Universidad Nacional de Rosario

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Escuela de Posgrado y Educación Continua

Tesis de Maestría

Maestría en Didáctica de las Ciencias

Mención Matemática

El método de casos como metodología de enseñanza del pensamiento no determinista en la formación de profesores en Matemática de la UNR

Alumna: Ing. Julia Cabral

(C-0181/3)

Directora: Dra. Natalia Sgreccia

Co-Director: Mg. Raúl Katz

Abril 2019

En primer lugar deseo expresar mi agradecimiento a la directora de esta tesis, Dra. Natalia Sgreccia y al co-director Mg. Raúl Katz, por la dedicación y apoyo que han brindado a este trabajo, por el respeto a mis sugerencias e ideas y por la dirección y el rigor que ha facilitado a las mismas.

Asimismo, agradezco a mis profesores de la Maestría por su acompañamiento y la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (UNR), por permitirme seguir mi formación.

Agradezco el apoyo vital que me ofrecen las personas que me estiman, sin el cual no tendría la fuerza y energía que me anima a crecer como persona y como profesional.

Gracias a mi familia, en especial a mi hermana Cecilia y a mi cuñado Pablo, que siempre me han prestado un gran apoyo moral y humano, necesarios en los momentos difíciles de este trabajo y esta profesión.

ÍNDICE

RESUMEN

En la tesis se procura analizar cómo se van activando los subdominios del *conocimiento matemático para la enseñanza* cuando estudiantes avanzados del Profesorado en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la UNR diseñan casos para introducir un pensamiento no determinista en sus potenciales alumnos del nivel secundario de educación, montándose para ello una Ingeniería Didáctica. El enfoque metodológico ha sido cualitativo, con alcance descriptivo-interpretativo correspondiente a un diseño de caso. Los principales hallazgos indican que la metodología permite activar los subdominios de conocimiento *en el horizonte matemático* (utilizando el método para introducir el tema, vinculando contenidos con otras asignaturas); *especializado del contenido* (introduciendo el pensamiento no determinista); *del contenido y de los estudiantes* (teniendo en cuenta los intereses de los alumnos a la hora de elaborar los casos); *del contenido y de la enseñanza* (elaborando un caso con todas sus partes componentes); a la vez que debido a su carácter flexible y dinámico, se adapta a distintos niveles de dificultad y se enriquece con la práctica.

Respecto al subdominio de *conocimiento en el horizonte matemático* se observa la necesidad de fortalecer la integración de asignaturas de la carrera, dado que se han percibido momentos de confusión respecto al significado de algunos conceptos. Los estudiantes participantes de la investigación logran activar el subdominio de *conocimiento especializado del contenido* mediante la elaboración de casos para introducir conceptos de Probabilidad y Estadística sin el uso de fórmulas, así como desarrollar la argumentación en la toma de decisiones. El subdominio de *conocimiento del contenido y de los estudiantes* se hace palpable en la elección de la temática de los casos y mediante la elaboración de preguntas que guían a analizar las diversas variables que influyen en las situaciones. Esto varias veces se produce independientemente de la valoración numérica, pasando de un pensamiento determinista a uno con mejor manejo de situaciones con incertidumbre, donde el aprendizaje se va propiciando a partir de la necesidad de resolver una situación real. El subdominio referido al *conocimiento del contenido y de la enseñanza* presenta rasgos de desarrollo. A pesar que no haber recibido formación específica respecto al método de casos y al pensamiento no determinista, los futuros profesores logran interiorizarse con la metodología y el contenido a través de la elaboración de propuestas de enseñanza y la revisión de las propuestas de sus pares.

CAPÍTULO 1 - Presentación

Este proyecto de investigación aplicada, basado en un enfoque cualitativo interpretativo, se propone incluir el método de casos como metodología de enseñanza de contenidos básicos de Probabilidad y Estadística, incluyendo Combinatoria, en un conjunto de alumnos avanzados del Profesorado en Matemática (PM) de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario (UNR). Esta experiencia se enmarca en la Ingeniería Didáctica (Artigue, Douady, Moreno y Gómez, 1995) como metodología de investigación. Permite asumir un rol de profesor-investigador al diseñar una secuencia de actividades, partiendo de una serie de supuestos mediante la implementación y análisis de evolución de la misma.

El interés acerca del tema radica en la posibilidad de ampliar el abanico de metodologías a utilizar en la enseñanza y fomentar en los estudiantes del PM el desarrollo de material propio. En efecto, los casos diseñados por los estudiantes se constituyen en un recurso útil con valor didáctico, tanto para este PM como para otros. En particular permite arraigar la presencia de fenómenos no determinísticos en nuestra cotidianidad y también de cómo la Probabilidad y la Estadística pueden servir para analizarlos. Por otro lado, los dilemas en el marco de cuestiones no lineales que plantean los casos resultan representativos del tipo de situaciones que el futuro profesor tendrá que resolver prácticamente a diario.

En la búsqueda de una caracterización del conocimiento que un profesor en Matemática debería desarrollar, más allá del disciplinar específico o pedagógico general, y en base a los avances de Shulman (1986, 1987), el grupo Michigan liderado por Ball propuso un modelo, que en este estudio sirve de encuadre, denominado *conocimiento matemático para la enseñanza* (*MKT*, por sus siglas en inglés). Este modelo está compuesto por dos dominios: conocimiento de la materia y conocimiento pedagógico del contenido (Ball, Thames y Phelps, 2008), donde cada uno comprende a su vez tres subdominios de conocimiento: común del contenido; en el horizonte matemático; especializado del contenido, por un lado y, del contenido y de los estudiantes; del contenido y de la enseñanza; del contenido y del currículum por otro. Acorde a lo expresado por los autores, este conocimiento (*MKT*) abarca todas aquellas habilidades que el profesor pone en juego para sostener los procesos de aprendizaje de la Matemática.

Básicamente en la tesis se procura analizar cómo se van activando los subdominios del *MKT* cuando estudiantes avanzados del PM diseñan casos para introducir un pensamiento no determinista en sus potenciales alumnos del nivel secundario de educación, montándose para ello una Ingeniería Didáctica.

1.1. Problema

El Diccionario de la Real Academia Española (RAE) encuadra al determinismo como una teoría que supone que el desarrollo de los fenómenos naturales está necesariamente determinado por las condiciones iniciales, así como una doctrina según la cual todos los acontecimientos están unidos y determinados por la cadena de acontecimientos anteriores.

Existen diferentes formulaciones del determinismo. El determinismo fuerte sostiene que no existen fenómenos aleatorios o azarosos y que, una vez establecidas las condiciones iniciales, todo queda determinado. Un ejemplo de este tipo de determinismo es el que propone Ilya Prigogine (1917-2003) (1997) respecto a las leyes de la naturaleza enunciadas por la Física, como ser la ley de Newton que vincula a la fuerza que se aplica a un cuerpo con la aceleración que se produce. Conociendo las condiciones iniciales de un sistema regido por esta ley, se puede determinar tanto el futuro, como también el pasado. La ley es invariante respecto a la inversión de los tiempos. Desde esta concepción, a la cual adhería Pierre Simón Laplace (1749-1827), todo fenómeno es explicable, suponiendo que dicho fenómeno es el resultado de un conjunto de factores que determinan su estructura casual. Prigogine, (1997), respecto a la idea de certidumbre, afirma: “La Naturaleza es un autómata que en principio podemos controlar” (p.7).

Por otra parte, el determinismo débil establece que existe una fuerte correlación entre el estado presente y los estados futuros, admitiendo la influencia de fenómenos no predecibles, y resaltando la diferencia existente entre la determinación y la predicción. La determinación implica la ausencia total de azar en la cadena causa-efecto que da lugar a un suceso concreto. La predictibilidad hace referencia a un hecho potencial producto de la determinación certera de los sucesos, siendo fundamental contar con el conocimiento de las condiciones iniciales de la cadena de causalidad.

Desde un punto de vista didáctico, en el curso de Probabilidad y Estadística se introducen las experiencias aleatorias, en contraposición con las experiencias determinísticas; caracterizando a las primeras como aquellas experiencias cuyo resultado no se puede determinar por cuanto actúan factores que no se pueden controlar y que generan variación, que no es susceptible de un tratamiento determinístico. Sin embargo, es posible repetir cada experimento una cantidad indefinida de veces, sin modificar básicamente las condiciones. También es posible describir el conjunto formado por todos los resultados posibles. Y si bien, los resultados individuales parecen ocurrir de forma arbitraria, a largo plazo aparece un modelo definido de regularidad que posibilita la construcción de un modelo matemático con el cual es factible analizar el experimento.

El pensamiento no determinista es un contenido explícito en las Orientaciones Curriculares vigentes de la educación media obligatoria (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2014). Entre sus fundamentos:

> Históricamente el pensamiento matemático se ha basado en una idea determinista que ha excluido la intervención de aquellas variables que daban lugar a procesos no predecibles desde las soluciones que la Matemática aportaba, idea que ha sido reforzada desde las matemáticas escolares. Es importante resolver problemas que permitan el reconocimiento y uso de la Probabilidad como modo de cuantificar la incertidumbre. Los recursos que se utilizan en los medios de comunicación para describir la información, tienen un gran sustento matemático y el ciudadano debe estar preparado para comprender lo que recibe y tomar decisiones a partir de ello. [...] Tanto la Probabilidad como la Estadística son integradoras de conceptos, lo que permite su tratamiento con contenidos de otros ejes, como facetas de un mismo trabajo matemático, que incluye el pensar determinista junto con el aleatorio (p.53).

Asimismo, el eje Estadística y Probabilidad es poco trabajado en la escolaridad. Entre los motivos se subraya la escasa formación docente específica (Batanero, Gea, Arteaga y Contreras, 2014) tanto en lo disciplinar como en metodologías alternativas a la tradicional que potencien sus peculiaridades.

Los factores que afectan la ocurrencia de un suceso aleatorio son múltiples. Un buen dominio del concepto de probabilidad de un suceso resultaría de gran utilidad para cuantificar e interpretar los riesgos, en las tomas de decisiones en contextos de incertidumbre. No obstante, la gran mayoría de los alumnos que ingresan a estudios superiores parecerían tener un conocimiento escaso o nulo de las nociones básicas de Probabilidad, así como errores sistemáticos, profundamente arraigados, en su intuición probabilística. Si bien los estudios de Piaget e Inhelder (1951; citado en Batanero, Ortiz y Serrano, 2007) sobre las adquisiciones de los conceptos probabilísticos muestran el requisito de operaciones formales, los estudios de Fischbein (1975; citado en Batanero et al., 2007) han probado la capacidad de los niños, incluso desde preescolar, de procesar información probabilística de un modo significativo, lo que subraya los beneficios de su enseñanza. En el nivel medio se buscan alternativas de enseñanza que permitan palpar su utilidad práctica a la vez que favorecer su aprendizaje, sin necesidad de utilizar en primera instancia un sistema formal, pero sin que esto desvalorice las conclusiones.

Ante este panorama emerge como *pregunta directriz* de la investigación:

¿Cómo se va configurando el *MKT* mediante el método de casos en los futuros profesores para introducir un pensamiento no determinista en el nivel medio?

1.2. Interrogantes específicos

Con base, a su vez, en los subdominios del *MKT* y considerando a los futuros profesores en Matemática formados en la UNR, interesa conocer:

- ¿Qué alcances vislumbran del contenido más allá de una cierta clase?

Un nivel de conciencia del profesor en relación con lo que propone a sus alumnos resulta enriquecedor no solo para clases venideras sino para la que se está desarrollando, dado que tal anticipación permite aprovechar todas las oportunidades de aprendizaje que puedan emerger, esto es, poniendo en juego su *conocimiento en el horizonte matemático* (*HCK*).

- ¿Qué usos específicos del contenido matemático en cuestión hacen al idear su enseñanza?

Un especial desmenuzamiento de la Matemática puesta en juego para ser enseñada es requerido exclusivamente por un profesor. Decidir qué representaciones y ejemplos considera, así como qué significados particularmente enfatiza, es propio del *conocimiento especializado del contenido* (*SCK*).

- ¿De qué manera tienen en cuenta al alumno de secundaria en sus propuestas?

Identificar lo que los alumnos pueden pensar o hacer matemáticamente y saber escuchar e interpretar el pensamiento que expresan los alumnos en su lenguaje usual, entre otras cuestiones, permite identificar los conceptos previos, las dificultades de aprendizaje y concepciones erróneas que tienen los alumnos acerca de cierto contenido matemático. Se trata, entonces, del *conocimiento del contenido y de los estudiantes* (*KCS*).

- ¿Qué decisiones didácticas toman para gestionar sus clases?

A la hora de plantear una actividad, elaborar un material o preparar una clase, la conjunción del entendimiento del contenido y su familiaridad con los principios pedagógicos para enseñar ese contenido, resulta fundamental para fomentar un buen aprendizaje en términos de *conocimiento del contenido y de la enseñanza* (*KCT*).

1.3. Objetivos

A continuación, se presentan los objetivos, general y específicos de esta investigación.

1.3.1. Objetivo General

Analizar el proceso de configuración del *MKT* en futuros profesores al basarse en el método de casos para introducir un pensamiento no determinista en potenciales alumnos de nivel secundario.

1.3.2 Objetivos Específicos

Considerando dicho contenido (introducción del pensamiento no determinista) y metodología (método de casos), ubicándonos en particular en estudiantes avanzados del PM, interesa:

- Reconocer los alcances que vislumbran del contenido más allá de una cierta clase.
- Determinar usos específicos del contenido en cuestión que hacen al idear su enseñanza.
- Identificar maneras en que tienen en cuenta al alumno de secundaria en sus propuestas.
- Caracterizar las decisiones didácticas que toman para gestionar sus clases.

En clave del *MKT*, estos objetivos se encuadran en los subdominios *HCK*, *SCK*, *KCS*, *KCT* respectivamente.

1.4. Estado del arte

La búsqueda se centró en investigaciones relativamente actuales realizadas en Iberoamérica cuyos resultados están publicados en revistas de acceso abierto. Abarca dos ejes de interés: enseñanza de Probabilidad elemental y conocimiento del profesor (subapartado 1.4.1) y método de casos como metodología de enseñanza (subapartado 1.4.2)

1.4.1. Enseñanza de Probabilidad elemental y conocimiento del profesor

Rodríguez-Alveal, Díaz-Levicoy y Vásquez (2018) presentan un trabajo que proporciona evidencias sobre cómo los profesores en ejercicio y en formación de Chile visualizan conceptos que están de manera explícita en el objeto probabilidad. También sugieren habilidades que deben ser potenciadas en los itinerarios formativos en estos grupos en estudio. La incorporación de la estadística y la probabilidad en las directrices curriculares del sistema educativo chileno plantea diversos desafíos para los profesores. Establecen que dentro de los contenidos se encuentra de manera implícita la idea de aleatoriedad y azar, conceptos con una gran carga histórica y de carácter polisémico, como lo han hecho saber diferentes autores (Batanero y Serrano, 1995; Cuche, 2002; Zabell, 1992; citados en Rodríguez-Alveal et al., 2018). Asimismo, según las directrices ministeriales de ese país los profesores deben ser "capaces de conducir el aprendizaje de los estudiantes en la introducción de conceptos relativos a probabilidades, utilizando para esto situaciones lúdicas y cotidianas que ilustren cómo cuantificar el azar, considerando las dificultades que esto conlleva en cada nivel" (p.113). Pese a esta importancia del tema, resaltan que múltiples trabajos muestran las dificultades que tienen los profesores al respecto. En particular manifiestan que la argumentación, en tanto razonamiento empleado para convencer a alguien, es una de las habilidades que deben presentar los profesores en formación y en ejercicio, más aún en un eje cuya impronta es el trabajo con datos reales. Subrayan que la estadística es la ciencia de los datos y a nivel escolar se tiene como principal objetivo alfabetizar específicamente a los estudiantes, en tanto ciudadanos del siglo XXI en un mundo cada día más globalizado donde circula gran cantidad de información de todo tipo en la que la incertidumbre se encuentra presente. Pero en su estudio observan que en general los profesores establecen argumentaciones poco plausibles a la hora de explicar por qué un fenómeno puede ser o no considerado aleatorio, así como para la obtención de ciertas probabilidades. Concluyen que estos hallazgos generan una tensión entre las habilidades y conocimientos que deben adquirir durante su trayectoria formativa con las que deben poner en juego durante su desempeño profesional.

Por su parte, Pereira (2018) presenta un trabajo cuyo objetivo es identificar y analizar las contribuciones de un curso de formación continua orientado a la enseñanza de la Probabilidad para la ampliación del conocimiento profesional docente de profesores de secundaria de Brasil, considerando entre los referentes a Shulman y Ball. La investigación fue cualitativa y se dividió en tres fases: una de investigación documental, una de planificación y una de investigación de campo, la cual fue desarrollada por los 12 participantes del curso. Como instrumentos de recolección de datos se emplearon el diario de campo del investigador, grabaciones en audio y video de los encuentros y cuestionarios aplicados a los profesores participantes. La formación se basó en la discusión de distintos enfoques de la Probabilidad en el aula y buscó romper con el pensamiento determinista y lineal. Concluye que el curso ayudó a la ampliación del conocimiento del contenido específico de Probabilidad, ampliando su conocimiento especializado, pedagógico e instruccional.

Vásquez, Díaz-Levicoy, Coronata y Alsina (2018) presentan algunas orientaciones didácticas y recursos a utilizar en el aula para enseñar Estadística y Probabilidad desde las primeras edades. La propuesta que presentan sigue los planteamientos de organizaciones y autores reconocidos (tales como Godino, Batanero y Cañizares, 1987; NCTM, 2003; Batanero y Godino, 2004; citados en Vásquez et al., 2018). Plantean que, en lugar de llevar a cabo una enseñanza centrada en la transmisión, la repetición y la práctica, la enseñanza debería plantearse a partir de situaciones contextualizadas que permitan un aprendizaje inductivo de los conceptos, impulsando las conexiones necesarias con la propia experiencia. Para aprender Estadística y Probabilidad, proponen involucrar a los estudiantes en investigaciones estadísticas (recogida, organización, representación e interpretación de datos) que los conduzcan a la necesidad de conocer este tipo de datos para poder obtener conclusiones. De este modo establecen que es necesario que los profesores ofrezcan a sus estudiantes experiencias a partir de situaciones cotidianas que despierten su curiosidad innata, donde sean capaces de construir de manera paulatina una adecuada comprensión de la Estadística y la Probabilidad desde las primeras edades. Este es el gran cambio metodológico que consideran.

En cuanto a los conocimientos a disposición por alumnos de los primeros años de secundaria, Hernández-Salmerón, López-Martín y Batanero (2017) realizan un estudio orientado a la evaluación en particular de los términos verbales asociados con los sucesos aleatorios y la probabilidad en una muestra de 56 alumnos en España. Mediante un proceso inductivo se obtuvieron las listas de palabras y expresiones verbales ofrecidas por los estudiantes, revisando la codificación varias veces para asegurar la fiabilidad. Entre las principales carencias encuentran limitaciones de vocabulario relativo al azar, dificultad en la búsqueda de sinónimos de expresiones relacionadas con la probabilidad a distintos niveles, escasa competencia lingüística y de expresión escrita, dificultades para valorar la probabilidad de diversas situaciones cotidianas, confusión en los términos "Imposible" e "Improbable" que tratan como sinónimos.

Estos resultados se condicen con los hallazgos de Sanabria y Núñez (2017), quienes indican que generalmente en las clases de Probabilidad los problemas se reducen al cálculo de la probabilidad de un determinado evento. Básicamente consiste en redactar el evento en términos matemáticos y proceder a utilizar el algoritmo adecuado para calcular la probabilidad de dicho evento, lo que muchas veces descontextualiza el concepto de probabilidad. Por el contrario, proponen que se deben plantear situaciones en las cuales el estudiante se involucre, vea como una opción recurrir a la Probabilidad para medir la posibilidad de ocurrencia de uno o varios eventos que detecte y utilice ese valor para dar una solución al problema. Para ello sugieren analizar las aplicaciones del concepto de probabilidad y resaltan que una de las principales es la toma de decisiones. Proponen cambiar un enunciado como "calcule la probabilidad de ganar el juego" por "¿jugaría dicho juego?" o "¿pagaría por jugar dicho juego?", aludiendo a que le da sentido al problema e involucra al estudiante, dado que la Probabilidad se puede ver como un modelo para resolver problemas de toma de decisiones. Afirman que una de las características principales del modelo probabilístico es que no es determinista; es decir, la solución brindada al problema de toma de decisiones no es la correcta sino la que probablemente sea más beneficiosa. En este marco los autores toman un enunciado inicial de cálculo de probabilidad y, como producto del análisis a la luz de los aportes teóricos de Batanero y Polya, lo transforman en una situación problema de toma de decisiones, diseñada para la enseñanza de la Probabilidad. A partir de ese proceso, obtuvieron una serie de recomendaciones para la formulación de los problemas de toma de decisiones en la enseñanza de la Probabilidad, tales como se indican en Sanabria Brenes y Núñez Vanegas (2017):

> a) La Probabilidad debe surgir con un modelo para orientar la toma de decisiones. Un problema que solo le pida al estudiante calcular una probabilidad no involucra al estudiante y degrada la aplicación del concepto de probabilidad.
> b) La Probabilidad nos brinda un insumo para tomar la decisión, no toma la decisión por nosotros. La decisión que se tome es un balance entre la probabilidad y el riesgo que estoy dispuesto a tomar.
> c) Es ideal que algunas situaciones iniciales para la enseñanza de la Probabilidad involucren, como parte del entendimiento del problema, algunos de los siguientes elementos:
> - Que el estudiante pueda simular la experiencia aleatoria involucrada algunas veces.
> - Que pueda tomar una decisión inicial con base en la Probabilidad intuitiva de los eventos involucrados (pp.12-13).

En particular, Esteban, Batanero, Serrano y Contreras (2016) intentan identificar las características que los estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria de España asignan a las secuencias de resultados aleatorios. Destacan la importancia de la comprensión de la aleatoriedad para el aprendizaje de la Probabilidad y observan mejores resultados al comparar con estudios propios de décadas anteriores. Asimismo, advierten la necesidad de continuar investigando y remarcan la trascendencia de la presencia del eje Probabilidad y Estadística en el currículum oficial.

En esta línea Batanero (2016) presenta algunos de los retos actuales en la enseñanza de la Probabilidad con el fin de orientar la investigación futura. Un primer punto a considerar son los aspectos epistemológicos, incluyendo significados institucionales y personales de la Probabilidad. Otro factor a tener en cuenta es el papel de la tecnología. También, establecen que una enseñanza eficaz de la Probabilidad requiere de una preparación adecuada de los profesores. Esto ha hecho el estudio del conocimiento del profesor uno de los factores que actualmente cobra mayor desarrollo. Según la autora, la formación del profesor ha de abarcar, en primer lugar, el componente matemático. También debe tener en cuenta las diversas facetas de su conocimiento matemático-didáctico (Godino, 2009; citado en Batanero, 2016): conocimiento matemático especializado, conocimiento del estudiante, de los medios de enseñanza, del currículum, así como de las relaciones del tema con otras materias y con la sociedad en que el estudiante está inmerso. La naturaleza específica de la Probabilidad hace que algunos de estos componentes deban ser adaptados para su enseñanza (Batanero y Díaz, 2007; citado en Batanero, 2016). Asimismo, puesto que el tiempo disponible para la formación de los futuros profesores es muy limitado, se requiere del diseño de tareas que contribuyan a enriquecer las diferentes facetas del conocimiento del profesor sobre Probabilidad, simultáneamente. Por ejemplo, Batanero y Díaz (2012; citado en Batanero, 2016) proponen la resolución de problemas paradójicos sencillos con un posterior análisis didáctico en que los futuros profesores analicen el contenido matemático del problema, las dificultades de los alumnos y los recursos para superarlos. En la actualidad vivimos en un mundo en continuo cambio (dinámico), por lo que es importante formar ciudadanos capaces de adaptarse y desenvolverse en ambientes dinámicos, de comprender la aleatoriedad presente en determinadas situaciones y tomar decisiones adecuadas aun en situaciones de incertidumbre. Sin desconocer la complejidad de la tarea sugiere buscar situaciones específicas que permitan dar más énfasis a la visión subjetiva de la Probabilidad, aplicables en situaciones en que no es posible repetir indefinidamente un experimento aleatorio en las mismas condiciones. Puesto que el profesor es un pilar esencial en el aprendizaje de sus alumnos y que la investigación sobre el conocimiento matemático-didáctico del profesor para enseñar Probabilidad es tan escasa, Batanero (2016) lo señala como un área particularmente prioritaria.

Desde una mirada histórico-epistemológica y didáctica, Burbano (2016) se propone generar reflexión en los profesores que enseñan Probabilidad en los diferentes niveles de la educación preuniversitaria de Colombia. Su propuesta se encuentra en concordancia con los estándares curriculares de Matemática de 2003 y los derechos básicos de aprendizaje proclamados en 2015 por el Ministerio de Educación de ese país, donde se establece que los docentes han de promover el desarrollo del "pensamiento aleatorio y sistema de datos" en sus estudiantes a través de contenidos de Probabilidad y Estadística. El autor reconoce que, en las últimas tres décadas, de manera progresiva, la Probabilidad se ha ido incluyendo en los currículos del nivel pre universitario de numerosos países. Lo atribuye a que se trata de una rama de la Matemática con potenciales aplicaciones en campos como: la investigación científica, los negocios, la política, la escuela y la vida cotidiana (Swenson, 1998; citado en Burbano, 2016). Además, enfatiza el rol clave del profesor para desarrollar de forma adecuada las nuevas propuestas curriculares que incorporen el estudio de la Probabilidad. Sin embargo, el autor advierte diversas problemáticas, tanto en Colombia como internacionalmente, apoyándose en numerosos estudios -todos ellos citados en Burbano (2016)-: algunos profesores poseen poco o nulo conocimiento sobre Probabilidad y su didáctica (Pierce y Chick, 2011), se omite el tema o se le da poca importancia en el currículo (Arias y Cardona, 2008), el currículo de formación de profesores incluye pocos cursos sobre tratamiento de la Probabilidad y su didáctica o no los incluye (Batanero, Godino y Roa, 2004; Gómez, 2014), los libros de texto están desactualizados con predominio de la concepción clásica (Sánchez, 2010; Sánchez y Monroy, 2013), los docentes poco comprenden el tema y lo consideran difícil de enseñar (Godino, Batanero, Roa y Wilhelmi, 2008; Inzunsa y Guzmán, 2011). Estas problemáticas han dado lugar a distintos trabajos relativos a la formación de los profesores, la naturaleza y características específicas del conocimiento que ha de poseer el docente, así como a indagar acerca de formas en que el docente puede aprender con base en la reflexión sobre su propia práctica. Finalmente, Burbano (2016) propone como marco teórico potencial para analizar los conocimientos requeridos por el profesor para la enseñanza de la Probabilidad el denominado *Pedagogical Content Knowledge* (Shulman, 1987), dado que este constructo ha posibilitado la generación de diversos modelos de conocimiento para la enseñanza de la Matemática, como el MKT, entre otros.

