_2) \perp R_2$$

#### Perpendicularidad



$$\begin{aligned} R_1 \perp R_2 &\Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0 \end{aligned}$$

#### Paralelismo



$$R_1 \parallel R_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 = \tau \vec{n}_2, \text{ para algún } \tau \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Si todas las componentes de los vectores son no nulas, podremos ver que:

$$R_1 \parallel R_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$



Observación: (siempre bajo el supuesto de componentes no nulas)

$$R_1 = R_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

En efecto:

$\Rightarrow$ ) si  $R_1 = R_2$  significa que son paralelas (1) y coincidentes (2)

De (1) tenemos:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \tau \Rightarrow (a_1 = \tau a_2 \wedge b_1 = \tau b_2)$$

Así,  $R_1) \tau a_2x + \tau b_2y + c_1 = 0$



De (2) tenemos que si  $p_0(x_0; y_0) \in R_1 \Leftrightarrow p_0(x_0; y_0) \in R_2$ , es decir que sus coordenadas cumplen con ambas ecuaciones. Entonces:

$$\begin{cases} \tau a_2 x + \tau b_2 y + c_1 = 0 \\ a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow c_1 = -(\tau a_2 x_0 + \tau b_2 y_0) = -\tau \cdot (-c_2) = \tau \cdot c_2$$

$$\therefore \frac{c_1}{c_2} = \tau$$

$$\Leftrightarrow \text{si } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \tau \neq 0$$

Debemos demostrar  $p_0(x_0; y_0) \in R_1 \Leftrightarrow p_0(x_0; y_0) \in R_2$ , para cualquier  $p_0$

$$\text{Si } p_0(x_0; y_0) \in R_1 \Leftrightarrow a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 = 0 \Leftrightarrow \tau a_2 x_0 + \tau b_2 y_0 + \tau c_2 = 0$$

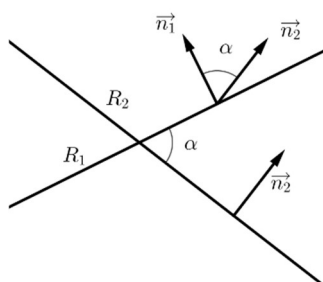
$$\Leftrightarrow \tau (a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2) = 0 \Leftrightarrow a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2 = 0 \Leftrightarrow p_0(x_0; y_0) \in R_2$$

## Rectas secantes - Ángulo entre rectas

Primero, definamos **Ángulo entre dos rectas**:

El ángulo entre dos rectas  $R_1$  y  $R_2$  coincide con el ángulo que forman dos vectores respectivamente paralelos a ellas, o su suplementario. En símbolos:

$$R_1 \wedge R_2 = \vec{u} \wedge \vec{v} \text{ con } \vec{u} \parallel R_1 \text{ y } \vec{v} \parallel R_2$$



$$\text{Se puede ver que } R_1 \wedge R_2 = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \arccos \left( \frac{|\vec{n}_1 \times \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \right)$$



### ACTIVIDADES

11. En cada ítem, indica si los pares de rectas son paralelas; en caso negativo, calcula el ángulo entre ellas:

a. R)  $x - 2y + 7 = 0$       S)  $2x + 8 = 4y$

b. R)  $2x - y + 5 = 0$       S)  $x + y - 7 = 0$

- c.  $R) 2x - y + 10 = 0$        $S) x - 6 = 0$
- d.  $R) x + y + 5 = 0$        $S) x - y + 6 = 0$
- e.  $R) x + y - 10 = 0$        $S) \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + t \end{cases}; t \in \mathbb{R}$

12. Dado el sistema de ecuaciones  $S) \begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ ax + by + 6 = 0 \end{cases}$ :

- a. Indica valores posibles para las constantes  $a$  y  $b$  de forma tal que  $S$  resulte incompatible.
- b. Indica valores posibles para las constantes  $a$  y  $b$  de forma tal que  $S$  resulte compatible determinado.

13. Siendo las rectas  $R) -x + y + 2 = 0$  y  $S) x + y + 6 = 0$ , demuestra que cualquier triángulo determinado por los vértices  $m(-2; -4)$ ,  $p \in R \wedge p \neq m$  y  $q \in S \wedge q \neq m$ , es rectángulo.

14. Sea la recta  $R) x + y - 5 = 0$ , obtiene:

- a. La ecuación de la recta  $S$  paralela a  $R$  que pasa por el punto  $(0;3)$
- b. El área de la región comprendida por las rectas  $R, S$  y los ejes coordenados.

