

UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS,
INGENIERÍA Y AGRIMENSURA



TESIS DOCTORAL

Variaciones del Problema de Dominación y Separación en grafos.

Autora: Yanina P. Lucarini

Directora: Dra. Silvia M. Bianchi

Co-Directora: Dra. Gabriela R. Argiroffo

Marzo de 2020

JURADO

Dra. Ma. Patricia Dobson

Dr. Javier L. Marengo

Dra. Isabel Méndez Díaz

a Lucho,

a mis padres y a mi hermana,

a Sil y a Gabi.

Agradecimientos

Realizar esta tesis doctoral no fue un trabajo individual, fue posible gracias a todas las personas que me acompañaron durante estos años y forman parte de mi vida.

Gracias a Luciano por su incondicionalidad, porque desde hace quince años crecemos juntos y siempre está a mi lado acompañándome.

Quiero agradecer a mis padres, Sergio y Ani y a mi hermana Sofía, porque son los que me enseñaron a vivir con valores, con respeto hacia los demás y a trabajar duro para intentar alcanzar las metas.

También quiero agradecer a mis docentes y compañeros de trabajo, especialmente a mis amigos en esta facultad que hicieron que mis años de trabajo fueran amenos y los congresos divertidos.

Gracias al jurado, Dra. Ma. Patricia Dobson, Dr. Javier L. Marengo y Dra. Isabel Méndez Díaz, quienes dedicaron parte de su tiempo para leer en detalle esta tesis.

Muchas gracias a Annegret Wagler por su bondad, por permitir que trabajemos juntas haciendo que me sienta bien, aún estando lejos de casa.

Por último, un gracias muy especial a Silvia Bianchi y a Gabriela Argiroffo que fueron quienes me acompañaron, alentaron y trabajaron sin descanso conmigo estos años. Gracias por su paciencia, su tiempo y su generosidad. Si el tiempo vuelve atrás, las elijo una y mil veces más.

Resumen

En esta tesis nos enfocamos en el estudio de cuatro variaciones del Problema de Dominación y Separación en grafos: los problemas de *código de identificación*, *localización-dominación*, *localización-dominación abierta* y *localización-dominación total* en grafos.

Estos problemas han sido desarrollados y estudiados activamente durante las últimas décadas. Entre los desafíos relacionados con ellos nos proponemos determinar y/o aproximar el cardinal del mínimo código de identificación, conjunto de localización-dominación, conjunto de localización-dominación abierta o conjunto de localización-dominación total para diferentes clases de grafos. Es sabido que responder estas preguntas es de interés tanto teórico como práctico. La relevancia de estos problemas se debe a que modelan situaciones reales provenientes de variadas disciplinas, como por ejemplo el análisis de dispersión de enfermedades, detección de fallas en redes de comunicación y ubicación de alarmas de incendio o detectores de movimiento en establecimientos, edificios, viviendas, instalaciones, etc. Esta importancia práctica hace necesario el desarrollo de algoritmos exactos capaces de resolver instancias provenientes de aplicaciones del mundo real en tiempos computacionales razonables. Una manera a menudo exitosa de resolver esta clase de problemas, es a través de modelos de programación lineal entera sobre los cuales se realiza un estudio poliedral del espacio de soluciones. También aplicamos este abordaje para encontrar valores exactos del mínimo conjunto en cuestión, o estimaciones de estos parámetros para varias clases de grafos. Por otra parte, utilizamos la teoría de grafos para la obtención de los parámetros mencionados en ciertas familias de grafos. Finalmente, presentamos algoritmos que en tiempo lineal, resuelven los problemas de determinar la cardinalidad del mínimo código de identificación, conjunto de localización-dominación, conjunto de localización-dominación abierta y conjunto de localización-dominación total en los llamados grafos block.

Introducción

Antecedentes y estado actual del tema

El *Problema del Conjunto Dominante* en grafos, introducido por Berge [7] en 1962, es un problema clásico dentro del área de Optimización Combinatoria que ha sido muy investigado desde el punto de vista teórico y algorítmico (ver [8, 9, 12, 13, 14, 18, 21, 25, 31, 34]).

Dado un grafo $G = (V, E)$ donde V es el conjunto de sus vértices y E es el conjunto de sus aristas, un *conjunto dominante* en G es un subconjunto de vértices $D \subseteq V$ de modo tal que cada vértice en $V - D$ es adyacente a un vértice en D . El Problema del Conjunto Dominante en G consiste en encontrar un conjunto dominante de cardinalidad mínima.

Existen numerosos problemas provenientes del mundo real que pueden modelarse mediante el problema del conjunto dominante en ciertos grafos. Entre éstos podemos mencionar, por ejemplo, la detección de incendios en un edificio. Supongamos que $V = \{1, \dots, n\}$ es un conjunto de departamentos en un cierto edificio donde es posible ubicar alarmas detectoras de incendio. Una alarma colocada en el departamento j puede proteger el departamento en el cual está ubicada y los departamentos vecinos que se encuentran a menos de 3 metros de distancia. Llamemos N_j al conjunto de departamentos que pueden ser protegidos desde j . Supongamos además que el costo de instalar una alarma es el mismo para todo departamento. Entonces, el problema de elegir un conjunto de departamentos para instalar las alarmas de manera tal que todo el edificio esté protegido, es un problema de dominación en un grafo en donde V representa los departamentos del edificio y el conjunto E está dado por las vecindades N_j para cada $j \in V$.

Algunas variantes del problema de determinar el mínimo conjunto dominante en un grafo G , son los problemas de determinar el *mínimo código de identificación*, el *mínimo conjunto de localización-dominación*, el *mínimo conjunto de localización-dominación abierta* y el *mínimo conjunto de localización-dominación total* en G . Estos cuatro problemas se conocen en la literatura específica con sus nombres en inglés *Identifying Code Problem (ID)*, *Locating-Dominating Problem (LD)*, *Open Locating-Dominating Problem (OLD)* y *Locating Total-Dominating Problem (LTD)* respectivamente; y se han estudiado activamente durante la última década, ver por ejemplo, la bibliografía dada por [35].

El concepto de código de identificación fue introducido en [34]. Determinar el mínimo código de identificación en un grafo G es en general NP-hard [14] e incluso sigue siendo difícil

para varias clases de grafos donde otros problemas difíciles de optimización combinatoria son fáciles de resolver. Este es el caso de los grafos bipartitos [14] y dos clases de grafos cordales: los grafos splits y los grafos de intervalos [22]. Se han encontrado fórmulas cerradas que calculan el valor del mínimo código de identificación para algunas familias de grafos, como por ejemplo, los caminos y los ciclos [9], las estrellas [24] y algunas subclases de grafos splits [3]. Además, se obtuvo un algoritmo para determinar un mínimo código de identificación en tiempo lineal en árboles [5].

La definición de un conjunto de localización-dominación se introduce en [46]. Determinar el cardinal del mínimo conjunto de localización-dominación en un grafo G es NP-hard [14], incluso en grafos bipartitos [14]. Este resultado se extiende a los grafos discos unitarios planares bipartitos en [37].

También se conocen fórmulas para el cálculo del tamaño de un mínimo conjunto de localización-dominación para ciertas clases de grafos como los caminos [46], los ciclos [9], las estrellas, los multipartitos completos y los soles delgados [4]. Además, en [45] se obtuvo un algoritmo que en tiempo lineal calcula el tamaño de un mínimo conjunto de localización-dominación en árboles.

Los conjuntos de localización-dominación abierta se definen en [44]. Al igual que en los casos anteriores, determinar el cardinal del mínimo conjunto de localización-dominación abierta en un grafo G es NP-hard [44] en varias familias de grafos como los grafos APX-completos, grafos cordales con grado máximo 4 entre otros (ver [40]). Se conocen fórmulas exactas para el cálculo del cardinal del mínimo conjunto de localización-dominación abierta en cliques y caminos [44].

El concepto de conjunto de localización-dominación total fue introducido en [27]. Con respecto a este problema, observamos a partir de [44] que es tan difícil de resolver como el problema de localización-dominación abierta en un grafo cualquiera. Se han obtenido cotas para el cardinal del mínimo conjunto de localización-dominación total en árboles [27, 29]. Además, en [29] se estudió el cardinal del mínimo conjunto de localización-dominación total en grafos cúbicos y grafos grilla.

Es importante destacar que la existencia de un algoritmo que en tiempo polinomial resuelva cualquiera de estos cuatro problemas para ciertas familias de grafos, sigue del famoso meta teorema de Courcelle et al. [20], que establece que cualquier problema de optimización \mathcal{P} que pueda expresarse en *lógica monádica de segundo orden* (MSOL) puede resolverse en tiempo polinomial para familias de grafos con *clique-width* acotado por una constante q . Más aún, si la q -expresión se encuentra en tiempo lineal, \mathcal{P} se resuelve en tiempo lineal para esas familia de grafos. En efecto, una fórmula MSOL para el problema de código de identificación aparece en [36] y puede ser fácilmente adaptable para los problemas de localización-dominación, localización-dominación abierta y localización-dominación total. Sin embargo, obtener algoritmos explícitos para tales problemas es interesante como se puede ver en la bibliografía en el caso de árboles [5, 45] o cografos [23].

El problema de determinar el tamaño del mínimo conjunto ID , conjunto LD , conjunto OLD o conjunto LTD en un grafo, tanto como el problema de encontrar cotas de estos

números, pueden abordarse de distintas formas. Una de ellas es estudiar estos problemas desde el punto de vista poliedral. Otra forma es a través del análisis de la estructura combinatoria de los grafos en cuestión y una tercer alternativa, es la formulación de algoritmos que resuelvan los problemas en tiempos computacionales razonables. En esta tesis abordamos los tres enfoques en diferentes clases de grafos.

Objetivos y resultados obtenidos

El objetivo de esta tesis es avanzar en el estudio de los cuatro problemas de dominación antes mencionados, encontrar el mínimo ID , mínimo conjunto LD , mínimo conjunto OLD y mínimo conjunto LTD en clases particulares de grafos, o estimar cotas para los mismos.

En el Capítulo 1 presentamos las definiciones y los resultados previos para la comprensión de este trabajo. En el Capítulo 2, conseguimos los poliedros asociados a los 4 problemas en los grafos estrellas, p -partitos completos y coronas generalizadas. Además obtenemos todas las facetas con coeficientes 0, 1, 2 del los poliedros asociados a los problemas ID , LD , OLD en caminos y ciclos y describimos el poliedro correspondiente al problema LTD para dichos grafos. En el Capítulo 3, estudiamos el cardinal del mínimo conjunto ID , LD , OLD , LTD para los soles completos y los co-soles. En ciertos casos, y a través de la estructura combinatoria de tales grafos, pudimos obtener cotas o el valor exacto de estos números. También, analizamos la variación de los distintos parámetros a través de ciertas operaciones en grafos. En el Capítulo 4, estudiamos el problema de determinar el cardinal del mínimo conjunto ID , LD , OLD , LTD en grafos block, a partir de la formulación de algoritmos que resuelven estos problemas en tiempo lineal, los grafos block tienen clique-width a lo sumo 6 [33]. Finalmente, presentamos las conclusiones y líneas abiertas de investigación.

Difusión de resultados

Los resultados descritos en esta tesis han dado origen a las siguientes publicaciones:

- G. Argiroffo, S. Bianchi, Y. Lucarini, A. Wagler, *The identifying code number of block graphs*, Electronic Notes in Discrete Mathematics **62**, 249-254 (2017).
- G. Argiroffo, S. Bianchi, Y. Lucarini, A. Wagler, *Polyhedra associated with identifying codes in graphs*, Discrete Applied Mathematics **245**, 16-27 (2018).
- G. Argiroffo, S. Bianchi, Y. Lucarini, A. Wagler, *Linear-time algorithms for three domination-based separation problems in block graphs*. Por aparecer en Discrete Applied Mathematics (<https://doi.org/10.1016/j.dam.2019.08.001>).
- G. Argiroffo, S. Bianchi, Y. Lucarini, A. Wagler, *The identifying code, the locating-dominating, the open locating-dominating and the locating total-dominating problems*

under some graph operations. Electronic Notes in Theoretical Computer Science **346**, 135-145 (2019).

Los resultados también fueron presentados en los siguientes congresos:

- Y. Lucarini, *Códigos de identificación en ciclos*, Escuela Latinoamericana de Verano de Investigación Operativa - ELAVIO, Quito, Ecuador (2015).
- Y. Lucarini, *Aspectos poliedrales del problema de códigos de identificación*, Primer workshop argentino de programación entera y mixta - MIP@AR, Buenos Aires, Argentina (2016).
- Y. Lucarini, *Polyhedra associated with identifying codes in graphs*, São Paulo School of Advanced Science on Algorithms, Combinatorics and Optimization - SPSAS-ACO, San Pablo, Brasil (2016).
- G. Argiroffo, S. Bianchi, Y. Lucarini, *El poliedro de códigos de identificación en familias de grafos split*, LXV Reunión anual de Comunicaciones Científicas de la UMA, Bahía Blanca, Argentina (2016).
- Y. Lucarini, *Códigos de Identificación*, Seminario de la Licenciatura en Matemática, Rosario, Argentina (2016).
- Y. Lucarini, *Identifying code polyhedra of complete p -partite graphs*, Segundo workshop argentino de programación entera y mixta - MIP@AR, Rosario (2017).
- G. Argiroffo, S. Bianchi, Y. Lucarini, A. Wagler, *The identifying code number of block graphs*, IX Latin and American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium - LAGOS'2017, Marsella, Francia (2017).
- G. Argiroffo, S. Bianchi, Y. Lucarini, A. Wagler, *On the identifying code number of block graphs*, 10th International Colloquium on Graph Theory and Combinatorics - ICGT'2018, Lyon, Francia (2018).
- G. Argiroffo, S. Bianchi, Y. Lucarini, *Algoritmos lineales para tres problemas de dominación en grafos block*, LXVII Reunión anual de Comunicaciones Científicas de la UMA, La Plata, Argentina (2018).
- G. Argiroffo, S. Bianchi, Y. Lucarini, A. Wagler, *The identifying code, the locating-dominating, the open locating-dominating and the locating total-dominating problems under some graph operations*, X Latin and American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium - LAGOS'2019, Belo Horizonte, Brasil (2019).
- G. Argiroffo, S. Bianchi, Y. Lucarini, *Los problemas de códigos de identificación, localización-dominación, localización-dominación abierta y localización-dominación total bajo ciertas operaciones en grafos*, SUMA 2019, Mendoza, Argentina (2019).

Índice general

1. Preliminares	1
1.1. Los cuatro problemas de dominación y separación	3
1.2. Grafos	4
1.3. Enfoque poliedral	6
1.3.1. Poliedros	6
1.3.2. El poliedro de cubrimiento de conjuntos	8
2. Estudio Poliedral	13
2.1. Grafos p -partitos	15
2.1.1. Grafos bipartitos completos	15
2.1.2. Grafos p -partitos completos	19
2.2. Coronas generalizadas	25
2.3. Caminos y ciclos	27
2.3.1. Los poliedros $P_{ID}(P_n)$ y $P_{ID}(C_n)$	29
2.3.2. Los poliedros $P_{LD}(P_n)$ y $P_{LD}(C_n)$	32
2.3.3. Los poliedros $P_{OLD}(P_n)$ y $P_{OLD}(C_n)$	36
2.3.4. Los poliedros $P_{LTD}(P_n)$ y $P_{LTD}(C_n)$	39
3. Soles y operaciones en grafos	43
3.1. Soles completos y co-soles	45
3.1.1. Número de código de identificación	45
3.1.2. Número de localización-dominación	48
3.1.3. Número de localización-dominación abierta y localización-dominación total	51
3.2. Grafos obtenidos al agregar un vértice universal	57
3.2.1. Fans y wheels	58
3.3. El cuadrado de caminos y ciclos	61
4. Algoritmos lineales	73
4.1. Definiciones básicas y notación	75
4.2. Un algoritmo para grafos block	78

4.3. Cálculo del número de código de identificación	82
4.4. Cálculo del número de localización-dominación	90
4.5. Cálculo del número de localización-dominación abierta	95
4.6. Cálculo del número de localización-dominación total	108
5. Conclusiones	117
6. Apéndice	121
6.1. Ilustración correspondiente a los resultados del número de código de identificación.	123
6.2. Ilustración correspondiente a los resultados del número de localización-dominación.	126
6.3. Ilustración correspondiente a los resultados del número de localización-dominación abierta.	130
6.4. Ilustración correspondiente a los resultados del número de localización-dominación total.	136

Índice de figuras

1.1.	Un grafo donde los vértices en negro forman un mínimo conjunto (a) <i>ID</i> , (b) <i>LD</i> , (c) <i>OLD</i> y (d) <i>LTD</i>	4
1.2.	$\gamma_{ID}(G)$ y $\gamma_{OLD}(G)$	4
2.1.	(a) Un grafo 3-partito completo con $n_1 = 2$, $n_2 = 3$ y $n_3 = 4$. (b) Un grafo 4-partito completo con $n_1 = 1$, $n_2 = n_3 = 2$ y $n_4 = 3$	19
3.1.	Los vértices en negro forman un mínimo <i>ID</i> -conjunto en S_3	45
3.2.	Los vértices en negro forman un mínimo <i>ID</i> -conjunto en \overline{S}_n para $n \in \{3, \dots, 6\}$	46
3.3.	Los vértices en negro forman un mínimo <i>LD</i> -conjunto en S_n para $n \in \{3, 4\}$	48
3.4.	Los vértices en negro forman un mínimo <i>LD</i> -conjunto en S_6	50
3.5.	Los vértices en negro forman un mínimo <i>LD</i> -conjunto en \overline{S}_n para $n \in \{3, 4, 5\}$	50
3.6.	Los vértices en negro forman un mínimo <i>LD</i> -conjunto en \overline{S}_{10}	51
3.7.	Los vértices en negro forman un mínimo <i>LTD</i> -conjunto en S_3 y S_4	52
3.8.	Los vértices en negro forman un mínimo <i>OLD</i> -conjunto en S_3 y S_4	53
3.9.	Los vértices en negro forman un mínimo <i>OLD</i> -conjunto en \overline{S}_n para $n \in \{3, 4, 5\}$	54
3.10.	<i>X</i> -conjuntos mínimos para P_4 y F_4	60
3.11.	<i>X</i> -conjuntos mínimos para P_5 y F_5	60
3.12.	<i>X</i> -conjuntos mínimos para C_5 y W_5	61
3.13.	Todos los pares de vértices son true twins en P_3^2 y 2 y 3 son true twins en P_4^2	62
3.14.	Los vértices en negro forman un mínimo <i>ID</i> -conjunto en P_n^2 para $n \in \{5, 6, 7\}$	62
3.15.	Los vértices en negro forman un mínimo <i>ID</i> -conjunto en P_n^2 para $n \in \{8, 9, 10\}$	63
3.16.	Los vértices en negro forman un mínimo <i>OLD</i> -conjunto en P_n^2 para $n \in \{10, 11\}$	68
3.17.	Los vértices en negro forman un mínimo <i>LTD</i> -conjunto en C_6^2	68
3.18.	Los vértices en negro forman un mínimo <i>OLD</i> -conjunto en C_n^2 para $n \in \{10, 11\}$	72
4.1.	Grafo block.	75
4.2.	B_i subgrafos block para $i \in \{1, 2, \dots, k\}$	77
4.3.	Teorema 4.10.	85
4.4.	Teorema 4.13.	91
4.5.	Teorema 4.16. Casos (i) a (iii).	99
4.6.	Teorema 4.16. Casos (iv) a (vi).	100

4.7. Teorema 4.16. Casos (vii) a (x)	101
4.8. Teorema 4.19. Casos (i) y (ii)	111
4.9. Teorema 4.19. Casos (iii) y (iv)	112
4.10. Teorema 4.19. Casos (v) , (vi) y (vii)	113

Capítulo 1

Preliminares

Resumen

En este capítulo presentamos las definiciones y resultados previos necesarios para la comprensión de este trabajo. En particular, definimos los cuatro problemas que serán estudiados en esta tesis.

1.1. Los cuatro problemas de dominación y separación

Sea $G = (V, E)$ un grafo donde V es el conjunto de vértices y E es el conjunto de aristas. La vecindad abierta de un vértice $u \in V$ es el conjunto de todos los vértices de G adyacentes (o vecinos) a u y la denotamos $N(u)$, $N[u] = \{u\} \cup N(u)$ es la vecindad cerrada de u . Un subconjunto $C \subseteq V$ es un conjunto *dominante* (resp. *totalmente-dominante*) si $N[i] \cap C$ (resp. $N(i) \cap C$) es no vacío para todo $i \in V$. Se dice también que el conjunto C *domina* (resp. *domina-totalmente*) a V .

Por otro lado, un subconjunto $C \subseteq V$ *separa* (resp. *separa-totalmente*) dos vértices $i, j \in V$ si $N[i] \cap C \neq N[j] \cap C$ (resp. $N(i) \cap C \neq N(j) \cap C$).

Notamos con el símbolo Δ a la operación de diferencia simétrica entre conjuntos, es decir $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$. Así resulta que C separa (resp. separa-totalmente) dos vértices $i, j \in V$ si $(N[i] \Delta N[j]) \cap C$ es no vacío (resp. $(N(i) \Delta N(j)) \cap C$ es no vacío).

A continuación presentamos los conceptos de código de identificación, conjunto de localización-dominación, localización-dominación abierta y localización-dominación total introducidos en [34], [46], [44] y [27] respectivamente.

Un conjunto $C \subseteq V$ satisface la propiedad de:

- *código de identificación (ID)* si C domina y separa todos los vértices de V .
- *localización-dominación (LD)* si C domina todos los vértices de V y separa-totalmente todos los vértices de $V - C$.
- *localización-dominación abierta (OLD)* si C domina-totalmente y separa-totalmente todos los vértices de V .
- *localización-dominación total (LTD)* si C domina-totalmente todos los vértices de V y separa-totalmente todos los vértices de $V - C$.

Notación 1.1 Sea $X \in \{ID, LD, OLD, LTD\}$, si C es un conjunto en V que satisface la propiedad X decimos que C es un X -conjunto.

La Figura 1.1 ilustra los cuatro conjuntos definidos anteriormente con mínima cardinalidad en un grafo particular.

Es inmediato observar que un grafo G admite un ID -conjunto, si no existen *true twins* en G , es decir, no existe ningún par de vértices distintos $i, j \in V$ tal que $N[i] = N[j]$. En este caso se dice que G es *identificable*. Análogamente, un grafo G sin vértices aislados admite un OLD -conjunto si no existen *false twins* en G , esto es, no existe ningún par de vértices distintos $i, j \in V$ tal que $N(i) = N(j)$.

Dado un grafo G , para $X \in \{ID, LD, OLD, LTD\}$, definimos el X -problema en G como el problema de encontrar un X -conjunto de tamaño mínimo en G . El tamaño de tal conjunto

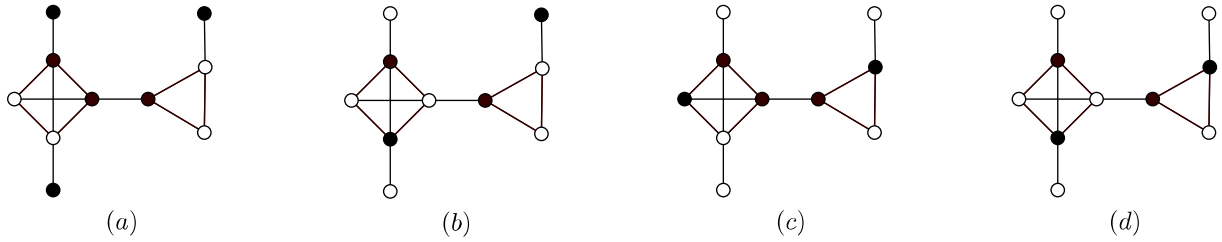


Figura 1.1: Un grafo donde los vértices en negro forman un mínimo conjunto (a) ID , (b) LD , (c) OLD y (d) LTD .

es llamado X -número de G y se denota por $\gamma_X(G)$. A partir de las definiciones sigue que son válidas las siguientes relaciones para todo grafo G que admita un X -conjunto:

$$\gamma_{LD}(G) \leq \gamma_{LTD}(G) \leq \gamma_{OLD}(G), \quad (1.1)$$

y

$$\gamma_{LD}(G) \leq \gamma_{ID}(G).$$

Notemos que $\gamma_{ID}(G)$ y $\gamma_{OLD}(G)$ no son comparables.

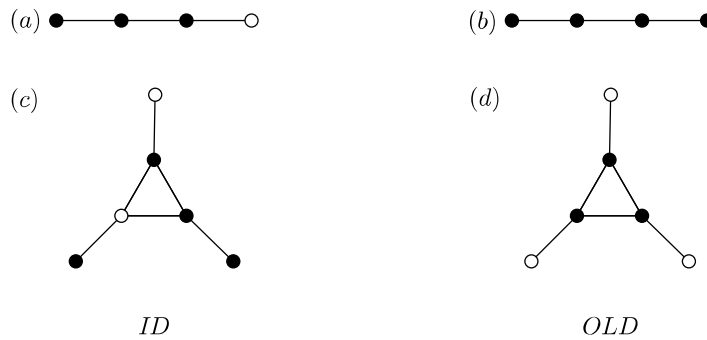


Figura 1.2: $\gamma_{ID}(G)$ y $\gamma_{OLD}(G)$

En efecto, como se observa en los grafos de la Figura 1.2, si $G = P_4$ entonces $\gamma_{ID}(G) = 3 < 4 = \gamma_{OLD}(G)$. Sin embargo si G es el grafo en (c) y (d) resulta $\gamma_{ID}(G) = 4 > 3 = \gamma_{OLD}(G)$.

1.2. Grafos

Un *camino* es un grafo $G = (V, E)$ cuyos vértices en V pueden ser ordenados en una lista de modo tal que dos vértices son adyacentes si y solo si son consecutivos en la lista.

Por lo general si G es un camino se lo nota como P_n donde $n = |V|$. Un *ciclo* es un grafo $G = (V, E)$ que satisface la condición $|V| = |E|$ y los vértices en V pueden disponerse alrededor de un círculo de modo tal que dos vértices son adyacentes si y solo si aparecen en forma consecutiva alrededor del círculo. Llamamos al ciclo de n vértice como C_n . Dado $G = (V, E)$ la *distancia* entre dos vértices $i, j \in V$, denotada por $dist(i, j)$, es la longitud del camino más corto en G que une i con j . Decimos que $i \in V$ es un *vértice pendiente* de G si i tiene un único vecino $j \in V$. Un conjunto *estable* en un grafo es un conjunto de vértices mutuamente no adyacentes. Un conjunto de vértices en un grafo es una *clique* si su complemento es un conjunto estable. Un grafo se dice *completo* si sus vértices forman una clique. Notamos K_n al grafo completo de n vértices.

Un *sol* es un grafo cuyo conjunto de vértices se puede particionar en dos subconjuntos disjuntos C y S , donde $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ es un conjunto estable y $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ induce ciclo en el grafo, no necesariamente sin cuerdas. Si C es una clique y s_i es adyacente a exactamente los vértices c_i y c_{i+1} para $i \in \{1, \dots, n\}$ (donde $c_{n+1} = c_1$), tenemos el grafo *sol completo* que denotamos por S_n . El complemento del sol completo, denotado por \overline{S}_n , es llamado *co-sol*.

Un grafo *p-partito*, denotado por $K_{n_1, \dots, n_p} = (V, E)$ es un grafo tal que $V = \bigcup_{i=1}^p U_i$ y cada U_i induce un conjunto estable no vacío en K_{n_1, \dots, n_p} . Si además todos los vértices de los conjuntos U_i y U_j con $i \neq j$ son adyacentes, K_{n_1, \dots, n_p} es llamado *p-partito completo*.

Un grafo *block* es un grafo cuyas componentes biconexas son cliques.

En esta tesis utilizaremos las operaciones de grafos que se definen a continuación.

El *agregado de un vértice universal* a un grafo dado: Sea $G = (V, E)$ un grafo tal que $V = \{1, \dots, n\}$ y $0 \notin V$. Definimos el grafo obtenido al agregar el vértice universal 0 a G como el grafo $G' = (V', E')$ donde $V' = V \cup \{0\}$ y $E' = E \cup \{0i : i \in V\}$. Si aplicamos esta operación a P_n obtenemos el grafo conocido como grafo *fan* de $n + 1$ vértices y denotado por F_n . Cuando aplicamos la misma operación a C_n obtenemos el grafo conocido como grafo *wheel* de $n + 1$ vértices, denotado por W_n .

El *cuadrado de un grafo*: Dado un grafo $G = (V, E)$, denotamos por $G^2 = (V, E')$ el cuadrado del grafo G donde $E' = E \cup \{ij : dist(i, j) = 2\}$.

La *k-corona generalizada* de un grafo: Dado un grafo $G = (V, E)$ y $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^{|V|}$, denotamos por $G^{\mathbf{k}}$ la *k-corona generalizada* de G obtenida al añadir a cada $i \in V$, k_i vértices pendientes.

Una generalización del concepto de grafo es el *hipergrafo*, $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ donde V un conjunto de vértices y \mathcal{E} es una familia de subconjuntos de V . Los elementos de \mathcal{E} se llaman *hiperaristas*.

Consideramos $n > q \geq 2$. Sea $\mathcal{R}_n^q = (V, \mathcal{E})$ un hipergrafo donde $V = \{1, \dots, n\}$ y \mathcal{E} contiene todos los subconjuntos de V de q elementos, llamamos a \mathcal{R}_n^q *q-rosa completa de orden n*.

1.3. Enfoque poliedral

Hemos mencionado que, para $X \in \{ID, LD, OLD, LTD\}$, determinar el número γ_X es en general difícil (ver [14, 44]). Como los métodos polidrales ya han demostrado ser exitosos para varios problemas de optimización combinatoria NP-hard, uno de nuestros objetivos es aplicar tales técnicas a cada X -problema.

1.3.1. Poliedros

Un conjunto T es *convexo* si, cualesquiera sean $x_1, x_2 \in T$ y $\lambda \in [0, 1]$, resulta que $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in T$.

Dado un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$, un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es un *combinación convexa* de puntos de S si, existe un conjunto finito de puntos $\{x_i\}_{i=1}^l$ en S y $\lambda \in \mathbb{R}_+^l$ con $\sum_{i=1}^l \lambda_i = 1$ tal que $x = \sum_{i=1}^l \lambda_i x_i$. La *cápsula convexa* de $S \subseteq \mathbb{R}^n$, denotada por $\text{conv}(S)$, es el conjunto de todos los puntos que son combinación convexa de puntos de S . Si S es un conjunto convexo, entonces $S = \text{conv}(S)$.

Un *poliedro* $P \subseteq \mathbb{R}^n$ es el conjunto de todos los puntos que satisfacen un número finito de desigualdades lineales, es decir, $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Mx \leq b\}$ donde (M, b) es una matriz $m \times (n + 1)$. Claramente, todo poliedro es convexo. Por otra parte, si $S \subseteq \mathbb{R}^n$ finito, $\text{conv}(S)$ es un poliedro (ver [48]).

Un conjunto $\{x_0, \dots, x_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ es *afínmente independiente* si el conjunto $\{x_1 - x_0, \dots, x_m - x_0\}$ es linealmente independiente. Se puede probar fácilmente que si un conjunto $\{x_0, \dots, x_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ es linealmente independiente entonces es afínmente independiente.

La *dimensión* de un poliedro P , denotada por $\text{dim}(P)$, es el número r si la cantidad máxima de puntos de P afínmente independientes es $r + 1$. Si $P = \emptyset$, se dice que $\text{dim}(P) = -1$. Un poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^n$ es de *dimensión completa* si $\text{dim}(P) = n$.

Si $\alpha \in \mathbb{R}^n$ y $\beta \in \mathbb{R}$ la desigualdad $\alpha x \leq \beta$ es una *desigualdad válida* para un convexo T si es satisfecha por todos los punto de T .

Una *cara* del poliedro P es un conjunto de puntos de P que satisfacen por igualdad alguna desigualdad válida para P . Se dice que tal desigualdad *define* la cara. El conjunto vacío es una cara de cualquier poliedro. La *dimensión de la cara* está dada por la dimensión del poliedro que ella define. Una cara F de P es una *faceta* de P si $\text{dim}(F) = \text{dim}(P) - 1$. Si $\text{dim}(F) = 0$ entonces la cara es llamado *punto extremo* de P .

En general, si M es una matriz de entradas 0, 1 y tamaño $m \times n$, el *poliedro de cubrimiento asociado* a M es

$$Q^*(M) = \text{conv} \{x \in \mathbb{Z}_+^n : Mx \geq \mathbf{1}\}$$

y su *relajación lineal* es

$$Q(M) = \{x \in \mathbb{R}_+^n : Mx \geq \mathbf{1}\}.$$

Un *cubrimiento* de M es un vector $x \in \{0, 1\}^n$ tal que $Mx \geq \mathbf{1}$. El *número de cubrimiento* de M , denotado por $\tau(M)$ se consigue a través de $\min \mathbf{1}^T x$, $x \in Q^*(M)$.

Dados dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$, decimos que $x \leq y$ si $x_i \leq y_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Si $x, y \in \{0, 1\}^n$ son dos filas de M y $x \leq y$, decimos que y es *redundante* o que y *está dominada* por x .

Un cubrimiento x de M es *minimal* si no existe otro cubrimiento y de M tal que $y \leq x$.

Dada la matriz M y dado $j \in \{1, \dots, n\}$, introducimos dos operaciones sobre la matriz M : la *contracción de j* y el *borrado de j* . La *contracción de j* denotada por M/j , es la eliminación de la columna j de la matriz M así como también de las filas redundantes resultantes y, por lo tanto, esto corresponde a considerar $x_j = 0$ en las restricciones $Mx \geq \mathbf{1}$. El *borrado de j* , denotado por $M \setminus j$ es la eliminación de la columna j y de todas las filas que tienen un 1 en dicha columna de la matriz M , esto corresponde a considerar $x_j = 1$ en las restricciones $Mx \geq \mathbf{1}$.

La *contracción* de un conjunto V_1 de columnas de M es la matriz M/V_1 obtenida por la *contracción* de todas las columnas $j \in V_1$ y el *borrado* de un conjunto V_2 de columnas de M es la matriz $M \setminus V_2$ obtenida por el *borrado* de las columnas $j \in V_2$.

Luego, dada la matriz M y los conjuntos disjuntos $V_1, V_2 \subseteq \{1, \dots, n\}$, decimos que $M/V_1 \setminus V_2$ es un *menor* de M . No es difícil probar que el menor no depende del orden de las operaciones o elementos en $\{1, \dots, n\}$.

Sea $U \subseteq \{1, \dots, n\}$ un subconjunto de columnas de M y $\bar{U} = \{1, \dots, n\} - U$ su complemento. La *desigualdad de rango* asociada con el menor $M' = M \setminus U$ es

$$\sum_{i \in \bar{U}} x_i \geq \tau(M'). \quad (1.2)$$

De aquí en adelante para $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ denotamos por $x(S)$ a $\sum_{i \in S} x_i$. Luego la desigualdad de rango (1.2) puede ser escrita como $x(\bar{U}) \geq \tau(M')$, donde $\tau(M')$ es el número de cubrimiento de M' . En [43] se demuestra que si M' es un menor obtenido por borrado, entonces la desigualdad (1.2) es siempre válida para $Q^*(M)$.

Observación 1.2 ([1]) *Si la desigualdad (1.2) define faceta para $Q^*(M')$ entonces define faceta para $Q^*(M)$. Más aún, si la desigualdad de rango asociada con un menor induce una faceta de $Q^*(M)$, entonces esta desigualdad es la desigualdad de rango asociada a un menor obtenido por borrado.*

Además,

Observación 1.3 *El conjunto de desigualdades que definen facetas para $Q^*(M)$ cuando M es una matriz por bloques de la forma*

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$$

es la unión de los conjuntos de desigualdades que definen facetas para $Q^(M_1)$ y $Q^*(M_2)$.*

En la siguiente subsección reformulamos los cuatro problemas como problemas de cubrimiento de conjuntos.

1.3.2. El poliedro de cubrimiento de conjuntos

Los problemas de cubrimiento de conjuntos constituyen una amplia variedad de problemas de Optimización Combinatoria con importantes aplicaciones, como por ejemplo la asignación de clientes a rutas de distribución o de trabajadores a turnos de trabajo, ubicaciones de servicios, detecciones de fallas en redes o de incendios en edificios, entre otros (ver, por ejemplo [6, 35, 42, 47]).

En un problema de cubrimiento de conjuntos debemos considerar, un conjunto finito $N = \{1, 2, \dots, n\}$ y una familia \mathcal{F} de subconjuntos de N . Un subconjunto X de N es un *cubrimiento* de \mathcal{F} si intersecciona a todos los elementos de \mathcal{F} , es decir, para todo $F \in \mathcal{F}$, $X \cap F \neq \emptyset$, o equivalentemente

$$|X \cap F| \geq 1.$$

A menudo, cada elemento $i \in N$ tiene asociado un peso c_i , luego si definimos $c(X) = \sum_{i \in X} c_i$, el *problema de cubrimiento* de la familia \mathcal{F} de *mínimo peso* consiste en buscar un cubrimiento X^* de \mathcal{F} tal que

$$c(X^*) = \min\{c(X) : X \text{ es un cubrimiento de } \mathcal{F}\}.$$

Sea M la matriz de orden $m \times n$ con entradas 0, 1 tal que cada fila de M representa el vector característico de un elemento de \mathcal{F} . Si $c \in \mathbb{R}^n$ es un vector de pesos y $\mathbf{1}$ es el m -vector de todos unos, entonces el problema de cubrimiento de conjuntos de mínimo peso admite la siguiente formulación como problema de programación lineal entera:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Mx \geq \mathbf{1} \\ & x \in \{0, 1\}^n \end{aligned} \quad (\text{PC})$$

Recíprocamente, toda matriz M de orden $m \times n$ y con entradas 0, 1 puede pensarse como la matriz de los vectores incidencia de subconjuntos de $N = \{1, \dots, n\}$, y así (PC) es el *problema de cubrimiento de mínimo peso* asociado a la matriz M . El *poliedro de cubrimiento de conjuntos* asociado a la matriz M es $Q^*(M)$.

El problema de dominación (de dominación-total) clásico en un grafo es el problema de hallar un conjunto dominante (resp. totalmente-dominante) de cardinal mínimo, es decir, un subconjunto de vértices de cardinal mínimo que tenga intersección no vacía con las vecindades cerradas (resp. abiertas) del grafo.

Es inmediato verificar que el problema de dominación (de dominación-total) clásico en un grafo G puede formularse como problema de cubrimiento de conjuntos considerando como conjunto \mathcal{F} a los vectores de incidencia de las vecindades cerradas (resp. abiertas)

correspondientes a cada vértice de G . Así, si agregamos a \mathcal{F} los vectores de incidencia de las diferencias simétricas cerradas (resp. abiertas) correspondientes a pares de vértices en G , resultan los X -problemas definidos, con $X \in \{ID, LD, OLD, LTD\}$ casos particulares del problema de dominación o dominación-total en grafos.

En [4] se presenta el siguiente resultado.

Teorema 1.4 ([4]) *Sea $G = (V, E)$ un grafo y $C \subseteq V$, C es un LD-conjunto de G si y solo si su vector característico x satisface:*

- (a) $x(N[i]) \geq 1$ para todo $i \in V$,
- (b) $x(N(i) \Delta N(j)) \geq 1$ para todo $i, j \in V$ con $dist(i, j) = 1$,
- (c) $x(N[i] \Delta N[j]) \geq 1$ para todo $i, j \in V$ con $dist(i, j) = 2$.

A continuación, presentamos los restantes casos.

Teorema 1.5 *Dado un grafo $G = (V, E)$ y un subconjunto de vértices $C \subseteq V$, se verifica:*

1. C es un ID-conjunto de G si y solo si su vector característico x satisface:
 - (a) $x(N[i]) \geq 1$ para todo $i \in V$,
 - (b) $x(N[i] \Delta N[j]) \geq 1$ para todo $i, j \in V$ con $dist(i, j) = 1$ o $dist(i, j) = 2$.
2. C es un OLD-conjunto de G si y solo si su vector característico x satisface:
 - (a) $x(N(i)) \geq 1$ para todo $i \in V$,
 - (b) $x(N(i) \Delta N(j)) \geq 1$ para todo $i, j \in V$ con $dist(i, j) = 1$ o $dist(i, j) = 2$.
3. C es un LTD-conjunto de G si y solo si su vector característico x satisface:
 - (a) $x(N(i)) \geq 1$ para todo $i \in V$,
 - (b) $x(N(i) \Delta N(j)) \geq 1$ para todo $i, j \in V$ con $dist(i, j) = 1$,
 - (c) $x(N[i] \Delta N[j]) \geq 1$ para todo $i, j \in V$ con $dist(i, j) = 2$.

Demostración:

1. Consideramos un ID-conjunto C de G y sea x su vector característico.

Como todos los vértices de V están dominados por C , se verifica (a). Sean $i, j \in V$, por definición $(N[i] \Delta N[j]) \cap C \neq \emptyset$. Entonces para todo $i, j \in V$ se satisface:

$$\sum_{k \in N[i] \Delta N[j]} x_k \geq 1.$$

En particular, dicha desigualdad se satisface para $i, j \in V$ tales que $dist(i, j) = 1$ o $dist(i, j) = 2$ y esto prueba que vale (b).

Recíprocamente, sea $x \in \{0, 1\}^{|V|}$ que satisface (a) y (b) y sea $C = \{i \in V : x_i = 1\}$. A partir de (a) sigue que x es el vector característico de un conjunto dominante de G .

Ahora bien, dados $i, j \in V$ tales que $dist(i, j) = 1$ o $dist(i, j) = 2$, como se verifica la condición (b) tenemos que $x(N[i] \Delta N[j]) \geq 1$ y así resulta $(N[i] \Delta N[j]) \cap C \neq \emptyset$ para tales $i, j \in V$. Por otro lado, si $dist(i, j) \geq 3$, $N[i] \Delta N[j] = N[i] \cup N[j]$ y $N[i] \cap N[j] = \emptyset$, luego $N[i] \cap C \neq N[j] \cap C$, o equivalentemente $(N[i] \Delta N[j]) \cap C \neq \emptyset$, de donde podemos concluir que x es el vector característico de un conjunto separador de G .

Por lo tanto, C es un *ID*-conjunto de G .

2. Se prueba de manera análoga al ítem 1., reemplazando vecindades cerradas por vecindades abiertas. Así C resulta un conjunto que domina-totalmente y separa-totalmente todos los vértices de G .
3. Sea C un *LTD*-conjunto de G y sea x su vector característico.

Como todos los vértices de V están dominados-totalmente por C , (a) se satisface. Sean $i, j \in V - C$, por definición de C , $(N(i) \Delta N(j)) \cap C \neq \emptyset$. Entonces para todo $i, j \in V - C$ sigue que:

$$\sum_{k \in N(i) \Delta N(j)} x_k \geq 1.$$

Ahora, si $i \in C$ o $j \in C$, resulta que $x_i = 1$ o $x_j = 1$ y así

$$\sum_{k \in N(i) \Delta N(j)} x_k + x_i + x_j \geq 1.$$

En ambos casos, se obtiene que para todo $i, j \in V$,

$$\sum_{k \in N(i) \Delta N(j)} x_k + x_i + x_j \geq 1.$$

Si $dist(i, j) = 1$, $i, j \in N(i) \Delta N(j)$ y así resulta

$$x(N(i) \Delta N(j)) + x_i + x_j = x(N(i) \Delta N(j) - \{i, j\}) + 2x_i + 2x_j.$$

Ahora bien,

$$x(N(i) \Delta N(j)) + x_i + x_j = x(N(i) \Delta N(j) - \{i, j\}) + 2x_i + 2x_j \geq 1$$

se satisface si se satisface la desigualdad

$$x(N(i) \Delta N(j) - \{i, j\}) + x_i + x_j = x(N(i) \Delta N(j)) \geq 1,$$

luego se verifica (b).

Si $dist(i, j) = 2$, entonces $i, j \notin N(i) \Delta N(j)$, y se verifica (c) ya que

$$x(N(i) \Delta N(j)) + x_i + x_j = x(N[i] \Delta N[j]) \geq 1.$$

Recíprocamente, sea $x \in \{0, 1\}^{|V|}$ que satisface (a), (b) y (c) y sea $C = \{i \in V : x_i = 1\}$. A partir de (a), x es el vector característico de un conjunto totalmente-dominante de G .

Ahora, sean $i, j \in V - C$. Si $dist(i, j) = 1$, como se verifica la condición (b), $x(N(i) \Delta N(j)) \geq 1$ y así, $(N(i) \Delta N(j)) \cap C \neq \emptyset$.

Si $dist(i, j) = 2$, a partir de (c) se obtiene $x(N[i] \Delta N[j]) \geq 1$. Como $i, j \notin N(i) \Delta N(j)$ entonces $(N(i) \Delta N(j)) \cap C \neq \emptyset$.

Por último, si $dist(i, j) \geq 3$, $N[i] \Delta N[j] = N[i] \cup N[j]$ y $N[i] \cap N[j] = \emptyset$, entonces $N(i) \cap C \neq N(j) \cap C$ y así resulta $(N(i) \Delta N(j)) \cap C \neq \emptyset$.

Por lo tanto C es un *LTD*-conjunto de G .

■

Para cada X -problema con $X \in \{ID, LD, OLD, LTD\}$ obtenemos un sistema de restricciones $M_X x \geq \mathbf{1}$. Definimos las matrices $N[G]$ ($N(G)$) y $\Delta_k[i, j]$ ($\Delta_k(i, j)$), donde cada fila de la matriz $N[G]$ ($N(G)$) es el vector característico asociado a la vecindad cerrada (resp. abierta) de un vértice en G y cada fila de la matriz $\Delta_k[i, j]$ (resp. $\Delta_k(i, j)$), es el vector característico asociado a las diferencias simétricas de las vecindades cerradas (resp. abiertas) de los vértices i y j que están a distancia $k \in \{1, 2\}$.

A partir de los Teoremas 1.4 y 1.5, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 1.6 Para $X \in \{ID, LD, OLD, LTD\}$, la matriz M_X asociada a cada problema es:

$$\begin{aligned} M_{ID}(G) &= \begin{pmatrix} N[G] \\ \Delta_1[i, j] \\ \Delta_2[i, j] \end{pmatrix} & M_{LD}(G) &= \begin{pmatrix} N[G] \\ \Delta_1(i, j) \\ \Delta_2[i, j] \end{pmatrix} \\ M_{OLD}(G) &= \begin{pmatrix} N(G) \\ \Delta_1(i, j) \\ \Delta_2(i, j) \end{pmatrix} & M_{LTD}(G) &= \begin{pmatrix} N(G) \\ \Delta_1(i, j) \\ \Delta_2[i, j] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ahora bien, dado un grafo G , $X \in \{ID, LD, OLD, LTD\}$ y $M_X(G)$, definimos el X -poliedro de G como

$$P_X(G) = Q^*(M_X(G)) = \text{conv} \left\{ x \in \mathbb{Z}_+^{|V|} : M_X x \geq \mathbf{1} \right\}.$$

A partir de la definición, es claro que $\gamma_X(G)$ es igual al número de cubrimiento $\tau(M_X) = \min \mathbf{1}^T x$ tal que $x \in P_X(G)$.

Balas y Ng en [6], probaron que un poliedro $Q^*(M)$ es de dimensión completa si y solo si la matriz M tiene al menos dos unos por fila. Más aún, los autores prueban que toda fila \mathbf{a} no redundante de M define la faceta $\mathbf{a}x \geq 1$ de $Q^*(M)$.

Definimos los siguientes conjuntos:

- $V_1(G) = \{k \in V(G) : \{k\} = N[i] \Delta N[j], i, j \in V\}$,
- $V_2(G) = \{k \in V(G) : \{k\} = N(i), i \in V\}$,
- $V_3(G) = \{k \in V(G) : \{k\} = N(i) \Delta N(j), i, j \in V\}$.

Es claro que si $\text{dist}(i, j) = 1$ entonces $\{i, j\} \subseteq N(i) \Delta N(j)$ y si $\text{dist}(i, j) = 2$ entonces $\{i, j\} \subseteq N[i] \Delta N[j]$.

A partir de las descripciones de las matrices M_X con $X \in \{ID, LD, OLD, LTD\}$ y los resultados en [6], es inmediato el siguiente:

Corolario 1.7 *Sea G un grafo sin vértices aislados. Luego tenemos:*

1. $\dim(P_{ID}(G)) = |V - V_1(G)|$ y $x_i \geq 0$ define una faceta de $P_{ID}(G)$ si y solo si $i \notin V_1(G)$.
2. $\dim(P_{LD}(G)) = |V|$ y $x_i \geq 0$ define una faceta de $P_{LD}(G)$ para todo $i \in V$.
3. $\dim(P_{OLD}(G)) = |V - V_2(G) - V_3(G)|$ y $x_i \geq 0$ define una faceta de $P_{OLD}(G)$ si y solo si $i \notin V_2(G) \cup V_3(G)$.
4. $\dim(P_{LTD}(G)) = |V - V_2(G)|$ y $x_i \geq 0$ define una faceta de $P_{LTD}(G)$ si y solo si $i \notin V_2(G)$.

Para $X \in \{ID, LD, OLD, LTD\}$, definimos la *matriz clutter* asociada al X -problema, denotada por $C_X(G)$, a la matriz obtenida a partir de $M_X(G)$ luego de eliminar las filas redundantes. Es claro que

$$P_X(G) = \text{conv}\{x \in \mathbb{Z}_+^{|V|} : C_X(G)x \geq \mathbf{1}\}.$$

Para estudiar cada X -problema desde el punto de vista poliedral, será de utilidad considerar el poliedro *relajación lineal*:

$$Q_X(G) = \{x \in \mathbb{R}_+^{|V|} : C_X(G)x \geq \mathbf{1}\}.$$

Capítulo 2

Estudio Poliedral

Resumen

En este capítulo estudiamos los poliedros asociados a los cuatro problemas en clases particulares de grafos. El objetivo es describir total o parcialmente el X -poliedro para $X \in \{ID, LD, OLD, LTD\}$ y determinar el valor exacto del mínimo código o conjunto correspondiente.

Comenzamos este capítulo con la descripción del poliedro de cubrimiento de las q -rosas que será de utilidad en el resto del estudio poliedral.

Consideramos la q -rosa completa de orden n , \mathcal{R}_n^q y su matriz de incidencia $M(\mathcal{R}_n^q)$, es decir, la matriz cuyas filas son los vectores característicos asociados a las hiperaristas de \mathcal{R}_n^q . En [43] se probó el siguiente resultado.

Teorema 2.1 ([43]) *Para $n > q \geq 2$ e $i \in \{1, \dots, n\}$*

$$\sum_{i=1}^n x_i \geq \tau(M(\mathcal{R}_n^q)) = n - q + 1$$

es una desigualdad que define faceta para $Q^(M(\mathcal{R}_n^q))$.*

Además, en [11] se probó el siguiente Teorema.

Teorema 2.2 ([11]) *Sea $n > q \geq 2$. Una desigualdad $\sum_{i=1}^n a_i x_i \geq 1$ con $a_j \notin \{0, 1\}$ para algún $j \in \{1, \dots, n\}$ es una desigualdad que define faceta para $Q^*(M(\mathcal{R}_n^q))$ si y solo si $\sum_{i=1}^n a_i x_i \geq 1$ puede ser escrita como $x(A_s) \geq n - q + 1 - s$ para algún $A_s \subseteq \{1, \dots, n\}$ donde $s \in \{0, \dots, n - q - 1\}$ y $|A_s| = n - s$.*

2.1. Grafos p -partitos

En esta sección, consideramos los grafos p -partitos completos y establecemos una conexión con las 2-rosas completas de orden n , \mathcal{R}_n^2 .

2.1.1. Grafos bipartitos completos

Sea $K_{m,n}$ el grafo bipartito completo con la bipartición $A = \{1, \dots, m\}$ y $B = \{m + 1, \dots, m + n\}$.

Notemos que $K_{1,2} = P_3$ y los caminos P_n se estudian más adelante dentro de este capítulo.

También observemos que no existe un OLD -conjunto para $K_{m,n}$ con $n \geq 2$ ya que $N(i) \Delta N(j) = \emptyset$ si $i, j \in A$ o $i, j \in B$.

Para continuar con el estudio de los restantes problemas, comenzamos con el caso de la estrella $K_{1,n}$, es decir, $A = \{1\}$ y $n \geq 3$.

Teorema 2.3 *Para una estrella $K_{1,n}$ con $n \geq 3$, tenemos*

$$C_{ID}(K_{1,n}) = C_{LD}(K_{1,n}) = M(\mathcal{R}_{n+1}^2)$$

y

$$C_{LTD}(K_{1,n}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & M(\mathcal{R}_n^2) & \\ 0 & & & \end{array} \right).$$

Demostración: Sea $K_{1,n}$ una estrella con $n \geq 3$, las filas de las matrices dadas en el Corolario 1.6 corresponden a los siguientes conjuntos:

- (f_1) $N[1] = \{1\} \cup B$,
- (f_2) $N(1) = B$,
- (f_3) $N[i] = \{1, i\}$ para todo $i \in B$,
- (f_4) $N(i) = \{1\}$ para todo $i \in B$,
- (f_5) $N[1] \triangle N[i] = B - \{i\}$ para todo $i \in B$,
- (f_6) $N(1) \triangle N(i) = N[1]$ para todo $i \in B$,
- (f_7) $N[j] \triangle N[k] = \{j, k\}$, $j \neq k$, $j, k \in B$.

En el caso del ID -problema, tenemos que las filas de la matriz $C_{ID}(K_{1,n})$ son las filas no redundantes asociadas a los conjuntos dados en los ítems (f_1), (f_3), (f_5) y (f_7). Observemos que las filas asociadas a los conjuntos (f_1) y (f_5) son redundantes, ya que:

- $N[1] = \{1\} \cup B$ contiene a $N[i] = \{1, i\}$ para todo $i \in B$ y
- $N[1] \triangle N[i] = B - \{i\}$ contienen a $N[j] \triangle N[k] = \{j, k\}$, cuando $j, k \neq i$.

Así cada fila de la matriz $C_{ID}(K_{1,n})$ contiene exactamente dos entradas no nulas. Más aún, las entradas no nulas de todas las filas de $C_{ID}(K_{1,n})$ están en correspondencia con dos elementos del conjunto $A \cup B$ y, por lo tanto, $C_{ID}(K_{1,n}) = M(\mathcal{R}_{n+1}^2)$.

Ahora bien, consideramos el LD -problema, las filas de la matriz $C_{LD}(K_{1,n})$ son las filas no dominadas asociadas a los conjuntos dados en los ítems (f_1), (f_3), (f_6) y (f_7). Es claro que los conjuntos de los ítems (f_1) y (f_6) coinciden y contienen a los conjuntos del ítem (f_7). Por lo tanto $C_{LD}(K_{1,n}) = C_{ID}(K_{1,n})$.

Por último, en el LTD -problema utilizamos un argumento similar al de los problemas anteriores y tenemos que las filas de la matriz $C_{LTD}(K_{1,n})$ son las filas dominantes asociadas a los conjuntos (f_2), (f_4), (f_6) y (f_7). En este caso el conjunto en (f_2) contiene a los conjuntos del ítem (f_7) y el conjunto del ítem (f_6) contiene al conjunto del ítem (f_4). Por lo tanto

$$C_{LTD}(K_{1,n}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & M(\mathcal{R}_n^2) & \\ 0 & & & \end{array} \right).$$



Luego, deducimos de los Teoremas 2.2 y 2.3 el siguiente resultado.

Corolario 2.4 *Los poliedros $P_{ID}(K_{1,n})$ y $P_{LD}(K_{1,n})$ con $n \geq 3$ se describen por las desigualdades $x(C) \geq |C| - 1$ para todos los subconjuntos no vacíos $C \subseteq \{1, \dots, n+1\}$. Mientras que el poliedro $P_{LTD}(K_{1,n})$ se describe por las desigualdades $x_1 = 1$ y $x(C) \geq |C| - 1$ para todos los subconjuntos no vacíos $C \subseteq \{2, \dots, n+1\}$.*

A partir del corolario anterior concluimos:

Corolario 2.5 *Para una estrella $K_{1,n}$ con $n \geq 3$, tenemos $\gamma_{ID}(K_{1,n}) = \gamma_{LD}(K_{1,n}) = \gamma_{LTD}(K_{1,n}) = n$.*

Es fácil ver que $K_{2,2} = C_4$ y $C_{ID}(K_{2,2}) = M(\mathcal{R}_4^2)$, por lo tanto $\gamma_{ID}(K_{2,2}) = 3$. Además,

$$C_{LD}(K_{2,2}) = C_{LTD}(K_{2,2}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y podemos concluir que $\gamma_{LD}(K_{2,2}) = \gamma_{LTD}(K_{2,2}) = 2$.

Para los grafos bipartitos completos generales $K_{m,n}$ con $m \geq 2$, $n \geq 3$, obtenemos:

Teorema 2.6 *Si $K_{m,n}$ es un grafo bipartito completo con $m \geq 2$, $n \geq 3$, se tiene que*

$$C_{ID}(K_{m,n}) = C_{LD}(K_{m,n}) = C_{LTD}(K_{m,n}) = \begin{pmatrix} M(\mathcal{R}_m^2) & 0 \\ 0 & M(\mathcal{R}_n^2) \end{pmatrix}.$$

Demostración: Sea $K_{m,n}$ un grafo bipartito con $m \geq 2$ y $n \geq 3$, las filas de las matrices dadas en el Corolario 1.6 corresponden a los siguientes conjuntos:

- (f₁) $N[i] = \{i\} \cup B$ para todo $i \in A$,
- (f₂) $N[i] = \{i\} \cup A$ para todo $i \in B$,
- (f₃) $N(i) = B$ para todo $i \in A$,
- (f₄) $N(i) = A$ para todo $i \in B$,
- (f₅) $N[j] \Delta N[k] = (A \cup B) - \{j, k\}$ para $j \in A$ y $k \in B$ o bien, $j \in B$ y $k \in A$,
- (f₆) $N(j) \Delta N(k) = A \cup B$ para $j \in A$ y $k \in B$ o bien, $j \in B$ y $k \in A$,
- (f₇) $N[j] \Delta N[k] = \{j, k\}$ para $j, k \in A$ o $j, k \in B$.