Concretamente como aporte al respecto Campos (2016) presenta algunas sugerencias para un enfoque más aplicado de la Probabilidad, con ejemplos reales que evocan diferentes debates y reflexiones. Establece que el concepto de Probabilidad es de fundamental importancia para la Estadística, porque trae consigo la idea de aleatoriedad e incertidumbre, que forman los pilares de esta ciencia. Las actividades propuestas abren el camino a la discusión de temas sociales y económicos que involucran la realidad de los estudiantes, adoptando los principios de la Educación Estadística Crítica, la cual establece sus bases en el desarrollo de la alfabetización, el razonamiento, el pensamiento estadístico y la capacidad crítica. De este modo sugiere incluir cuestiones temáticas en contexto, donde se utilicen datos reales, que reflejen situaciones que animen a reflexionar sobre la realidad, acerca de cuestiones políticas, sociales, económicas y ambientales que afecten a su comunidad. Esto puede ser trabajado sin salirse de los contenidos de la disciplina; al contrario, le añade un enfoque diferenciado, práctico y centrado en la acción-reflexión sobre la realidad. Concluye que la alfabetización, el razonamiento y pensamiento estadístico son potenciados cuando se trabaja con datos reales, preferiblemente recolectados por los propios alumnos, cuando los problemas son contextualizados, cuando los estudiantes identifican la importancia de las herramientas estadísticas para el análisis de fenómenos concretos, cuando los resultados obtenidos son analizados e interpretados usándose argumentación específica.

En correspondencia con estos planteamientos, Batanero, Gea, Arteaga, y Contreras (2014) describen los cambios recientes en el currículum español, analizando las ideas fundamentales propuestas que deben ser enseñadas a todos los estudiantes y sugieren la necesidad de educar la intuición. Las directrices curriculares en España amplían la enseñanza de la estadística, comenzando desde el primer ciclo de la Educación Primaria y reforzando los contenidos a lo largo de toda la enseñanza obligatoria. Se sugiere también un cambio en la metodología de enseñanza para hacerla más exploratoria y reforzar, de este modo, los aspectos intuitivos. En este trabajo reflexionan sobre algunos de los retos que plantean estas orientaciones curriculares para que la incorporación de la Estadística a las aulas sea una realidad. Remarcan que en la actualidad muchas instituciones -como la Organización de Naciones Unidas (ONU) o la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE)- sienten la necesidad de medir el progreso en la sociedad actual, con indicadores estadísticos. Para ello ponen a disposición de los ciudadanos toda clase de datos, con la intención de informarles y hacerles partícipes de sus decisiones; un objetivo importante en una sociedad democrática. Pero, para poder desarrollar una mejor comunicación entre estas instituciones y el público a quien se dirigen sus actividades, surge la necesidad de que los ciudadanos sean capaces de valorar dicha información; es decir, que sean estadísticamente cultos (Ridgway, Nicholson y McCusker, 2008; citado en Batanero et al., 2014). Agregan que la necesidad actual de educación estadística parece haber sido comprendida por las autoridades educativas, quienes incluyen contenidos estadísticos a lo largo de toda la educación obligatoria. Pero hacer realidad estas propuestas pasa por la identificación de las ideas fundamentales o contenidos a enseñar, la elección del nivel conveniente de formalización y, sobre todo, la formación de los profesores que serán responsables de esta enseñanza.

Sin embargo, Moreno y Cardeñoso (2014) presentan algunos resultados reveladores, encontrados en las respuestas a un cuestionario completado por 908 estudiantes de los Profesorados de Biología y de Matemática de la provincia de Mendoza, Argentina. En el mismo se consideraron situaciones probabilísticas, que requerían de interpretaciones, argumentaciones, estimaciones y toma de decisiones, en situaciones de incertidumbre. Como formadores de profesores de secundaria, consideran que existen dos motivos que justifican la enseñanza y el aprendizaje de la Probabilidad en los niveles obligatorios de escolaridad. El primero es que permite abordar temas más avanzados o de otras ciencias. El segundo es que resulta esencial para ayudar a preparar a los estudiantes para la vida cotidiana, con relación a eventos aleatorios y fenómenos casuales. Es decir, existen consideraciones internas y externas, que no se excluyen, con influencia en el pensamiento de los educadores para asumir el reto que implica la alfabetización probabilística del ciudadano. En particular, en este trabajo se situaron en el nivel secundario y se centraron en el modelo de alfabetización probabilística propuesto por Gal (2005; citado en Moreno y Cardeñoso, 2014), que considera el conocimiento y las disposiciones que los estudiantes necesitan para ser considerados alfabetizados con respecto a temas probabilísticos del mundo real. Asimismo, observan que las tendencias de pensamiento explicitadas por los futuros profesores de Biología y de Matemática para la educación secundaria no parecen adecuadas para guiar una auténtica alfabetización estocástica. Parece más bien que muchos profesores carecen ellos mismos de dicha alfabetización, por lo que se requiere un urgente cambio curricular (Garfield y Everson, 2009; Lopes, 2008; citado en Moreno y Cardeñoso, 2014) en los Profesorados correspondientes. Agregan que para mejorar el sistema formativo se torna necesario elaborar y evaluar recursos didácticos para la formación docente, que orienten la reelaboración de ideas de los profesores tendientes al cambio de las prácticas educativas (Azcárate, 2004; citado en Moreno y Cardeñoso, 2014), ya que se trata de un tema poco trabajado en las aulas y sobre el que los profesores de los diferentes niveles tienen pocos referentes teóricos y prácticos. Como una de las cuestiones a afrontar indican que los profesores que actualmente enseñan "Probabilidad y Estadística" en el Profesorado en Matemática y "Bioestadística" en el Profesorado en Biología en su mayoría son profesores con titulación en Matemática pura, que han recibido una educación puramente formal con poco desarrollo estocástico. Esto confirma, a su vez, lo expresado por Meletiou y Stylianou (2003; citado en Moreno y Cardeñoso, 2014), para quienes el formalismo matemático genera sistemas epistemológicos relativamente deterministas. Por ello resulta necesario insertar a los profesores en un nuevo paradigma, no solo a través de cursos de Probabilidad y Estadística, sino también en cursos pedagógicos apropiados que puedan ayudar a comprender las dificultades que los estudiantes afrontan con respecto al razonamiento estocástico, incluso por nivel educativo (como por ejemplo secundario). Emerge como necesidad que los egresados del secundario adquieran conocimientos básicos de Probabilidad y Estadística, lo que supone llegar a la universidad con algunos conocimientos básicos indispensables de esta asignatura.

Al respecto Osorio, Suárez y Uribe (2011) reconocen problemas para la apropiación de los conceptos de Probabilidad y su posterior aplicación en contextos reales en estudiantes universitarios de Colombia. En su proyecto de investigación realizaron una revisión de las consideraciones que al respecto han planteado diferentes autores, comprobando que esta situación no se restringe solo a su ámbito local. Relevan los aspectos que inciden en el aprendizaje de la Probabilidad:

- En relación con los *estudiantes* señalan los preconceptos e intuiciones erradas con que llegan al nivel superior, por más que ya hayan atravesado la escolaridad secundaria. Esta situación implica un reto para el docente universitario, quien debe tratar de modificarlos de manera insistente para lograr una conceptualización adecuada. Se observan dificultades cuando los estudiantes aplican la probabilidad para cuantificar los riesgos en la toma de decisiones bajo condiciones de incertidumbre, es decir, cuando se enfrentan con problemas que requieren procedimientos de Inferencia Estadística.
- En relación con los *profesores*, reconociéndolos como agentes facilitadores del proceso, subrayan su acción para influir en aquellos estudiantes con bajo nivel motivacional, con la

intención de despertar sus intereses necesarios para alcanzar aprendizajes. Resaltan que uno de los problemas que afecta el aprendizaje de la Probabilidad se encuentra asociado a la poca formación en Estadística, así como su Didáctica que tienen los docentes, encargados de enseñarla en la escuela secundaria.

- En relación con el *currículum* indican que existen recomendaciones para los niveles de educación obligatoria, pero como también sucede en Argentina, hay grandes debilidades en el cumplimiento de los contenidos por parte de las instituciones educativas.

Por ello Batanero et al. (2007) insisten en que, a pesar de que la Probabilidad se incluye como eje de contenido mínimo obligatorio en las normativas curriculares oficiales, no siempre se enseña. Muchos profesores hacen un énfasis excesivo en la enseñanza de fórmulas, en lugar de implementar directrices actuales que recomiendan el trabajo basado en proyectos, resolución de problemas y experimentación con fenómenos aleatorios. De este modo se puede observar una vacancia en la introducción del pensamiento no determinista en la escolaridad. Por este motivo resulta fundamental brindar herramientas metodológicas específicas que permitan abordarlo desde un enfoque dinámico, accesible y acorde a las necesidades planteadas.

1.4.2. Método de casos como metodología de enseñanza

Pérez-Escoda y Aneas Álvarez (2014) realizan un recorrido por la historia del método de casos donde, de acuerdo con el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (https://tec.mx/es), consideran que el método de casos tiene ya una larga trayectoria en la enseñanza, remontándose desde la filosofía escolástica medieval remontándose desde la filosofía escolástica medieval. Relacionan el método de casos con el aprendizaje de oficios y profesiones, en el que el ayudante, aprende del maestro los secretos del oficio, mediante diversas experiencias, las cuales le permiten descubrir las habilidades propias del trabajo “caso” a “caso”. Desde esta perspectiva, los autores observan que el método de casos está estrechamente ligado al enfoque experiencial de Dewey (1966; citado en Pérez-Escoda y Aneas Álvarez, 2014) “aprender haciendo” que propone desarrollar en los estudiantes el hábito de pensar en conexión con la experiencia, contextual y culturalmente situada. En el ámbito universitario, identifican experiencias pioneras al respecto en la Universidad de Harvard en la década de 1870. La primera de ellas en la Escuela de Derecho, donde los estudiantes debían recurrir a los expedientes de casos reales, así como a las sentencias de los jueces correspondientes, y así establecer los principios generales del Derecho. En la restante se emplearon casos reales en la Escuela de Negocios para que los estudiantes analicen, discutan y resuelvan situaciones empresariales.

Por su parte, De la Fe, Vidaurreta, Gómez y Corrales (2015) presentan experiencias realizadas en España en dos contextos educativos diferentes: en la asignatura Sanidad Animal en la Licenciatura de Veterinaria y en la asignatura Economía en Bachillerato.

En la primera experiencia el profesor divide los alumnos en grupos de 3-4 personas y a continuación aporta los casos a estudiar (del ámbito de las enfermedades infecciosas), la guía para el análisis y diferentes fuentes de información (libros, revistas especializadas, guías docentes e Internet), que los alumnos consultan según su propio criterio, para analizar el caso y establecer las hipótesis de trabajo. Es importante mencionar que también disponen del resto de las herramientas necesarias para el diagnóstico (medios de cultivo, pruebas bioquímicas, etc.), las cuales son aportadas por el profesor solo cuando son requeridas. De este modo, los alumnos, realizan una labor autónoma para la resolución de los casos, tomando las decisiones que consideran más oportunas tras la revisión crítica de la anamnesis y de las muestras remitidas. Luego de realizar el diagnóstico, debieron prescribir las medidas terapéuticas y de control de cada caso. Finalmente efectúan una puesta en común de los casos analizados por los grupos, donde el profesor actúa como coordinador.

En la segunda experiencia el docente plantea tres situaciones (casos) para su resolución mediante el trabajo en equipos. El primer caso consiste en profundizar en el conocimiento de las instituciones internacionales y de ciertos países extranjeros que por su situación económica pudieran resultar de relevancia para la economía española; el segundo, llevado a cabo conjuntamente con la asignatura de lengua española, pretende generar conocimiento sobre la situación socio-económica más próxima; el tercero consiste en la realización de un análisis de las estrategias de mercado de una empresa elegida por ellos. Consideran que ambas experiencias fueron beneficiosas para los aprendizajes. Entre los aspectos más positivos confirman el papel activo de los estudiantes ya que, tras una fase inicial de cierto desconcierto, son capaces de establecer una hipótesis inicial de trabajo y confirmarla con posterioridad. Más allá de los asuntos propios de cada caso, los alumnos adquieren una metodología trabajo, mediante el desarrollo combinado de trabajo autónomo, grupal e intergrupal. Han observado que los casos planteados deben ser reales, presentar situaciones que sean posibles, lógicas y admisibles. También, relevantes para el alumnado, así incrementan su interés e implicación; plantearse en un escenario problemático, en una situación aún por resolver que esté abierta a varias soluciones o hipótesis de trabajo. En ambas experiencias han observado que el empleo de esta metodología potencia la adquisición de los contenidos propios de las materias, además de capacidades transversales tales como análisis y síntesis, aplicación de conocimientos en la práctica, resolución de problemas, toma de decisiones.

Acorde a estos hallazgos, Estrada y Alfaro (2015) presentan su experiencia relativa a la utilización de casos en el curso de Administración de Unidades de Información, con el propósito de mostrar la influencia significativa de este método como metodología de enseñanza de los cursos impartidos en la Escuela de Bibliotecología y Ciencias de la Información. Concluyen que el método de casos no solo mejora significativamente los desempeños estudiantiles en cuanto a resultados aprendizaje, sino también porque se constituye en una experiencia gratificante. Esto se debe a que se genera mayor comunicación con los estudiantes, quienes presentan una actitud más crítica, se involucran e interiorizan en los temas. Concluyen que se trata de una metodología dinámica que permite un muy buen clima para el aprendizaje.

Vargas (2009) también comparte su experiencia con el método de casos como metodología para la enseñanza del Derecho de Sociedades, uno de los bloques temáticos más importantes de la asignatura Derecho Mercantil I de la Licenciatura en Derecho. Presenta tanto las ventajas como los inconvenientes que, a su entender, esta metodología tiene para la enseñanza del Derecho y para adecuarse al contexto de aprendizaje que el Espacio Europeo de Educación Superior demanda. Plantea que vivimos un nuevo paradigma o modelo en la enseñanza universitaria, al que no se adecua la metodología tradicional de la lección o cátedra magistral. En concreto, los profesores de Derecho necesitan metodologías que favorezcan el desarrollo de habilidades en los alumnos. También deben integrar las clases teóricas, tradicionalmente en formato de lecciones magistrales, con las prácticas para la resolución de casos; es decir, articular teoría y práctica mediante el método de casos.

A modo de síntesis, la enseñanza basada en el método de casos radica en ser una metodología flexible. Los profesores que la han utilizado resaltan que los estudiantes adquieren conocimientos y realizan un análisis más consciente de los datos, con mayor tolerancia a la ambigüedad y mejor comprensión de las complejidades de los conceptos y problemas. Eso convierte al método de casos en una herramienta más que interesante para abordar contenidos básicos de Probabilidad, los cuales son de fundamental importancia para la toma decisiones en contextos de incertidumbre. Además, la enseñanza basada en el método de casos es factible de aplicar con eficacia en casi todas las materias y en la mayoría de los niveles educativos, desde la escuela primaria hasta la universidad, si bien es factible advertir una relativa vacancia en particular en el área Matemática del nivel secundario.

CAPÍTULO 2 - Marco teórico

El marco teórico consta de tres apartados que delimitan conceptualmente las nociones involucradas en la temática de investigación. Con base en el modelo del *MKT* del equipo liderado por Ball, se centra en la Didáctica de la Probabilidad para la toma de decisiones en contextos de incertidumbre, siguiendo los desarrollos del grupo de Batanero, así como en la utilización del método de casos como metodología de enseñanza, adoptando los principios propuestos por el grupo de Wassermann.

2.1. Conocimiento matemático para la enseñanza (*MKT*)

El estudio del conocimiento que son deseables en los profesores en Matemática ha sido un asunto de reflexión e investigación. Shulman (1986; 1987) considera importante que los profesores cuenten con un conjunto base de conocimientos para la enseñanza, y con las destrezas para representarlo y comunicarlo. El conocimiento orienta el quehacer del docente en el aula. En este sentido, el autor propone seis categorías de conocimiento:

- *Conocimiento del contenido*, la disciplina a enseñar.
- *Conocimiento didáctico general*, relacionado con la gestión de la clase, control de normas sociales, estrategias de motivación y organización de la clase.
- *Conocimiento del currículo*, organización de las temáticas, secuenciación de los contenidos, utilización de los materiales y recursos, planeaciones, evaluación y seguimiento del proceso de enseñanza y aprendizaje.
- *Conocimiento de los alumnos*, del contexto, de sus necesidades, intereses, expectativas y de sus características.
- *Conocimiento de los contextos educativos* donde desempeña su labor docente.
- *Conocimiento didáctico del contenido* (*PCK*, por sus siglas en inglés), entramado entre la disciplina de estudio y la didáctica.

A través de sus estudios, el autor ha ido evidenciando con claridad la poderosa influencia que tiene la manera en que los docentes entienden la disciplina sobre la forma en que ellos la enseñan. Pero no es una relación simple ni aditiva, dado que es realmente importante que el profesor conozca bien tanto el contenido de la disciplina a enseñar como la didáctica general, pero si ambos se encuentran aislados entre sí, no se está formando a un profesor.

Con especial inquietud acerca de qué conocimiento matemático deberían poseer los profesores para el ejercicio de su función docente, Ball et al. (2008) proponen el *MKT* a partir del estudio de la práctica situada del profesor en Matemática. Sugieren un modelo multi-dimensional adaptado a la Matemática, en el que hacen un refinamiento a las dimensiones del conocimiento de la materia y didáctico del contenido propuestos por Shulman (1986, 1987). Ball et al. (2008) incluyen el conocimiento curricular planteado por Shulman en el conocimiento *didáctico del contenido*, obteniendo así dos grandes dominios: *conocimiento de la materia* (subapartado 2.1.1) y *conocimiento didáctico del contenido* (subapartado 2.1.2) que se encuentran, por su parte, cada uno dividido en tres subdominios, resultando seis en total (Fig. 2.1).

Por enseñanza, Ball et al. (2008) entienden todo lo que los docentes deben hacer para sostener el aprendizaje de sus alumnos. Se refieren al trabajo interactivo de enseñanza en los salones de clase y a todas las tareas que surgen en el curso de tal trabajo. Según Ball et al. (2008), cualquiera que pueda resolver un cierto problema puede darse cuenta si otra persona se equivocó en la resolución. Sin embargo, la enseñanza involucra más que identificar una respuesta incorrecta. Una enseñanza hábil requiere ser capaz de examinar la procedencia del error matemático. Más aún, este es un trabajo que los docentes deben hacer rápidamente en una clase. El análisis de errores es una práctica común entre matemáticos en el transcurso de su propio trabajo, la tarea en la enseñanza difiere solamente en que esta se focaliza sobre los errores que producen los alumnos.

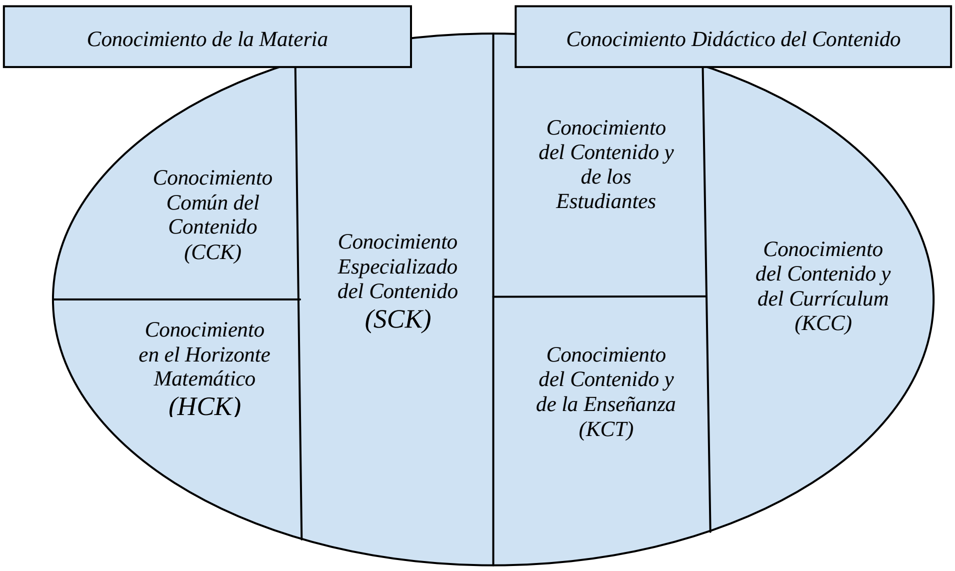


Figura 2.1 Modelo MKT (Ball et al., 2008)

2.1.1. Conocimiento de la materia

El conocimiento de la materia asociado a la Matemática se define como lo que el docente aprende durante sus estudios y contiene, entre otras cosas, proposiciones matemáticas, reglas, modos matemáticos de pensamiento y métodos. Sus subdominios son:

Conocimiento Común del Contenido (*CCK*): se define como el conocimiento y habilidad matemática que se posee en común con otras personas que saben y usan Matemática en diversos ámbitos, no solo de enseñanza, para operar, formalizar ideas y derivar razonamientos. Refiere al conocimiento matemático y a las habilidades necesarias para resolver las tareas que los estudiantes están realizando, dado que como punto de partida los profesores necesitan ser capaces de hacer las tareas que ellos están asignando a sus estudiantes (Ball et al., 2008).

La trascendencia de este subdominio radica en que los docentes deben conocer la asignatura que ellos enseñan, lo cual es fundamental. Por "común" los autores no tienen la intención de sugerir que todas las personas tienen este conocimiento. Se refieren a este conocimiento como el usado en diversas situaciones, no solo de enseñanza.

- *Conocimiento Especializado del Contenido* (*SCK*): constituido por el conocimiento matemático y las habilidades que son propias de la profesión de los profesores cuando hacen uso del contenido matemático en situaciones de enseñanza. Incluye el conocimiento que permite a los profesores elegir desarrollos del contenido que considere acordes. La enseñanza requiere conocimiento más allá del que se le está enseñando a los alumnos. La mayoría de las tareas cotidianas de enseñanza son propias de este trabajo especial, como por ejemplo: presentar las ideas matemáticas; responder preguntas a los alumnos del tipo por qué; encontrar un ejemplo para construir un aspecto matemático específico; reconocer qué está involucrado al usar una representación matemática particular; conectar las representaciones a ideas matemáticas subyacentes y a otras representaciones; explicar los objetivos y propuestas matemáticas a los padres; apreciar y adaptar el contenido matemático de los libros de texto; modificar tareas matemáticas para que sean más fáciles o más difíciles; evaluar la plausibilidad de los pedidos de alumnos (con frecuencia rápidamente); otorgar o evaluar explicaciones matemáticas; elegir y desarrollar definiciones útiles; usar notación y lenguaje matemáticos y ser crítico ante su uso; formular preguntas matemáticamente productivas; seleccionar representaciones para propuestas particulares; inspeccionar equivalencias.
- *Conocimiento en el Horizonte Matemático* (*HCK*): hace referencia a la conciencia de la trayectoria de un contenido matemático a lo largo de las diversas etapas educativas, así

como las conexiones intra y extra matemáticas. Entre las acciones que comprende este dominio, Ball y Bass (2009) mencionan: tener criterio sobre la trascendencia matemática de los contenidos en tratamiento más allá de cierto año escolar; escuchar verdaderamente lo que los alumnos están diciendo para detectar el alcance matemático de sus afirmaciones; anticipar y hacer conexiones matemáticamente consistentes; reconocer oportunidades matemáticas cuando surgen en la clase y no se tenían previstas; captar eventuales confusiones matemáticas que estén subyacentes y que puedan provocar distorsiones matemáticas posteriores.

La distinción entre el *conocimiento común del contenido* y el *conocimiento especializado del contenido* consiste en que, mientras el primero se refiere al conocimiento puesto en juego para resolver problemas matemáticos, para lo cual un matemático, o incluso un sujeto adulto con suficiente conocimiento, está capacitado; el segundo atiende, por ejemplo, a realizar un ordenamiento de las secuencias con que podrían desarrollarse los diferentes aspectos de un contenido específico.

2.1.2. Conocimiento didáctico del contenido

El conocimiento didáctico del contenido involucra la transformación de otros tipos de conocimiento (disciplinar, didáctico y del contexto) en enseñanza viable. Sus subdominios son:

- *Conocimiento del Conocimiento del Contenido y de los Estudiantes* (*KCS*): conjunción entre entender el contenido y saber lo que los alumnos pueden pensar o hacer matemáticamente; también lo que les parecerá interesante, motivante, fácil, difícil, aburrido o agobiante. Integra conocimiento acerca de la cognición de los alumnos y los procesos matemáticos que devienen en ellos. Los docentes deben, además, ser capaces de escuchar e interpretar los pensamientos emergentes e incompletos de sus alumnos, expresados en las formas en que ellos mismos usan el lenguaje. Este tipo de conocimiento le permite al docente anticipar qué pueden probablemente pensar o encontrar confuso sus alumnos sobre determinada explicación. Los docentes deben, además, ser capaces de escuchar e interpretar los pensamientos emergentes e incompletos de sus alumnos, expresados en las formas en que ellos mismos usan el lenguaje. Cada una de estas tareas requiere una interacción entre entendimiento matemático específico y familiaridad con los alumnos y sus pensamientos matemáticos.
- *Conocimiento del Contenido y de la Enseñanza* (*KCT*): amalgama del entendimiento del contenido matemático y su familiaridad con los principios pedagógicos para enseñar ese contenido particular. Comprende las formas de abordar el desarrollo de la disciplina

Matemática para hacer accesible su contenido a otros, las orientaciones para organizar la gestión de la clase, decidir los recursos didácticos, organizar los instrumentos adecuados para evaluar contenidos específicos. Cada una de las tareas que involucra este subdominio requiere una interacción entre entendimiento matemático específico y un entendimiento de aspectos didácticos que afectan el aprendizaje del alumno. Los profesores, por ejemplo: secuencian contenidos particulares para enseñar; eligen los ejemplos para empezar y para profundizar el contenido; evalúan las ventajas y desventajas didácticas de las representaciones que se usan para enseñar una idea específica; identifican qué métodos y procedimientos diferentes se permiten desde la enseñanza; distinguen entre contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales que han de ser contenido de enseñanza. Los autores proponen considerar la necesidad de tomar decisiones de enseñanza sobre cuáles contribuciones aportadas por los alumnos conviene trabajar para proseguir la enseñanza -de acuerdo a lo planificado y proyectado para la clase o un conjunto de clases-, cuáles ignorar por el momento y cuáles dejar para más adelante. Durante una discusión de clase, un docente debe decidir cuándo hacer una pausa para aclarar algo, cuándo usar un comentario de un alumno para construir algo en conjunto, cuándo formular una nueva pregunta o proponer una nueva actividad para aprendizaje adicional de los alumnos.