15. Determina una ecuación del lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de los puntos  $p(2; -5)$  y  $q(6; 7)$ .

## DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA DEL PLANO

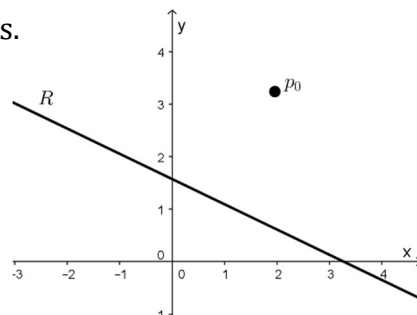
La distancia de un punto a una recta se define como la menor de las distancias entre dicho punto y cualquiera de los puntos de la recta.

Claramente, cuando este punto pertenece a la recta, la distancia será cero.

Por este motivo es que vamos a analizar cómo obtener la distancia cuando se trate de un punto exterior a la recta.

Te proponemos, en este apunte, dos estrategias posibles.

Siempre tomaremos  $p_0 \notin R$ , en un sistema coordenado  $\{o; \vec{i}; \vec{j}\}$

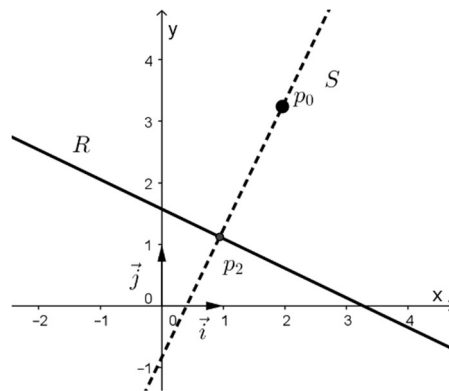




### Estrategia N°1:

- i) Obtiene la ecuación de una recta  $S \perp R$ , tal que  $p_0 \in S$ .
- ii) Halla  $p_2$  tal que  $R \cap S = \{p_2\}$ .
- iii) La distancia de  $p_0$  a  $R$  es:

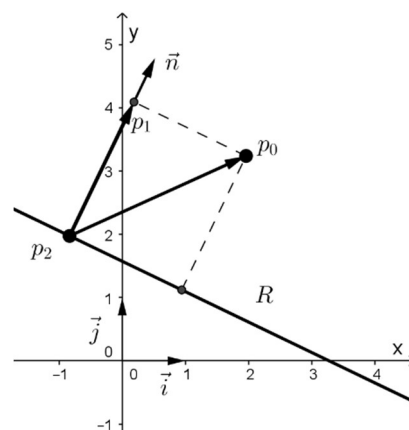
$$dist(p_0; R) = dist(p_0; p_2) = |\overline{p_0 p_2}|$$



### Estrategia N°2:

- i) Ubica un punto  $p_2$  cualquiera de  $R$ .
- ii) Determina  $\overline{p_2 p_0}$
- iii) Considera un vector  $\vec{n}$  normal a  $R$ .
- iv) La distancia de  $p_0$  a  $R$  es:

$$dist(p_0; R) = dist(p_2; p_1) = |proj_{\vec{n}} \overline{p_2 p_0}|$$



Esta última estrategia, si bien a simple vista parece engorrosa, es muy útil cuando contamos con la ecuación general de la recta  $R$ . Veamos:

Sea  $R) ax + by + c = 0$  y  $p_0(x_0; y_0)$ .

Tomamos un punto  $p_2(x_2; y_2) \in R$ . Esto quiere decir que sus coordenadas verifican la ecuación de  $R$ , o sea:  $ax_2 + by_2 + c = 0$  (1)

De lo visto en la estrategia n° 2:

$$\begin{aligned} dist(p_0; R) &= |proj_{\vec{n}} \overline{p_2 p_0}| = \frac{|\overline{p_2 p_0} \times \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|a \cdot (x_0 - x_2) + b \cdot (y_0 - y_2)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \\ &= \frac{|a \cdot x_0 - a \cdot x_2 + b \cdot y_0 - b \cdot y_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 - a \cdot x_2 - b \cdot y_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \\ &= \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 - (-c)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

$$dist(p_0; R) = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



### Ejemplo

Obtiene la distancia del punto  $p(-1; 4)$  a la recta  $R) 6x - 8y = -12$

*Resolución:*

$$\text{dist}(p; R) = \frac{|6 \cdot (-1) - 8 \cdot 4 + 12|}{\sqrt{6^2 + (-8)^2}} = \frac{|-26|}{10} = \frac{13}{5}$$