Para el ID -problema, las filas de la matriz $C_{ID}(K_{m,n})$ son las filas no dominadas asociadas a los conjuntos dados en los ítems (f_1) , (f_2) , (f_5) y (f_7) . Ahora bien, las filas asociadas a los conjuntos (f_1) , (f_2) y (f_5) son redundantes, en efecto:

$N[i] = \{i\} \cup B$ para todo $i \in A$ contienen a $N[j] \Delta N[k] = \{j, k\}$, cuando $j, k \in B$,

$N[i] = \{i\} \cup A$ para todo $i \in B$ contienen a $N[j] \Delta N[k] = \{j, k\}$, cuando $j, k \in A$,

$N[j] \Delta N[k] = (A \cup B) - \{j, k\}$ para $j \in A$ y $k \in B$ o bien, $j \in B$ y $k \in A$, contienen a $N[m] \Delta N[\ell] = \{m, \ell\}$, cuando $m, \ell \in A$, $m, \ell \neq j$ o bien, $m, \ell \in B$, $m, \ell \neq k$.

Así obtenemos que cada fila de la matriz $C_{ID}(K_{m,n})$ contiene exactamente dos entradas no nulas. Más aún, todas las filas de $C_{ID}(K_{m,n})$ están en correspondencia con todos los vectores característicos de dos elementos del conjunto A o bien, del conjunto B , por lo tanto

$$C_{ID}(K_{m,n}) = \begin{pmatrix} M(\mathcal{R}_m^2) & 0 \\ 0 & M(\mathcal{R}_n^2) \end{pmatrix}.$$

Consideramos ahora el LD -problema, entonces las filas de $C_{LD}(K_{m,n})$ son las filas no redundantes asociadas a los conjuntos dados en los ítems (f_1) , (f_2) , (f_6) y (f_7) . Como los conjuntos de los ítems (f_1) , (f_2) y (f_6) contienen a los conjuntos del ítem (f_7) , resulta $C_{LD}(K_{m,n}) = C_{ID}(K_{m,n})$.

En el caso del LTD -problema, las filas de $C_{LTD}(K_{m,n})$ son las filas no dominadas asociadas a los conjuntos dados en (f_3) , (f_4) , (f_6) y (f_7) . Es claro que los conjuntos de los ítems (f_3) , (f_4) y (f_6) contienen a los conjuntos del ítem (f_7) y por lo tanto $C_{LTD}(K_{m,n}) = C_{ID}(K_{m,n})$. ■

Como consecuencia de la Observación 1.3, del Teorema 2.2 y del Teorema 2.6 podemos concluir:

Corolario 2.7 *Los poliedros $P_{ID}(K_{m,n})$, $P_{LD}(K_{m,n})$ y $P_{LTD}(K_{m,n})$ están dados por las siguientes desigualdades:*

(1) $x(C) \geq |C| - 1$ para todo conjunto no vacío $C \subseteq A$,

(2) $x(C) \geq |C| - 1$ para todo conjunto no vacío $C \subseteq B$.

A partir del Corolario 2.7 obtenemos el siguiente resultado:

Corolario 2.8 *Dado un grafo bipartito completo $K_{m,n}$ con $m \geq 2$ y $n \geq 3$,*

$$\gamma_{ID}(K_{m,n}) = \gamma_{LD}(K_{m,n}) = \gamma_{LTD}(K_{m,n}) = m + n - 2.$$

2.1.2. Grafos p -partitos completos

Los resultados anteriores pueden generalizarse a grafos p -partitos completos. Consideremos $K_{n_1, \dots, n_p} = (V, E)$ un grafo p -partito completo con $V = \bigcup_{i=1}^p U_i$ donde $U_i = \{v_{i1}, \dots, v_{in_i}\}$, $|U_i| = n_i$ para $i \in \{1, \dots, p\}$, $|V| = n$ y suponemos $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_p$ con $p \geq 3$.

Al igual que en el caso de las estrellas y los grafos bipartitos completos, no existe un OLD -conjunto para los grafos p -partitos completos ya que $N(v_{ij}) \Delta N(v_{ik}) = \emptyset$ para todo $v_{ij}, v_{ik} \in V$ con $dist(v_{ij}, v_{ik}) = 2$.

Comenzamos estudiando en detalle el ID -problema. En primer lugar, tengamos en cuenta que K_{n_1, \dots, n_p} no es identificable si $n_2 = 1$, ya que en este caso, $U_1 = \{v_{11}\}$ y $U_2 = \{v_{21}\}$ y así v_{11} y v_{21} resultan true twins.

En la Figura 2.1 se muestran dos ejemplos, un grafo 3-partito completo y uno 4-partito completo, donde los vértices pintados de negro representan un código de identificación de tamaño mínimo.



Figura 2.1: (a) Un grafo 3-partito completo con $n_1 = 2$, $n_2 = 3$ y $n_3 = 4$. (b) Un grafo 4-partito completo con $n_1 = 1$, $n_2 = n_3 = 2$ y $n_4 = 3$.

Teorema 2.9 Sea K_{n_1, n_2, \dots, n_p} un grafo p -partito completo luego:

- (1) Si $n_1 = 1$, $n_2 = \dots = n_{r+1} = 2$ con $r \in \{2, \dots, p-2\}$ y $n_i \geq 3$ con $i \in \{r+2, \dots, p\}$,

$$C_{ID}(K_{n_1, n_2, \dots, n_p}) = \begin{pmatrix} 0 & I_{2r} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & M(\mathcal{R}_{n_2}^2) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & & M(\mathcal{R}_{n_p}^2) \end{pmatrix}.$$

- (2) Si $n_i = 2$ con $i \in \{1, \dots, r\}$ y $n_i \geq 3$ con $i \in \{r+1, \dots, p\}$,

$$C_{ID}(K_{n_1, n_2, \dots, n_p}) = \begin{pmatrix} M(\mathcal{R}_{2r}^2) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M(\mathcal{R}_{n_{r+1}}^2) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & & M(\mathcal{R}_{n_p}^2) \end{pmatrix}.$$

(3) Si $n_i \geq 3$ con $i \in \{1, \dots, p\}$,

$$C_{ID}(K_{n_1, n_2, \dots, n_p}) = \begin{pmatrix} M(\mathcal{R}_{n_1}^2) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M(\mathcal{R}_{n_2}^2) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & & M(\mathcal{R}_{n_p}^2) \end{pmatrix}.$$

Demostración: Sea $G = K_{n_1, n_2, \dots, n_p}$ un grafo p -parito completo con $n_1 = 1$. Si $r = |\{i : n_i = 2\}|$ y $r \in \{1, \dots, p-2\}$, tenemos las siguientes vecindades cerradas:

- $N[v_{11}] = V$,
- $N[v_{i1}] = V - \{v_{i2}\}$ y $N[v_{i2}] = V - \{v_{i1}\}$ para $i \in \{2, \dots, r+1\}$,
- $N[v_{ij}] = (V - U_i) \cup \{v_{ij}\}$ para $i \in \{r+2, \dots, p\}$.

Luego, $N[v_{11}] \Delta N[v_{i1}] = \{v_{i2}\}$ y $N[v_{11}] \Delta N[v_{i2}] = \{v_{i1}\}$ para todo $i \in \{2, \dots, r+1\}$ lo que muestra que $U_2 \cup \dots \cup U_{r+1} \subseteq V_1(G)$. Todas las vecindades cerradas contienen al menos un vértice de $V_1(G)$ y, por lo tanto, todas las filas asociadas a las vecindades cerradas son redundantes.

Además, todas las filas asociadas con las diferencias simétricas $N[v_{ij}] \Delta N[v_{ik}] = \{v_{ij}, v_{ik}\}$ para $i \in \{r+2, \dots, p\}$ dominan a las filas asociadas con $N[v_{11}] \Delta N[v_{ij}] = U_i - \{v_{ij}\}$ para $i \in \{r+2, \dots, p\}$.

Por otro lado, los conjuntos $N[v_{i1}] \Delta N[v_{i2}]$ y $N[v_{i1}] \Delta N[v_{jk}]$ para todo $i, j \in \{2, \dots, r+1\}$ y, los conjuntos $N[v_{i1}] \Delta N[v_{jk}]$ para $i \in \{2, \dots, r+1\}$ y $j \in \{r+2, \dots, p\}$ intersectan a $V_1(G)$.

Además, cada uno de los conjuntos U_i con $i \in \{r+2, \dots, p\}$ induce un bloque en $C_{ID}(G)$ correspondiente a una 2-rosa de orden n_i . Por lo tanto, toda fila de $M_{ID}(G)$ con entrada en 1 asociada al vértice v_{11} está dominada. El conjunto vértices $U_2 \cup \dots \cup U_{r+1}$ coincide con $V_1(G)$, lo que nos lleva a obtener un bloque en $C_{ID}(G)$ que corresponde a una matriz identidad de tamaño $2r$.

A partir de este resultado se puede observar que, si $r = 0$ no aparece I_{2r} en la construcción de la matriz $C_{ID}(K_{1, n_2, \dots, n_p})$ y si $r = p-1$, entonces ninguna de las submatrices $M(\mathcal{R}_{n_i}^2)$ aparece en tal construcción. Así queda demostrado el ítem (1) del teorema.

Supongamos ahora que $n_i = 2$ para $i \in \{1, \dots, r\}$ y $n_i \geq 3$ para $i \in \{r+1, \dots, p\}$. Entonces,

- $N[v_{i1}] = V - \{v_{i2}\}$ y $N[v_{i2}] = V - \{v_{i1}\}$ para $i \in \{1, \dots, r\}$,
- $N[v_{ij}] = (V - U_i) \cup \{v_{ij}\}$ para $i \in \{r+1, \dots, p\}$.

Es claro que las filas de la matriz $M_{ID}(G)$ asociadas a las diferencias simétricas $N[v_{ij}] \triangle N[v_{ik}] = \{v_{ij}, v_{ik}\}$ para $i \in \{1, \dots, p\}$, dominan a las filas asociadas a las vecindades cerradas y restantes diferencias simétricas. Así queda probado el ítem (2).

Finalmente supongamos que $n_i \geq 3$ para $i \in \{1, \dots, p\}$. En este caso, $N[v_{ij}] = (V - U_i) \cup \{v_{ij}\}$ para $i \in \{1, \dots, p\}$. Entonces, utilizando un razonamiento análogo a los casos anteriores, podemos concluir que las filas de la matriz $M_{ID}(G)$ asociadas a las diferencias simétricas $N[v_{ij}] \triangle N[v_{ik}] = \{v_{ij}, v_{ik}\}$ para $i \in \{1, \dots, p\}$ dominan a las restantes filas. Por lo tanto, vale (3) y el teorema queda demostrado. ■

Como consecuencia del Teorema 2.2, la Observación 1.3 y del Teorema 2.9, tenemos:

Corolario 2.10 *Sea $G = K_{n_1, n_2, \dots, n_p}$ un grafo p -partito completo con $n_1 = 1$ y sea $r = |\{i : n_i = 2\}|$. Consideremos las siguientes desigualdades:*

- (1) $x(v_{11}) \geq 0$ y $x(v_{ij}) \geq 0$ para todo $v_{ij} \in U_i$, $i \in \{r+2, \dots, p\}$,
- (2) $x(v_{ij}) \geq 1$ para todo $v_{ij} \in U_i$, $i \in \{2, \dots, r+1\}$,
- (3) $x(V') \geq |V'| - 1$ para todo subconjunto no vacío $V' \subseteq U_i$ para $i \in \{r+2, \dots, p\}$.

Luego el poliedro $P_{ID}(G)$ está dado por las desigualdades:

- (1) y (3) si $r = 0$,
- (1), (2) y (3) si $r \in \{1, \dots, p-2\}$,
- (1) y (2) si $r = p-1$.

Corolario 2.11 *Sea $G = K_{n_1, n_2, \dots, n_p}$ un grafo p -partito completo con $n_i = 2$ para todo $i \in \{1, \dots, r\}$ y $n_i \geq 3$ para $i \in \{r+1, \dots, p\}$, $P_{ID}(G)$ está dado por las siguientes desigualdades:*

- (1) $x(v) \geq 0$ para todo $v \in V$,
- (2) $x(V') \geq |V'| - 1$ para todo subconjunto no vacío $V' \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_r$,
- (3) $x(V') \geq |V'| - 1$ para todo subconjunto no vacío $V' \subseteq U_i$ para $i \in \{r+1, \dots, p\}$.

Corolario 2.12 *Sea $G = K_{n_1, n_2, \dots, n_p}$ un grafo p -partito completo con $n_i \geq 3$ para $i \in \{1, \dots, p\}$, $P_{ID}(G)$ está dado por las siguientes desigualdades:*

- (1) $x(v) \geq 0$ para todo $v \in V$,

(2) $x(V') \geq |V'| - 1$ para todo subconjunto no vacío $V' \subseteq U_i$ para $i \in \{1, \dots, p\}$.

A partir de los Corolarios 2.10, 2.11 y 2.12 obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.13 Dado $G = K_{n_1, n_2, \dots, n_p}$ un grafo p -partito completo:

- (1) $\gamma_{ID}(G) = n - p + r$ si $n_1 = 1$ y $r = |\{i : n_i = 2\}|$ para $i \in \{2, \dots, p-1\}$,
- (2) $\gamma_{ID}(G) = n - p + r - 1$ si $n_i = 2$ con $i \in \{1, \dots, r\}$ y $n_i \geq 3$ con $i \in \{r+1, \dots, p\}$,
- (3) $\gamma_{ID}(G) = n - p$ si $n_i \geq 3$ con $i \in \{1, \dots, p\}$.

A continuación estudiamos el LD -problema en grafos p -partitos completos.

Teorema 2.14 Sea K_{n_1, n_2, \dots, n_p} un grafo p -partito completo entonces:

(1) Si $n_1 = 1$,

$$C_{LD}(K_{n_1, n_2, \dots, n_p}) = \begin{pmatrix} 0 & M(\mathcal{R}_{n_2}^2) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & M(\mathcal{R}_{n_3}^2) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & & M(\mathcal{R}_{n_p}^2) \end{pmatrix}.$$

(2) Si $n_1 \geq 2$,

$$C_{LD}(K_{n_1, n_2, \dots, n_p}) = \begin{pmatrix} M(\mathcal{R}_{n_1}^2) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M(\mathcal{R}_{n_2}^2) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & & M(\mathcal{R}_{n_p}^2) \end{pmatrix}.$$

Demostración: Consideramos primero el caso $n_1 = 1$. Teniendo en cuenta el resultado obtenido en el Corolario 1.6, para describir la matriz $C_{LD}(K_{n_1, n_2, \dots, n_p})$ consideramos las filas no redundantes asociadas a los conjuntos:

- (f₁) $N[v_{11}] = V$,
- (f₂) $N[v_{ij}] = (v - U_i) \cup \{v_{ij}\}$ para $i \in \{2, \dots, p\}$,
- (f₃) $N(v_{11}) \triangle N(v_{ij}) = U_i \cup \{v_{11}\}$ para $i \in \{2, \dots, p\}$,
- (f₄) $N(v_{ij}) \triangle N(v_{kh}) = U_i \cup U_k$ para $i, k \in \{2, \dots, p\}$,
- (f₅) $N[v_{ij}] \triangle N[v_{ik}] = \{v_{ij}, v_{ik}\}$ para $i \in \{2, \dots, p\}$.

Claramente las filas asociadas a los conjuntos del ítem (f_5) dominan a las restantes, así queda probado (1).

Ahora bien, si $n_1 \geq 2$, utilizando nuevamente el resultado obtenido en el Corolario 1.6 tenemos que las filas de la matriz $C_{LD}(K_{n_1, n_2, \dots, n_p})$ son aquellas filas no dominadas asociadas a los conjuntos:

$$(f_1) \quad N[v_{ij}] = (v - U_i) \cup \{v_{ij}\} \text{ para } i \in \{1, \dots, p\},$$

$$(f_2) \quad N(v_{ij}) \triangle N(v_{kh}) = U_i \cup U_k \text{ para } i, k \in \{1, \dots, p\},$$

$$(f_3) \quad N[v_{ij}] \triangle N[v_{ik}] = \{v_{ij}, v_{ik}\} \text{ para } i \in \{1, \dots, p\}.$$

En este caso es fácil ver que las filas asociadas a (f_3) dominan a las restantes, así obtenemos (2) y queda probado el teorema. \blacksquare

Como consecuencia del Teorema 2.2, la Observación 1.3 y del Teorema 2.14 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.15 *Sea $G = K_{n_1, n_2, \dots, n_p}$ un grafo p -partito completo, $P_{LD}(G)$ está dado por las siguientes desigualdades:*

- Si $n_1 = 1$,

$$(1) \quad x(v) \geq 0 \text{ para todo } v \in V,$$

$$(2) \quad x(V') \geq |V'| - 1 \text{ para todo subconjunto no vacío } V' \subseteq U_i \text{ para } i \in \{2, \dots, p\}.$$

- Si $n_1 \geq 2$,

$$(1) \quad x(v) \geq 0 \text{ para todo } v \in V,$$

$$(2) \quad x(V') \geq |V'| - 1 \text{ para todo subconjunto no vacío } V' \subseteq U_i \text{ para } i \in \{1, \dots, p\}.$$

A partir del Corolario 2.15 obtenemos:

Corolario 2.16 *Dado $G = K_{n_1, n_2, \dots, n_p}$ un grafo p -partito completo resulta:*

$$\gamma_{LD}(G) = n - p.$$

Para finalizar con el estudio de los grafos p -partitos completos, analizamos el LTD -problema.

Teorema 2.17 *Sea K_{n_1, n_2, \dots, n_p} un grafo p -partito completo, luego*

$$C_{LTD}(K_{n_1, n_2, \dots, n_p}) = C_{LD}(K_{n_1, n_2, \dots, n_p}).$$

Demostración: A partir del Corolario 1.6 podemos observar que la diferencia entre las matrices asociadas al LD -problema y al LTD -problema son las filas correspondientes a las vecindades de los vértices. Para el LD -problema se consideran vecindades cerradas mientras que, para el LTD -problema, vecindades abiertas. Ahora bien,

- Si $n_1 = 1$,
 $N(v_{11}) = V - \{v_{11}\}$,
 $N(v_{ij}) = V - U_i$ para $i \in \{2, \dots, p\}$.
- Si $n_1 \geq 2$,
 $N(v_{ij}) = V - U_i$ para $i \in \{1, \dots, p\}$.

Al igual que en la prueba del Teorema 2.14 es claro que las filas de la matriz $M_{LTD}(K_{n_1, n_2, \dots, n_p})$ asociadas a las vecindades abiertas quedan dominadas en ambos casos por las filas asociadas a las diferencias simétricas de vértices a distancia 2. Por lo tanto,

$$C_{LTD}(K_{n_1, n_2, \dots, n_p}) = C_{LD}(K_{n_1, n_2, \dots, n_p}).$$

■

Obtenemos el siguiente corolario como consecuencia del Teorema 2.2, la Observación 1.3 y del Teorema 2.17.

Corolario 2.18 *Sea $G = K_{n_1, n_2, \dots, n_p}$ un grafo p -partito completo, $P_{LTD}(G)$ está dado por las siguientes desigualdades:*

- Si $n_1 = 1$,
 - (1) $x(v) \geq 0$ para todo $v \in V$,
 - (2) $x(V') \geq |V'| - 1$ para todo subconjunto no vacío $V' \subseteq U_i$ para $i \in \{2, \dots, p\}$.
- Si $n_1 \geq 2$,
 - (1) $x(v) \geq 0$ para todo $v \in V$,
 - (2) $x(V') \geq |V'| - 1$ para todo subconjunto no vacío $V' \subseteq U_i$ para $i \in \{1, \dots, p\}$.

A partir del Corolario 2.18 obtenemos:

Corolario 2.19 *Dado $G = K_{n_1, n_2, \dots, n_p}$ un grafo p -partito completo resulta:*

$$\gamma_{LTD}(G) = n - p.$$

2.2. Coronas generalizadas

Sean $G = (V, E)$ un grafo con $|V| = n$ y $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^{|V|}$. Consideramos $G^{\mathbf{k}}$ el grafo \mathbf{k} -corona generalizada de G .

Es claro que si G admite un X -conjunto para $X \in \{ID, LD, OLD, LTD\}$ y $\mathbf{k} = \mathbf{1}$, $C = V$ resulta un X -conjunto para $G^{\mathbf{1}}$. Luego,

$$\gamma_X(G^{\mathbf{1}}) \leq n.$$

En particular la igualdad vale para $X \in \{LD, LTD\}$. En efecto, es fácil verificar que

$$C_{LD}(G^{\mathbf{1}}) = \left(I_n \mid I_n \right) \quad C_{LTD}(G^{\mathbf{1}}) = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline N(G) & I_n \end{array} \right).$$

Si para algún $i \in V$, el número de sus vértices pendientes es mayor o igual a dos, entonces estos vértices resultan false twins y el grafo $G^{\mathbf{k}}$ no admite un OLD -conjunto. A continuación estudiamos los restantes problemas en el caso en que la cantidad de vértices pendientes, para cada vértice del grafo G , es mayor o igual a 2.

Teorema 2.20 *Sea $G^{\mathbf{k}}$ la \mathbf{k} -corona generalizada de un grafo G con $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ y $k_i \geq 2$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Luego,*

$$C_{ID}(G^{\mathbf{k}}) = C_{LD}(G^{\mathbf{k}}) = \begin{pmatrix} M(\mathcal{R}_{k_1+1}^2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M(\mathcal{R}_{k_2+1}^2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M(\mathcal{R}_{k_n+1}^2) \end{pmatrix},$$

y

$$C_{LTD}(G^{\mathbf{k}}) = \begin{pmatrix} I_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M(\mathcal{R}_{k_1}^2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M(\mathcal{R}_{k_n}^2) \end{pmatrix}.$$

Demostración: Sea $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ y para cada $v_i \in V$, $P_i = \{p_i^1, \dots, p_i^{k_i}\}$ el conjunto de vértices pendientes de v_i con $k_i \geq 2$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Claramente, $N[p_i^j] = \{p_i^j, v_i\}$ y si $dist(p_i^j, p_i^k) = 2$ entonces $N[p_i^j] \Delta N[p_i^k] = \{p_i^j, p_i^k\}$. Luego, a partir de la definición de la matriz $M_{ID}(G^{\mathbf{k}})$ obtenida en el Corolario 1.6, es claro que las filas de dicha matriz asociadas a los siguientes conjuntos son redundantes:

- $N[v_i] = P_i \cup \{v_i\} \cup N_G(v_i)$, $N[v_i] \Delta N[v_j] = P_i \cup P_j \cup (N_G(v_i) \Delta N_G(v_j))$ si $dist(v_i, v_j) = 1$,
- $N[v_i] \Delta N[p_i^j] = (P_i - \{p_i^j\}) \cup N_G(v_i)$ si $dist(v_i, p_i^j) = 1$,
- $N[v_i] \Delta N[p_i^k] = P_i \cup (N_G[v_i] - \{v_j\}) \cup \{p_i^k\}$ si $dist(v_i, p_i^k) = 2$ y

- $N[v_i] \Delta N[v_j] \supseteq P_i \cup \{v_i\} \cup P_j \cup \{v_j\}$ si $dist(v_i, v_j) = 2$.

Así las filas $C_{ID}(G^{\mathbf{k}})$ tienen exactamente dos entradas no nulas que representan los subconjuntos de 2 elementos de P_i para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ y luego

$$C_{ID}(G^{\mathbf{k}}) = \begin{pmatrix} M(\mathcal{R}_{k_1+1}^2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M(\mathcal{R}_{k_2+1}^2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M(\mathcal{R}_{k_n+1}^2) \end{pmatrix}.$$

Ahora, observemos que como $dist(v_i, p_i^j) = 1$ entonces las filas correspondientes a los vectores de incidencia de $N(v_i) \Delta N(p_i^j)$ son redundantes, en efecto $\{p_i^j, v_i\} \subseteq N(v_i) \Delta N(p_i^j)$. Así, $C_{LD}(G^{\mathbf{k}}) = C_{ID}(G^{\mathbf{k}})$.

Finalmente, observemos que las filas correspondientes a las diferencias simétricas de la matriz $C_{LTD}(G^{\mathbf{k}})$ son idénticas a las ya obtenidas para la matriz $C_{LD}(G^{\mathbf{k}})$. Además las vecindades abiertas $N(v_i) = P_i \cup N_G(v_i) \supseteq N[p_i^j] \Delta N[p_i^k]$ siendo $dist(p_i^j, p_i^k) = 2$ y, por tanto, las filas de la matriz $M_{LTD}(G^{\mathbf{k}})$ asociadas a estos conjuntos son redundantes. Por último, las filas asociadas a los conjuntos $N(p_i^j) = \{v_i\}$ para $i \in \{1, \dots, n\}$ participan de $C_{LTD}(G^{\mathbf{k}})$. Así,

$$C_{LTD}(G^{\mathbf{k}}) = \begin{pmatrix} I_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M(\mathcal{R}_{k_1}^2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M(\mathcal{R}_{k_n}^2) \end{pmatrix}.$$

■

Como consecuencia del Teorema 2.2, la Observación 1.3 y del Teorema 2.20 obtenemos los siguientes resultados.

Corolario 2.21 *Sea $G^{\mathbf{k}}$ la \mathbf{k} -corona generalizada de un grafo G con $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ y $k_i \geq 2$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Para $X \in \{ID, LD\}$, $P_X(G)$ está dado por las siguientes desigualdades:*

(1) $x(v) \geq 0$ para todo $v \in V \cup \bigcup_{i=1}^n P_i$,

(2) $x(V') \geq |V'| - 1$ para todo subconjunto no vacío $V' \subseteq \{v_i\} \cup P_i$ para $i \in \{1, \dots, n\}$.

Corolario 2.22 *Sea $G^{\mathbf{k}}$ la \mathbf{k} -corona generalizada de un grafo G con $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ y $k_i \geq 2$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, $P_{LTD}(G)$ está dado por las siguientes desigualdades:*

(1) $x(v) \geq 0$ para todo $v \in \bigcup_{i=1}^n P_i$,

- (2) $x(v) \geq 0$ para todo $v \in V$,
- (3) $x(V') \geq |V'| - 1$ para todo subconjunto no vacío $V' \subseteq P_i$ para $i \in \{1, \dots, n\}$.

A partir de los Corolarios 2.21 y 2.22 obtenemos:

Corolario 2.23 Dada $G^{\mathbf{k}}$ la \mathbf{k} -corona generalizada de un grafo G con $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ y $k_i \geq 2$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, resulta:

$$\gamma_{ID}(G^{\mathbf{k}}) = \gamma_{LD}(G^{\mathbf{k}}) = \gamma_{LTD}(G^{\mathbf{k}}) = k_1 + k_2 + \dots + k_n.$$

Por último, observemos qué ocurre cuando en la \mathbf{k} -corona generalizada de un grafo G , existen $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tales que $k_i = 1$ y $k_j \neq 1$.

Si se trata del ID -problema, es fácil chequear que la restricción asociada a la condición $N[p_i^j] \Delta N[v_i] = N_G(v_i)$ cuando $|P_i| = 1$ no está dominada. Esto produce que la matriz correspondiente al problema no resulta ser una matriz de q -rosas por bloques. Una situación similar ocurre en los problemas restantes.

Esto significa que, en estos últimos casos, deberíamos realizar el análisis del poliedro resultante utilizando otras estructuras matriciales, lo cual da lugar a una línea de investigación diferente a la abordada en esta sección.

2.3. Caminos y ciclos

En esta sección, consideramos los hipergrafos \mathcal{H}_X asociados a la matrix de clutter $C_X(G)$ para cada $X \in \{ID, LD, OLD, LTD\}$ cuando G es un camino o un ciclo. El objetivo es obtener una descripción total o parcial del poliedro $P_X(G)$ correspondiente.

Dado $X \in \{ID, LD, OLD, LTD\}$ y la matrix $C_X(G)$, construimos el hipergrafo $\mathcal{H}_X = (V(G), \mathcal{E}_X)$ donde una hiperarista pertenece a \mathcal{E}_X si y solo si su vector característico es una fila de la matrix $C_X(G)$. Es decir, $C_X(G)$ resulta ser la matrix de incidencia de \mathcal{H}_X .

En lo que sigue, será necesario el concepto de *hiperciclo* en un hipergrafo. Un hiperciclo $\mathcal{C} = (V', \mathcal{E}')$ de longitud m en un hipergrafo $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ donde $V' \subseteq V$, es una secuencia alternada $i_1 E_1 i_2 \dots i_m E_m i_1$ de m vértices distintos y m hiperaristas tales que $\{i_j, i_{j+1}\} \in E_i$. En [2] se observa que si $M(\mathcal{C})$ es la matrix de incidencia de \mathcal{C} y m es impar, la desigualdad $x(V') \geq \tau(M(\mathcal{C}))$ es una faceta de $Q^*(M(\mathcal{C}))$. Más aún, a partir de la Observación 1.2 resulta que si m es impar la misma desigualdad es también faceta de $Q^*(M(\mathcal{H}))$.

Por tanto, dado $X \in \{ID, LD, OLD, LTD\}$ y la matrix $C_X(G)$, si $V' \subseteq V(G)$ y $\mathcal{C} = (V', \mathcal{E}')$ es un hiperciclo de longitud m impar resulta que $x(V') \geq \tau(M(\mathcal{C})) = \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$ es una faceta de $P_X(G)$.

También haremos uso de los resultados de [6] para el estudio de las desigualdades válidas para $P_X(G)$ de la forma $\alpha x \geq 2$ con $\alpha_j \in \{0, 1, 2\}$.

Vamos a presentar los resultados y la notación en [6] que utilizaremos en lo que sigue.

Sea A una matriz $0,1$ y sean F y N los conjuntos de índices de filas y columnas de A respectivamente. Llamamos a_{ij} a la entrada de la matriz A que ocupa la fila $i \in F$ y la columna $j \in N$.

Sea $\alpha x \geq 2$ una desigualdad válida para $Q^*(A)$ con $\alpha_j \in \{0, 1, 2\}$ para $j \in N$. Se define $J_t(\alpha) = \{j \in N : \alpha_j = t\}$ para $t \in \{0, 1, 2\}$ (notamos J_t por $J_t(\alpha)$ cuando sea claro en el contexto).

Además, para cada subconjunto no vacío $S \subseteq F$, se tiene la desigualdad $\alpha^S x \geq 2$ donde

$$\alpha_j^S = \begin{cases} 0 & \text{si } a_{ij} = 0 \text{ para todo } i \in S \\ 2 & \text{si } a_{ij} = 1 \text{ para todo } i \in S. \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En [6], se denomina \mathcal{CG} al conjunto de desigualdades $\alpha^S x \geq 2$ para todo $S \subseteq F$. En realidad, \mathcal{CG} es la clase de desigualdades que se obtiene del sistema $Ax \geq \mathbf{1}$ mediante el procedimiento de Chvátal-Gomory [17, 26], que se transcribe a continuación:

Procedimiento \mathcal{CG} :

1. Sumar las desigualdades $\sum_{j \in N} a_{ij} x_j \geq 1, i \in S,$
2. dividir el resultado de la desigualdad obtenida en el apartado anterior por $|S| - \epsilon,$
 $0,5 < \epsilon < 1,$ y
3. considerar la parte entera superior de los coeficientes.

Así, para cualquier conjunto $S \subseteq F$, la desigualdad $\alpha^S x \geq 2$ es válida para $Q^*(A)$.

Recordemos que el número de veces en que se aplica el procedimiento \mathcal{CG} de manera sucesiva para obtener una cierta desigualdad se llama el rango de la desigualdad. El sistema original junto con las desigualdades de rango 1 forman la clausura elemental.

En [6], se demuestra que toda desigualdad válida para $Q^*(A)$ con coeficientes en $\{0, 1, 2\}$ pertenece a la clausura elemental del sistema $Ax \geq \mathbf{1}, x \geq \mathbf{0}$. Más aún, se caracterizan todas las desigualdades válidas con coeficientes $0, 1, 2$ que definen faceta de $Q^*(A)$.

A continuación presentamos definiciones y resultados relativos a esta caracterización que resultarán de interés en lo que sigue de este capítulo.

En [6], se definen $F(Q) = \{i \in F : a_{ij} = 0, \forall j \in Q\}$ cuando $Q \subseteq N$ con $Q \neq \emptyset$ y $F(\emptyset) = F$. También se denota por $A_{F(J_0)}^{J_1}$ a la submatriz de A cuyos conjuntos de filas y columnas son $F(J_0)$ y J_1 , respectivamente.

Observemos que si $J_2 = \emptyset$ entonces $A_{F(J_0)}^{J_1}$ es la matriz que se obtiene de A por borrado de todas las columnas en J_0 . De acuerdo a [43], esto significa que la desigualdad $\alpha^S x \geq 2$ es válida para $Q^*(A)$ y representa a la desigualdad de rango correspondiente a la matriz $A_{F(J_0)}^{J_1}$.

Por otra parte, puede ocurrir que dada la desigualdad $\alpha^S x \geq 2$ donde $S = F(J_0)$, exista un conjunto $T \subsetneq S$ tal que $\alpha^T x \geq 2$ produce la misma desigualdad que $\alpha^S x \geq 2$. Tales

conjuntos T y S son llamados en [6] \mathcal{CG} -equivalentes. Si T es \mathcal{CG} -equivalente a S y no existe ningún subconjunto propio de T con esta propiedad, se dice que T es un subconjunto \mathcal{CG} -equivalente minimal de S .

La matriz C_k^{k-1} , *matriz circulante completa* de orden k , es la matriz que se consigue al restar a la matriz E de orden $k \times k$ con todas entradas en el valor 1, la matriz identidad de orden $k \times k$.

Teorema 2.24 ([6]) *Sea $\alpha^S x \geq 2$ con $S = F(J_0)$ válida para $Q^*(A)$. Para todo subconjunto \mathcal{CG} -equivalente minimal T de $F(J_0)$, la matriz $A_T^{J_1}$ contine como submatriz a una matriz circulante completa C_t^{t-1} donde $t = |T|$.*

Observemos que en el teorema anterior debe ser $t \geq 3$. Puesto que, si $t = 2$, la desigualdad $\alpha^T x \geq 2$ se obtiene sumando dos desigualdades del sistema $Ax \geq \mathbf{1}$ y resulta dominada por cada una de estas.

En lo que sigue de este capítulo vamos a aplicar estos resultados para obtener todas las desigualdades con coeficientes 0, 1, 2 válidas para los poliedros $P_X(P_n)$ y $P_X(C_n)$ cuando $X \in \{ID, LD, OLD, LTD\}$.

2.3.1. Los poliedros $P_{ID}(P_n)$ y $P_{ID}(C_n)$

Consideramos ahora el camino P_n y el ciclo C_n cuando $n \geq 10$.

En [2] se obtuvo que el poliedro relajación $Q_{ID}(P_n)$ está dado por:

- desigualdades de no negatividad: $x_i \geq 0$ para todo $i \neq 3, n - 2$,
- desigualdades de vecindades cerradas: $x_1 + x_2 \geq 1$, $x_{n-1} + x_n \geq 1$ y $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} \geq 1$ para $i \in \{4, \dots, n - 5\}$,
- desigualdades de diferencias simétricas de vecindades cerradas: $x_3 \geq 1$, $x_{n-2} \geq 1$ y $x_i + x_{i+3} \geq 1$ para $i \neq 3, n - 5, n - 2, n - 1, n$.

Sigue que $V_1(P_n) = \{3, n - 2\}$ y $\dim(Q_{ID}(P_n)) = n - 2$.

También, el poliedro relajación lineal $Q_{ID}(C_n)$ está dado por:

- desigualdades de no negatividad: $x_i \geq 0$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$,
- desigualdades de vecindades cerradas: $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} \geq 1$ para $i \in \{1, \dots, n\}$ donde la suma de los subíndices es módulo n ,
- desigualdades de diferencias simétricas de vecindades cerradas: $x_i + x_{i+3} \geq 1$ para $i \in \{1, \dots, n\}$ donde la suma de los subíndices es módulo n .

Nuestro objetivo es probar el siguiente resultado:

Teorema 2.25 Para $n \geq 10$, las únicas desigualdades con coeficientes 0, 1 y 2 que definen facetas para $P_{ID}(P_n)$ ($P_{ID}(C_n)$) son las desigualdades que describen a $Q_{ID}(P_n)$ ($Q_{ID}(C_n)$ resp.) y las desigualdades $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3} \geq 2$ donde $i \in \{4, \dots, n-6\}$ (donde $i \in \{1, \dots, n\}$ y la suma de subíndices es módulo n resp.).

De acuerdo a lo ya mencionado en la Sección 1.3.2, todas las desigualdades que describen a $Q_{ID}(P_n)$ y a $Q_{ID}(C_n)$ definen facetas.

Con el fin de simplificar la notación llamamos A a la matriz $C_{ID}(P_n)$ ($C_{ID}(C_n)$). Además, denotamos con F y N a los conjuntos de índices de filas y columnas, respectivamente, de A .

Consideramos las siguientes restricciones del sistema $Ax \geq \mathbf{1}$ para $i \in \{4, \dots, n-6\} \subseteq N$ si $A = C_{ID}(P_n)$ (para $i \in N$ y la suma de subíndices es módulo n si $A = C_{ID}(C_n)$):

- $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} \geq 1$ que corresponde a $x(N[i+1]) \geq 1$,
- $x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3} \geq 1$ que corresponde a $x(N[i+2]) \geq 1$,
- $x_i + x_{i+3} \geq 1$ que corresponde a $x(N[i+1] \triangle N[i+2]) \geq 1$.

La submatriz de A correspondiente a las filas asociadas a las anteriores desigualdades es:

$$\begin{array}{cccc} i & i+1 & i+2 & i+3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Por un lado es inmediato observar que esta matriz es la matriz de incidencia de un hiperciclo de longitud 3 cuyas hiperaristas son $N[i+1]$, $N[i+2]$ y $N[i+1] \triangle N[i+2]$. Entonces, utilizando la observación vista al principio de la sección, concluimos que $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3} \geq 2$ es una faceta de $P_{ID}(P_n)$ ($P_{ID}(C_n)$) si $i \in \{4, \dots, n-6\} \subseteq N$ (si $i \in N$ y la suma de subíndices es módulo n).

Por otro lado, puede verificarse que aplicando el procedimiento \mathcal{CG} a la misma submatriz obtenemos también $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3} \geq 2$.

Para completar la prueba del Teorema 2.25, demostramos el siguiente resultado.

Teorema 2.26 Sea $\alpha^S x \geq 2$ una \mathcal{CG} -desigualdad válida para $P_{ID}(P_n)$ ($P_{ID}(C_n)$) con $n \geq 10$ distinta del conjunto de desigualdades $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3} \geq 2$ para cada $i \in \{4, \dots, n-6\} \subseteq N$ en el caso de $P_{ID}(P_n)$ ($i \in N$ con la suma de subíndices módulo n para $P_{ID}(C_n)$). Entonces $\alpha^S x \geq 2$ no define faceta.

Demostración: Sea T un subconjunto \mathcal{CG} -equivalente minimal de S y supongamos que $\alpha^T x \geq 2$ define faceta de $P_{ID}(P_n)$ ($P_{ID}(C_n)$). De acuerdo al Teorema 2.24, la matriz $A_T^{J_1}$ contiene una submatriz circulante de tamaño $t = |T|$.

Ya hemos mencionado que $t \geq 3$. Por otra parte $t \leq 4$, ya que toda fila de la matriz A tiene a lo sumo tres entradas distintas de 0.

- Consideramos C_3^2 submatriz de $A_T^{j_1}$. Realizando una permutación adecuada de filas, la matriz C_3^2 puede escribirse como:

$$C_3^2 = \begin{matrix} & j_1 & j_2 & j_3 \\ \begin{matrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix},$$

donde $\{i_1, i_2, i_3\} \subseteq F$ y $\{j_1, j_2, j_3\} \subseteq N$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $j_1 < j_2 < j_3$ (la relación de orden es módulo n en caso de los ciclos). Las filas de C_3^2 pueden estar asociadas a:

- (1) 3 vecindades cerradas,
- (2) 3 diferencias simétricas de vecindades cerradas,
- (3) 2 diferencias simétricas de vecindades cerradas y 1 vecindad cerrada,
- (4) 1 diferencia simétrica de vecindades cerradas y 2 vecindades cerradas.

En el caso de P_n es fácil ver que si $j_1 = 1$ y $j_2 = 2$, no existen filas de la matriz A que permitan la construcción de C_3^2 . Idéntico razonamiento vale para $j_2 = n - 1$ y $j_3 = n$. Por lo tanto $j_1 \in \{4, \dots, n - 6\} \subseteq N$.

Es claro que si $j_1, j_3 \in N[k]$ para algún $k \in N$ entonces $j_2 \in N[k]$. Por lo tanto la fila i_3 que tiene la entrada j_2 en el valor 0 sólo puede representar a una diferencia simétrica. Sigue que no se satisface (1). Entonces $j_2 \in \{j_1 + 1, j_1 + 2\}$. En cualquier caso, $i_1, i_2 \in F$ no corresponden a una diferencia simétrica en la que participe j_2 . Es decir (2) y (3) no se verifican.

Finalmente supongamos que se satisface (4). La desigualdad resultante es $x_{j_1} + x_{j_1+1} + x_{j_1+2} + x_{j_1+3} \geq 2$ para algún $j_1 \in N$ adecuado, y esta desigualdad queda descartada por hipótesis. Luego, no es posible encontrar una matriz $A_T^{j_1}$ que contenga a C_3^2 .

- Consideramos $t = 4$, otra vez suponemos $j_1 < j_2 < j_3 < j_4$.

$$C_4^3 = \begin{matrix} & j_1 & j_2 & j_3 & j_4 \\ \begin{matrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Observemos que hay más de dos unos en cada fila, entonces las restricciones están asociadas con vecindades cerradas. Pero las filas i_3 e i_4 no pueden representar a ninguna vecindad cerrada, por razones análogas a las ya vistas en el caso (1) para $t = 3$.

Por lo tanto $\alpha^S x \geq 2$ no es una desigualdad minimal y entonces no define faceta. ■

Por otra parte, hemos conseguido utilizando PORTA [41] que las desigualdades $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3} \geq 2$ con $i \in \{4, \dots, n-6\} \subseteq N$ son suficientes para describir al poliedro $P_{ID}(P_n)$ cuando $n \leq 10$. Sin embargo, utilizando la misma herramienta vimos que no alcanzan para describir al poliedro $P_{ID}(C_n)$ aún cuando $n \leq 10$. Por ejemplo cuando $n = 7$ la desigualdad

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 5$$

define faceta del poliedro $P_{ID}(C_7)$.

2.3.2. Los poliedros $P_{LD}(P_n)$ y $P_{LD}(C_n)$

En [4] se prueba que si $n \geq 5$, el poliedro $Q_{LD}(P_n)$ está dado por:

- desigualdades de no negatividad: $x_i \geq 0$ para $i \in \{1, \dots, n\}$,
- desigualdades de vecindades cerradas: $x_1 + x_2 \geq 1$, $x_{n-1} + x_n \geq 1$ y $x_{i-1} + x_i + x_{i+1} \geq 1$ para $i \in \{3, \dots, n-2\}$,
- desigualdades de diferencias simétricas de vecindades cerradas: $x_1 + x_3 + x_4 \geq 1$, $x_{n-3} + x_{n-2} + x_n \geq 1$ y $x_{i-1} + x_i + x_{i+2} + x_{i+3} \geq 1$ para $i \in \{3, \dots, n-4\}$.

Aquí $V_1(P_n) = \emptyset$ y resulta que $P_{LD}(P_n)$ es de dimensión completa.

Además se demuestra que:

Teorema 2.27 ([4]) *Si $n \geq 5$, las desigualdades*

- $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 2$, $x_{n-3} + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n \geq 2$,
- $x_{i-1} + x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3} \geq 2$ para $i \in \{3, \dots, n-4\}$.

describen facetas de $P_{LD}(P_n)$.

Para la demostración del resultado anterior se utilizaron las mismas ideas que para el caso del poliedro $P_{ID}(P_n)$. En efecto, se identifica al hiperciclo inducido por las hiperaristas $N[1]$, $N[3]$ y $N[1] \triangle N[3]$ para la primera desigualdad y al hiperciclo inducido por $N[n-2]$, $N[n]$ y $N[n-2] \triangle N[n]$ en la segunda desigualdad. También se consigue el hiperciclo inducido por las aristas $N[i]$, $N[i+2]$ y $N[i] \triangle N[i+2]$ para la última desigualdad.

Es fácil ver que si tomamos uno cualquiera de los hiperciclos mencionados y aplicamos el procedimiento \mathcal{CG} a cada conjunto de restricciones asociados a las hiperaristas obtenemos la misma desigualdad inducida por el hiperciclo.

También, en [4], se tiene el siguiente resultado.

Lema 2.28 ([4]) *Para un ciclo C_n con $n \geq 6$, $Q_{LD}(C_n)$ está dado por:*

- *desigualdades de no negatividad: $x_i \geq 0$ para $i \in \{1, \dots, n\}$,*
- *desigualdades de vecindades cerradas: $x_{i-1} + x_i + x_{i+1} \geq 1$ para $i \in \{1, \dots, n\}$,*
- *desigualdades de diferencias simétricas de vecindades cerradas: $x_{i-1} + x_i + x_{i+2} + x_{i+3} \geq 1$ para $i \in \{1, \dots, n\}$.*

donde la suma entre subíndices es módulo n .

Como consecuencia inmediata tenemos:

Corolario 2.29 *Para un ciclo C_n con $n \geq 6$, las desigualdades*

$$x_{i-1} + x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3} \geq 2 \text{ para } i \in \{1, \dots, n\}$$

donde la suma entre subíndices es módulo n , definen facetas de $P_{LD}(C_n)$.

Nuestro objetivo es demostrar que todas las desigualdades $\alpha x \geq 2$ con $\alpha_j \in \{0, 1, 2\}$ que definen facetas para el poliedro $P_{LD}(P_n)$ ($P_{LD}(C_n)$) son las que están descritas por el Teorema 2.27 (Corolario 2.29).

Nuevamente haremos uso de los resultados en [6] y para simplificar la notación llamamos A a la matriz $C_{LD}(P_n)$ ($C_{LD}(C_n)$) y F y N a los conjuntos de filas y columnas de A respectivamente.

Teorema 2.30 *Sea $\alpha^S x \geq 2$ una \mathcal{CG} -desigualdad y $n \geq 6$.*

- *Si $\alpha^S x \geq 2$ es válida para $P_{LD}(P_n)$ y distinta de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 2$, $x_{n-3} + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n \geq 2$ y $x_{i-1} + x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3} \geq 2$ para $i \in \{3, \dots, n-4\} \subseteq N$ entonces $\alpha^S x \geq 2$ no define faceta.*
- *Si $\alpha^S x \geq 2$ es válida para $P_{LD}(C_n)$ y distinta de $x_{i-1} + x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3} \geq 2$ para $i \in N$, donde la suma de subíndices es módulo n , luego $\alpha^S x \geq 2$ no define faceta.*

Demostración: Consideramos T un subconjunto \mathcal{CG} -equivalente minimal de S y supongamos que $\alpha^T x \geq 2$ define faceta de $P_{LD}(P_n)$ ($P_{LD}(C_n)$). A partir del Teorema 2.24, la matriz $A_T^{J_1}$ contiene una submatriz circulante C_t^{t-1} con $t = |T|$.

Ya mencionamos que $t \geq 3$. Por otro lado $t \leq 5$, ya que toda fila de la matriz A tiene a lo sumo 4 entradas no nulas.

- Consideramos $t = 3$ y realizando una permutación adecuada de filas, tenemos que C_3^2 submatriz de $A_T^{J_1}$ puede escribirse como:

$$C_3^2 = \begin{matrix} & j_1 & j_2 & j_3 \\ \begin{matrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

donde $\{i_1, i_2, i_3\} \subseteq F$ y $\{j_1, j_2, j_3\} \subseteq N$. Sin pérdida de generalidad, sea $j_1 < j_2 < j_3$ (donde la relación de orden es módulo n en caso de los ciclos). Las filas de C_3^2 pueden estar asociadas a:

- (1) 3 vecindades cerradas,
- (2) 3 diferencias simétricas de vecindades cerradas,
- (3) 2 diferencias simétricas de vecindades cerradas y 1 vecindad cerrada,
- (4) 1 diferencia simétrica de vecindades cerradas y 2 vecindades cerradas.

De manera análoga al ID -problema, si $j_1, j_3 \in N[k]$ para algún $k \in N$ entonces $j_2 \in N[k]$. Luego la fila i_3 sólo puede representar a una diferencia simétrica, entonces (1) no se satisface y además, $j_2 \in \{j_1 + 1, j_1 + 2\}$.

Supongamos que i_1 e i_2 también están asociadas a diferencias simétricas de vecindades cerradas. Si $j_2 = j_1 + 1$ y $j_3 = j_1 + 2$ obtenemos una desigualdad con lado derecho 2 que queda dominada por la suma de las desigualdades $x_{j_1-2} + x_{j_1-1} + x_{j_1} \geq 1$ y $x_{j_1+1} + x_{j_1+2} + x_{j_1+3} \geq 1$ si $j_1 \in \{4, \dots, n-4\}$ cuando A corresponde a $C_{LD}(P_n)$ (con la suma de subíndices módulo n si $A = C_{LD}(C_n)$), o bien por $x_{j_1-1} + x_{j_1} + x_{j_1+1} \geq 1$ y $x_{j_1+2} + x_{j_1+3} + x_{j_1+4} \geq 1$ si $j_1 \in \{3, \dots, n-5\} \subseteq N$ cuando A corresponde a $C_{LD}(P_n)$ (si $j_1 \in N$ con la suma de subíndices módulo n si $A = C_{LD}(C_n)$). En el caso en que $j_2 = j_1 + 1$ y $j_3 = j_1 + 3$, i_2 no corresponde a una diferencia simétrica. Si $j_2 = j_1 + 2$, i_1 no está asociada a una diferencia simétrica. Por lo tanto podemos concluir que (2) no se satisface.

Supongamos ahora que una de las filas i_1 o i_2 está asociada a una diferencia simétrica de vecindades cerradas y la otra a una vecindad cerrada. El caso $j_2 = j_1 + 1$ y $j_3 = j_1 + 2$ se analiza de manera análoga al caso en que ambas filas, i_1 e i_2 , están asociadas a diferencias simétricas y obtenemos las mismas conclusiones. Si $j_2 = j_1 + 1$ y $j_3 = j_1 + 3$ resulta i_2 asociada a una vecindad cerrada y en este caso la desigualdad que se obtiene con lado derecho 2, queda dominada por la suma de dos vecindades cerradas $x_{j_1-2} + x_{j_1-1} + x_{j_1} \geq 1$ y $x_{j_1+1} + x_{j_1+2} + x_{j_1+3} \geq 1$ si $j_1 \in \{4, \dots, n-4\} \subseteq N$ cuando A corresponde a $C_{LD}(P_n)$ ($j_1 \in N$ con la suma de subíndices módulo n si $A = C_{LD}(C_n)$). Por último, si $j_2 = j_1 + 2$, i_1 está asociada a una vecindad cerrada y también resulta que la desigualdad que se obtiene con lado derecho 2, queda dominada por la suma de dos vecindades cerradas $x_{j_1} + x_{j_1+1} + x_{j_1+2} \geq 1$ y $x_{j_1+3} + x_{j_1+4} + x_{j_1+5} \geq 1$ si $j_1 \in \{2, \dots, n-6\} \subseteq N$ cuando A corresponde a $C_{LD}(P_n)$ ($j_1 \in N$ con la suma de

subíndices módulo n si $A = C_{LD}(C_n)$). Por todo lo analizado podemos concluir que (3) no se satisface.

Finalmente supongamos que se satisface (4). La desigualdad resultante en el caso $j_2 = j_1 + 1$ cuando A corresponde a $C_{LD}(P_n)$ es, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 2$, o bien $x_{j_1-1} + x_{j_1} + x_{j_1+1} + x_{j_1+2} + x_{j_1+3} \geq 2$ si $j_1 \in \{3, \dots, n-4\} \subseteq N$, o bien $x_{n-3} + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n \geq 2$. Si $A = C_{LD}(C_n)$ la desigualdad resultante es $x_{j_1-1} + x_{j_1} + x_{j_1+1} + x_{j_1+2} + x_{j_1+3} \geq 2$ para $j_1 \in N$ con la suma de subíndices módulo n . Pero estas desigualdades quedan descartadas por hipótesis. Ahora, si $j_2 = j_1 + 2$ podemos obtener la misma desigualdad o $x_{j_1} + 2x_{j_1+1} + x_{j_1+2} + x_{j_1+3} + x_{j_1+4} \geq 2$ dominada por la anterior.

Por lo tanto, no es posible encontrar una matriz $A_T^{j_1}$ que contenga a C_3^2 y satisfaga las hipótesis requeridas.

- Consideramos $t = 4$ y suponemos $j_1 < j_2 < j_3 < j_4$.

$$C_4^3 = \begin{matrix} & j_1 & j_2 & j_3 & j_4 \\ \begin{matrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Observemos que si $j_1, j_3 \in N[k]$ para algún $k \in N$ entonces $j_2 \in N[k]$, luego la fila i_3 representa una diferencia simétrica. Razonando de manera análoga obtenemos que i_4 está asociada a una diferencia simétrica. Más aún, $j_1 \neq 1$, $j_2 = j_1 + 1$, $j_3 = j_1 + 2$ y $j_4 = j_1 + 3$, así podemos concluir que i_1 e i_2 se corresponden con las vecindades cerradas de j_2 y j_3 respectivamente. Por lo tanto, la desigualdad que se obtiene en este caso con lado derecho 2, queda dominada por la suma de las desigualdades $x_{j_1-1} + x_{j_1} + x_{j_1+1} \geq 1$ y $x_{j_1+2} + x_{j_1+3} + x_{j_1+4} \geq 1$ si $j_1 \in \{3, \dots, n-5\} \subseteq N$ cuando A corresponde a $C_{LD}(P_n)$ ($j_1 \in N$ con la suma de subíndices módulo n si $A = C_{LD}(C_n)$).

- Vamos a analizar el caso $t = 5$, nuevamente suponemos $j_1 < j_2 < j_3 < j_4 < j_5$.

$$C_5^4 = \begin{matrix} & j_1 & j_2 & j_3 & j_4 & j_5 \\ \begin{matrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Como hay más de tres unos por filas, éstas no están asociadas a vecindades cerradas. Teniendo en cuenta el orden de las columnas, a partir de i_4 podemos concluir que

$j_2 = j_1 + 1$, $j_3 = j_1 + 2$, $j_4 = j_1 + 3$ y $j_5 = j_1 + 4$. Sin embargo, no es posible que i_1 , i_2 , i_3 e i_5 estén asociadas a diferencias simétricas de vecindades cerradas con las columnas así definidas.

Por lo tanto $\alpha^S x \geq 2$ no es una desigualdad minimal y entonces no define faceta. ■

2.3.3. Los poliedros $P_{OLD}(P_n)$ y $P_{OLD}(C_n)$

Comenzamos estudiando el poliedro relajación $Q_{OLD}(P_n)$.

Teorema 2.31 *El poliedro $Q_{OLD}(P_n)$ está dado por:*

- (1) *desigualdades de no negatividad: $x_i \geq 0$ para todo $i \neq 2, 4, n-3, n-1$,*
- (2) *desigualdades de vecindades abiertas: $x_2 \geq 1$, $x_i + x_{i+2} \geq 1$ para $i \in \{1, \dots, n-2\}$, $i \neq 2, 4, n-3$ y $x_{n-1} \geq 1$,*
- (3) *desigualdades de diferencias simétricas de vecindades abiertas: $x_4 \geq 1$, $x_i + x_{i+4} \geq 1$ para $i \in \{1, \dots, n-4\}$, $i \neq 2, 4, n-7$ y $x_{n-3} \geq 1$.*

Demostración: Teniendo en cuenta el resultado obtenido en el Corolario 1.6, para describir la matriz $C_{OLD}(P_n)$ consideramos las filas no redundantes asociadas a los conjuntos:

$$(f_1) \quad N(1) = \{2\},$$

$$(f_2) \quad N(n) = \{n-1\},$$

$$(f_3) \quad N(i+1) = \{i, i+2\} \text{ para } i \in \{1, \dots, n-2\},$$

$$(f_4) \quad N(1) \triangle N(2) = \{1, 2, 3\},$$

$$(f_5) \quad N(n-1) \triangle N(n) = \{n-2, n-1, n\},$$

$$(f_6) \quad N(i) \triangle N(i+1) = \{i-1, i, i+1, i+2\} \text{ para } i \in \{2, \dots, n-2\},$$

$$(f_7) \quad N(1) \triangle N(3) = \{4\},$$

$$(f_8) \quad N(n-2) \triangle N(n) = \{n-3\},$$

$$(f_9) \quad N(i+1) \triangle N(i+3) = \{i, i+4\} \text{ para } i \in \{1, \dots, n-4\}.$$

Es fácil ver que las filas asociadas a los conjuntos del ítem (f_3) , para $i \in \{2, 4, n - 3\}$, están dominadas por las filas asociadas a los conjuntos de los ítems (f_1) , (f_7) y (f_2) . Además, las filas asociadas a los conjuntos dados en (f_4) , (f_5) y (f_6) están dominadas por las filas asociadas a (f_1) , (f_2) y (f_3) respectivamente. También es claro que para $i \in \{2, 4, n - 7\}$, las filas asociadas a los conjuntos del ítem (f_9) están dominadas por aquellas asociadas a los conjuntos de los ítems (f_1) , (f_7) y (f_8) .

Así, tenemos que poliedro $Q_{OLD}(P_n)$ queda descrito por las desigualdades dadas en (1), (2) y (3). ■

De aquí sigue que $V_2(P_n) \cup V_3(P_n) = \{2, 4, n - 3, n - 1\}$.

A continuación describimos el poliedro relajación lineal $Q_{OLD}(C_n)$.