- *Conocimiento del Contenido y del Curriculum* (*KCC*): representado por el entendimiento del conjunto de programas diseñados para la enseñanza de asignaturas y contenidos particulares en un nivel educativo determinado, la variedad de materiales disponibles en relación con tales programas y el conjunto de características que sirven tanto como indicación o contraindicación para el uso de materiales curriculares particulares en circunstancias específicas. Incluye, además, el conocimiento lateral del currículum (lo que los alumnos están aprendiendo simultáneamente en otras materias) y el conocimiento vertical del currículum (lo que está previsto que los alumnos aprendan en años anteriores y posteriores de la escolaridad).

La diferencia que se connota en esta tesis del *conocimiento del contenido y del currículum* con el *conocimiento en el horizonte matemático* radica en que el segundo involucra una conciencia matemática -abarcando implicancias y ramificaciones con otros contenidos o situaciones, tanto matemáticas como no- por parte del profesor acerca del contenido que se está involucrando en cierto momento del currículum, mientras que en el primero le compete al profesor estar al tanto de lo normado jurisdiccionalmente e institucionalmente así como de sus posibilidades de decisión y acción como docente.

2.2. Probabilidad

A continuación, se realiza una breve descripción de los distintos significados de la Probabilidad (subapartado 2.2.1), se continúa con una sucinta referencia a situaciones de toma de decisiones en contextos de incertidumbre (subapartado 2.2.2) y se finaliza con lo normado en términos curriculares para el eje Estadística y Probabilidad en la escolaridad secundaria (subapartado 2.2.3).

2.2.1. Significados de la Probabilidad

Se presenta un breve análisis de la diversidad de significados válidos de Probabilidad, incluyendo su problemática filosófica, con base en los trabajos de Batanero (2005) y Batanero y Díaz (2007) donde muestran su complejidad epistemológica y los significados adecuados para su introducción a nivel escolar.

Los autores definen a la Probabilidad como el sistema de prácticas utilizado por una persona o institución para resolver situaciones-problema en donde hay necesidad de cuantificar la incertidumbre de un suceso y de las que surge el objeto probabilidad.

Describir el objetivo de la Probabilidad y analizar sus diversos significados resulta fundamental, pues mientras que en otros contenidos matemáticos las definiciones a nivel elemental son unívocas, en el caso de la Probabilidad se encuentran diferentes posiciones filosóficas relacionadas con la forma en que se asignan probabilidades a los sucesos.

A continuación, se presentan seis significados: intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo, lógico y axiomático.

- *Significado intuitivo*

Batanero (2005) reconoce que las ideas intuitivas sobre la Probabilidad aparecen tanto en niños como en personas que no han estudiado Probabilidad, quienes usan frases y expresiones coloquiales para “cuantificar” sucesos inciertos y expresan su grado de creencia en términos como posible, previsible, presumible, factible o viable. Estas expresiones forman parte del lenguaje común y se utilizan para situaciones cotidianas, en amplios contextos y matrices, para afectar la ocurrencia de sucesos o la veracidad de proposiciones en la enseñanza. Se puede comenzar a partir de este significado intuitivo y aprovechar el interés de los niños por los juegos para introducir la noción de probabilidad. No obstante, resulta importante conseguir una evolución hacia algunos de los significados más formalizados que se han ido desarrollando sobre Probabilidad.

- *Significado clásico*

La concepción clásica se remonta a los intercambios de correspondencia entre Pascal (1623-1662) y Fermat (1601-1665) respecto a problemas de juegos de azar y apuestas.

Desde entonces diversos matemáticos realizaron avances en la delimitación clásica de la Probabilidad, que terminan de plasmarse en 1812, cuando Laplace establece la definición que hoy se enseña con el nombre de "Regla de Laplace"; la cual Santaló (1975) expresa:

> Probabilidad de un suceso es la razón entre el número de casos favorables y el número total de casos posibles, siempre que nada obligue a creer que alguno de estos casos debe tener lugar de preferencia respecto a los demás, lo que hace que todos sean, para nosotros, igualmente posibles (p.2).

Según Godino, Batanero y Cañizares (1987), esta definición brinda un método de cálculo de la probabilidad para el caso de equiprobabilidad, en lugar de responder a la pregunta acerca de qué es la probabilidad. Por otro lado, esta definición no puede aplicarse a los experimentos con un número infinito de posibilidades o a aquellos casos en que el espacio muestral es finito, pero no puede aceptarse la condición de simetría. El inconveniente de la definición anterior radica en la necesidad de que todos los casos sean igualmente probables. Bernoulli en Ars Conjectandi, publicado en 1713, hace notoria la escasa presencia de la equiprobabilidad fuera del campo de los juegos de azar (Batanero, 2005).

Es debido a la simpleza de los cálculos relacionados por ejemplo con el lanzamiento de un dado o de una moneda, que la noción clásica de probabilidad (sucesos equiprobables) es la mayormente enseñada en la escolaridad. También resulta importante tener en cuenta que el cálculo de la probabilidad puede complicarse si se trata de experimentos más complejos o de probabilidad compuesta, debido a que involucra un mayor nivel de razonamiento combinatorio.

- *Significado frecuencial*

La definición de Laplace resulta restrictiva y no permite asignar probabilidades a los sucesos de espacios muestrales que no son finitos, o que, siendo finitos, no cumplen con la condición de que todos los resultados son igualmente posibles. Surge entonces la pregunta: ¿cómo se asignan, en estos casos, la probabilidad de un suceso? Encontramos la respuesta en la siguiente situación. Supongamos que estamos interesados en determinar la probabilidad del suceso A: el diámetro de un cojinete extraído al azar de un proceso productivo es superior a 2.10 e inferior a 2.20. Una primera aproximación podría ser la siguiente. Repetimos n veces la experiencia de extraer un cojinete y medimos su diámetro. Luego observamos la cantidad de valores medidos que se encuentran en el intervalo definido por el suceso A (frecuencia absoluta del suceso A).

Sea n_A dicho número. El cociente n_A /n (frecuencia relativa del suceso A) puede usarse como una medida de la posibilidad de que A ocurra. Si bien es cierto que el valor de la frecuencia relativa puede variar cada vez que se realizan n observaciones, esta variación tiende a ser insignificante en la medida que n es convenientemente grande. Dicho de otra manera, la frecuencia relativa de A varía en cada muestra de n observaciones, pero a la larga surge cierta regularidad; la frecuencia relativa de A tiende a estabilizarse alrededor de un valor constante. Ese valor constante, que llamaremos probabilidad del suceso A y que notamos P(A) puede imaginarse como la frecuencia relativa en "la población infinita" que resulta de observar indefinidamente el diámetro de los cojinetes que se extraen de dicho proceso de producción, imaginando que funciona de manera continua y estable. En esta aproximación, el concepto de probabilidad de un suceso surge como el valor hacia el cual tiende la frecuencia relativa en una larga serie de observaciones. En la práctica carece de sentido hablar de una infinidad de observaciones, de modo que ese valor constante sólo puede determinarse en forma empírica con una precisión limitada. Este mismo procedimiento podría utilizarse para estimar, por ejemplo, la probabilidad de obtener un número igual a tres al lanzar un dado. Si el dado es equilibrado la frecuencia relativa del valor tres tiende a estabilizarse alrededor del valor1/6.

¿Cuál es la diferencia entre este enfoque y la definición dada por Laplace?

En el modelo introducido por Laplace la probabilidad de un suceso se determina a priori a partir de ciertas hipótesis, sin necesidad de realizar experiencias, en tanto que la probabilidad que se estima a través de las frecuencias relativas es una probabilidad experimental, determinada a posteriori a partir de resultados empíricos. Lo importante es que ambas tienden a coincidir, siempre y cuando se cumplen las hipótesis o supuestos que se realizan y el número de repeticiones de la experiencia es convenientemente grande.

La interpretación de la probabilidad como una frecuencia relativa a largo plazo es debida al matemático austríaco Richard von Mises. El paso definitivo, en el proceso de incorporación del Cálculo de Probabilidades a la Matemática es dado en 1933 por el matemático ruso Kolmogorov, quien profundizando en las ideas de von Mises, establece una definición axiomática, que consiste en introducir el concepto a partir de un conjunto de axiomas o postulados, que enuncian ciertas propiedades de las probabilidades. Estas propiedades constituyen, de algún modo, una idealización de las propiedades de la frecuencia relativa.

Notamos con f(A) la frecuencia relativa de un suceso A. Las propiedades de la frecuencia relativa que motivan a los axiomas de probabilidad son:

- $f(A) \geq 0$
- f(S) = 1, siendo S el espacio muestral asociado a la experiencia

- Si $B \cap C = \Phi$ entonces $f(B \cup C) = f(B) + f(C)$

- *Significado axiomático*

En 1933 Kolmogorov (1903-1987) construyó una teoría axiomática de la probabilidad aplicable a todas las situaciones, no solo a las equiprobables.

Definición axiomática de probabilidad

Sea S el espacio muestral asociado a una experiencia aleatoria. Con cada suceso A de S asociamos un número, P(A), que llamamos probabilidad del suceso A y que verifica los siguientes axiomas:

- A 1 : $P(A) \geq 0$
- A 2 : $P(S) = 1$
- A 3 : Si $B \cap C = \Phi$ entonces $P(B \cup C) = P(B) + P(C)$

Observamos que los axiomas de la definición no indican cómo asignar las probabilidades, sin embargo, restringen la forma de su asignación y formalizan de hecho propiedades de la frecuencia relativa. Las probabilidades que se calculan a partir del modelo de Laplace cumplen las mismas propiedades que las enunciadas en los axiomas. En consecuencia, la definición dada por Laplace puede considerarse como un caso particular de la definición axiomática.

La probabilidad en esta acepción es una medida acotada entre 0 y 1. Respecto a la enseñanza de la probabilidad axiomática es aconsejable realizarla luego de haber trabajado con el modelo de Laplace y el significado frecuencial. La ley de los grandes números establece la vinculación entre la frecuencia relativa y la probabilidad de un suceso. En este contexto cuando se dice que la frecuencia relativa de un suceso converge a su probabilidad, se trata de una “convergencia en probabilidad”, cuyo significado difiere del significado, que se da en los cursos de Cálculo, de convergencia de una sucesión numérica.

- *Significado subjetivo*

Aunque el significado frecuencial amplía el campo de aplicaciones de la Probabilidad y da una regla de cálculo de la misma, no estuvo libre de controversias. Tanto las probabilidades que pueden ser calculadas de antemano, como las que resultan como frecuencia de cierto proceso experimental, son probabilidades objetivas, que pueden expresarse en números y pueden ser sometidas al cálculo matemático. Hay otros casos, sin embargo, en que la palabra “probabilidad” se usa en un sentido menos preciso, casos en que, si bien es posible una estimación subjetiva de la misma, no se pueden dar reglas para su estimación precisa. Como lo indica Santaló (1975) “Se trata, más bien, de un ‘grado de creencia’ acerca de que tenga o no lugar un determinado hecho” (p.10). Son casos que requieren un análisis más complejo, donde no cabe pensar en una evaluación exacta de la probabilidad. A modo de ejemplo, Santaló (1975) propone “Dos países A y B están en guerra, ¿cuál es la probabilidad de que triunfe el país A?”. Al respecto explicita que no se puede acudir a la probabilidad experimental o estadística (dado que la guerra en cuestión es un caso único que no se puede repetir sucesivamente), ni se dispone de un gran número de casos análogos. Sin embargo, aclara, que no es exacto que no tiene sentido hablar de probabilidad en estos casos, dado que es posible cierta evaluación de la misma.

Este nuevo punto de vista aparece a través de la Regla de Bayes, que permite transformar las probabilidades a priori (antes de realizar un experimento) de varias causas, una vez que se observan sus consecuencias, en probabilidades a posteriori, que incorporan la información de los datos observados. Las probabilidades de tales causas podrían entonces revisarse (pasar de probabilidades a priori a probabilidades a posteriori) y pierden de este modo el carácter objetivo que les asigna la concepción frecuencial. Desde esta perspectiva se considera a la probabilidad como un “nivel de creencia” fundada en la experiencia sobre el suceso en cuestión de quien asigna la probabilidad, pudiendo diferir entre distintas personas que cuenten con diversos sistemas de conocimiento. Una dificultad inicial del enfoque subjetivo fue hallar una regla para asignar valores numéricos a las probabilidades, de forma que expresen los grados de creencia personal. “Ramsey (1926) y de Finetti (1937) dedujeron una teoría de decisión consistente, que permite separar las creencias de las preferencias a partir de un sistema de apuestas, e inferir los valores de las probabilidades subjetivas” (Batanero, 2005, p.255).

Según Batanero y Díaz (2007), dentro de las ventajas de este enfoque, se observa que no es necesario repetir el experimento en idénticas condiciones, para dar sentido a la probabilidad, lo cual permite extender el campo de aplicación. Actualmente esta escuela aplica probabilidades a diversos sucesos inciertos, a pesar de su controvertido estatuto científico.

La concepción subjetiva permite incorporar la información previa con la que cuentan las personas para estimar la probabilidad. La enseñanza del Teorema de Bayes no sería posible en la escuela primaria, generalmente se estudia a partir de los 14-15 años; es decir, al final de la educación secundaria obligatoria o a nivel universidad. Sin embargo, se puede realizar una introducción intuitiva al tema en los niveles anteriores. Por ejemplo, Godino et al. (1987) surgieron usar este enfoque a situaciones experimentadas por el individuo, donde este se puede basar en su intuición para establecer la comparación de verosimilitudes percibidas.

Tabla 2.1. Características del significado de probabilidad subjetivo

Tipo	Objeto

	Concepto	Suceso incierto Probabilidad como grado de creencia personal Probabilidad a priori, a posteriori; verosimilitudes
Propiedades	Suceso incierto	Se tiene cierta información, pero no es totalmente predecible No se conoce el resultado, ni sus causas No se exige la repetibilidad Las causas pueden ser o no equiprobables El número de causas puede ser o no finito
	Probabilidad como grado de creencia personal	Condicionada por un sistema de conocimientos Puede ser diferente para personas distintas La probabilidad personal ha de seguir reglas de coherencia Supuesto de transitividad
	Probabilidad a priori, a posteriori; verosimilitudes	La probabilidad a priori es la probabilidad en ausencia de información La probabilidad a posteriori es la probabilidad ajustada a partir de la experiencia La verosimilitud de un resultado depende de la causa Teorema de Bayes: liga las probabilidades a posteriori y a priori por medio de las verosimilitudes
Procedimientos	Suceso incierto	Analizar experimentos donde la probabilidad depende de información personal Discriminar fenómenos en que sea aplicable este significado de la Probabilidad Enumerar posibles causas y posibles resultados
	Probabilidad como grado de creencia personal	Valorar probabilidades a partir de experiencias personales Estimar probabilidades personales mediante el cociente de posibilidades a favor y en contra Interpretar el grado de creencia personal Comparar las asignaciones hechas por diferentes personas
	Probabilidad a priori, a posteriori; verosimilitudes	Determinar probabilidades a priori y verosimilitudes Aplicar el teorema de Bayes con una información dada

- *Significado lógico*

En la lógica deductiva una conclusión se deriva de las premisas y es cierta o no, según sean ciertas o no las premisas. Por ejemplo, si las premisas son: a) los alumnos de la clase son rosarinos, b) Roberto es un alumno de la clase, la conclusión que se deriva es: Roberto es rosarino. En cambio, cuando las premisas resultan, por ejemplo, de la evidencia proporcionada sólo por n observaciones efectuadas en el universo de todos los alumnos de una clase, donde los n alumnos resultaron rosarinos, la hipótesis "todos los alumnos de la clase son rosarinos" y la predicción "la próxima observación corresponderá a un alumno rosarino" no constituye una consecuencia lógica de la evidencia, sino solamente una consecuencia "parcial".

En la interpretación logicista de la probabilidad, la misma se concibe como un grado de creencia racional entre un conjunto de conocimiento y un conjunto de proposiciones. Ese grado de creencia racional representa la confianza que se deposita en la deducción que nos lleva del conjunto de proposiciones conocidas a las desconocidas. Se asigna una probabilidad a una hipótesis en función del soporte que ofrece la evidencia.

Dada la complejidad de su significado no se la trata en la enseñanza media.

2.2.2. Toma de decisiones en contextos de incertidumbre

Neter, Wasserman y Whitmore (1980) establecen que en todo problema de decisión deben existir *actos* (dos o más cursos de acción disponibles al individuo o unidad de toma de decisiones), *consecuencias* (cada acto acarrea ciertos resultados que son diferentes para actos diferentes) y *criterio* (el que toma las decisiones debe elegir la mejor a la luz de algún criterio). Consideran, en este marco, cuatro tipos básicos de problemas de decisión:

1. *Toma de decisiones bajo condiciones de certidumbre*: son aquellos problemas en los cuales cada acto disponible para quien toma la decisión tiene una consecuencia que puede ser conocida previamente con certidumbre. A pesar de tener certidumbre, no se debe suponer que este tipo de toma de decisiones es sencilla, ya que el número de actos disponibles en algunos problemas puede llegar a ser muy grande.
2. *Toma de decisiones bajo condiciones de competencia*: se trata de problemas donde la consecuencia de un acto se ve afectada por ciertas variables que no están controladas por quien toma la decisión, sino por algún adversario quien busca su propio objetivo.
3. *Toma de decisiones bajo condiciones de incertidumbre*: involucra problemas de decisiones donde se presentan variables que no están bajo el control de un adversario y acerca de las cuales quien toma las decisiones tiene poca o ninguna información para conocer el estado de situaciones futuras. Se presenta cuando no se puede predecir fácilmente el futuro a base de la experiencia pasada (a menudo se presentan muchas variables incontrolables). A diferencia de la toma de decisiones en estado de certidumbre donde existe solamente un posible estado de resultado para cualquier acto, bajo condiciones de incertidumbre existen por lo menos dos estados de resultado por acto. En una toma de decisiones bajo incertidumbre, el estado de resultados eventual es desconocido en el momento en que debe tomarse la decisión.
4. *Toma de decisiones bajo condiciones de riesgo*: comprende problemas en los que existe cierto número de estados de resultados posibles, para los cuales se conoce la distribución de probabilidades. Este tipo de toma de decisión también puede ser utilizada aun cuando la distribución de probabilidad de los diferentes estados de resultados sea desconocida. En estos casos, a quien toma las decisiones se le pedirá fijar la posibilidad de cada uno de los estados de resultado y proporcionar probabilidades subjetivas a cada ocurrencia de un resultado. Una vez que se cuenta con estas probabilidades subjetivas el mecanismo para determinar el acto que maximice los beneficios esperados es el mismo que se utilizaría si se conociera la distribución de probabilidad.

El azar aparece en múltiples situaciones cotidianas o de la actividad profesional. Pero las intuiciones en Probabilidad con frecuencia nos engañan y una enseñanza formal en ocasiones resulta insuficiente para superar los sesgos de razonamiento que pueden llevar a decisiones incorrectas. Es por eso que resulta necesario reforzar la formación del razonamiento probabilístico en la educación primaria y secundaria, y proporcionar con ello a los alumnos un instrumento que oriente la acción ante la incertidumbre (Batanero, 2006).

Las investigaciones en enseñanza y aprendizaje de la Probabilidad se pueden clasificar, según Jones y Thornton (2005; citado en Batanero et al., 2007), en tres períodos cronológicos que abarcan la última mitad del siglo XX:

- *Período Piagetiano*: en las décadas de 1950 y 1960, Piaget e Inhelder investigaron el desarrollo cognitivo del pensamiento probabilístico en los niños. Aunque el interés en estas investigaciones no estaba centrado en la búsqueda de conocimientos que permitiesen abordar la enseñanza de la Probabilidad en la escuela, sí inspiraron más tarde muchas de las investigaciones en esa dirección.
- *Período Post-Piagetiano*: corresponde a las décadas de 1970 y 1980, en las que se continuaron los estudios realizados por psicólogos tales como Fischbein, Tversky y Kahneman, quienes centraban sus preocupaciones en la naturaleza de las concepciones e intuiciones probabilísticas. En sus estudios se distinguió entre las intuiciones primarias (que se forjan a partir de experiencias individuales sin necesidad de instrucción formal) y las secundarias (se adquieren luego de la etapa de instrucción) acerca de la Probabilidad. Si bien las intuiciones secundarias reestructuran las intuiciones primarias para casos específicos, estas siguen formando parte de las creencias del individuo y pueden reaparecer en otros contextos. Tales psicólogos analizaron las estrategias y heurísticas que emplean las personas para emitir juicios probabilísticos. Estas heurísticas son estrategias de pensamiento para decidir en ambientes de incertidumbre y, si bien en algunos casos se comportan como mecanismos útiles, en otros generan sesgos y concepciones erróneas.
- *Período Contemporáneo*: se caracteriza por las motivaciones encontradas a partir del fuerte impulso que toma la enseñanza de la Probabilidad al considerarla un tema constitutivo de los programas de estudio de Matemática en distintas partes del mundo. Se enfatiza en los razonamientos o creencias con que los estudiantes llegan al aula, la realización de experimentos de enseñanza y la incorporación de tecnología. La introducción generalizada de la Probabilidad en los diversos niveles educativos ha ocasionado un gran auge en la investigación sobre Didáctica de la Probabilidad. Batanero et al. (2007) realizan un recorrido por la Didáctica de la Probabilidad y

establecen que, desde su punto de vista, los principales temas investigados con relación al tema se agrupan de la siguiente manera:

- *Investigación sobre desarrollo cognitivo*. Los estudios de Piaget e Inhelder inician el análisis detallado de las etapas en la adquisición de las ideas de aleatoriedad y probabilidad, el razonamiento combinatorio, distribución y convergencia, así como de la capacidad de cuantificación de Probabilidades en niños y adolescentes. Posteriormente Fischbein, cuyos trabajos constituyeron uno de los primeros puentes de unión entre la Psicología y la Educación Matemática, se interesó no solo por la formación de los conceptos formales, sino por la aparición de intuiciones parciales sobre los conceptos estocásticos y el efecto de la instrucción. Sus investigaciones apoyaron decididamente la conveniencia de adelantar la educación estocástica y mostraron que, sin instrucción, es difícil que se desarrolle un razonamiento estocástico adecuado, incluso una vez que se alcanza la etapa de las operaciones formales. La importancia que estos trabajos tienen para los profesores es que permiten seleccionar de una forma racional el tipo de tareas probabilísticas que pueden proponer a sus alumnos en función de su edad. Los instrumentos de evaluación construidos en estas investigaciones son también útiles para valorar los conocimientos y modos de razonamientos de los alumnos. Las investigaciones piagetianas también se completan con el estudio del desarrollo evolutivo de los niños sobre otros conceptos utilizándose, en algunos casos, entornos tecnológicos para explorar dichas concepciones.
- *Investigación sobre toma de decisiones* (todos citados en Batanero et al., 2007). Trabajos como los de Kahneman, Slovic y Tversky (1982) inician los estudios psicológicos sobre toma de decisiones en contextos de incertidumbre. Su programa de investigación se basa en la idea de racionalidad acotada y describe los sesgos de razonamiento que ocurren como resultado de un proceso cognitivo (que denomina heurística) que lleva a una conclusión incorrecta, bien por usar un modelo inapropiado de la situación o por falta de estructuras cognitivas específicas. Los autores suponen que las heurísticas y sesgos son resistentes a la enseñanza y se dan incluso en sujetos con alta preparación matemática. Otra perspectiva diferente (Nisbett y Ross, 1980) es considerar que se puede adquirir un razonamiento estadístico intuitivo correcto sobre conceptos abstractos, siempre que se reconozca la situación como aleatoria. La enseñanza podría mejorar el razonamiento estadístico natural, que se adquiere por la experiencia repetida en resolución de problemas (Sedlemeier, 1999). Además, Gigerenzer (1994) sugiere que nuestra mente está mejor equipada para resolver

problemas de Probabilidad cuando la información y las preguntas se dan en términos de frecuencias absolutas, en lugar de usar porcentajes o proporciones, porque se asemeja más a la forma en que recogemos información de las frecuencias de sucesos aleatorios en una situación de muestreo natural a lo largo de nuestra experiencia. Una representación adecuada de los problemas probabilísticos facilita el cálculo de probabilidades.

- *Enseñanza y resolución de problemas*. Ya que la Probabilidad forma parte del currículum, las investigaciones realizadas en contextos educativos específicos aumentan, y son frecuentes aquellas que tratan de evaluar el aprendizaje, tanto a nivel escolar como universitario.
- *Currículum y formación de profesores*. A pesar de que la Probabilidad se incluye de una forma oficial en el currículum, no siempre se enseña, y muchos profesores hacen un énfasis excesivo en la enseñanza de fórmulas de modo tradicional, en lugar de seguir las directrices actuales. Los estudios sobre libros de texto indican que es difícil para los profesores encontrar un apoyo para cambiar el enfoque tradicional, ya que los mismos presentan a veces una visión sesgada o incompleta del tema (Ortiz, 1999; Cañizares, Ortiz, Batanero y Serrano, 2002; Serradó, Azcárate y Cardeñoso, 2005). Los resultados indican la influencia que sobre la enseñanza tienen las concepciones deterministas y la falta de formación docente sobre estos temas presentando en algunos casos incluso conocimientos erróneos sobre algunos conceptos. Es por ello que, paralelamente al cambio del currículum, surge la necesidad de formación didáctica de los profesores que incluye, además del conocimiento estadístico, los siguientes componentes básicos: reflexión epistemológica sobre la naturaleza del conocimiento estocástico, su desarrollo y evolución; análisis de las transformaciones del conocimiento para adaptarlos a los distintos niveles de enseñanza; estudio de las dificultades, errores y obstáculos de los alumnos en el aprendizaje y sus estrategias en la resolución de problemas; análisis del currículum, situaciones didácticas, metodología de enseñanza para temas puntuales y recursos didácticos específicos.
- *Sistematización de la investigación*. La exposición anterior muestra que la investigación en Didáctica de la Probabilidad, que forma parte de la relacionada con la Educación Estadística, comenzó en forma dispersa, desde diferentes grupos que poco a poco tratan de conectarse.

Esta tesis se conjuga lo relativo a toma de decisiones en ciertas situaciones (casos) y formación docente (futuros profesores en Matemática) para introducir Probabilidad en la escolaridad secundaria.