### ACTIVIDADES

16. Dada la recta de ecuación  $R) 3x - 4y = 10$ , determina:
  - a. La distancia del punto  $p(5; 6)$  a  $R$ .
  - b. La distancia entre las rectas  $R) -12x + 16y + 8 = 0$
17. Determina las coordenadas del punto  $p'$  simétrico del punto  $p(4; 4)$  respecto a la recta  $R) y = 2x + 1$ .
18. Calcula el área del triángulo determinado por las rectas  $A) x + y - 10 = 0$ ,  $B) 2x - y = 4$  y  $C) x - 3y = 6$

## ECUACIÓN EXPLÍCITA DE LA RECTA EN EL PLANO

Dada la ecuación de la recta en forma cartesiana  $R) ax + by + c = 0$  con  $b \neq 0$ , podemos despejar la variable "y":

$$ax + by + c = 0 \Leftrightarrow by = -ax - c \Leftrightarrow y = \frac{-ax - c}{b} \Leftrightarrow y = \left(-\frac{a}{b}\right)x + \left(-\frac{c}{b}\right)$$

Renombramos las constantes:

$$-\frac{a}{b} = m \quad \wedge \quad -\frac{c}{b} = h$$

Así, la ecuación queda:

$$y = mx + h$$

### Ecuación Explícita de una recta $R$ en el plano

$$R) y = mx + h$$

Es la ecuación explícita de una recta en el plano, donde  $m$  y  $h$  son los coeficientes de la ecuación.

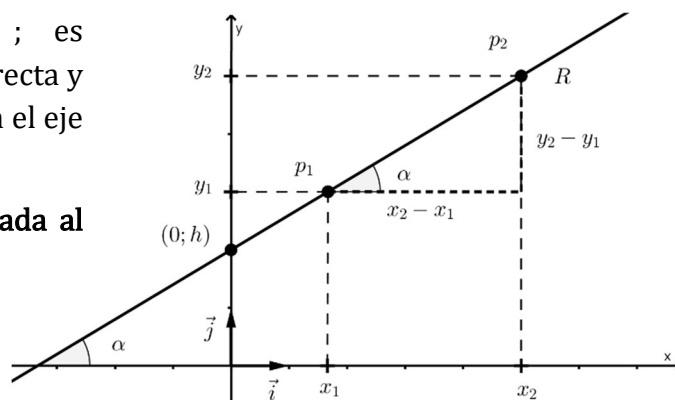


## Interpretación geométrica de los coeficientes $m$ y $h$

### Interpretación de $h$

Si  $x = 0 \Rightarrow y = m \cdot 0 + h \Rightarrow y = h$  ; es decir, el punto  $p(0; h)$  pertenece a la recta y es el punto de intersección de esta con el eje de las ordenadas (eje  $y$ ).

Al número " $h$ " lo llamamos "**ordenada al origen**".



### Interpretación de $m$

- Si tomamos dos puntos  $p_1(x_1; y_1)$  y  $p_2(x_2; y_2)$  con  $x_1 < x_2$  e  $y_1 < y_2$ , cualesquiera de la recta, como se muestra en la figura, resulta:

$$\begin{aligned} y_2 &= m \cdot x_2 + h \\ y_1 &= m \cdot x_1 + h \end{aligned} \quad (1)$$

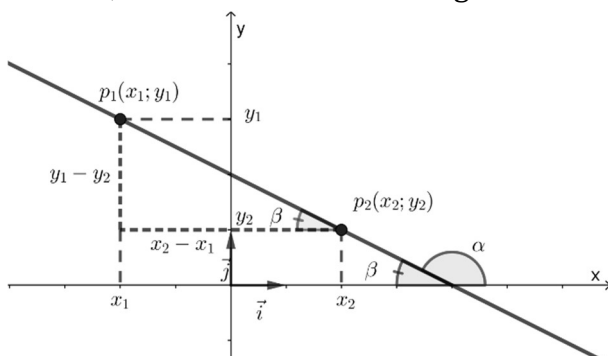
Sabemos, por definición de tangente de un ángulo agudo, y, observando el gráfico resulta que:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (2)$$

De (1) y (2)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m \cdot x_2 + h - m \cdot x_1 - h}{x_2 - x_1} = \frac{m \cdot (x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = m$$