Teorema 2.32 *El poliedro $Q_{OLD}(C_n)$ está dado por:*

- (1) *desigualdades de no negatividad: $x_i \geq 0$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$,*
- (2) *desigualdades de vecindades abiertas: $x_i + x_{i+2} \geq 1$ para $i \in \{1, \dots, n\}$ donde la suma de los subíndices es módulo n ,*
- (3) *desigualdades de diferencias simétricas de vecindades abiertas: $x_i + x_{i+4} \geq 1$ para $i \in \{1, \dots, n\}$ donde la suma de los subíndices es módulo n .*

Demostración: Nuevamente, a partir del Corolario 1.6, para describir la matriz $C_{OLD}(C_n)$ consideramos las filas no dominadas asociadas a los conjuntos:

$$(f_1) \ N(i+1) = \{i, i+2\} \text{ para } i \in \{1, \dots, n\},$$

$$(f_2) \ N(i) \triangle N(i+1) = \{i-1, i, i+1, i+2\} \text{ para } i \in \{1, \dots, n\},$$

$$(f_3) \ N(i+1) \triangle N(i+3) = \{i, i+4\} \text{ para } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Claramente las filas asociadas a los conjuntos del ítem (f_2) están dominadas por las filas asociadas a (f_1) y las filas asociadas a los conjuntos dados en los ítems (f_1) y (f_3) no son redundantes. A partir de esta observación tenemos que poliedro $Q_{OLD}(C_n)$ queda descrito por las desigualdades dadas en (1), (2) y (3). ■

En lo que sigue vamos a probar el siguiente resultado:

Teorema 2.33 *Para $n \geq 9$, las únicas desigualdades con coeficientes 0, 1 y 2 que definen facetas para $P_{OLD}(P_n)$ ($P_{OLD}(C_n)$) son las desigualdades que describen a $Q_{OLD}(P_n)$ ($Q_{OLD}(C_n)$) y las desigualdades $x_i + x_{i+2} + x_{i+4} \geq 2$ donde $i \in \{1, \dots, n-4\}$ con $i \neq 2, 4, n-7, n-5$ (donde $i \in \{1, \dots, n\}$ y la suma de subíndices es módulo n).*

Como en el caso del ID -problema y del LD -problema, sabemos que todas las desigualdades que describen a $Q_{OLD}(P_n)$ y a $Q_{OLD}(C_n)$ definen facetas.

Nuevamente, para simplificar la notación llamamos A a la matriz $C_{OLD}(P_n)$ ($C_{OLD}(C_n)$) y denotamos por F y N a los conjuntos de índices de filas y columnas de A , respectivamente.

Si $A = C_{OLD}(P_n)$ entonces consideramos las columnas $i \in \{1, \dots, n-4\} \subseteq N$ con $i \neq 2, 4, n-7, n-5$ ($i \in N$ y la suma de subíndices es módulo n si $A = C_{OLD}(C_n)$):

- $x_i + x_{i+2} \geq 1$ que corresponde a $x(N(i+1)) \geq 1$,
- $x_{i+2} + x_{i+4} \geq 1$ que corresponde a $x(N(i+3)) \geq 1$,
- $x_i + x_{i+4} \geq 1$ que corresponde a $x(N(i+1) \triangle N(i+3)) \geq 1$.

La submatriz de A correspondiente a las filas asociadas a las anteriores desigualdades es:

$$\begin{array}{ccc} & i & i+2 & i+4 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & & & \end{array}$$

Como esta matriz es la matriz de incidencia de un hiperciclo de longitud 3 cuyas hiperaristas son $N(i+1)$, $N(i+3)$ y $N(i+1) \triangle N(i+3)$, podemos concluir que $x_i + x_{i+2} + x_{i+4} \geq 2$ es una faceta de $P_{OLD}(P_n)$ ($P_{OLD}(C_n)$) si $i \in \{1, \dots, n-4\} \subseteq N$ con $i \neq 2, 4, n-7, n-5$ (si $i \in N$ y la suma de subíndices es módulo n). También se puede verificar que dicha desigualdad puede ser obtenida aplicando el \mathcal{CG} -procedimiento.

Entonces para completar la prueba del Teorema 2.33, vamos a probar el siguiente resultado.

Teorema 2.34 *Sea $\alpha^S x \geq 2$ una \mathcal{CG} -desigualdad válida para $P_{OLD}(P_n)$ ($P_{OLD}(C_n)$) con $n \geq 9$ distinta del conjunto de desigualdades $x_i + x_{i+2} + x_{i+4} \geq 2$ para cada $i \in \{1, \dots, n-4\}$ con $i \neq 2, 4, n-7, n-5$ para $P_{OLD}(P_n)$ ($i \in \{1, \dots, n\}$ con la suma de subíndices módulo n para $P_{OLD}(C_n)$). Entonces $\alpha^S x \geq 2$ no define faceta.*

Demostración: Consideramos T un subconjunto \mathcal{CG} -equivalente minimal de S y supongamos que $\alpha^T x \geq 2$ define faceta de $P_{OLD}(P_n)$ ($P_{OLD}(C_n)$). A partir del Teorema 2.24, la matriz $A_T^{J_1}$ contiene una submatriz circulante de tamaño $t = |T|$.

Notemos que $t = 3$. En efecto, por un lado recordemos que $t \geq 3$ y, por otra parte, como cada fila de la matriz A tiene a lo sumo 2 entradas no nulas, resulta $t \leq 3$.

Sea C_3^2 submatriz de $A_T^{J_1}$. Realizando una permutación adecuada de filas, escribimos dicha submatriz como:

$$C_3^2 = \begin{array}{ccc} & j_1 & j_2 & j_3 \\ \begin{pmatrix} i_1 & 1 & 1 & 0 \\ i_2 & 0 & 1 & 1 \\ i_3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & & & \end{array},$$

donde $\{i_1, i_2, i_3\} \subseteq F$ y $\{j_1, j_2, j_3\} \subseteq N$. Sin pérdida de generalidad suponemos $j_1 < j_2 < j_3$ (donde la relación de orden es módulo n en caso de los ciclos). Las filas de C_3^2 pueden estar asociadas a:

- (1) 3 vecindades abiertas,
- (2) 3 diferencias simétricas de vecindades abiertas,
- (3) 2 diferencias simétricas de vecindades abiertas y 1 vecindad abierta,
- (4) 1 diferencia simétrica de vecindades abiertas y 2 vecindades abiertas.

Observemos que si $j_1, j_3 \in N(k)$ para algún $k \in N$ entonces $j_2 = k$, $j_1 = k-1$ y $j_3 = k+1$. En este caso, i_1 e i_2 no están asociadas ni a una vecindad abierta, ni a una diferencia simétrica de vecindades abiertas. Entonces i_3 corresponde a una diferencia simétrica de vecindades abiertas. En este caso $j_3 = j_1 + 4$, luego i_1 e i_2 están asociadas a vecindades abiertas, más aún, $j_2 = j_1 + 2$ y la desigualdad resultante corresponde a la que fue descartada por hipótesis.

Así, podemos concluir que no es posible encontrar una matriz $A_T^{J_1}$ que contenga a C_3^2 .

Por lo tanto $\alpha^S x \geq 2$ no es una desigualdad minimal y entonces no define faceta. ■

2.3.4. Los poliedros $P_{LTD}(P_n)$ y $P_{LTD}(C_n)$

Estudiamos el poliedro relajación $Q_{LTD}(P_n)$.

Teorema 2.35 *El poliedro $Q_{LTD}(P_n)$ está dado por:*

- (1) *desigualdades de no negatividad: $x_i \geq 0$ para todo $i \neq 2, n-1$,*
- (2) *desigualdades de vecindades abiertas: $x_2 \geq 1$, $x_i + x_{i+2} \geq 1$ para $i \in \{1, \dots, n-2\}$, $i \neq 2, n-3$ y $x_{n-1} \geq 1$.*

Demostración: Teniendo en cuenta el resultado obtenido en el Corolario 1.6, para describir la matriz $C_{LTD}(P_n)$ consideramos las filas no redundantes asociadas a los conjuntos:

- (f₁) $N(1) = \{2\}$,
- (f₂) $N(n) = \{n-1\}$,
- (f₃) $N(i+1) = \{i, i+2\}$ para $i \in \{1, \dots, n-2\}$,
- (f₄) $N(1) \triangle N(2) = \{1, 2, 3\}$,
- (f₅) $N(n-1) \triangle N(n) = \{n-2, n-1, n\}$,
- (f₆) $N(i) \triangle N(i+1) = \{i-1, i, i+1, i+2\}$ para $i \in \{2, \dots, n-2\}$,

$$(f_7) \quad N[1] \triangle N[3] = \{1, 3, 4\},$$

$$(f_8) \quad N[n-2] \triangle N[n] = \{n-3, n-2, n\},$$

$$(f_9) \quad N[i] \triangle N[i+2] = \{i-1, i, i+2, i+3\} \text{ para } i \in \{2, \dots, n-3\}.$$

Observemos que, para $i \in \{2, n-3\}$, las filas asociadas a los conjuntos del ítem (f_3) , están dominadas por las filas asociadas a los conjuntos de los ítems (f_1) y (f_2) . Además, las filas asociadas a los conjuntos dados en (f_4) y (f_5) están dominadas por las filas asociadas a (f_1) y (f_2) respectivamente. También es fácil ver que las filas asociadas a los conjuntos de los ítems (f_6) , (f_7) , (f_8) y (f_9) están dominadas por las filas asociadas a los conjuntos del ítem (f_3) .

Luego el poliedro $Q_{LTD}(P_n)$ queda descrito por las desigualdades dadas en (1) y (2). ■

Por lo enunciado tenemos que $V_2(P_n) = \{2, n-1\}$.

A continuación vamos a estudiar el poliedro relajación lineal $Q_{LTD}(C_n)$.

Teorema 2.36 *El poliedro $Q_{LTD}(C_n)$ está dado por:*

$$(1) \text{ desigualdades de no negatividad: } x_i \geq 0 \text{ para todo } i \in \{1, \dots, n\},$$

$$(2) \text{ desigualdades de vecindades abiertas: } x_i + x_{i+2} \geq 1 \text{ para } i \in \{1, \dots, n\} \text{ donde la suma de los subíndices es módulo } n.$$

Demostración: A partir del Corolario 1.6, para describir la matriz $C_{LTD}(P_n)$ consideramos las filas no dominadas asociadas a los conjuntos:

$$(f_1) \quad N(i+1) = \{i, i+2\} \text{ para } i \in \{1, \dots, n\},$$

$$(f_2) \quad N(i) \triangle N(i+1) = \{i-1, i, i+1, i+2\} \text{ para } i \in \{1, \dots, n\},$$

$$(f_3) \quad N[i] \triangle N[i+3] = \{i-1, i, i+2, i+3\} \text{ para } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Claramente las filas asociadas a los conjuntos de los ítems (f_2) y (f_3) están dominadas por las filas asociadas a (f_1) y, las filas asociadas a los conjuntos dados en el ítem (f_1) no son redundantes. Así, poliedro $Q_{OLD}(P_n)$ queda descrito por las desigualdades dadas en (1) y (2). ■

Es fácil ver que si $n \in \{2, \dots, 5\}$ se tiene que $P_{LTD}(P_n) = Q_{LTD}(P_n)$.

Teorema 2.37 *Para $n \geq 6$ vale $P_{LTD}(P_n) = Q_{LTD}(P_n)$.*

Demostración: Sea $A = C_{LTD}(P_n)$. Llamamos f_i a la fila de A asociada a la restricción $x_i + x_{i+2} \geq 1$ con $i \in \{1, \dots, n-2\}$, $i \neq 2$.

- Si n es par definimos,

$$N_1 = \{1, 3, 5, \dots, n-3\} \text{ y } N_2 = \{4, 6, 8, \dots, n\}.$$

Es claro que $N = N_1 \cup N_2$, entonces reordenamos las columnas de A de modo que las primeras columnas correspondan a los índices en N_1 y las restantes a los índices en N_2 . También reordenamos las filas de A como sigue, $\{f_1, f_3, f_5, \dots, f_r, f_4, f_6, f_8, \dots, f_s\}$ donde $r = n-5$ y $s = n-2$.

- Si n es impar definimos,

$$N_1 = \{1, 3, 5, \dots, n\} \text{ y } N_2 = \{4, 6, 8, \dots, n-2\}.$$

Repetimos idéntico razonamiento respecto al orden de las columnas y reordenamos las filas como $\{f_1, f_3, f_5, \dots, f_r, f_4, f_6, f_8, \dots, f_s\}$ para $r = n-2$ y $s = n-5$.

En ambos casos la matriz resultante, isomorfa a la matriz A , es una matriz de intervalo. Por lo tanto y de acuerdo a los resultados en [19], el poliedro $P_{LTD}(P_n) = Q_{LTD}(P_n)$. ■

También es fácil ver que si $n \in \{3, \dots, 5\}$ se tiene que $P_{LTD}(C_n) = Q_{LTD}(C_n)$.

Teorema 2.38 Para $n \geq 6$ se verifica que:

(a) Si $\frac{n}{2}$ es par entonces $P_{LTD}(C_n) = Q_{LTD}(C_n)$.

(b) Si $\frac{n}{2} = 2k + 1$ con $k \in \mathbb{Z}^+$ entonces

$$P_{LTD}(C_n) = Q_{LTD}(C_n) \cap \left\{ x : \sum_{i=0}^k x_{2i+1} \geq \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil \right\} \cap \left\{ x : \sum_{i=1}^k x_{2i} \geq \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil \right\}.$$

(c) Si n es impar entonces $P_{LTD}(C_n) = Q_{LTD}(C_n) \cap \left\{ x : \sum_{i=1}^n x_i \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \right\}$.

Demostración: Sea $A = C_{LTD}(C_n)$. Llamamos f_i a la fila de A asociada a la restricción $x_i + x_{i+2} \geq 1$ con $i \in \{1, \dots, n\}$ y la suma en los índices es módulo n . Reordenamos las columnas de A como sigue, $\{1, 3, \dots, p, 2, 4, \dots, q\}$ donde $p = n-1$ y $q = n$ cuando n es par, y $p = n$ y $q = n-1$ cuando n es impar. Mientras que las filas de A se reordenan de acuerdo a $\{f_1, f_3, \dots, f_p, f_2, f_4, \dots, f_q\}$ donde $p = n-1$ y $q = n$ cuando n es par, y $p = n$ y $q = n-1$ cuando n es impar. Luego la matriz que se obtiene es una matriz circulante por bloques. Si n es múltiplo de 4 entonces se consiguen dos bloques correspondientes a matrices ideales de la forma $C_{\frac{n}{2}}^2$. Por lo tanto $P_{LTD}(C_n) = Q_{LTD}(C_n)$ ([19]) y se verifica (a).

Si n es par y no es múltiplo de 4 entonces $\frac{n}{2} = 2k + 1$ con $k \in \mathbb{Z}^+$ y la matriz resultante

consiste en dos bloques de matrices mínimamente no ideales de la forma $C_{\frac{n}{2}}^2$. Por tanto

$P_{LTD}(C_n) = Q_{LTD}(C_n) \cap \left\{ x : \sum_{i=0}^k x_{2i+1} \geq \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil \right\} \cap \left\{ x : \sum_{i=1}^k x_{2i} \geq \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil \right\}$ ([19]) y así se obtiene

(b). Si n es impar entonces la matriz resultante es C_n^2 que es mínimamente no ideal y entonces

$P_{LTD}(C_n) = Q_{LTD}(C_n) \cap \left\{ x : \sum_{i=1}^n x_i \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \right\}$ y queda probado (c). ■

Capítulo 3

Soles y operaciones en grafos

Resumen

En este capítulo estudiamos el cardinal del mínimo X -conjunto para $X \in \{ID, LD, OLD, LTD\}$ en ciertas clases de grafos a través de su estructura. Así obtenemos o bien cotas o bien el valor exacto de estos parámetros. Trabajamos sobre algunas clases de soles, grafos obtenidos al agregar un vértice universal y el cuadrado de ciclos y caminos.

3.1. Soles completos y co-soles

Comenzamos este capítulo estudiando el número de código de identificación, de localización-dominación, de localización-dominación abierta y de localización-dominación total para los soles completos S_n y los co-soles \overline{S}_n . Recordemos que podemos particionar los vértices de estas dos familias de grafos en dos conjuntos, C y S tales que $|C| = |S| = n$ donde C induce una clique y S es un conjunto estable.

3.1.1. Número de código de identificación

Observemos que $\gamma_{ID}(S_3) = 3$ como se ve en la Figura 3.1.

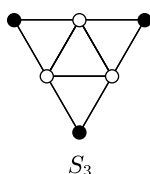


Figura 3.1: Los vértices en negro forman un mínimo ID -conjunto en S_3 .

Analizamos el ID -número para los restantes soles completos y tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.1 *Sea S_n un sol completo con $n \geq 4$. Luego,*

$$\gamma_{ID}(S_n) = n.$$

Demostración: Observamos primero que el conjunto estable S es un código de identificación de S_n ya que, $N[s_i] \cap S = \{s_i\}$ y $N[c_i] \cap S = \{s_{i-1}, s_i\}$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, así cada vértice de S_n está dominado y separado por S y resulta $\gamma_{ID}(S_n) \leq n$.

Consideramos un código de identificación arbitrario I en S_n con $I \neq S$, vamos a mostrar que $|I| \geq n$. Luego podemos concluir que $\gamma_{ID}(S_n) = n$.

El conjunto I contiene vértices tanto de C como de S , no puede ocurrir que $I \subset S$, ya que de este modo los vértices en $S - I$ no están dominados, ni puede ocurrir $I \subseteq C$, de ser así, ningún par de vértices en C está separado.

Además, no es posible que se satisfaga que $s_i, s_{i+1}, s_{i+2} \notin I$ para $i \in \{1, \dots, n\}$ con la suma de subíndices módulo n , de lo contrario $N[c_{i+1}] \cap I = N[c_{i+2}] \cap I$ y c_{i+1}, c_{i+2} no están separados. Por lo tanto, $S - I$ puede dividirse en bloques que contienen un solo vértice $\{s_i\}$ o dos vértices $\{s_i, s_{i+1}\}$ para $i \in \{1, \dots, n\}$. Supongamos que $S - I$ contiene p bloques A_j de cardinalidad 1 y q bloques B_k de cardinalidad 2, en consecuencia, $|S - I| = p + 2q$.

Por cada bloque $A_j = \{s_i\}$, se verifica $|I \cap \{c_i, c_{i+1}\}| \geq 1$ y, por cada bloque $B_k = \{s_i, s_{i+1}\}$, $|I \cap \{c_i, c_{i+1}, c_{i+2}\}| \geq 2$ ya que s_i, s_{i+1} están dominados y separados por I .

Además, si s_i y s_j pertenecen a bloques diferentes de $S - I$, entonces los conjuntos formados por sus vecinos en C son disjuntos. Esto muestra que $|I \cap C| \geq p + 2q$.

Luego, $|I| = |I \cap C| + |I \cap S| = |I \cap C| + n - |S - I| \geq n$ entonces $\gamma_{ID}(S_n) \geq n$. Por lo tanto $\gamma_{ID}(S_n) = n$. ■

A continuación vamos a calcular $\gamma_{ID}(\overline{S}_n)$. En la Figura 3.2, se puede observar que $\gamma_{ID}(\overline{S}_3) = \gamma_{ID}(\overline{S}_4) = 4$, $\gamma_{ID}(\overline{S}_5) = 5$ y $\gamma_{ID}(\overline{S}_6) = 6$.

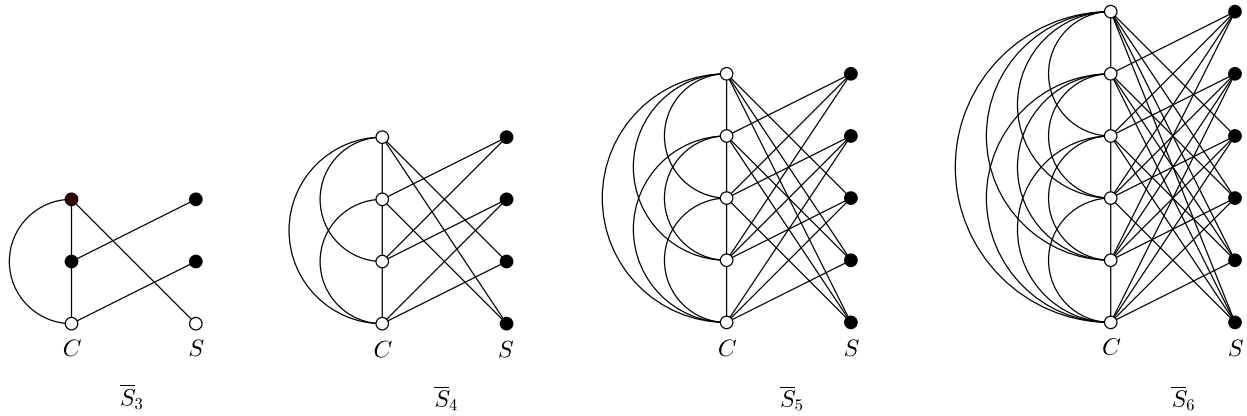


Figura 3.2: Los vértices en negro forman un mínimo ID -conjunto en \overline{S}_n para $n \in \{3, \dots, 6\}$.

En lo que sigue consideramos los casos cuando $n \geq 7$.

Observación 3.2 *A partir de la definición de \overline{S}_n :*

1. $N[s_i] = (C - \{c_{i-1}, c_i\}) \cup \{s_i\}$,
2. $N[s_i] \Delta N[s_j] = \{c_{i-1}, c_i, c_{j-1}, c_j, s_i, s_j\}$, en particular $N[s_i] \Delta N[s_{i+1}] = \{c_{i-1}, c_{i+1}, s_i, s_{i+1}\}$,
3. $N[c_i] \Delta N[c_j] = \{s_i, s_{i+1}, s_j, s_{j+1}\}$, en particular $N[c_i] \Delta N[c_{i+1}] = \{s_i, s_{i+2}\}$.

Teorema 3.3 *Sea \overline{S}_n un co-sol con $n \geq 7$. Luego,*

$$\gamma_{ID}(\overline{S}_n) = n - 1.$$

Demostración: Vamos a mostrar que $I^* = \{c_1, c_3, s_2, s_3\} \cup \bigcup_{i=5}^{n-1} \{s_i\}$ es un código de identificación. Todos los vértices en $C \cup S$ están separados y dominados, ya que:

- $N[c_i] \cap I^* = I^* - \{s_{i+1}\}$ con $i = 1$ o $i = 4$.
- $N[c_i] \cap I^* = I^* - \{s_i\}$ con $i = 3$ o $i = n - 1$.
- $N[c_i] \cap I^* = I^* - \{s_i, s_{i+1}\}$ con $i = 2$ o $i \in \{5, \dots, n - 2\}$.

$$N[c_n] \cap I^* = I^*.$$

$$N[s_1] \cap I^* = \{c_3\}.$$

$$N[s_2] \cap I^* = \{s_2, c_3\}.$$

$$N[s_3] \cap I^* = \{s_3, c_1\}.$$

$$N[s_4] \cap I^* = \{c_1\}.$$

$$N[s_i] \cap I^* = \{s_i, c_1, c_3\} \text{ con } i \in \{5, \dots, n-1\}.$$

$$N[s_n] \cap I^* = \{c_1, c_3\}.$$

Claramente $|I^*| = n - 1$, luego sigue que $\gamma_{ID}(\overline{S}_n) \leq n - 1$.

Sea I un código de identificación de \overline{S}_n , vamos a probar que $|I| \geq n - 1$.

Recordemos que la suma de subíndices es módulo n . No puede ocurrir que $s_i, s_{i+1}, s_{i+2} \in S - I$, pues si $s_{i+1} \notin I$, a partir de la Observación 3.2.3. tenemos que $\{s_i, s_{i+2}\} \cap I \neq \emptyset$. Además, a partir de la misma Observación no se verifica que $\{s_i, s_{i+1}, s_j, s_{j+1}\} \subseteq S - I$ con $|j - i - 1| \geq 2$ o $|i - j - 1| \geq 2$.

Como consecuencia, el conjunto $S - I$ puede particionarse como $S - I = B \cup A_1 \cup \dots \cup A_t$ con $t < n$ donde cada A_i es un bloque que tiene exactamente un vértice de S para cada $i \in \{1, \dots, t\}$ y $B = \{s_i, s_{i+1}\}$ para algún $i \in \{1, \dots, n\}$, o bien $B = \emptyset$.

Entre A_j y A_{j+1} hay al menos dos vértices de $I \cap S$ para todo $j \in \{1, \dots, t-1\}$. En efecto, si para algún $j \in \{1, \dots, t-1\}$, $A_j = \{s_i\}$, $s_{i+1} \in I \cap S$ y $A_{j+1} = \{s_{i+2}\}$, a partir de la Observación 3.2.3. se tiene que $|\{s_i, s_{i+2}\} \cap I| \geq 1$, lo que contradice el hecho de que $A_j \cup A_{j+1} = \{s_i, s_{i+2}\} \subseteq S - I$.

Por lo tanto, para el conjunto $S_A = A_1 \cup \dots \cup A_t$ tenemos que si $A_j = \{s_i\}$ entonces $A_{j+1} = \{s_k\}$ con $|i - k| \geq 3$ para todo $j \in \{1, \dots, t-1\}$.

Como $|S_A| = t$ resulta $|I \cap C| \geq t - 1$. En efecto, si $S_A = \{s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_t}\}$, sin pérdida de generalidad consideramos $i_1 = 1$ e $i_j \geq 4$ para $j \in \{2, \dots, t\}$. De acuerdo con la Observación 3.2.2. existe $w_1 \in \{c_n, c_1, c_{i_j-1}, c_{i_j}\} \cap I$ que separa s_1 de s_{i_j} . Si $w_1 \in \{c_1, c_n\}$ entonces w_1 separa s_1 de s_{i_j} para todo $j \in \{2, \dots, t\}$ (sigue una conclusión análoga si $w_1 \in \{c_{i_j-1}, c_{i_j}\}$). Ya que $w_1 \in N[s_{i_j}]$ para todo $j \in \{2, \dots, t\}$ entonces hay otro vértice en I que separa a s_{i_j} de s_{i_k} para $i_j, i_k \neq 1$. Llamemos $w_2 \in (C - \{w_1\}) \cap I$ al vértice que separa a s_{i_2} de s_{i_j} para todo $j \in \{3, \dots, t\}$. Aplicando iterativamente este razonamiento está claro que I tiene $t - 1$ vértices diferentes en C que separan los vértices en S_A . Por lo tanto $|I \cap C| \geq t - 1$.

Si $B = \emptyset$ entonces $|I \cap S| = n - t$. Además, como $|I \cap C| \geq t - 1$ resulta $|I| \geq n - 1$.

Para el caso $B \neq \emptyset$, $|I \cap S| = n - t - 2$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $B = \{s_1, s_2\}$. Por Observación 3.2.2., $\{c_2, c_n\} \cap I \neq \emptyset$. Consideramos $c_2 \in I$ (el mismo argumento se puede aplicar a $c_n \in I$). Como $c_2 \in N[x]$ para cada $x \in \{s_1\} \cup S_A$, entonces existen otros vértices en C que separan los vértices del conjunto $\{s_1\} \cup S_A$. Además, si $S'_A = \{s_1\} \cup S_A$, con un razonamiento análogo al caso anterior se obtiene que $|I| = |I \cap S| + |I \cap (C - \{c_2\})| + 1 \geq n - t - 2 + t + 1 = n - 1$. Por lo tanto, $\gamma_{ID}(\overline{S}_n) = n - 1$. ■

3.1.2. Número de localización-dominación

Es inmediato verificar que $\gamma_{LD}(S_3) = \gamma_{LD}(S_4) = 3$ (ver Figura 3.3).

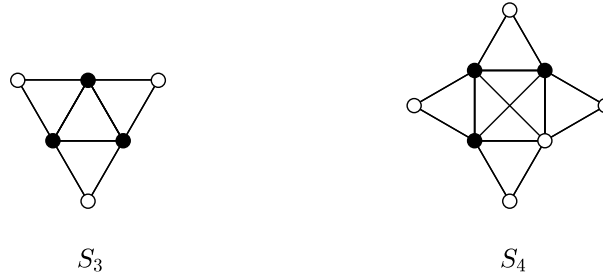


Figura 3.3: Los vértices en negro forman un mínimo LD -conjunto en S_n para $n \in \{3, 4\}$.

A continuación mostramos una cota superior para el LD -número de S_n con $n \geq 5$.

Teorema 3.4 *Sea S_n un sol completo con $n \geq 5$. Luego,*

$$\gamma_{LD}(S_n) \leq \left\lceil \frac{4n}{5} \right\rceil.$$

Demostración: Vamos a mostrar que existe un LD -conjunto en S_n de tamaño $\lceil \frac{4n}{5} \rceil$ para $n \geq 5$. Sea $n = 5k + r$ con $r \in \{0, \dots, 4\}$. Definimos,

- Si $r = 0$,

$$I^* = \{c_i, c_{i+1} : i = 5\ell + 1, \ell \in \{0, \dots, k-1\}\} \cup \{s_i, s_{i+1} : i = 5\ell + 3, \ell \in \{0, \dots, k-1\}\}.$$
- Si $r = 1$,

$$I^* = \{c_i, c_{i+1} : i = 5\ell + 1, \ell \in \{0, \dots, k-1\}\} \cup \{c_n\} \cup \{s_i, s_{i+1} : i = 5\ell + 3, \ell \in \{0, \dots, k-1\}\}.$$
- Si $r = 2$ o $r = 3$,

$$I^* = \{c_i, c_{i+1} : i = 5\ell + 1, \ell \in \{0, \dots, k\}\} \cup \{s_i, s_{i+1} : i = 5\ell + 3, \ell \in \{0, \dots, k-1\}\}.$$
- Si $r = 4$,

$$I^* = \{c_i, c_{i+1} : i = 5\ell + 1, \ell \in \{0, \dots, k\}\} \cup \{c_{n-1}\} \cup \{s_i, s_{i+1} : i = 5\ell + 3, \ell \in \{0, \dots, k-1\}\}.$$

Si $r = 0$, es fácil ver que todos los vértices de S_n están dominados por el correspondiente conjunto I^* , además podemos observar que todos los vértices en $(C \cup S) - I^*$ están separados por dicho conjunto ya que:

$$N[s_i] \cap I^* = \{c_i, c_{i+1}\} \text{ con } i = 5\ell + 1, \ell \in \{0, \dots, k-1\}.$$

$$N[s_i] \cap I^* = \{c_i\} \text{ con } i = 5\ell + 2, \ell \in \{0, \dots, k-1\}.$$

$$N[s_i] \cap I^* = \{c_{i+1}\} \text{ con } i = 5\ell, \ell \in \{1, \dots, k-1\}.$$

$$N[s_n] \cap I^* = \{c_1\}.$$

$$N[c_i] \cap I^* = (I^* \cap C) \cup \{s_i\} \text{ con } i = 5\ell + 3, \ell \in \{0, \dots, k-1\}.$$

$$N[c_i] \cap I^* = (I^* \cap C) \cup \{s_{i-1}, s_i\} \text{ con } i = 5\ell + 4, \ell \in \{0, \dots, k-1\}.$$

$$N[c_i] \cap I^* = (I^* \cap C) \cup \{s_{i-1}\} \text{ con } i = 5\ell, \ell \in \{1, \dots, k\}.$$

Análogamente, puede verificarse que si $r \in \{1, \dots, 4\}$ e $i \in \{1, \dots, 5k-1\}$, los vértices $s_i, c_i \notin I^*$ están dominados y separados por el correspondiente conjunto I^* , claramente si $s_i, c_i \in I^*$ están dominados por dicho conjunto. Además:

- Si $r = 1$,

$$N[s_{5k}] \cap I^* = \{c_{5k+1}\}.$$

$$N[s_{5k+1}] \cap I^* = \{c_1, c_{5k+1}\}.$$

- Si $r = 3$,

$$N[s_{5k}] \cap I^* = \{c_{5k+1}\}.$$

$$N[s_{5k+1}] \cap I^* = \{c_{5k+1}, c_{5k+2}\}.$$

$$N[s_{5k+2}] \cap I^* = \{c_{5k+2}\}.$$

$$N[s_{5k+3}] \cap I^* = \{c_1\}.$$

$$N[c_{5k+3}] \cap I^* = I^* \cap C.$$

- Si $r = 2$,

$$N[s_{5k}] \cap I^* = \{c_{5k+1}\}.$$

$$N[s_{5k+1}] \cap I^* = \{c_{5k+1}, c_{5k+2}\}.$$

$$N[s_{5k+2}] \cap I^* = \{c_1, c_{5k+2}\}.$$

- Si $r = 4$,

$$N[s_{5k}] \cap I^* = \{c_{5k+1}\}.$$

$$N[s_{5k+1}] \cap I^* = \{c_{5k+1}, c_{5k+2}\}.$$

$$N[s_{5k+2}] \cap I^* = \{c_{5k+2}, c_{5k+3}\}.$$

$$N[s_{5k+3}] \cap I^* = \{c_{5k+3}\}.$$

$$N[s_{5k+4}] \cap I^* = \{c_1\}.$$

$$N[c_{5k+4}] \cap I^* = I^* \cap C.$$

Por otro lado, es fácil ver a partir de la definición que, en cada caso $|I^*| \leq \lceil \frac{4n}{5} \rceil$. Por lo tanto $\gamma_{LD}(S_n) \leq \lceil \frac{4n}{5} \rceil$. ■

Se puede observar que esta cota es alcanzada por ejemplo para S_6 , donde $I^* = \{c_1, c_2, c_6, s_3, s_4\}$ es un LD -conjunto de tamaño mínimo de S_6 (ver Figura 3.4).

A continuación estudiamos el LD -número del grafo co-sol. Es fácil verificar que $\gamma_{LD}(\overline{S}_3) = \gamma_{LD}(\overline{S}_4) = 3$ y $\gamma_{LD}(\overline{S}_n) = n-1$ para $n \in \{5, 6, 7\}$. En la Figura 3.5 mostramos LD -conjuntos mínimos para \overline{S}_n con $n \in \{3, 4, 5\}$. De manera similar a los casos $n = 4$ y $n = 5$, se puede observar que $I^* = \{c_1, \dots, c_{n-1}\}$ es un LD -conjunto de tamaño mínimo de \overline{S}_n para $n \in \{6, 7\}$. Ahora bien, para $n \geq 8$ vamos a probar que $n-2$ es una cota superior para dicho número.

Teorema 3.5 *Sea \overline{S}_n un co-sol con $n \geq 8$. Luego,*

$$\gamma_{LD}(\overline{S}_n) \leq n-2.$$

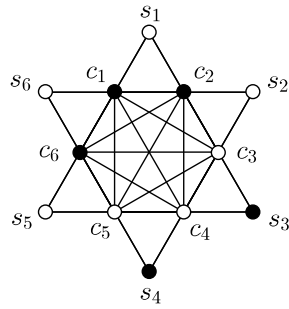


Figura 3.4: Los vértices en negro forman un mínimo LD -conjunto en S_6 .

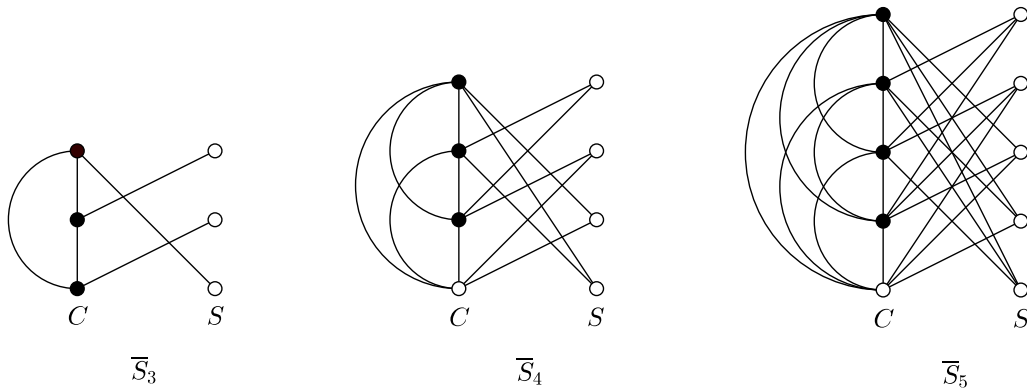


Figura 3.5: Los vértices en negro forman un mínimo LD -conjunto en \overline{S}_n para $n \in \{3, 4, 5\}$.

Demostración: Consideramos el conjunto $I^* = \{c_1, c_2, c_3\} \cup \bigcup_{i=6}^n \{s_i\}$, claramente todos los vértices de \overline{S}_n están dominados por I^* . Vamos a mostrar que los vértices de \overline{S}_n que no están en I^* están separados. Observemos que:

$$\begin{aligned} N[c_4] &= I^*. \\ N[c_5] &= I^* - \{s_6\}. \\ N[c_i] &= I^* - \{s_i, s_{i+1}\} \text{ con } i \in \{6, \dots, n-1\}. \\ N[c_n] &= I^* - \{s_n\}. \\ N[s_1] &= (I^* \cap C) - \{c_1\}. \\ N[s_2] &= (I^* \cap C) - \{c_1, c_2\}. \\ N[s_3] &= (I^* \cap C) - \{c_2, c_3\}. \\ N[s_4] &= (I^* \cap C) - \{c_3\}. \\ N[s_5] &= I^* \cap C. \end{aligned}$$

Por lo tanto, I^* es un LD -conjunto y así resulta $\gamma_{LD}(\overline{S}_n) \leq n - 2$. ■

Esta cota se alcanza por ejemplo para \overline{S}_{10} , $I^* = \{c_1, c_2, c_3, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10}\}$ es un LD -conjunto de tamaño mínimo para dicho grafo (ver Figura 3.6).

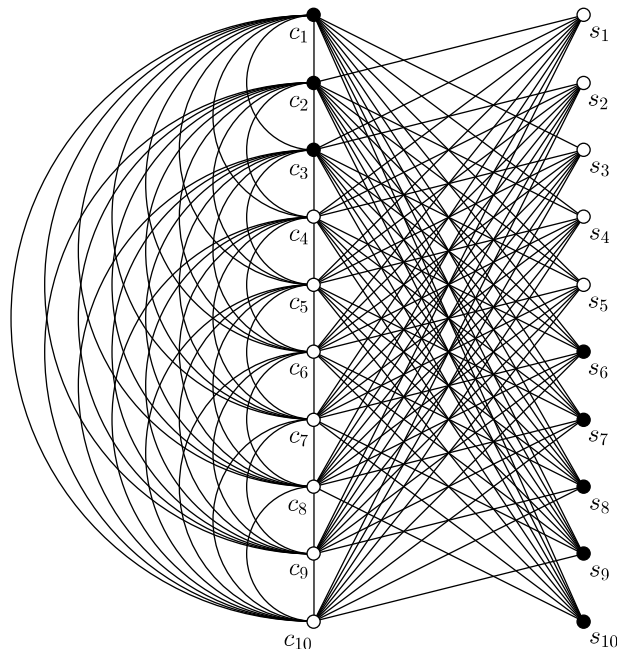


Figura 3.6: Los vértices en negro forman un mínimo LD -conjunto en \overline{S}_{10} .

3.1.3. Número de localización-dominación abierta y localización-dominación total

En primer lugar, es fácil ver que $\gamma_{LTD}(S_3) = \gamma_{LTD}(S_4) = 3$ (ver Figura 3.7). Para $n \geq 5$ demostramos el siguiente resultado:

Teorema 3.6 *Sea S_n un sol completo con $n \geq 5$. Entonces,*

$$\gamma_{LTD}(S_n) \geq n - 1.$$

Demostración: Nuevamente denotamos por s_i con $i \in \{1, \dots, n\}$ los vértices en S y por c_i con $i \in \{1, \dots, n\}$ los vértices en C y recordamos que la suma de subíndices es módulo n . Además, cada arista entre vértices de S y C es o bien s_i, c_i o s_i, c_{i+1} para $i \in \{1, \dots, n\}$.

Consideramos I un LTD -conjunto de S_n . Observemos que $I \cap C \neq \emptyset$, pues si esto no ocurre entonces $I \subseteq S$ y los vértices de S no están dominados-totalmente por I .

Distinguimos diferentes casos:

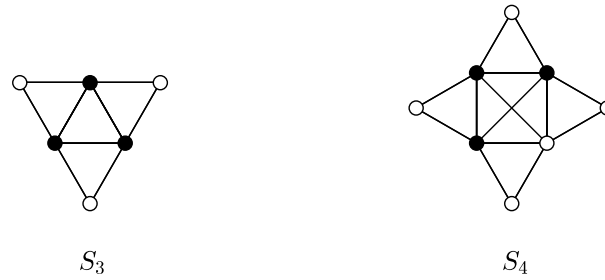


Figura 3.7: Los vértices en negro forman un mínimo *LTD*-conjunto en S_3 y S_4 .

- Si $I = C - \{c_i\}$, I es un *LTD*-conjunto ya que

- . $N(c_i) \cap I = C - \{c_i\}$,
- . $N(c_j) \cap I = C - \{c_i, c_j\}$ con $j \neq i$,
- . $N(s_i) \cap I = \{c_{i+1}\}$,
- . $N(s_{i-1}) \cap I = \{c_{i-1}\}$,
- . $N(s_j) \cap I = \{c_j, c_{j+1}\}$ con $j \neq i - 1, i$.

- Supongamos que existen al menos dos vértices en $C - I$.

Primero observemos que:

Si $c_i, c_{i+1} \in C - I$, entonces s_i no está dominado-totalmente lo que contradice el hecho de que I es un *LTD*-conjunto.

Entonces, si existen al menos dos vértices en $C - I$, dichos vértices no tiene subíndices consecutivos. Ahora bien, como I separa-totalmente todos los vértices de $(C \cup S) - I$, en particular separa-totalmente los vértices de $C - I$ Podemos concluir que, todos los vértices en $C - I$ salvo a lo sumo uno de ellos, tiene un vecino distinto en $I \cap S$, luego $|I \cap S| \geq n - |I \cap C| - 1$.

Por lo tanto, $|I| = |I \cap C| + |I \cap S| \geq |I \cap C| + n - |I \cap C| - 1 = n - 1$.

En ambos casos resulta $|I| \geq n - 1$, así podemos concluir que $\gamma_{LTD}(S_n) \geq n - 1$. ■

Observemos que $\gamma_{OLD}(S_3) = \gamma_{OLD}(S_4) = 4$, ver Figura 3.8.

A continuación, estudiamos el *OLD*-número en S_n para $n \geq 5$.

Teorema 3.7 *Sea S_n un sol completo con $n \geq 5$. Entonces,*

$$\gamma_{OLD}(S_n) \leq n - 1.$$

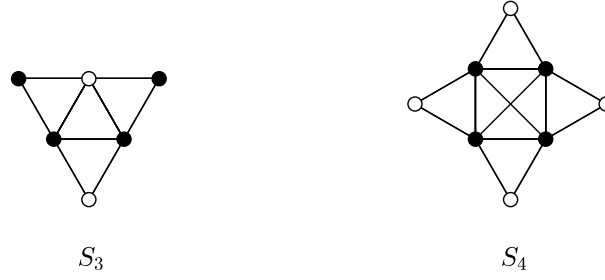


Figura 3.8: Los vértices en negro forman un mínimo *OLD*-conjunto en S_3 y S_4 .

Demostración: Consideramos S_n un sol completo con $n \geq 5$, observemos que $I^* = C - \{c_i\}$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ es un *OLD*-conjunto de S_n . Sin pérdida de generalidad sea $i = 1$, I^* domina-totalmente y separa-totalmente todos los vértices de $C \cup S$, ya que:

$$N(c_1) \cap I^* = I^*.$$

$$N(c_i) \cap I^* = I^* - \{c_i\}.$$

$$N(s_1) \cap I^* = \{c_2\}.$$

$$N(s_n) \cap I^* = \{c_n\}.$$

$$N(s_i) \cap I^* = \{c_i, c_{i+1}\} \text{ con } i \in \{2, \dots, n-1\}.$$

A partir de la definición de I^* , $|I^*| = n - 1$, luego sigue que $\gamma_{OLD}(S_n) \leq n - 1$. ■

Ahora bien, recordando que para todo grafo G se verifica que $\gamma_{LTD}(G) \leq \gamma_{OLD}(G)$ y teniendo en cuenta los resultados obtenidos en los Teoremas 3.6 y 3.7 podemos concluir que:

Corolario 3.8 Para todo $n \geq 5$,

$$\gamma_{LTD}(S_n) = \gamma_{OLD}(S_n) = n - 1.$$

A continuación estudiamos el *OLD*-número de \bar{S}_n . Primero observemos que para $n \in \{3, \dots, 7\}$ resulta $\gamma_{OLD}(\bar{S}_n) = n$, en particular en la Figura 3.9 podemos observar los mínimos *OLD*-conjuntos para cada \bar{S}_n con $n \in \{3, 4, 5\}$. De manera análoga, se puede ver que $I^* = C$ es un mínimo *OLD*-conjunto de \bar{S}_n si $n = 6$ o $n = 7$.

Para $n \geq 8$ probamos el siguiente resultado.

Teorema 3.9 Sea \bar{S}_n un co-sol con $n \geq 8$. Entonces,

$$\gamma_{OLD}(\bar{S}_n) = n - 1.$$

Demostración: Consideramos $n = 4k + r$ con $r \in \{0, 1, 2, 3\}$.

En primer lugar definimos,

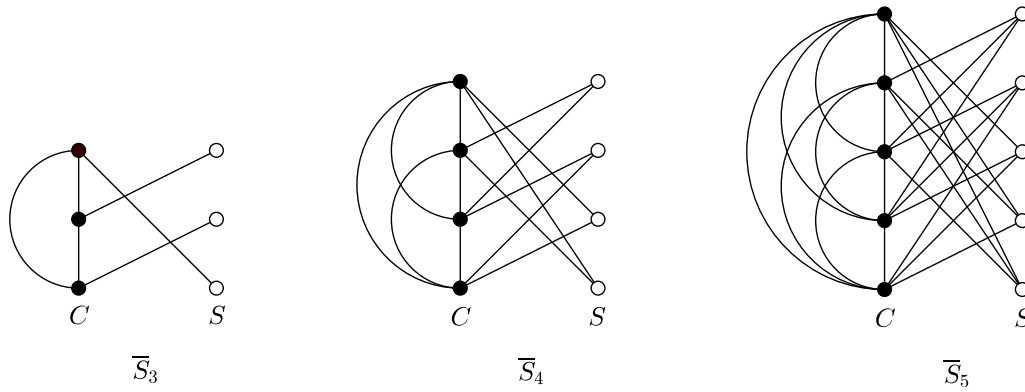


Figura 3.9: Los vértices en negro forman un mínimo *OLD*-conjunto en \bar{S}_n para $n \in \{3, 4, 5\}$.

- Si $r = 0$,

$$I^* = \{c_3, c_4\} \cup \{c_i, c_{i+1}, c_{i+2} : i = 4\ell + 2, \ell \in \{1, \dots, k-1\}\} \cup \{s_3\} \cup \{s_i : i = 4\ell + 2, \ell \in \{1, \dots, k-1\}\}.$$

- Si $r = 1$,

$$I^* = \{c_3, c_4, c_n\} \cup \{c_i, c_{i+1}, c_{i+2} : i = 4\ell + 2, \ell \in \{1, \dots, k-1\}\} \cup \{s_3\} \cup \{s_i : i = 4\ell + 2, \ell \in \{1, \dots, k-1\}\}.$$

- Si $r = 2$,

$$I^* = \{c_3, c_4, c_{n-1}, c_n\} \cup \{c_i, c_{i+1}, c_{i+2} : i = 4\ell + 2, \ell \in \{1, \dots, k-1\}\} \cup \{s_3\} \cup \{s_i : i = 4\ell + 2, \ell \in \{1, \dots, k-1\}\}.$$

- Si $r = 3$,

$$I^* = \{c_3, c_4, c_{n-1}, c_n\} \cup \{c_i, c_{i+1}, c_{i+2} : i = 4\ell + 2, \ell \in \{1, \dots, k-1\}\} \cup \{s_3, s_{n-1}\} \cup \{s_i : i = 4\ell + 2, \ell \in \{1, \dots, k-1\}\}.$$

Notemos que, en cada caso, I^* es un *OLD*-conjunto de \bar{S}_n , es decir, I^* domina-totalmente y separa-totalmente todos los vértices de $C \cup S$ ya que:

- Si $r = 0$,

$$N(c_1) \cap I^* = I^*.$$

$$N(c_2) \cap I^* = I^* - \{s_3\}.$$

$$N(c_3) \cap I^* = I^* - \{c_3, s_3\}.$$

$$N(c_4) \cap I^* = I^* - \{c_4\}.$$

$$N(c_i) \cap I^* = I^* - \{s_{i+1}\} \text{ con } i = 4\ell + 1, \ell \in \{1, \dots, k-1\}.$$

$$N(c_i) \cap I^* = I^* - \{c_i, s_i\} \text{ con } i = 4\ell + 2, \ell \in \{1, \dots, k-1\}.$$

$$N(c_i) \cap I^* = I^* - \{c_i\} \text{ con } i = 4\ell + 3 \text{ o } 4\ell + 4, \ell \in \{1, \dots, k-1\}.$$

$$N(s_1) \cap I^* = (C \cap I^*) - \{c_n\}.$$

$$N(s_2) \cap I^* = C \cap I^*.$$

$$N(s_3) \cap I^* = (C \cap I^*) - \{c_3\}.$$

$$N(s_4) \cap I^* = (C \cap I^*) - \{c_3, c_4\}.$$

$$N(s_i) \cap I^* = (C \cap I^*) - \{c_{i-1}\} \text{ con } i = 4\ell + 1, \ell \in \{1, \dots, k-1\}.$$

$$N(s_i) \cap I^* = (C \cap I^*) - \{c_i\} \text{ con } i = 4\ell + 2, \ell \in \{1, \dots, k-1\}.$$

$$N(s_i) \cap I^* = (C \cap I^*) - \{c_{i-1}, c_i\} \text{ con } i = 4\ell + 3 \text{ o } 4\ell + 4, \ell \in \{1, \dots, k-1\}.$$

Análogamente, puede verificarse que si $r \in \{1, \dots, 3\}$ e $i \in \{1, \dots, 4k\}$ todos los vértices están dominados-totalmente y separados-totalmente por el correspondiente conjunto I^* . Además:

■ Si $r = 1$,

$$N(c_{4k+1}) \cap I^* = I^* - \{c_{4k+1}\}.$$

$$N(s_{4k+1}) \cap I^* = (C \cap I^*) - \{c_{4k}, c_{4k+1}\}.$$

■ Si $r = 2$,

$$N(c_{4k+1}) \cap I^* = I^* - \{c_{4k+1}\}.$$

$$N(c_{4k+2}) \cap I^* = I^* - \{c_{4k+2}\}.$$

$$N(s_{4k+1}) \cap I^* = (C \cap I^*) - \{c_{4k}, c_{4k+1}\}.$$

$$N(s_{4k+2}) \cap I^* = (C \cap I^*) - \{c_{4k+1}, c_{4k+2}\}.$$

■ Si $r = 3$,

$$N(c_{4k+1}) \cap I^* = I^* - \{s_{4k+2}\}.$$

$$N(c_{4k+2}) \cap I^* = I^* - \{c_{4k+2}, s_{4k+2}\}.$$

$$N(c_{4k+3}) \cap I^* = I^* - \{c_{4k+3}\}.$$

$$N(s_{4k+1}) \cap I^* = (C \cap I^*) - \{c_{4k}\}.$$

$$N(s_{4k+2}) \cap I^* = (C \cap I^*) - \{c_{4k+2}\}.$$

$$N(s_{4k+3}) \cap I^* = (C \cap I^*) - \{c_{4k+2}, c_{4k+3}\}.$$

Dado que $|I^*| = n - 1$, resulta que $\gamma_{OLD}(\overline{S}_n) \leq n - 1$.

Para terminar la prueba del teorema, vamos a considerar I un OLD -conjunto de \overline{S}_n y demostramos que $|I| \geq n - 1$.

Primero observemos que valen las siguientes afirmaciones:

- (a) No puede ocurrir que $c_i, c_{i+1}, c_{i+2} \in C - I$ para algún i con la suma de subíndices módulo n . De lo contrario, para tal i , $N(s_{i+1}) \cap I = N(s_{i+2}) \cap I$ lo que contradice el hecho de que I es un OLD -conjunto.
- (b) No se verifican simultáneamente $c_i, c_{i+2} \in C - I$ y $c_{i+1} \in C \cap I$ para algún i , teniendo en cuenta la suma de subíndices módulo n . Si esto ocurre, los vértices s_{i+1} y s_{i+2} no están separados-totalmente.

- (c) Tampoco puede ocurrir que $c_i, c_{i+1} \in C - I$ y $c_j, c_{j+1} \in C - I$ con $|i + 1 - j| \geq 3$ o $|j + 1 - i| \geq 3$. Si esta condición se verifica es claro que $N(s_{i+1}) \cap I = N(s_{j+1}) \cap I$, lo que contradice que I es un *OLD*-conjunto de \overline{S}_n .

Por lo tanto, por lo observado en (a) y (c), podemos separar la prueba en los siguientes casos:

- **Caso 1:** No existen dos vértices en $C - I$ con subíndices consecutivos.

Por lo observado en (b), todo par de vértices $c_i, c_j \in C - I$ verifica que $|i - j| \geq 3$. Entonces $(S - N(c_i)) \cap (S - N(c_j)) = \emptyset$ y vale $\{s_i, s_{i+1}, s_j, s_{j+1}\} \cap I \neq \emptyset$, esto quiere decir que existen al menos $|C - I| - 1$ vértices en $I \cap S$.

Luego, $|I| = |I \cap C| + |I \cap S| \geq |I \cap C| + |C - I| - 1 = n - 1$.

- **Caso 2:** Existe sólo un par de vértices en $C - I$ con subíndices consecutivos.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $c_1, c_2 \in C - I$.

Caso 2.1: $|C - I| = 2$.

Como c_1 y c_2 están separados-totalmente por I , existe al menos un vértice en $I \cap S$ que los separa, luego $|I| = |I \cap C| + |I \cap S| \geq n - 2 + 1 = n - 1$.

Caso 2.2: $|C - I| \geq 3$.

Sea $C - I = \{c_1, c_2\} \cup \{c_{i_r} : r \in \{1, \dots, p\}\}$. A partir de lo observado en (b), $|2 - i_\ell| \geq 3$ y $|i_j - i_k| \geq 3$ para todo $j, k \in \{1, \dots, p\}$, como c_2 está separado-totalmente de cada c_{i_r} por I , utilizando un razonamiento análogo al Caso 1, existen en $I \cap S$ p vértices que separan cada uno de estos pares. Además, es claro que dichos vértices no separan a c_1 de c_2 o bien, a c_1 de c_{i_r} para algún $r \in \{1, \dots, p\}$, así resulta $|I| = |I \cap C| + |I \cap S| \geq n - 2 - p + p + 1 = n - 1$.

Por lo tanto podemos concluir que en todos los casos posibles resulta $|I| \geq n - 1$ y así obtenemos que $\gamma_{OLD}(\overline{S}_n) = n - 1$. ■

Finalmente, estudiamos el *LTD*-número para \overline{S}_n . En la Figura 3.9 podemos observar que los mínimos *OLD*-conjuntos para cada \overline{S}_n si $n \in \{3, 4, 5\}$ en particular son mínimos *LTD*-conjuntos para dichos grafos. Más aún, de manera análoga, se puede ver que $I^* = C$ es un mínimo *LTD*-conjunto de \overline{S}_n si $n = 6$ o $n = 7$. Además, obtenemos el siguiente resultado cuya prueba omitimos ya que el conjunto I^* dado en la prueba del Teorema 3.5 es un *LTD*-conjunto de \overline{S}_n con $n \geq 8$.

Teorema 3.10 *Sea \overline{S}_n un co-sol con $n \geq 8$. Luego,*

$$\gamma_{LTD}(\overline{S}_n) \leq n - 2.$$

Al igual que en el Teorema 3.5, se puede observar que esta cota es alcanzada en \overline{S}_{10} .

3.2. Grafos obtenidos al agregar un vértice universal

Recordamos que dado $G = (V, E)$ un grafo y $0 \notin V$, denotamos por $G' = (V', E')$ el grafo obtenido al agregar el vértice universal 0 a G , $V' = V \cup \{0\}$ y $E' = E \cup \{i0 : i \in V\}$.

Observación 3.11 Sea $G = (V, E)$ un grafo y $0 \notin V$.

- G' tiene true twins si y solo si G tiene true twins o un vértice universal.
- G' tiene false twins si y solo si G también los tiene.

Teorema 3.12 Sea $X \in \{ID, LD, OLD, LTD\}$ y $G = (V, E)$ un grafo conexo que admite un X -conjunto. En particular, si $X = ID$ suponemos que G no contiene un vértice universal. Luego

$$\gamma_X(G) \leq \gamma_X(G') \leq \gamma_X(G) + 1.$$

Más aún, $\gamma_X(G') = \gamma_X(G)$ si y solo si existe un X -conjunto mínimo C tal que para todo $i \in V$, $C \not\subseteq N[i]$ para $X = ID$ o bien, $C \not\subseteq N(i)$ cuando $X \in \{LD, OLD, LTD\}$.

Demostración: Sea C' un X -conjunto de tamaño mínimo de G' , es decir, $\gamma_X(G') = |C'|$.

Si $0 \notin C'$ luego C' es un X -conjunto de G y $\gamma_X(G) \leq |C'| = \gamma_X(G')$. Si $0 \in C'$, como $0 \in N[i]$ para todo $i \in V$, 0 no separa los vértices en V . Por otra parte, como C' es minimal, luego existe $j \in V$ tal que $N[j] \cap C' = \{0\}$. Más aún j es el único vértice con esta propiedad ya que C' es un X -conjunto de G' . Como G es conexo y $|V(G)| \geq 2$, existe $k \in N(j) \cap V$. Definimos $C = (C' - \{0\}) \cup \{k\}$. Así C es un X -conjunto de G tal que $|C| = |C'|$. Por lo tanto, $\gamma_X(G) \leq |C| = |C'| = \gamma_X(G')$.