2.2.3. Currículum prescripto

Los profesores en Matemática son los responsables de que los ciudadanos se alfabeticen en el pensamiento y lenguaje matemático. Dentro de la Matemática a enseñar en la escuela secundaria se encuentra el eje Estadística y Probabilidad, en el que no poseen un desarrollo profundo. Además, en el nivel secundario a diferencia del nivel superior, por lo general no se brinda un marco de contención a nivel personal ni académico encontrándose los docentes solos frente al curso. Estos son motivos de la mayor vacancia que se encuentra a nivel medio.

Según el Diseño Curricular Jurisdiccional (DCJ) propuesto por el Ministerio de Educación de Santa Fe (2014), tanto del ciclo básico como del ciclo orientado, la Matemática surge de la necesidad de encontrar respuestas a problemas provenientes de diversos contextos, tales como los que se presentan en la vida cotidiana, los vinculados a otras ciencias o los que son producto del propio pensamiento matemático, denominados problemas intra y extramatemáticos. Se caracteriza a la Matemática como un producto cultural y social, atravesada por las concepciones sociales y las decisiones de la comunidad matemática, provocándose una interacción que funciona como generador de conocimientos.

El DCJ plantea un trabajo en aula que propicie una actividad a la manera de micro-sociedad científica, en el que se problematice el contenido y los estudiantes tengan oportunidades para interpretar información, establecer relaciones, conjeturar, elegir y construir un modelo para resolver los problemas, comunicar en forma oral y escrita, argumentar acerca de la validez de los procedimientos y resultados, elaborar conclusiones, de modo que posibilite la producción de conocimientos, aspecto central en la enseñanza. Así mismo, establece que en las clases de Matemática también deben asumirse los desafíos de la sociedad actual, que exigen sujetos involucrados en la resolución de problemas, que buscan alternativas y desarrollan estrategias flexibles y adaptables a contextos diversos. La enseñanza de la Matemática debe asumir la responsabilidad de que todos los estudiantes generen confianza en sus propias posibilidades de pensar y hacer, donde el error sea tomado como parte del proceso de aprendizaje.

En el DCJ se reconocen cuatro ejes conceptuales relevantes, que se organizan atendiendo principalmente a lo numérico, lo geométrico, lo algebraico, lo variacional y lo aleatorio. Ellos han sido denominados: Números y Operaciones; Geometría y Medida; Álgebra y Funciones y, como se adelantara, Estadística y Probabilidad. Según este documento, es tarea del profesor seleccionar, secuenciar y vincular los contenidos favoreciendo la interrelación e integración en situaciones que problematicen el conocimiento.

También se propone un enfoque metodológico cuyo principio básico consiste en enfrentar al estudiante a una situación y darle una tarea, un desafío como fuente de aprendizaje. El aprendizaje está centrado en el estudiante, no en el profesor o solo en los contenidos, y se favorece mediante la interacción grupal y el trabajo colaborativo.

Se procura fomentar situaciones en las que el estudiante se pregunte: ¿Qué quiero averiguar? ¿Qué se necesita? ¿Tengo los conocimientos para resolver este problema? ¿A quién le pregunto? ¿Dónde puedo buscar la información que necesito? Al darse cuenta de que con los conocimientos matemáticos que posee no alcanza, el docente será el encargado de orientarlos en la construcción del nuevo concepto.

En el modelo que sugiere el DCJ es el estudiante quien descubre la necesidad de nuevos aprendizajes para resolver los problemas que se le plantean. En su dinámica de trabajo se desarrollan habilidades, actitudes y valores benéficos para la mejora personal y profesional del joven.

Como se establece en el eje Estadística y Probabilidad del DCJ, históricamente el pensamiento matemático se ha basado en una idea determinista que ha excluido la intervención de aquellas variables que daban lugar a procesos no predecibles desde las soluciones que la Matemática aportaba, idea que ha sido reforzada desde la Matemática escolar. Es importante resolver situaciones que permitan el reconocimiento y uso de la Probabilidad como modo de cuantificar la incertidumbre.

Lo establecido en el DCJ pretende que el estudiante adquiera, en el transcurso del ciclo orientado, la habilidad de interpretar enunciados descubriendo datos e incógnitas, estableciendo relaciones entre ellos, la habilidad de procesar y transformar los datos necesarios para las operaciones concretas que requiera la solución. Además, el estudiante debe proponerse un plan de trabajo, una estrategia acorde al mismo y plantear un modelo que represente la situación; logrando extraer información desde un contexto distinto al contexto de aplicación (movilidad de los conceptos) y desarrollar la habilidad de relacionar determinados modelos con determinadas situaciones de la realidad. Resulta importante considerar los recursos que se utilizan en los medios de comunicación para describir la información, los cuales tienen un gran sustento matemático y el ciudadano debe estar preparado para comprender lo que recibe y tomar decisiones a partir de ello porque, además de lo concerniente a los conceptos matemáticos, está la cuestión ética de enseñar a los estudiantes a discriminar el modo en que se informa.

A continuación, se presentan los contenidos del eje Estadística y Probabilidad por año (primero a quinto, según el sistema educativo santafesino), establecidos en el DCJ:

Primer Año

Situaciones problemáticas extra matemáticas que permitan a los estudiantes interpretar y elaborar información:

- *Datos discretos y acotados para estudiar un fenómeno: identificación de variables cualitativas y cuantitativas. Organización y representación de los datos mediante tablas de frecuencias y gráficos. Media y modo: cálculo e interpretación de sus significados. Los datos estadísticos en los medios de comunicación.*
- *Probabilidad: determinación empírica incluyendo casos sencillos que involucren un conteo ordenado sin necesidad de usar fórmulas.*

Segundo Año

Situaciones problemáticas extra matemáticas que permitan a los estudiantes interpretar y elaborar información:

- *Población, muestra. Variables cualitativas y cuantitativas, discretas y continuas. Organización y representación de los datos mediante tablas de frecuencias y gráficos. Media, modo y mediana. Interpretación de su significado para la elaboración de inferencias y argumentos para la toma de decisiones.*
- *Frecuencia relativa de un suceso: determinación mediante experiencias reales o simuladas. Comparación con la probabilidad teórica.*

Tercer Año

Situaciones problemáticas extra matemáticas que permitan a los estudiantes modelizar, interpretar y comunicar:

- *Fenómenos de colectivos: delimitación de las variables y pertinencia de la muestra, selección de la forma de representación más conveniente de acuerdo a los datos en estudio y su comunicación.*
- *Medidas de posición: reconocimiento e interpretación de media aritmética, mediana, moda y cuartiles, seleccionando la que mejor describa el fenómeno.*
- *Probabilidad de un suceso apelando a las técnicas de conteo de los casos favorables y posibles, cuando la situación lo requiere, o cálculo mediante la fórmula de Laplace.*

Cuarto Año

Situaciones problemáticas extra matemáticas que permitan a los estudiantes modelizar, interpretar y comunicar:

- *Medidas de dispersión: reconocimiento de la insuficiencia de las medidas de posición para proporcionar información respecto de ciertos fenómenos y la necesidad de medidas como la varianza y la desviación estándar. Cálculo y análisis de la información que proporcionan.*
- *Probabilidades: caracterización de sucesos excluyentes, no excluyentes, independientes y dependientes y elaboración de fórmulas para calcular probabilidades condicionadas, totales y de pruebas repetidas.*

Quinto Año

Situaciones problemáticas extra matemáticas que permitan a los estudiantes modelizar, interpretar y comunicar:

- *Correlación lineal entre dos variables aleatorias: gráficos de dispersión o nube de puntos, interpretación del significado de la recta de regresión como modelo aproximativo del fenómeno en estudio.*
- *Probabilidad: evaluación para la toma de decisiones en situaciones de juegos de azar, procesos económicos, etc.*

Los mismos están en correlato con los (NAP) establecidos por el Ministerio de Educación de la Nación (2006b). Un NAP refiere a un conjunto de saberes centrales, relevantes y significativos que, incorporados como objetos de enseñanza, contribuyan a desarrollar, construir y ampliar las posibilidades cognitivas, expresivas y sociales que los alumnos ponen en juego y recrean cotidianamente en su encuentro con la cultura, enriqueciendo de ese modo la experiencia personal y social en sentido amplio.

Son saberes clave, refieren a los problemas, temas, preguntas principales de las áreas, disciplinas y a sus formas distintivas de descubrimiento, razonamiento, expresión, dotadas de validez y aplicabilidad general.

En relación con la Estadística y Probabilidad, se establecen los siguientes NAP para el ciclo básico de Educación Secundaria:

La interpretación y elaboración de información estadística en situaciones problemáticas que requieran:

- *Organizar conjuntos de datos discretos y acotados para estudiar un fenómeno, comunicar información y/o tomar decisiones, analizando el proceso de relevamiento de los datos*.
- *Identificar diferentes variables (cualitativas y cuantitativas), organizar los datos y construir gráficos adecuados a la información a describir*.
- *Interpretar el significado de la media y el modo para describir los datos en estudio.*
- *Organizar datos para estudiar un fenómeno y/o tomar decisiones analizando el proceso de relevamiento de los mismos y los modos de comunicar los resultados obtenidos*.
- *Identificar diferentes variables (cualitativas y cuantitativas, discretas y continuas), organizar los datos para su agrupamiento en intervalos y construir gráficos adecuados a la información a describir.*
- *Interpretar el significado de los parámetros centrales (media, mediana y modo) y analizar sus límites para describir la situación en estudio y para la elaboración de inferencias y argumentos para la toma de decisiones.*

El reconocimiento y uso de la probabilidad como un modo de cuantificar la incertidumbre en situaciones problemáticas que requieran:

- *Comparar las probabilidades de diferentes sucesos incluyendo casos que involucren un conteo ordenado sin necesidad de usar fórmulas*.

- *Determinar la frecuencia relativa de un suceso mediante experimentación real o simulada y compararla con la probabilidad teórica.*
- *Explorar, producir y utilizar fórmulas sencillas de combinatoria para calcular probabilidades*.
- *Evaluar la razonabilidad de una inferencia elaborada considerando datos estadísticos obtenidos a partir de una muestra.*

2.3. Método de casos como metodología de enseñanza

Uno de los objetivos fundamentales de la Educación consiste en integrar la teoría y la práctica a través de metodologías de enseñanza que procuren conectar el conocimiento con el mundo real. Con esta impronta, en el portal educativo del Estado Argentino (www.educ.ar) se proponen diversos recursos educativos para cada nivel, dentro de los cuales se encuentra una síntesis del método de casos (Wassermann, 1994). El planteamiento de un caso es siempre una oportunidad de aprendizaje significativo y trascendente, en la medida en que quienes participan en su análisis logran involucrarse y comprometerse, tanto en la discusión del caso como en el proceso grupal de reflexión. Con esta técnica se desarrollan habilidades tales como el análisis, la síntesis y la evaluación de la información. Se promueven también el pensamiento crítico, el trabajo en equipo y la toma de decisiones, además de otras capacidades como la innovación y la creatividad. Aunque la enseñanza basada en el método de casos puede admitir algunas variaciones, para que se pueda llamar así a lo que ocurre en el aula, se deben cumplir ciertas condiciones de forma y estilo (Christensen y Hansen, 1987; citado en Wassermann, 1994) que se presentan en lo que sigue.

Los casos son instrumentos educativos complejos que revisten la forma de narrativas. Un caso incluye información y datos (psicológicos, sociológicos, científicos, antropológicos, históricos y de observación), además de material técnico. Aunque los casos se centran en áreas temáticas específicas, involucran también a otras disciplinas. Un caso a ser utilizado en esta metodología debe contar con:

1. Notas del docente: los buenos casos se construyen en torno de problemas o de "grandes ideas"; es decir, se centran en los puntos importantes de una asignatura o cuestión que merecen un examen a fondo.
2. Relato: las narrativas se basan en problemas de la realidad que se presentan a personas reales. Deben generar interés por los personajes y plantear una situación conflictiva.

> Un buen caso es el vehículo por medio del cual se lleva al aula un trozo de realidad a fin de que los alumnos y el profesor lo examinen minuciosamente. Un buen caso mantiene centrada la discusión en alguno de los hechos obstinados con los que uno debe enfrentarse en ciertas situaciones de la realidad. [Un buen caso] es el ancla de la especulación académica; es el registro

de situaciones complejas que deben ser literalmente desmontadas y vueltas a armar para la expresión de actitudes y modos de pensar que se exponen en el aula (Lawrence, 1953, p.215).

3. Preguntas críticas: convocan a los alumnos a examinar ideas importantes, nociones y problemas relacionados con el caso. Estas preguntas, por la forma en que están redactadas, requieren una reflexión a conciencia sobre los problemas, a fin de promover la comprensión.

Aunque la calidad de un caso es fundamental para despertar el interés de los estudiantes por los problemas que en él se plantean, la condición esencial en este método de enseñanza es la capacidad del profesor para conducir la discusión, ayudar a los alumnos a realizar un análisis más agudo de los diversos problemas (planteando interrogantes sobre el caso) e inducirlos a esforzarse para obtener una comprensión más profunda, acompañando el proceso con actividades de seguimiento (Wassermann, 1994).

Dentro de las principales características que se deben considerar a la hora de la elección o elaboración de un caso para la enseñanza, es que este debe plantear una situación real, de experiencias concretas y personales de alguien, para así estimular la curiosidad e invitar al análisis. Debe ser claro y comprensible, no debe sugerir soluciones sino proporcionar datos concretos para reflexionar, analizar y discutir en grupo las posibles salidas. Debe fomentar la participación y apelar al pensamiento crítico de los alumnos, los aspectos principales y secundarios de la información deben estar entremezclados. Otra cuestión a tener en cuenta es que el tiempo para la discusión y para la toma de decisiones debe ser limitado. No se debe olvidar que un caso siempre debe perseguir metas educativas que se refieran a contenidos académicos, habilidades y actitudes.

Es posible distinguir en el método de casos tres fases: preparación, desarrollo y evaluación.

Primera fase: *Preparación*

Es la fase en la que el docente prepara el caso que sus alumnos van a estudiar. Son tres las actividades que se llevan a cabo en esta fase (a, b, c).

a. *Formulación de los objetivos o metas*

Se recomienda que el docente tenga en cuenta, para potenciar una formación integral del alumno, los tres tipos de aprendizaje: cognoscitivo (hace referencia a los contenidos disciplinares en los que se fundamenta el caso descrito), afectivo (involucra determinadas actitudes a promover en el alumno, tales como respetar la opinión de los demás, responsabilizarse de la realización de su trabajo, integrarse en un equipo) y de habilidades (se fomenta en el estudiante el pensamiento crítico, el análisis, la síntesis, la capacidad de aprender por cuenta propia, de identificar y resolver problemas y de tomar decisiones). Además, otras concretas, como expresarse oralmente, trabajar en equipo, interactuar con otros.

b. *Elaboración del caso*

Una vez formuladas las metas, el docente elabora el caso. Para ello debe acudir a todas las fuentes documentales necesarias; entre otras: artículos, relatos que describan sucesos o problemas de la realidad, experiencias propias o de profesionales experimentados, de sus propios alumnos.

Para redactar un caso se requiere tener claras las metas educativas a lograr, delimitar el alcance de la información, ser claro y conciso, utilizar una terminología adecuada al nivel escolar de los alumnos, omitir los detalles inútiles, incluso se puede incluir diálogos para hacerlo más real. Es importante finalizar el caso formulando preguntas básicas que ayuden a guiar el análisis y cuidar la presentación (giros gramaticales, espacios, estilo).

Básicamente, un buen caso se caracteriza por permitir una lectura ágil, facilitar la comprensión de la situación descrita, generar un flujo de preguntas, interrogantes e interpretaciones en el alumno, aceptar múltiples soluciones y facilitar el debate.

c. *Formación de los grupos de trabajo*

El estudio de caso es una técnica grupal, por lo que hay que formar equipos de trabajo. El docente puede decidir cómo deberán agruparse o dar a sus alumnos la libertad de hacerlo. Se recomienda que cada equipo sea de cuatro a seis personas.

Segunda fase: *Desarrollo*

A la fase de preparación, le sigue la del desarrollo del caso propiamente dicho, que se realiza en cuatro pasos (a, b, c, d).

a. *Exposición del caso a estudiar*

Antes de comenzar con el estudio del caso, el docente debe explicar las metas que desea conseguir y el mecanismo del método involucrado.

A continuación, presenta la redacción del caso y comenta las normas a seguir en su desarrollo (medios, ayudas, documentación a consultar, distribución del tiempo, etcétera). Puede comentar algunos aspectos del caso que considere importantes destacar o que puedan ser objeto de confusión, así como diversos puntos que centren y faciliten el análisis.

b. *Estudio individual*

Después de presentarse el caso comienza su estudio. Los alumnos leen el caso de forma individual para tratar de comprender la información que se les presenta antes de pasar al debate grupal. Aquí tienen la oportunidad de consultar todo el material que necesiten para el análisis del problema.

c. *Estudio en equipos*

Finalizado el estudio individual, comienza el trabajo en equipos. Juntos estudian el caso, comentan los aportes de cada uno de sus miembros, intercambian ideas, analizan y debaten sobre los distintos aspectos del problema.

d. *Elaboración de conclusiones*

Una vez terminado el análisis, un miembro del equipo hace una recopilación final de las soluciones propuestas con el fin de llegar a un consenso sobre las conclusiones definitivas respecto del caso estudiado.

Tercera fase: *Evaluación*

Esta fase se efectúa cuando los grupos presentan su trabajo. Cada equipo expone al resto las conclusiones elaboradas, fundamentando el análisis realizado. Posteriormente se abre un debate general, moderado por el docente, con el fin de llegar a las soluciones óptimas, valorando los diferentes argumentos aportados por los equipos. La evaluación final debe complementarse con la evaluación continua, efectuada a lo largo de la etapa de desarrollo.

Respecto al rol del docente y su participación, López (1997; citado en Wassermann, 1994) establece que debe formular buenas preguntas, que motiven la reflexión, la relación de ideas y que ayuden a encontrar puntos claves durante la discusión, asegurarse de que todos participen, pero sin que nadie acapare la discusión ni que un participante sea inhibido por otro. El docente es el responsable de llevar al grupo de una fase a otra, sintetizar progresivamente lo que el grupo descubra, evitando exponer sus propias opiniones para no influir en el grupo. Además, puede incluir el uso del pizarrón o algún otro recurso tecnológico para resumir y clarificar, reformular (repetir con otras palabras) las buenas intervenciones de cualquier alumno e inducir tanto el análisis riguroso como la toma de decisiones.

A continuación, se presentan algunos puntos que, desbalanceados, pueden acarrear complicaciones al implementar el método de casos: cantidad de alumnos en el curso, foco puesto en los objetivos de aprendizaje, diseño de una evaluación acorde, administración del tiempo de discusión del caso, tema convocante e inclusivo, relación del caso con los contenidos del curso, orden al defender posiciones.

Otro aspecto importante de la enseñanza basada en casos es lograr que las respuestas a las cuestiones planteadas se discutan en grupos, tanto pequeños como el grupo-clase, dando lugar al trabajo colaborativo a partir de la confrontación de ideas y de opiniones. Además, en la metodología de casos frecuentemente se plantean problemas divergentes, es decir, escenarios que no tienen una única solución. Los casos se centran en un acontecimiento real, cuya complejidad integra los elementos de la realidad que casi nunca se caracterizan por ser lineales o simples.

Los docentes que enseñan mediante el método de casos manifiestan beneficios en el aprendizaje de los alumnos: aprenden a comunicar sus ideas; son capaces de analizar problemas complicados; desarrollan habilidad para tomar decisiones; se vuelven más curiosos; se interesan en aprender; aumenta su respeto por las opiniones, actitudes y creencias diferentes; están motivados para leer materiales no presentados en clase; la discusión iniciada en clase continúa durante el almuerzo y la cena. Básicamente los docentes que lo emplean reportan que los alumnos disfrutan más de las clases y encuentran a la escuela más estimulante e interesante (Adam, 1992; citado en Wassermann, 1994).

En síntesis, la enseñanza basada en el método de casos permite que los estudiantes adquieran conocimientos y realicen un análisis más inteligente de los datos. También, adquieren mayor tolerancia a la ambigüedad y comprenden mejor las complejidades de los conceptos y problemas. Por otro lado, esta metodología se aplica con eficacia en casi todas las materias y en la mayoría de los niveles educativos, desde la escuela primaria hasta la universidad. Ante una misma situación pueden existir diversas soluciones o perspectivas, todas igualmente válidas, con diversidad de argumentos.

CAPÍTULO 3 - Metodología

En este capítulo se especifica la metodología empleada para la ejecución de la investigación mediante cuatro apartados. En el primero se delimita el enfoque, alcance y tipo adoptado para la concreción del estudio. En segundo término, se presentan las técnicas e instrumentos de recolección de información. En tercer lugar, se desarrollan en detalle las fases de la ingeniería didáctica ideada. Finalmente se muestra el sistema de categorías de análisis acorde con los objetivos y marco del estudio.

3.1. Enfoque, alcance y tipo

El *enfoque* de la investigación es cualitativo dado que interesa la realidad subjetiva del objeto de estudio, sin mediciones numéricas, por lo cual el análisis no es estadístico. La recolección de los datos se basa en las perspectivas y puntos de vista de los participantes. Resultan de interés las interacciones entre individuos y grupos, procurando entender las vivencias de los participantes tal como son sentidas y experimentadas por ellos (Sherman y Webb, 1988). El proceso de indagación es flexible y se mueve entre los eventos y su interpretación, entre las respuestas y el encuadre teórico-metodológico. Su propósito consiste en “reconstruir” la realidad, contemplando la percepción de los actores de un sistema social previamente definido. El investigador se introduce en las experiencias individuales de los participantes y construye el conocimiento, siempre consciente de que es parte del fenómeno estudiado (Hernández, Fernández y Baptista, 2006).

El *alcance* es descriptivo-interpretativo, en correspondencia con los objetivos específicos, con el propósito de analizar el proceso de configuración del *conocimiento matemático para la enseñanza* (*MKT*) de introducción del pensamiento no determinista en los futuros profesores al trabajar mediante el método de casos.

El *tipo* de investigación corresponde al estudio del caso de estudiantes avanzados del PM que se encuentran cursando la asignatura Práctica de la Enseñanza III (PEIII), que tiene como objeto la configuración del conocimiento práctico del docente en torno al eje Estadística y Probabilidad en la escuela secundaria.

3.2. Técnicas e instrumento

Las técnicas de recolección de datos utilizadas fueron dos:

- *Cuestionarios abiertos*: materializados a través de consignas que los estudiantes debieron responder de manera individual o grupal, especificándose en cada una, con plazos y modalidades estipulados. Se dispuso tanto de manuscritos elaborados en clase como de archivos digitales producidos por ellos.
- *Observación participante de clases*: en las que se trabajó con los estudiantes de PEIII aplicando cuestionarios, realizando devoluciones y sesiones de puesta en común. Se dispuso de registros lo más exhaustivos posible a partir de los audios de las clases y las notas manuales de la tesista.

El instrumento diseñado para la primera técnica constó de siete consignas:

> <u>Consigna 1</u>. *En el Diseño Curricular vigente se menciona "Históricamente el pensamiento matemático se ha basado en una idea determinista que ha excluido la intervención de aquellas variables que daban lugar a procesos no predecibles desde las soluciones que la Matemática aportaba, idea que ha sido reforzada desde las matemáticas escolares". Compartí tu propia experiencia escolar al respecto, argumentando o dando ejemplos.*
>
> <u>Consigna 2</u>. *Te estás desempeñando como profesor en un primer año de secundaria y disponés de un par de semanas para trabajar Probabilidad. ¿Cómo lo harías? Recordemos qué dice el Diseño Curricular en cuanto a los contenidos a abordar al respecto en dicho año: "Situaciones problemáticas extra matemáticas que permitan a los estudiantes interpretar y elaborar información: (...) Probabilidad: determinación empírica incluyendo casos sencillos que involucren un conteo ordenado sin necesidad de usar fórmulas".*
>
> <u>Consigna 3</u>. *En base a la lectura del caso, respondan las siguientes preguntas críticas (Wassermann, 1994):*
>
> *1. En su opinión, ¿cómo puede ayudar la Matemática a Bonnie y Miko a tomar una decisión adecuada en lo que se refiere a la compra de un auto usado?*
>
> *2. Recurriendo a lo que conocen sobre Probabilidad, ¿qué probabilidad creen que hay de que el Honda Prelude modelo 84 que ha recorrido 400.000 kilómetros, no tenga que ser reparado durante un año, contado a partir de la compra? ¿Facilitará los cálculos el hecho de probar el auto? ¿Qué suposiciones se están haciendo?*
>
> *3. ¿Qué probabilidad creen que hay de que el Célica modelo 82 no tenga que ser reparado durante un año, contado a partir de la compra? ¿Facilitará los cálculos el hecho de probar el auto? ¿Qué suposiciones se están haciendo?*
>
> *4. ¿Cómo calcularían ustedes la diferencia de costos entre lo que tendría que pagar Bonnie en conceptos de intereses por un préstamo de $3.500 a tres años de plazo y a una tasa de 12,5% anual, contraído para comprar el auto más nuevo (el Prelude modelo 87), y lo que tendría que pagar por la reparación de las probables averías mecánicas que sufriría, a lo largo de tres años, el auto más barato y más antiguo (el Célica modelo 82)?*
>
> *5. ¿Cómo calcularían el costo de operación durante un año del Toyota Célica modelo 82? ¿Del Honda Prelude modelo 84? ¿Del Prelude modelo 87? ¿Del Subaru modelo 90? ¿Qué variables incluirían en el cálculo?*

6. Al tomar una decisión sobre la compra de un auto, ¿en qué medida la variable de la preferencia personal debería tener prioridad sobre los cálculos matemáticos? Al elegir un auto, ¿se dejarían guiar por los números o por sus sentimientos? ¿Cómo justifican su posición?

7. Excluyendo el Subaru, ¿cuál de los autos creen ustedes que representa la mejor opción desde el punto de vista de la relación entre el valor y el precio? ¿En qué cálculos se basa esa elección?

8. ¿Qué auto debería comprar Bonnie? ¿Qué le aconsejarían? ¿Qué datos respaldan su elección?

Consigna 4. En grupo, propongan las "notas para el docente" que consideren necesarias para el caso "La insoportable fealdad de Subaru".

Consigna 5. Elaboren un caso, con todas sus partes, que propenda a iniciar el trabajo con contenidos relativos a Probabilidad en primer año de la escuela secundaria.

Consigna 6. Resuelvan uno de los casos propuestos por sus compañeros como si fueran alumnos. Luego, posicionándose como colegas, realícenles una retroalimentación acerca del caso por ellos elaborado, consignando: título del caso; autores del caso; resolución (como alumnos); retroalimentación (como colegas).