- Si tomamos dos puntos  $p_1(x_1; y_1)$  y  $p_2(x_2; y_2)$  con  $x_1 < x_2$  e  $y_1 > y_2$ , cualesquiera de la recta, como se muestra en la figura inferior, resulta:



$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\beta) &= \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{m \cdot x_1 + h - m \cdot x_2 - h}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{-m \cdot (x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = -m \end{aligned}$$

A su vez, como  $\beta = \pi - \alpha$ , tenemos que:

$$\operatorname{tg}(\beta) = -\operatorname{tg}(\alpha)$$

O sea que:  $\operatorname{tg}(\alpha) = m$

Por lo que podemos concluir que el número "m" es la tangente trigonométrica del ángulo que la recta forma con el sentido positivo del eje de las abscisas y lo llamamos "pendiente" de la recta.

### Ejemplo

Obtiene la ecuación de la recta  $S$  que pasa por el punto  $p_0(0; -3)$  y forma un ángulo de  $135^\circ$  con el sentido positivo del eje X.

#### Resolución:

Por lo datos que nos brinda el enunciado, nos conviene utilizar una ecuación explícita para la recta buscada, así entonces:  $S) y = m x + h$

Como  $p_0 \in S$  tenemos el dato de la ordenada al origen:  $h = -3$ ; además  $m = \operatorname{tg} 135^\circ = -1$

$$\therefore S) y = -x - 3.$$

### **OBSERVACIONES IMPORTANTES**



- Una recta en el plano posee solo una ecuación explícita (esto se debe a que los coeficientes  $m$  y  $h$  corresponden a características únicas de una recta, como lo son su pendiente y su intersección con el eje  $y$ )
- No toda recta en el plano se puede describir con ecuaciones explícitas. En efecto las verticales no poseen ecuación explícita. Si la recta es perpendicular al eje de las abscisas el ángulo que forma con el mismo es de  $90^\circ$ , y  $\nexists \operatorname{tg} 90^\circ$ , por ende, no existe el valor  $m$ .
- Una recta pasa por el origen de coordenadas si y sólo si  $h = 0$ .
- Si  $y = h \Rightarrow m = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0^\circ$ , es decir que la recta es paralela al eje de las abscisas.

## **ECUACIÓN SEGMENTARIA DE LA RECTA EN EL PLANO**

Dada la ecuación de una recta en forma cartesiana  $R) ax + by + c = 0$ , en donde todos sus coeficientes son no nulos, podemos trabajarla algebraicamente de la siguiente manera:

$$ax + by + c = 0$$

$$ax + by = -c \quad \text{Sumando } (-c) \text{ en ambos miembros}$$

$$(ax + by) \cdot \frac{1}{-c} = 1 \quad \text{Multiplicando } \left(\frac{1}{-c}\right) \text{ en ambos miembros}$$

$$\left(\frac{a}{-c}\right)x + \left(\frac{b}{-c}\right)y = 1 \quad \text{Propiedad distributiva}$$

$$\frac{x}{\left(\frac{-c}{a}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{-c}{b}\right)} = 1 \quad \text{Algoritmo de la división}$$



Renombrando las constantes:

$$-\frac{c}{a} = p$$

$$-\frac{c}{b} = q$$

Por lo que la ecuación queda:

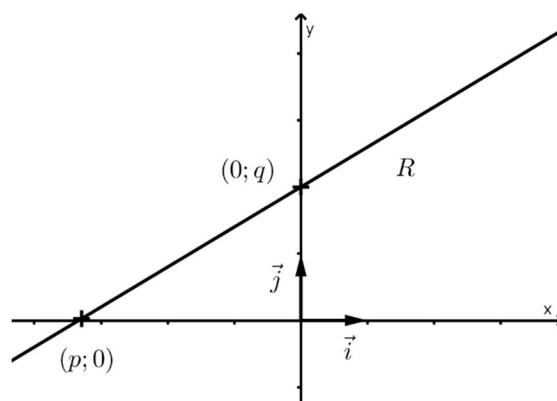
$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$



### Interpretación geométrica de los coeficientes $p$ y $q$

→ Si  $y = 0 \Rightarrow \frac{x}{p} = 1 \Rightarrow x = p$  ; esto quiere decir que el punto  $(p; 0)$  pertenece a la recta y como es el punto de intersección de la recta con el eje X llamamos al número  $p$  : **abscisa al origen.**

→ De forma análoga, si  $x = 0 \Rightarrow \frac{y}{q} = 1 \Rightarrow y = q$  ; esto quiere decir que el punto  $(0; q)$  pertenece a la recta y como es el punto de intersección de la recta con el eje Y llamamos al número  $q$  : **ordenada al origen.**



### Ejemplo

Encuentra la ecuación segmentaria, si es posible, de la recta  $S$  que pasa por el punto  $p(-2; 3)$  y es paralela al vector  $\vec{v} = (-4; 3)$ .