Sea C un mínimo ID -conjunto de G tal que $C \subseteq N[i_C]$ para $i_C \in V$. Claramente C no es un ID -conjunto de G' , pues $N[i_C] \cap C = N[0] \cap C$. Pero como C es un ID -conjunto, existe $j \notin N[i_C]$ (pues no hay vértice universal en G), luego $C \cup \{j\}$ es un ID -conjunto de G' y vale $\gamma_X(G') \leq \gamma_X(G) + 1$.

Ahora, sea C un mínimo X -conjunto de G con $X \in \{LD, OLD, LTD\}$ tal que $C \subseteq N(i_C)$ para $i_C \in V$. Similarmente, concluimos que C no es un X -conjunto de G' . Ahora bien, $C \cup \{0\}$ es un X -conjunto de G' y vale $\gamma_X(G') \leq \gamma_X(G) + 1$.

Supongamos que hay un X -conjunto C de tamaño mínimo de G tal que para todo $i \in V$, $C \not\subseteq N[i]$ cuando $X = ID$ o $C \not\subseteq N(i)$ cuando $X \in \{LD, OLD, LTD\}$. Vamos a probar que C es un X -conjunto de G' .

Como $N(0) \cap C = C \neq \emptyset$ luego C domina-totalmente o domina los vértices en V' .

Por otro lado, supongamos que $N[0] \cap C = N[i] \cap C$ (o $N(0) \cap C = N(i) \cap C$) para algún $i \in V$. Si C es un X -conjunto con $X = ID$ (o $X \in \{LD, OLD, LTD\}$) luego $C \subseteq N[i] \cap C$ (resp. $C \subseteq N(i) \cap C$) y esto contradice el supuesto sobre C . Luego, $N[0] \cap C \neq N[i] \cap C$ ($N(0) \cap C \neq N(i) \cap C$) para todo $i \in V$, es decir, C es un X -conjunto de G' con $X \in \{ID, LD, OLD, LTD\}$. Por lo tanto, $\gamma_X(G') \leq |C| = \gamma_X(G)$.

Finalmente, suponemos que para todo X -conjunto mínimo C de G existe $i \in V$ tal que $C \subseteq N[i]$ si $X = ID$ ($C \subseteq N(i)$ si $X \in \{LD, OLD, LTD\}$). Sea D un X -conjunto de tamaño mínimo de G' tal que $|D| = \gamma_X(G)$. Es claro que $0 \in D$ (ya que $D - \{0\}$ sería un X -conjunto de G de cardinal menor que $\gamma_X(G)$). Entonces existe un único $k \in V$ tal que $N[k] \cap D = \{0\}$. Sea $j \in N(k)$ y sea $D' = D - \{0\} \cup \{j\}$. Es fácil chequear que D' es un X -conjunto de G' de cardinalidad $\gamma_X(G)$ que no contiene al vértice 0. Entonces D' es un X -conjunto de G de cardinalidad $\gamma_X(G)$. Por hipótesis existe $h \in V$ tal que $D' \subseteq N[h]$. Pero esto contradice el hecho de que D' es un X -conjunto de G' ya que los vértices 0 y h no están separados. ■

3.2.1. Fans y wheels

Denotamos por F_n y W_n el grafo fan y el grafo wheel de $n+1$ vértices obtenidos al agregar un vértice universal al camino P_n y al ciclo C_n respectivamente.

Para $X \in \{ID, LD, OLD, LTD\}$, $\gamma_X(P_n)$ es conocido y se muestra en la Tabla 3.1.

X	$\gamma_X(P_n)$
ID	$\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ [9]
LD	$\lceil \frac{2n}{5} \rceil$ [46]
OLD	$4k + r$ para $n = 6k + r$, $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $4k + 4$ para $n = 6k + 5$ [44]
LTD	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + \lceil \frac{n}{4} \rceil$ para $n \geq 2$ [27]

Tabla 3.1: $\gamma_X(P_n)$

También, en el caso de los ciclos, $\gamma_{ID}(C_n)$, $\gamma_{LD}(C_n)$ y $\gamma_{LTD}(C_n)$ son números conocidos (ver Tabla 3.2). Calculamos a continuación el valor de $\gamma_{OLD}(C_n)$.

Lema 3.13 Para $n \geq 3$, $\gamma_{OLD}(C_n) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil$.

Demostración: En [44] se prueba que $\gamma_{OLD}(C_n) \geq \lceil \frac{2n}{3} \rceil$. Veamos que dicha cota es ajustada. En efecto, si $n = 3k + r$ con $r \in \{0, 1, 2\}$, consideramos la suma módulo n y definimos los siguientes conjuntos:

- Si $r = 0$,
 $I^* = \{3i - 2, 3i - 1 : i \in \{1, \dots, k\}\}$.
- Si $r = 1$,
 $I^* = \{3i - 2, 3i - 1 : i \in \{1, \dots, k\}\} \cup \{n - 1\}$.
- Si $r = 2$,
 $I^* = \{3i - 2, 3i - 1 : i \in \{1, \dots, k\}\} \cup \{n - 1, n - 2\}$.

Ahora bien:

- Si $r = 0$,
 $N(i) \cap I^* = \{i + 1\}$ con $i = 3\ell + 1$, $\ell \in \{0, \dots, k - 1\}$.
 $N(i) \cap I^* = \{i - 1\}$ con $i = 3\ell + 2$, $\ell \in \{0, \dots, k - 1\}$.
 $N(i) \cap I^* = \{i - 1, i + 1\}$ con $i = 3\ell$, $\ell \in \{1, \dots, k\}$.

En este caso, es claro que I^* es un *OLD*-conjunto de C_n . Análogamente se verifica que si $r \in \{1, 2\}$ e $i \in \{1, \dots, 3k - 2\}$ los vértices de C_n están dominados-totalmente y separados-totalmente por el correspondiente I^* . Además:

- Si $r = 1$,
 $N(3r - 1) \cap I^* = \{3r - 2, 3r\}$.
 $N(3r - 1) \cap I^* = \{3r - 2, 3r\}$.
 $N(3r) \cap I^* = \{3r - 1\}$.
 $N(3r + 1) \cap I^* = \{1, 3r\}$.
- Si $r = 2$,
 $N(3r - 1) \cap I^* = \{3r - 2, 3r\}$.
 $N(3r) \cap I^* = \{3r - 1, 3r + 1\}$.
 $N(3r + 1) \cap I^* = \{3r\}$.
 $N(3r + 2) \cap I^* = \{1, 3r + 1\}$.

Así resulta que, el conjunto I^* asociado a los casos $r = 1$ y $r = 2$ respectivamente, también es un *OLD*-conjunto y, como $|I^*| = \lceil \frac{2n}{3} \rceil$, $\gamma_{OLD}(C_n) \leq \lceil \frac{2n}{3} \rceil$. Por lo tanto, $\gamma_{OLD}(C_n) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil$. ■

Resumimos los resultados para ciclos en la siguiente tabla:

X	$\gamma_X(C_n)$
<i>ID</i>	$\frac{n}{2}$ si n es par, $n \geq 6$ y $\frac{n+1}{2} + 1$ si $n \geq 7$ es impar [25]
<i>LD</i>	$\lceil \frac{2n}{5} \rceil$ [9]
<i>OLD</i>	$\lceil \frac{2n}{3} \rceil$ Lema 3.13
<i>LTD</i>	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + \lceil \frac{n}{4} \rceil$ si $n \geq 3$ [15]

Tabla 3.2: $\gamma_X(C_n)$

Es claro que no existe un *ID*-conjunto para P_2 y para C_3 , ni un *OLD*-conjunto para C_4 . Si $n = 4$ o $n = 5$ en las Figuras 3.10 y 3.11 mostramos X -conjuntos de tamaños mínimos para caminos y fans representados por los vértices pintados de negro y, para $n = 5$, en la Figura 3.12 tenemos X -conjuntos de tamaños mínimos para ciclos y wheels.

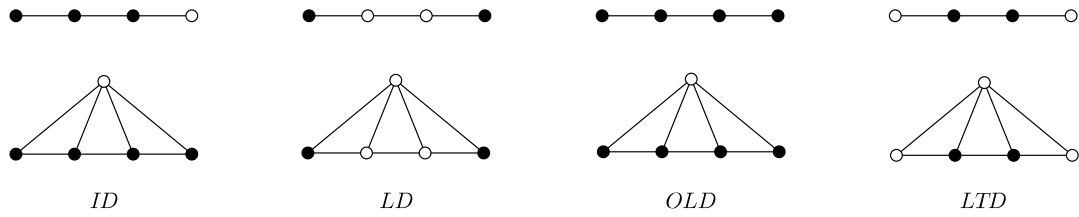


Figura 3.10: X -conjuntos mínimos para P_4 y F_4

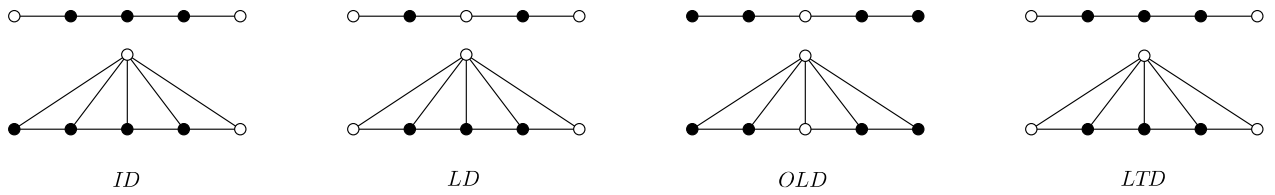


Figura 3.11: X -conjuntos mínimos para P_5 y F_5

Como consecuencia del Teorema 3.12, obtenemos:

Corolario 3.14 Sea $X \in \{ID, LD, OLD, LTD\}$ y $n \geq 6$. Entonces, $\gamma_X(F_n)$ y $\gamma_X(W_n)$ son:

X	$\gamma_X(F_n)$	$\gamma_X(W_n)$
ID	$\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$	$\frac{n}{2}$ si n es par y $\frac{n+1}{2} + 1$ si $n \geq 7$ es impar
LD	$\lceil \frac{2n}{5} \rceil$	$\lceil \frac{2n}{5} \rceil$
OLD	$4k + r$ para $n = 6k + r$, $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y $4k + 4$ para $n = 6k + 5$	$\lceil \frac{2n}{3} \rceil$
LTD	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + \lceil \frac{n}{4} \rceil$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + \lceil \frac{n}{4} \rceil$

Tabla 3.3: $\gamma_X(F_n)$ y $\gamma_X(W_n)$

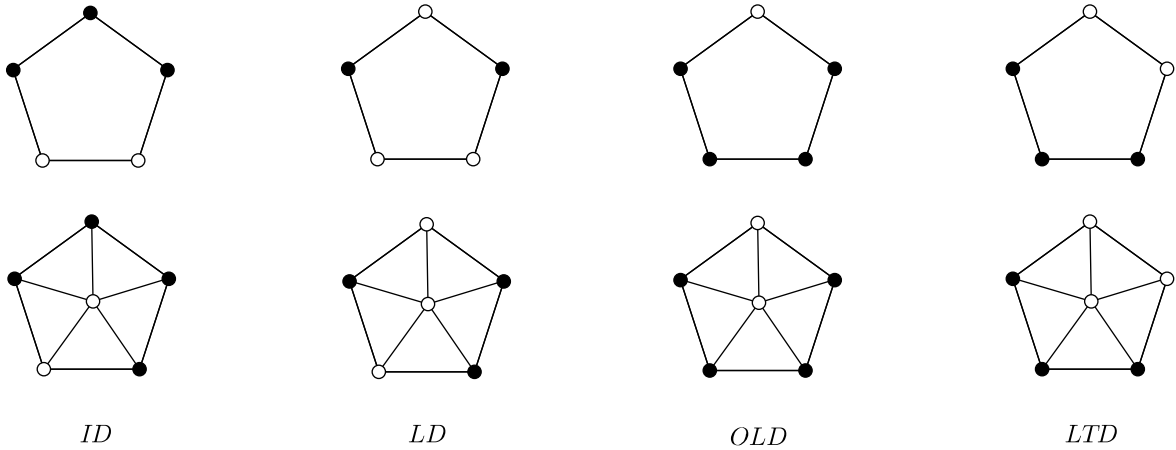


Figura 3.12: X -conjuntos mínimos para C_5 y W_5

Demostración: Sea $n \geq 6$. Al menos un vértice en cada uno de los conjuntos $\{1, 2\}$ y $\{n-1, n\}$ pertenece a un X -conjunto de P_n , pero dichos vértices no pertenecen a una misma vecindad cerrada ya que $dist(2, n-1) \geq 3$. Luego, a partir del Teorema 3.12 tenemos que $\gamma_X(F_n) = \gamma_X(P_n)$.

Por otro lado, también es inmediato observar, en el caso de los ciclos C_n , que no hay un X -conjunto mínimo contenido en $N[i]$ cuando $X = ID$ (o bien en $N(i)$ cuando $X \in \{LD, OLD, LTD\}$) luego, aplicando nuevamente el Teorema 3.12, resulta $\gamma_X(W_n) = \gamma_X(C_n)$. ■

Observemos que combinando los resultados del Corolario 3.14 y las Tablas 3.1 y 3.2, calculamos el valor exacto de un X -conjunto mínimo de un grafo fan o un grafo wheel para $X \in \{ID, LD, OLD, LTD\}$.

3.3. El cuadrado de caminos y ciclos

En la última sección de este capítulo, estudiamos los cuatro problemas para el cuadrado de caminos y ciclos.

Primero observemos que P_3^2 y P_4^2 tienen true twins entonces no existe un código de identificación para dichos grafos. También es fácil comprobar que $\gamma_{ID}(P_5^2) = 4$, $\gamma_{ID}(P_6^2) = \gamma_{ID}(P_7^2) = \gamma_{ID}(P_8^2) = \gamma_{ID}(P_9^2) = 5$ y $\gamma_{ID}(P_{10}^2) = 6$ (ver Figuras 3.13, 3.14 y 3.15).

En [32] se muestra que $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil \leq \gamma_{ID}(P_n^2) \leq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil + 1$ para $n \geq 11$. Además, los mismos autores identifican los valores de $n \geq 11$ para los cuales se alcanzan estas cotas.

Ahora bien, en el caso del LD -problema se puede verificar que $\gamma_{LD}(P_3^2) = \gamma_{LD}(P_4^2) = \gamma_{LD}(P_5^2) = 2$ y $\gamma_{LD}(P_6^2) = 3$. Más aún, en [30] se prueba que si $n \geq 7$, $\gamma_{LD}(P_n^2) = \lceil \frac{n+1}{3} \rceil$.



Figura 3.13: Todos los pares de vértices son true twins en P_3^2 y 2 y 3 son true twins en P_4^2 .

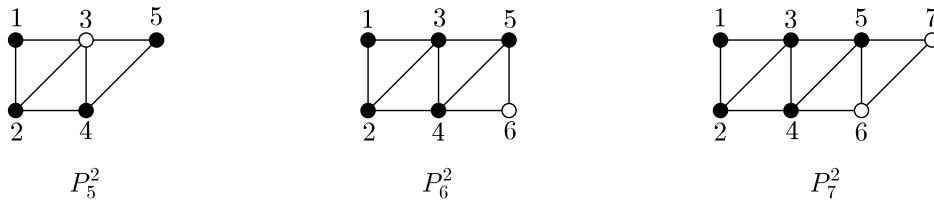


Figura 3.14: Los vértices en negro forman un mínimo ID -conjunto en P_n^2 para $n \in \{5, 6, 7\}$.

Para en LTD -problema se puede observar fácilmente que $\gamma_{LTD}(P_3^2) = 2$, $\gamma_{LTD}(P_4^2) = \gamma_{LTD}(P_5^2) = 2$ y $\gamma_{LTD}(P_6^2) = 3$.

Recordamos las relaciones (1.1) válidas para todo grafo G :

$$\gamma_{LD}(G) \leq \gamma_{LTD}(G) \leq \gamma_{OLD}(G)$$

y

$$\gamma_{LD}(G) \leq \gamma_{ID}(G).$$

Observación 3.15 *Combinando estas relaciones con el resultado mencionado en [30], tenemos que para todo $n \geq 1$ se verifica*

$$\gamma_{LTD}(P_n^2) \geq \gamma_{LD}(P_n^2) = \left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil.$$

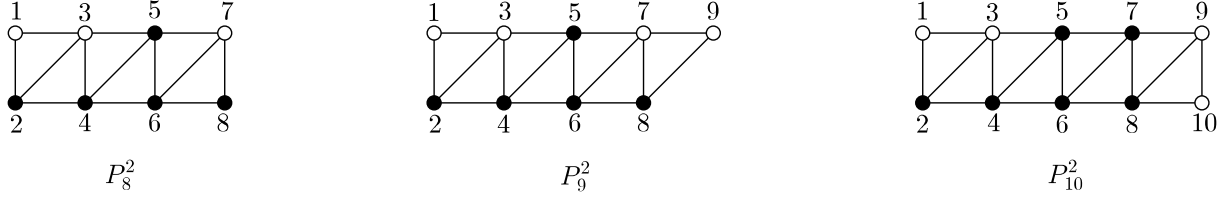


Figura 3.15: Los vértices en negro forman un mínimo ID -conjunto en P_n^2 para $n \in \{8, 9, 10\}$.

Además, obtenemos una cota superior para el LTD -número de P_n^2 :

Teorema 3.16 Sea P_n^2 con $n \geq 7$, luego

$$\left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil \leq \gamma_{LTD}(P_n^2) \leq \left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil + 1.$$

Más aún, la cota inferior se alcanza si $n = 6k$.

Demostración: Sea $n \geq 7$, consideramos $n = 6k + r$ con $k \geq 1$ y $r \in \{0, \dots, 5\}$. Definimos:

- Si $r = 0$,
 $I^* = \{4\} \cup \{6i + 3, 6i + 5 : i \in \{0, \dots, k - 1\}\}.$
- Si $r = 1$,
 $I^* = \{4, n\} \cup \{6i + 3, 6i + 5 : i \in \{0, \dots, k - 1\}\}.$
- Si $r = 2$,
 $I^* = \{4, n - 1\} \cup \{6i + 3, 6i + 5 : i \in \{0, \dots, k - 1\}\}.$
- Si $r = 3$,
 $I^* = \{4, n - 1, n\} \cup \{6i + 3, 6i + 5 : i \in \{0, \dots, k - 1\}\}.$
- Si $r = 4$,
 $I^* = \{4, n - 3, n - 1\} \cup \{6i + 3, 6i + 5 : i \in \{0, \dots, k - 1\}\}.$
- Si $r = 5$,
 $I^* = \{4, n - 2, n\} \cup \{6i + 3, 6i + 5 : i \in \{0, \dots, k - 1\}\}.$

Ahora bien,

- Si $r = 0$,
 - $N(1) \cap I^* = \{3\}$.
 - $N(2) \cap I^* = \{3, 4\}$.
 - $N(3) \cap I^* = \{4, 5\}$.
 - $N(4) \cap I^* = \{3, 5\}$.
 - $N(5) \cap I^* = \{3, 4\}$.
 - $N(6) \cap I^* = \{4, 5\}$.
 - $N(i) \cap I^* = \{i - 2, i + 2\}$ con $i = 6\ell + 1$, $\ell \in \{1, \dots, k - 1\}$.
 - $N(i) \cap I^* = \{i + 1\}$ con $i = 6\ell + 2$, $\ell \in \{1, \dots, k - 1\}$.
 - $N(i) \cap I^* = \{i + 2\}$ con $i = 6\ell + 3$, $\ell \in \{1, \dots, k - 1\}$.
 - $N(i) \cap I^* = \{i - 1, i + 1\}$ con $i = 6\ell + 4$, $\ell \in \{1, \dots, k - 1\}$.
 - $N(i) \cap I^* = \{i - 2\}$ con $i = 6\ell + 5$, $\ell \in \{1, \dots, k - 1\}$.
 - $N(i) \cap I^* = \{i - 2, i - 1\}$ con $i = 6\ell + 6$, $\ell \in \{1, \dots, k - 1\}$.
 - $N(6k - 1) \cap I^* = \{6k - 3\}$.
 - $N(6k) \cap I^* = \{6k - 1\}$.

En este caso podemos concluir que todos los vértices de P_n^2 están dominados-totalmente por I^* y que los vértices en $V(P_n^2) - I^*$ están separados-totalmente por I^* . Luego I^* es un *LT**D*-conjunto de P_n^2 . Además, como $|I^*| = \lceil \frac{n+1}{3} \rceil$, resulta $\gamma_{LT D}(P_n^2) = \lceil \frac{n+1}{3} \rceil$.

Analizamos ahora los restantes casos. De manera análoga al caso $r = 0$, se puede verificar que si $r \in \{1, \dots, 5\}$ e $i \in \{1, \dots, 6k - 2\}$ los vértices de P_n^2 están dominados-totalmente por I^* y los vértices en $V(P_n^2) - I^*$ están separados-totalmente por el correspondiente conjunto I^* . Además:

- | | |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> ■ Si $r = 1$, <ul style="list-style-type: none"> $N(6k - 1) \cap I^* = \{6k - 3, 6k + 1\}$. $N(6k) \cap I^* = \{6k - 1, 6k + 1\}$. $N(6k + 1) \cap I^* = \{6k - 1\}$. ■ Si $r = 2$, <ul style="list-style-type: none"> $N(6k - 1) \cap I^* = \{6k - 3, 6k + 1\}$. $N(6k) \cap I^* = \{6k - 1, 6k + 1\}$. $N(6k + 1) \cap I^* = \{6k - 1\}$. $N(6k + 2) \cap I^* = \{6k + 1\}$. | <ul style="list-style-type: none"> ■ Si $r = 3$, <ul style="list-style-type: none"> $N(6k - 1) \cap I^* = \{6k - 3\}$. $N(6k) \cap I^* = \{6k - 1, 6k + 2\}$. $N(6k + 1) \cap I^* = \{6k - 1, 6k + 2, 6k + 3\}$. $N(6k + 2) \cap I^* = \{6k + 3\}$. $N(6k + 3) \cap I^* = \{6k + 2\}$. ■ Si $r = 4$, <ul style="list-style-type: none"> $N(6k - 1) \cap I^* = \{6k - 3, 6k + 1\}$. $N(6k) \cap I^* = \{6k - 1, 6k + 1\}$. |
|---|---|

$$N(6k+1) \cap I^* = \{6k-1, 6k+3\}.$$

$$N(6k+2) \cap I^* = \{6k+1, 6k+3\}.$$

$$N(6k+3) \cap I^* = \{6k+1\}.$$

$$N(6k+4) \cap I^* = \{6k+3\}.$$

- Si $r = 5$,

$$N(6k-1) \cap I^* = \{6k-3\}.$$

$$N(6k) \cap I^* = \{6k-1\}.$$

$$N(6k+1) \cap I^* = \{6k-1, 6k+3\}.$$

$$N(6k+2) \cap I^* = \{6k+3\}.$$

$$N(6k+3) \cap I^* = \{6k+5\}.$$

$$N(6k+4) \cap I^* = \{6k+3, 6k+5\}.$$

$$N(6k+5) \cap I^* = \{6k+3\}.$$

Por lo tanto, en cada caso, I^* resulta un *LTD*-conjunto. Además, se puede observar a partir de la definición de I^* , que $|I^*| = \left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil + 1$ y así, podemos concluir que

$$\gamma_{LTD}(P_n^2) \leq \left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil + 1.$$

■

Por otro lado, no es difícil comprobar que no existe un *OLD*-conjunto para P_4^2 ya que dicho grafo tiene false twins. Además, $\gamma_{OLD}(P_3^2) = 2$ y $\gamma_{OLD}(P_n^2) = 4$ cuando $n \in \{5, \dots, 9\}$.

Teorema 3.17 Sea P_n^2 con $n \geq 10$, $n = 10k + r$ y $r \in \{0, \dots, 9\}$ entonces

$$\gamma_{OLD}(P_n^2) \leq \begin{cases} 4k+1 & \text{si } r \in \{0, 1\} \\ 4k+2 & \text{si } r \in \{2, 3\} \\ 4k+3 & \text{si } r \in \{4, 5\} \\ 4k+4 & \text{si } r \in \{6, 7, 8, 9\} \end{cases}$$

Demostración: Sea $n = 10k + r$ con $k \geq 1$ y $r \in \{0, \dots, 9\}$. Definimos los siguientes conjuntos:

- Si $r = 0$,

$$I^* = \{2i : i \in \{1, \dots, n\}\} - \{10i : i \in \{1, \dots, k-1\}\}.$$

- Si $r \in \{1, \dots, 7\}$,

$$I^* = \{2i : i \in \{1, \dots, n\}\} - \{10i : i \in \{1, \dots, k-1\}\}.$$

- Si $r \in \{8, 9\}$,

$$I^* = \{2i : i \in \{1, \dots, n\}\} - \{10i : i \in \{1, \dots, k\}\}.$$

Analizamos primero qué ocurre cuando $r = 0$.

- Si $r = 0$,
 - $N(1) \cap I^* = \{2\}$.
 - $N(2) \cap I^* = \{4\}$.
 - $N(i) \cap I^* = \{i - 1, i + 1\}$ con $i = 2m + 1$, $i \in \{3, \dots, n - 1\}$ e $i \neq 10\ell - 1, 10\ell + 1$, $\ell \in \{1, \dots, k - 1\}$.
 - $N(i) \cap I^* = \{i - 2, i + 2\}$ con $i = 2m$, $i \in \{4, \dots, n - 2\}$ e $i \neq 10\ell - 2, 10\ell + 2$, $\ell \in \{1, \dots, k - 1\}$.
 - $N(i) \cap I^* = \{i - 1\}$ con $i = 10\ell - 1$, $\ell \in \{1, \dots, k - 1\}$.
 - $N(i) \cap I^* = \{i + 1\}$ con $i = 10\ell + 1$, $\ell \in \{1, \dots, k - 1\}$.
 - $N(i) \cap I^* = \{i - 2\}$ con $i = 10\ell - 2$, $\ell \in \{1, \dots, k - 1\}$.
 - $N(i) \cap I^* = \{i + 2\}$ con $i = 10\ell + 2$, $\ell \in \{1, \dots, k - 1\}$.
 - $N(10k) \cap I^* = \{10k - 2\}$.

Podemos concluir que todos los vértices de P_n^2 están dominados-totalmente y separados-totalmente por I^* . Por lo tanto I^* resulta un *OLD*-conjunto de P_n^2 y además, $\gamma_{OLD}(P_n^2) \leq 4k + 1$.

A continuación estudiamos los restantes casos. Claramente se verifica que $|I^*| = 4k + 1 + \lfloor \frac{r}{2} \rfloor$ si $r \in \{1, \dots, 7\}$ y $|I^*| = 4k + \lfloor \frac{r}{2} \rfloor$ si $r \in \{8, 9\}$. Entonces, vamos a probar que I^* es un *OLD*-conjunto cuando $r \in \{1, \dots, 9\}$ y así queda demostrado el teorema.

De manera análoga al caso $r = 0$, se puede comprobar que si $r \in \{1, \dots, 9\}$ e $i \in \{1, \dots, 10k - 1\}$ los vértices de P_n^2 están dominados-totalmente y separados-totalmente por el correspondiente conjunto I^* . Además:

- Si $r = 1$,
 - $N(10k) \cap I^* = \{10k - 2\}$.
 - $N(10k + 1) \cap I^* = \{10k\}$.
- Si $r = 2$,
 - $N(10k) \cap I^* = \{10k - 2, 10k + 2\}$.
 - $N(10k + 1) \cap I^* = \{10k, 10k + 2\}$.
 - $N(10k + 2) \cap I^* = \{10k\}$.
- Si $r = 3$,
 - $N(10k) \cap I^* = \{10k - 2, 10k + 2\}$.
 - $N(10k + 1) \cap I^* = \{10k, 10k + 2\}$.
 - $N(10k + 2) \cap I^* = \{10k\}$.
- Si $r = 4$,
 - $N(10k + 3) \cap I^* = \{10k + 2\}$.
 - $N(10k) \cap I^* = \{10k - 2, 10k + 2\}$.
 - $N(10k + 1) \cap I^* = \{10k, 10k + 2\}$.
 - $N(10k + 2) \cap I^* = \{10k, 10k + 4\}$.
 - $N(10k + 3) \cap I^* = \{10k + 2, 10k + 4\}$.
 - $N(10k + 4) \cap I^* = \{10k + 2\}$.
- Si $r = 5$,
 - $N(10k) \cap I^* = \{10k - 2, 10k + 2\}$.
 - $N(10k + 1) \cap I^* = \{10k, 10k + 2\}$.
 - $N(10k + 2) \cap I^* = \{10k, 10k + 4\}$.

$$\begin{array}{ll}
 N(10k+3) \cap I^* = \{10k+2, 10k+4\}. & N(10k+6) \cap I^* = \{10k+4\}. \\
 N(10k+4) \cap I^* = \{10k+2\}. & \blacksquare \text{ Si } r = 7, \\
 N(10k+5) \cap I^* = \{10k+4\}. & N(10k) \cap I^* = \{10k-2, 10k+2\}. \\
 \blacksquare \text{ Si } r = 6, & N(10k+1) \cap I^* = \{10k, 10k+2\}. \\
 N(10k) \cap I^* = \{10k-2, 10k+2\}. & N(10k+2) \cap I^* = \{10k, 10k+4\}. \\
 N(10k+1) \cap I^* = \{10k, 10k+2\}. & N(10k+3) \cap I^* = \{10k+2, 10k+4\}. \\
 N(10k+2) \cap I^* = \{10k, 10k+4\}. & N(10k+4) \cap I^* = \{10k+2, 10k+6\}. \\
 N(10k+3) \cap I^* = \{10k+2, 10k+4\}. & N(10k+5) \cap I^* = \{10k+4, 10k+6\}. \\
 N(10k+4) \cap I^* = \{10k+2, 10k+6\}. & N(10k+6) \cap I^* = \{10k+4\}. \\
 N(10k+5) \cap I^* = \{10k+4, 10k+6\}. & N(10k+7) \cap I^* = \{10k+6\}.
 \end{array}$$

A diferencia de los casos anteriores:

- Si $r = 8$ o $r = 9$,

$$N(i) \cap I^* = \{i-2\} \text{ con } i = 10\ell - 2, \ell \in \{1, \dots, k\}.$$

$$N(i) \cap I^* = \{i+2\} \text{ con } i = 10\ell + 2, \ell \in \{1, \dots, k\}.$$

Entonces para $i \in \{1, \dots, 10k-3\}$ los vértices de P_n^2 están dominados-totalmente y separados-totalmente por el correspondiente I^* , la prueba de lo enunciado es análoga al caso $r = 0$. Ahora bien, para $i \geq 10k-2$ se puede observar que:

$$\begin{array}{ll}
 N(10k-2) \cap I^* = \{10k-4\}. & N(10k+4) \cap I^* = \{10k+2, 10k+6\}. \\
 N(10k-1) \cap I^* = \{10k-2\}. & N(10k+5) \cap I^* = \{10k+4, 10k+6\}. \\
 N(10k) \cap I^* = \{10k-2, 10k+2\}. & N(10k+6) \cap I^* = \{10k+4, 10k+8\}. \\
 N(10k+1) \cap I^* = \{10k+2\}. & N(10k+7) \cap I^* = \{10k+6, 10k+8\}. \\
 N(10k+2) \cap I^* = \{10k+4\}. & N(10k+8) \cap I^* = \{10k+6\}. \\
 N(10k+3) \cap I^* = \{10k+2, 10k+4\}. & N(10k+9) \cap I^* = \{10k+8\}.
 \end{array}$$

Por lo tanto en cada caso, I^* resulta un *OLD*-conjunto. ■

Se puede observar que la cota obtenida en el Teorema 3.17 es ajustada ya que por ejemplo es alcanzada por $\gamma_{OLD}(P_{10}^2)$ y $\gamma_{OLD}(P_{11}^2)$ como se muestra en la Figura 3.16.

De manera similar, estudiamos los cuadrados de los ciclos.

Notemos que C_n^2 es igual a una clique cuando $n \leq 5$, luego no existe un *ID*-conjunto en estos casos y $\gamma_X(C_n^2)$ es conocido para $X \in \{LD, OLD, LTD\}$ y $n \leq 5$.

Además, $\gamma_{ID}(C_n^2) = \frac{n}{2}$ si n es par y, si n es impar, $\gamma_{ID}(C_n^2) = \frac{n+1}{2}$ si $n = 5k, 5k+2, 5k+3$ y $\gamma_{ID}(C_n^2) = \frac{n+1}{2} + 1$ si $n = 5k+1, 5k+4$ (ver [16]).

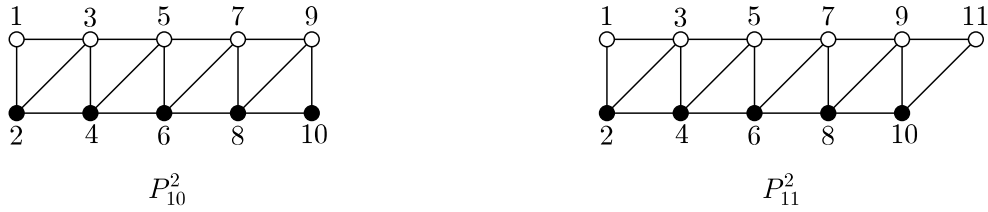


Figura 3.16: Los vértices en negro forman un mínimo *OLD*-conjunto en P_n^2 para $n \in \{10, 11\}$.

Por otro lado, si $n = 6k + r$ con $k \geq 1$ y $r \in \{0, \dots, 5\}$, $\gamma_{LD}(C_n^2) = \lceil \frac{n}{3} \rceil + 1$ si $r = 3$ y $\gamma_{LD}(C_n^2) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ en otro caso (ver [16]). Para analizar el *LTD*-número, observemos primero que $\gamma_{LTD}(C_6^2) = 3$ (ver Figura 3.17).

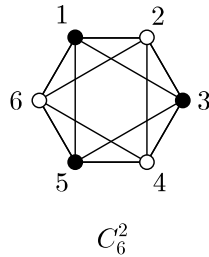


Figura 3.17: Los vértices en negro forman un mínimo *LTD*-conjunto en C_6^2 .

Para $n \geq 7$, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.18 Para C_n^2 con $n \geq 7$, tenemos que

$$\lceil \frac{n}{3} \rceil \leq \gamma_{LTD}(C_n^2) \leq \lceil \frac{n}{3} \rceil + 1.$$

Más aún, si $n = 6k + r$, $k \geq 1$ y $r \in \{0, 1, 2, 4\}$, $\gamma_{LTD}(C_n^2) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Demostración: Sea $n = 6k + r$, $n \geq 7$ con $k \geq 1$ y $r \in \{0, \dots, 5\}$. Definimos,

- Si $r = 0$,
 $I^* = \{6i + 3, 6i + 5 : i \in \{0, \dots, k - 1\}\}.$
- Si $r \in \{1, 2\}$,
 $I^* = \{6i + 3, 6i + 5 : i \in \{0, \dots, k - 1\}\} \cup \{n - 1\}.$

- Si $r = 3$,
 $I^* = \{6i + 3, 6i + 5 : i \in \{0, \dots, k - 1\}\} \cup \{n - 1, n\}$.
- Si $r = 4$,
 $I^* = \{6i + 3, 6i + 5 : i \in \{0, \dots, k - 1\}\} \cup \{n - 3, n - 1\}$.
- Si $r = 5$,
 $I^* = \{6i + 3, 6i + 5 : i \in \{0, \dots, k - 1\}\} \cup \{4, n - 2, n\}$.

Se puede observar que $|I^*| = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ si $r \in \{0, 1, 2, 4\}$ y $|I^*| = \lceil \frac{n}{3} \rceil + 1$ si $r \in \{3, 5\}$. Teniendo en cuenta la suma módulo n , vamos a probar que en cada caso, los correspondientes conjuntos I^* son un *LTD*-conjunto para C_n^2 .

- Si $r = 0$,
 $N(i) \cap I^* = \{i - 2, i + 2\}$ con $i = 6\ell + 1$, $\ell \in \{0, \dots, k - 1\}$.
 $N(i) \cap I^* = \{i + 1\}$ con $i = 6\ell + 2$, $\ell \in \{0, \dots, k - 1\}$.
 $N(i) \cap I^* = \{i + 2\}$ con $i = 6\ell + 3$, $\ell \in \{0, \dots, k - 1\}$.
 $N(i) \cap I^* = \{i - 1, i + 1\}$ con $i = 6\ell + 4$, $\ell \in \{0, \dots, k - 1\}$.
 $N(i) \cap I^* = \{i - 2\}$ con $i = 6\ell + 5$, $\ell \in \{0, \dots, k - 1\}$.
 $N(i) \cap I^* = \{i - 1\}$ con $i = 6\ell$, $\ell \in \{1, \dots, k\}$.

Para el caso $r = 0$, podemos concluir que todos los vértices de C_n^2 están dominados-totalmente y todos los vértices en $V(C_n^2) - I^*$ están separados-totalmente por I^* . Además, se prueba de manera análoga al caso anterior que, si $r \in \{1, \dots, 4\}$ e $i \in \{3, \dots, 6k - 3\}$ los vértices de C_n^2 están dominados-totalmente y los vértices en $V(C_n^2) - I^*$ están separados totalmente por el correspondiente conjunto I^* definido en cada caso.

Además, podemos observar que:

- | | |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> ■ Si $r = 1$,
 $N(1) \cap I^* = \{3, 6k\}$.
 $N(2) \cap I^* = \{3\}$.
 $N(6k - 2) \cap I^* = \{6k - 3, 6k - 1, 6k\}$.
 $N(6k - 1) \cap I^* = \{6k - 3, 6k\}$.
 $N(6k) \cap I^* = \{6k - 1\}$.
 $N(6k + 1) \cap I^* = \{6k, 6k - 1\}$. | <ul style="list-style-type: none"> $N(1) \cap I^* = \{3, 6k + 1\}$.
 $N(2) \cap I^* = \{3\}$.
 $N(6k - 2) \cap I^* = \{6k - 3, 6k - 1\}$.
 $N(6k - 1) \cap I^* = \{6k - 3, 6k + 1\}$.
 $N(6k) \cap I^* = \{6k - 1, 6k + 1\}$.
 $N(6k + 1) \cap I^* = \{6k - 1\}$.
 $N(6k + 2) \cap I^* = \{6k + 1\}$. |
| <ul style="list-style-type: none"> ■ Si $r = 2$, | <ul style="list-style-type: none"> ■ Si $r = 3$, |

$$N(1) \cap I^* = \{3, 6k + 2, 6k + 3\}.$$

$$N(2) \cap I^* = \{3, 6k + 3\}.$$

$$N(6k - 2) \cap I^* = \{6k - 3, 6k - 1\}.$$

$$N(6k - 1) \cap I^* = \{6k - 3\}.$$

$$N(6k) \cap I^* = \{6k - 1, 6k + 2\}.$$

$$N(6k + 1) \cap I^* = \{6k - 1, 6k + 2, 6k + 3\}.$$

$$N(6k + 2) \cap I^* = \{6k + 3\}.$$

$$N(6k + 3) \cap I^* = \{6k + 2\}.$$

- Si $r = 4$,

$$N(1) \cap I^* = \{3, 6k + 3\}.$$

$$N(2) \cap I^* = \{3\}.$$

$$N(6k - 2) \cap I^* = \{6k - 3, 6k - 1\}.$$

$$N(6k - 1) \cap I^* = \{6k - 3, 6k + 1\}.$$

$$N(6k) \cap I^* = \{6k - 1, 6k + 1\}.$$

$$N(6k + 1) \cap I^* = \{6k - 1, 6k + 3\}.$$

$$N(6k + 2) \cap I^* = \{6k + 1, 6k + 3\}.$$

$$N(6k + 3) \cap I^* = \{6k + 1\}.$$

$$N(6k + 4) \cap I^* = \{6k + 3\}.$$

Así resulta en cada caso, que el correspondiente I^* es un LTD -conjunto.

Por otro lado, si $r = 5$ e $i \in \{7, \dots, 6k - 3\}$, de manera análoga a los casos anteriores tenemos que los vértices de C_n^2 están dominados-totalmente y los vértices en $V(C_n^2) - I^*$ están separados-totalmente por I^* , además:

- Si $r = 5$,

$$N(1) \cap I^* = \{3, 6k + 5\}.$$

$$N(2) \cap I^* = \{3, 4, 6k + 5\}.$$

$$N(3) \cap I^* = \{4, 5\}.$$

$$N(4) \cap I^* = \{3, 5\}.$$

$$N(5) \cap I^* = \{3, 4\}.$$

$$N(6) \cap I^* = \{5\}.$$

$$N(6k - 2) \cap I^* = \{6k - 3, 6k - 1\}.$$

$$N(6k - 1) \cap I^* = \{6k - 3\}.$$

$$N(6k) \cap I^* = \{6k - 1\}.$$

$$N(6k + 1) \cap I^* = \{6k - 1, 6k + 3\}.$$

$$N(6k + 2) \cap I^* = \{6k + 3\}.$$

$$N(6k + 3) \cap I^* = \{6k + 5\}.$$

$$N(6k + 4) \cap I^* = \{6k + 3, 6k + 5\}.$$

$$N(6k + 5) \cap I^* = \{6k + 3\}.$$

Por lo tanto, en cada caso, I^* resulta un LTD -conjunto de C_n^2 . ■

Finalmente, C_6^2 tiene false twins y entonces no admite un OLD -conjunto. Además, es fácil verificar que $\gamma_{OLD}(C_7^2) = \gamma_{OLD}(C_8^2) = 4$. Para $n \geq 9$, presentamos el siguiente resultado:

Teorema 3.19 Para C_n^2 con $n \geq 9$ tenemos que:

- Si n es impar,

$$\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \leq \gamma_{OLD}(C_n^2) \leq \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor + 1.$$

- Si n es par,

$$\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \leq \gamma_{OLD}(C_n^2) \leq \frac{n-2}{2}.$$

Demostración: A partir de la relación $\gamma_{LTD}(C_n^2) \leq \gamma_{OLD}(C_n^2)$ dada en (1.1) y de la cota inferior para $\gamma_{LTD}(C_n^2)$ dada en el Teorema 3.18, deducimos la cota inferior para $\gamma_{OLD}(C_n^2)$.

Vamos a probar que $\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor + 1$ es cota superior de $\gamma_{OLD}(C_n^2)$ si n es impar. Definimos:

- Si $n = 2k + 1$,

$$I^* = \{2i - 1 : i \in \{1, \dots, k - 1\}\} \cup \{2k - 2\}.$$

Considerando la suma módulo n , podemos observar que:

$$N(1) \cap I^* = \{3\}.$$

$$N(i) \cap I^* = \{i - 2, i + 2\} \text{ con } i = 2\ell + 1, \ell \in \{1, \dots, k - 3\}.$$

$$N(i) \cap I^* = \{i - 1, i + 1\} \text{ con } i = 2\ell, \ell \in \{1, \dots, k - 3\}.$$

$$N(2k - 4) \cap I^* = \{2k - 5, 2k - 3, 2k - 2\}.$$

$$N(2k - 3) \cap I^* = \{2k - 5, 2k - 2\}.$$

$$N(2k - 2) \cap I^* = \{2k - 3\}.$$

$$N(2k - 1) \cap I^* = \{2k - 3, 2k - 2\}.$$

$$N(2k) \cap I^* = \{1, 2k - 2\}.$$

$$N(2k + 1) \cap I^* = \{1\}.$$

Claramente, todos los vértices de C_n^2 están dominados-totalmente y separados-totalmente por el conjunto I^* . Por lo tanto, en este caso, I^* es un *OLD*-conjunto. Como $|I^*| = \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor + 1$, resulta $\gamma_{OLD}(C_n^2) \leq \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor + 1$.

Veamos ahora que si n es par, $\frac{n-2}{2}$ es cota superior de $\gamma_{OLD}(C_n^2)$. Para ello, definimos:

- Si $n = 2k + 2$,

$$I^* = \{2i - 1 : i \in \{1, \dots, k\}\}.$$

Nuevamente considerando la suma módulo n tenemos que:

$$N(1) \cap I^* = \{3\}.$$

$$N(i) \cap I^* = \{i - 2, i + 2\} \text{ con } i = 2\ell + 1, \ell \in \{1, \dots, k - 2\}.$$

$$N(i) \cap I^* = \{i - 1, i + 1\} \text{ con } i = 2\ell, \ell \in \{1, \dots, k - 1\}.$$

$$N(2k - 1) \cap I^* = \{2k - 3\}.$$

$$N(2k) \cap I^* = \{2k - 1\}.$$

$$N(2k + 1) \cap I^* = \{1, 2k - 1\}.$$

$$N(2k + 2) \cap I^* = \{1\}.$$

Luego el conjunto I^* asociado al caso $n = 2k + 2$, también resulta un *OLD*-conjunto de C_n^2 . Como $|I^*| = \frac{n-2}{2}$ se tiene que $\gamma_{OLD}(C_n^2) \leq \frac{n-2}{2}$. ■

Podemos observar que la cota obtenida en el Teorema 3.19 es ajustada ya que por ejemplo es alcanzada por $\gamma_{OLD}(C_{10}^2)$ y $\gamma_{OLD}(C_{11}^2)$ como se muestra en la Figura 3.18.

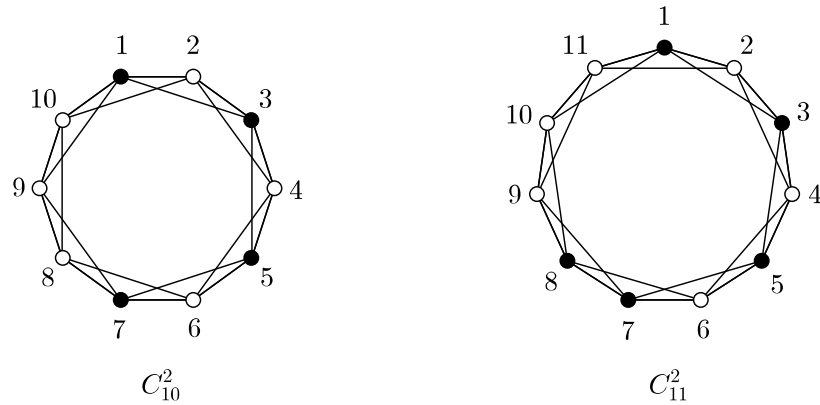


Figura 3.18: Los vértices en negro forman un mínimo *OLD*-conjunto en C_n^2 para $n \in \{10, 11\}$.

Capítulo 4

Algoritmos lineales

Resumen

En este capítulo presentamos algoritmos que determinan en tiempo lineal la cardinalidad de un mínimo código de identificación, conjunto de localización-dominación, conjunto de localización-dominación abierta y conjunto de localización-dominación total en grafos block. De este modo, proporcionamos una subclase de grafos cordales para los cuales se pueden resolver los cuatro problemas en tiempo lineal.

En este capítulo vamos a presentar algoritmos lineales para determinar los X -números con $X \in \{ID, LD, OLD, LTD\}$ en grafos block (ver Figura 4.1).

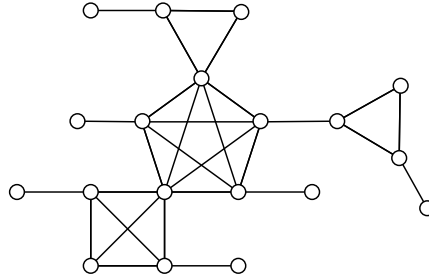


Figura 4.1: Grafo block.

En particular los *árboles* son grafos block con tamaño de clique 2 y siempre admiten un código de identificación a menos que se trate de la clique de tamaño 2. Vamos a presentar algoritmos lineales para calcular $\gamma_X(B)$ para B un grafo block y $X \in \{ID, LD, OLD, LTD\}$ que muestran una generalización del algoritmo presentado por Auger en [5] que resuelve el ID -problema en árboles. Además, nuestros algoritmos tienen en cuenta que el grafo block B , dado como entrada, podría no admitir un ID -conjunto o un OLD -conjunto en el caso de tener true twins o false twins respectivamente.

4.1. Definiciones básicas y notación

Con el fin de dar los algoritmos lineales que computan los X -números con $X \in \{ID, LD, OLD, LTD\}$ de un grafo block, consideramos la notación utilizada en [5] adaptada para los problemas mencionados.

Sea $G = (V, E)$ un grafo y $v \in V$. Diremos que $C \subseteq V$ es un v -almost X -conjunto de G donde $X \in \{ID, LD, OLD, LTD\}$, si el conjunto C es un X -conjunto para el subgrafo inducido $G - \{v\}$ de G . Más aún, decimos que C satisface la propiedad:

- ID (LD , OLD , LTD) si C es un ID (LD , OLD , LTD resp.)-conjunto en G ,
- CO si $v \in C$,
- ADJ si v tiene un vecino en C ,
- FN si v tiene un vecino w tal que $N[w] \cap C = \{v\}$,
- OFN si v tiene un vecino w tal que $N(w) \cap C = \{v\}$,
- \bar{P} si C no satisface la propiedad $P \in \{ID, LD, OLD, LTD, CO, ADJ, FN, OFN\}$.

En las propiedades FN y OFN el vértice w es llamado el *vértice favorecido* por v . Sea $\mathcal{P} = \{ID, LD, OLD, LTD, CO, ADJ, FN, OFN, \overline{ID}, \overline{LD}, \overline{OLD}, \overline{LTD}, \overline{CO}, \overline{ADJ}, \overline{FN}, \overline{OFN}\}$ y sea $X \in \{ID, LD, OLD, LTD\}$. Denotamos por $\gamma_{P_1, \dots, P_k}(v, G)$ a la función que retorna el mínimo tamaño de un v -almost X -conjunto en G que satisface las propiedades $\{P_1, \dots, P_k\} \subseteq \mathcal{P}$ o ∞ si tal conjunto no existe.

Observamos que existen relaciones de dependencia entre estas propiedades. De hecho, si un v -almost X -conjunto C satisface FN u OFN luego satisface CO . Si C satisface ID o LD entonces C satisface CO o ADJ . Si C satisface ID , CO y FN luego debe satisfacer ADJ . Finalmente, si C satisface OLD o LTD entonces debe satisfacer ADJ . Como consecuencia tenemos la siguiente:

Observación 4.1 *No existe ningún v -almost X -conjunto en G que satisface el siguiente conjunto de propiedades:*

- | | |
|---|---|
| ▪ ID, CO, \overline{ADJ} y FN , | ▪ $OLD, \overline{CO}, \overline{ADJ}$ y OFN , |
| ▪ ID, \overline{CO}, ADJ y FN , | ▪ $OLD, \overline{CO}, \overline{ADJ}$ y \overline{OFN} , |
| ▪ $ID, \overline{CO}, \overline{ADJ}$ y FN , | ▪ OLD, \overline{CO}, ADJ y OFN , |
| ▪ $ID, \overline{CO}, \overline{ADJ}$ y \overline{FN} , | ▪ LTD, CO, \overline{ADJ} y OFN , |
| ▪ LD, \overline{CO}, ADJ y FN , | ▪ LTD, CO, \overline{ADJ} y \overline{OFN} , |
| ▪ $LD, \overline{CO}, \overline{ADJ}$ y FN , | ▪ $LTD, \overline{CO}, \overline{ADJ}$ y OFN , |
| ▪ $LD, \overline{CO}, \overline{ADJ}$ y \overline{FN} , | ▪ $LTD, \overline{CO}, \overline{ADJ}$ y \overline{OFN} , |
| ▪ OLD, CO, \overline{ADJ} y OFN , | ▪ LTD, \overline{CO}, ADJ y OFN . |
| ▪ OLD, CO, \overline{ADJ} y \overline{OFN} , | |

Nota 4.2 *En lo que sigue, para simplificar la escritura, dados $C \subseteq V$ y $P \in \mathcal{P}$ diremos que “ C es P ” en lugar de “ C satisface P ”.*

Sea $X \in \{ID, LD, OLD, LTD\}$. Si $v \in V(G)$, denotamos por $\gamma_X(v, G)$ el tamaño de un mínimo v -almost X -conjunto. Además con $\gamma_{P_1, P_2, \dots, P_r}(v, G)$ denotamos el tamaño de un mínimo v -almost conjunto que satisface las propiedades P_1, P_2, \dots, P_r . A veces es necesario señalar el problema particular $X \in \{ID, LD, OLD, LTD\}$ cuando calculamos $\gamma_{P_1, P_2, \dots, P_r}(v, G)$, en ese caso utilizamos la notación $\gamma_{(P_1, P_2, \dots, P_r)_X}(v, G)$.

A partir de la Observación 4.1 sigue que

$$\gamma_{ID}(v, G) = \min \begin{cases} \gamma_{ID, CO, ADJ, FN}(v, G), \gamma_{ID, CO, ADJ, \overline{FN}}(v, G) \\ \gamma_{ID, CO, \overline{ADJ}}(v, G), \gamma_{ID, \overline{CO}, ADJ}(v, G) \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\gamma_{LD}(v, G) = \min\{\gamma_{LD,CO}(v, G), \gamma_{LD,\overline{CO}}(v, G)\} \quad (4.2)$$

$$\gamma_{OLD}(v, G) = \min\{\gamma_{OLD,CO,OFN}(v, G), \gamma_{OLD,CO,\overline{OFN}}(v, G), \gamma_{OLD,\overline{CO}}(v, G)\} \quad (4.3)$$

$$\gamma_{LTD}(v, G) = \min\{\gamma_{LTD,CO,OFN}(v, G), \gamma_{LTD,CO,\overline{OFN}}(v, G), \gamma_{LTD,\overline{CO}}(v, G)\} \quad (4.4)$$

Si B es un grafo block, $v_1 \in V(B)$ y K es una clique maximal con $V(K) = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ luego borrando todas las aristas en K obtenemos k subgrafos block, digamos B_1, B_2, \dots, B_k , que contienen a v_1, v_2, \dots, v_k respectivamente (ver Fig. 4.2).

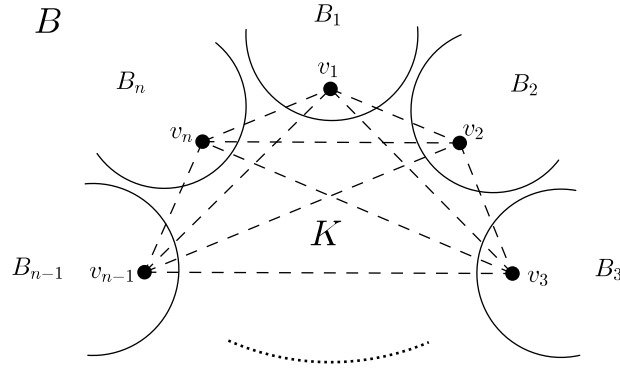


Figura 4.2: B_i subgrafos block para $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

En adelante, es conveniente utilizar la siguiente notación:

Notación 4.3 Sea B un grafo block, v_1 un vértice elegido en $V(B)$ y K una clique maximal con vértices v_1, \dots, v_k . Denotamos por B_1, \dots, B_k los grafos block, que contienen a v_1, \dots, v_k respectivamente, obtenidos a partir de B luego de eliminar las aristas en K .

Observación 4.4 Sea $X \in \{ID, LD, OLD, LTD\}$, B un grafo block y $V(K) = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$. Si C es un v_1 -almost X -conjunto en B luego $C_i = C \cap V(B_i)$ es un v_i -almost X -conjunto en B_i para todo $i \in \{1, \dots, k\}$.

De aquí en adelante, cuando sea claro con qué X -problema estamos trabajando, diremos que un vértice está *dominado*, si está dominado o dominado-totalmente. De la misma forma diremos que dos vértices están *separados* si están separados o separados-totalmente.

Lema 4.5 Sea $X \in \{ID, LD, OLD, LTD\}$, B un grafo block y $V(K) = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$. Si C_i es un v_i -almost X -conjunto en B_i para $i \in \{1, \dots, k\}$ y $C = \bigcup_{i=1}^k C_i$, luego los vértices en $V' = \bigcup_{i=1}^k (V(B_i) - \{v_i\})$ están dominados (dominados-totalmente) y separados (separados-totalmente) por C .

Demostración: Observemos que u, v están trivialmente separados (separados-totalmente) si $dist(u, v) > 2$. Consideramos $u, v \in V'$ tal que $dist(u, v) \leq 2$. Luego $u, v \in V(B_i) - \{v_i\}$ para algún $i \in \{1, \dots, k\}$. Como C_i es un v_i -almost X -conjunto en B_i para todo $i \in \{1, \dots, k\}$, los vértices en V' están dominados (dominados-totalmente) y separados (separados-totalmente) por C . ■

Lema 4.6 Sea $X \in \{ID, LD, OLD, LTD\}$, B un grafo block y $V(K) = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$. Si C es un v_1 -almost X -conjunto en B y $C_i = C \cap V(B_i)$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$ entonces,

- (i) si $X = ID$ y C satisface ID , existe a lo sumo un $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que C_i satisface \overline{ADJ} ,
- (ii) si $X = LD$ (resp. OLD, LTD) y C satisface LD (resp. OLD, LTD), existe a lo sumo un $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que C_i satisface \overline{ADJ} y \overline{CO} ,
- (iii) si $X = ID$, existe a lo sumo un $i \in \{2, \dots, k\}$ tal que C_i satisface \overline{ADJ} ,
- (iv) si $X = LD$ (resp. OLD, LTD), existe a lo sumo un $i \in \{2, \dots, k\}$ tal que C_i satisface \overline{ADJ} y \overline{CO} .

Demostración: Consideramos la clique maximal K con $V(K) = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$. Sin pérdida de generalidad supongamos que existe $j \in \{2, \dots, k\}$ tal que C_1 y C_j satisfacen \overline{ADJ} , luego $N[v_j] \cap C = N[v_1] \cap C = V(K) \cap C$. Entonces claramente C no satisface ID , así (i) queda probado. Si además, el mismo par satisface \overline{CO} luego $N(v_j) \cap C = N(v_1) \cap C = V(K) \cap C$ y C no es ni un LD -conjunto, ni un OLD -conjunto, ni un LTD -conjunto, lo que prueba (ii). Supongamos que C es un v_j -almost X -conjunto con $X \in \{ID, LD, OLD, LTD\}$, luego utilizando los ítems anteriores el lema queda demostrado. ■

4.2. Un algoritmo para grafos block

Sea B un grafo block y $v \in V(B)$, para obtener el X -número de B con $X \in \{ID, LD, OLD, LTD\}$, vamos a probar que necesitamos computar 55 funciones que están basadas en las fórmulas (4.1), (4.2), (4.3) y (4.4). Las primeras 32 funciones serán llamadas *funciones principales* y se dan en la Tabla 4.1 y las siguientes 23 *funciones auxiliares* se encuentran en la Tabla 4.2.