Consigna 7. ¿Qué puede aportar esta metodología de enseñanza a las clases de Matemática de la escuela secundaria y al pensamiento no determinista en particular? Fundamenta de la manera más completa posible.

3.3. Diseño: fases de la Ingeniería Didáctica

El *diseño* de la investigación corresponde al de una Ingeniería Didáctica (Artigue et al., 1995) con sus cuatro fases. Como menciona Douady (1996):

> (...) el término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma coherente por un profesor-ingeniero para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático dado para un grupo concreto de alumnos. A lo largo de los intercambios entre el profesor y los alumnos, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los alumnos en función de las decisiones y elecciones del profesor. Así, la ingeniería didáctica es, al mismo tiempo, un producto, resultante de un análisis a priori, y un proceso, resultante de una adaptación de la puesta en funcionamiento de un producto acorde con las condiciones dinámicas de una clase (p.241).

En lo que sigue se recorren las fases de la Ingeniería Didáctica:

Fase 1: Análisis preliminar. Escenario. En una investigación de ingeniería didáctica, la fase de concepción se basa no solo en un cuadro teórico didáctico general y en los conocimientos didácticos previamente adquiridos en el campo de estudio, sino también en un determinado número de análisis preliminares.

Se trabajó con un total de 14 estudiantes inscriptos en la materia PEIII (ubicada en el sexto semestre -sobre ocho- de la carrera). Las asignaturas de cursado simultáneo con PEIII son: Geometría II; Ecuaciones Diferenciales y Modelos Continuos; Currículo y Didáctica; Teorías del Sujeto y del Aprendizaje. Es un requisito para el cursado de PEIII que los estudiantes hayan, como mínimo, regularizado las materias correlativas: Probabilidad y Estadística; Matemática Discreta; Práctica de la Enseñanza I; Pedagogía. Su correlativa posterior es Residencia, una asignatura de cuarto año, en la que se efectúa la práctica docente situada en instituciones educativas.

Cuenta con una profesora a cargo (D1), una ayudante (D2) y una adscripta (D3). Se desarrolla con una clase semanal de 2 horas reloj (los días miércoles de 13.45 a 15.45 hs. en el aula 26 de la FCEIA), en un total de 15 semanas de cursado. Es habitual que se propicien trabajos grupales o individuales con puesta en común. Cabe advertir que sobre el final del semestre anterior se realizó la correspondiente gestión de entrada al campo y al inicio del semestre en cuestión se llevó a cabo un par de observaciones no participantes de la tesista para identificar características del grupo-clase.

El grupo de 14 estudiantes (E1 a E14) del PM que cursan PEIII al momento de realizar el estudio fue muy participativo y activo. Mostraron buena predisposición a la resolución de consignas, abordaje de situaciones innovadores y reflexión de las mismas. Se percibió por sus comportamientos, interés en la construcción conjunta, en el debate, así como en el respeto por las opiniones y resoluciones propuestas por los compañeros. Características grupales como las antes descritas fueron de fundamental importancia a la hora de intentar utilizar un método de enseñanza innovador como es el método de casos. Amerita aclarar que todos ellos dieron su consentimiento para participar en la presente investigación.

PEIII pertenece al denominado Eje Integrador del Plan de Estudios (Res. CS 217/02), cuya finalidad es insertar la problemática de la práctica de la enseñanza, motivo por el que se desarrollan actividades que estimulan los procesos de generación de prácticas educativas originales y la reflexión crítica en torno al ejercicio de la docencia en Matemática. En este contexto, el método de casos para la enseñanza resultó innovador, no en cuanto a ser una herramienta nueva, ya que es utilizado en otras áreas como la Medicina; sino porque aún no ha sido empleada en el PM.

El objetivo de incluir esta estrategia en el PM tiene como finalidad ampliar el abanico de herramientas con las que dispondrán los futuros profesores en Matemática. La característica de multiplicidad de variables que contempla un caso, las entramadas relaciones que suelen vincularlas y las variadas soluciones que pueden desprenderse, hacen de la Probabilidad un tema muy potente para ser abordado mediante este método. Además, la formación de los estudiantes en lo que respecta a los contenidos del eje Estadística y Probabilidad es el adquirido en el nivel secundario y en la materia correlativa “Probabilidad” de la carrera, con una finalidad específica disciplinar.

Fase 2: Análisis a priori. Planificación. Antes del primer encuentro los estudiantes debieron leer el relato del caso: “La insoportable fealdad de Subaru” (Wassermann, 1994, pp.276-283; ver Anexo A1), que se puso a disposición en la plataforma web que utilizan en la materia (c-virtual.fceia.unr.edu.ar). Además de esa tarea inicial, el trabajo en su conjunto se planificó para llevarse a cabo en cuatro encuentros -semanas 6 a 9 (de 15) de cursado-, habiendo parte de un quinto encuentro destinado a una devolución de la última actividad.

En la Tabla 3.1 se presentó un punteo de la planificación para cada encuentro. Se resumió qué actividad se prevé llevar a cabo (con respecto a las consignas presentadas en el apartado 3.2), mediante qué modalidad de trabajo y con cuánto tiempo (teniendo en cuenta que la duración de la clase, como se dijo, es de 2 horas reloj).

Tabla 3.1. Actividades, modalidades y tiempos previstos para cada encuentro de trabajo

Encuentro	**Actividad**	**Modalidad**	**Tiempo**
0 13/09/17	Tarea (para la próxima clase): leer el caso “La insoportable fealdad del Subaru”.	Individual.	
1 20/09/17	Consigna 1, con puesta en común. Consigna 2, con puesta en común.	Individual, en clase.	30 min
	Consigna 3. Tarea (con entrega a lo sumo dentro de cinco días): terminar Consigna 3.	Grupal, comienza en clase y termina de tarea.	90 min
2 27/09/17	Devolución de la Consigna 3.	Grupo-clase	30 min
	Consigna 4, con puesta en común.	Grupal, en clase.	60 min
	Consigna 5. Tarea (para la próxima clase): leer el apartado relativo al método de casos en Litwin (2008, pp.94-102).	Grupal, comienza en clase y continúa la clase siguiente.	30 min
3 04/10/17	Consigna 5. Tarea (con entrega a lo sumo dentro de cinco días): terminar Consigna 5. Tarea (para la próxima clase): leer los casos diseñados por los otros grupos.	Grupal, en clase y termina de tarea.	120 min
4 11/10/17	Consigna 6, con puesta en común.	Grupal, en clase.	100 min
	Consigna 7. Tarea (con entrega a lo sumo dentro de cinco días): terminar Consigna 7.	Individual, en clase y termina de tarea.	20 min
5 18/10/17	Devolución Consigna 7.	Grupo-clase	30 min

Fase 3: Experimentación. Implementación. En el marco de esta tesis, esta fase comprende relatos de lo acontecido en las clases de PEIII en las que se desarrolla la experiencia. Comprende la puesta en escena de la secuencia diseñada y consiste en la observación de comportamientos y respuestas de los estudiantes frente a las mismas. A continuación, se presenta sucintamente lo sucedido en cada encuentro (cabe informar que la asistencia de los estudiantes fue perfecta):

Para el *primer encuentro* los alumnos debían tener leído el relato "La insoportable fealdad del Subaru" (Wassermann, 1994) para esta clase. Se realizó la presentación de la tesista y una breve introducción al nuevo bloque de trabajo que comenzaba. Se les entregó las primeras dos consignas juntas. Se les pidió que, individualmente, las leyeran y las contesten. Se les comunicó que el plazo era de 30 minutos y que luego se haría una puesta en común. Al principio se los notó desconcertados o confundidos respecto a lo que se hacía referencia en la consigna. Algunos preguntaron "¿qué quiere decir 'una idea determinista'?; otros simplemente no sabían qué tenían que hacer. Se contextualizó la consigna, haciéndose notar que lo citado era el inicio de lo presentado en el DCJ relativo al eje de interés. Este contexto ayudó a los estudiantes a adentrarse en la consigna y continuar trabajando. La consigna 2 generó menos dificultad en cuanto a la interpretación, pero les generó incertidumbre respecto a qué contestar. Algunos no sabían si deberían entregar una planificación desarrollada o solo comentar qué harían. Para contextualizar se les planteó "supongan que deben hacer un reemplazo por un par de semanas y les toca dar el tema: "'determinación empírica incluyendo casos sencillos que involucren un conteo ordenado sin necesidad de usar fórmulas' (leyendo de la consigna), ¿qué harían?". Nuevamente, esto ayudó a establecer el contexto que necesitaban. Cuando terminaron de contestar las consignas, se realizó una puesta en común. A continuación. se les preguntó si encontraban alguna relación entre las consignas que acababan de responder con la lectura que hicieron para ese día. La mayoría respondió que cuando leyeron el relato no sabían cuál era la finalidad. Se les comentó que el relato fue extraído del libro "El estudio de casos como método de enseñanza" de Selma Wassermann (1994). A continuación, se les pidió que formen cuatro grupos (dos de cuatro y dos de tres estudiantes, denominados en lo que sigue G1 a G4) y que respondan las preguntas que la autora propone en su libro (consigna 3). Se les entregó copia de las preguntas y se los dejó trabajar. Los estudiantes se acomodaron en los grupos y comenzaron así a leer y debatir las consignas. Antes de finalizar la clase, se recolectaron las respuestas individuales a las consignas 1 y 2, para su posterior análisis. Como no habían terminado de contestar las preguntas (como también estaba previsto) se acordó que, como era habitual en su forma de trabajo, se debían entregar las respuestas vía plataforma virtual en un plazo de cinco días (esto es, para el lunes siguiente).

El *segundo encuentro* comenzó con la devolución a la resolución que cada grupo realizó del caso propuesto (respuestas a las preguntas de la consigna 3). Se recorrieron las ocho preguntas, una a una, y se fueron comparando las respuestas de cada grupo. Incluso se leyeron textualmente algunas respuestas particularmente interesantes. A medida que se fueron analizando las respuestas, la docente a cargo iba anotando en el pizarrón las variables que se tuvieron en cuenta, se agregaron nuevas y se contaron experiencias personales de casos relacionados. La última pregunta solicitaba recomendar un auto para el personaje del caso, Bonnie. Para sintetizar las respuestas se elaboró un cuadro en el pizarrón, donde se indicó la elección realizada por cada grupo. Dado que, basado en sus argumentos cada grupo recomendó un auto diferente, se pudo observar claramente que, ante una misma situación, pueden existir diversas soluciones, todas igualmente válidas.

Luego se preguntó a los alumnos "¿qué objetivos podría perseguir este caso en particular?". Esto dio lugar a la necesidad de introducir las "notas para el docente", es decir, los objetivos para los cuales se elaboró el caso. Con la intención de ir formalizando algunos conceptos, se hicieron explícitas las partes constituyentes de un caso para ser utilizado como método de enseñanza, tales como las notas para el docente, el caso en sí y las preguntas críticas. Se hizo entrega de la consigna 4, en la que los estudiantes debían pensar cuáles fueron las notas para el docente que Wassermann (1994) había propuesto para el caso. Se dispuso para ello de un tiempo aproximado de 30 minutos. Luego se procedió a la lectura de las notas elaboradas por los cuatro grupos con su respectivo análisis reflexivo. Se hizo entrega y lectura de las notas para el docente que figuran en la obra de referencia.

> Notas para el docente del caso La insoportable fealdad del Subaru (Wassermann, 1994, p. 276)
> En este caso se examina un concepto matemático: la noción de Probabilidad. Una alumna de secundaria enfrenta el problema de decidir qué auto comprarse, para lo cual deberá tomar en cuenta variables como el costo, la economía de operación, las tasas de interés, el valor de lo que recibe a cambio de su dinero y la probabilidad de un funcionamiento mecánico libre de desperfectos. Además, estas variables se yuxtaponen y se confunden con las preferencias personales de la compradora.
> En este caso, la noción de Probabilidad permite establecer, sobre base matemática, la posibilidad de que un auto sufra desperfectos mecánicos. Otras funciones matemáticas de aplicación en el caso incluyen el cálculo de los intereses, del costo de operación y de la relación entre valor y costo.
> Entre las grandes ideas que sirven de fundamento a este caso se incluyen las siguientes:
> 1. el empleo de la Matemática puede influir en la decisión que se adopte sobre una compra;
> 2. la noción de Probabilidad permite predecir los resultados de ciertos acontecimientos;
> 3. los datos obtenidos se emplean para calcular la probabilidad. Cuanto mayor sea la cantidad de datos, más confiable será, por lo general, la predicción;
> 4. cuando se calcula la probabilidad, es importante identificar las suposiciones subyacentes;
> 5. en los cálculos matemáticos, la razón y la lógica pasan a veces a segundo plano en presencia de adhesiones emocionales.

A continuación, se propuso la consigna 5, acompañada con un esquema de características básicas que debería tener un caso para ser utilizado en la enseñanza (Fig. 3.1), que se analizó conjuntamente. Manteniendo los mismos grupos, los estudiantes se pusieron a trabajar sobre la consigna en cuestión, la cual se debía continuar en el encuentro siguiente (a desarrollarse en el laboratorio de informática, para tener a disposición computadoras y conexión a Internet). Antes de finalizar la clase, se recolectan las respuestas grupales a la consigna 4 para su posterior análisis.

CARACTERÍSTICAS DE UN CASO

Características del caso:
- Nota para el docente.
- Preguntas críticas.
- Interrogatorio sobre el caso.
- Actividades de seguimiento.

Criterios para la elección de un caso:
- Concordancia con los temas del currículum.
- Calidad del relato.
- Lecturabilidad.
- Sentimientos intensos.
- Acentuación del dilema.

Reglas de la narrativa de un caso:
- Tener un comienzo intrigante.
- Centrarse en sucesos importantes.
- Intensificar puntos de vista conflictivos.
- Generar interés por los personajes.
- Tratarse de casos creíbles.
- Concluir con un dilema.

A la hora de escribir, pensar:
- La "gran idea".
- La historia.
- Los personajes.
- El dilema.

Las preguntas deben:
- Ser claras.
- Evitar abstracciones.
- No ser sugerentes.
- No poderse responder con Sí/No.
- No ser generales.

Figura 3.1. Características de un caso como metodología de enseñanza

Durante el *tercer encuentro* los estudiantes tenían como consigna continuar con la elaboración de un caso por grupo (notas para el docente, relato y preguntas críticas) para la enseñanza de Probabilidad, a nivel introductorio en los primeros años de la escuela secundario. Como la consigna se había presentado al final del encuentro anterior, los alumnos contaron con una semana para ir pensando en ideas disparadoras para los casos a elaborar. Una vez dispuestos en pequeños semicírculos frente a las computadoras, cada grupo comenzó su debate e intercambio interno para la actividad en cuestión. Se atendió a las dudas que fueron surgiendo. Ya avanzado el trabajo, se realizó una intervención por grupo, con preguntas. Dado que el objetivo del caso era que permita un aprendizaje, en particular de probabilidad, y no solo una lectura narrativa se les preguntó: ¿Qué posibles vinculaciones matemáticas posteriores tendrá lo que se desarrolle mediante este caso? ¿Cuál es la intencionalidad matemática que sustenta el caso? Estas preguntas tuvieron como finalidad poner en evidencia que la elaboración del caso debe ser con una intención y que, además, aquello aprendido no solo sirva para la situación planteada, sino para fomentar un tipo de pensamiento (no determinista). De los cuatro grupos, solo uno había comenzado planteando las notas para el docente. Dado que el caso debe ser acorde a un nivel medio, el dilema planteado en el caso debe ser tal que los alumnos puedan vincularse y de ese modo generar respuestas o soluciones pensadas. Para eso se les realizó preguntas como: ¿En qué sentido consideran que los estudiantes se sentirán movilizados a abordar el caso? ¿Qué supuestos pueden llegar a replantearse o sorprenderlos? ¿Cuán acorde resulta a adolescentes de secundaria? También se les preguntó: ¿Qué recursos utilizan? ¿En qué materiales se basaron para planificar? A modo de cierre de la clase, se realizó un repaso de algunos conceptos sobre la metodología de casos, remarcando las partes que lo constituyen, y se les recordó que disponían del esquema entregado en el encuentro anterior como estructura para la elaboración del caso. El plazo de entrega se fijó en cinco días, como era habitual. Antes de finalizar el encuentro se solicitó la lectura de los casos elaborados por los otros grupos para la próxima clase.

En el *cuarto encuentro*, al llegar al aula, los alumnos se dispusieron en los grupos en los que habían estado trabajando en los encuentros anteriores. Todos habían realizado la lectura de los casos elaborados por el resto de los compañeros, que estaban disponibles en la plataforma virtual desde el día anterior. Los títulos de los casos elaborados fueron: “Pasaje a Rusia”, “¿El viaje de tu vida?”, “Nadando en un mar de posibilidades” y “¡Faltan 336 horas para el verano!”. En esta clase cada grupo debía resolver uno de los tres casos restantes (consigna 6). Dado que dos de los cuatro casos hacían referencia a viajes y los otros dos a deportes, se decidió que los dos grupos que habían elaborado un caso referido a viajes resuelvan el otro caso referido a viajes (análogamente para los casos de deportes). Se les dio un poco más de una hora para resolver el caso asignado, desde un rol de alumno, y pensar una retroalimentación a modo de colega docente para el que formuló el caso. Los estudiantes fueron muy cuidadosos al hacer la retroalimentación a “sus colegas”, resaltando las partes positivas y con respeto dieron los puntos a mejorar. Incluso usaron como guía el esquema de lo que debería tener un caso (Fig. 3.1) para realizar la retroalimentación. Se realizaron bocetos de las resoluciones matemáticas respectivas, en términos de planteos de posibles diagramas de análisis con las variables involucradas. Luego de que todos los grupos hicieran su devolución, se procedió al cierre de la clase, donde se contextualizó el método de casos y se realizó una síntesis conceptual relativa a las tres partes que constituyen un caso, haciendo hincapié en qué finalidades tienen, cuáles son las características de cada una y qué cuestiones conviene tener en cuenta para la elaboración de un caso para la enseñanza en general y de nociones básicas del eje de Probabilidad y Estadística en particular. Luego se solicitó a los alumnos que de manera individual respondan la consigna 7 fundamentando de manera completa. La respuesta se debía subir a la plataforma virtual en un plazo de cinco días, como de costumbre. Antes de finalizar la clase, se recolectan las respuestas grupales a la consigna 6 para su posterior análisis.

Al inicio de la clase siguiente, como parte de un *quinto encuentro*, se realizó la devolución al grupo clase de las respuestas a la última consigna del instrumento aplicado, dándose por finalizada la experiencia en terreno.

Fase 4: Análisis a posteriori. Interesa interpretar la experiencia a través de la información recabada, consistente en producciones escritas de los estudiantes[1], en registros de audio de sus intervenciones orales así como notas de campo de la tesista de lo sucedido en las clases. Concretamente esta fase se corresponde con la etapa de procesamiento de la información, llevada a cabo mediante la técnica de análisis de contenido (Ander-Egg, 2003) con el agrupamiento de la información de acuerdo a las categorías de análisis (apartado 3.4).

Las producciones escritas se analizaron identificando semejanzas y diferencias, agrupando las respuestas según modalidades no predeterminadas, sino emergentes de los datos. Dentro de una misma respuesta pudo identificarse más de una modalidad, por lo que cada respuesta se desglosó en tantos fragmentos como modalidades se identificaron. Las grabaciones de los encuentros se transcribieron como refuerzo de las respuestas brindadas por los alumnos. Las notas de las clases sirvieron para contextualizar las desgrabaciones de los encuentros.

3.4. Sistema de Categorías de análisis

En correlación con los objetivos propuestos y el marco teórico adoptado, el estudio se estructuró desde tres dimensiones de interés:

- Pensamiento no determinista en la matemática escolar.
- Enseñanza de Probabilidad en primer año.
- Análisis de casos.

Cada una de ellas, a su vez, comprendió dos categorías de análisis que sirvieron de nexo entre la intencionalidad declarada en la investigación y el dato empírico recogido a través de las consignas propuestas a los estudiantes (1 a 7, instrumento presentado en el apartado 3.2). Las modalidades emergentes (agrupamientos de respuestas según similitudes semióticas) se presentan directamente en los resultados (Capítulo 4). En la Tabla 3.2 se presenta el sistema de categorías de análisis; también se explicitan las consignas del trabajo mediante las que se recolectó información.

[1] Resumiendo lo consignado en la Tabla 3.1, cabe señalar que tres consignas se respondieron de manera individual (consignas 1 y 2 manual en clase; 7 digital vía plataforma) y cuatro de manera grupal (4 y 6 manual en clase; 3 y 5 digital vía plataforma).

Tabla 3.2. Sistema de categorías de análisis

<table>
<tr><th>Dimensiones</th><th colspan="2">Categorías</th><th>Consignas</th><th>Dominios MKT</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Pensamiento no determinista en la matemática escolar.
Los estudiantes comparten sus percepciones del concepto determinista, al que hace referencia el DCJ, en dos instancias: al inicio y al finalizar el desarrollo del método de casos como metodología de enseñanza.</td><td colspan="2">Desde la propia experiencia</td><td><u>Consigna 1</u>. En el Diseño Curricular vigente se menciona “Históricamente el pensamiento matemático se ha basado en una idea determinista que ha excluido la intervención de aquellas variables que daban lugar a procesos no predecibles desde las soluciones que la Matemática aportaba, idea que ha sido reforzada desde las matemáticas escolares”. Compartí tu propia experiencia escolar al respecto, argumentando o dando ejemplos.</td><td rowspan="2">Conocimiento en el horizonte matemático (HCK)
Conciencia matemática del futuro profesor en cuanto a las peculiaridades del pensamiento no determinista, ya sea a priori de la experiencia como a posteriori.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Con aportes del método de casos</td><td><u>Consigna 7</u>. ¿En qué considerás que puede aportar esta metodología de enseñanza a las clases de Matemática de la escuela secundaria y al pensamiento no determinista en particular? Fundamentar de la manera más completa posible.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Enseñanza de Probabilidad en primer año.
Los estudiantes comparten de qué manera propondrían enseñar Probabilidad al inicio de la escolaridad secundaria, en una primera instancia de manera espontánea y luego mediante la elaboración de un caso.</td><td colspan="2">De modo espontáneo</td><td><u>Consigna 2</u>. Te estás desempeñando como profesor en un primer año de secundaria y disponés de un par de semanas para trabajar Probabilidad. ¿Cómo lo harías? Recordemos qué dice el Diseño Curricular en cuanto a los contenidos a abordar al respecto en dicho año: “Situaciones problemáticas extramatemáticas que permitan a los estudiantes interpretar y elaborar información: (…) Probabilidad: determinación empírica incluyendo casos sencillos que involucren un conteo ordenado sin necesidad de usar fórmulas”.</td><td rowspan="2">Conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS)
Conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT)
Decisiones en torno a una enseñanza que pueda sostener los aprendizajes relativos a Probabilidad en una etapa introductoria en la escuela secundaria, tanto espontáneamente como mediante una metodología en particular (caso).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Con un caso</td><td><u>Consigna 5</u>. Elaboren un caso, con todas sus partes, que propenda a iniciar el trabajo con contenidos relativos a Probabilidad en primer año de la escuela secundaria.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Análisis de casos.
Los estudiantes trabajan con el método de casos, resolviendo un caso clásico de la bibliografía y un caso elaborado por sus propios compañeros.</td><td rowspan="2">De la bibliografía</td><td>Respuestas a las preguntas críticas</td><td><u>Consigna 3</u>. En base a la lectura del caso, respondan las siguientes preguntas críticas (Wassermann, 1994).</td><td rowspan="3">Conocimiento especializado del contenido (SCK)
Desmenuzamiento específico de las características de un pensamiento de tipo no determinista en pos a favorecer los procesos involucrados.</td></tr>
<tr><td>Notas para el docente</td><td><u>Consigna 4</u>. En grupo, propongan las “notas para el docente” que consideren necesarias para el caso “La insoportable fealdad de Subaru”.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Elaborados por compañeros</td><td><u>Consigna 6</u>. Resuelvan uno de los casos propuestos por sus compañeros como si fueran alumnos. Luego, posicionándose como colegas, realícenles una retroalimentación acerca del caso por ellos elaborado, consignando: título del caso; autores del caso; resolución (como alumnos); retroalimentación (como colegas).</td></tr>
</table>

Las dimensiones de análisis, a su vez, están delimitadas por los subdominios del *MKT* de interés en esta tesis. De este modo, las propias percepciones de los futuros profesores acerca del significado de la noción de pensamiento no determinista en la Matemática de la escolaridad secundaria, tanto antes (consigna 1) como luego (consigna 7) de la experiencia, dan indicios de cómo se activa el subdominio del *HCK* y en qué nivel de desarrollo se encuentra. También, que los estudiantes pueden explayar sus propios modos de resolución de casos propuestos, tanto de la bibliografía (consigna 3) como de compañeros (consigna 6), y pensar intencionalidades matemáticas formativas al respecto (consigna 4), da cuenta de su *SCK* dado que deben desempaquetar su pensamiento no determinista puesto en juego.

En lo relativo al dominio del *conocimiento didáctico del contenido*, los futuros docentes de Matemática son invitados a idear la enseñanza de Probabilidad en primer año de secundaria (*KCT*) para sostener, favorecer y sobrellevar dificultades en los aprendizajes de los estudiantes del nivel (*KCS*). Esto se realiza tanto espontáneamente (consigna 2), con base en los conocimientos previos de los estudiantes de Práctica de la Enseñanza III, como con una metodología especialmente solicitada: caso (consigna 5), de interés en la presente investigación.

CAPÍTULO 4 - Resultados

En este capítulo se presentan los hallazgos del estudio, mediante tres apartados que se corresponden con las tres dimensiones de análisis, cada una de las cuales a su vez se divide en dos subapartados, de acuerdo a las categorías de análisis presentadas en la Tabla 3.2. Se van intercalando transcripciones textuales de la información recogida (tanto de producciones escritas de los estudiantes como de intercambios orales en clase), agrupados según las modalidades emergentes, con comentarios a modo de análisis por parte de la tesista.

4.1. Pensamiento no determinista en la Matemática escolar

En esta dimensión se articula un análisis descriptivo-interpretativo de las respuestas de los participantes de la investigación, así como intercambios orales producidos en el grupo-clase respecto al pensamiento no determinista desde dos perspectivas recogidas al inicio y finalización de la experiencia en clase en el marco de esta investigación: la experiencia personal escolar (subapartado 4.1.1) y los aportes del método de caso (subapartado 4.1.2).