Resolución:

Como  $\vec{v} = (-4; 3) \parallel S \Rightarrow \vec{u} = (3; 4) \perp S \Rightarrow S) 3x + 4y + c = 0$

Luego, reemplazando el punto  $p(-2; 3)$  en  $S$  nos queda:

$$3 \cdot (-2) + 4 \cdot 3 + c = 0 \Rightarrow c = -6 \Rightarrow S) 3x + 4y - 6 = 0$$

Tenemos la ecuación cartesiana de la recta  $S$ , en la cual todos sus coeficientes son no nulos, por lo que podemos hallar su expresión segmentaria:

$$3x + 4y - 6 = 0 \Rightarrow 3x + 4y = 6 \Rightarrow \frac{3x + 4y}{6} = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$$

$$\therefore S) \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$$

### Ecuación Segmentaria de una recta $R$ en el plano

$$R) \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

Es la ecuación segmentaria de una recta en el plano donde  $p, q \in \mathbb{R} - \{0\}$

#### OBSERVACIONES IMPORTANTES



- No toda recta admite ecuación segmentaria, en efecto:
  - Como  $a \neq 0 \Rightarrow S$  no puede ser horizontal.
  - Como  $b \neq 0 \Rightarrow S$  no puede ser vertical.
  - Como  $c \neq 0 \Rightarrow S$  no puede pasar por el origen.
- Una recta admite una única ecuación segmentaria (esto se debe a que los coeficientes  $p$  y  $q$  corresponden a características únicas de una recta, como lo son sus intersecciones con los ejes coordenados)
- La ecuación segmentaria permite determinar inmediatamente la intersección de la recta con los ejes coordenados, por lo que la convierte en la forma más elegida cuando se necesita escribir la ecuación de una recta de la cual se conoce su gráfica.



#### ACTIVIDADES

19. Halla la pendiente y la ordenada al origen de la recta que pasa por los puntos indicados y escribe una ecuación para cada una:
  - a.  $a(4; -1)$  y  $b(0; 3)$
  - b.  $t(-1; -1)$  y  $r(3; 3)$
  - c.  $s(4; 1)$  y  $w(-3; 1)$
20. Escribe la ecuación segmentaria de una recta que corta al eje  $x$  en  $(2; 0)$  y forma un ángulo de  $45^\circ$  con dicho eje.
21. Encuentra el ángulo que forman las rectas  $R) y = 2x - 1$  y  $S) \frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$ .



## PRÁCTICA COMPLEMENTARIA

22. Dadas las rectas  $R) 2x - y = 4$  y  $S) \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - 3t \end{cases}; t \in \mathbb{R}$ , determina:
- Las coordenadas de los puntos donde  $R$  interseca a los ejes coordenados.
  - La ecuación explícita de la recta  $K$  tal que  $K \parallel R$  y que su abscisa al origen sea 3.
  - La ecuación segmentaria de la recta  $L$  perpendicular a  $S$  que contiene al punto  $(0; 2)$ .
23. Dada la recta, con su ecuación general,  $R) 3x - 2y + 12 = 0$  obtiene:
- Unas ecuaciones paramétricas de  $R$ .
  - La ecuación explícita de  $R$ .
  - La ecuación segmentaria de  $R$ .
24. En cada caso, escribe la ecuación de la recta más adecuada de acuerdo a los datos suministrados y luego graficalas:
- Es perpendicular al vector que forman los puntos  $a(2; 1)$  y  $b(-3; 2)$  y contiene al punto  $b$ .
  - Corta al eje  $y$  en el punto  $(0; -2)$  y al eje  $x$  en  $(3; 0)$ .
  - Pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a la recta  $\frac{x-1}{3} = \frac{2-y}{2}$ .
  - La recta coincide con la bisectriz de primer cuadrante.
  - Pasa por el punto  $(0; -4)$  y es paralela a la recta  $x - \frac{1}{3}y + 1 = 0$ .
  - Pasa por el punto  $(2; 5)$  y es paralela al eje de las abscisas.
  - Pasa por el punto  $(2; 5)$  y es paralela al eje de las ordenadas.
25. Coloca verdadero o falso justificando tu respuesta:
- La distancia de la recta  $R) 3x - 4y + 3 = 0$  al origen es  $\frac{3}{5}$ .
  - El punto  $m(4; 2)$  pertenece a la recta  $M) \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -4 + 3t \end{cases} t \in \mathbb{R}$ .
  - El vector  $\vec{u} = \left(\frac{2}{3}; 2\right)$  es paralelo a la recta  $\frac{x}{\frac{2}{3}} + \frac{y}{2} = 1$ .
  - Las rectas  $L) \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 4t \end{cases} t \in \mathbb{R}$  y  $K) -x + y = 0$  se intersecan en el punto  $(2; 2)$ .