Observemos que si $B = \{v\}$ los valores de las funciones son sencillos de calcular y se dan en la Tabla 4.3.

Nombre	Función	Nombre	Función	Nombre	Función
f_1	$\gamma_{ID,CO,ADJ, FN}$	f_{12}	$\gamma_{LD,\overline{CO}}$	f_{23}	$\gamma_{CO,ADJ,\overline{OFN}}$
f_2	$\gamma_{ID,CO,ADJ,\overline{FN}}$	f_{13}	$\gamma_{(CO,ADJ, FN)_{LD}}$	f_{24}	$\gamma_{CO,\overline{ADJ},OFN}$
f_3	$\gamma_{ID,CO,\overline{ADJ}}$	f_{14}	$\gamma_{(CO,ADJ,\overline{FN})_{LD}}$	f_{25}	$\gamma_{CO,\overline{ADJ},\overline{OFN}}$
f_4	$\gamma_{ID,\overline{CO},ADJ}$	f_{15}	$\gamma_{(CO,\overline{ADJ}, FN)_{LD}}$	f_{26}	$\gamma_{(\overline{CO},ADJ)_{OLD}}$
f_5	$\gamma_{(CO,ADJ, FN)_{ID}}$	f_{16}	$\gamma_{(CO,\overline{ADJ},\overline{FN})_{LD}}$	f_{27}	$\gamma_{(\overline{CO},\overline{ADJ})_{OLD}}$
f_6	$\gamma_{(CO,ADJ,\overline{FN})_{ID}}$	f_{17}	$\gamma_{(\overline{CO},ADJ)_{LD}}$	f_{28}	$\gamma_{LTD,CO,OFN}$
f_7	$\gamma_{(CO,\overline{ADJ}, FN)_{ID}}$	f_{18}	$\gamma_{(\overline{CO},\overline{ADJ})_{LD}}$	f_{29}	$\gamma_{LTD,CO,\overline{OFN}}$
f_8	$\gamma_{(CO,\overline{ADJ},\overline{FN})_{ID}}$	f_{19}	$\gamma_{OLD,CO,OFN}$	f_{30}	$\gamma_{LTD,\overline{CO}}$
f_9	$\gamma_{(\overline{CO},ADJ)_{ID}}$	f_{20}	$\gamma_{OLD,CO,\overline{OFN}}$	f_{31}	$\gamma_{(\overline{CO},ADJ)_{LTD}}$
f_{10}	$\gamma_{(\overline{CO},\overline{ADJ})_{ID}}$	f_{21}	$\gamma_{OLD,\overline{CO}}$	f_{32}	$\gamma_{(\overline{CO},\overline{ADJ})_{LTD}}$
f_{11}	$\gamma_{LD,CO}$	f_{22}	$\gamma_{CO,ADJ,OFN}$		

Tabla 4.1: Lista de funciones principales.

Nombre	Función	Nombre	Función
f_{33}	$\gamma_{(CO,\overline{ADJ})_{ID}} = \min\{f_7, f_8\}$	f_{45}	$\gamma_{OLD,CO} = \min\{f_{19}, f_{20}\}$
f_{34}	$\gamma_{(CO,ADJ)_{ID}} = \min\{f_5, f_6\}$	f_{46}	$\gamma_{(CO,ADJ)_{OLD,LTD}} = \min\{f_{22}, f_{23}\}$
f_{35}	$\gamma_{(CO, FN)_{ID}} = \min\{f_5, f_7\}$	f_{47}	$\gamma_{(CO,\overline{ADJ})_{OLD,LTD}} = \min\{f_{24}, f_{25}\}$
f_{36}	$\gamma_{(CO,\overline{FN})_{ID}} = \min\{f_6, f_8\}$	f_{48}	$\gamma_{CO_{OLD,LTD}} = \min\{f_{22}, f_{23}, f_{24}, f_{25}\}$
f_{37}	$\gamma_{\overline{CO}_{ID}} = \min\{f_9, f_{10}\}$	f_{49}	$\gamma_{ADJ_{OLD}} = \min\{f_{22}, f_{23}, f_{26}\}$
f_{38}	$\gamma_{ADJ_{ID}} = \min\{f_5, f_6, f_9\}$	f_{50}	$\gamma_{(COVADJ)_{OLD}} = \min\{f_{22}, f_{23}, f_{24}, f_{25}, f_{26}\}$
f_{39}	$\gamma_{ID,CO,ADJ} = \min\{f_1, f_2\}$	f_{51}	$\gamma_{CO,OFN} = \min\{f_{22}, f_{24}\}$
f_{40}	$\gamma_{(COVADJ)_{LD}} = \min\{f_{13}, f_{14}, f_{15}, f_{16}, f_{17}\}$	f_{52}	$\gamma_{CO,\overline{OFN}} = \min\{f_{23}, f_{25}\}$
f_{41}	$\gamma_{(CO,\overline{FN})_{LD}} = \min\{f_{14}, f_{16}\}$	f_{53}	$\gamma_{\overline{CO}_{OLD}} = \min\{f_{26}, f_{27}\}$
f_{42}	$\gamma_{(CO, FN)_{LD}} = \min\{f_{13}, f_{15}\}$	f_{54}	$\gamma_{\overline{CO}_{LTD}} = \min\{f_{31}, f_{32}\}$
f_{43}	$\gamma_{\overline{CO}_{LD}} = \min\{f_{17}, f_{18}\}$	f_{55}	$\gamma_{(COVADJ)_{LTD}} = \min\{f_{22}, f_{23}, f_{24}, f_{25}, f_{31}\}$
f_{44}	$\gamma_{CO_{LD}} = \min\{f_{13}, f_{14}, f_{15}, f_{16}\}$		

Tabla 4.2: Lista de funciones auxiliares.

Nombre	Función		Nombre	Función		Nombre	Función	
f_1	$\gamma_{ID,CO,ADJ, FN}$	∞	f_{20}	$\gamma_{OLD,CO,\overline{OFN}}$	∞	f_{38}	$\gamma_{ADJ_{ID}}$	∞
f_2	$\gamma_{ID,CO,ADJ,\overline{FN}}$	∞	f_{21}	$\gamma_{OLD,\overline{CO}}$	∞	f_{39}	$\gamma_{ID,CO,ADJ}$	∞
f_3	$\gamma_{ID,CO,\overline{ADJ}}$	1	f_{22}	$\gamma_{CO,ADJ,OFN}$	∞	f_{40}	$\gamma_{(CO \vee ADJ)_{LD}}$	1
f_4	$\gamma_{ID,\overline{CO},ADJ}$	∞	f_{23}	$\gamma_{CO,ADJ,\overline{OFN}}$	∞	f_{41}	$\gamma_{(CO,\overline{FN})_{LD}}$	1
f_5	$\gamma_{(CO,ADJ, FN)_{ID}}$	∞	f_{24}	$\gamma_{CO,\overline{ADJ},OFN}$	∞	f_{42}	$\gamma_{(CO, FN)_{LD}}$	∞
f_6	$\gamma_{(CO,ADJ,\overline{FN})_{ID}}$	∞	f_{25}	$\gamma_{CO,\overline{ADJ},\overline{OFN}}$	1	f_{43}	$\gamma_{\overline{CO}_{LD}}$	0
f_7	$\gamma_{(CO,\overline{ADJ}, FN)_{ID}}$	∞	f_{26}	$\gamma_{(\overline{CO},ADJ)_{OLD}}$	∞	f_{44}	$\gamma_{CO_{LD}}$	1
f_8	$\gamma_{(CO,\overline{ADJ},\overline{FN})_{ID}}$	1	f_{27}	$\gamma_{(\overline{CO},\overline{ADJ})_{OLD}}$	0	f_{45}	$\gamma_{OLD,CO}$	∞
f_9	$\gamma_{(\overline{CO},ADJ)_{ID}}$	∞	f_{28}	$\gamma_{LTD,CO,OFN}$	∞	f_{46}	$\gamma_{(CO,ADJ)_{OLD,LTD}}$	∞
f_{10}	$\gamma_{(\overline{CO},\overline{ADJ})_{ID}}$	0	f_{29}	$\gamma_{LTD,CO,\overline{OFN}}$	∞	f_{47}	$\gamma_{(CO,\overline{ADJ})_{OLD,LTD}}$	1
f_{11}	$\gamma_{LD,CO}$	1	f_{30}	$\gamma_{LTD,\overline{CO}}$	∞	f_{48}	$\gamma_{CO_{OLD,LTD}}$	1
f_{12}	$\gamma_{LD,\overline{CO}}$	∞	f_{31}	$\gamma_{(\overline{CO},ADJ)_{LTD}}$	∞	f_{49}	$\gamma_{ADJ_{OLD}}$	∞
f_{13}	$\gamma_{(CO,ADJ, FN)_{LD}}$	∞	f_{32}	$\gamma_{(\overline{CO},\overline{ADJ})_{LTD}}$	0	f_{50}	$\gamma_{(CO \vee ADJ)_{OLD}}$	1
f_{14}	$\gamma_{(CO,ADJ,\overline{FN})_{LD}}$	∞	f_{33}	$\gamma_{(CO,\overline{ADJ})_{ID}}$	1	f_{51}	$\gamma_{CO,OFN}$	∞
f_{15}	$\gamma_{(CO,\overline{ADJ}, FN)_{LD}}$	∞	f_{34}	$\gamma_{(CO,ADJ)_{ID}}$	∞	f_{52}	$\gamma_{CO,\overline{OFN}}$	1
f_{16}	$\gamma_{(CO,\overline{ADJ},\overline{FN})_{LD}}$	1	f_{35}	$\gamma_{(CO, FN)_{ID}}$	∞	f_{53}	$\gamma_{\overline{CO}_{OLD}}$	0
f_{17}	$\gamma_{(\overline{CO},ADJ)_{LD}}$	∞	f_{36}	$\gamma_{(CO,\overline{FN})_{ID}}$	1	f_{54}	$\gamma_{\overline{CO}_{LTD}}$	0
f_{18}	$\gamma_{(\overline{CO},\overline{ADJ})_{LD}}$	0	f_{37}	$\gamma_{\overline{CO}_{ID}}$	0	f_{55}	$\gamma_{(CO \vee ADJ)_{LTD}}$	1
f_{19}	$\gamma_{OLD,CO,OFN}$	∞						

Tabla 4.3: Lista L de funciones f_j junto con sus valores iniciales $f_j(v, \{v\})$.

De acuerdo con la notación introducida en la Tabla 4.1, podemos reescribir las fórmulas (4.1), (4.2), (4.3) y (4.4).

$$\begin{aligned}
 \gamma_{ID}(v, B) &= \min \{f_1(v, B), f_2(v, B), f_3(v, B), f_4(v, B)\} \\
 \gamma_{LD}(v, B) &= \min \{f_{11}(v, B), f_{12}(v, B)\} \\
 \gamma_{OLD}(v, B) &= \min \{f_{19}(v, B), f_{20}(v, B), f_{21}(v, B)\} \\
 \gamma_{LTD}(v, B) &= \min \{f_{28}(v, B), f_{29}(v, B), f_{30}(v, B)\}
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

A continuación, presentamos los algoritmos que llamamos XB para $X \in \{ID, LD, OLD, LTD\}$ que calculan $\gamma_X(v, B)$ aplicando las ecuaciones anteriores.

Algoritmo 4.7 (Algoritmo XB)

<p>Entrada: un grafo block conexo B y su lista de cliques maximales.</p> <p>Salida: $\gamma_X(B)$, $X \in \{ID, LD, OLD, LTD\}$.</p> <p>1: seleccionar un vértice al azar v_1 y llamar a $RXB(v_1, B)$;</p> <p>2: retornar $\gamma_X(v_1, B)$.</p>
--

El algoritmo RXB corresponde al Algoritmo 4.8 que se detalla más abajo y que elige una clique maximal K que contiene al vértice v_1 y devuelve los valores de las funciones iniciales dadas en la Tabla 4.3 si $K = \{v_1\}$, o borra todas las aristas de K y llama recursivamente a $RXB(v_i, B_i)$ para todas las componentes B_i obtenidas de $B - E(K)$ de acuerdo a la Notación 4.3. El Algoritmo RXB , devuelve en cada caso una lista LX , según el problema $X \in \{ID, LD, OLD, LTD\}$, que contiene el valor de las funciones principales dadas en la Tabla 4.1 sobre (v_1, B) .

Algoritmo 4.8 (Algoritmo RXB)

<p>Entrada: un grafo block B, su lista de cliques maximales y $v_1 \in V(B)$.</p> <p>Salida: lista L de los valores de las funciones principales f_j sobre (v_1, B) correspondiente al problema X.</p> <p>1: si v_1 tiene grado 0 en B luego</p> <p>2: inicializar LX (Tabla 4.3 correspondiente al problema X);</p> <p>3: si no</p> <p>4: sea K una clique maximal con $V(K) = \{v_1, \dots, v_k\}$, borrar las aristas de K;</p> <p>5: sean B_1, \dots, B_k los grafos block obtenidos que contienen a v_1, \dots, v_k resp.;</p> <p>6: sean $(LX)_i = RXB(v_i, B_i)$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$ correspondientes al problema X;</p> <p>7: computar las funciones principales sobre (v_1, B) de $(LX)_i$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$ correspondiente al problema X.</p> <p>8: fin si</p> <p>9: retornar la lista LX de los valores de las funciones principales f_j sobre (v_1, B) correspondientes a X.</p>

En las siguientes secciones, utilizamos este esquema algorítmico común para los 4 problemas estudiados y especificamos cuáles de las funciones principales y auxiliares son relevantes para cada problema particular y cómo podemos calcularlas en cada uno de los 4 casos.

4.3. Cálculo del número de código de identificación

Sea $v_1 \in V(B)$ y sea k el tamaño de una clique maximal que contiene a v_1 . Vamos a mostrar que el algoritmo *RIDB* necesita computar las funciones principales $f_j(v_1, B)$ con $j \in \{1, \dots, 10\}$. En realidad, para $i \in \{1, \dots, k\}$ debemos obtener la lista $(LID)_i$ que consiste en las funciones $f_j(v_i, B_i)$ para $j \in \{1, \dots, 10\}$. Para ello necesitamos las funciones auxiliares $f_j(v_i, B_i)$ para $j \in \{33, \dots, 39\}$.

De modo de probar la corrección del Algoritmo 4.7 cuando $X = ID$, probamos primero un lema técnico.

Lema 4.9 *Consideramos un grafo block B y $V(K) = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$. Sea C_i un v_i -almost código de identificación en B_i para $i \in \{1, \dots, k\}$, $C = \bigcup_{i=1}^k C_i$ y $V' = \bigcup_{i=1}^k (V(B_i) - \{v_i\})$.*

- (1) *Sean $v \in V'$ y $v_j \in V(K)$ tales que $dist(v, v_j) = 1$. Luego v_j y v están dominados y separados por C si existe $i \in \{1, \dots, k\}$, $i \neq j$ tal que C_i es *CO*.*
- (2) *Sea $v \in V'$ y $v_j \in V(K)$ con $dist(v, v_j) = 2$. Luego v_j y v están dominados y separados por C si C_j satisface *CO* o existe $i \in \{1, \dots, k\}$, $i \neq j$ tal que C_i es *CO* y $v \notin V(B_i)$.*
- (3) *Sean $v_i, v_j \in V(K)$ con $i \neq j$. Luego v_i y v_j están dominados y separados por C si C_i o C_j es *ADJ*.*

Demostración: Si $v \in V'$ y $v_j \in V(K)$ tal que $dist(v, v_j) = 1$ luego es claro que $v \in V(B_j)$. Si existe $i \neq j$ tal que C_i es *CO* luego $v_i \in N[v_j] - N[v]$ y obtenemos (1).

Sea $v \in V(B_r) - \{v_r\}$ para algún $r \in \{1, \dots, k\}$ y $j \in \{1, \dots, k\}$ tal que $dist(v_j, v) = 2$. Claramente $v_j \in N[v_r] - N[v]$. Si $v_j \in C$ entonces tenemos (2). De lo contrario, supongamos que existe $i \neq j$ tal que $v_i \in C$ e $i \neq r$. Entonces $v_i \in N[v_j] - N[v]$ y esto completa la prueba de (2).

Es fácil observar que si $C_i (C_j)$ es *ADJ* luego existe $w \in (N[v_i] - N[v_j])$ ($w \in N[v_j] - N[v_i]$) con $w \in V(B_i) \cap C_i$ ($w \in V(B_j) \cap C_j$) y el lema queda demostrado. ■

En todas las figuras utilizadas como ilustraciones para las pruebas que siguen, los vértices en negro representan vértices en el código correspondiente, los vértices en blanco representan vértices fuera del código y las cruces representan vértices que pueden estar o no en el código.

El siguiente resultado muestra cómo computar $f_1(v_1, B)$ para $v_1 \in V(B)$ dado.

Teorema 4.10 Consideramos un grafo block B y $V(K) = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$. Sea C un código en $V(B)$ y $C_i = C \cap V(B_i)$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Luego, C es un v_1 -almost código de identificación en B con las propiedades ID , CO , ADJ , FN si y solo si C_i es un v_i -almost código de identificación en B_i para todo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ y se satisface uno de los siguientes conjuntos de afirmaciones:

- (i) C_1 satisface ID , CO , ADJ y \overline{FN} , existe $j \neq 1$ tal que C_j satisface \overline{CO} y \overline{ADJ} , y C_i satisface \overline{CO} y ADJ para todo $i \neq 1, j$.
- (ii) C_1 satisface CO , ADJ y FN , existe $j \neq 1$ tal que C_j satisface CO y \overline{ADJ} , y C_i satisface ADJ para todo $i \neq 1, j$.
- (iii) Si $k \geq 3$, C_1 satisface CO , ADJ y FN , existe $h \neq 1$ tal que C_h satisface CO , existe $j \neq 1$ tal que C_j satisface \overline{CO} y \overline{ADJ} , y C_i satisface ADJ para todo $i \neq j$.
- (iv) C_1 satisface CO y FN , existe $h \neq 1$ tal que C_h satisface CO , y C_i satisface ADJ para todo $i \neq 1$.
- (v) C_1 satisface ID , CO , ADJ y FN , y C_i satisface \overline{CO} y ADJ para todo $i \neq 1$.

Demostración: Sea C un v_1 -almost código de identificación en B con las propiedades ID , CO , ADJ y FN .

Notemos que por la Observación 4.4, C_i es un v_i -almost código de identificación en B_i para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. También, C_1 satisface CO ya que C satisface CO y $v_1 \in V(B_1)$.

Como C es FN existe un único $w \in V(B) - C$ tal que $N[w] \cap C = \{v_1\}$.

Analizamos los diferentes casos que pueden ocurrir (ver Figura 4.3).

Si $w = v_j$ para algún $j \in \{2, \dots, k\}$ luego C_1 es \overline{FN} , C_i es \overline{CO} para todo $i \neq 1$ y C_j es \overline{ADJ} . Así a partir del Lema 4.6 y por el hecho de que C es ID sigue que C_i es ADJ para todo $i \neq j$. Como $N(v_1) \cap C \cap V(B_i) = \emptyset$ para todo $i \neq 1$ y C es ID , C_1 es ID y queda probado (i).

Ahora, si $w \in V(B_1)$ luego C_1 es FN . Como C es ADJ existe un vértice v tal que $v \in N(v_1) \cap C$.

Si $V(K) \cap C = \{v_1\}$ entonces $v \in V(B_1)$ y C_1 es ADJ , además C_i es \overline{CO} para todo $i \neq 1$. Como C es ID y C_1 es FN sigue que C_i es ADJ para todo $i \neq 1$ y C_1 es ID . Luego se verifica (v).

Si $|V(K) \cap C| \geq 2$ entonces existe $h \neq 1$ tal que C_h es CO . Luego, si C_i es ADJ para todo $i \neq 1$ obtenemos (iv). Pero, si C_h es \overline{ADJ} , el Lema 4.6 implica que C_i es ADJ para todo $i \neq h$ lo cual prueba (ii). Más aún, si existe algún $j \neq h$ tal que C_j es \overline{ADJ} y \overline{CO} nuevamente por el Lema 4.6, C_i es ADJ para todo $i \neq j$ y se verifica (iii).

Recíprocamente, sea C_i un v_i -almost código de identificación en B_i para todo $i \in \{1, \dots, k\}$ que satisface alguno de los conjuntos de propiedades entre (i) y (v) y sea $C = \bigcup_{i=1}^k C_i$ (ver Figura 4.3).

Vamos a probar que C es un v_1 -almost código de identificación en B con las propiedades ID , CO , ADJ y FN .

Es fácil ver que C es CO y ADJ ya que C_1 es CO y, o bien C_1 satisface ADJ o C_h es CO con $h \neq 1$ en cada una de las afirmaciones de (i) a (v). También, es fácil verificar que cada una de las afirmaciones implica que C es FN .

Entonces queda por demostrar que C es ID , es decir, vamos a probar que dados $u, v \in V(B)$, con $dist(u, v) \leq 2$, están separados y dominados por C .

A partir del Lema 4.5 si $u, v \in \bigcup_{i=1}^k (V(B_i) - \{v_i\})$ el teorema queda probado.

Consideramos $u, v \in V(B)$ con $dist(u, v) = 2$ tal que $u \in V(K)$. Luego $v \in V(B_i) - \{v_i\}$ para algún i y $u = v_r$ para algún r . Si $r = 1$, usando el Lema 4.9 (2) y del hecho que C_1 es CO en todas las afirmaciones de (i) a (v), sigue que v_1 y v están dominados y separados por C .

Ahora, sea $r \neq 1$. Si $i \neq 1$ nuevamente el Lema 4.9 (2) junto con el hecho de que $v_1 \in C$ implican v_r y v están dominados y separados por C .

Cuando $r \neq 1$ e $i = 1$, las afirmaciones de (ii) a (iv) dicen que existe $h \neq 1$ con $v_h \in C$ y el Lema 4.9 (2) asegura que v_r y v están dominados y separados por C . Si ocurre la afirmación (i), como C_1 es \overline{FN} existe $w \in N[v] \cap C \cap V(B_1)$ tal que $w \notin N[v_r]$. Si se satisface la afirmación (v) luego C_r es ADJ . En ambos casos v y v_r están dominados y separados por C .

Si $u, v \in V(B)$ con $dist(u, v) = 1$ tal que $u \in V(K)$ y $v \notin V(K)$ luego $v \in V(B_i) - \{v_i\}$ y $u = v_i$ para algún i . Si $i = 1$ vemos que en las afirmaciones de (ii) a (iv) se asegura que existe $h \neq 1$ tal que C_h es CO mientras que (i) y (v) afirman que C_1 es ID . Luego el Lema 4.9 (1) implica que están dominados y separados. En el caso $i \neq 1$ todas las afirmaciones verifican que C_1 es CO y el mismo lema prueba que u y v están dominados y separados por C .

Finalmente, si $u = v_i$ y $v = v_j$ con $i \neq j$ luego o bien C_i es \overline{ADJ} o C_j es \overline{ADJ} pero no ambas. Así por el Lema 4.9 (3) se completa la prueba. ■

A partir del Teorema 4.10 obtenemos el siguiente:

Corolario 4.11 *Con la notación del Teorema 4.10, tenemos las siguientes igualdades:*

- si $k = 2$,

$$f_1(v_1, B) = \min \begin{cases} f_2(v_1, B_1) + f_{10}(v_2, B_2) \\ f_5(v_1, B_1) + f_{33}(v_2, B_2) \\ f_{35}(v_1, B_1) + f_{34}(v_2, B_2) \\ f_1(v_1, B_1) + f_9(v_2, B_2) \end{cases}$$

- si $k \geq 3$,

4.3. CÁLCULO DEL NÚMERO DE CÓDIGO DE IDENTIFICACIÓN

$$f_1(v_1, B) = \min \left\{ \begin{array}{l} f_2(v_1, B_1) + \min_{j=2, \dots, k} \left\{ f_{10}(v_j, B_j) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^k f_9(v_i, B_i) \right\} \\ f_5(v_1, B_1) + \min_{h=2, \dots, k} \left\{ f_{33}(v_h, B_h) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^k f_{38}(v_i, B_i) \right\} \\ f_5(v_1, B_1) + \min_{\substack{j, h=2, \dots, k \\ j \neq h}} \left\{ f_{10}(v_j, B_j) + f_{34}(v_h, B_h) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j, h}}^k f_{38}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{35}(v_1, B_1) + \min_{h=2, \dots, k} \left\{ f_{34}(v_h, B_h) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq h}}^k f_{38}(v_i, B_i) \right\} \\ f_1(v_1, B_1) + \sum_{i=2}^k f_9(v_i, B_i) \end{array} \right.$$

v_j es el vecino favorecido por v_1

El vecino favorecido por v_1 está en $V(B_1)$

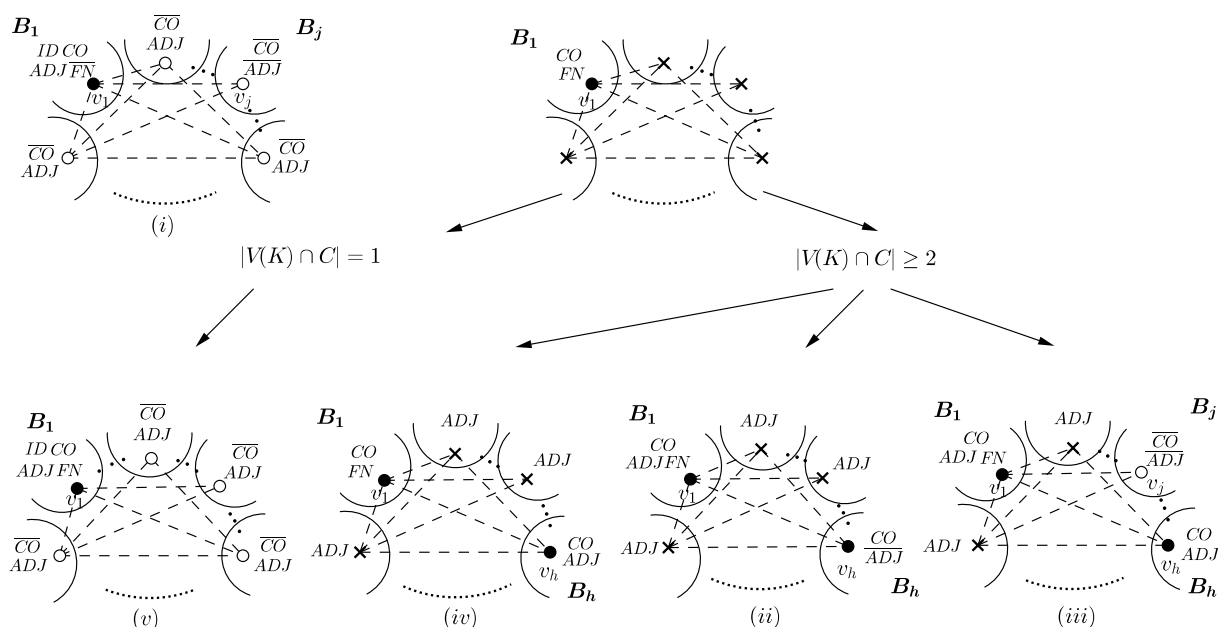


Figura 4.3: Teorema 4.10.

De un modo similar, se pueden obtener las restantes funciones principales $f_j(v_1, B)$ para $j \in \{2, \dots, 10\}$. Las Tablas 4.4, 4.5, 4.6 y 4.7 muestran cómo obtenerlas. Además en el Apéndice se presenta una explicación ilustrativa.

Función	Función
$f_1(v_1, B) = \min \begin{cases} f_2(v_1, B_1) + f_{10}(v_2, B_2) \\ f_5(v_1, B_1) + f_{33}(v_2, B_2) \\ f_{35}(v_1, B_1) + f_{34}(v_2, B_2) \\ f_1(v_1, B_1) + f_9(v_2, B_2) \end{cases}$	$f_6(v_1, B) = \min \begin{cases} f_{36}(v_1, B_1) + f_{33}(v_2, B_2) \\ f_{36}(v_1, B_1) + f_{34}(v_2, B_2) \\ f_6(v_1, B_1) + f_9(v_2, B_2) \end{cases}$
$f_2(v_1, B) = \min \begin{cases} f_6(v_1, B_1) + f_{33}(v_2, B_2) \\ f_{36}(v_1, B_1) + f_{34}(v_2, B_2) \\ f_2(v_1, B_1) + f_9(v_2, B_2) \end{cases}$	$f_7(v_1, B) = \min \begin{cases} f_7(v_1, B_1) + f_9(v_2, B_2) \\ f_8(v_1, B_1) + f_{10}(v_2, B_2) \end{cases}$
$f_3(v_1, B) = f_3(v_1, B_1) + f_9(v_2, B_2)$	$f_8(v_1, B) = f_8(v_1, B_1) + f_9(v_2, B_2)$
$f_4(v_1, B) = \min \begin{cases} f_9(v_1, B_1) + f_3(v_2, B_2) \\ f_{10}(v_1, B_1) + f_2(v_2, B_2) \\ f_9(v_1, B_1) + f_{39}(v_2, B_2) \\ f_4(v_1, B_1) + f_4(v_2, B_2) \end{cases}$	$f_9(v_1, B) = \min \begin{cases} f_{37}(v_1, B_1) + f_3(v_2, B_2) \\ f_{37}(v_1, B_1) + f_{39}(v_2, B_2) \\ f_9(v_1, B_1) + f_4(v_2, B_2) \end{cases}$
$f_5(v_1, B) = \min \begin{cases} f_6(v_1, B_1) + f_{10}(v_2, B_2) \\ f_{35}(v_1, B_1) + f_{33}(v_2, B_2) \\ f_{35}(v_1, B_1) + f_{34}(v_2, B_2) \\ f_5(v_1, B_1) + f_9(v_2, B_2) \end{cases}$	$f_{10}(v_1, B) = f_{10}(v_1, B_1) + f_4(v_2, B_2)$

Tabla 4.4: Caso $|V(K)| = 2$ para *RIDB*.

A partir de las fórmulas en las Tablas 4.4, 4.5, 4.6 y 4.7, es inmediato ver que para cada una de las diez funciones f_j con $j \in \{1, \dots, 10\}$, podemos computar $f_j(v_1, B)$ conociendo $(LID)_i$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$ en tiempo $O(k)$, donde k es el tamaño de una clique maximal que contiene al vértice v_1 .

Teorema 4.12 *Dado B un grafo block, el Algoritmo IDB computa en tiempo lineal $\gamma_{ID}(B)$ si B es identificable o retorna ∞ si no lo es.*

Demostración: En lo que sigue llamamos $g(B)$ al número de operaciones que el algoritmo necesita para resolver el problema sobre un grafo B . La prueba es por inducción sobre el número de vértices del grafo B . Si $V(B) = \{v\}$ luego usando la Tabla 4.3 tenemos que $g(B) \in O(1)$. Supongamos que para cada grafo block con menos de n vértices el resultado vale y sea B un grafo block de tamaño n .

Sea $v \in V(B)$ y consideramos una clique maximal K que contiene a v . Luego, borramos todas las aristas en K y obtenemos $|V(K)| = k$ subgrafos block llamados B_i con $i \in \{1, \dots, k\}$. Por hipótesis de inducción $g(B_i) \in O(n_i + m_i)$ donde $n_i = |V(B_i)|$ y $m_i = |E(B_i)|$ para $i \in \{1, \dots, k\}$. Entonces, para obtener $\gamma_{ID}(B)$ necesitamos $f_j(v, B)$ para $j \in \{1, \dots, 10\}$. Como mencionamos antes, esto se puede computar en tiempo $O(k)$. Así $g(B) \in O(n + m)$ y se completa la prueba. ■

4.3. CÁLCULO DEL NÚMERO DE CÓDIGO DE IDENTIFICACIÓN

Función	
$f_1(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_2(v_1, B_1) + \min \{f_{10}(v_2, B_2) + f_9(v_3, B_3), f_9(v_2, B_2) + f_{10}(v_3, B_3)\} \\ f_5(v_1, B_1) + \min \{f_{33}(v_2, B_2) + f_{38}(v_3, B_3), f_{38}(v_2, B_2) + f_{33}(v_3, B_3)\} \\ f_5(v_1, B_1) + \min \{f_{10}(v_2, B_2) + f_{34}(v_3, B_3), f_{34}(v_2, B_2) + f_{10}(v_3, B_3)\} \\ f_{35}(v_1, B_1) + \min \{f_{29}(v_2, B_2) + f_{38}(v_3, B_3), f_{38}(v_2, B_2) + f_{34}(v_3, B_3)\} \\ f_1(v_1, B_1) + f_9(v_2, B_2) + f_9(v_3, B_3) \end{array} \right.$
$f_2(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_6(v_1, B_1) + \min \{f_{33}(v_2, B_2) + f_{38}(v_3, B_3), f_{38}(v_2, B_2) + f_{33}(v_3, B_3)\} \\ f_6(v_1, B_1) + \min \{f_{10}(v_2, B_2) + f_{34}(v_3, B_3), f_{34}(v_2, B_2) + f_{10}(v_3, B_3)\} \\ f_{36}(v_1, B_1) + \min \{f_{34}(v_2, B_2) + f_{38}(v_3, B_3), f_{38}(v_2, B_2) + f_{34}(v_3, B_3)\} \\ f_2(v_1, B_1) + f_9(v_2, B_2) + f_9(v_3, B_3) \end{array} \right.$
$f_3(v_1, B) = f_3(v_1, B_1) + f_9(v_2, B_2) + f_9(v_3, B_3)$	
$f_4(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_9(v_1, B_1) + \min \{f_{28}(v_2, B_2) + f_{34}(v_3, B_3), f_{34}(v_2, B_2) + f_{33}(v_3, B_3)\} \\ f_9(v_1, B_1) + \min \{f_{10}(v_2, B_2) + f_2(v_3, B_3), f_2(v_2, B_2) + f_{10}(v_3, B_3)\} \\ f_9(v_1, B_1) + \min \{f_3(v_2, B_2) + f_9(v_3, B_3), f_9(v_2, B_2) + f_3(v_3, B_3)\} \\ f_{37}(v_1, B_1) + f_{34}(v_2, B_2) + f_{34}(v_3, B_3) \\ f_{10}(v_1, B_1) + \min \{f_2(v_2, B_2) + f_9(v_3, B_3), f_9(v_2, B_2) + f_2(v_3, B_3)\} \\ f_9(v_1, B_1) + \min \{f_{39}(v_2, B_2) + f_9(v_3, B_3), f_9(v_2, B_2) + f_{39}(v_3, B_3)\} \\ f_4(v_1, B_1) + f_4(v_2, B_2) + f_4(v_3, B_3) \end{array} \right.$
$f_5(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_6(v_1, B_1) + \min \{f_{10}(v_2, B_2) + f_9(v_3, B_3), f_9(v_2, B_2) + f_{10}(v_3, B_3)\} \\ f_{35}(v_1, B_1) + \min \{f_{10}(v_2, B_2) + f_{34}(v_3, B_3), f_{34}(v_2, B_2) + f_{10}(v_3, B_3)\} \\ f_{35}(v_1, B_1) + \min \{f_{33}(v_2, B_2) + f_{38}(v_3, B_3), f_{38}(v_2, B_2) + f_{33}(v_3, B_3)\} \\ f_{35}(v_1, B_1) + \min \{f_{34}(v_2, B_2) + f_{38}(v_3, B_3), f_{38}(v_2, B_2) + f_{34}(v_3, B_3)\} \\ f_5(v_1, B_1) + f_9(v_2, B_2) + f_9(v_3, B_3) \end{array} \right.$
$f_6(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_{36}(v_1, B_1) + \min \{f_{33}(v_2, B_2) + f_{38}(v_3, B_3), f_{38}(v_2, B_2) + f_{33}(v_3, B_3)\} \\ f_{36}(v_1, B_1) + \min \{f_{10}(v_2, B_2) + f_{34}(v_3, B_3), f_{34}(v_2, B_2) + f_{10}(v_3, B_3)\} \\ f_{36}(v_1, B_1) + \min \{f_{34}(v_2, B_2) + f_{38}(v_3, B_3), f_{38}(v_2, B_2) + f_{34}(v_3, B_3)\} \\ f_6(v_1, B_1) + f_9(v_2, B_2) + f_9(v_3, B_3) \end{array} \right.$
$f_7(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_7(v_1, B_1) + f_9(v_2, B_2) + f_9(v_3, B_3) \\ f_8(v_1, B_1) + \min \{f_{10}(v_2, B_2) + f_9(v_3, B_3), f_9(v_2, B_2) + f_{10}(v_3, B_3)\} \end{array} \right.$
$f_8(v_1, B) = f_8(v_1, B_1) + f_9(v_2, B_2) + f_9(v_3, B_3)$	
$f_9(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_{37}(v_1, B_1) + \min \{f_3(v_2, B_2) + f_9(v_3, B_3), f_9(v_2, B_2) + f_3(v_3, B_3)\} \\ f_{37}(v_1, B_1) + \min \{f_{10}(v_2, B_2) + f_2(v_3, B_3), f_2(v_2, B_2) + f_{10}(v_3, B_3)\} \\ f_{37}(v_1, B_1) + \min \{f_{33}(v_2, B_2) + f_{34}(v_3, B_3), f_{34}(v_2, B_2) + f_{33}(v_3, B_3)\} \\ f_{37}(v_1, B_1) + f_{34}(v_2, B_2) + f_{34}(v_3, B_3) \\ f_{37}(v_1, B_1) + \min \{f_{39}(v_2, B_2) + f_9(v_3, B_3), f_9(v_2, B_2) + f_{39}(v_3, B_3)\} \\ f_9(v_1, B_1) + f_4(v_2, B_2) + f_4(v_3, B_3) \end{array} \right.$
$f_{10}(v_1, B) = f_{10}(v_1, B_1) + f_4(v_2, B_2) + f_4(v_3, B_3)$	

Tabla 4.5: Caso $|V(K)| = 3$ para *RIDB*.

Función	
$f_1(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_2(v_1, B_1) + \min_{j=2, \dots, k} \left\{ f_{10}(v_j, B_j) + \sum_{i=2, \dots, k, i \neq j} f_9(v_i, B_i) \right\} \\ f_5(v_1, B_1) + \min_{h=2, \dots, k} \left\{ f_{33}(v_h, B_h) + \sum_{i=2, \dots, k, i \neq h} f_{38}(v_i, B_i) \right\} \\ f_5(v_1, B_1) + \min_{\substack{j, h=2, \dots, k \\ j \neq h}} \left\{ f_{10}(v_j, B_j) + f_{34}(v_h, B_h) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j, h}}^k f_{38}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{35}(v_1, B_1) + \min_{h=2, \dots, k} \left\{ f_{34}(v_h, B_h) + \sum_{i=2, \dots, k, i \neq h} f_{38}(v_i, B_i) \right\} \\ f_1(v_1, B_1) + \sum_{i=2}^k f_9(v_i, B_i) \end{array} \right.$
$f_2(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_6(v_1, B_1) + \min_{h=2, \dots, k} \left\{ f_{33}(v_h, B_h) + \sum_{i=2, \dots, k, i \neq h} f_{38}(v_i, B_i) \right\} \\ f_6(v_1, B_1) + \min_{\substack{j, h=2, \dots, k \\ j \neq h}} \left\{ f_{10}(v_j, B_j) + f_{34}(v_h, B_h) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j, h}}^k f_{38}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{36}(v_1, B_1) + \min_{h=2, \dots, k} \left\{ f_{34}(v_h, B_h) + \sum_{i=2, \dots, k, i \neq h} f_{38}(v_i, B_i) \right\} \\ f_2(v_1, B_1) + \sum_{i=2}^k f_9(v_i, B_i) \end{array} \right.$
$f_3(v_1, B) = f_3(v_1, B_1) + \sum_{i=2}^k f_9(v_i, B_i)$	
$f_4(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_9(v_1, B_1) + \min_{\substack{j, h, l=2, \dots, k \\ j \neq h, j \neq l, h \neq l}} \left\{ f_{10}(v_j, B_j) + f_{34}(v_h, B_h) + f_{34}(v_l, B_l) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j, h, l}}^k f_{38}(v_i, B_i) \right\} \\ f_9(v_1, B_1) + \min_{\substack{j, h=2, \dots, k \\ j \neq h}} \left\{ f_{33}(v_j, B_j) + f_{34}(v_h, B_h) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j, h}}^k f_{38}(v_i, B_i) \right\} \\ f_9(v_1, B_1) + \min_{\substack{j, h=2, \dots, k \\ j \neq h}} \left\{ f_{10}(v_j, B_j) + f_2(v_h, B_h) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j, h}}^k f_9(v_i, B_i) \right\} \\ f_9(v_1, B_1) + \min_{h=2, \dots, k} \left\{ f_3(v_h, B_h) + \sum_{i=2, \dots, k, i \neq h} f_9(v_i, B_i) \right\} \\ f_{37}(v_1, B_1) + \min_{h, l=2, \dots, k, h \neq l} \left\{ f_{34}(v_h, B_h) + f_{34}(v_l, B_l) + \sum_{i=2, \dots, k, i \neq h, l} f_{38}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{10}(v_1, B_1) + \min_{h=2, \dots, k} \left\{ f_2(v_h, B_h) + \sum_{i=2, \dots, k, i \neq h} f_9(v_i, B_i) \right\} \\ f_9(v_1, B_1) + \min_{h=2, \dots, k} \left\{ f_{39}(v_h, B_h) + \sum_{i=2, \dots, k, i \neq h} f_9(v_i, B_i) \right\} \\ \sum_{i=1}^k f_4(v_i, B_i) \end{array} \right.$
$f_5(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_6(v_1, B_1) + \min_{j=2, \dots, k} \left\{ f_{10}(v_j, B_j) + \sum_{i=2, \dots, k, i \neq j} f_9(v_i, B_i) \right\} \\ f_{35}(v_1, B_1) + \min_{j, h=2, \dots, k, j \neq h} \left\{ f_{10}(v_j, B_j) + f_{34}(v_h, B_h) + \sum_{i=2, \dots, k, i \neq j, h} f_{38}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{35}(v_1, B_1) + \min_{h=2, \dots, k} \left\{ f_{33}(v_h, B_h) + \sum_{i=2, \dots, k, i \neq h} f_{38}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{35}(v_1, B_1) + \min_{h=2, \dots, k} \left\{ f_{34}(v_h, B_h) + \sum_{i=2, \dots, k, i \neq h} f_{38}(v_i, B_i) \right\} \\ f_5(v_1, B_1) + \sum_{i=2}^k f_9(v_i, B_i) \end{array} \right.$

Tabla 4.6: Caso $|V(K)| \geq 4$ para *RIDB*.

4.3. CÁLCULO DEL NÚMERO DE CÓDIGO DE IDENTIFICACIÓN

Función	
$f_6(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_{36}(v_1, B_1) + \min_{h=2, \dots, k} \left\{ f_{34}(v_h, B_h) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq h}}^k f_{38}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{36}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j, h=2, \dots, k \\ j \neq h}} \left\{ f_{10}(v_j, B_j) + f_{34}(v_h, B_h) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j, h}}^k f_{38}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{36}(v_1, B_1) + \min_{h=2, \dots, k} \left\{ f_{34}(v_h, B_h) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq h}}^k f_{39}(v_i, B_i) \right\} \\ f_6(v_1, B_1) + \sum_{i=2}^k f_9(v_i, B_i) \\ f_7(v_1, B_1) + \sum_{i=2}^k f_9(v_i, B_i) \end{array} \right.$
$f_7(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_7(v_1, B_1) + \sum_{i=2}^k f_9(v_i, B_i) \\ f_8(v_1, B_1) + \min_{j=2, \dots, k} \left\{ f_{10}(v_j, B_j) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^k f_9(v_i, B_i) \right\} \end{array} \right.$
$f_8(v_1, B)$	$f_8(v_1, B) = f_8(v_1, B_1) + \sum_{i=2}^k f_9(v_i, B_i)$
$f_9(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_{37}(v_1, B_1) + \min_{h=2, \dots, k} \left\{ f_3(v_h, B_h) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq h}}^k f_9(v_i, B_i) \right\} \\ f_{37}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j, h=2, \dots, k \\ j \neq h}} \left\{ f_{10}(v_j, B_j) + f_2(v_h, B_h) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j, h}}^k f_9(v_i, B_i) \right\} \\ f_{37}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j, h, l=2, \dots, k \\ j \neq h, j \neq l, h \neq l}} \left\{ f_{10}(v_j, B_j) + f_{34}(v_h, B_h) + f_{34}(v_l, B_l) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j, h, l}}^k f_{38}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{37}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j, h=2, \dots, k \\ j \neq h}} \left\{ f_{33}(v_j, B_j) + f_{33}(v_h, B_h) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j, h}}^k f_{38}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{37}(v_1, B_1) + \min_{\substack{h, l=2, \dots, k \\ h \neq l}} \left\{ f_{34}(v_h, B_h) + f_{34}(v_l, B_l) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq h, l}}^k f_{38}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{37}(v_1, B_1) + \min_{h=2, \dots, k} \left\{ f_{39}(v_h, B_h) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq h}}^k f_9(v_i, B_i) \right\} \\ f_9(v_1, B_1) + \sum_{i=2}^k f_4(v_i, B_i) \end{array} \right.$
$f_{10}(v_1, B)f$	$f_{10}(v_1, B)f = f_{10}(v_1, B_1) + \sum_{i=2}^k f_4(v_i, B_i)$

Tabla 4.7: Caso $|V(K)| \geq 4$ para *RIDB*.

4.4. Cálculo del número de localización-dominación

El algoritmo *RLDB* necesita computar las funciones principales $f_j(v_1, B)$ con $j \in \{11, \dots, 18\}$. De hecho, para $i \in \{1, \dots, k\}$ necesitamos la lista $(LLD)_i$ que consiste en las funciones $f_j(v_i, B_i)$ para $j \in \{11, \dots, 18\}$, y para ello necesitamos también las funciones auxiliares $f_j(v_i, B_i)$ para $j \in \{40, \dots, 44\}$.

Teorema 4.13 *Consideramos un grafo block B y $V(K) = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$. Sea C un conjunto en $V(B)$ y $C_i = C \cap V(B_i)$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Luego, C es un v_1 -almost conjunto de localización-dominación en B que tiene las propiedades *LD*, *CO* si y solo si C_i es un v_i -almost conjunto de localización-dominación en B_i para todo $i \in \{1, \dots, k\}$ y se satisface uno de los siguientes conjuntos de afirmaciones:*

- (i) C_1 es *CO*, \overline{FN} , existe $j \neq 1$ tal que C_j es \overline{CO} y \overline{ADJ} , y C_i es \overline{CO} y *ADJ* para todo $i \neq 1, j$.
- (ii) Si $k \geq 3$, C_1 es *CO*, existe $h \neq 1$ tal que C_h es *CO*, existe $j \neq 1, h$ tal que C_j es \overline{CO} y \overline{ADJ} , y C_i es *CO* o *ADJ* para todo $i \neq j, h$.
- (iii) C_1 es *CO*, y C_i es *CO* o *ADJ* para todo i .

Demostración: Sea C un v_1 -almost *LD*-conjunto que satisface *LD* y *CO*.

A partir de la Observación 4.4, C_i es un v_i -almost *LD*-conjunto en B_i para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. También C_1 es *CO*, ya que C es *CO* y $v_1 \in V(B_1)$. Más aún, el Lema 4.6 asegura que existe a lo sumo un $j \neq 1$ tal que C_j es \overline{CO} y \overline{ADJ} .

Sea $j \neq 1$ tal que C_j es \overline{CO} y \overline{ADJ} . Si C_i es \overline{CO} para todo $i \neq 1$, C_i es *ADJ* para todo $i \neq 1$ y como C es *LD*, C_1 es \overline{FN} y tenemos (i).

Ahora, sea $h \neq 1, j$ tal que C_h es *CO*. Luego para todo $i \neq 1, j, h$, C_i es *CO* o *ADJ* y tenemos (ii).

Finalmente, si C_i es *CO* o *ADJ* para todo $i \neq 1$ se verifica (iii).

Recíprocamente, sea C_i un v_i -almost *LD*-conjunto en B_i para todo i que satisface uno de los conjuntos de afirmaciones de (i) a (iii) y sea $C = \bigcup_{i=1}^k C_i$. Probaremos que C es un v_1 -almost *LD*-conjunto en B con las propiedades *LD* y *CO*.

Es fácil ver que C es *CO* ya que C_1 es *CO* en todos los casos. Luego para probar que C es *LD* necesitamos verificar que $u, v \in V(B)$ con $dist(u, v) \leq 2$ están dominados y separados por C .

A partir del Lema 4.5, $u, v \in V(B) - \bigcup_{i=1}^k \{v_i\}$ están dominados y separados por C . Luego, sean $u, v \in V(B)$, $dist(u, v) = 2$ y $u \in V(K)$. Tenemos que $v \in V(B_i) - \{v_i\}$ para algún i y $u = v_r$ para $r \neq i$ tal que C_r es \overline{CO} (si $v_r \in C$ no es necesario que estén separados).

Si $i \neq 1$, u y v están dominados y separados por C ya que C_1 es *CO*.

Sea $i = 1$. En el caso (i), como C_1 es \overline{FN} existe $w \in (N[v] \cap C) - N(u)$, $w \neq v_1$. En los restantes casos, ya que C_r es \overline{CO} y, o bien es ADJ o existe $h \neq 1$ tal que C_h es CO , resulta que u y v están separados y dominados.

Ahora, sean $u, v \in V(B)$, $dist(u, v) = 1$, $u \in V(K)$ y $v \notin V(K)$.

Si $u = v_i$ para algún i , luego $v \in V(B_i) - \{v_i\}$ y C_i es \overline{CO} . Como $i \neq 1$ y C_1 es CO , u y v están separados y dominados.

Finalmente, sean $u = v_i$ y $v = v_j$, $i, j \neq 1$ y C_i, C_j es \overline{CO} . En todos los casos, por el Lema 4.6 al menos uno entre C_i y C_j es ADJ . Así resultan u y v separados y dominados.

La Figura 4.4 ilustra la demostración. ■

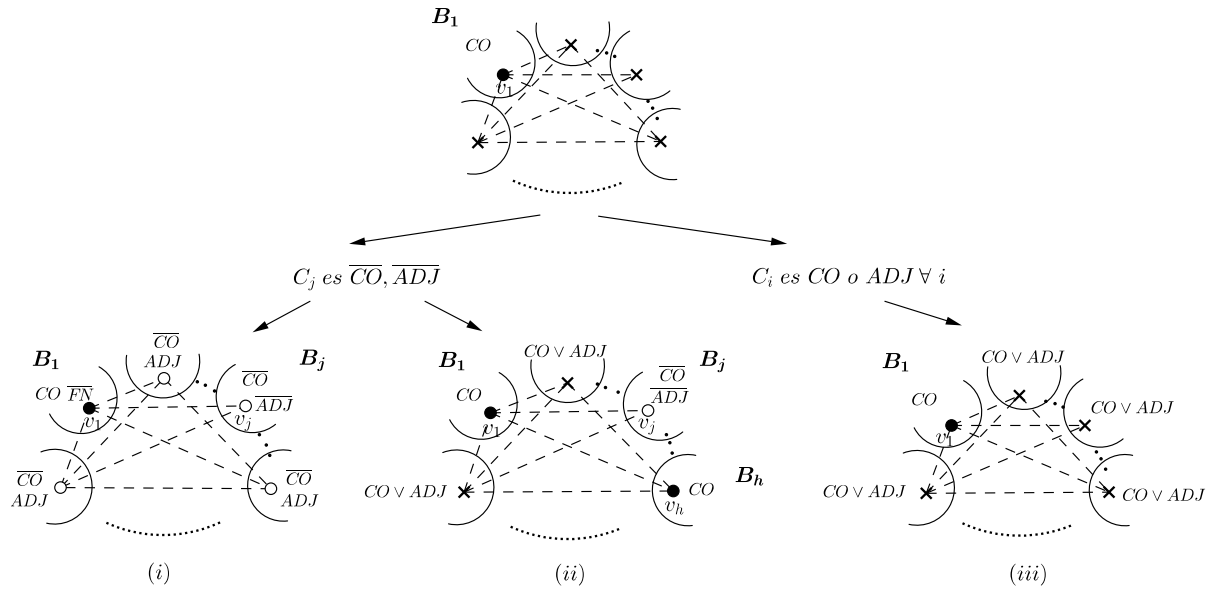


Figura 4.4: Teorema 4.13.

Corolario 4.14 Con la notación del Teorema 4.13, tenemos:

- $k = 2$,

$$f_{11}(v_1, B) = \min \begin{cases} f_{41}(v_1, B_1) + f_{18}(v_2, B_2) \\ f_{44}(v_1, B_1) + f_{40}(v_2, B_2) \end{cases}$$

- $k \geq 3$,

$$f_{11}(v_1, B) = \min \left\{ \begin{array}{l} f_{41}(v_1, B_1) + \min_{j=2, \dots, k} \left\{ f_{18}(v_j, B_j) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^k f_{17}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{44}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j, h=2, \dots, k \\ j \neq h}} \left\{ f_{18}(v_j, B_j) + f_{44}(v_h, B_h) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j, h}}^k f_{40}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{44}(v_1, B_1) + \sum_{i=2}^k f_{40}(v_i, B_i) \end{array} \right.$$

De manera similar, se pueden obtener las restantes funciones principales $f_j(v_1, B)$ para $j \in \{12, \dots, 18\}$. Estas se muestran en las Tablas 4.8, 4.9, 4.10 y 4.11 y en el Apéndice se encuentra una explicación ilustrativa.

Función	Función
$f_{11}(v_1, B) = \min \left\{ \begin{array}{l} f_{41}(v_1, B_1) + f_{18}(v_2, B_2) \\ f_{44}(v_1, B_1) + f_{40}(v_2, B_2) \end{array} \right.$	$f_{15}(v_1, B) = \min \left\{ \begin{array}{l} f_{16}(v_1, B_1) + f_{18}(v_2, B_2) \\ f_{15}(v_1, B_1) + f_{17}(v_2, B_2) \end{array} \right.$
$f_{12}(v_1, B) = \min \left\{ \begin{array}{l} f_{18}(v_1, B_1) + f_{41}(v_2, B_2) \\ f_{12}(v_1, B_1) + f_{12}(v_2, B_2) \\ f_{17}(v_1, B_1) + f_{44}(v_2, B_2) \end{array} \right.$	$f_{16}(v_1, B) = f_{16}(v_1, B_1) + f_{17}(v_2, B_2)$
$f_{13}(v_1, B) = \min \left\{ \begin{array}{l} f_{14}(v_1, B_1) + f_{18}(v_2, B_2) \\ f_{13}(v_1, B_1) + f_{17}(v_2, B_2) \\ f_{42}(v_1, B_1) + f_{44}(v_2, B_2) \end{array} \right.$	$f_{17}(v_1, B) = \min \left\{ \begin{array}{l} f_{17}(v_1, B_1) + f_{12}(v_2, B_2) \\ f_{43}(v_1, B_1) + f_{44}(v_2, B_2) \end{array} \right.$
$f_{14}(v_1, B) = \min \left\{ \begin{array}{l} f_{14}(v_1, B_1) + f_{17}(v_2, B_2) \\ f_{41}(v_1, B_1) + f_{43}(v_2, B_2) \end{array} \right.$	$f_{18}(v_1, B) = f_{18}(v_1, B_1) + f_{12}(v_2, B_2)$

Tabla 4.8: Caso $|V(K)| = 2$ para *RLDB*.

A partir de las fórmulas dadas en las Tablas 4.8, 4.9, 4.10 y 4.11, es inmediato ver que para cada una de las ocho funciones f_j con $j \in \{11, \dots, 18\}$, podemos computar $f_j(v_1, B)$ a partir de $(LLD)_i$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$ en tiempo $O(k)$.

El siguiente resultado se prueba de manera similar al Teorema 4.12.