4.1.1. Desde la propia experiencia

Los estudiantes debieron responder la *consigna 1* del instrumento presentado en el apartado 3.2 que plantea:

En el Diseño Curricular vigente se menciona "Históricamente el pensamiento matemático se ha basado en una idea determinista que ha excluido la intervención de aquellas variables que daban lugar a procesos no predecibles desde las soluciones que la Matemática aportaba, idea que ha sido reforzada desde las Matemáticas escolares". Compartí tu propia experiencia escolar al respecto, argumentando o dando ejemplos.

En un primer momento fue posible percibir cierta desorientación respecto a qué significado tenía la palabra "determinista" en el extracto del DCJ que se compartía en la consigna. Pudo encauzarse con ayuda de la tesista.

> 1.E.18[2]: Julia, estamos teniendo problemas, porque no entendemos este párrafo. No entendemos qué quiere decir.
> 1.T.19: ¿Quieren que lo leamos en voz alta?
> 1.E.20: Sí.
> 1.T.21: Dale, lo leemos en voz alta. Dice: "En el Diseño Curricular vigente se menciona 'Históricamente el pensamiento matemático se ha basado en una idea determinista que ha excluido la intervención de aquellas variables que daban lugar a procesos no predecibles desde las soluciones que la Matemática aportaba, idea que ha sido reforzada desde las matemáticas escolares'. Compartí tu propia experiencia escolar al respecto, argumentando o dando ejemplos". Es decir, lo más importante es la idea de esta cuestión determinista que plantea el pensamiento histórico que se ha tenido sobre la Matemática, eso de que la Matemática es dos más dos es cuatro,

[2] El código "ni.S.nj" refiere a "ni" número de encuentro (i=1, 2, 3, 4, 5); "S" sujeto que habla (docente a cargo (D1); ayudante (D2); adscripta (D3); tesista (T); estudiante (E)); "nj" número de acto de habla de la clase.

¿sí?, ese es un pensamiento determinista. ¿Cuál es la diferencia entre algo determinista o aleatorio? Esa cuestión de que la Matemática dé lugar a procesos no predecibles desde la solución matemática. Cuando una situación no tiene una solución que es predecible. ¿Se han encontrado con situaciones así, en cuanto a la enseñanza que han tenido ustedes en su escolaridad? Esta frase es sacada del Diseño Curricular, pueden estar de acuerdo, como no con lo expresado.
1.E.22: ¡Ah! (como recordando).

De las respuestas de los 14 estudiantes se reconocen cuatro grupos de experiencias (modalidades emergentes). Se las presenta ordenadas de mayor a menor frecuencia de aparición: determinismo como conductismo (1.M1); falta de formación en Estadística y Probabilidad (1.M2); presencia de Estadística y Probabilidad en la escolaridad secundaria (1.M3) o en actividades extracurriculares (1.M4).

Un tipo de experiencia hace referencia a la **modalidad de trabajo que utilizaron sus profesores** de Matemática en la escolaridad secundaria, en la que los estudiantes describen o asocian el concepto de “determinista” con conductista (1.M1).

Relacionado al contenido escolar que recibí, considero que en el día a día, dentro de la asignatura Matemática este era determinista, ***no consideraba opiniones o distintas soluciones*** *a problemas planteados por el docente (...) (E2).*

Creo que lo que menciona el Diseño Curricular, se da generalmente en la escuela, la Matemática escolar suele ser determinista. Se me viene a la cabeza, cuando yo estaba en el secundario que por ejemplo resolvíamos ecuaciones o algún trabajo algebraico. ***La única forma*** *de resolverlo era como lo planteaba la docente y no se tenían en cuenta otras maneras de llegar al mismo resultado o como uno ya estaba acostumbrado a resolver ciertas cosas de una forma determinada, no se te ocurría llegar por otro lado (...) (E3).*

En mi experiencia escolar me ha pasado que ciertas materias daban consignas muy específicas a la hora de ponernos en acción. En Matemática particularmente, algunos años fueron más cerrados que otros, y el contenido se aplicaba directamente en la práctica, ***sin variables que nos muevan a sacar conclusiones diferentes****. Un año en particular, 4ª año, me encantó cómo la Matemática fue encarada por la docente a cargo, quien presentaba los temas de forma muy interesante, y mediante preguntas (al hacernos trabajar el contenido) nos hacía repensar lo previamente visto en otras circunstancias (con otras variables) (E4).*

Con respecto a mi experiencia escolar la enseñanza se basaba en una idea determinista ya que la profesora explicaba el tema que se había desarrollado y de qué manera resolver los ejercicios lo cual ***no daba lugar a una construcción propia del conocimiento****. Por ejemplo, cuando dimos perímetros y superficies la profesora planteaba problemas para resolver pero todos llegábamos a la* ***misma respuesta*** *ya que era solamente analizar lo que el ejercicio decía y aplicar la fórmula que había sido explicada previamente (...) En mi opinión, generalmente la enseñanza de la Matemática está basada en una idea determinista ya que consiste en* ***ejercicios de resolución única y exacta y no de respuestas distintas*** *con las cuales los alumnos puedan discutir acerca de ellas y a partir de las cuales se puedan generar otros conocimientos (E5).*

Desde mi propia experiencia evidencio la veracidad de esta frase ya que en mi propia escolaridad, especialmente la secundaria, el pensamiento matemático y su enseñanza estaba centrada en meras fórmulas y cuentas que había que aplicar en situaciones o ejercitaciones que no contaban con una interpretación o dificultad; simplemente se trataba de ejercicios donde, utilizando la fórmula, había que reemplazar las variables por los datos y resolver la cuenta para lograr llegar a una ***solución única*** *y numérica que responde a la situación. Nunca se encontraban problemas con casos, ni problemas que no tengan solución, ni problemas que cuenten con varias soluciones, ni problemas donde se deban aplicar conocimientos ya aprendidos, integrados y moldeados a la situación que se quiere resolver (E6).*

> *En general, en mi experiencia escolar, se enseñaba Matemática exponiendo* **resultados ya acabados** *para luego aplicarlos en ejercicios o situaciones que pretendían ser problemas. Creo que esta metodología corresponde a una concepción de la Matemática como una disciplina estática, ya acabada, la cual tenemos que aceptar y reproducir porque ya la "descubrieron" grandes genios, y son estos los únicos que aportan grandes avances (...) (E7).*
>
> *Lo que recuerdo de mi experiencia escolar, la Matemática estuvo basada en una idea determinista, donde cada concepto, propiedad, teorema era aplicado hacia una situación en particular y constaba de una* **única solución**. *Lo que me quedó de la Matemática en la secundaria fue una idea de que cualquier problema o situación tenía una* **única respuesta** *(...) (E8).*
>
> *En la escuela viví la Matemática como determinista ya que los ejercicios que nos daban eran de aplicación y no de resolución de problemas. No nos enseñaban a dudar, a cuestionar ciertas proposiciones o propiedades, sino que le creíamos fielmente lo que la docente dictaba. Creo que hoy en día esto se sigue viendo. La mayoría de las soluciones eran con única solución y cuando nos daba un número "feo" como por ejemplo 3pi raíz de 5 pensábamos que estaba mal (...) (E9).*
>
> *Considero que en la escuela la forma de dar Matemática es determinista, nos transmite la idea que para la mayoría de los temas voy a poder encontrar* **una solución o una respuesta exacta**, *todo siguiendo un razonamiento lógico (...) (E14).*

Se puede observar en las respuestas la relación que establecen entre el concepto "determinista" y la existencia de una única solución, un resultado acabado o una forma única y definida por el docente de resolver problemas. Los siguientes extractos de actos de habla de un par de estudiantes en el momento de puesta en común en el encuentro 1, luego de haber respondido la consigna, refuerzan estas apreciaciones:

> 1.E.42: Lo que yo entiendo por determinista, es algo que bueno, es así, y no se da libertad a que pase alguna otra cosa, entonces lo poco que pude escribir, o sea, no tengo algún recuerdo de alguna clase. Sí (con énfasis) me acuerdo de que No (con énfasis) pasé otra cosa. O sea, que la profesora nos daba la actividad, **ella nos daba los ejemplos**, no es que por ahí nos decía "bueno… a ver… aporten" o nos preguntaba qué se nos ocurría para algún tema. Las actividades las traía ella y se hacían esas. Entiendo que lo contrario sería que el alumno pueda aportar, pueda proponer, algo, algún ejemplo, o trabajar de otra forma.
> (...)
> 1.E.61: Yo puse que en las ecuaciones cualquier cálculo algebraico siempre tenía **una sola forma** de llegar a la solución y era como, vos lo venías haciendo como el docente lo planteaba, de esa forma… Como que no tenías otra posibilidad de llegar.

Al respecto se advierte un sesgo en las asociaciones establecidas. Posiblemente los estudiantes no hayan espontáneamente reparado en una delimitación epistemológica del término "(no) determinista".

A la característica de "necesariamente determinado por las condiciones iniciales y cadena de acontecimientos anteriores" (RAE) la asociaron con un comportamiento tipo estimulo-respuesta en términos de metodología de enseñanza.

La presencia clave de la aleatoriedad en la variación de los datos intervinientes de la situación (para ser considerada no determinista) estuvo ausente.

También cabe señalar que determinismo y conductismo son independientes/no son sinónimos entre sí (pueden encontrarse clases en las que se trabaja conceptos no deterministas, pero desde un enfoque conductista y viceversa).

Además, se confunde "variabilidad en los datos" (que potencialmente conlleva a resultados distintos, independientemente del método en un contexto no determinista) con "diversidad en las formas de resolución" (que inevitablemente llevan al mismo resultado en un contexto determinista).

Por ejemplo, si en Matemática se desea calcular el área de una región delimitada por una curva sobre un intervalo $[a,b]$ y se conoce la expresión analítica de la curva, la respuesta será única. En cambio, si se usan métodos aproximados, puede haber variación en las respuestas, según el procedimiento o método usado para aproximar (o incluso el mismo método con otra partición). Esta variación no se encuadra dentro de lo no determinístico. Distinto sería cuando se mide una magnitud (longitud, peso) y hay variación en los resultados, con el mismo instrumento, por factores que no se pueden controlar.

Un grupo de siete estudiantes comparten su experiencia de **no haber recibido formación** alguna relativa al eje de Estadística y Probabilidad (1.M2).

> ***Mi experiencia escolar no me trae recuerdos de haber tenido clases de Probabilidad y Estadística****. Pienso que la causa es porque son contenidos que durante la formación docente no se trabajan para explicar a los alumnos, no se enseñan prácticas de enseñanza para que se puedan transmitir estos contenidos al curso. Y al no tener estas herramientas, a la hora de explicar, el docente no sabe de qué modo. Como el programa, en general, no se termina de dar, estos temas los van pasando por alto, los evitan (E1).*
>
> *(...) En mi caso **nunca tuve Probabilidad en la escuela** (...) (E5).*
>
> *Además, **nunca di los temas de Probabilidad en todo el secundario**; recién los conocí en la facultad. En primer año de la facultad, específicamente en álgebra a una gran mayoría le costó el tema "combinatoria" que supongo se debe a lo anterior (E9).*
>
> *En mi propia experiencia escolar **no recuerdo haber tenido** otro tipo de Matemática que no sea determinista. Hoy en día en otras escuelas de mi pueblo observo por las redes sociales que llevan a los alumnos de distintas olimpíadas, una de ellas de Matemática. Creo que hubiera estado bueno que se hubiese hecho eso en la escuela en que transcurrí la secundaria ya que los problemas que se realizan en las olimpíadas dan otro*
> *punto de vista de la Matemática. En mi curso a la mayoría de los compañeros no les gustaba Matemática y pienso que uno de los motivos puede ser que siempre la dieron de forma determinista (E10).*
>
> ***No recuerdo un ejemplo en particular**, sí tengo la imagen de los docentes proponiendo las actividades y dictando las clases de formas expositivas sin darnos la libertad de proponer ejemplos, actividades o distintas formas de trabajar, lo que daría lugar, a mi criterio, de dar lugar como dice el Diseño a procesos no predecibles (E11).*
>
> *Durante mi escolaridad la Matemática fue enseñada a partir de problemas donde no intervenía la incertidumbre. **No me enseñaron Probabilidad y Estadística durante la secundaria**, donde habría situaciones problemáticas de este tipo. Mi primer contacto con problemas donde había que*

experimentar, por ejemplo, tirando una moneda y anotando lo que salía, cara o cruz sucesivas veces, fue en la facultad (E12).

De mi secundaria, recuerdo que en 1º y 2º año la materia Matemática se basó en realizar operaciones combinadas. En 3º año racionalización y también radicación y potencia y en 4ª año funciones (muy básico). (5ª año no había Matemática). ***Problemas sobre Probabilidad, durante la secundaria, no recuerdo haber visto****. Así que sí, en mi secundaria la Matemática era determinista (E13).*

En efecto, en la instancia de puesta en común un estudiante remarca:

1.E.46: Sí, de funciones dimos hasta derivadas e integrales, que por ahí no todos dieron; básico, pero dimos, pero **Probabilidad, y Estadística, nada. Y Combinatoria... ¡cero!** (con énfasis).

En concordancia con las respuestas de los estudiantes se encuentran las problemáticas resumidas por Burbano (2016) -subapartado 1.4.1- en torno a la enseñanza de la Probabilidad, como ser: el escaso conocimiento de los profesores, la omisión del tema en el currículum de secundaria, la escasez o ausencia de cursos sobre tratamiento de la Probabilidad y su didáctica en la formación de profesores, los enfoques de los libros de texto conservan una concepción clásica, los docentes lo consideran difícil de enseñar.

Sobre este punto se desea remarcar que el hecho de haber cursado/tenido una materia (o parte de ella) destinado al eje Estadística y Probabilidad, no garantiza que haya habido aproximaciones a un tipo de pensamiento no determinista. En efecto, una clase de este eje puede llegar a ser tan determinista como cualquier otra rama de la Matemática escolar.

En particular E9 considera que dio Probabilidad en primer año de la Facultad cuando vio Combinatoria. Posiblemente haya calculado casos favorables sobre casos posibles en el juego del Quini 6. De allí la asociación, en tanto la Combinatoria “al servicio de” la Probabilidad.

Tres comparten experiencias que refieren a la **presencia de Estadística y Probabilidad** durante su escolaridad secundaria (1.M3). Dos en particular recuerdan un enfoque centrado en las medidas de tendencia central (media, moda, mediana) con un predominio del uso de fórmulas:

(...) ***Solo en el último año****, dentro de la materia Estadística, tuve un acercamiento más hacia modelos aleatorios, aunque se veía opacado por el excesivo* ***uso y predominio de fórmulas*** *que había que aplicar sin entender realmente la esencia del contenido o la resolución de los problemas (E2).*

*(...) E****n 5º año*** *tuve Probabilidad y Estadística, mucho no recuerdo, pero el profesor nos había dado un* ***apunte con los nombres de la media, varianza****, y todas definiciones, pero no nos traía muchos ejemplos concretos en donde nosotros podamos aplicarlos (E3).*

Este estudiante comenta en el encuentro en clase:

1.E.54: Nosotras sí [estudiaron Estadística y Probabilidad en el secundario], pero lo único que recuerdo es que el profesor me dio **un apunte con lo que significaba, la media, la moda**.

El restante, si bien habla de escasez de lo trabajado, resulta más alentador:

> *(...) A pesar de que tenía esa idea sobre la Matemática* ***en 5º año di Probabilidad y Estadística (muy poco)*** *en donde ves que un problema puede tener más de una solución lógica, o que de acuerdo a tomar ciertas decisiones podés llegar a distintos resultados pero que todos están bien (E14).*

Los tres estudiantes que compartieron haber tenido Estadística y Probabilidad en el secundario coinciden en que los contenidos desarrollados fueron escasos, abordados con poca profundidad y desarrollados solo en el último año, a diferencia de lo establecido en el DCJ.

En el DCJ el eje Estadística y Probabilidad se encuentra presente en todos los años de la educación media (como se detalla en el subapartado 2.2.3), donde los contenidos a abordar parten de "determinación empírica [de una probabilidad] incluyendo casos sencillos que involucren un conteo ordenado sin necesidad de usar fórmulas" en primer año; hasta llegar a "evaluación para la toma de decisiones en situaciones de juegos de azar y procesos económicos" en quinto año. Esto resulta acorde a una profundización gradual en espiral a lo largo de la escolaridad que difícilmente se logre en un único año escolar (en caso de estarlo).

En correlato con el DCJ, en relación con el eje Estadística y Probabilidad, los NAP establecen dentro del conjunto de saberes centrales, relevantes y significativos para el ciclo básico de Educación Secundaria "La interpretación y elaboración de información estadística en situaciones problemáticas que requieran (…) identificar diferentes variables (cualitativas y cuantitativas), organizar los datos" así como "El reconocimiento y uso de la Probabilidad como un modo de cuantificar la incertidumbre en situaciones problemáticas que requieran (…) comparar las probabilidades de diferentes sucesos incluyendo casos que involucren un conteo ordenado sin necesidad de usar fórmulas" (Ministerio de Educación de la Nación, 2006b, p.18).

Tres estudiantes también comparten experiencias de **actividades extracurriculares optativas**, como las Olimpíadas Matemáticas, en las cuales tuvieron la posibilidad de vivenciar una Matemática diferente a la que se desarrollaba en las clases habituales (1.M4).

> (...) *En cambio, en el ámbito optativo de las* ***Olimpíadas Matemáticas había un acercamiento a la Probabilidad*** *en particular, donde se veían problemas que no tenían solución inmediata, que muchas veces el procedimiento dependía de soluciones o decisiones tomadas anteriormente (...) (E2).*

> *(...) Por otro lado, en experiencias relacionadas a las* ***olimpíadas de Matemática*** *teníamos una preparación diferente, ya que al presentarse un problema no siempre teníamos el conocimiento teórico necesario para resolverlo directamente, entonces ensayábamos soluciones, que en general no es una sola, para luego comparar los razonamientos y en algunos casos hasta para buscar en la teoría con la guía de un docente (E7).*

> *(...) En 3º y 4º año* ***participé de las olimpíadas (OMA)*** *en las que se daban tres problemas de los cuales uno se enfocaba sobre la Probabilidad y Estadística donde se identificaban distintos casos y diversas maneras o caminos de hallar la o las soluciones. Este tipo de problemas me causaban mucha dificultad pues no eran tratados como se debían en la escuela (E8).*

En el momento de socialización expresaron:

> 1.E.49: Yo recuerdo que, llegamos a dar, por decirte, derivadas e integrales, pero nada de Probabilidad. **Sí en las olimpíadas, Combinatoria**.
> 1.E.50: **¡Sí!, en las olimpíada**s lo que más me costaba era Combinatoria, era lo que más me complicaba porque justamente en la escuela no di.

Los tres estudiantes comparten que durante su participación en las olimpíadas fue donde pudieron experimentar una Matemática distinta a lo tradicional, donde se encontraban con problemas o situaciones desde las que se podía desprender más de una solución, que a su vez podía depender de planteos anteriores, y para resolverlas por lo general necesitaban contenidos que no habían sido abordados durante la escolaridad secundaria.

Nuevamente predomina la cuestión metodológica del modo de hacer Matemática en el aula. Por otro lado, nombran a la combinatoria por estar incluida en el DCJ dentro del eje Estadística y Probabilidad; sin embargo, tal parte de la Matemática tiene una naturaleza determinista.

Para la Olimpíada Matemática Argentina (http://oma.org.ar/) el objetivo es que los alumnos de enseñanza media, incluso desde la primaria, descubran sus aptitudes teniendo una experiencia viva con el quehacer matemático.

En la Tabla 4.1 se sintetiza la distribución de las respuestas de los estudiantes (E1 a E14) en función a las cuatro modalidades emergentes (1.M1 a 1.M4).

Tabla 4.1. Distribución de las respuestas de los estudiantes a la consigna 1

Estudiante	1.M1 Determinismo como conductismo	1. M2 No formación en Estadística y Probabilidad	1. M3 Presencia en la escolaridad secundaria	1.M4 Presencia en actividades extracurriculares
E1		X		
E2[3]	X		X	X
E3	X		X	
E4	X			
E5	X	X		
E6	X			
E7	X			X
E8	X			X
E9	X	X		
E10		X		
E11		X		
E12		X		
E13		X		
E14	X		X	

De las modalidades emergentes, se observa que aquellas con mayor frecuencia son las de asociación del concepto de “determinista” con el de “conductista” y la no formación en Estadística y Probabilidad en el nivel secundario. Este panorama concuerda con lo establecido

[3] En la respuesta de un mismo estudiante se pueden reconocer partes que aluden a distintas modalidades. De allí que la respuesta completa de este estudiante, por ejemplo, esté asociada a tres modalidades.

en el DCJ: "*Históricamente el pensamiento matemático se ha basado en una idea determinista que ha excluido la intervención de aquellas variables que daban lugar a procesos no predecibles desde las soluciones que la Matemática aportaba"*(p.43) enfatizado aún en la Matemática que se vive en la escuela, lo cual dificulta el alcance de los principios establecidos en el currículum prescripto, tales como: "*Es importante resolver problemas que permitan el reconocimiento y uso de la probabilidad como modo de cuantificar la incertidumbre*"(p.43).

4.1.2. Con aportes del método de casos

Al finalizar la experiencia los alumnos debieron responder la *consigna 7* del instrumento (apartado 3.2) que dice:

¿En qué considerás que puede aportar esta metodología de enseñanza a las clases de Matemática de la escuela secundaria y al pensamiento no determinista en particular? Fundamentar de la manera más completa posible.

Del análisis de estas respuestas se pueden identificar cinco modalidades: metodología innovadora (2.M1), comunidad científica (2.M2), pensamiento crítico matemático (2.M3), rol docente (2.M4) y vinculación con otras disciplinas (2.M5).

Como **metodología de enseñanza innovadora** (2.M1), los 14 estudiantes resaltan particularidades contraponiéndolas con una enseñanza tradicional. Algunos de los atributos están enfocados con la posibilidad de vinculación con la realidad a través de situaciones de la vida cotidiana y otros lo asocian con lo no determinista [porque según los estudiantes, permite obtener, frente a un mismo problema, respuestas diversas y correctas simultáneamente lo que sugiere una concepción equivocada de la aleatoriedad].

> *(...) Es un método con el que se puede transmitir conocimientos o temas que **con otra metodología no se podría llevar a cabo** o se tornaría engorroso. Favorece a comprender conceptos complejos y profundos estimulando al alumno a que explore y descubra (...) Es por eso que el caso debe ser bien elegido, abordar un tema que despierte interés en la mayoría de los alumnos, para intentar que se compenetren en el mismo y de esa forma lograr el objetivo principal que es que aprendan y adquieran nuevos conocimientos a través de esa metodología de enseñanza, **distinta a la utilizada la mayoría de las veces**, quizás por una cuestión de tiempo o porque justamente no es fácil elegir y armar un óptimo caso. Considero que el método de casos es un modo de enseñanza en el que los alumnos construyen su aprendizaje a partir del análisis y discusión de experiencias y situaciones de la **vida real** (E1).*

> *La metodología de casos desarrollada a lo largo de las últimas cuatro clases considero que es una **manera ingeniosa** de mostrar a los alumnos que la Matemática no solo nos conduce a **respuestas únicas y exactas**. Ingeniosa en el sentido que mediante **situaciones de la realidad** logra intrigar al lector (alumnos de secundaria) mediante la descripción de sus personajes y los puntos de vista conflictivos de los mismos. A través de la lectura el propio alumno va formando su opinión, ponderando distintas variables de acuerdo a sus preferencias para así, llegar a su propia solución del dilema (...) Es entonces cuando se produce una especie de contradicción dentro del propio alumno, rompiendo con esa idea que **la Matemática nos conduce solo a respuestas precisas, exactas y sobretodo únicas** (...) (E2).*

> *Considero que la metodología de casos que vinimos trabajando en clases es muy rica en varios aspectos, uno de ellos es acercar a los estudiantes a la **vida real**, donde la comprensión de la teoría se da a partir del análisis de una **situación práctica**. (...) Cuando los estudiantes trabajan con el caso y*

analizan las distintas variables que aparecen en él, se dan cuenta que pueden diferir con sus compañeros y tener distintas opiniones y conclusiones, con esto ellos pueden ver que ***la Matemática no siempre tiene una respuesta única y exacta*** *(...) (E3).*

Acerca del último resaltado en la respuesta de E3, se observa que en Matemática se pueden presentar situaciones o problemas abiertos que tienen posibilidad de abordarse desde diferentes perspectivas y dar lugar a respuestas diversas; donde la elección de una de ellas debe ir acompañada por las correspondientes ventajas o desventajas. Pero, no subyace necesariamente en esa concepción un pensamiento no determinista.