### Respuestas

1.  $R) \begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = -2\lambda \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}; \quad \text{a) } q \notin \mathbb{R}; \quad \text{b) con eje X: (5; 0) y con el eje Y: (0; 5)}$
2.  $\overleftrightarrow{ab}) \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 3 - \lambda \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$
3.  $R) \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$
4.  $R) \begin{cases} x = -1 + \mu \\ y = 1 + 2\mu \end{cases} \mu \in \mathbb{R}$
5.  $S \cap R = \{(2; 3)\}$
6. a) En el sentido del vector  $(-1; 4)$  b) Si, a los 4 segundos; c) Si.
7. a)  $(40; 30)$ ; b) A cargo del alumno; c) Si, a los 2,5 horas.
8. a)  $2x - 4y - 2 = 0$ ; b)  $4x + y - 5 = 0$ ; c)  $-x + 2y = 0$ ; d)  $x - y + 7 = 0$ ;  
e)  $S \cap T = \{(0; 1)\}$  y  $R) 4x + y - 1 = 0$
9. a)  $\frac{x-5}{-1} = \frac{y+1}{2}$ ; b)  $\frac{x-2}{-3} = \frac{y-3}{2}$ ; c)  $\frac{x}{7} = \frac{y}{3}$
10. a)  $S \cap R = \{(-3; 2)\}$ ; b)  $S \cap R = \{(2; -1)\}$ ; c)  $S \cap R = \emptyset$
11. a)  $R \parallel S$ ; b)  $R \wedge S = 71^\circ 33' 54''$ ; c)  $R \wedge S = 26^\circ 33' 54''$ ; d)  $R \perp S$ ; e)  $R \perp S$
12. A cargo del alumno.
13. A cargo del alumno.
14. a)  $S) x + y - 3 = 0$ ; b) Área= 8
15.  $x + 3y - 7 = 0$
16. a)  $\frac{19}{5}$ ; b)  $\frac{8}{5}$ .
17.  $(0; 6)$
18. Área:  $\frac{338}{15}$
19. a)  $y = -x + 3$ ; b)  $y = x$ ; c)  $y = 1$
20.  $\frac{x}{2} + \frac{y}{-2} = 1$
21.  $R \wedge S = 29^\circ 44' 41'' .57$
22. a) eje x:  $(2; 0)$  - eje y:  $(0; -4)$       b)  $y = 2x - 6$       c)  $\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} = 1$
23. a)  $R) \begin{cases} x = 2t \\ y = 6 + 3t \end{cases} t \in \mathbb{R}$       b)  $y = \frac{3}{2} + 6$       c)  $\frac{x}{-4} + \frac{y}{6} = 1$
24. a)  $r) -5x + y - 17 = 0$       b)  $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$       c)  $3x - 2y = 0$   
d)  $y = x$       e)  $x - \frac{1}{3}y - \frac{4}{3} = 0$       f)  $y = 5$       g)  $x = 2$
25. a) V    b) F    c) F    d) V

### Bibliografía

- ⊗ Apunte "La Recta en el plano" - (Cod. 1404-15). Autores: Bue, Juan Carlos; Filotti, Verónica; Martínez, María del Luján; Rosito, Mirta.
- ⊗ Fundamentos del Álgebra Lineal -Ed. CENGASE Learning. Autor: Larson, Ron.
- ⊗ Álgebra Lineal y sus aplicaciones - Ed. Pearson. Autor: Lay, David.
- ⊗ Cálculo. Trascendentes Tempranas - Ed. CENGASE Learning. Autor: Stewart, James.