Teorema 4.15 *Dado B un grafo block, el Algoritmo LDB computa en tiempo lineal $\gamma_{LD}(B)$.*

4.4. CÁLCULO DEL NÚMERO DE LOCALIZACIÓN-DOMINACIÓN

Función	
$f_{11}(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_{41}(v_1, B_1) + \min \{ f_{18}(v_2, B_2) + f_{17}(v_3, B_3), f_{17}(v_2, B_2) + f_{18}(v_3, B_3) \} \\ f_{44}(v_1, B_1) + \min \{ f_{18}(v_2, B_2) + f_{44}(v_3, B_3), f_{44}(v_2, B_2) + f_{18}(v_3, B_3) \} \\ f_{44}(v_1, B_1) + f_{40}(v_2, B_2) + f_{40}(v_3, B_3) \end{array} \right.$
$f_{12}(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_{17}(v_1, B_1) + \min \{ f_{18}(v_2, B_2) + f_{41}(v_3, B_3), f_{41}(v_2, B_2) + f_{18}(v_3, B_3) \} \\ f_{18}(v_1, B_1) + \min \{ f_{41}(v_2, B_2) + f_{17}(v_3, B_3), f_{17}(v_2, B_2) + f_{41}(v_3, B_3) \} \\ f_{18}(v_1, B_1) + f_{44}(v_2, B_2) + f_{44}(v_3, B_3) \\ f_{12}(v_1, B_1) + f_{12}(v_2, B_2) + f_{12}(v_3, B_3) \\ f_{17}(v_1, B_1) + \min \{ f_{44}(v_2, B_2) + f_{40}(v_3, B_3), f_{40}(v_2, B_2) + f_{44}(v_3, B_3) \} \end{array} \right.$
$f_{13}(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_{14}(v_1, B_1) + \min \{ f_{18}(v_2, B_2) + f_{17}(v_3, B_3), f_{17}(v_2, B_2) + f_{18}(v_3, B_3) \} \\ f_{13}(v_1, B_1) + f_{17}(v_2, B_2) + f_{17}(v_3, B_3) \\ f_{42}(v_1, B_1) + \min \{ f_{18}(v_2, B_2) + f_{44}(v_3, B_3), f_{44}(v_2, B_2) + f_{18}(v_3, B_3) \} \\ f_{42}(v_1, B_1) + \min \{ f_{44}(v_2, B_2) + f_{40}(v_3, B_3), f_{40}(v_2, B_2) + f_{44}(v_3, B_3) \} \end{array} \right.$
$f_{14}(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_{41}(v_1, B_1) + \min \{ f_{18}(v_2, B_2) + f_{44}(v_3, B_3), f_{44}(v_2, B_2) + f_{18}(v_3, B_3) \} \\ f_{14}(v_1, B_1) + f_{17}(v_2, B_2) + f_{17}(v_3, B_3) \\ f_{41}(v_1, B_1) + \min \{ f_{44}(v_2, B_2) + f_{40}(v_3, B_3), f_{40}(v_2, B_2) + f_{44}(v_3, B_3) \} \end{array} \right.$
$f_{15}(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_{16}(v_1, B_1) + \min \{ f_{18}(v_2, B_2) + f_{17}(v_3, B_3), f_{17}(v_2, B_2) + f_{18}(v_3, B_3) \} \\ f_{15}(v_1, B_1) + f_{17}(v_2, B_2) + f_{17}(v_3, B_3) \end{array} \right.$
$f_{16}(v_1, B) =$	$f_{16}(v_1, B_1) + f_{17}(v_2, B_2) + f_{17}(v_3, B_3)$
$f_{17}(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_{17}(v_1, B_1) + f_{12}(v_2, B_2) + f_{12}(v_3, B_3) \\ f_{43}(v_1, B_1) + \min \{ f_{18}(v_2, B_2) + f_{41}(v_3, B_3), f_{41}(v_2, B_2) + f_{18}(v_3, B_3) \} \\ f_{43}(v_1, B_1) + \min \{ f_{44}(v_2, B_2) + f_{17}(v_3, B_3), f_{17}(v_2, B_2) + f_{44}(v_3, B_3) \} \\ f_{43}(v_1, B_1) + f_{44}(v_2, B_2) + f_{44}(v_3, B_3) \end{array} \right.$
$f_{18}(v_1, B) =$	$f_{18}(v_1, B_1) + f_{12}(v_2, B_2) + f_{12}(v_3, B_3)$

Tabla 4.9: Caso $|V(K)| = 3$ para *RLDB*.

Función	
$f_{11}(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_{41}(v_1, B_1) + \min_{j=2, \dots, k} \left\{ f_{18}(v_j, B_j) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^k f_{17}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{44}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j, h=2, \dots, k \\ j \neq h}} \left\{ f_{18}(v_j, B_j) + f_{44}(v_h, B_h) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j, h}}^k f_{40}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{44}(v_1, B_1) + \sum_{i=2}^k f_{40}(v_i, B_i) \end{array} \right.$
$f_{12}(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_{17}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j, h=2, \dots, k \\ j \neq h}} \left\{ f_{18}(v_j, B_j) + f_{41}(v_h, B_h) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j, h}}^k f_{17}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{17}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j, h, l=2, \dots, k \\ j \neq h, j \neq l, h \neq l}} \left\{ f_{18}(v_j, B_j) + f_{44}(v_h, B_h) + f_{44}(v_l, B_l) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j, h, l}}^k f_{40}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{18}(v_1, B_1) + \min_{h=2, \dots, k} \left\{ f_{41}(v_h, B_h) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq h}}^k f_{17}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{18}(v_1, B_1) + \min_{\substack{h, l=2, \dots, k \\ h \neq l}} \left\{ f_{44}(v_h, B_h) + f_{44}(v_l, B_l) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq h, l}}^k f_{40}(v_i, B_i) \right\} \\ \sum_{i=1}^k f_{12}(v_i, B_i) \\ f_{17}(v_1, B_1) + \min_{h=2, \dots, k} \left\{ f_{44}(v_h, B_h) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq h}}^k f_{40}(v_i, B_i) \right\} \end{array} \right.$
$f_{13}(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_{14}(v_1, B_1) + \min_{j=2, \dots, k} \left\{ f_{18}(v_j, B_j) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^k f_{17}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{13}(v_1, B_1) + \sum_{i=2}^k f_{17}(v_i, B_i) \\ f_{42}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j, h=2, \dots, k \\ j \neq h}} \left\{ f_{18}(v_j, B_j) + f_{44}(v_h, B_h) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j, h}}^k f_{40}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{42}(v_1, B_1) + \min_{h=2, \dots, k} \left\{ f_{44}(v_h, B_h) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq h}}^k f_{40}(v_i, B_i) \right\} \end{array} \right.$
$f_{14}(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_{41}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j, h=2, \dots, k \\ j \neq h}} \left\{ f_{18}(v_j, B_j) + f_{44}(v_h, B_h) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j, h}}^k f_{40}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{14}(v_1, B_1) + \sum_{i=2}^k f_{17}(v_i, B_i) \\ f_{41}(v_1, B_1) + \min_{h=2, \dots, k} \left\{ f_{44}(v_h, B_h) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq h}}^k f_{40}(v_i, B_i) \right\} \end{array} \right.$
$f_{15}(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_{16}(v_1, B_1) + \min_{j=2, \dots, k} \left\{ f_{18}(v_j, B_j) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^k f_{17}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{15}(v_1, B_1) + \sum_{i=2}^k f_{17}(v_i, B_i) \end{array} \right.$
$f_{16}(v_1, B) = f_{16}(v_1, B_1) + \sum_{i=2}^k f_{17}(v_i, B_i)$	

 Tabla 4.10: Caso $|V(K)| \geq 4$ para *RLDB*.

Función	
$f_{17}(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_{17}(v_1, B_1) + \sum_{i=2}^k f_{12}(v_i, B_i) \\ f_{43}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j, h=2, \dots, k \\ j \neq h}} \left\{ f_{18}(v_j, B_j) + f_{41}(v_h, B_h) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j, h}}^k f_{17}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{43}(v_1, B_1) + \min_{h=2, \dots, k} \left\{ f_{44}(v_h, B_h) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq h}}^k f_{17}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{43}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j, h, l=2, \dots, k \\ j \neq h, j \neq l, h \neq l}} \left\{ f_{18}(v_j, B_j) + f_{44}(v_h, B_h) + f_{44}(v_l, B_l) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j, h, l}}^k f_{40}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{43}(v_1, B_1) + \min_{\substack{h, l=2, \dots, k \\ h \neq l}} \left\{ f_{44}(v_h, B_h) + f_{44}(v_l, B_l) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq h, l}}^k f_{40}(v_i, B_i) \right\} \\ \sum_{i=1}^k f_{12}(v_i, B_i) \end{array} \right.$
$f_{18}(v_1, B) =$	$f_{18}(v_1, B_1) + \sum_{i=2}^k f_{12}(v_i, B_i)$

 Tabla 4.11: Caso $|V(K)| \geq 4$ para $RLDB$.

4.5. Cálculo del número de localización-dominación abierta

El algoritmo $ROLDB$ necesita computar las funciones principales $f_j(v_1, B)$ con $j \in \{19, \dots, 27\}$, y para poder hacerlo necesitamos para todo $i \in \{1, \dots, k\}$ las funciones principales $f_j(v_i, B_i)$ para $j \in \{19, \dots, 27\}$ y las funciones auxiliares $f_j(v_i, B_i)$ para $j \in \{45, \dots, 53\}$.

Teorema 4.16 *Consideramos un grafo block B y $V(K) = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$. Sea C un conjunto en $V(B)$ y $C_i = C \cap V(B_i)$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Luego, C es un v_1 -almost conjunto de localización-dominación abierta en B que tiene las propiedades OLD , CO y OFN si y solo si C_i es un v_i -almost conjunto de localización-dominación abierta en B_i para todo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ y se satisface uno de los siguientes conjuntos de afirmaciones:*

- (i) C_1 es OLD , CO y \overline{OFN} , existe $j \neq 1$ tal que C_j es \overline{CO} y \overline{ADJ} , y C_i es \overline{CO} y ADJ para todo $i \neq 1, j$.
- (ii) Si $k \geq 3$, C_1 es CO , ADJ y \overline{OFN} , existe $h \neq 1$ tal que C_h es \overline{CO} , existe $j \neq 1, h$ tal que C_j es CO y \overline{ADJ} , C_i es \overline{CO} y ADJ para todo $i \neq 1, h, j$.
- (iii) Si $k \geq 3$, C_1 es CO y \overline{OFN} , existe $h \neq 1$ tal que C_h es \overline{CO} , existe $j \neq 1, h$ tal que C_j es CO , \overline{ADJ} y \overline{OFN} , y C_i es \overline{CO} y ADJ para todo $i \neq 1, j$.

- (iv) Si $k \geq 3$, C_1 es CO , ADJ y OFN , existe $j \neq 1$ tal que C_j es \overline{CO} y \overline{ADJ} , existe $h \neq 1, j$ tal que C_h es CO y ADJ , y C_i es \overline{CO} y ADJ para todo $i \neq 1, j, h$.
- (v) Si $k \geq 3$, C_1 es CO y OFN , existe $j \neq 1$ tal que C_j es \overline{CO} y \overline{ADJ} , existe $h \neq 1, j$ tal que C_h es CO , ADJ y \overline{OFN} , y C_i es \overline{CO} y ADJ para todo $i \neq 1, j, h$.
- (vi) Si $k \geq 4$, C_1 es CO y OFN , existe $j \neq 1$ tal que C_j es \overline{CO} y \overline{ADJ} , existe $h, l \neq 1, h \neq l$ tal que C_h, C_l son CO , y C_i es CO o ADJ para todo $i \neq 1, j, h, l$.
- (vii) C_1 es OLD , CO y OFN , y C_i es \overline{CO} y ADJ para todo $i \neq 2$.
- (viii) C_1 es CO , ADJ y OFN , existe $h \neq 1$ tal que C_h es CO y ADJ , y C_i es \overline{CO} y ADJ para todo $i \neq 1, h$.
- (ix) C_1 es CO y OFN , existe $h \neq 1$ tal que C_h es CO , ADJ y \overline{OFN} , y C_i es \overline{CO} y ADJ para todo $i \neq 1, h$.
- (x) Si $k \geq 3$, C_1 es CO y OFN , existe $h, l \neq 1, h \neq l$ tal que C_h, C_l son CO , y C_i es CO o ADJ para todo $i \neq 1, h, l$.

Demostración: Sea C un v_1 -almost OLD -conjunto que satisface OLD , CO y OFN .

Por la Observación 4.4 tenemos que C_i es un v_i -almost OLD -conjunto en B_i para todo i . También tenemos que C_1 es CO ya que C es CO y $v_1 \in V(B_1)$. Más aún, como C es OFN , existe único $w \in V(B)$ tal que $N(w) \cap C = \{v_1\}$.

Sea $w = v_j$ para algún $j \neq 1$, luego C_1 es \overline{OFN} , C_i es \overline{CO} para todo $i \neq 1, j$ y C_j es \overline{ADJ} . Más aún, si C_j es \overline{CO} , entonces C_i es ADJ para $i \neq 1, j$. Además, como $N(v_1) \cap C \cap V(B_i) = \emptyset$ para todo $i \neq 1$ y C es OLD , tenemos que C_1 es OLD , y se verifica (i). Ahora bien, si C_j es CO , por el Lema 4.6 existe a lo sumo $h \neq 1, j$ tal que C_h es \overline{ADJ} . Por otro lado, ya que C es OLD los vecinos de v_j están separados de v_1 . Luego, o bien C_1 es ADJ y se prueba (ii), o C_j es \overline{OFN} y tenemos (iii).

Ahora, si $w \in V(B_1)$ luego C_1 es OFN . Tenemos que analizar diferentes casos.

Supongamos que existe $j \neq 1$ tal que C_j es \overline{CO} y \overline{ADJ} , tal j es único por Lema 4.6. Como C_1 es OFN , existe $h \neq 1, j$ tal que C_h es CO .

Si C_i es \overline{CO} para todo $i \neq 1, h$, C_i es ADJ para todo $i \neq 1, j, h$ ya que C es OLD y v_j está separado de v_i . Además C_h es ADJ , pues C_1 es OFN . Como C es OLD , v_1 está separado de los vértices en $N(v_h)$, por lo tanto, o bien C_1 es ADJ y tenemos (iv), o C_h es \overline{OFN} y se verifica (v).

Supongamos ahora que existen al menos dos $h, l \neq 1, j, h \neq l$ tales que C_h y C_l son CO . Luego C_i es CO o ADJ para todo $i \neq 1, j, h, l$, lo que prueba (vi).

Por otro lado, si C_i es CO o ADJ para todo $i \neq 1$, tenemos tres casos.

Si C_i es \overline{CO} para todo $i \neq 1$, luego C_i es ADJ para todo $i \neq 1$ y como C es OLD y $N(v_1) \cap C \cap V(B_i) = \emptyset$ para todo $i \neq 1$, tenemos que C_1 es OLD y se prueba (vii).

Si existe único $h \neq 1$ tal que C_h es CO , luego C_i es \overline{CO} y ADJ para todo $i \neq 1, h$. Más aún, como C_1 es OFN , tenemos que C_h es ADJ . Ahora, como C es OLD , v_1 y los vértices en $N(v_h)$ están separados, luego o bien C_1 es ADJ y tenemos $(viii)$, o C_h es \overline{OFN} y ocurre (ix) .

Finalmente, si C_h y C_l son CO para ciertos $h, l \neq 1, h \neq l$, C_i es CO o ADJ para todo $i \neq 1, h, l$ y tenemos (x) .

Recíprocamente, sea C_i un v_i -almost OLD -conjunto en B_i para todo i y sea $C = \bigcup_{i=1}^k C_i$. Probaremos que C es un v_i -almost OLD -conjunto en B con las propiedades OLD , CO y OFN .

Observemos que C es CO ya que C_1 es CO en todos los conjuntos de afirmaciones de (i) a (x) . También, es inmediato chequear que C es OFN .

Para probar que C es OLD necesitamos verificar que si $u, v \in V(B)$, $dist(u, v) \leq 2$ están dominados y separados por C . Por el Lema 4.5, si $u, v \in V(B) - \bigcup_{i=1}^k \{v_i\}$, u y v están dominados y separados por C . Ahora, sean $u, v \in V(B)$, $dist(u, v) = 2$ y $u \in V(K)$. Entonces $v \in V(B_i) - \{v_i\}$ para algún i y $u = v_r$ para algún r .

Suponemos primero que $r = 1$. Si $i = 1$, en (i) y (vii) C_1 es OLD . En los restantes casos, existe $h \neq 1$ tal que C_h es CO . Por lo tanto, en cualquier caso, u y v están dominados y separados. Ahora, sea $i \neq 1$. En (i) , (ii) , (iv) , (vii) y $(viii)$, C_1 es ADJ , así u y v están dominados y separados. En (vi) y (x) , $\{v_h, v_l\} \subseteq N(u) \cap C$, pero a lo sumo uno entre v_h y v_l está en $N(v) \cap C$, así u y v están dominados y separados. En (iii) , si $i = j$, como C_j es \overline{OFN} existe $w \neq v_j$ tal que $w \in (N(v) \cap C) - N(u)$, por otra parte, si $i \neq j$, $v_j \in (N(u) \cap C) - N(u)$, luego u y v están dominados y separados. En (v) y (ix) , si $i = h$ como C_h es \overline{OFN} existe $w \neq v_h$ tal que $w \in (N(v) \cap C) - N(u)$, por otro lado, si $i \neq h$, $v_h \in (N(u) \cap C) - N(v)$, luego u y v están dominados y separados.

Consideramos $r \neq 1$. Si $i \neq 1$, como C_1 es CO en todos los casos de (i) a (x) , se tiene que $v_1 \in (N(u) \cap C) - N(v)$ y u y v están dominados y separados. Si $i = 1$, en (i) , (ii) y (iii) , C_1 es \overline{OFN} y existe $w \in (N(v) \cap C) - N(u) - \{v_1\}$ y u y v están dominados y separados. En los restantes casos, C_r es ADJ o existe $h \neq 1, r$ tal que $v_h \in N(u) \cap C$, así u y v están dominados y separados.

Ahora, sean $u, v \in V(B)$, $dist(u, v) = 1$, $u \in V(K)$ y $v \notin V(K)$. Luego, $v \in V(B_i) - \{v_i\}$ para algún i y $u = v_i$.

Si $i = 1$, en (i) y (vii) C_1 es OLD . En los restantes casos existe $h \neq 1$ tal que C_h es CO , así u y v están dominados y separados.

Si $i \neq 1$, en todos los casos de (i) a (x) C_1 es CO y u y v están dominados y separados.

Finalmente, sean $u = v_i$ y $v = v_j$ para $i \neq j$. En todos los casos de (i) a (x) , C_i y C_j son CO o ADJ . Luego u y v están dominados y separados.

Una ilustración de la prueba del teorema se encuentra en las Figuras 4.5, 4.6 y 4.7. ■

Corolario 4.17 Con la notación del Teorema 4.16, tenemos lo siguiente:

- si $k = 2$,

$$f_{19}(v_1, B) = \min \begin{cases} f_{20}(v_1, B_1) + f_{27}(v_2, B_2) \\ f_{19}(v_1, B_1) + f_{26}(v_2, B_2) \\ f_{22}(v_1, B_1) + f_{46}(v_2, B_2) \\ f_{51}(v_1, B_1) + f_{23}(v_2, B_2) \end{cases}$$

- si $k = 3$,

$$f_{19}(v_1, B) = \min \begin{cases} f_{20}(v_1, B_1) + \min\{f_{27}(v_2, B_2) + f_{26}(v_3, B_3), f_{26}(v_2, B_2) + f_{27}(v_3, B_3)\} \\ f_{23}(v_1, B_1) + \min\{f_{53}(v_2, B_2) + f_{47}(v_3, B_3), f_{47}(v_2, B_2) + f_{53}(v_3, B_3)\} \\ f_{52}(v_1, B_1) + \min\{f_{53}(v_2, B_2) + f_{25}(v_3, B_3), f_{25}(v_2, B_2) + f_{53}(v_3, B_3)\} \\ f_{22}(v_1, B_1) + \min\{f_{27}(v_2, B_2) + f_{46}(v_3, B_3), f_{46}(v_2, B_2) + f_{27}(v_3, B_3)\} \\ f_{51}(v_1, B_1) + \min\{f_{27}(v_2, B_2) + f_{23}(v_3, B_3), f_{23}(v_2, B_2) + f_{27}(v_3, B_3)\} \\ f_{19}(v_1, B_1) + f_{26}(v_2, B_2) + f_{26}(v_3, B_3) \\ f_{22}(v_1, B_1) + \min\{f_{46}(v_2, B_2) + f_{26}(v_3, B_3), f_{26}(v_2, B_2) + f_{46}(v_3, B_3)\} \\ f_{51}(v_1, B_1) + \min\{f_{23}(v_2, B_2) + f_{26}(v_3, B_3), f_{26}(v_2, B_2) + f_{23}(v_3, B_3)\} \\ f_{51}(v_1, B_1) + f_{48}(v_2, B_2) + f_{48}(v_3, B_3) \end{cases}$$

- si $k \geq 4$,

$$f_{19}(v_1, B) = \min \begin{cases} f_{20}(v_1, B_1) + \min_{j=2, \dots, k} \left\{ f_{27}(v_j, B_j) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^k f_{26}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{23}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j, h=2, \dots, k \\ j \neq h}} \left\{ f_{53}(v_h, B_h) + f_{47}(v_j, B_j) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j, h}}^k f_{26}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{52}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j, h=2, \dots, k \\ j \neq h}} \left\{ f_{53}(v_h, B_h) + f_{25}(v_j, B_j) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^k f_{26}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{22}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j, h=2, \dots, k \\ j \neq h}} \left\{ f_{27}(v_j, B_j) + f_{46}(v_h, B_h) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j, h}}^k f_{26}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{51}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j, h=2, \dots, k \\ j \neq h}} \left\{ f_{27}(v_j, B_j) + f_{23}(v_h, B_h) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j, h}}^k f_{26}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{51}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j, h, l=2, \dots, k \\ j \neq h, j \neq l, h \neq l}} \left\{ f_{27}(v_j, B_j) + f_{48}(v_h, B_h) + f_{48}(v_l, B_l) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j, h, l}}^k f_{50}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{19}(v_1, B_1) + \sum_{i=2}^k f_{26}(v_i, B_i) \\ f_{22}(v_1, B_1) + \min_{h=2, \dots, k} \left\{ f_{46}(v_h, B_h) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq h}}^k f_{26}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{51}(v_1, B_1) + \min_{h=2, \dots, k} \left\{ f_{23}(v_h, B_h) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq h}}^k f_{26}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{51}(v_1, B_1) + \min_{\substack{h, l=2, \dots, k \\ h \neq l}} \left\{ f_{48}(v_h, B_h) + f_{48}(v_l, B_l) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq h, l}}^k f_{50}(v_i, B_i) \right\} \end{cases}$$

4.5. CÁLCULO DEL NÚMERO DE LOCALIZACIÓN-DOMINACIÓN ABIERTA

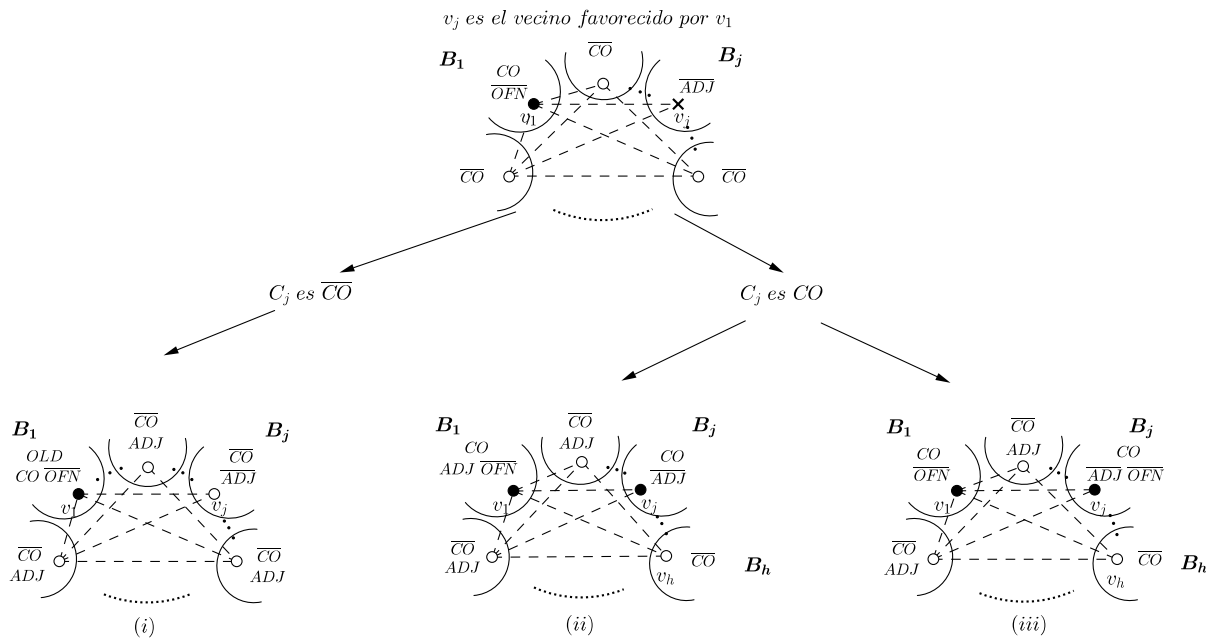


Figura 4.5: Teorema 4.16. Casos (i) a (iii).

En forma similar se pueden obtener las restantes funciones principales $f_j(v_1, B)$ para $j \in \{20, \dots, 27\}$. Dichas funciones se encuentran en las Tablas 4.12, 4.13, 4.14, 4.15, 4.16, 4.17 y 4.18 se presenta una explicación ilustrativa en el Apéndice.

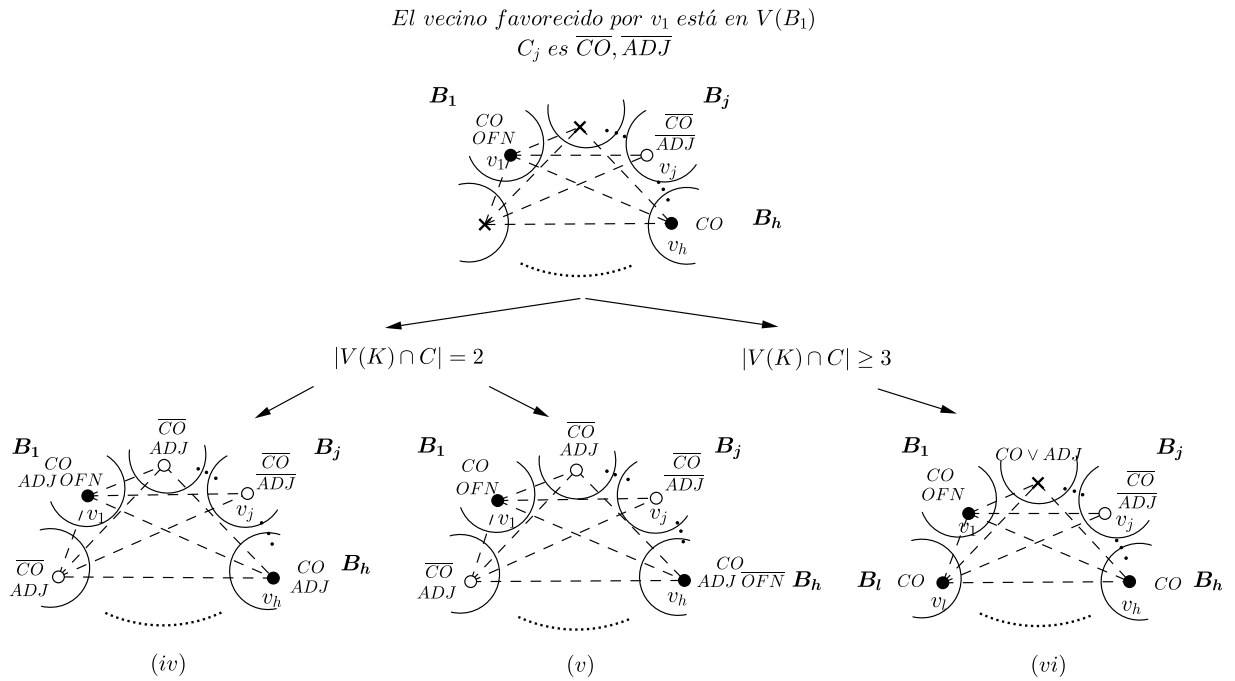


Figura 4.6: Teorema 4.16. Casos (iv) a (vi).

Función	Función
$f_{19}(v_1, B) = \min \begin{cases} f_{20}(v_1, B_1) + f_{27}(v_2, B_2) \\ f_{19}(v_1, B_1) + f_{26}(v_2, B_2) \\ f_{22}(v_1, B_1) + f_{46}(v_2, B_2) \\ f_{51}(v_1, B_1) + f_{23}(v_2, B_2) \end{cases}$	$f_{24}(v_1, B) = \min \begin{cases} f_{25}(v_1, B_1) + f_{27}(v_2, B_2) \\ f_{24}(v_1, B_1) + f_{26}(v_2, B_2) \end{cases}$
$f_{20}(v_1, B) = \min \begin{cases} f_{20}(v_1, B_1) + f_{26}(v_2, B_2) \\ f_{23}(v_1, B_1) + f_{46}(v_2, B_2) \\ f_{52}(v_1, B_1) + f_{23}(v_2, B_2) \end{cases}$	$f_{25}(v_1, B) = f_{25}(v_1, B_1) + f_{26}(v_2, B_2)$
$f_{21}(v_1, B) = \min \begin{cases} f_{27}(v_1, B_1) + f_{20}(v_2, B_2) \\ f_{21}(v_1, B_1) + f_{21}(v_2, B_2) \\ f_{26}(v_1, B_1) + f_{40}(v_2, B_2) \end{cases}$	$f_{26}(v_1, B) = \min \begin{cases} f_{26}(v_1, B_1) + f_{21}(v_2, B_2) \\ f_{53}(v_1, B_1) + f_{45}(v_2, B_2) \end{cases}$
$f_{22}(v_1, B) = \min \begin{cases} f_{23}(v_1, B_1) + f_{27}(v_2, B_2) \\ f_{52}(v_1, B_1) + f_{47}(v_2, B_2) \\ f_{22}(v_1, B_1) + f_{26}(v_2, B_2) \\ f_{51}(v_1, B_1) + f_{46}(v_2, B_2) \end{cases}$	$f_{27}(v_1, B) = f_{27}(v_1, B_1) + f_{21}(v_2, B_2)$
$f_{23}(v_1, B) = \min \begin{cases} f_{23}(v_1, B_1) + f_{26}(v_2, B_2) \\ f_{52}(v_1, B_1) + f_{46}(v_2, B_2) \end{cases}$	

Tabla 4.12: Caso $|V(K)| = 2$ para *ROLDB*.

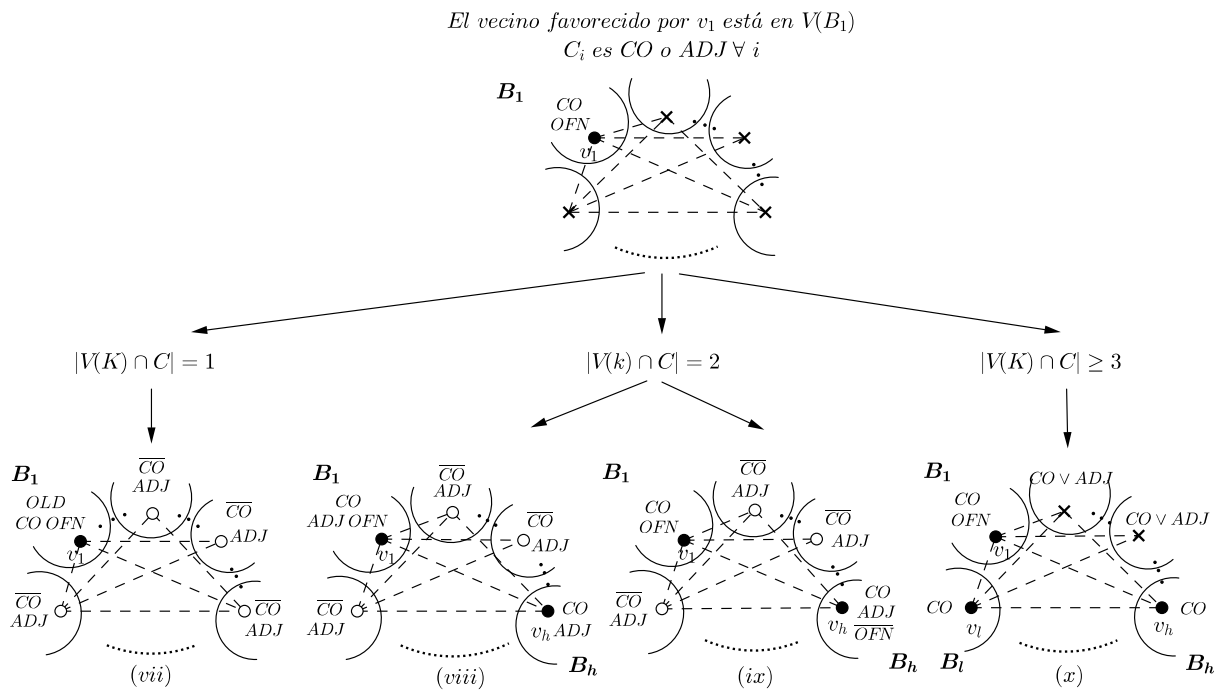


Figura 4.7: Teorema 4.16. Casos (vii) a (x).

Función	
$f_{19}(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_{20}(v_1, B_1) + \min\{f_{27}(v_2, B_2) + f_{26}(v_3, B_3), f_{26}(v_2, B_2) + f_{27}(v_3, B_3)\} \\ f_{23}(v_1, B_1) + \min\{f_{53}(v_2, B_2) + f_{47}(v_3, B_3), f_{47}(v_2, B_2) + f_{53}(v_3, B_3)\} \\ f_{52}(v_1, B_1) + \min\{f_{53}(v_2, B_2) + f_{25}(v_3, B_3), f_{25}(v_2, B_2) + f_{53}(v_3, B_3)\} \\ f_{22}(v_1, B_1) + \min\{f_{27}(v_2, B_2) + f_{46}(v_3, B_3), f_{46}(v_2, B_2) + f_{27}(v_3, B_3)\} \\ f_{51}(v_1, B_1) + \min\{f_{27}(v_2, B_2) + f_{23}(v_3, B_3), f_{23}(v_2, B_2) + f_{27}(v_3, B_3)\} \\ f_{19}(v_1, B_1) + f_{26}(v_2, B_2) + f_{26}(v_3, B_3) \\ f_{22}(v_1, B_1) + \min\{f_{46}(v_2, B_2) + f_{26}(v_3, B_3), f_{26}(v_2, B_2) + f_{46}(v_3, B_3)\} \\ f_{51}(v_1, B_1) + \min\{f_{23}(v_2, B_2) + f_{26}(v_3, B_3), f_{26}(v_2, B_2) + f_{23}(v_3, B_3)\} \\ f_{51}(v_1, B_1) + f_{48}(v_2, B_2) + f_{48}(v_3, B_3) \end{array} \right.$
$f_{20}(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_{23}(v_1, B_1) + \min\{f_{27}(v_2, B_2) + f_{46}(v_3, B_3), f_{46}(v_2, B_2) + f_{27}(v_3, B_3)\} \\ f_{52}(v_1, B_1) + \min\{f_{27}(v_2, B_2) + f_{23}(v_3, B_3), f_{23}(v_2, B_2) + f_{27}(v_3, B_3)\} \\ f_{20}(v_1, B_1) + f_{26}(v_2, B_2) + f_{26}(v_3, B_3) \\ f_{23}(v_1, B_1) + \min\{f_{46}(v_2, B_2) + f_{26}(v_3, B_3), f_{26}(v_2, B_2) + f_{46}(v_3, B_3)\} \\ f_{52}(v_1, B_1) + \min\{f_{23}(v_2, B_2) + f_{26}(v_3, B_3), f_{26}(v_2, B_2) + f_{23}(v_3, B_3)\} \\ f_{52}(v_1, B_1) + f_{48}(v_2, B_2) + f_{48}(v_3, B_3) \end{array} \right.$
$f_{21}(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_{26}(v_1, B_1) + \min\{f_{27}(v_2, B_2) + f_{20}(v_3, B_3), f_{20}(v_2, B_2) + f_{27}(v_3, B_3)\} \\ f_{27}(v_1, B_1) + \min\{f_{20}(v_2, B_2) + f_{26}(v_3, B_3), f_{26}(v_2, B_2) + f_{20}(v_3, B_3)\} \\ f_{53}(v_1, B_1) + f_{46}(v_2, B_2) + f_{46}(v_3, B_3) \\ f_{53}(v_1, B_1) + f_{52}(v_2, B_2) + f_{52}(v_3, B_3) \\ f_{53}(v_1, B_1) + \min\{f_{48}(v_2, B_2) + f_{23}(v_3, B_3), f_{23}(v_2, B_2) + f_{48}(v_3, B_3)\} \\ f_{21}(v_1, B_1) + f_{21}(v_2, B_2) + f_{21}(v_3, B_3) \\ f_{26}(v_1, B_1) + \min\{f_{45}(v_2, B_2) + f_{26}(v_3, B_3), f_{26}(v_2, B_2) + f_{45}(v_3, B_3)\} \end{array} \right.$
$f_{22}(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_{23}(v_1, B_1) + \min\{f_{27}(v_2, B_2) + f_{26}(v_3, B_3), f_{26}(v_2, B_2) + f_{27}(v_3, B_3)\} \\ f_{52}(v_1, B_1) + \min\{f_{27}(v_2, B_2) + f_{47}(v_3, B_3), f_{47}(v_2, B_2) + f_{27}(v_3, B_3)\} \\ f_{52}(v_1, B_1) + \min\{f_{47}(v_2, B_2) + f_{26}(v_3, B_3), f_{26}(v_2, B_2) + f_{47}(v_3, B_3)\} \\ f_{51}(v_1, B_1) + \min\{f_{27}(v_2, B_2) + f_{46}(v_3, B_3), f_{46}(v_2, B_2) + f_{27}(v_3, B_3)\} \\ f_{22}(v_1, B_1) + f_{26}(v_2, B_2) + f_{26}(v_3, B_3) \\ f_{51}(v_1, B_1) + \min\{f_{46}(v_2, B_2) + f_{26}(v_3, B_3), f_{26}(v_2, B_2) + f_{46}(v_3, B_3)\} \\ f_{51}(v_1, B_1) + f_{48}(v_2, B_2) + f_{48}(v_3, B_3) \end{array} \right.$
$f_{23}(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_{52}(v_1, B_1) + \min\{f_{27}(v_2, B_2) + f_{46}(v_3, B_3), f_{46}(v_2, B_2) + f_{27}(v_3, B_3)\} \\ f_{23}(v_1, B_1) + f_{26}(v_2, B_2) + f_{26}(v_3, B_3) \\ f_{52}(v_1, B_1) + \min\{f_{46}(v_2, B_2) + f_{26}(v_3, B_3), f_{26}(v_2, B_2) + f_{46}(v_3, B_3)\} \\ f_{52}(v_1, B_1) + f_{48}(v_2, B_2) + f_{48}(v_3, B_3) \end{array} \right.$
$f_{24}(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_{25}(v_1, B_1) + \min\{f_{27}(v_2, B_2) + f_{26}(v_3, B_3), f_{26}(v_2, B_2) + f_{27}(v_3, B_3)\} \\ f_{24}(v_1, B_1) + f_{26}(v_2, B_2) + f_{26}(v_3, B_3) \end{array} \right.$
$f_{25}(v_1, B) = f_{25}(v_1, B_1) + f_{26}(v_2, B_2) + f_{26}(v_3, B_3)$	
$f_{26}(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_{26}(v_1, B_1) + f_{21}(v_2, B_2) + f_{21}(v_3, B_3) \\ f_{53}(v_1, B_1) + \min\{f_{45}(v_2, B_2) + f_{26}(v_3, B_3), f_{26}(v_2, B_2) + f_{45}(v_3, B_3)\} \\ f_{53}(v_1, B_1) + \min\{f_{27}(v_2, B_2) + f_{20}(v_3, B_3), f_{20}(v_2, B_2) + f_{27}(v_3, B_3)\} \end{array} \right.$
$f_{27}(v_1, B) = f_{27}(v_1, B_1) + f_{21}(v_2, B_2) + f_{21}(v_3, B_3)$	

Tabla 4.13: Caso $|V(K)| = 3$ para *ROLDB*.

Función	
$f_{19}(v_1, B) = \min$	$f_{20}(v_1, B_1) + \min_{j=2,3,4} \{f_{27}(v_j, B_j) + \sum_{i=2,3,4, i \neq j} f_{26}(v_i, B_i)\}$
	$f_{23}(v_1, B_1) + \min_{i,j,s=2,3,4, i \neq j, j \neq s, i \neq s} \{f_{53}(v_i, B_i) + f_{47}(v_j, B_j) + f_{26}(v_s, B_s)\}$
	$f_{52}(v_1, B_1) + \min_{i,j,s=2,3,4, i \neq j, j \neq s, i \neq s} \{f_{53}(v_i, B_i) + f_{25}(v_j, B_j) + f_{26}(v_s, B_s)\}$
	$f_{22}(v_1, B_1) + \min_{i,j,s=2,3,4, i \neq j, j \neq s, i \neq s} \{f_{27}(v_i, B_i) + f_{46}(v_j, B_j) + f_{26}(v_s, B_s)\}$
	$f_{51}(v_1, B_1) + \min_{i,j,s=2,3,4, i \neq j, j \neq s, i \neq s} \{f_{27}(v_i, B_i) + f_{23}(v_j, B_j) + f_{26}(v_s, B_s)\}$
	$f_{51}(v_1, B_1) + \min_{j=2,3,4} \{f_{27}(v_j, B_j) + \sum_{i=2,3,4, i \neq j} f_{48}(v_i, B_i)\}$
	$f_{19}(v_1, B_1) + f_{26}(v_2, B_2) + f_{26}(v_3, B_3) + f_{26}(v_4, B_4)$
	$f_{22}(v_1, B_1) + \min_{j=2,3,4} \{f_{46}(v_j, B_j) + \sum_{i=2,3,4, i \neq j} f_{26}(v_i, B_i)\}$
	$f_{51}(v_1, B_1) + \min_{j=2,3,4} \{f_{23}(v_j, B_j) + \sum_{i=2,3,4, i \neq j} f_{26}(v_i, B_i)\}$
	$f_{51}(v_1, B_1) + \min_{j=2,3,4} \{f_{50}(v_j, B_j) + \sum_{i=2,3,4, i \neq j} f_{48}(v_i, B_i)\}$
$f_{20}(v_1, B) = \min$	$f_{23}(v_1, B_1) + \min_{i,j,s=2,3,4, i \neq j, j \neq s, i \neq s} \{f_{26}(v_i, B_i) + f_{27}(v_j, B_j) + f_{46}(v_s, B_s)\}$
	$f_{52}(v_1, B_1) + \min_{i,j,s=2,3,4, i \neq j, j \neq s, i \neq s} \{f_{27}(v_i, B_i) + f_{23}(v_j, B_j) + f_{26}(v_s, B_s)\}$
	$f_{52}(v_1, B_1) + \min_{j=2,3,4} \{f_{27}(v_j, B_j) + \sum_{i=2,3,4, i \neq j} f_{48}(v_i, B_i)\}$
	$f_{20}(v_1, B_1) + f_{26}(v_2, B_2) + f_{26}(v_3, B_3) + f_{26}(v_4, B_4)$
	$f_{23}(v_1, B_1) + \min_{j=2,3,4} \{f_{46}(v_j, B_j) + \sum_{i=2,3,4, i \neq j} f_{26}(v_i, B_i)\}$
	$f_{52}(v_1, B_1) + \min_{j=2,3,4} \{f_{23}(v_j, B_j) + \sum_{i=2,3,4, i \neq j} f_{26}(v_i, B_i)\}$
	$f_{52}(v_1, B_1) + \min_{j=2,3,4} \{f_{50}(v_j, B_j) + \sum_{i=2,3,4, i \neq j} f_{48}(v_i, B_i)\}$
	$f_{26}(v_1, B_1) + \min_{i,j,s=2,3,4, i \neq j, j \neq s, i \neq s} \{f_{27}(v_i, B_i) + f_{20}(v_j, B_j) + f_{26}(v_s, B_s)\}$
	$f_{26}(v_1, B_1) + \min_{j=2,3,4} \{f_{27}(v_j, B_j) + \sum_{i=2,3,4, i \neq j} f_{46}(v_i, B_i)\}$
	$f_{26}(v_1, B_1) + \min_{j=2,3,4} \{f_{27}(v_j, B_j) + \sum_{i=2,3,4, i \neq j} f_{52}(v_i, B_i)\}$
$f_{21}(v_1, B) = \min$	$f_{26}(v_1, B_1) + \min_{i,j,s=2,3,4, i \neq j, j \neq s, i \neq s} \{f_{27}(v_i, B_i) + f_{23}(v_j, B_j) + f_{48}(v_s, B_s)\}$
	$f_{27}(v_1, B_1) + \min_{j=2,3,4} \{f_{20}(v_j, B_j) + \sum_{i=2,3,4, i \neq j} f_{26}(v_i, B_i)\}$
	$f_{53}(v_1, B_1) + f_{48}(v_2, B_2) + f_{48}(v_3, B_3) + f_{48}(v_4, B_4)$
	$f_{53}(v_1, B_1) + \min_{j=2,3,4} \{f_{26}(v_j, B_j) + \sum_{i=2,3,4, i \neq j} f_{46}(v_i, B_i)\}$
	$f_{53}(v_1, B_1) + \min_{j=2,3,4} \{f_{26}(v_j, B_j) + \sum_{i=2,3,4, i \neq j} f_{52}(v_i, B_i)\}$
	$f_{53}(v_1, B_1) + \min_{i,j,s=2,3,4, i \neq j, j \neq s, i \neq s} \{f_{23}(v_i, B_i) + f_{48}(v_j, B_j) + f_{26}(v_s, B_s)\}$
	$f_{21}(v_1, B_1) + f_{21}(v_2, B_2) + f_{21}(v_3, B_3) + f_{21}(v_4, B_4)$
	$f_{26}(v_1, B_1) + \min_{j=2,3,4} \{f_{45}(v_j, B_j) + \sum_{i=2,3,4, i \neq j} f_{26}(v_i, B_i)\}$

Tabla 4.14: Caso $|V(K)| = 4$ para *ROLDB*.

Función	
$f_{22}(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_{23}(v_1, B_1) + \min_{j=2,3,4} \{f_{27}(v_j, B_j) + \sum_{i=2,3,4, i \neq j} f_{26}(v_i, B_i)\} \\ f_{52}(v_1, B_1) + \min_{i,j,s=2,3,4, i \neq j, j \neq s, i \neq s} \{f_{26}(v_i, B_i) + f_{27}(v_j, B_j) + f_{47}(v_s, B_s)\} \\ f_{52}(v_1, B_1) + \min_{j=2,3,4} \{f_{47}(v_j, B_j) + \sum_{i=2,3,4, i \neq j} f_{26}(v_i, B_i)\} \\ f_{51}(v_1, B_1) + \min_{i,j,s=2,3,4, i \neq j, j \neq s, i \neq s} \{f_{26}(v_i, B_i) + f_{27}(v_j, B_j) + f_{46}(v_s, B_s)\} \\ f_{51}(v_1, B_1) + \min_{j=2,3,4} \{f_{27}(v_j, B_j) + \sum_{i=2,3,4, i \neq j} f_{48}(v_i, B_i)\} \\ f_{22}(v_1, B_1) + f_{26}(v_2, B_2) + f_{26}(v_3, B_3) + f_{26}(v_4, B_4) \\ f_{51}(v_1, B_1) + \min_{j=2,3,4} \{f_{46}(v_j, B_j) + \sum_{i=2,3,4, i \neq j} f_{26}(v_i, B_i)\} \\ f_{51}(v_1, B_1) + \min_{j=2,3,4} \{f_{50}(v_j, B_j) + \sum_{i=2,3,4, i \neq j} f_{48}(v_i, B_i)\} \end{array} \right.$
$f_{23}(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_{52}(v_1, B_1) + \min_{i,j,s=2,3,4, i \neq j, j \neq s, i \neq s} \{f_{26}(v_i, B_i) + f_{27}(v_j, B_j) + f_{46}(v_s, B_s)\} \\ f_{52}(v_1, B_1) + \min_{j=2,3,4} \{f_{27}(v_j, B_j) + \sum_{i=2,3,4, i \neq j} f_{48}(v_i, B_i)\} \\ f_{23}(v_1, B_1) + f_{26}(v_2, B_2) + f_{26}(v_3, B_3) + f_{26}(v_4, B_4) \\ f_{52}(v_1, B_1) + \min_{j=2,3,4} \{f_{46}(v_j, B_j) + \sum_{i=2,3,4, i \neq j} f_{26}(v_i, B_i)\} \\ f_{52}(v_1, B_1) + \min_{j=2,3,4} \{f_{50}(v_j, B_j) + \sum_{i=2,3,4, i \neq j} f_{48}(v_i, B_i)\} \end{array} \right.$
$f_{24}(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_{25}(v_1, B_1) + \min_{j=2,3,4} \{f_{27}(v_j, B_j) + \sum_{i=2,3,4, i \neq j} f_{26}(v_i, B_i)\} \\ f_{24}(v_1, B_1) + f_{26}(v_2, B_2) + f_{26}(v_3, B_3) + f_{26}(v_4, B_4) \end{array} \right.$
$f_{25}(v_1, B) = f_{25}(v_1, B_1) + f_{26}(v_2, B_2) + f_{26}(v_3, B_3) + f_{26}(v_4, B_4)$	
$f_{26}(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_{26}(v_1, B_1) + f_{21}(v_2, B_2) + f_{21}(v_3, B_3) + f_{21}(v_4, B_4) \\ f_{53}(v_1, B_1) + \min_{j=2,3,4} \{f_{45}(v_j, B_j) + \sum_{i=2,3,4, i \neq j} f_{26}(v_i, B_i)\} \\ f_{53}(v_1, B_1) + \min_{i,j,s=2,3,4, i \neq j, j \neq s, i \neq s} \{f_{26}(v_i, B_i) + f_{27}(v_j, B_j) + f_{20}(v_s, B_s)\} \\ f_{53}(v_1, B_1) + \min_{j=2,3,4} \{f_{53}(v_j, B_j) + \sum_{i=2,3,4, i \neq j} f_{46}(v_i, B_i)\} \\ f_{53}(v_1, B_1) + \min_{j=2,3,4} \{f_{53}(v_j, B_j) + \sum_{i=2,3,4, i \neq j} f_{52}(v_i, B_i)\} \\ f_{53}(v_1, B_1) + \min_{i,j,s=2,3,4, i \neq j, j \neq s, i \neq s} \{f_{23}(v_i, B_i) + f_{48}(v_j, B_j) + f_{53}(v_s, B_s)\} \end{array} \right.$
$f_{27}(v_1, B) = f_{27}(v_1, B_1) + f_{21}(v_2, B_2) + f_{21}(v_3, B_3) + f_{21}(v_4, B_4)$	

Tabla 4.15: Caso $|V(K)| = 4$ para *ROLDB*.

Función	
$f_{19}(v_1, B) = \min$	$f_{20}(v_1, B_1) + \min_{j=2, \dots, k} \left\{ f_{27}(v_j, B_j) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^k f_{26}(v_i, B_i) \right\}$
	$f_{23}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j, h=2, \dots, k \\ j \neq h}} \left\{ f_{27}(v_h, B_h) + f_{47}(v_j, B_j) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j, h}}^k f_{26}(v_i, B_i) \right\}$
	$f_{23}(v_1, B_1) + \min_{j=2, \dots, k} \left\{ f_{47}(v_j, B_j) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^k f_{26}(v_i, B_i) \right\}$
	$f_{52}(v_1, B_1) + \min_{j=2, \dots, k} \left\{ f_{25}(v_j, B_j) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^k f_{26}(v_i, B_i) \right\}$
	$f_{22}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j, h=2, \dots, k \\ j \neq h}} \left\{ f_{27}(v_j, B_j) + f_{46}(v_h, B_h) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j, h}}^k f_{26}(v_i, B_i) \right\}$
	$f_{51}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j, h=2, \dots, k \\ j \neq h}} \left\{ f_{27}(v_j, B_j) + f_{23}(v_h, B_h) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j, h}}^k f_{26}(v_i, B_i) \right\}$
	$f_{51}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j, h, l=2, \dots, k \\ j \neq h, j \neq l, h \neq l}} \left\{ f_{27}(v_j, B_j) + f_{48}(v_h, B_h) + f_{48}(v_l, B_l) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j, h, l}}^k f_{50}(v_i, B_i) \right\}$
	$f_{19}(v_1, B_1) + \sum_{i=2}^k f_{26}(v_i, B_i)$
	$f_{22}(v_1, B_1) + \min_{h=2, \dots, k} \left\{ f_{46}(v_h, B_h) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq h}}^k f_{26}(v_i, B_i) \right\}$
	$f_{51}(v_1, B_1) + \min_{h=2, \dots, k} \left\{ f_{23}(v_h, B_h) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq h}}^k f_{26}(v_i, B_i) \right\}$
$f_{20}(v_1, B) = \min$	$f_{51}(v_1, B_1) + \min_{\substack{h, l=2, \dots, k \\ h \neq l}} \left\{ f_{48}(v_h, B_h) + f_{48}(v_l, B_l) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq h, l}}^k f_{50}(v_i, B_i) \right\}$
	$f_{23}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j, h=2, \dots, k \\ j \neq h}} \left\{ f_{27}(v_j, B_j) + f_{46}(v_h, B_h) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j, h}}^k f_{26}(v_i, B_i) \right\}$
	$f_{52}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j, h=2, \dots, k \\ j \neq h}} \left\{ f_{27}(v_j, B_j) + f_{23}(v_h, B_h) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j, h}}^k f_{26}(v_i, B_i) \right\}$
	$f_{52}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j, h, l=2, \dots, k \\ j \neq h, j \neq l, h \neq l}} \left\{ f_{27}(v_j, B_j) + f_{48}(v_h, B_h) + f_{48}(v_l, B_l) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j, h, l}}^k f_{50}(v_i, B_i) \right\}$
	$f_{20}(v_1, B_1) + \sum_{i=2}^k f_{26}(v_i, B_i)$
	$f_{23}(v_1, B_1) + \min_{h=2, \dots, k} \left\{ f_{46}(v_h, B_h) + \sum_{i=2, \dots, k, i \neq h} f_{26}(v_i, B_i) \right\}$
	$f_{52}(v_1, B_1) + \min_{h=2, \dots, k} \left\{ f_{23}(v_h, B_h) + \sum_{i=2, \dots, k, i \neq h} f_{26}(v_i, B_i) \right\}$
	$f_{52}(v_1, B_1) + \min_{\substack{h, l=2, \dots, k \\ h \neq l}} \left\{ f_{48}(v_h, B_h) + f_{48}(v_l, B_l) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq h, l}}^k f_{50}(v_i, B_i) \right\}$

 Tabla 4.16: Caso $|V(K)| \geq 5$ para *ROLDB*.

Función	
$f_{21}(v_1, B) = \min$	$f_{26}(v_1, B_1) + \min_{j,h=2,\dots,k, j \neq h} \left\{ f_{27}(v_j, B_j) + f_{20}(v_h, B_h) + \sum_{i=2,\dots,k, i \neq j,h} f_{26}(v_i, B_i) \right\}$
	$f_{26}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j,h,l,s=2,\dots,k \\ j \neq h, j \neq l, j \neq s \\ h \neq l, h \neq s, l \neq s}} \left\{ f_{27}(v_j, B_j) + f_{48}(v_h, B_h) + f_{48}(v_l, B_l) + f_{48}(v_s, B_s) + \sum_{i=2, i \neq j,h,l,s}^k f_{50}(v_i, B_i) \right\}$
	$f_{26}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j,h,l=2,\dots,k \\ j \neq h, j \neq l, h \neq l}} \left\{ f_{27}(v_j, B_j) + f_{46}(v_h, B_h) + f_{46}(v_l, B_l) + \sum_{i=2, i \neq j,h,l}^k f_{50}(v_i, B_i) \right\}$
	$f_{26}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j,h,l=2,\dots,k \\ j \neq h, j \neq l, h \neq l}} \left\{ f_{27}(v_j, B_j) + f_{52}(v_h, B_h) + f_{52}(v_l, B_l) + \sum_{i=2, i \neq j,h,l}^k f_{50}(v_i, B_i) \right\}$
	$f_{26}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j,h,l=2,\dots,k \\ j \neq h, j \neq l, h \neq l}} \left\{ f_{27}(v_j, B_j) + f_{48}(v_h, B_h) + f_{23}(v_l, B_l) + \sum_{i=2, i \neq j,h,l}^k f_{50}(v_i, B_i) \right\}$
	$f_{26}(v_1, B_1) + \min_{h=2,\dots,k} \left\{ f_{20}(v_h, B_h) + \sum_{i=2,\dots,k, i \neq h} f_{26}(v_i, B_i) \right\}$
	$f_{53}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j,h,l=2,\dots,k \\ j \neq h, j \neq l, h \neq l}} \left\{ f_{48}(v_j, B_j) + f_{48}(v_h, B_h) + f_{48}(v_l, B_l) + \sum_{i=2, i \neq j,h,l}^k f_{50}(v_i, B_i) \right\}$
	$f_{53}(v_1, B_1) + \min_{h,l=2,\dots,k, h \neq l} \left\{ f_{46}(v_h, B_h) + f_{46}(v_l, B_l) + \sum_{i=2,\dots,k, i \neq h,l} f_{26}(v_i, B_i) \right\}$
	$f_{53}(v_1, B_1) + \min_{h,l=2,\dots,k, h \neq l} \left\{ f_{52}(v_h, B_h) + f_{52}(v_l, B_l) + \sum_{i=2,\dots,k, i \neq h,l} f_{26}(v_i, B_i) \right\}$
	$f_{53}(v_1, B_1) + \min_{h,l=2,\dots,k, h \neq l} \left\{ f_{48}(v_h, B_h) + f_{23}(v_l, B_l) + \sum_{i=2,\dots,k, i \neq h,l} f_{26}(v_i, B_i) \right\}$
$f_{22}(v_1, B) = \min$	$\sum_{i=1}^k f_{21}(v_i, B_i)$
	$f_{26}(v_1, B_1) + \min_{h=2,\dots,k} \left\{ f_{45}(v_h, B_h) + \sum_{i=2,\dots,k, i \neq h} f_{26}(v_i, B_i) \right\}$
	$f_{23}(v_1, B_1) + \min_{j=2,\dots,k} \left\{ f_{27}(v_j, B_j) + \sum_{i=2,\dots,k, i \neq j} f_{26}(v_i, B_i) \right\}$
	$f_{52}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j,h=2,\dots,k \\ j \neq h}} \left\{ f_{27}(v_h, B_h) + f_{47}(v_j, B_j) + \sum_{i=2, i \neq j,h}^k f_{26}(v_i, B_i) \right\}$
	$f_{52}(v_1, B_1) + \min_{j=2,\dots,k} \left\{ f_{47}(v_j, B_j) + \sum_{i=2,\dots,k, i \neq j} f_{26}(v_i, B_i) \right\}$
	$f_{51}(v_1, B_1) + \min_{j,h=2,\dots,k, j \neq h} \left\{ f_{27}(v_j, B_j) + f_{46}(v_h, B_h) + \sum_{i=2,\dots,k, i \neq j,h} f_{26}(v_i, B_i) \right\}$
	$f_{51}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j,h,l=2,\dots,k \\ j \neq h, j \neq l, h \neq l}} \left\{ f_{27}(v_j, B_j) + f_{48}(v_h, B_h) + f_{48}(v_l, B_l) + \sum_{i=2, i \neq j,h,l}^k f_{50}(v_i, B_i) \right\}$
	$f_{22}(v_1, B_1) + \sum_{i=2}^k f_{26}(v_i, B_i)$
	$f_{51}(v_1, B_1) + \min_{h=2,\dots,k} \left\{ f_{46}(v_j, B_j) + \sum_{i=2,\dots,k, i \neq h} f_{26}(v_i, B_i) \right\}$
	$f_{51}(v_1, B_1) + \min_{h,l=2,\dots,k, h \neq l} \left\{ f_{48}(v_h, B_h) + f_{48}(v_l, B_l) + \sum_{i=2,\dots,k, i \neq h,l} f_{50}(v_i, B_i) \right\}$

 Tabla 4.17: Caso $|V(K)| \geq 5$ para *ROLDB*.