(...) Esta metodología de enseñanza puede aportar a las clases de Matemática y al pensamiento no determinista en particular: la ***participación activa de los alumnos*** *desde el comienzo hasta el final, sumergiéndose en la situación planteada y utilizando sus conocimientos previos para resolverla; la* ***valoración del alumno de sus conocimientos*** *al ver su aplicación concreta en una situación* ***tan factible y cercana de su realidad****; (...) una* ***concepción de la Matemática*** *distinta quizás de la que el alumno tiene ("no admite lugar a variaciones ni a diversas soluciones"), donde se permite el análisis abierto y la toma de decisión propia sin que sea tildada de correcta o incorrecta (...) (E4).*

El estudio de casos es una metodología de enseñanza en la cual el alumno controla el método que va a utilizar. Se identifica un ***problema real****, se simplifica, y el docente motiva al estudiante a resolverlo en un proceso de toma de decisiones (...) Otro aporte importante de esta metodología es que algunos casos requieren el uso de la* ***intuición y el ingenio*** *para su resolución (...) Como la mayoría de los casos* ***no tienen resolución única****, se espera que los estudiantes lleguen a resultados distintos dentro de un rango posible, lo cual puede llevar a una* ***discusión*** *sobre los aportes de cada uno y puede ampliar la cantidad de soluciones, abriendo nuevas ideas en cada estudiante, y les muestra a ellos que la Matemática también permite resolver problemas que no tienen única solución (E5).*

Particularmente pienso que, en el trayecto de estas clases donde pusimos en práctica nuestros conocimientos sobre Probabilidad y Estadística, aprendimos que esta metodología de enseñanza involucra al alumno en una Matemática más cercana al ***ámbito social*** *de los niños y adolescentes que hoy en día transcurren la escuela secundaria, haciendo que se interioricen y se apropien de las situaciones y problemas planteados, para lograr un desarrollo de la situación y* ***un trabajo activo****, entretenido, creativo y propio de cada estudiante. A su vez, logran abordar a múltiples y propias resoluciones realizadas por cada alumno y, a través de la socialización de ellas, comprenderán que en Matemática no siempre existe una única solución ni un único camino con el cual resolver el problema. También, ayudan a los alumnos a concientizarse en la idea de que* ***la Matemática no se basa en simples fórmulas****, números y cuentas que se deben aplicar o donde se debe reemplazar; sino que, a través de esta metodología, aprenden que* ***existe un tipo de Matemática donde la creatividad*** *y el propio pensamiento modifican los métodos y la resolución de los problemas planteados (...) En resumen, esta metodología de enseñanza permite al alumno aprender Matemática interiorizándose en el problema y apropiándose de él. Permite que los estudiantes aprendan "jugando" e introduzcan la idea de que la Matemática es un producto social, y que se puede utilizar en el día a día para resolver múltiples problemas que se les puede plantear en la* ***vida cotidiana*** *(E6).*

(...) Genera interés en los estudiantes. Ya que el caso debe plantear ***una situación de la realidad****, debe ser intrigante y generar interés por los personajes (...) El uso de casos aporta los siguientes aspectos al pensamiento no determinista: Incluye variables que dan lugar a procesos no predecibles. Por ejemplo, en el caso "La insoportable fealdad del Subaru" una de las variables es la posibilidad de que un auto sufra desperfectos mecánicos. Presenta un problema que permite el reconocimiento y el uso de la* ***Probabilidad para cuantificar la incertidumbre*** *(E7).*

Considero que esta metodología de enseñanza en las clases de Matemática es muy valiosa para introducir la noción de Probabilidad, ya que de esta manera los alumnos enfrentan la Matemática a través de diversas ***situaciones o casos probablemente muy cercanos a la vida cotidiana*** *(...) Es importante fomentar en la escuela primaria y secundaria el pensamiento no determinista haciendo ver que* ***no siempre existe solo una solución y un solo camino*** *por tomar a la hora de resolver una determinada situación problemática, ya sea en Matemática o en otras áreas (E8).*

Considero que en cuanto a las clases de Matemática esta metodología de enseñanza se destaca en realizar una introducción a la noción de Probabilidad siendo una ***manera distinta y novedosa de encarar este tema****, como también poseer afinidad con* ***situaciones reales*** *para los adolescentes, mostrar verdaderas y cercanas aplicaciones de la Matemática que le permite hacerla más "humana" (...) Además permite que el alumno tenga en cuenta todas las posibilidades o variables explícitas en la historia, crear suposiciones y organizar datos para la realización de un análisis exhaustivo de la problemática presentada (...) En cuanto al pensamiento no determinista, esta manera de enseñar muestra que existe* ***otro tipo de visión acerca de la Matemática a la que no están acostumbrados****, que en ella* ***puede no haber respuestas únicas****, que no existe lo imposible sino lo improbable, darle a conocer a los chicos otra rama del estudio de esta ciencia que tiene un gran impacto en* ***la realidad*** *ya que, inevitablemente, el azar está involucrado en la misma. Me pareció de gran aporte las actividades llevadas a cabo en estas últimas clases ya que nos permitieron tener* ***más herramientas a la hora de enseñar Probabilidad*** *que por alguna razón, hoy en día se tiene olvidada y excluida en la enseñanza de la escuela secundaria (E9).*

Considero que esta metodología de enseñanza a las clases de Matemática de la escuela secundaria y al pensamiento no determinista aporta positivamente en varias cuestiones, una de ellas es para que los alumnos experimenten y se enfrenten con ***situaciones y problemas cotidianos****, puedan darle una mirada y solución mediante la Matemática. Otra de ellas es que en situaciones de caso las* ***respuestas no son únicas ni exactas****, lo que permite al alumno tener libertad y confianza en sí mismo para dar su propia postura y resultado (...) (E10).*

(...) Al tratarse de casos ***reales y sobre temas de su interés o cercanos a ellos****, a los alumnos les despierta curiosidad y se sienten atraídos (...) Durante el debate y frente a las* ***distintas respuestas que cada alumno puede dar a una misma pregunta*** *queda en evidencia que la Matemática no es determinista. Aun usando la Matemática para responder a alguna pregunta sobre el caso se obtienen distintas respuestas tal como nos pasó con el caso del Subaru, donde cada grupo recomendaba un auto distinto. Tal como dice el currículum, usando esta metodología participarían variables que dan lugar a procesos no predecibles (...) (E11).*

Acerca de lo expresado por E11 en cuando a "la Matemática no es determinista", cabe advertir que a partir de sus dichos se precisó que la Matemática no solo se ocupa de los modelos determinísticos; es decir, de aquellos modelos donde las mismas entradas o condiciones iniciales producen invariablemente las mismas salidas o resultados, no contemplándose la existencia de azar o incertidumbre. También se ocupa de modelos no determinísticos (o modelos probabilísticos) en que las condiciones experimentales determinan el comportamiento probabilístico, es decir, la distribución probabilística de los resultados observables.

Considero que esta metodología de ***enseñanza es superadora con respecto a otras****, ya que, a través de un caso interesante, con un tema atrayente para los chicos de cada edad, se pueden lograr mejores resultados en las clases de Matemática. Los alumnos se compenetran con la* ***historia, tan cercana a su realidad****, y ponen énfasis en resolver el dilema planteado, utilizando herramientas y conocimientos ya adquiridos e incorporando otros nuevos mediante esta metodología (...) Es importante que el alumno pueda descubrir que* ***no hay una única solución*** *correcta (...) (E12).*

En cuanto a considerar el método de casos como una metodología "superadora con respecto a otras" se advierte que más bien se trata de una metodología que aporta posibilidades para propiciar otras habilidades o competencias, sin desmedro de otras posibilidades de intervención pedagógica.

(...) El estudio de casos es un aporte tanto para docentes como para alumnos en las clases de Matemática. Para los docentes por ser una metodología donde es necesario prefijar los objetivos que

se desea alcanzar, permitiendo que reflexionen y cuestionen sobre ellos (desde antes de presentarlos a los alumnos como al finalizar la actividad). Para los alumnos por ser una herramienta que los ayudará a ***aproximarse al pensamiento no determinista****, conociendo así una rama de la Matemática que hasta el momento les* ***era desconocida*** *(Probabilidad y Estadística). Una buena formulación de un caso puede movilizar afectivamente a los alumnos (por presentarse personajes, sucesos y conflictos interesantes en la narrativa) siendo un lector comprometido. Tiene que ser creíble para ellos y* ***estar relacionado con sus realidades****, así les permite visualizar cómo situaciones concretas de la* ***vida cotidiana*** *pueden ser resueltas mediante razonamientos matemáticos (…) (E13).*

Haciendo un balance sobre las últimas clases trabajadas con la metodología de casos pienso que es importante para que los alumnos conozcan que en Matemática ***no todo tiene una respuesta única y exacta****, que no es una disciplina determinista. Es una forma diferente de presentar la Probabilidad y Estadística, una rama de la Matemática en donde el azar o lo aleatorio tiene protagonismo, en donde a veces, en particular en el estudio de casos, las variables consideradas tienen que ver con deseos o gustos, en donde la solución arribada está influenciada por los sentimientos de cada uno y esto no implica que sea errónea.* ***Esto es algo muy diferente*** *a lo que están acostumbrados los alumnos a ver en esta materia. Una pregunta muy frecuente en las clases de Matemática que hacen los alumnos es: ¿Para qué me sirve esto en la vida? Pienso que esta metodología es un claro ejemplo para que los alumnos puedan ver que la Matemática está implícita en la mayoría de las* ***situaciones que vivimos a diario****, que muchas veces no nos damos cuenta que la estamos usando, pero que nos sirve de ayuda para poder resolver algún problema o tomar una decisión (…) (E14).*

Se percibe que los estudiantes fueron movilizados para comprender que existen metodologías "más dinámicas" para el aprendizaje de la Matemática (ya sea determinista o no). Sin embargo, en la lectura de sus dichos se reproducen los textos que estuvieron a su alcance o que consultaron, por lo que se considera que están en una primera fase de apropiación, en vías a una mayor profundización.

Estos estudiantes resaltan la posibilidad de trabajar con preguntas abiertas, con respuestas múltiples y situaciones cercanas a la realidad. En la instancia de devolución en clase surge esta idea:

5.E.7: Sí, yo creo que habría que plantear varios ejemplos, **de la vida cotidiana**. Para que vean, esto... que en la vida cotidiana **no solo hay un camino y una solución** para esto.
(…)
5.T.29: Bueno, NE[4] en un momento pusiste que una de las fortalezas del método es que el alumno controla el método que va a utilizar. ¿Qué quisiste poner con eso?
5.E.30: Porque para resolver los ejercicios, pueda desarrollar sus propios caminos, y decida cómo resolver los ejercicios.

Esta valoración de incorporar o utilizar situaciones de la vida real como medio para abordar los contenidos matemáticos se alinea con lo establecido en el DCJ:

La Matemática surge de la necesidad de encontrar respuestas a problemas provenientes de diversos contextos, tales como los que se presentan en la vida cotidiana, los vinculados a otras ciencias o los problemas que son producto del propio pensamiento matemático, denominados problemas intra y extramatemáticos. Lo expresado permite caracterizar a la Matemática como un producto cultural y social, atravesada por las concepciones sociales y las decisiones de la comunidad matemática,

[4] NE: Representa el nombre de un estudiante de la clase.

> provocándose una interacción que funciona como generadora de conocimientos (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2014, p.47).

Como establecen Vásquez et al. (2018) (subapartado 1.4.1), es necesario que los profesores ofrezcan a sus estudiantes experiencias a partir de situaciones cotidianas que despierten su curiosidad innata, donde sean capaces de construir de manera paulatina una adecuada comprensión de la Estadística y la Probabilidad. Al mismo tiempo Moreno y Cardeñoso (2014) consideran que uno de los motivos que justifican la enseñanza y el aprendizaje de la Probabilidad en los niveles obligatorios de escolaridad es que resulta esencial para ayudar a preparar a los estudiantes para la vida cotidiana, con relación a eventos aleatorios y fenómenos casuales.

Además de las características ya mencionadas, que los estudiantes consideran que diferencian el uso del método de casos de metodologías tradicionales, agregan la posibilidad de incluir como variable de los problemas a los deseos o gustos, trabajar de manera activa y creativa, y remarcan la idea de "otro tipo" de Matemática, cuando se refieren a Estadística y Probabilidad.

Sanabria y Núñez (2017) mencionan al respecto que la Probabilidad debe orientar la toma de decisiones, no tomar la decisión por nosotros. Un problema que solo le pida al estudiante calcular una probabilidad no involucra al estudiante y degrada la aplicación del concepto de Probabilidad. En este sentido es que propone cambiar un enunciado como "calcule la probabilidad de ganar el juego" por "¿jugaría dicho juego?".

En efecto, en la devolución realizada en el último encuentro, mencionan:

> 5.T.52: Claro, eso tenerlo decidido. También sostuviste esto de que una buena formulación del caso puede movilizar afectivamente a los alumnos. ¿Y que logramos si nos movilizamos afectivamente?
> 5.E.53: Se comprometen, se involucran y respondan bien las preguntas. **Se vuelve un alumno activo**. Que no sea algo automático a hacer en el aula. Que pueda ver algo distinto de la Matemática.
> 5.T.54: Que no sea solo cumplir con una consigna, sino que sea algo que tenga ganas de conocer.
> 5.D2.55: Por último, algo que dijo NE, pero lo nombraron todos, es que las variables consideradas tienen que ver con los deseos o el gusto. ¿Todas las variables tendrán que ver con eso?
> 5.E.56: No, todas las variables no, porque, por ejemplo, en el caso del auto, el precio no depende del gusto, pero como que sí, quise hacer hincapié que se tenían en cuenta cuestiones que tienen que ver con el deseo y los gustos.

En resumen, se presentan indicios en los estudiantes que denotan sentirse convocados hacia una forma de trabajo en el aula distinta a la predominantemente tradicional en cuanto al método de casos en sí.

Acerca de las peculiaridades para la introducción de un tipo de pensamiento no determinista, tuvo una considerable repercusión la emergencia de situaciones que puedan admitir más de una respuesta o solución, invitando a ahondar en qué sentido se están produciendo tales interpretaciones. Revisten ciertas ambigüedades en torno a la asociación de propuestas con "planteos abiertos" con "situaciones no deterministas".

Asimismo, varios aluden a "opinión" otorgando una fuerte connotación subjetiva que, si bien parece estar notoriamente influenciada por el caso usado como disparador (Wassermann, 1994) puede conllevar a confusiones en tanto arbitrariedad en la manifestación de ideas vs razonamiento matemático. Resulta importante observar que emergen términos como (no) predecible (E7, E11), incertidumbre (E7), azar (E9), aleatorio (E14) relativos a una Matemática no determinista.

Respecto al aporte del método de casos en términos de promoción de una **comunidad científica** en el aula (2.M2), 13 alumnos valoran el intercambio grupal e intergrupal y los resultados que de ello derivan.

> *(…) También lleva al curso a suponer cosas, dejarse llevar por sentimientos, emociones y gustos, despertar el interés personal, quizás traer recuerdos del pasado, **crear debates y discusiones con sus pares, expresar sugerencias y aceptar las del otro**. Se fomenta al **trabajo colaborativo**, a la **participación en clase** y a tomar decisiones en equipo (…) (E1).*
>
> *(…) Pero no todo termina ahí, la visibilidad de la amplia gama de **respuestas de sus propios compañeros le permite darse cuenta que el problema no guiaba a una única solución**, aunque estas fueron obtenidas por la aplicación o el uso de procedimientos matemáticos (…) (E2).*
>
> *(...) Se plantea un caso complejo de resolver de la vida real y el estudiante tiene que poner en juego sus habilidades, como por ejemplo **trabajar en grupos**, observar, escuchar, poder tomar decisiones, entre otras (...) (E3).*
>
> *(...) un **clima de debate**, donde el alumno defiende su postura al **compartirla con sus compañeros**, y también se encuentra con distintas formas de pensamiento y las más diversas conclusiones (...) (E4).*
>
> *(...) Como la mayoría de los casos no tienen resolución única, se espera que los estudiantes lleguen a resultados distintos dentro de un rango posible, lo cual se puede llevar a una **discusión sobre los aportes de cada uno** y se puede ampliar la cantidad de soluciones, abriendo nuevas ideas en cada estudiante, y les muestra a ellos que la Matemática también permite resolver problemas que no tienen única solución (E5).*
>
> *(...) Por último, cabe destacar también que esta metodología permite al alumno utilizar toda su creatividad para modificar el problema planteado, o inventar un nuevo problema; dando así lugar a la propia biografía y producción de los estudiantes, y permitiendo un **aprendizaje tanto individual** (inventando el problema y resolviendo los problemas de sus compañeros) **como grupal** (socializando y reflexionando las resoluciones de cada alumno entre todos sus compañeros) (...) (E6).*
>
> *(...) Brinda a los estudiantes oportunidades para que **discutan**, hagan conjeturas, saquen conclusiones, defiendan sus ideas y tomen decisiones. El relato permite que los estudiantes se pongan fácilmente en el lugar de los protagonistas del caso, tomen sus decisiones y las defiendan en el **debate con sus compañeros**. Posibilita el **trabajo grupal y cooperativo** (...) (E7).*
>
> *(…) Este tipo de actividades incita al alumno a que tenga una **participación activa** en las clases y de esta manera permite **crear debates**, en donde cada individuo plantea su propio pensamiento, su propia postura, para luego defenderla por medio de propios argumentos (…) (E8).*
>
> *(…) Otro aporte en la escuela secundaria es el de poner en primer plano a los alumnos y que sean **partícipes activos** de las clases, como también el **trabajo grupal que enriquece el intercambio** de ideas y **favorece tanto la discusión como la toma de decisiones junto a sus justificaciones** (…) (E9).*

> *Considero que con esta metodología de enseñanza se fomenta el* ***trabajo en grupo****, lo que da lugar a que los alumnos* ***desarrollen la creatividad, un pensamiento crítico, la capacidad de justificar y debatir una idea, escuchar atentamente y respetar las opiniones de los demás****, tomar decisiones, reflexionar, analizar y sacar conclusiones, lo que pone al alumno en un* ***rol protagónico y activo*** *(…) (E11).*

> *(…) Se desarrollan criterios propios al evaluar distintas variables y arribar a una* ***conclusión****, que probablemente sea* ***diferente a la de otros compañeros*** *y es ahí donde se produce el* ***debate*** *y cada uno debe defender su postura, a partir del propio análisis (…) (E12).*

> *(…) Buenas preguntas críticas pueden ser las disparadoras de un* ***debate grupal*** *donde los puntos de vista de los alumnos y sus argumentaciones estén presentes (aquí podrán utilizar sus propios conocimientos); al estar en juego la no determinación, ninguna respuesta dada por el alumno será incorrecta, permitiéndole ser un* ***alumno activo*** *sin preocuparse por no encontrar "****la respuesta correcta****" (…) (E13).*

En cuanto a lo expresado por E13 "ninguna respuesta dada por el alumno será incorrecta" se interpreta que "en principio" no lo será, dando lugar a que los estudiantes expresen sus dudas y conclusiones, y argumenten sus razonamientos. En la comunidad de la clase, integrada por los demás alumnos y el docente, se irán afinando cuestiones que necesiten precisarse sin que queden ambigüedades, partiendo para ello de las concepciones, representaciones y saberes de los alumnos.

> *(…) Por último pienso que esta metodología de trabajo logra que el alumno tenga una* ***participación activa*** *en las clases y el docente pueda guiarlos procurando que logre una aprehensión significativa del contenido (…) (E14).*

De las respuestas se puede observar la valoración positiva que otorgan los estudiantes al trabajo grupal, al debatir con sus compañeros y al intercambiar opiniones, lo que les permite mejorar habilidades de escucha, respeto a sus pares, desarrollar la capacidad de justificación, incrementar la creatividad, aceptar la diversidad y la toma de decisión en conjunto. Además, algunos agregan que el método de casos facilita la participación activa de los alumnos en las clases.

Referido a la promoción del trabajo en equipo el DCJ establece:

> A lo largo del proceso de trabajo grupal, los estudiantes deben adquirir responsabilidad y confianza en el trabajo realizado en el grupo, desarrollando la habilidad de dar y recibir críticas orientadas a la mejora de su desempeño y del proceso de trabajo del grupo. Los conocimientos son introducidos en relación directa con el problema y no de manera aislada o fragmentada. Así, los estudiantes pueden observar su avance en el desarrollo de conocimientos y habilidades, tomando conciencia de su propio desarrollo (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2014, p.49).

Incluso en cuanto a la metodología de enseñanza, este documento deja explícito: "El aprendizaje está centrado en el estudiante -no en el profesor o solo en los contenidos- y se produce en grupos pequeños. De esta manera se estimula el trabajo colaborativo en diferentes disciplinas" (p.49).

Este asunto se retoma en la instancia de devolución realizada en el último encuentro:

> 5.T.11: Exactamente. Sí. Bueno, después, muchos coincidieron en esto que dijo NE que es importante que el alumno pueda **discutir**, que no es la única solución y que hay que fomentarlo. ¿Cómo fomentamos eso desde el lugar docente?
> 5.E.12: Con variedad de ejemplos, problemas y de casos.

Seis estudiantes valoran el aporte del método de casos para promover el **pensamiento crítico** matemático (2.M3), en tanto proceso que se propone analizar, entender y evaluar la manera en la que se organizan los conocimientos que se pretenden interpretar y representar (Wikipedia).

> *(...) La **formación y desarrollo de criterios propios** para evaluar distintas variables y arribar a una conclusión; la promoción de la **elaboración de la fundamentación** en la toma de decisiones, donde aquello que el alumno toma como mejor opción está justificado desde su propio análisis (...) la **formación del pensamiento crítico** para enfrentar situaciones reales y poder resolverlas desde cada postura (E4).*
>
> *(...) Permite analizar información, y a partir de eso **formular preguntas** o conjeturas acerca del problema. También la posibilidad de organizar la información en tablas o gráficos (E7).*
>
> *(...) Una técnica muy satisfactoria para formar el **pensamiento crítico** (...) (E8).*
>
> *(…) Por las cuestiones mencionadas considero que es muy importante abordar el estudio de casos en la escuela secundaria para formar **alumnos críticos** y así motivarlos e incentivarlos para que disfruten de la Matemática y lograr que no les quede la idea de que es una materia cerrada sin relación ni aplicación con la vida cotidiana (E10).*
>
> *(…) que la Matemática permite la diversidad de opciones, fomentando el **pensamiento crítico** no determinista (…) (E12).*
>
> *(…) El estudio de casos es una buena metodología para fomentar el **pensamiento crítico** donde los alumnos elegirán y postularán variables que, según sus criterios, consideren pertinentes para la resolución del dilema planteado (…) (E13).*

Respecto a que engloban con el término “alumno crítico”, durante la devolución realizada en el último encuentro se aclara:

> 5.T.1: Bueno, NE, vos hablaste de alumnos que sepan criticar. ¿A qué te referís con criticar?
> (…)
> 5.E.3: Crear una postura propia, la capacidad de justificar, de debatir, de escucha atenta, respetar las opiniones de los demás, tomar decisiones, reflexionar, analizar y sacar conclusiones. Todo eso sería para mí que el **alumno sea crítico**.

En esta intervención del estudiante se aprecia que en pensamiento crítico incluye, entre otras, cuestiones del orden de lo actitudinal, tales como escucha atenta y respeto de las opiniones, como ingredientes que favorecerían un intercambio de pareceres que se someten a análisis y evaluación.

El pensamiento crítico al que se hace referencia en las respuestas de los estudiantes se encuentra en correlación con lo que establece el DCJ:

> En las clases de Matemática también deben asumirse los desafíos de la sociedad actual, que exigen sujetos involucrados en la resolución de problemas, que buscan alternativas y desarrollan estrategias flexibles y adaptables a contextos diversos. La enseñanza de la Matemática debe asumir la

responsabilidad de que todos los estudiantes generen confianza en sus propias posibilidades de pensar y hacer, donde el error sea tomado como parte del proceso de aprendizaje (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2014, p.48).

Del total de estudiantes, cinco de ellos destacan de manera explícita la importancia del **rol docente** (2.M4), tanto en la selección de un caso que genere interés, en la formulación de las preguntas y en las actividades de seguimiento de los alumnos, para alcanzar los objetivos de aprendizaje establecidos.

> *(...) Esta metodología de enseñanza puede aportar bastante al curso si se* ***elige un caso apropiado****, bien construido, que invite a pensar (...) Un caso, si el alumno logra compenetrarse en él y le despierta interés y curiosidad, lo invita a investigar, a conocer más, a reflexionar, a pensar, a justificar sus respuestas. Si el caso contiene buenas preguntas* ***realizadas por el docente****, el alumno intentará responderlas argumentando.* ***El docente puede lograr*** *mediante el caso estimular el pensamiento crítico, favorecer el proceso de comprensión del estudiante, despertar curiosidad e invitar al análisis (...) (E1).*
>
> *(…) Por último, considero importante el* ***rol del docente*** *en esta metodología para hacer notar al alumno que detrás de las decisiones, en casos como los desarrollados, se encuentran razonamientos matemáticos y procedimientos propios de una rama de la Matemática como lo es la Probabilidad y la Estadística (E2).*
>
> *(...) Esto también es* ***trabajo del docente****, hacer notar que la Matemática no siempre es determinista. Considero que el docente tiene que tener un* ***rol activo*** *en la resolución de casos, donde proporcione herramientas a los alumnos, fomente el debate entre ellos y mantenga a los estudiantes participativos e interesados en poder resolver el caso (E3).*
>
> *(...)* ***El docente orienta*** *a los estudiantes para que busquen soluciones y logren determinados resultados de aprendizaje, lo cual muestra si los alumnos aprendieron los conceptos que el problema requiere. Esta estrategia permite también perfeccionar las aptitudes y hábitos de dirección del estudiante, además de sistematizar, profundizar y ampliar sus conocimientos (E5).*
>
> *(…) Por último pienso que esta metodología de trabajo logra que el alumno tenga una* ***participación activa*** *en las clases y* ***el docente pueda guiarlos*** *procurando que logre una aprehensión significativa del contenido (…) (E14).*

Referido al papel del docente se observan menciones a distintos momentos: algunos hacen hincapié en la importancia de que el docente realice una buena elección del caso (previo a la clase) y otros en rol de mediador y generador de debate durante la resolución del caso en la clase.

En la devolución realizada en el último encuentro se aclara:

> 5.T.17: (...) NE vos pusiste “todo esto se va a lograr dependiendo del docente”, **si el caso es bueno**, si entretiene, si no es tan largo, pusiste un montón de condiciones. Es decir, este caso sería provechoso para trabajar **si el docente lo propone correctamente**.
> (...)
> 5.E.19: Sí, porque justamente si vos presentás un caso que al alumno no le interesa, no lo estimula, no lo lleva a investigar, no le llama la atención, no le va a interesar responder, compenetrarse en el tema. Nosotros cuando leímos el caso del auto, queríamos más, para saber qué auto elegir o qué auto se quedaba la chica. Creo que la elección de un buen caso es fundamental.
> (...)
> 5.T.22: Sí, NE lo apuntó más a que tiene que hacer una buena elección en la parte de la preparación de todo el caso, NE hablaba del rol docente, pero en las observaciones. Cómo hace notar a los alumnos las herramientas con las que contaron para resolverlo. Por otro lado, NE habla de un rol

activo porque el docente tiene que brindar herramientas para fomentar el debate y mantener a los alumnos interesados. Otro aspecto distinto del rol docente. ¿Qué sería un rol activo?
5.E.23: Que esté con los alumnos, que vaya recorriendo los bancos y que les haga preguntas para que se genere debate.

Respecto del rol docente, el DCJ proclama:

> (...) está muy lejos de ser un asunto relacionado exclusivamente con lo cognitivo, está atravesado profundamente por elementos socio-afectivos y comunicacionales que exigen la recomposición de la subjetividad para poder avanzar en la distribución del conocimiento y en el mandato de inclusión. Al enseñar, el docente se compromete con un entramado vincular acompañando a los estudiantes en el aprendizaje de la autonomía, la solidaridad, la apropiación de saberes y herramientas para trazar cursos de acción que les permitan encontrar o hacer algo de su interés favoreciendo de ese modo sus trayectorias escolares (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2014, p.12).

Este rol, según enfatiza el documento ministerial, favorece los aprendizajes escolares, en tanto:

> El docente gestiona la clase proveyendo las reglas del debate matemático -las que permiten el trabajo de producción y profundizan el ejercicio democrático- e institucionaliza los saberes para identificar los conocimientos utilizados, construidos o modificados y nombrarlos convencionalmente, propiciando siempre procesos reflexivos, lo que posibilita aprender y comprender más (p.48).