4.5. CÁLCULO DEL NÚMERO DE LOCALIZACIÓN-DOMINACIÓN ABIERTA

Función	
$f_{23}(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_{52}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j,h=2,\dots,k \\ j \neq h}} \left\{ f_{27}(v_j, B_j) + f_{46}(v_h, B_h) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j,h}}^k f_{26}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{52}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j,h,l=2,\dots,k \\ j \neq h, j \neq l, h \neq l}} \left\{ f_{27}(v_j, B_j) + f_{48}(v_h, B_h) + f_{48}(v_l, B_l) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j,h,l}}^k f_{50}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{23}(v_1, B_1) + \sum_{i=2}^k f_{26}(v_i, B_i) \\ f_{52}(v_1, B_1) + \min_{h=2,\dots,k} \left\{ f_{46}(v_h, B_h) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq h}}^k f_{26}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{52}(v_1, B_1) + \min_{\substack{h,l=2,\dots,k \\ h \neq l}} \left\{ f_{48}(v_h, B_h) + f_{48}(v_l, B_l) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq h,l}}^k f_{50}(v_i, B_i) \right\} \end{array} \right.$
$f_{24}(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_{25}(v_1, B_1) + \min_{j=2,\dots,k} \left\{ f_{27}(v_j, B_j) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^k f_{26}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{24}(v_1, B_1) + \sum_{i=2}^k f_{26}(v_i, B_i) \end{array} \right.$
$f_{25}(v_1, B) = f_{25}(v_1, B_1) + \sum_{i=2}^k f_{26}(v_i, B_i)$	
$f_{26}(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_{26}(v_1, B_1) + \sum_{i=1}^k f_{21}(v_i, B_i) \\ f_{53}(v_1, B_1) + \min_{h=2,\dots,k} \left\{ f_{45}(v_h, B_h) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq h}}^k f_{26}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{53}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j,h=2,\dots,k \\ j \neq h}} \left\{ f_{27}(v_j, B_j) + f_{20}(v_h, B_h) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j,h}}^k f_{26}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{53}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j,h,l=2,\dots,k \\ j \neq h, j \neq l, h \neq l}} \left\{ f_{53}(v_j, B_j) + f_{46}(v_h, B_h) + f_{46}(v_l, B_l) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j,h,l}}^k f_{26}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{53}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j,h,l=2,\dots,k \\ j \neq h, j \neq l, h \neq l}} \left\{ f_{53}(v_j, B_j) + f_{52}(v_h, B_h) + f_{52}(v_l, B_l) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j,h,l}}^k f_{26}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{53}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j,h,l=2,\dots,k \\ j \neq h, j \neq l, h \neq l}} \left\{ f_{53}(v_j, B_j) + f_{23}(v_h, B_h) + f_{48}(v_l, B_l) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j,h,l}}^k f_{26}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{53}(v_1, B_1) + \min_{\substack{h,l,s=2,\dots,k \\ h \neq l, h \neq s, l \neq s}} \left\{ f_{48}(v_h, B_h) + f_{48}(v_l, B_l) + f_{48}(v_s, B_s) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j,h,l}}^k f_{50}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{53}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j,h,l,s=2,\dots,k \\ j \neq h, j \neq l, j \neq s \\ h \neq l, h \neq s, l \neq s}} \left\{ f_{27}(v_j, B_j) + f_{48}(v_h, B_h) + f_{48}(v_l, B_l) + f_{48}(v_s, B_s) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j,h,l,s}}^k f_{50}(v_i, B_i) \right\} \end{array} \right.$
$f_{27}(v_1, B) = f_{27}(v_1, B_1) + \sum_{i=2}^k f_{21}(v_i, B_i)$	

Tabla 4.18: Caso $|V(K)| \geq 5$ para *ROLDB*.

A partir de las fórmulas mencionadas, es inmediato ver que para cada una de las nueve funciones f_j con $j \in \{19, \dots, 27\}$, podemos computar $f_j(v_1, B)$ de $(LOLD)_i$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$ en tiempo $O(k)$.

El siguiente resultado se puede probar de una manera similar al Teorema 4.12.

Teorema 4.18 *Dado B un grafo block, el Algoritmo OLDB computa en tiempo lineal $\gamma_{OLD}(B)$ si existe un conjunto de localización-dominación abierta en B o retorna ∞ en caso contrario.*

4.6. Cálculo del número de localización-dominación total

El algoritmo *RLTDB* debe computar las funciones principales $f_j(v_1, B)$ con $j \in \{28, \dots, 32\}$. Para poder hacerlo necesitamos para todo $i \in \{1, \dots, k\}$ las funciones principales $f_j(v_i, B_i)$ para $j \in \{28, \dots, 32\}$ y las funciones auxiliares $f_j(v_i, B_i)$ para $j \in \{54, 55\}$.

Teorema 4.19 *Consideramos un grafo block B y $V(K) = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$. Sea C un conjunto en $V(B)$ y $C_i = C \cap V(B_i)$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Luego, C es un v_1 -almost conjunto de localización-dominación total en B que tiene las propiedades LTD, CO y OFN si y solo si C_i es un v_i -almost conjunto de localización-dominación total en B_i para todo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ y se satisface uno de los siguientes conjuntos de afirmaciones:*

- (i) C_1 es CO, ADJ y \overline{OFN} , existe $j \neq 1$ tal que C_j es \overline{CO} y \overline{ADJ} y C_i es \overline{CO} y ADJ para todo $i \neq 1, j$.
- (ii) Si $k \geq 3$, C_1 es CO y \overline{OFN} , existe $h \neq 1$ tal que C_h es \overline{CO} , existe $j \neq 1, h$ tal que C_j es CO y \overline{ADJ} , C_i es \overline{CO} y ADJ para todo $i \neq 1, h, j$.
- (iii) Si $k \geq 3$, C_1 es CO y OFN, existe $j \neq 1$ tal que C_j es \overline{CO} y \overline{ADJ} , existe $h \neq 1, j$ tal que C_h es CO y ADJ y C_i es \overline{CO} y ADJ para todo $i \neq 1, j, h$.
- (iv) Si $k \geq 4$, C_1 es CO y OFN, existe $j \neq 1$ tal que C_j es \overline{CO} y \overline{ADJ} , existe $h, l \neq 1, h \neq l$ tal que C_h, C_l son CO y C_i es CO o ADJ para todo $i \neq 1, j, h, l$.
- (v) C_1 es CO y OFN y C_i es \overline{CO} y ADJ para todo $i \neq 2$.
- (vi) C_1 es CO y OFN, existe $h \neq 1$ tal que C_h es CO y ADJ y C_i es \overline{CO} y ADJ para todo $i \neq 1, h$.
- (vii) Si $k \geq 3$, C_1 es CO y OFN, existe $h, l \neq 1, h \neq l$ tal que C_h, C_l son CO y C_i es CO o ADJ para todo $i \neq 1, h, l$.

Demostración: Sea C un v_1 -almost LTD -conjunto que satisface LTD , CO y OFN .

Por la Observación 4.4 tenemos que C_i es un v_i -almost LTD -conjunto en B_i para todo i . También podemos observar C_1 es CO ya que C es CO y $v_1 \in V(B_1)$. Más aún, como C es OFN , existe único $w \in V(B)$ tal que $N(w) \cap C = \{v_1\}$.

Supongamos que $w = v_j$ para algún $j \neq 1$, luego C_1 es \overline{OFN} , C_i es \overline{CO} para todo $i \neq 1, j$ y C_j es \overline{ADJ} . Más aún, si C_j es \overline{CO} , entonces C_i es ADJ para $i \neq 1, j$. Además, como $N(v_1) \cap C \cap V(B_i) = \emptyset$ para todo $i \neq 1$ y C es LTD , tenemos que C_1 es ADJ , y se verifica (i). Ahora bien, si C_j es CO , a partir del Lema 4.6 existe a lo sumo un $h \neq 1, j$ tal que C_h es \overline{ADJ} y tenemos (ii).

Ahora, si $w \in V(B_1)$ luego C_1 es OFN . Tenemos que analizar diferentes casos.

En primer lugar, consideramos que existe $j \neq 1$ tal que C_j es \overline{CO} y \overline{ADJ} , tal j es único por Lema 4.6. Como C_1 es OFN , existe $h \neq 1, j$ tal que C_h es CO .

Si C_i es \overline{CO} para todo $i \neq 1, h$, C_i es ADJ para todo $i \neq 1, j, h$ ya que C es LTD y v_j está separado de v_i . Además, como C_1 es OFN , tenemos que C_h es ADJ y tenemos (iii).

Supongamos ahora que existen al menos dos $h, l \neq 1, j$, $h \neq l$ tales que C_h y C_l son CO . Luego C_i es CO o ADJ para todo $i \neq 1, j, h, l$, lo que prueba (iv).

Ahora, si C_i es CO o ADJ para todo $i \neq 1$, tenemos tres casos.

Si C_i es \overline{CO} para todo $i \neq 1$, luego C_i es ADJ para todo $i \neq 1$ ya que el vértice favorecido por v_1 pertenece a $V(B_1)$ y como C es LTD y $N(v_1) \cap C \cap V(B_i) = \emptyset$ para todo $i \neq 1$, tenemos que C_1 es ADJ y se prueba (v).

Si existe único $h \neq 1$ tal que C_h es CO , luego C_i es \overline{CO} y ADJ para todo $i \neq 1, h$. Más aún, como C_1 es OFN , tenemos que C_h es ADJ y (vi) se satisface.

Finalmente, si C_h y C_l son CO para ciertos $h, l \neq 1$, $h \neq l$, C_i es CO o ADJ para todo $i \neq 1, h, l$ y se verifica (vii).

Recíprocamente, sea C_i un v_i -almost LTD -conjunto en B_i para todo i y sea $C = \bigcup_{i=1}^k C_i$. Vamos a probar que C es un v_i -almost LTD -conjunto en B con las propiedades LTD , CO y OFN .

Observemos que C es CO ya que C_1 es CO en todos los conjuntos de afirmaciones de (i) a (vii). También, es inmediato chequear que C es OFN .

Para probar que C es LTD necesitamos verificar que si $u, v \in V(B)$, $dist(u, v) \leq 2$ están dominados y separados por C . Por el Lema 4.5, si $u, v \in V(B) - \bigcup_{i=1}^k \{v_i\}$, u y v están dominados y separados por C . Ahora, sean $u, v \in V(B)$, $d(u, v) = 2$ y $u \in V(K)$. Entonces $v \in V(B_i) - \{v_i\}$ para algún i y $u = v_r$ para algún r .

Como C sólo debe separar los vértices en $V(B) - C$ resulta $r \neq 1$.

Si $i \neq 1$, como C_1 es CO en todos los casos de (i) a (vii), se tiene que $v_1 \in (N(u) \cap C) - N(v)$ y u y v están dominados y separados. Si $i = 1$, en (i) y (ii) C_1 es \overline{OFN} , entonces existe $w \in (N(v) \cap C) - N(u) - \{v_1\}$ y u y v están dominados y separados. En los restantes casos, C_r es ADJ o existe $h \neq 1, r$ tal que $v_h \in N(u) \cap C$, así u y v están dominados y separados.

Ahora, sean $u, v \in V(B)$, $dist(u, v) = 1$, $u \in V(K)$ y $v \notin V(K)$. Luego, $v \in V(B_i) - \{v_i\}$ para algún i y $u = v_i$.

Nuevamente consideramos $i \neq 1$. En todos los casos de (i) a (vii) C_1 es CO y u y v resultan dominados y separados.

Finalmente, sean $u = v_i$ y $v = v_j$ para $i \neq j$ y $v_i, v_j \notin C$. En todos los casos de (i) a (vii), C_i y C_j son CO o ADJ . Luego u y v están dominados y separados.

Se ilustra la demostración de este teorema en las Figuras 4.8, 4.9 y 4.10. ■

Corolario 4.20 *Con la notación del Teorema 4.19, tenemos lo siguiente:*

- si $k = 2$,

$$f_{28}(v_1, B) = \min \begin{cases} f_{23}(v_1, B_1) + f_{32}(v_2, B_2) \\ f_{51}(v_1, B_1) + f_{31}(v_2, B_2) \\ f_{51}(v_1, B_1) + f_{46}(v_2, B_2) \end{cases}$$

- si $k = 3$,

$$f_{28}(v_1, B) = \min \begin{cases} f_{23}(v_1, B_1) + \min\{f_{32}(v_2, B_2) + f_{31}(v_3, B_3), f_{31}(v_2, B_2) + f_{32}(v_3, B_3)\} \\ f_{52}(v_1, B_1) + \min\{f_{53}(v_2, B_2) + f_{54}(v_3, B_3), f_{54}(v_2, B_2) + f_{53}(v_3, B_3)\} \\ f_{47}(v_1, B_1) + \min\{f_{32}(v_2, B_2) + f_{46}(v_3, B_3), f_{46}(v_2, B_2) + f_{32}(v_3, B_3)\} \\ f_{51}(v_1, B_1) + f_{31}(v_2, B_2) + f_{31}(v_3, B_3) \\ f_{51}(v_1, B_1) + \min\{f_{46}(v_2, B_2) + f_{31}(v_3, B_3), f_{31}(v_2, B_2) + f_{46}(v_3, B_3)\} \\ f_{51}(v_1, B_1) + f_{48}(v_2, B_2) + f_{48}(v_3, B_3) \end{cases}$$

- si $k \geq 4$,

$$f_{28}(v_1, B) = \min \begin{cases} f_{23}(v_1, B_1) + \min_{j=2, \dots, k} \left\{ f_{32}(v_j, B_j) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^k f_{31}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{52}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j, h=2, \dots, k \\ j \neq h}} \left\{ f_{53}(v_h, B_h) + f_{54}(v_j, B_j) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j, h}}^k f_{47}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{51}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j, h=2, \dots, k \\ j \neq h}} \left\{ f_{46}(v_h, B_h) + f_{32}(v_j, B_j) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^k f_{31}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{51}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j, h, l=2, \dots, k \\ j \neq h, j \neq l, h \neq l}} \left\{ f_{32}(v_j, B_j) + f_{48}(v_h, B_h) + f_{48}(v_l, B_l) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j, h, l}}^k f_{55}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{51}(v_1, B_1) + \sum_{i=2}^k f_{31}(v_i, B_i) \\ f_{51}(v_1, B_1) + \min_{h=2, \dots, k} \left\{ f_{46}(v_h, B_h) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq h}}^k f_{31}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{51}(v_1, B_1) + \min_{\substack{h, l=2, \dots, k \\ h \neq l}} \left\{ f_{48}(v_h, B_h) + f_{48}(v_l, B_l) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq h, l}}^k f_{55}(v_i, B_i) \right\} \end{cases}$$

En forma similar se obtienen las restantes funciones principales $f_j(v_1, B)$ para $j \in \{29, \dots, 32\}$. Dichas funciones se encuentran en las Tablas 4.19, 4.20, 4.21, 4.22, 4.23 y 4.24, en el Apéndice se encuentra una explicación ilustrativa.

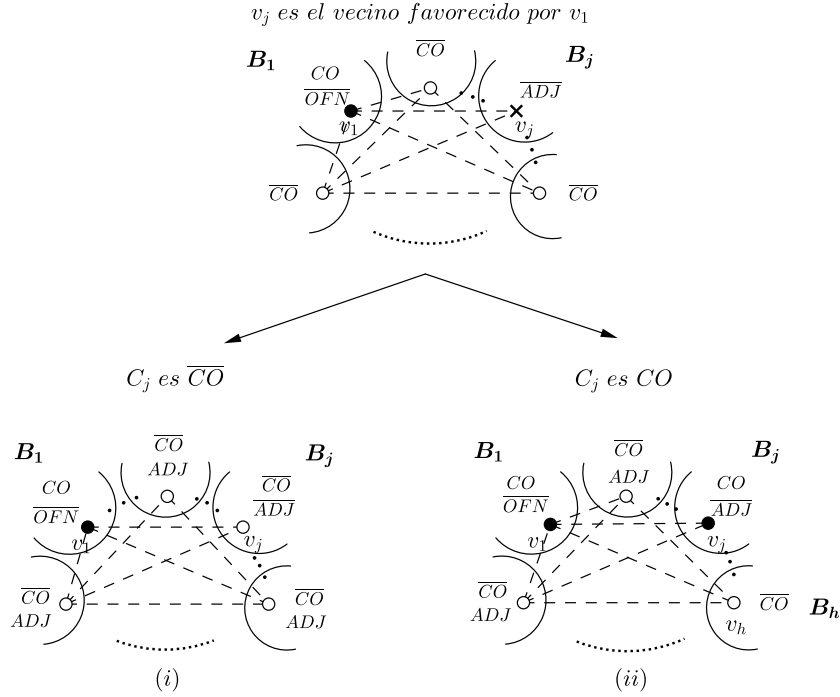


Figura 4.8: Teorema 4.19. Casos (i) y (ii).

Función	Función
$f_{28}(v_1, B) = \min \begin{cases} f_{23}(v_1, B_1) + f_{32}(v_2, B_2) \\ f_{51}(v_1, B_1) + f_{31}(v_2, B_2) \\ f_{51}(v_1, B_1) + f_{46}(v_2, B_2) \end{cases}$	$f_{30}(v_1, B) = \min \begin{cases} f_{32}(v_1, B_1) + f_{23}(v_2, B_2) \\ f_{30}(v_1, B_1) + f_{30}(v_2, B_2) \\ f_{31}(v_1, B_1) + f_{46}(v_2, B_2) \end{cases}$
$f_{29}(v_1, B) = \min \begin{cases} f_{23}(v_1, B_1) + f_{31}(v_2, B_2) \\ f_{52}(v_1, B_1) + f_{46}(v_2, B_2) \end{cases}$	$f_{31}(v_1, B) = \min \begin{cases} f_{31}(v_1, B_1) + f_{30}(v_2, B_2) \\ f_{53}(v_1, B_1) + f_{46}(v_2, B_2) \end{cases}$
	$f_{32}(v_1, B) = f_{32}(v_1, B_1) + f_{30}(v_2, B_2)$

Tabla 4.19: Caso $|V(K)| = 2$ para $RLTDB$.

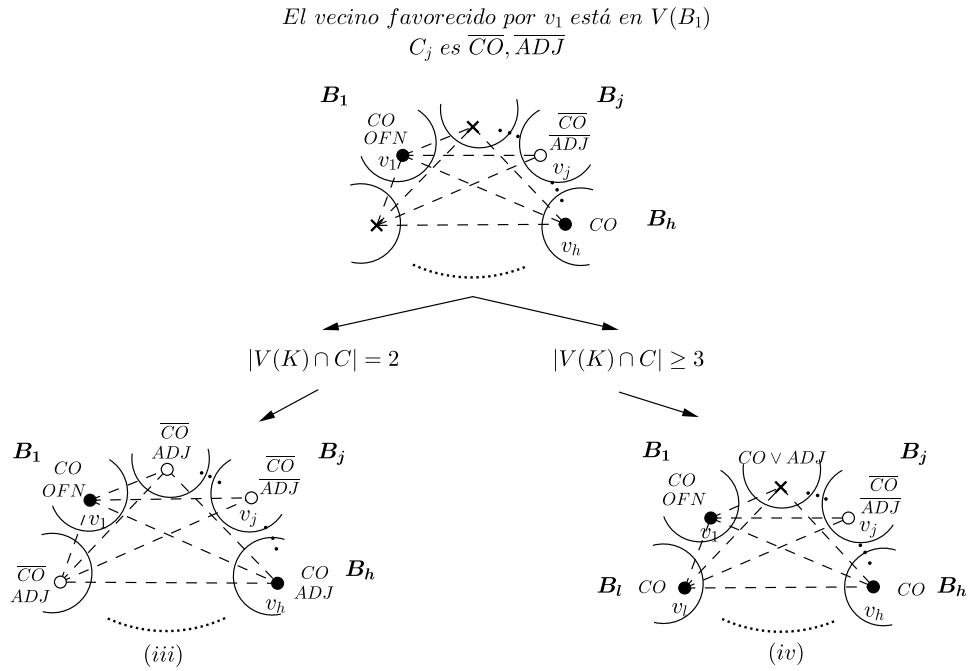


Figura 4.9: Teorema 4.19. Casos (iii) y (iv).

Función	
$f_{28}(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_{23}(v_1, B_1) + \min\{f_{32}(v_2, B_2) + f_{31}(v_3, B_3), f_{31}(v_2, B_2) + f_{32}(v_3, B_3)\} \\ f_{52}(v_1, B_1) + \min\{f_{53}(v_2, B_2) + f_{54}(v_3, B_3), f_{54}(v_2, B_2) + f_{53}(v_3, B_3)\} \\ f_{51}(v_1, B_1) + \min\{f_{32}(v_2, B_2) + f_{46}(v_3, B_3), f_{46}(v_2, B_2) + f_{32}(v_3, B_3)\} \\ f_{51}(v_1, B_1) + f_{31}(v_2, B_2) + f_{31}(v_3, B_3) \\ f_{251}(v_1, B_1) + \min\{f_{46}(v_2, B_2) + f_{31}(v_3, B_3), f_{31}(v_2, B_2) + f_{46}(v_3, B_3)\} \\ f_{51}(v_1, B_1) + f_{48}(v_2, B_2) + f_{48}(v_3, B_3) \end{array} \right.$
$f_{29}(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_{52}(v_1, B_1) + \min\{f_{32}(v_2, B_2) + f_{46}(v_3, B_3), f_{46}(v_2, B_2) + f_{32}(v_3, B_3)\} \\ f_{23}(v_1, B_1) + f_{31}(v_2, B_2) + f_{31}(v_3, B_3) \\ f_{52}(v_1, B_1) + \min\{f_{46}(v_2, B_2) + f_{31}(v_3, B_3), f_{31}(v_2, B_2) + f_{46}(v_3, B_3)\} \\ f_{52}(v_1, B_1) + f_{48}(v_2, B_2) + f_{48}(v_3, B_3) \end{array} \right.$
$f_{30}(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_{31}(v_1, B_1) + \min\{f_{32}(v_2, B_2) + f_{23}(v_3, B_3), f_{23}(v_2, B_2) + f_{32}(v_3, B_3)\} \\ f_{32}(v_1, B_1) + \min\{f_{23}(v_2, B_2) + f_{31}(v_3, B_3), f_{31}(v_2, B_2) + f_{23}(v_3, B_3)\} \\ f_{30}(v_1, B_1) + f_{30}(v_2, B_2) + f_{30}(v_3, B_3) \\ f_{31}(v_1, B_1) + \min\{f_{46}(v_2, B_2) + f_{31}(v_3, B_3), f_{31}(v_2, B_2) + f_{46}(v_3, B_3)\} \\ f_{53}(v_1, B_1) + f_{48}(v_2, B_2) + f_{48}(v_3, B_3) \end{array} \right.$
$f_{31}(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_{31}(v_1, B_1) + f_{30}(v_2, B_2) + f_{30}(v_3, B_3) \\ f_{53}(v_1, B_1) + \min\{f_{46}(v_2, B_2) + f_{31}(v_3, B_3), f_{31}(v_2, B_2) + f_{46}(v_3, B_3)\} \\ f_{53}(v_1, B_1) + \min\{f_{32}(v_2, B_2) + f_{23}(v_3, B_3), f_{23}(v_2, B_2) + f_{32}(v_3, B_3)\} \end{array} \right.$
	$f_{32}(v_1, B_1) + f_{30}(v_2, B_2) + f_{30}(v_3, B_3)$

Tabla 4.20: Caso $|V(K)| = 3$ para $RLTDB$.

4.6. CÁLCULO DEL NÚMERO DE LOCALIZACIÓN-DOMINACIÓN TOTAL

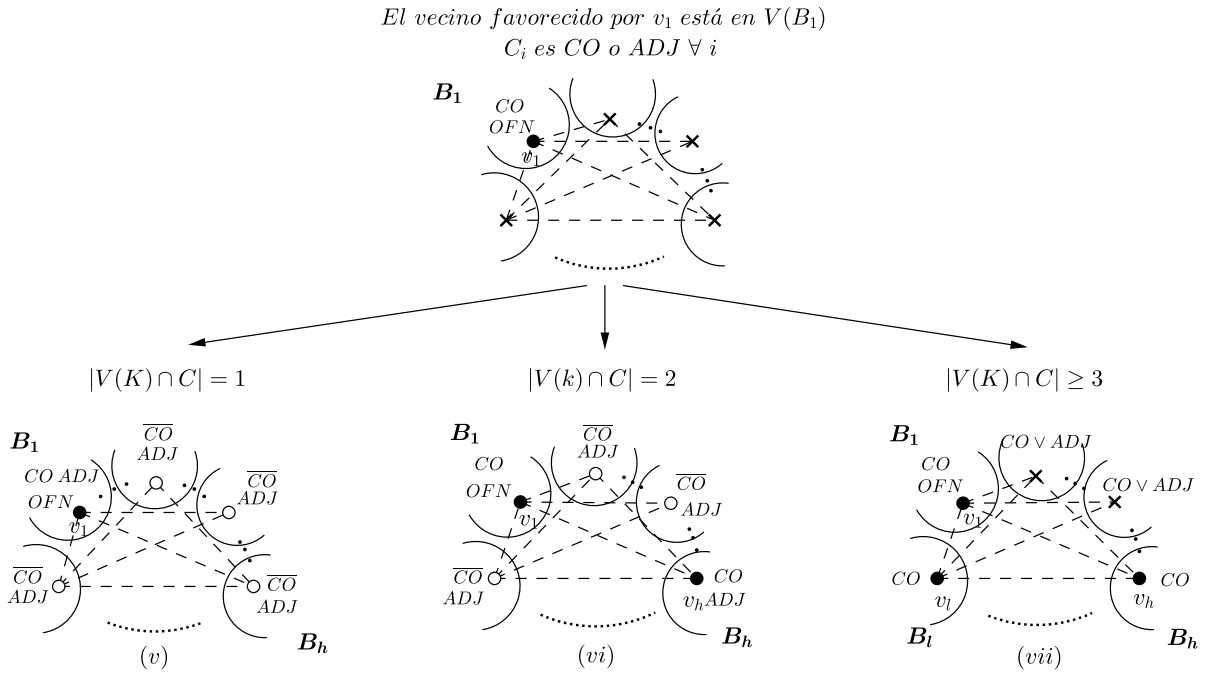


Figura 4.10: Teorema 4.19. Casos (v), (vi) y (vii).

Función	
$f_{28}(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_{23}(v_1, B_1) + \min_{j=2,3,4} \{f_{32}(v_j, B_j) + \sum_{i=2,3,4, i \neq j} f_{31}(v_i, B_i)\} \\ f_{52}(v_1, B_1) + \min_{i,j,s=2,3,4, i \neq j, j \neq s, i \neq s} \{f_{53}(v_i, B_i) + f_{54}(v_j, B_j) + f_{47}(v_s, B_s)\} \\ f_{51}(v_1, B_1) + \min_{i,j,s=2,3,4, i \neq j, j \neq s, i \neq s} \{f_{46}(v_i, B_i) + f_{32}(v_j, B_j) + f_{31}(v_s, B_s)\} \\ f_{51}(v_1, B_1) + \min_{j=2,3,4} \{f_{32}(v_j, B_j) + \sum_{i=2,3,4, i \neq j} f_{48}(v_i, B_i)\} \\ f_{51}(v_1, B_1) + f_{31}(v_2, B_2) + f_{31}(v_3, B_3) + f_{31}(v_4, B_4) \\ f_{51}(v_1, B_1) + \min_{j=2,3,4} \{f_{46}(v_j, B_j) + \sum_{i=2,3,4, i \neq j} f_{31}(v_i, B_i)\} \\ f_{51}(v_1, B_1) + \min_{j=2,3,4} \{f_{55}(v_j, B_j) + \sum_{i=2,3,4, i \neq j} f_{48}(v_i, B_i)\} \end{array} \right.$
$f_{29}(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_{52}(v_1, B_1) + \min_{i,j,s=2,3,4, i \neq j, j \neq s, i \neq s} \{f_{32}(v_i, B_i) + f_{46}(v_j, B_j) + f_{31}(v_s, B_s)\} \\ f_{52}(v_1, B_1) + \min_{j=2,3,4} \{f_{32}(v_j, B_j) + \sum_{i=2,3,4, i \neq j} f_{48}(v_i, B_i)\} \\ f_{23}(v_1, B_1) + f_{31}(v_2, B_2) + f_{31}(v_3, B_3) + f_{31}(v_4, B_4) \\ f_{52}(v_1, B_1) + \min_{j=2,3,4} \{f_{46}(v_j, B_j) + \sum_{i=2,3,4, i \neq j} f_{31}(v_i, B_i)\} \\ f_{52}(v_1, B_1) + \min_{j=2,3,4} \{f_{55}(v_j, B_j) + \sum_{i=2,3,4, i \neq j} f_{48}(v_i, B_i)\} \end{array} \right.$

Tabla 4.21: Caso $|V(K)| = 4$ para $RLTDB$.

Función	
$f_{30}(v_1, B) = \min$	$f_{31}(v_1, B_1) + \min_{i,j,s=2,3,4,i \neq j, j \neq s, i \neq s} \{f_{32}(v_i, B_i) + f_{23}(v_j, B_j) + f_{31}(v_s, B_s)\}$
	$f_{32}(v_1, B_1) + \min_{j=2,3,4} \{f_{23}(v_j, B_j) + \sum_{i=2,3,4,i \neq j} f_{31}(v_i, B_i)\}$
	$f_{30}(v_1, B_1) + f_{30}(v_2, B_2) + f_{30}(v_3, B_3) + f_{30}(v_4, B_4)$
	$f_{31}(v_1, B_1) + \min_{j=2,3,4} \{f_{46}(v_j, B_j) + \sum_{i=2,3,4,i \neq j} f_{31}(v_i, B_i)\}$
	$f_{31}(v_1, B_1) + \min_{j=2,3,4} \{f_{32}(v_j, B_j) + \sum_{i=2,3,4,i \neq j} f_{48}(v_i, B_i)\}$
	$f_{54}(v_1, B_1) + f_{48}(v_2, B_2) + f_{48}(v_3, B_3) + f_{48}(v_4, B_4)$
$f_{31}(v_1, B) = \min$	$f_{54}(v_1, B_1) + \min_{j=2,3,4} \{f_{31}(v_j, B_j) + \sum_{i=2,3,4,i \neq j} f_{48}(v_i, B_i)\}$
	$f_{31}(v_1, B_1) + f_{30}(v_2, B_2) + f_{30}(v_3, B_3) + f_{30}(v_4, B_4)$
	$f_{54}(v_1, B_1) + \min_{j=2,3,4} \{f_{46}(v_j, B_j) + \sum_{i=2,3,4,i \neq j} f_{31}(v_i, B_i)\}$
	$f_{54}(v_1, B_1) + \min_{i,j,s=2,3,4,i \neq j, j \neq s, i \neq s} \{f_{32}(v_i, B_i) + f_{23}(v_j, B_j) + f_{31}(v_s, B_s)\}$
$f_{32}(v_1, B) = \min$	$f_{54}(v_1, B_1) + \min_{j=2,3,4} \{f_{54}(v_j, B_j) + \sum_{i=2,3,4,i \neq j} f_{48}(v_i, B_i)\}$
	$f_{54}(v_1, B_1) + f_{48}(v_2, B_2) + f_{48}(v_3, B_3) + f_{48}(v_4, B_4)$
$f_{32}(v_1, B) = f_{32}(v_1, B_1) + f_{30}(v_2, B_2) + f_{30}(v_3, B_3) + f_{30}(v_4, B_4)$	

Tabla 4.22: Caso $|V(K)| = 4$ para *RLTDB*.

A partir de las fórmulas de las Tablas anteriores, es inmediato ver que para cada una de las cinco funciones f_j con $j \in \{28, \dots, 32\}$, podemos computar $f_j(v_1, B)$ de $(LLTD)_i$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$ en tiempo $O(k)$.

El siguiente resultado se prueba de manera similar al Teorema 4.12.

Teorema 4.21 *Dado B un grafo block, el Algoritmo LTDB computa en tiempo lineal $\gamma_{LTD}(B)$.*

Función	
$f_{28}(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_{23}(v_1, B_1) + \min_{j=2, \dots, k} \left\{ f_{32}(v_j, B_j) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^k f_{31}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{52}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j, h=2, \dots, k \\ j \neq h}} \left\{ f_{53}(v_h, B_h) + f_{54}(v_j, B_j) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j, h}}^k f_{47}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{51}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j, h=2, \dots, k \\ j \neq h}} \left\{ f_{46}(v_h, B_h) + f_{32}(v_j, B_j) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j, h}}^k f_{31}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{51}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j, h, l=2, \dots, k \\ j \neq h, j \neq l, h \neq l}} \left\{ f_{32}(v_j, B_j) + f_{48}(v_h, B_h) + f_{48}(v_l, B_l) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j, h, l}}^k f_{55}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{51}(v_1, B_1) + \sum_{i=2}^k f_{31}(v_i, B_i) \\ f_{51}(v_1, B_1) + \min_{j=2, \dots, k} \left\{ f_{46}(v_j, B_j) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^k f_{31}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{51}(v_1, B_1) + \min_{\substack{h, l=2, \dots, k \\ h \neq l}} \left\{ f_{48}(v_h, B_h) + f_{48}(v_l, B_l) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j, h}}^k f_{55}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{52}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j, h=2, \dots, k \\ j \neq h}} \left\{ f_{46}(v_h, B_h) + f_{32}(v_j, B_j) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j, h}}^k f_{31}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{52}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j, h, l=2, \dots, k \\ j \neq h, j \neq l, h \neq l}} \left\{ f_{32}(v_j, B_j) + f_{48}(v_h, B_h) + f_{48}(v_l, B_l) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j, h, l}}^k f_{55}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{23}(v_1, B_1) + \sum_{i=2}^k f_{31}(v_i, B_i) \\ f_{52}(v_1, B_1) + \min_{j=2, \dots, k} \left\{ f_{46}(v_j, B_j) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^k f_{31}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{52}(v_1, B_1) + \min_{\substack{h, l=2, \dots, k \\ h \neq l}} \left\{ f_{48}(v_h, B_h) + f_{48}(v_l, B_l) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j, h}}^k f_{55}(v_i, B_i) \right\} \end{array} \right.$
$f_{29}(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_{23}(v_1, B_1) + \sum_{i=2}^k f_{31}(v_i, B_i) \\ f_{52}(v_1, B_1) + \min_{j=2, \dots, k} \left\{ f_{46}(v_j, B_j) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^k f_{31}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{52}(v_1, B_1) + \min_{\substack{h, l=2, \dots, k \\ h \neq l}} \left\{ f_{48}(v_h, B_h) + f_{48}(v_l, B_l) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j, h}}^k f_{55}(v_i, B_i) \right\} \end{array} \right.$

Tabla 4.23: Caso $|V(K)| \geq 5$ para $RLTDB$.

Función	
$f_{30}(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_{31}(v_1, B_1) + \min_{j,h=2,\dots,k,j \neq h} \left\{ f_{32}(v_j, B_j) + f_{23}(v_h, B_h) + \sum_{i=2,\dots,k,i \neq j,h} f_{31}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{32}(v_1, B_1) + \min_{h=2,\dots,k} \left\{ f_{23}(v_h, B_h) + \sum_{i=2,\dots,k,i \neq h} f_{31}(v_i, B_i) \right\} \\ \sum_{i=1}^k f_{30}(v_i, B_i) \\ f_{31}(v_1, B_1) + \min_{h=2,\dots,k} \left\{ f_{46}(v_h, B_h) + \sum_{i=2,\dots,k,i \neq h} f_{31}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{31}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j,h,l,s=2,\dots,k \\ j \neq h, j \neq l, j \neq s \\ h \neq l, h \neq s, l \neq s}} \left\{ f_{32}(v_j, B_j) + f_{48}(v_h, B_h) + f_{48}(v_l, B_l) + f_{48}(v_s, B_s) + \sum_{i=2}^k \sum_{i \neq j,h,l,s} f_{55}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{31}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j,h,l=2,\dots,k \\ j \neq h, j \neq l, h \neq l}} \left\{ f_{32}(v_j, B_j) + f_{48}(v_h, B_h) + f_{48}(v_l, B_l) + \sum_{i=2}^k \sum_{i \neq j,h,l} f_{31}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{54}(v_1, B_1) + \min_{\substack{h,l,s=2,\dots,k \\ h \neq l, h \neq s, l \neq s}} \left\{ f_{48}(v_j, B_j) + f_{48}(v_h, B_h) + f_{48}(v_l, B_l) + \sum_{i=2}^k \sum_{i \neq j,h,l} f_{55}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{54}(v_1, B_1) + \min_{h,l=2,\dots,k,h \neq l} \left\{ f_{48}(v_h, B_h) + f_{48}(v_l, B_l) + \sum_{i=2,\dots,k,i \neq h,l} f_{31}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{31}(v_1, B_1) + \sum_{i=2}^k f_{30}(v_i, B_i) \\ f_{54}(v_1, B_1) + \min_{h=2,\dots,k} \left\{ f_{46}(v_h, B_h) + \sum_{i=2,\dots,k,i \neq h} f_{31}(v_i, B_i) \right\} \\ \sum_{i=1}^k f_{30}(v_i, B_i) \end{array} \right.$
$f_{31}(v_1, B) = \min$	$\left\{ \begin{array}{l} f_{54}(v_1, B_1) + \min_{j,h=2,\dots,k,j \neq h} \left\{ f_{32}(v_j, B_j) + f_{23}(v_h, B_h) + \sum_{i=2,\dots,k,i \neq j,h} f_{31}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{54}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j,h,l=2,\dots,k \\ j \neq h, j \neq l, h \neq l}} \left\{ f_{54}(v_j, B_j) + f_{48}(v_h, B_h) + f_{48}(v_l, B_l) + \sum_{i=2}^k \sum_{i \neq j,h,l} f_{31}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{54}(v_1, B_1) + \min_{\substack{h,l,s=2,\dots,k \\ h \neq l, h \neq s, l \neq s}} \left\{ f_{48}(v_j, B_j) + f_{48}(v_h, B_h) + f_{48}(v_l, B_l) + \sum_{i=2}^k \sum_{i \neq j,h,l} f_{55}(v_i, B_i) \right\} \\ f_{54}(v_1, B_1) + \min_{\substack{j,h,l,s=2,\dots,k \\ j \neq h, j \neq l, j \neq s \\ h \neq l, h \neq s, l \neq s}} \left\{ f_{32}(v_j, B_j) + f_{48}(v_h, B_h) + f_{48}(v_l, B_l) + f_{48}(v_s, B_s) + \sum_{i=2}^k \sum_{i \neq j,h,l,s} f_{55}(v_i, B_i) \right\} \end{array} \right.$
$f_{32}(v_1, B) = f_{32}(v_1, B_1) + \sum_{i=2}^k f_{30}(v_i, B_i)$	

 Tabla 4.24: Caso $|V(K)| \geq 5$ para *RLTDB*.

Capítulo 5

Conclusiones

En esta tesis nos centramos en el estudio de cuatro variaciones del Problema de Dominación y Separación en grafos: los problemas de código de identificación, localización-dominación, localización-dominación abierta y localización-dominación total en grafos.

Entre los desafíos relacionados con ellos nos propusimos tres líneas de trabajo que nos permitieron determinar o aproximar el cardinal del mínimo código o conjunto asociado a los cuatro problemas.

Por un lado, utilizamos técnicas polidrales para los grafos estrellas, bipartitos completos, p -partitos completos con $p \geq 3$ y las \mathbf{k} -coronas generalizadas de un grafo $G = (V, E)$ donde $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_{|V|}) \in \mathbb{Z}_+^{|V|}$ con $k_i \geq 2$. De este modo obtuvimos el X -poliedro para $X \in \{ID, LD, LTD\}$ (no existe un OLD -conjunto para estas familias de grafos). Esto permite resolver el X -problema para cualquier vector $c^T \in \mathbb{R}_+^{|V|}$ de pesos, consiguiendo cuando $c = \mathbf{1}$ el correspondiente X -número. También en el caso de los caminos y los ciclos, el enfoque poliedral nos permitió identificar todas y cada una de las desigualdades que definen facetas con coeficientes 0, 1, 2 del X -poliedro cuando $X \in \{ID, LD, OLD\}$. Más aún, describimos el LTD -poliedro para estas dos familias de grafos. Teniendo en cuenta evidencia computacional sobre el X -poliedro en caminos, presentamos:

Conjetura 5.1 *Si P_n es un camino de al menos $n \geq 10$ vértices entonces el X -poliedro cuando $X \in \{ID, LD, OLD\}$ se describe mediante las desigualdades en $Q_X(P_n)$ y las desigualdades de la forma $\alpha x \geq 2$ con $\alpha_i \in \{0, 1\}$ para todo $i \in V(P_n)$.*

Por otro lado, estudiamos el X -número con $X \in \{ID, LD, OLD, LTD\}$ para los grafos soles completos y co-soles analizando la estructura de estos grafos. Obtuvimos cotas en el caso del LD -número para ambas familias y para el LTD -número de los co-soles. Es importante destacar que estas cotas son alcanzadas en ciertas instancias. En los restantes casos, conseguimos el valor exacto de los X -números correspondientes. También, a partir del agregado de un vértice universal a un grafo, conseguimos el X -número con $X \in \{ID, LD, OLD, LTD\}$ para los grafos fan y wheel. Además, obtuvimos cotas para el X -número con $X \in \{OLD, LTD\}$ de los cuadrados de ciclos y caminos que son alcanzadas en instancias particulares.

Por último, presentamos algoritmos que en tiempo lineal determinan el X -número en grafos block para $X \in \{ID, LD, OLD, LTD\}$. De este modo, proporcionamos una subclase de grafos cordales para los cuales se pueden resolver los cuatro problemas en tiempo lineal.

Más aún, observemos que los árboles son exactamente grafos block con cliques de tamaño 2 y por tanto resultan la intersección entre los grafos block y los grafos bipartitos. Por lo tanto, nuestro resultado provee un algoritmo en tiempo lineal que encuentra el OLD -número y el LTD -número de un árbol hasta ahora desconocido.

También, nuestros algoritmos para grafos block, pueden modificarse de modo de encontrar en tiempo lineal el X -conjunto para el cual el X -número se alcanza con $X \in \{ID, LD, OLD, LTD\}$. Esto puede hacerse simplemente teniendo en cuenta cuáles son los vértices donde el mínimo de las funciones se alcanza. Además, si los vértices del grafo block tienen asociados pesos, los algoritmos pueden modificarse fácilmente de modo de obtener el

X -conjunto de mínimo peso cambiando en la Tabla 4.3 los valores 1 por los valores de pesos correspondientes.

Finalmente, es interesante analizar si ideas similares pueden adaptarse a otras clases de grafos con estructuras similares, como por ejemplo los cactus (grafos para los cuales todo subgrafo maximal 2-conexo es un ciclo) o los grafos block-cactus (grafos en los cuales todo subgrafo maximal 2-conexo es una clique o un ciclo). En ambos casos la existencia de un algoritmo en tiempo lineal para estos problemas está avalada por el meta-teorema de Courcelle et al. [20].

Capítulo 6

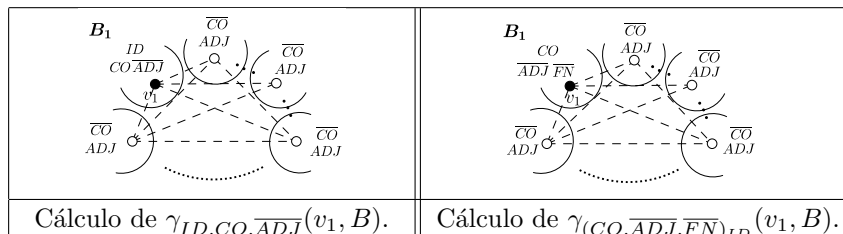
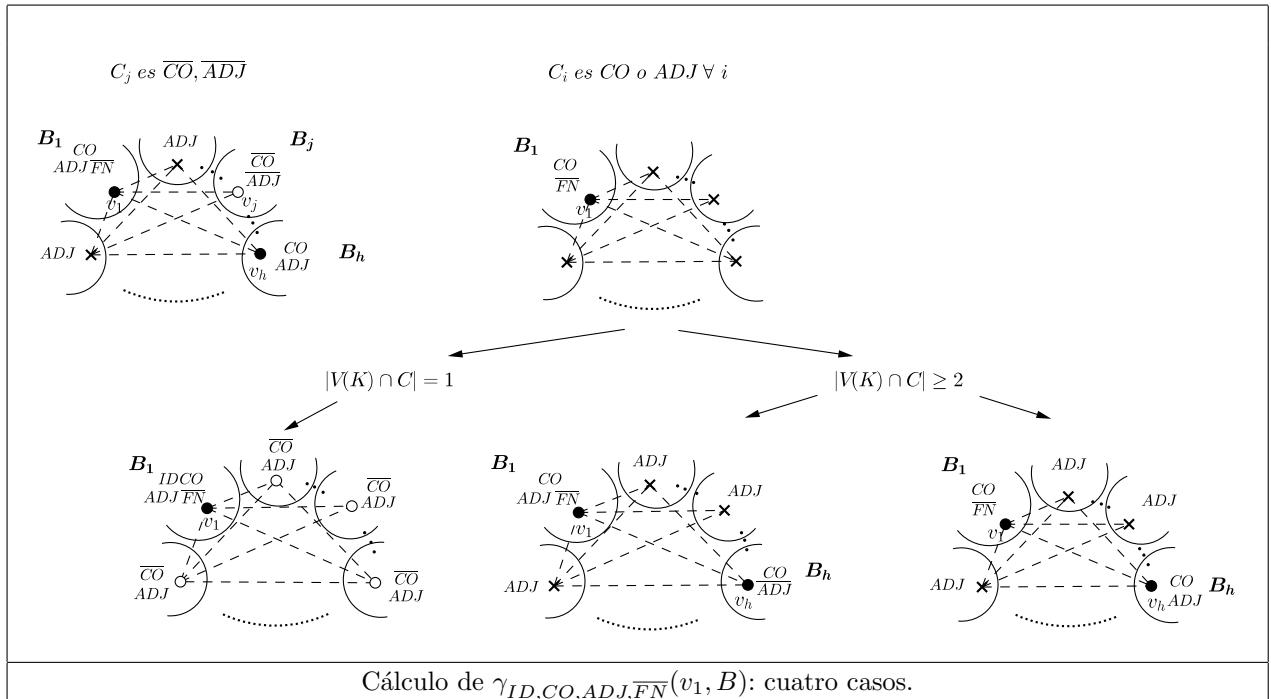
Apéndice

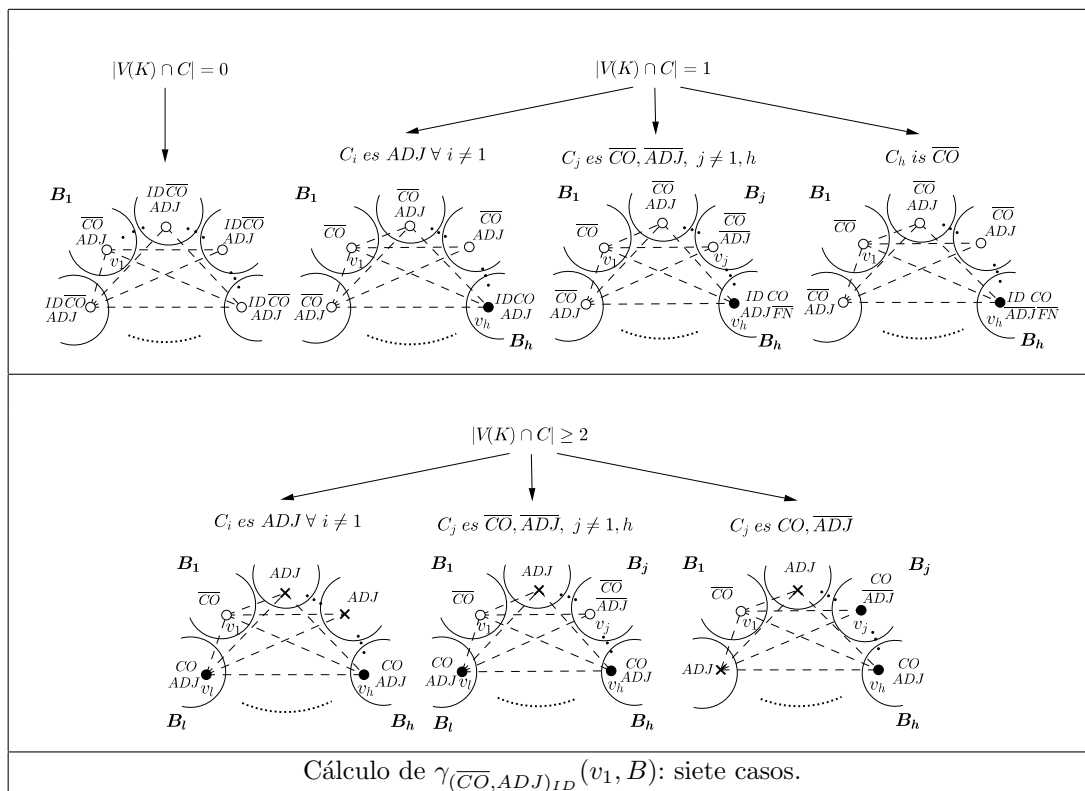
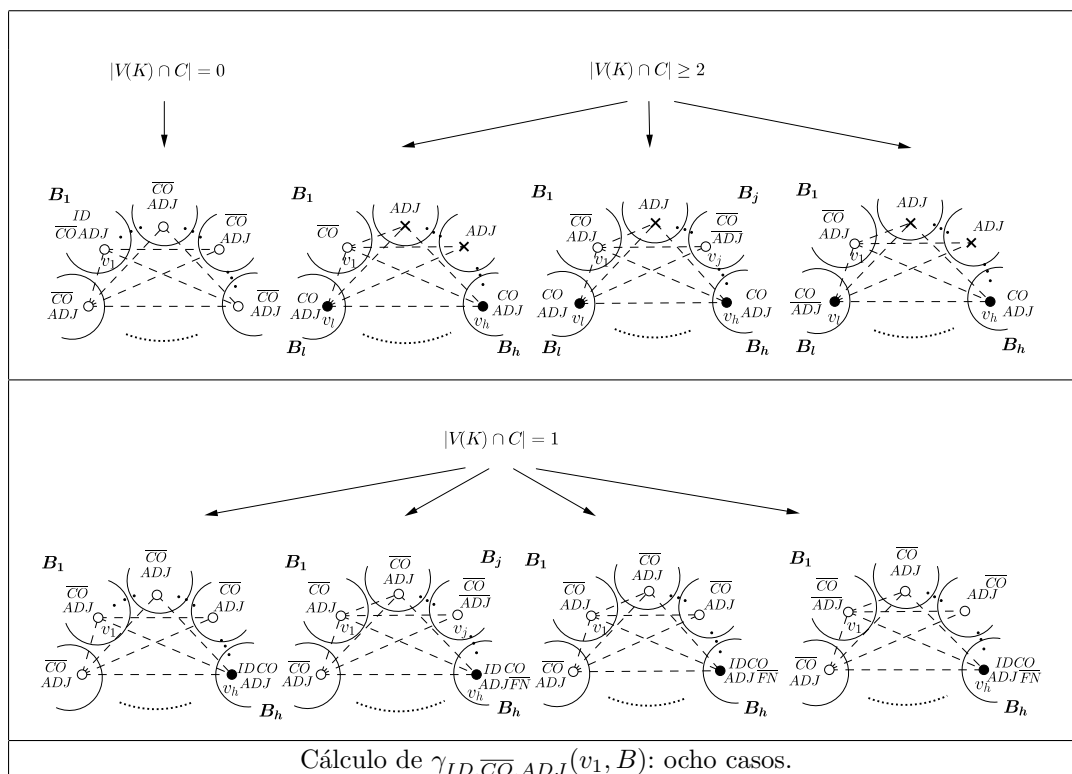
Resumen

En este apéndice, proporcionamos figuras que ilustran las pruebas de los Teoremas correspondientes al Capítulo 4.

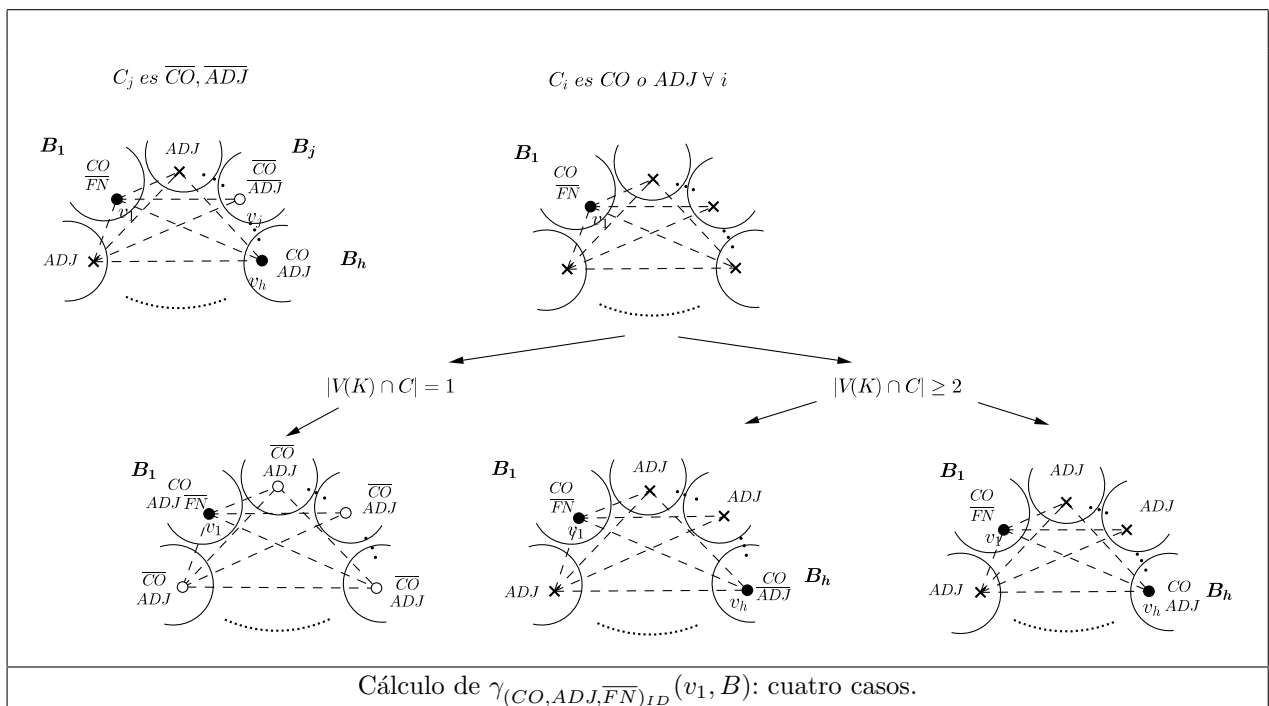
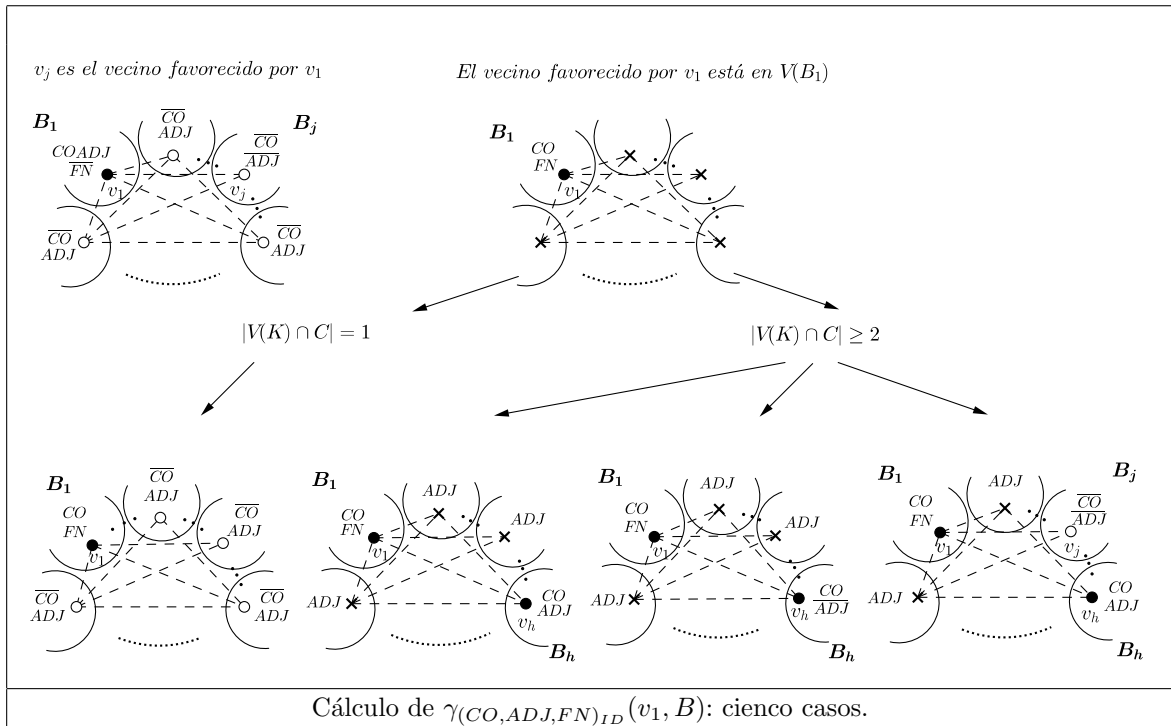
6.1. ILUSTRACIÓN CORRESPONDIENTE A LOS RESULTADOS DEL NÚMERO DE CÓDIGO DE IDENTIFICACIÓN.

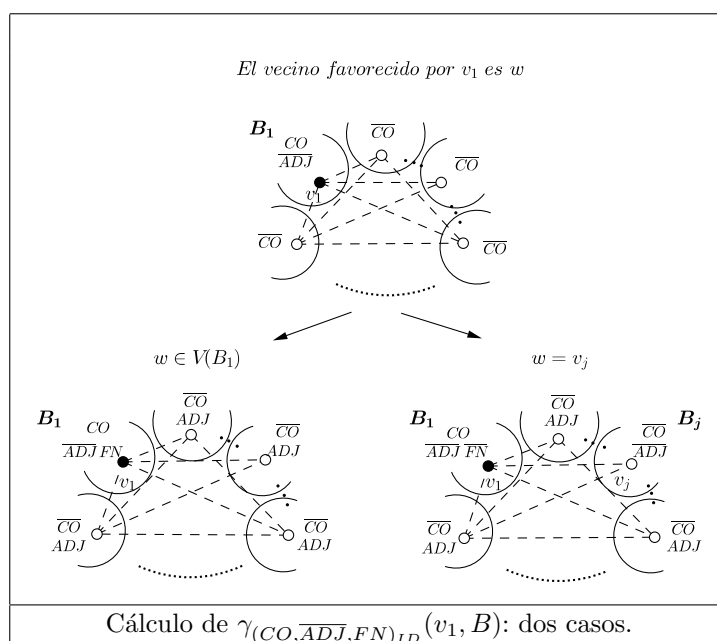
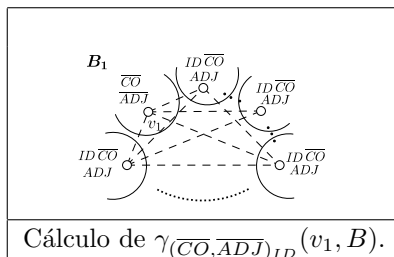
6.1. Ilustración correspondiente a los resultados del número de código de identificación.



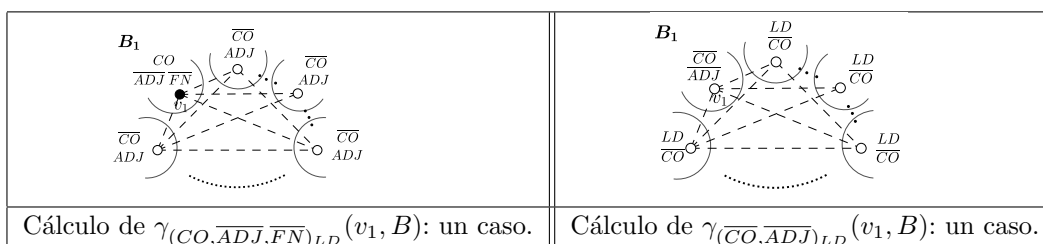


6.1. ILUSTRACIÓN CORRESPONDIENTE A LOS RESULTADOS DEL NÚMERO DE CÓDIGO DE IDENTIFICACIÓN.

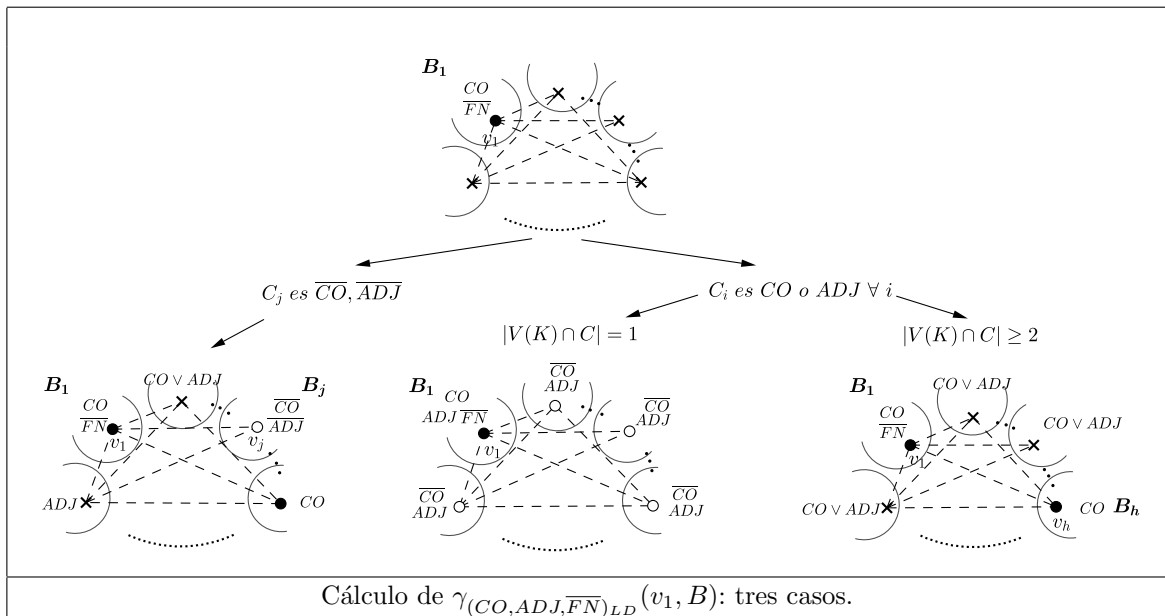
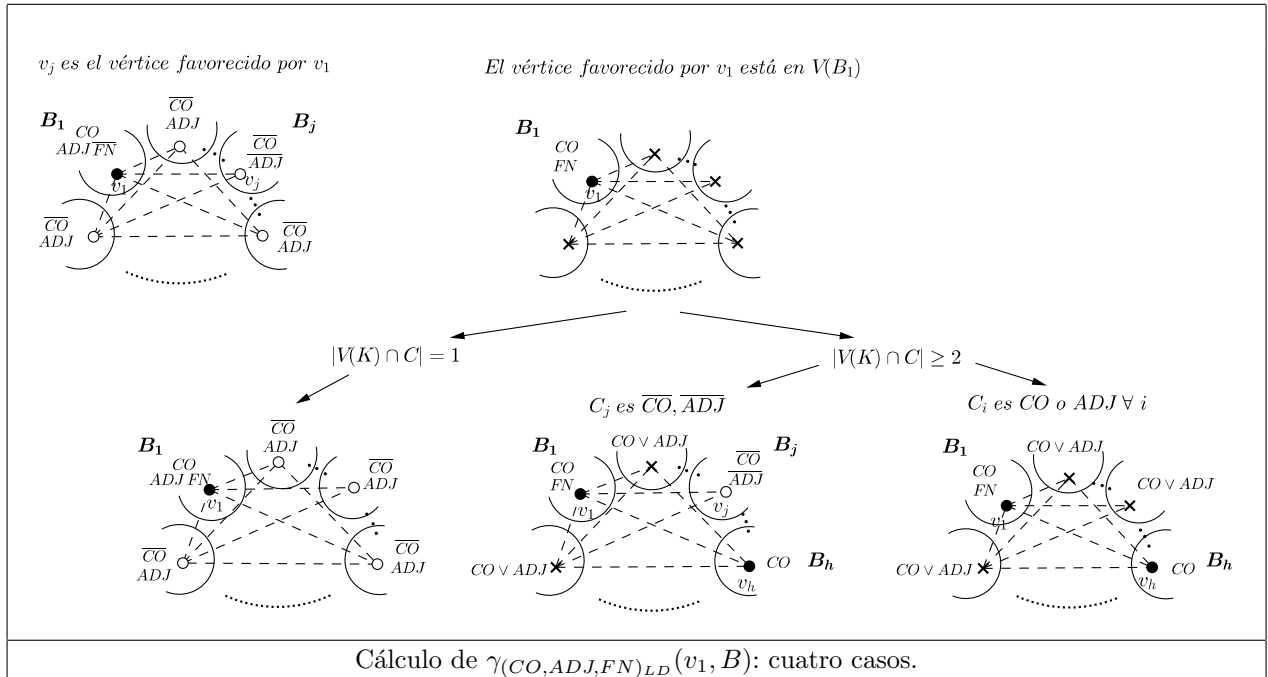


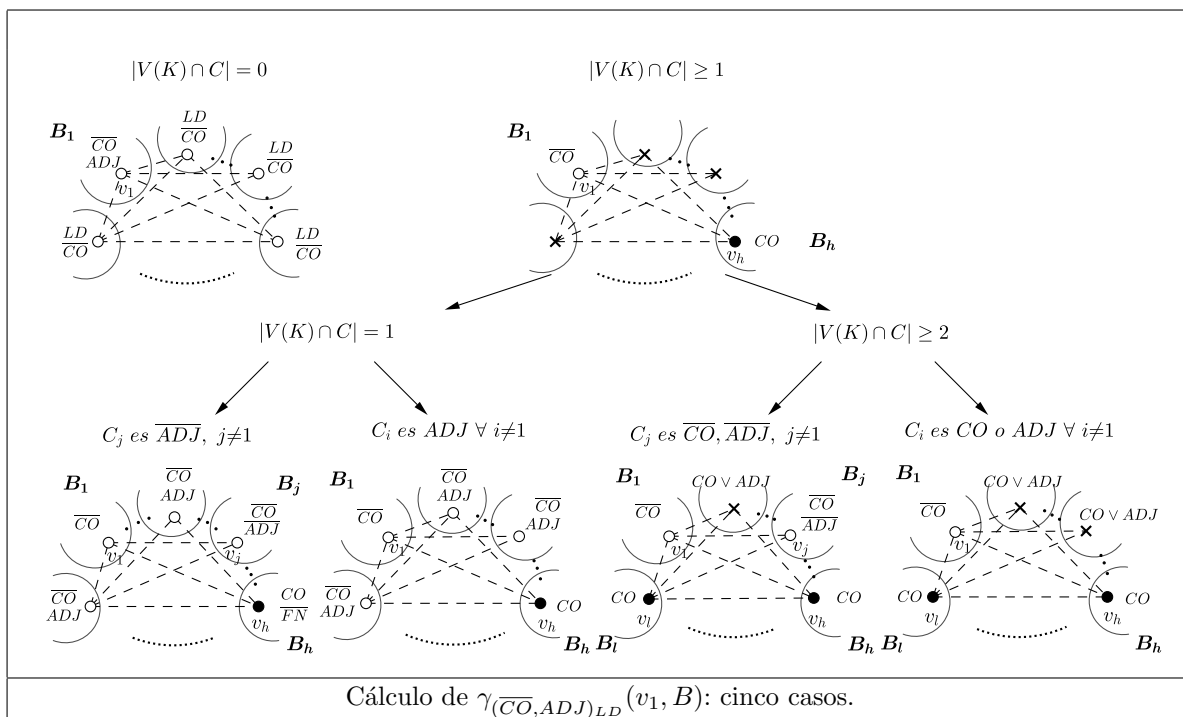
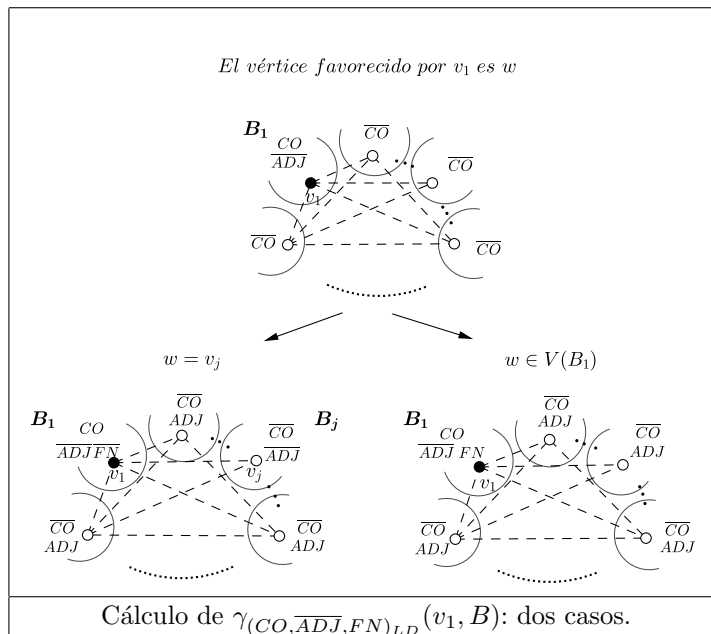


6.2. Ilustración correspondiente a los resultados del número de localización-dominación.

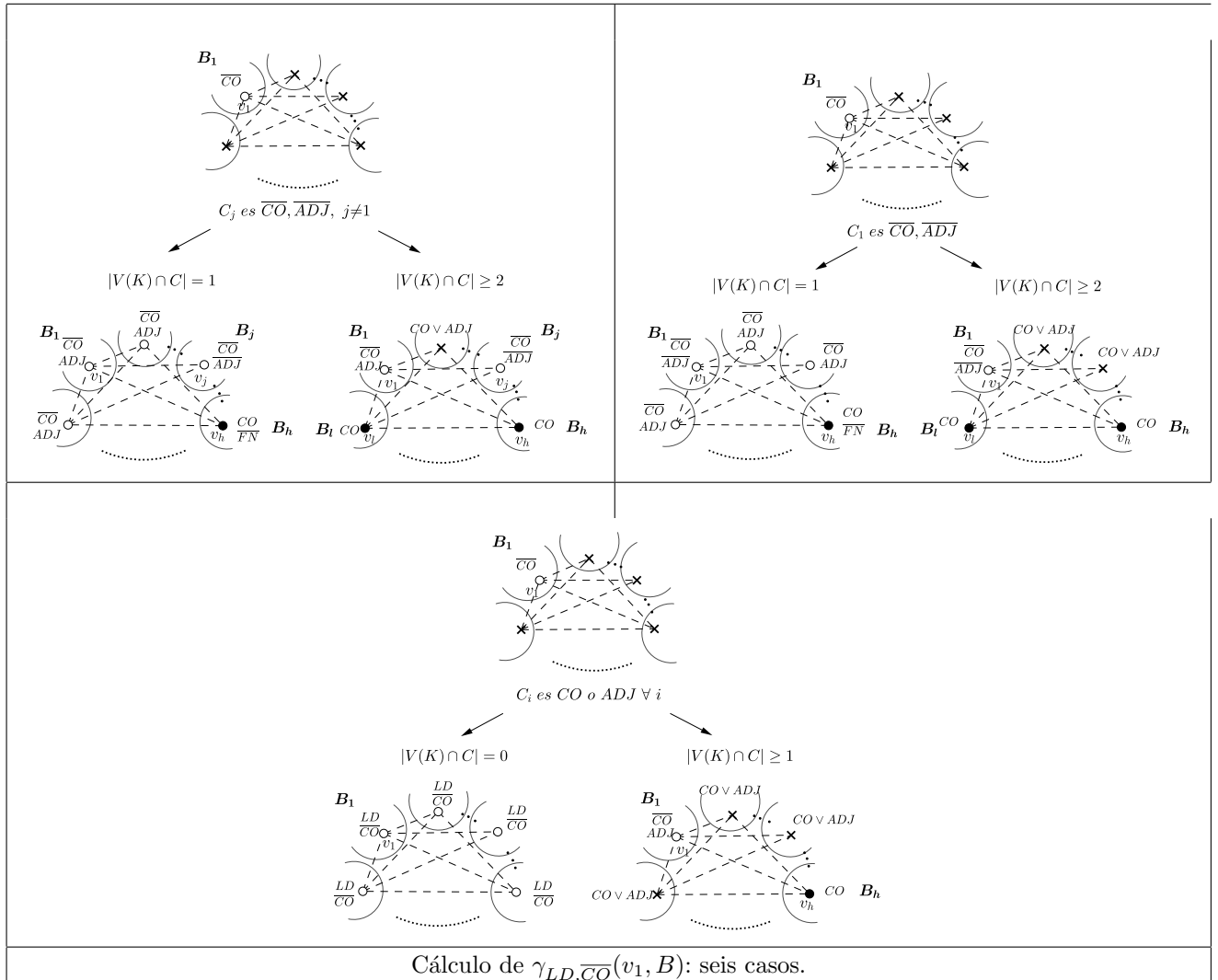


6.2. ILUSTRACIÓN CORRESPONDIENTE A LOS RESULTADOS DEL NÚMERO DE LOCALIZACIÓN-DOMINACIÓN.

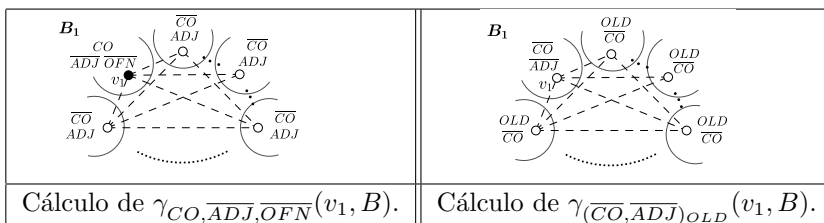
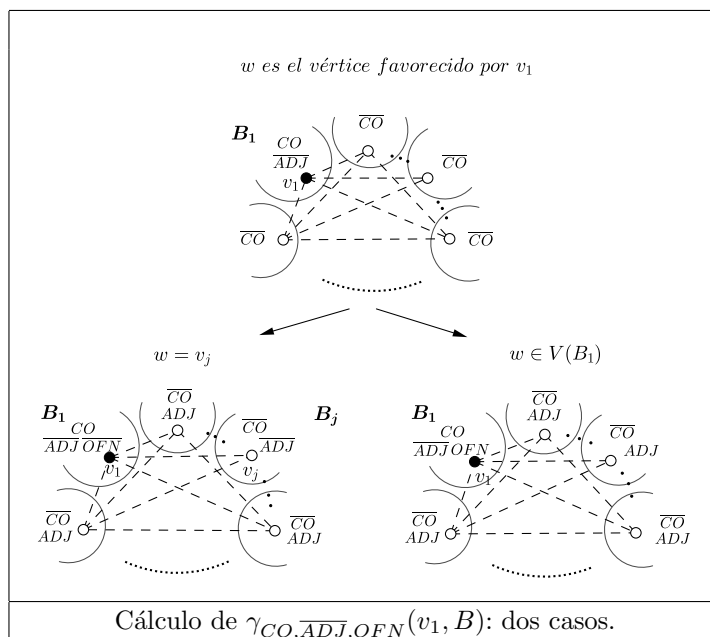




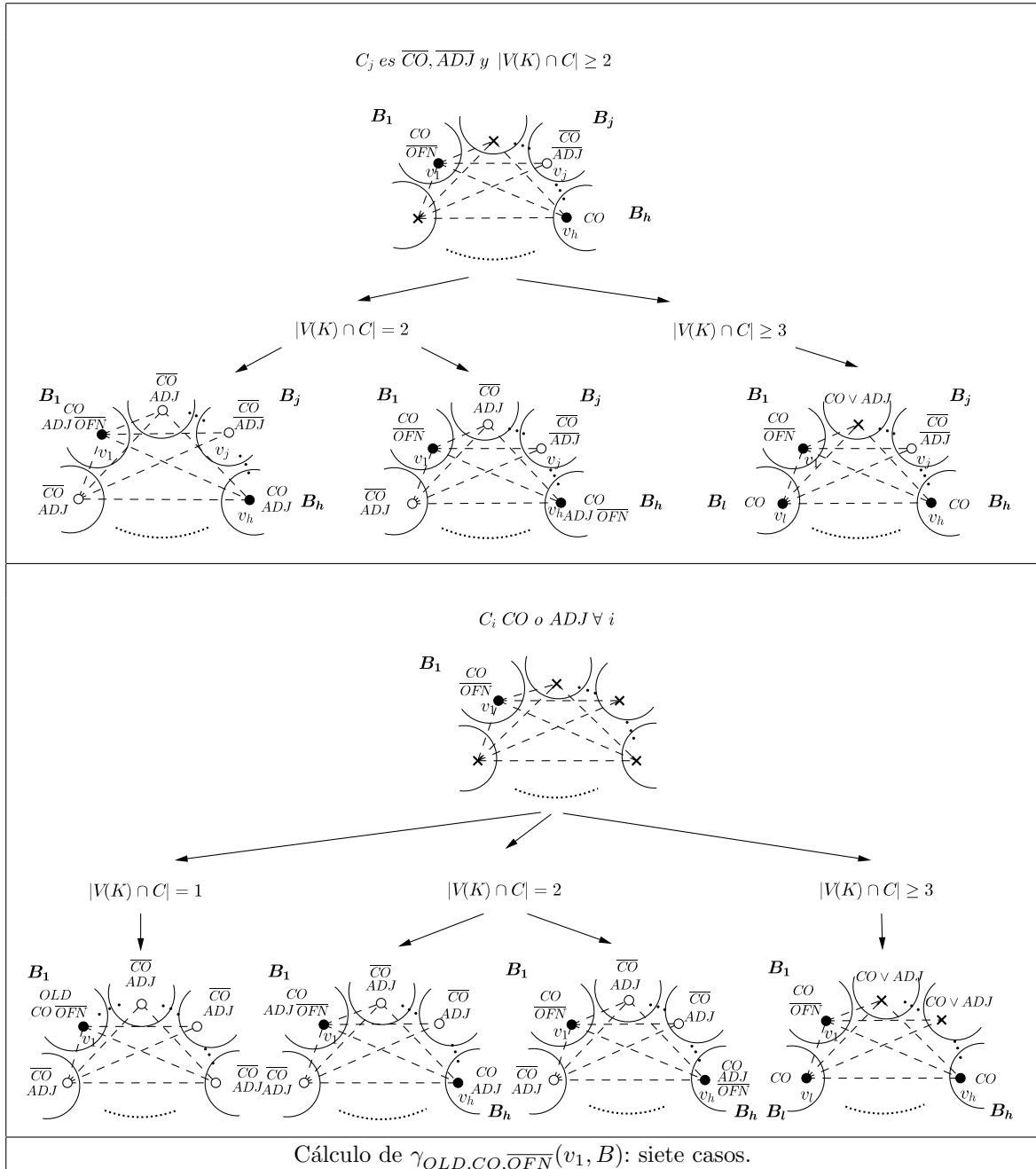
6.2. ILUSTRACIÓN CORRESPONDIENTE A LOS RESULTADOS DEL NÚMERO DE LOCALIZACIÓN-DOMINACIÓN.

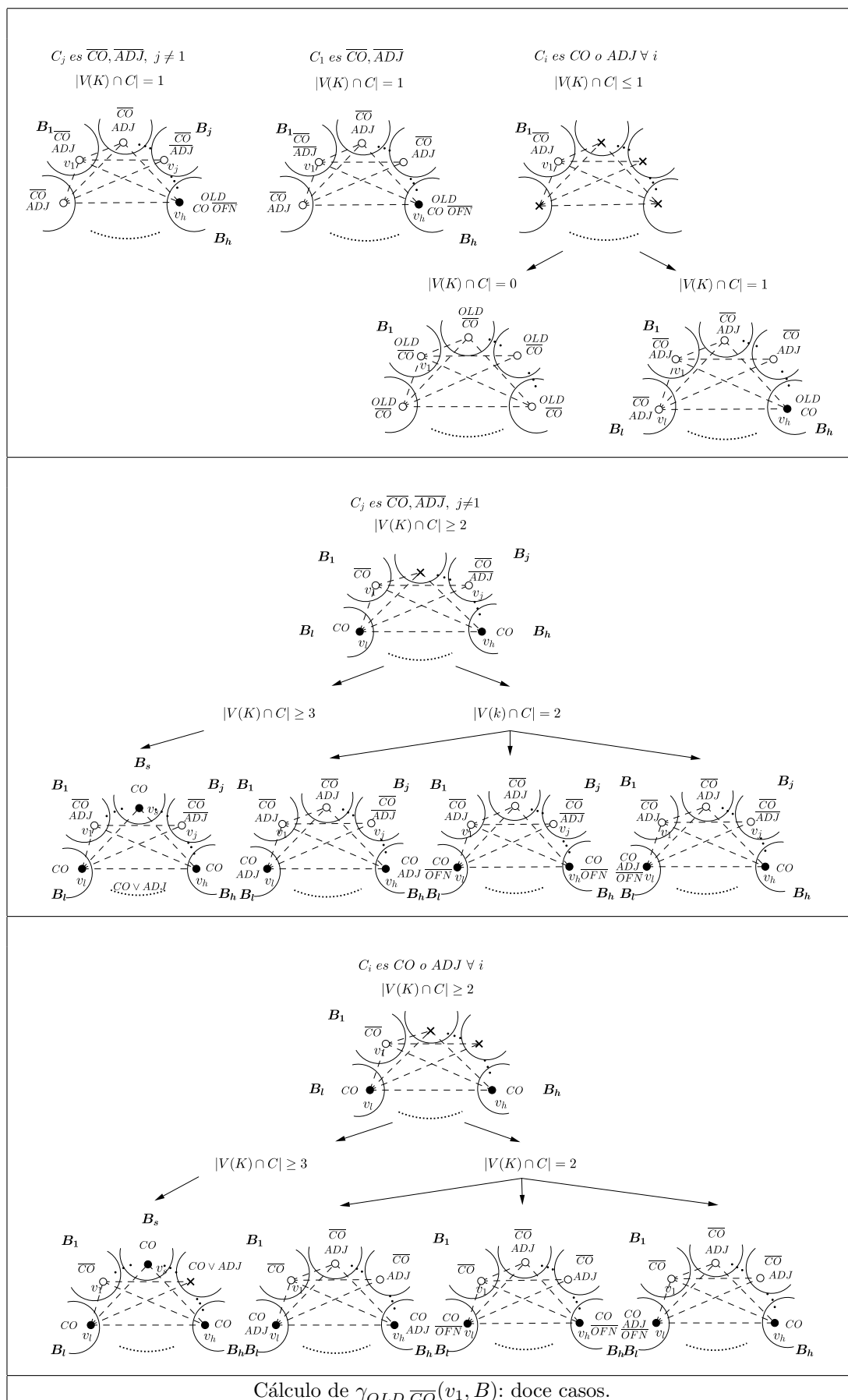


6.3. Ilustración correspondiente a los resultados del número de localización-dominación abierta.

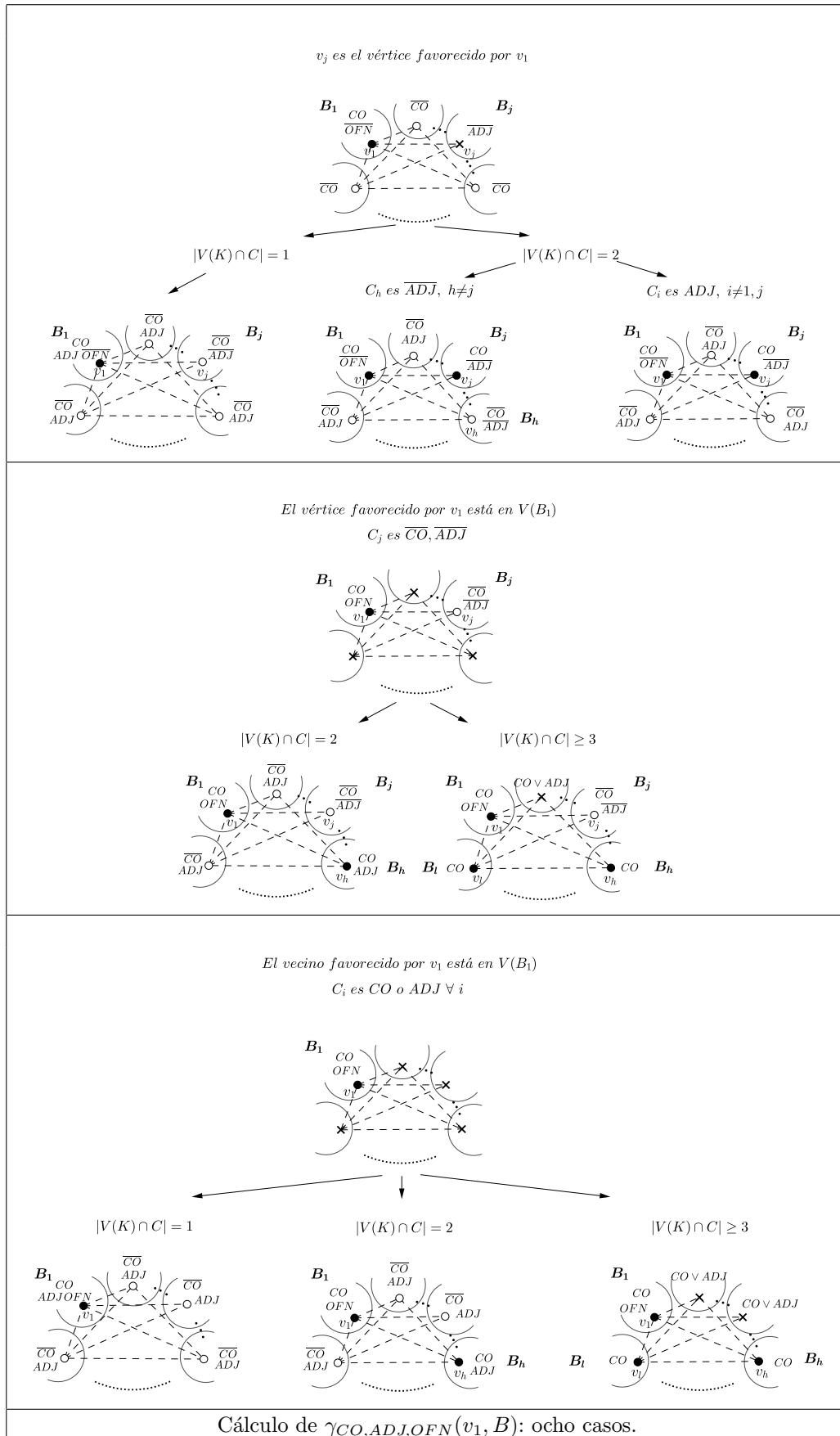


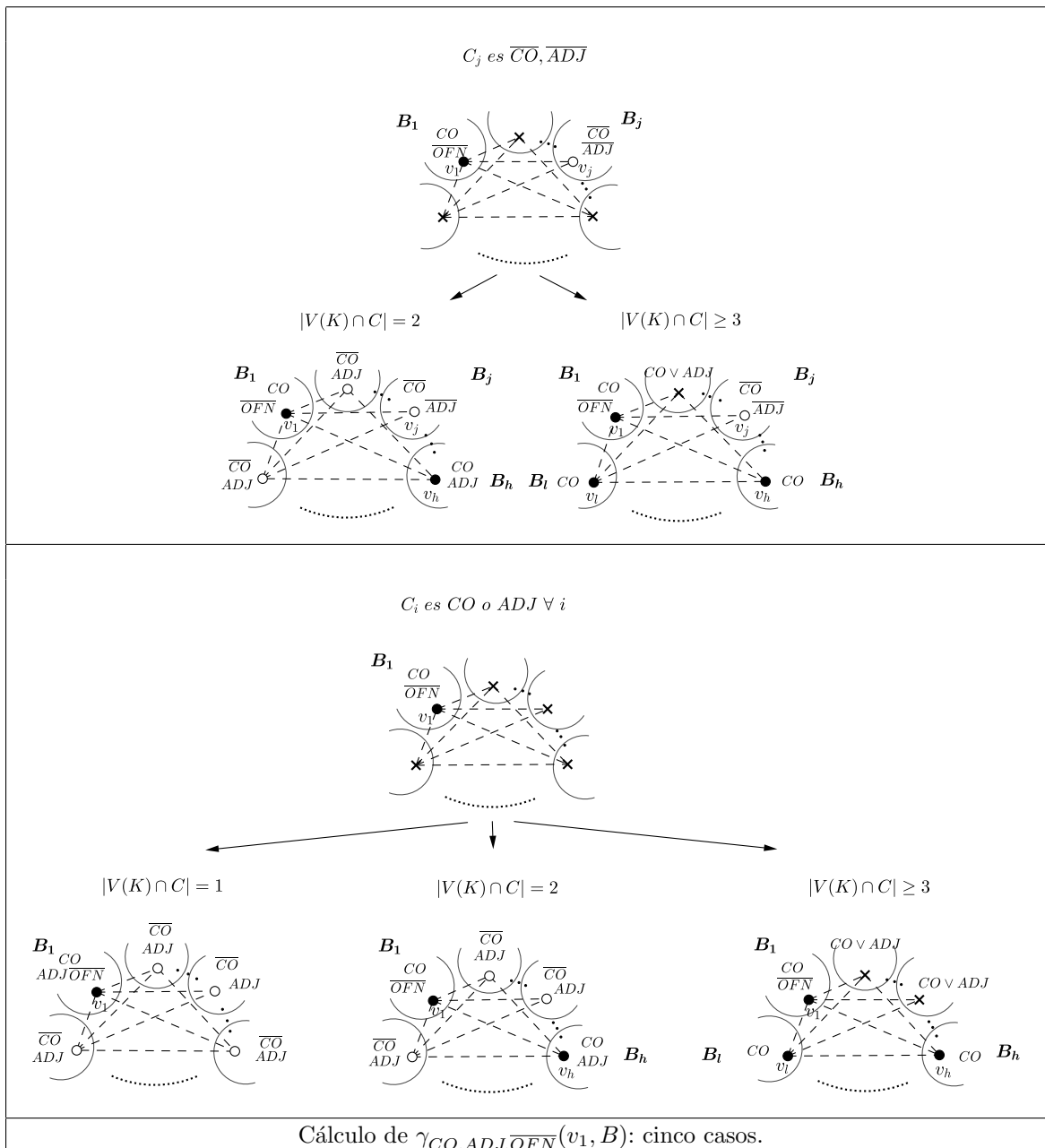
6.3. ILUSTRACIÓN CORRESPONDIENTE A LOS RESULTADOS DEL NÚMERO DE LOCALIZACIÓN-DOMINACIÓN ABIERTA.



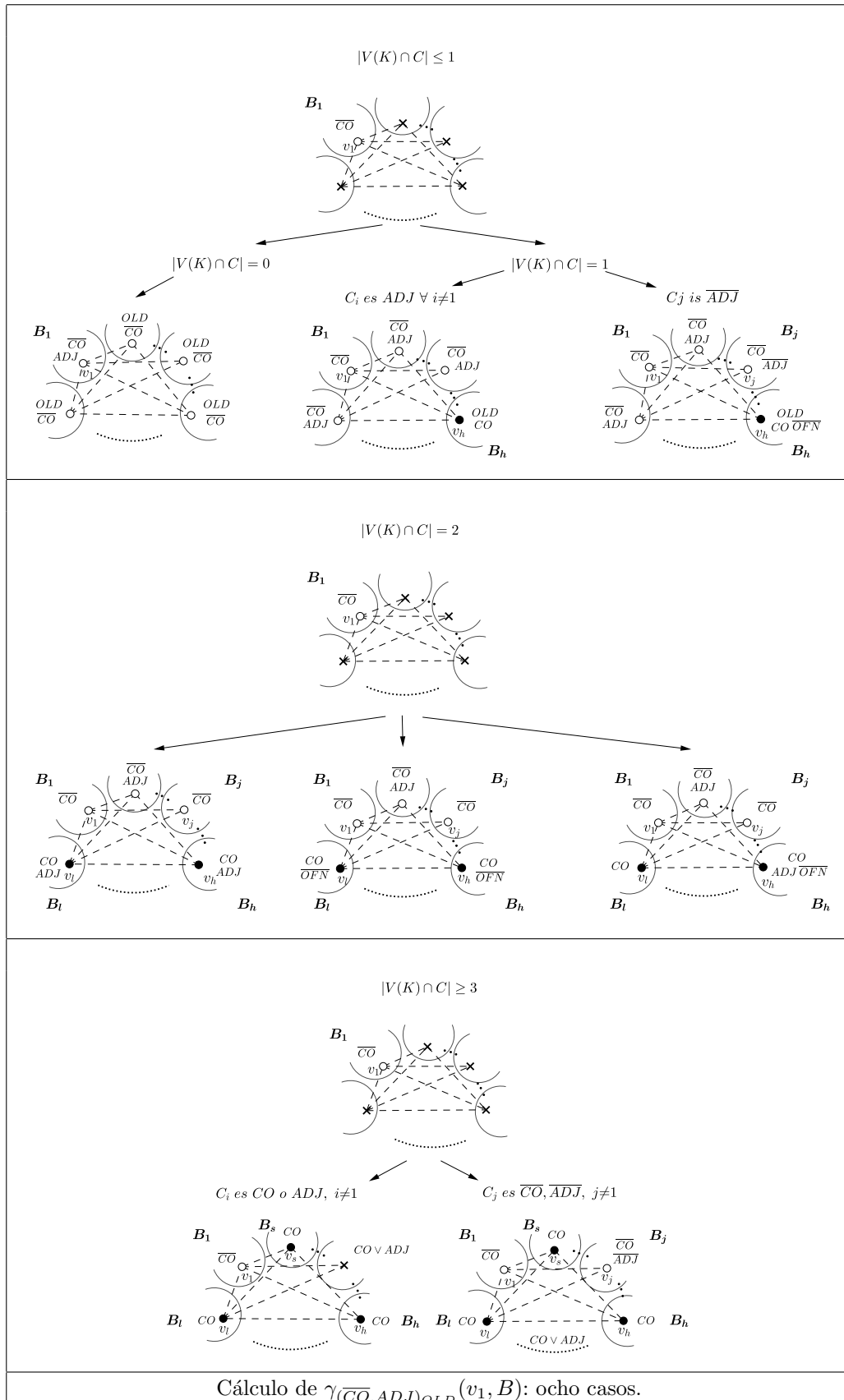


6.3. ILUSTRACIÓN CORRESPONDIENTE A LOS RESULTADOS DEL NÚMERO DE LOCALIZACIÓN-DOMINACIÓN ABIERTA.





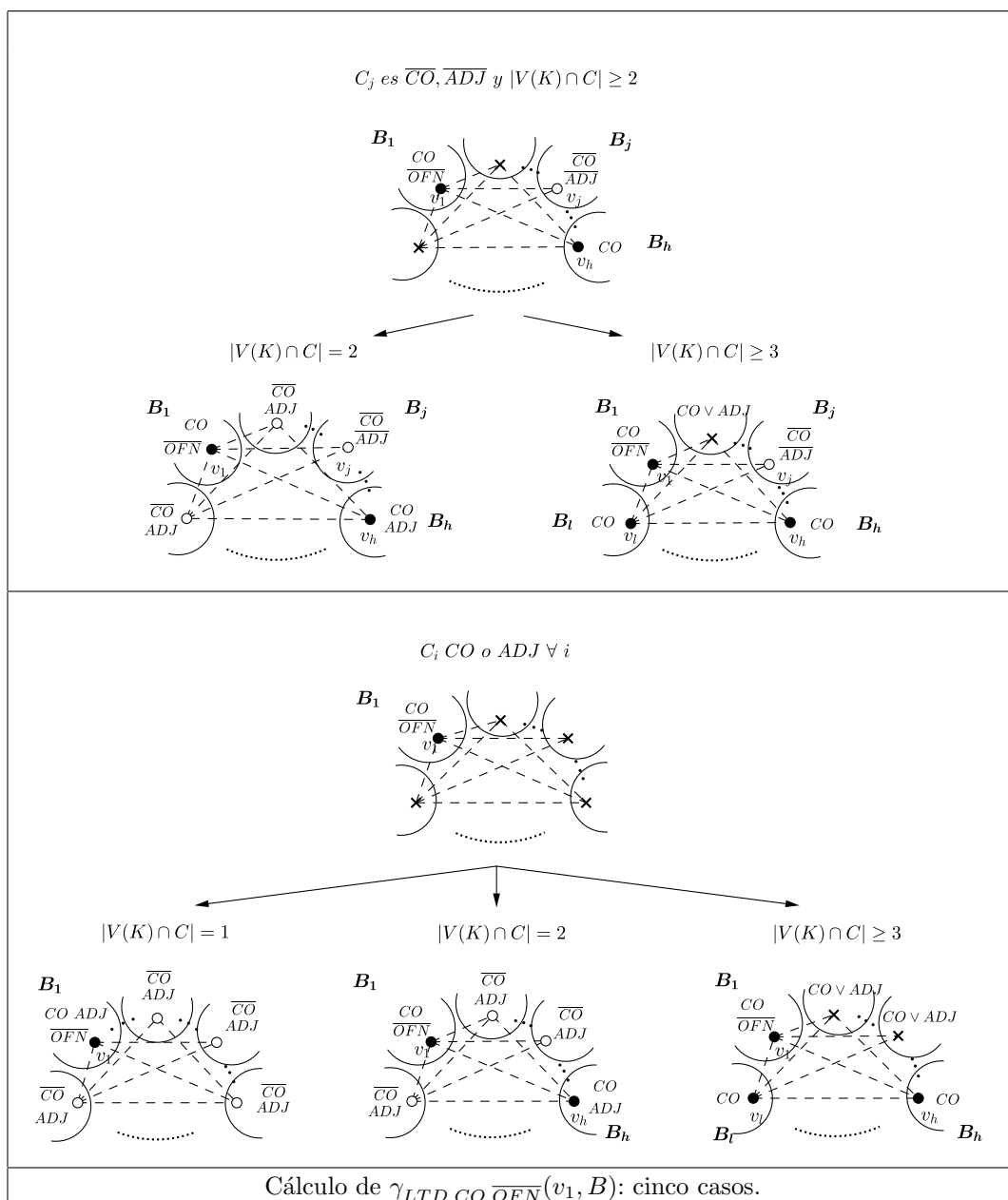
6.3. ILUSTRACIÓN CORRESPONDIENTE A LOS RESULTADOS DEL NÚMERO DE LOCALIZACIÓN-DOMINACIÓN ABIERTA.



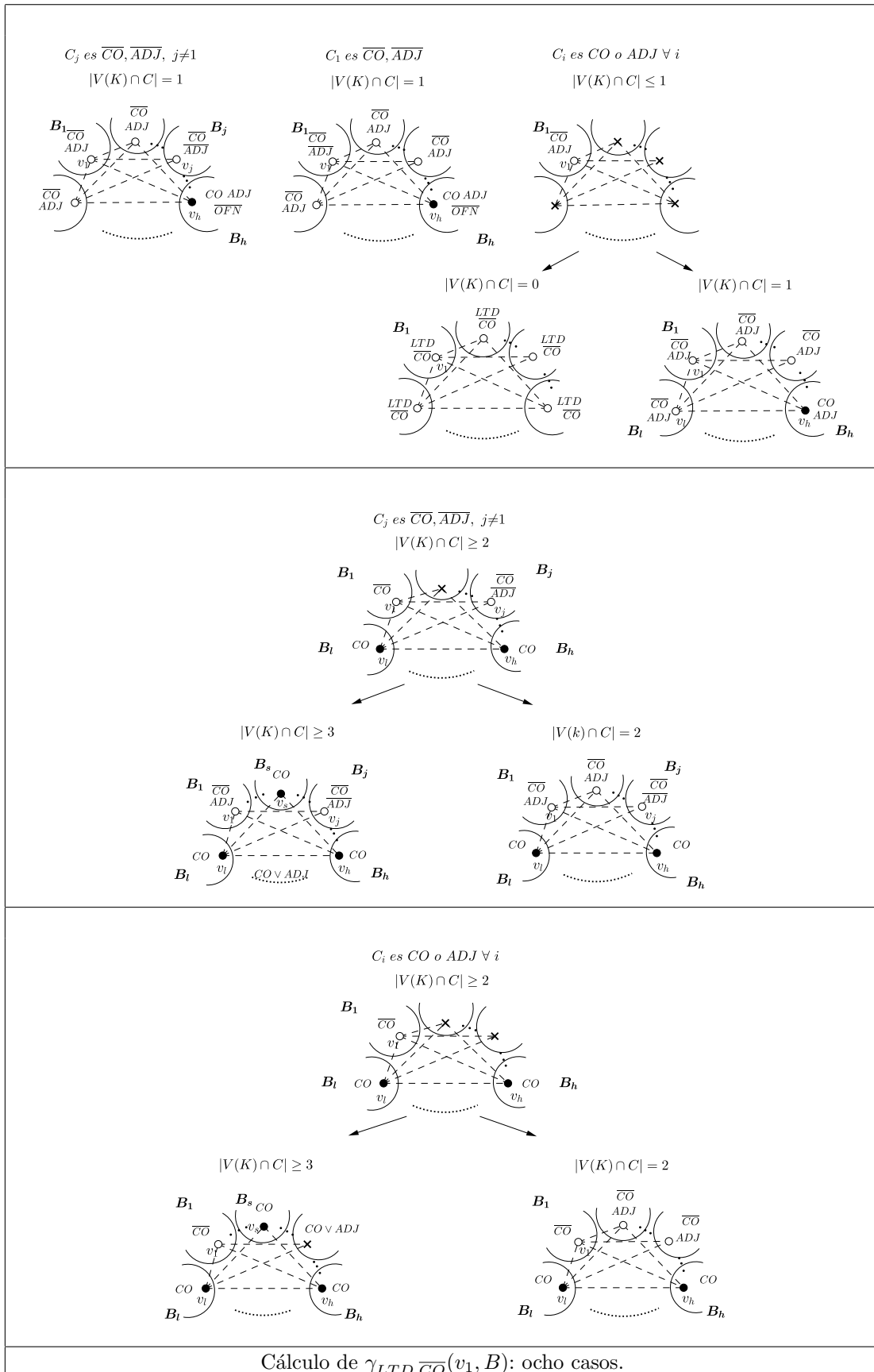
6.4. Ilustración correspondiente a los resultados del número de localización-dominación total.

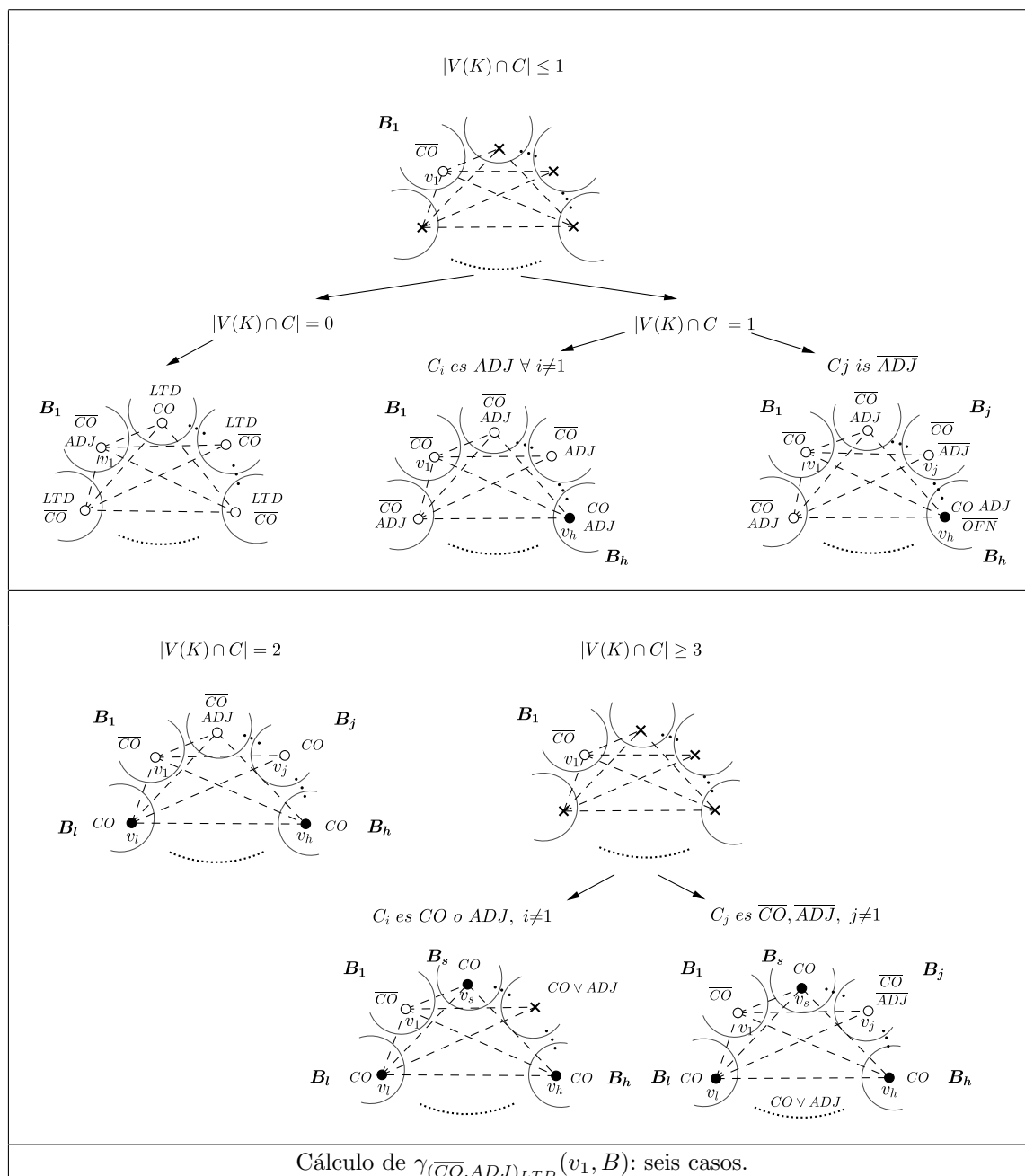
Primero observamos que las funciones $\gamma_{CO,ADJ,OFN}$, $\gamma_{CO,ADJ,\overline{OFN}}$, $\gamma_{CO,\overline{ADJ},OFN}$ Y $\gamma_{CO,\overline{ADJ},\overline{OFN}}$ son iguales para el *OLD*-problema y el *LTD*-problema.

A continuación presentamos las figuras asociadas a los restantes números para el *LTD*-problema.

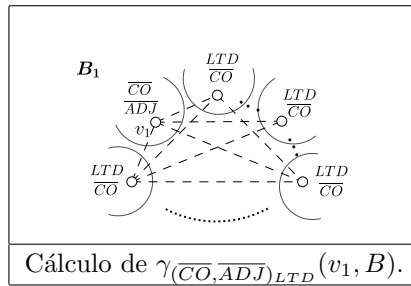


6.4. ILUSTRACIÓN CORRESPONDIENTE A LOS RESULTADOS DEL NÚMERO DE LOCALIZACIÓN-DOMINACIÓN TOTAL.





6.4. ILUSTRACIÓN CORRESPONDIENTE A LOS RESULTADOS DEL NÚMERO DE LOCALIZACIÓN-DOMINACIÓN TOTAL.



Bibliografía

- [1] G. Argiroffo, S. Bianchi, *On the set covering polyhedron of circulant matrices*, Discrete Optim. **6-2**, 162-173, 2009.
- [2] G. Argiroffo, S. Bianchi, A. Wagler, *Polyhedra associated with identifying codes*, Electronic Notes in Discrete Mathematics **44**, 175-180, 2013.
- [3] G. Argiroffo, S. Bianchi, A. Wagler, *Study of identifying code polyhedra for some families of split graphs*, Lecture Notes in Computer Science 8596, 13-25, 2014.
- [4] G. Argiroffo, S. Bianchi, A. Wagler, *A polyhedral approach to locating-dominating sets in graphs*, Electronic Notes in Discrete Mathematics **50**, 89-94, 2015.
- [5] D. Auger, *Minimal identifying codes in trees and planar graphs with large girth*, European Journal of Combinatorics **31**, 1372-1384, 2010.
- [6] E. Balas, S. Ng, *On the set covering polytope: I. all facets with coefficients in $\{0, 1, 2\}$* , Mathematical Programming **43**, 57-69, 1989.
- [7] C. Berge, *Theory of Graphs and its Applications*, Methuen, London, 1962.
- [8] A. Bertossi, *Dominating sets for split and bipartite graphs*, Information Processing Letters **19**, 37-40, 1984.
- [9] N. Bertrand, I. Charon, O. Hudry, A. Lobstein, *Identifying and locating dominating codes on chains and cycles*, European Journal of Combinatorics **25**, 969-987, 2004.
- [10] D. Bertsimas, R. Weismantel, *Optimization Over Integers*, Dynamic Ideas, Belmont, Massachusetts, 2005.
- [11] M. Carr, *Estudio poliedral de q -rosas y (q, t) -rosas*, Tesis de Licenciatura en Ciencias de la Computación, FCEIA - UNR, 2008.
- [12] G. Chang, *Algorithmic aspects of domination in graphs*, Handbook of Combinatorial Optimization Vol. 3, D. Du and P Pardalos editors, Kluwer, 1998.

- [13] I. Charon, G. D. Cohen, O. Hudry, A. Lobstein, *New identifying codes in the binary Hamming space*, European Journal of Combinatorics **31**, 491-501, 2010.
- [14] I. Charon, O. Hudry, A. Lobstein, *Minimizing the size of an identifying or locating-dominating code in a graph is NP-hard*, Theor. Comp. Sc. **290**, 2109-2120, 2003.
- [15] M. Chellali, N. J. Rad, *Locating-total domination critical graphs*, Australasian J. Combinatorics **160**, 227-234, 2009.
- [16] C. Chen, C. Lu, Z. Miao, *Identifying codes and locating-dominating sets on paths and cycles*, Discrete Applied Mathematics **159**, 1540-1547, 2011.
- [17] V. Chvátal, *Edmonds Polytopes and a Hierarchy of Combinatorial Problems*, Discrete Mathematics, **4**, 305-337, 1973.
- [18] D. Corneil, L. Stewart, *Dominating set in perfect graphs*, Discrete Mathematics **86**, 145-164, 1990.
- [19] G. Cornuéjols, B. Novick, *Ideal 0-1 Matrices*, Journal of Combinatorial Theory B **60**, 145-157, 1994.
- [20] B. Courcelles, J.A. Makowsky, U. Rotics, *Linear time solvable optimization problems on graphs with bounded clique-width*, Theory Comput. Syst. **33**,125-150, 2000.
- [21] M. Faber, *Domination, independent domination and duality in strongly chordal graphs*, Discrete Applied Mathematics **7**, 115-130, 1984.
- [22] F. Faucoud, *The complexity of the identifying code problem in restricted graph classes*, Comb. Algorithms (IWOCA 2013), LNCS 8288, 150-163, 2013.
- [23] F. Foucaud, G. B. Mertzios, R. Naserasr, A. Parreau, P. Valicov, *Identification, location-domination and metric dimension on interval and permutation graphs. I. Bounds*, Theoretical Computer Science **668**, 43-58, 2017.
- [24] S. Gravier, J. Moncel, *On graphs having a $V \setminus \{x\}$ -set as an identifying code*, Discrete Mathematics **307**, 432-434, 2007.
- [25] S. Gravier, J. Moncel, A. Semri, *Identifying codes in cycles*, European Journal of Combinatorics **27**, 767-776, 2006.
- [26] R.E. Gomory, *Outline of an Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs*, Bulletin of the American Mathematical Society **64**, 275-278, 1958.
- [27] T.W. Haynes, M. A. Henning, J. Howard, *Locating and total-dominating sets in trees*, Discrete Applied Mathematics **154**, 1293-1300, 2006.

- [28] M. A. Henning, *Dominating functions in Graphs*, In: Domination in Graphs: Advanced Topics, Marcel-Dekker, 31-62, 1997.
- [29] M. A. Henning, N. J. Rad, *Locating-total domination in graphs*, Discrete Applied Mathematics, **160**, 1986-1993, 2012.
- [30] I. Honkala, *On r -locating-dominating sets in paths*, European Journal of Combinatorics, **304**, 1022-1025, 2009.
- [31] S. Janson, T. Laihonen. *Note: On the size of identifying codes in binary hypercubes*, Journal of Combinatorial Theory A, **116**, 1087-1096, 2009.
- [32] V. Junnila, T. Laihonen, *Optimal Identifying Codes in Cycles and Paths*, Graphs and Combinatorics, **28**, 469-481, 2012.
- [33] M. Kaminski, V. Lozin, M. Milanic, *Recent developments on graphs of bounded clique-width*, Discrete Applied Mathematics **157**, 2747-2761, 2009.
- [34] M. G. Karpovsky, K. Chakrabarty, L. B. Levitin, *On a new class of codes for identifying vertices in graphs*, IEEE Trans. Inform. Theory **44**, 599-611, 1998.
- [35] A. Lobstein, *Watching systems, identifying, locating-dominating and discriminating codes in graphs*, <https://www.lri.enst.fr/~lobstein/debutBIBidetlocdom.pdf>
- [36] J. Moncel, *Codes identifiants dans les graphes*. PhD thesis, Universite Joseph Fourier, Grenoble, 2005.
- [37] T. Müeller, J. S. Sereni, *Identifying and locating-dominating codes in (random) geometric networks*, Comb. Probab. Comput. **18** (6), 925-952, 2009.
- [38] G. Nemhauser, L. Wolsey *Integer and Combinatorial Optimization*, Wiley, 1988.
- [39] P. Nobile, A. Sassano, *Facets and lifting procedures for the set covering polytope*, Math. Program. **45**, 111-137, 1989.
- [40] A. Pandey, *Open Neighborhood Locating-Dominating Set in Graphs: Complexity and Algorithms*, IEEE, 2015 International Conference on Information Technology (ICIT).
- [41] PORTA: www.iwr.uni-heidelberg.de/groups/comopt/software/PORTA.
- [42] C. Revelle, D. Marks, J.C. Liebman, *An analysis of private and public sector location model*, Management Sci. **16**, 692-707, 1970.
- [43] A. Sassano, *On the facial structure of the set covering polytope*, Math. Program. **44**, 181-202, 1989.

- [44] S.J. Seo, P.J. Slater, *Open neighborhood locating dominating sets*, Australasian Journal of Combinatorics, **46**, 109-119, 2010.
- [45] P.J. Slater, *Dominating and location in acyclic graphs*, Networks **17**, 55-64, 1987.
- [46] P. J. Slater, *Dominating and reference sets in a graph*, J. Math. Phis. Sci. **22**, 445-455, 1988.
- [47] C. Toregas, R. Swain, C. Reville, L. Berman, *The location of emergency service facilities*, Operations Res. **19**, 1363-1373, 1971.
- [48] L. Wolsey, *Integer Programming*, John Wiley and Sons, 1998.