Como se menciona en el subapartado 2.2.3, resulta importante focalizar el aprendizaje en el estudiante, fomentando el trabajo colaborativo y mediante una correcta elección de los problemas a analizar. Es a través del problema que se desarrollan habilidades de resolución, de abstracción reflexiva, se establecen inferencias lógicas, relaciones, generalidades y se abren puertas al diálogo, traduciendo del lenguaje matemático a expresiones del lenguaje cotidiano (o viceversa). Es por esto que una adecuada elección de la situación a trabajar en conjunto es fundamental para estimular el aprendizaje.

Respecto a la **vinculación con otras asignaturas** (2.M5), cinco estudiantes resaltan las posibilidades, aunque de modo preliminar e incipiente, que permite esta metodología.

> *Creo que el uso de "casos" en las clases de Matemática de la escuela secundaria aporta de la siguiente manera:* ***Relaciona la Matemática con otras áreas****, permitiendo aplicar esta disciplina a distintas situaciones de la realidad (...) (E7).*
>
> *(…) Esta noción de Probabilidad, que comenzó como un juego, se ha convertido hoy en día en una de las disciplinas más profundas y con más* ***aplicaciones en otras ciencias****, como por ejemplo en las Ciencias Naturales y Sociales, Ciencias Económicas, Física, en la misma Matemática exacta, pues en estas disciplinas la incertidumbre ocupa un papel importante que es necesario cuantificar (…) (E8).*
>
> *(…) Como en este tipo de actividades aparece la narración como protagonista, cabe la posibilidad de* ***conectarlas con otras materias del ciclo secundario*** *como, por ejemplo: Lengua, Geografía, Economía, Biología, entre otras (…) (E9).*
>
> *(…) Además permite que se* ***trabajen otras disciplinas*** *como Lengua o Geografía (...) (E11).*
>
> *(...) Además también es una forma de poder* ***articular el trabajo con otras materias*** *como ser Lengua, Biología, Geografía, etc. (…) (E14).*

Los alumnos remarcan la posibilidad que brinda el método de casos para articularse con otras disciplinas de la escolaridad, permitiendo un reconocimiento de la aplicación y utilidad que tiene la Matemática en diversas situaciones y en el manejo de la incertidumbre.

Respecto a las dos modalidades anteriormente mencionadas (2.M3 y 2.M4) y en relación con la modalidad emergente que se presenta a continuación (2.M5), dentro de las consideraciones metodológicas de enseñanza, el DCJ estable: "(...) supone por parte del docente una actitud de apertura hacia otras disciplinas y hacia el trabajo colaborativo con otros colegas y facilitadora de la participación crítica de sus estudiantes" (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2014, p.186).

A continuación, se presenta la Tabla 4.2 que relaciona la respuesta de cada estudiante a la consigna 7 con las distintas modalidades identificadas.

Tabla 4.2. Distribución de las respuestas de los estudiantes a la consigna 7

Estudiante	**2M.1 Metodología innovadora**	**2M.2 Comunidad Científica**	**2M.3 Pensamient o crítico matemático**	**2M.4 Rol docente**	**2M.5 Vinculación con otras disciplinas**
E1	X	X		X	
E2	X	X		X	
E3	X	X		X	
E4	X	X	X		
E5	X	X		X	
E6	X	X			
E7	X	X	X		X
E8	X	X	X		X
E9	X	X			X
E10	X		X		
E11	X	X			X
E12	X	X	X		
E13	X	X	X		
E14	X	X		X	X

Se pude observar que el método de casos no solo genera aportes en cuanto al contenido (pensamiento no determinista y toma de decisiones en situación de incertidumbre), sino también contribuye a desarrollar habilidades de pensamiento y acción, posibilita el trabajo conjunto con otras áreas, genera debates entre compañeros basado tanto en la argumentación y defensa de las opiniones propias como también en el respeto y aceptación de las de otros, y abarca situaciones de la vida real que generan interés en los alumnos fomentando así su participación activa.

En cuanto a la primera dimensión de análisis "Pensamiento no determinista en la Matemática escolar", asociada a la conciencia matemática del futuro profesor relativa a este tipo de pensamiento (*HCK*), es posible advertir cierta debilidad disciplinar que, si bien se ha nutrido desde la experiencia, no ha logrado desarrollarse en su plenitud.

Como punto inicial (consigna 1), antes realizar la experiencia, emergen asociaciones entre determinismo y conductismo (1.M1), sobreentendiéndolos como sinónimos. En correlato, la mayoría de los estudiantes no han sido formados al respecto en su historia escolar (1.M2), si bien se reconocen algunas pocas experiencias (1.M3) o actividades extracurriculares (1.M4).

El panorama de posibilidades para iniciar el trabajo en el desarrollo de un tipo de pensamiento no determinista se amplió luego de la experiencia (consigna 7), dado que surgieron apreciaciones en cuanto al valor innovador de la metodología (2.M1), la posibilidad de trabajo como si se tratase de una comunidad científica (2.M2), el desarrollo de un pensamiento crítico matemático (2.M3), la importancia del rol docente para provocar y sostener estas cuestiones (2.M4) así como el rico espectro para producir vinculaciones con otras disciplinas (2.M5). Asimismo persistieron ciertas ambigüedades en torno una delimitación conceptual más profunda del tributo "no determinista".

4.2. Enseñanza de Probabilidad en primer año

En esta dimensión se pone en evidencia el manejo de herramientas de enseñanza de la Probabilidad en dos instancias: de manera espontánea (subapartado 4.2.1) y mediante la elaboración de un caso (subapartado 4.2.2).

4.2.1. De modo espontáneo

En una primera instancia se planteó a los estudiantes la siguiente situación (*consigna 2*):

Te estás desempeñando como profesor en un primer año de secundaria y disponés de un par de semanas para trabajar Probabilidad. ¿Cómo lo harías? Recordemos qué dice el Diseño Curricular en cuanto a los contenidos a abordar al respecto en dicho año: "Situaciones problemáticas extramatemática que permitan a los estudiantes interpretar y elaborar información: (...) Probabilidad: determinación empírica incluyendo casos sencillos que involucren un conteo ordenado sin necesidad de usar fórmulas".

Las 14 propuestas elaboradas por los estudiantes del PM remarcan la idea de ir de la práctica a la teoría, estructurando en tres etapas: una introductoria, una de resolución y preguntas, y una tercera de formalización o institucionalización de los conceptos trabajados. La diferencia más notoria entre las propuestas se produce en la etapa introductoria, donde se logra distinguir aquellos que plantean un **trabajo en aula** (3.M1, 11 estudiantes) y aquellos que sugieren un **trabajo experimental** (3.M2, los tres restantes).

De las 11 propuestas de trabajo en aula, se pueden diferenciar las que no especifican un tipo particular de actividad (3.M1.1) y aquellas que hacen explícita la herramienta a utilizar (3.M1.2).

En las propuestas que **no especifican actividades** (3.M1.1) resaltan la importancia de tratar temas de la vida cotidiana, o situaciones reales, donde se enfatiza la premisa de generar interés y que los alumnos sientan la necesidad de aprender para resolver un problema.

> *Como profesora de un primer año de Secundaria plantearía un problema que **se vincule con la vida real** con el cual los alumnos puedan interactuar entre ellos dentro del aula y en base a los resultados que van obteniendo se puedan ir **institucionalizando conceptos**. Pienso que esta sería una buena manera ya que el hecho de **vincular con la realidad motiva** más a los alumnos (E5).*

> *Plantearía distintos problemas que involucren a mis alumnos a resolverlos de una forma **entretenida**, que resuelvan en grupo, que jueguen, que actúen en el problema y que al resolver el ejercicio descubran que la Matemática no es simplemente fórmulas aprendidas memorísticamente. Plantearía problemas que cuenten con respuestas variables, problemas donde no exista respuesta y problemas donde podamos encontrar respuestas. Les haría elaborar sus **propios problemas** y exponerlos en clase para que sus compañeros intenten resolverlos. Les haría leer el problema. Les preguntaría inicialmente si ellos piensan que tendría solución y si podríamos encontrarla o no. Les recomendaría que comiencen pensando el problema con el **sentido común**. Lo analicen y prueben utilizar y relacionar los datos de distintas formas (E6).*

En cuanto a los diversos tipos de problemas que propone E6 (que cuenten con respuestas variables, donde no exista respuesta, o con respuestas), se aclara que esta diversidad no necesariamente responde a un contexto determinista o no determinista. Habrá que analizar, para ello, la naturaleza intrínseca de la situación específica y sus variables intervinientes.

> *Iniciaría el tema a partir de alguna situación problemática que sea de algún **tema de interés de los estudiantes**. O sino desafiando a los alumnos mediante algún juego. La situación debe involucrar lo explicitado en el diseño curricular y debe ser **previo a cualquier desarrollo teórico**. Tiene la finalidad de despertar en el estudiante **el interés o la necesidad de aprender un nuevo** contenido para poder resolver el problema. Que puedan pensar diferentes formas de resolver a partir de sus conocimientos previos y luego con la guía docente puedan construir las nuevas herramientas que resuelven el problema **a partir de la noción** de Probabilidad (E7).*

> *Por empezar, plantearía un problema o juegos, **ejemplos cercanos a su realidad** a los alumnos y que de manera grupal intenten resolverlos con los conocimientos que tienen. Luego cada grupo compartirá sus ideas y, a partir de ello, de acuerdo a las respuestas de cada grupo, formular las preguntas que los guíen a los objetivos de la actividad (E8).*

> *Trataría de tener en cuenta **los temas de interés de los alumnos** y en base a eso pensaría ejemplos de actividades para que les resulte atrayente. Tomar **ejemplos que aparezcan en lo cotidiano**, que les resulten familiares. Consideraría arrancar con algún problema que puedan comenzar a resolver con lo que ya saben o con alguna idea intuitiva de Probabilidad y luego mostrar que la intuición no es buena en algunos casos (E11).*

> *Comenzaría las clases dando problemas que fueran **interesantes para los alumnos** y pudieran apelar bastante a la intuición. Trataría de implementar en la resolución gráficos y tablas e iría **institucionalizando los saberes** necesarios; tal vez daría algunos ejercicios un poco específicos para asentar la teoría junto con ejemplos y preguntas y para finalizar algunos problemas para pensar o trabajar donde tuvieran que recolectar información (algo bien sencillo) (E13).*

> *Siento que todavía me faltan algunas herramientas para desempeñarme como profesor, pero abordaría el tema con* ***ejemplos concretos*** *y que entre todos puedan resolverlos pasando al pizarrón. Ejemplos que muchas veces los sabemos resolver por* ***intuición*** *pero que en el ámbito de la Matemática podemos* ***formalizar****. (No muy elevado) (E14).*

En las respuestas pertenecientes a esta modalidad se observa la importancia de proponer situaciones de la vida cotidiana a la hora de generar interés en la resolución de alguna actividad, en el trabajo e interacción grupal, y en ir de la práctica a la teoría, formalizando los conceptos luego del trabajo realizado en clase.

En un par de casos se refieren a sentido común e intuición como instancias necesariamente previas a la formalización e institucionalización. De este modo aluden al significado intuitivo de Probabilidad, quedando la inquietud acerca de cómo avanzar hacia significados más evolucionados en términos matemáticos.

En la instancia de puesta en común (encuentro 1) los alumnos expresaron:

> 1.E.111: Bueno, yo también más o menos puse eso de ver problemas así, que ellos vean de forma entretenida, puse mucho lo del juego y por ahí algo más si se relaciona con personas que actúan, que **formen parte de la vida cotidiana**.
> (...)
> 1.E.119: (...) que podrían realizar esa actividad los alumnos dentro del aula, e ir anotando en el pizarrón los casos posibles, pero sí... **ir de la práctica a la teoría**...
> (...)
> 1.E.121: Plantear el problema inicial, después **que sientan alguna falta e introducir la teoría**.

Las propuestas planteadas por estos estudiantes concuerdan con las consideraciones metodológicas planteadas por el DCJ, el cual expresa:

> En este enfoque metodológico se plantea que, en primer lugar, se presente el problema, se identifiquen las necesidades de aprendizaje, se busque la información necesaria y, finalmente, se regrese al problema, mientras que tradicionalmente primero se expone la información y posteriormente se busca su aplicación en la resolución de un problema. Se trata de una estrategia didáctica que debe ser empleada por el docente, combinada con otras estrategias didácticas y delimitando los objetivos de aprendizaje que desea alcanzar. El principio básico consiste en enfrentar al estudiante a una situación y darle una tarea, un desafío como fuente de aprendizaje. Los problemas deben ser abiertos, no deben estar dirigidos. Luego se plantearán otros problemas que puedan modelizarse con los conocimientos adquiridos (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2014, p.48-49).

Como se expresa en el subapartado 2.2.3, cuando el alumno se percata que con los conocimientos matemáticos que posee no puede resolver los problemas planteados es cuando surge la necesidad de nuevos conocimientos. Esta necesidad constituye el estímulo requerido para lograr el aprendizaje y la construcción de nuevos conocimientos, y debe ser acompañada con la orientación del docente.

Las cuatro propuestas que **especifican alguna actividad** dentro del aula (3.M1.2), utilizan dados, bolitas o situaciones sencillas de conteo (de distinto tipo).

> *Comenzaría con un **juego de dados** en el que por grupos de pocos integrantes cada uno debe tirar el dado dos veces y anotar la suma obtenida entre ambos tiros. Seguiría con preguntas del tipo ¿Cuáles son los pares posibles de resultados? ¿Cuántos son? ¿Cuántos pares de resultados suman 3? ¿Qué chances tengo de obtener como resultado de la suma al nº 3? Si en 50 repeticiones de la experiencia gana la persona que eligió la suma que más veces apareció, ¿qué suma elegirías? ¿Por qué? ¿Tenés certeza que eligiendo esa suma ganás el juego? Puesta en común de las respuestas de los distintos grupos. Seguiría con algún otro problema para luego intentar **formalizar** que las chances son probabilidades (E2).*

En cuanto a que "las chances son probabilidades", como expresa E2, se advierte que chances alude a términos absolutos, no relativos como el caso de las probabilidades. Así mismo, se connota la idea como introductoria a pensar "casos favorables" dentro los "casos posibles".

> *Si tendría que dar clases de Probabilidad, arrancaría el tema pensando en un problema concreto que a los alumnos les sea familiar. Así pueden comprenderlo mejor; por ejemplo, algún problema con los **números de un dado**, o ver **la cantidad de hombres y mujeres en el grupo**, etcétera. Les dejaría un tiempo para que lo puedan pensar ellos solos o con sus compañeros y luego poner en común lo que pensaron y tratar de **institucionalizar** lo aprendido (E3).*

> *Iniciaría el tema con un problema donde tengan que **contar algún caso sencillo**. Luego elevaría su complejidad a un conteo mayor y que noten algunas faltas para luego introducir los contenidos formalmente. En general que se vaya de la **práctica a la teoría**. Ejemplo: las distintas maneras que pueden **sentarse en una mesa redonda** con ciertas restricciones entre las personas. Podría realizar esta actividad con los **alumnos dentro del aula**, e ir anotando en el pizarrón los casos (E9).*

E9 sugiere una situación en el marco de la Combinatoria. Si la propuesta finaliza allí no se estaría avanzando hacia el estudio de Probabilidad. Pero la misma puede continuarse con un enfoque clásico de Probabilidad (por ejemplo: ¿qué probabilidad hay que tales dos alumnas estén sentadas al lado?) o valerse de esta situación de conteo de casos para introducir su importancia en una rama que los analiza puestos en relación en términos de sucesos.

> *Comenzaría el tema con una situación problemática en la que se pueda realizar **el experimento en clase**. Como ser una caja con **bolitas de tres colores** diferentes en distintas posiciones. Que vayan sacando, anotando el color y volviéndolo a guardar. Esto se repite muchas veces y a partir de los resultados preguntaría ¿Cuántas bolitas de cada color suponen que hay sabiendo la cantidad total de bolitas? **Entre todos deducir la fórmula de Laplace** y luego aplicarla en diferentes problemas. Otra clase preguntaría a cada alumno el día de cumpleaños ya que es anti-intuitivo pensar que es tan alta la probabilidad de que dos personas cumplen el mismo día en un grupo de más de 17 personas (E12).*

Estos estudiantes proponen actividades a desarrollar en aula, partiendo de situaciones simples que se van complejizando, para luego socializar los resultados e institucionalizar los saberes.
En la instancia de puesta en común se profundizó en torno a lo propuesto por E12:

> ¿Cuántas bolitas de cada color suponen que hay sabiendo la cantidad total de bolitas?
> La alumna propone deducir la fórmula de Laplace, cuando en realidad lo que se busca es estimar una probabilidad, que se podría calcular a través del modelo de Laplace, si se conociese la composición de la caja.

Del planteo x/N = y/n, donde:

x es la cantidad de bolitas de determinado color,

N es la cantidad de bolitas en la caja,

y es la cantidad de bolitas de dicho color observado en una muestra de tamaño n,

n es la cantidad de veces que repitió la experiencia (tamaño de la muestra).

Resulta que la estimación más verosímil de la cantidad *x* de bolitas de ese color que hay en la caja es *y N/n*

Básicamente, en la propuesta se busca estimar a través de la frecuencia relativa observada en una muestra, la probabilidad de que una bolita elegida al azar sea de determinado color.

Si se conociese la composición de bolitas en la caja, a través del Modelo de Laplace se podría determinar a priori, la probabilidad de que al sacar una bolita esta resulte de determinado color. De lo contrario esa probabilidad se estima a través de la frecuencia relativa observada al realizar *n* extracciones con reposición (determinación empírica, o a posteriori, de una probabilidad).

Las apreciaciones que efectúa con relación al juego se enmarca dentro de las consideraciones metodologías para la asignatura Matemáticas el DCJ establece:

> Cabe señalar que la resolución de problemas incluye a los juegos, cuestión que representó un interés genuino de los matemáticos de todos los tiempos; juegos que estén estrechamente relacionados con un contenido matemático o con el desarrollo de estrategias (…), pudiendo incluir elementos manipulativos simples y tradicionales, facilitadores de la entrada a la producción y al desafío intelectual desde un sentido cooperativo y no competitivo (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2014, p.50).

De las 14 propuestas se pueden identificar tres que proponen un trabajo donde se deba **recolectar datos fuera del aula** (3.M2).

> *Lo haría introduciendo al tema con un trabajo de investigación, donde* ***entrevisten a vecinos o amigos*** *sobre un determinado tema,* ***recopilen los datos****, respondan ciertas preguntas creadas por mí y* ***luego formalicemos conceptos*** *y saquemos conclusiones en caso de que ciertos contenidos estén en el programa, porque quizás solo hay que introducir el tema y en años posteriores formalizar. Otro ejemplo sencillo es que* ***observen durante 5 minutos los vehículos que cruzan una calle donde hay semáforo*** *y anoten cuántos pasaron en rojo, en amarillo y en verde. Después podemos comparar resultados entre compañeros (para notar que va a haber diferentes resultados) y luego realizar una tabla recopilando todos los datos (E1).*

En la propuesta por escrito de E1 relativa a los vehículos que cruzan un cierto semáforo, resta especificar el objetivo de la acción en términos de qué se busca enseñar. A partir de intercambios en clase, se explicita que procura estimar a través de las frecuencias relativas observadas la probabilidad de que un auto pase dicho semáforo en verde, amarillo o rojo, asociándolo a si comete infracción o no.

> *La primera clase propondría una actividad para que los alumnos* ***realicen en su entorno cotidiano*** *para la clase siguiente. Por ejemplo, recolectar datos acerca de la edad de sus familiares, si trabajan o estudian; en qué barrio viven, etcétera. Realizando así un trabajo de encuesta para posteriormente trabajar en clase con esa recolección de datos, clasificarlos por variables analizando lo obtenido y* ***sacando conclusiones en clases posteriores*** *(E4).*

En la propuesta de E4 tampoco se explicita el objetivo de la acción de enseñanza en el escrito. En un principio pareciera que todas las variables que emerjan, relativas a características de su entorno cotidiano, serán de interés para las conclusiones desatendiendo un foco de atención o interés que promueva la motivación del estudio.

> *Comenzaría trabajando con Probabilidad pidiendo a los alumnos que recolecten información sobre algún tema que les interese, por ejemplo, que* ***elaboren en alguna encuesta*** *donde sus preguntas sean de tipo cerrada, con opciones. Luego de realizarlas y de obtener la información, realizar un gráfico donde la representen y a partir de ello sacar* ***qué porcentaje de las encuestas*** *eligió cada una de las opciones de la encuesta. Para realizar esta actividad armaría grupos de tres aproximadamente y luego haría una puesta en común (E10).*

En las tres respuestas anteriores el trabajo que proponen es fuera del aula, ya sea mediante encuestas a personas u observaciones de fenómenos, para posteriormente (en clases sucesivas) procesar los datos, analizarlos y formalizar los conceptos.

Al respecto los estudiantes han sido puestos en antecedentes sobre las etapas a seguir cuando se resuelve un problema que involucra la Probabilidad y la Estadística. Estas etapas se conocen como ciclo PPDAC (Wild y Pfannkuch, 1999) y comprenden:

1. Planteo del Problema (P): que requiere explicitar claramente los objetivos del mismo.
2. Planificación del estudio (P): lo que demanda elaborar un plan de cuáles datos recolectar y cómo hacerlo.
3. Recolección de datos (D): lo que requiere particular cuidado, para que los mismos resulten útiles en la etapa siguiente de la obtención de la información.
4. Análisis de los datos (A): etapa en la que se aplican los métodos estadísticos apropiados, para obtener información a partir de los datos.
5. Conclusiones (C): etapa en la que se interpreta la información y se extraen las conclusiones que permiten dar respuestas al problema.

En la instancia de puesta en común en clase comentaron:

> 1.E.89: Yo, haciendo **que cada grupo arme una encuesta** de algo que le interese y después a partir de eso que se fije en qué porcentaje, bah no decirlo con esas palabras, pero básicamente como qué porcentaje de tantas personas respondieron para qué sí o no, o sea que las preguntas sean cerradas.
> (...)
> 1.E.91: Y después trabajar con eso y **decir que tiene un nombre, y significarlo**.

En la Tabla 4.3 se presenta la relación entre cada estudiante y el tipo de propuesta de enseñanza elaborado de modo espontáneo en la segunda consigna aplicada.

Tabla 4.3. Distribución de las respuestas de los estudiantes a la consigna 2

Estudiante	3. M1.1 Trabajo en aula No especifica actividad	3.M1.2 Trabajo en aula Especifica actividad	3.M2 Trabajo experimental
E1			X
E2		X	
E3		X	
E4			X
E5	X		
E6	X		

E7	X		
E8	X		
E9		X	
E10			X
E11	X		
E12		X	
E13	X		
E14	X		

En todas las modalidades presentes en esta categoría, se deja entrever la importancia que tiene para los estudiantes generar el interés por la resolución de las actividades propuestas y la idea de que la formalización de conceptos debe surgir de la necesidad de conocimiento.

Alineado con esta idea, Vásquez et al. (2018), como se indicó en el subapartado 1.4.1, sugieren que la enseñanza debería plantearse a partir de situaciones contextualizadas que permitan un aprendizaje inductivo de los conceptos, impulsando las conexiones necesarias con la propia experiencia. Para fomentar el aprendizaje en el eje en cuestión proponen involucrar a los estudiantes en investigaciones estadísticas que los conduzcan a la necesidad de conocer este tipo de datos para poder obtener conclusiones, en contraposición de una enseñanza repetitiva y centrada en fórmulas.

Sin embargo, en relación a la consigna 2, la existencia limitada de propuestas con situaciones concretas pone de manifiesto que, por el momento, existe solo una incipiente aproximación a las consideraciones metodológicas planteadas por el DCJ.

4.2.2. Con un caso

Como se comenta en el apartado 3.3, al finalizar el segundo encuentro se propone a los estudiantes que grupalmente elaboraren un caso (*consigna 5*), de manera completa, que propenda a iniciar el trabajo con contenidos relativos a Probabilidad y Estadística en primer año de la escuela secundaria. A continuación, se presenta el análisis de los tres componentes elementales de cada caso: las notas para el docente (subapartado 4.2.2.1), el relato (subapartado 4.2.2.2) y las preguntas críticas (subapartado 4.2.2.3).

Durante la elaboración del caso (encuentro 3), a cada grupo se le realizan preguntas a modo de seguimiento y acompañamiento. A continuación, se presentan algunas de estas preguntas:

> (G1) 3.T.17: ¿NE? Así ya sé cuál es el grupo... A ver cuéntenme un poquito, ¿qué están pensando como caso?, ¿tienen un título?
> (G2) 3.T.27: Perfecto. Yo les voy a hacer preguntas también, que a lo mejor los puede ayudar a la hora de armar el caso, por ejemplo: ¿qué posibles vinculaciones matemáticas posteriores piensan que podrían desarrollar mediante este caso?, ¿cuál es el objetivo que ustedes quieren desarrollar con este caso?
> (G3) 3.T.33: Claro, sería parecido... Tuvieron en cuenta eso, ¿pensaron eso?... si este caso va a ayudar a un concepto en particular... Porque podría ser cualquier concepto de Probabilidad de primer

año, o es solamente para analizar cuestiones aleatorias... o cuestiones de lo emocional, eso ayuda en el momento de elaborar un caso, ¿sí? Bueno, tengo que preguntarme ¿qué es lo que yo quiero enseñar con esto?... Entonces ya que todavía no lo pensaron y están trabajando con esto, es un buen momento, ¿no? Piensen… ¿qué vinculación tiene el caso con la Probabilidad? Bien, otra cuestión para tener en cuenta es ¿cuál es la intencionalidad matemática que sustenta el caso? Ustedes usarían este caso para explicar Probabilidad... ¿Con qué intención?, ¿qué les gustaría que el alumno se lleve cuando lea el caso y lo analice?
(G4) 3.T.43: Bien, perfecto. ¿Qué recursos utilizaron? ¿En qué materiales se basaron para planificar? Por más que recién lo están armando... Veo que están usando una plataforma...

4.2.2.1. Las notas para el docente

A continuación, se presentan las notas para el docente formuladas por los cuatro grupos (Tablas 4.4 a 4.7), en donde se puede observar una estructura formada por tres partes relativas al caso: tema, trama y fundamento. En ocasiones se intercalan comentarios aclaratorios para clarificar algunas imprecisiones en el lenguaje utilizado por los estudiantes.

Tabla 4.4. Notas para el docente elaboradas por G1

Parte	Contenido
Tema	*Este caso está pensado para aproximar al alumno al concepto de Estadística. Se abordará desde una temática controversial como lo es el **fútbol**.*
Trama	*Los estudiantes deberán elegir qué jugadores seleccionar de una lista donde aparecen distintas estadísticas y variables; las cuales deberá reconocer, identificar, analizar e intentar armar una tabla o esquema comparativo con los datos que se presentan para sacar conclusiones. Está en juego el hacer suposiciones y las preferencias de los alumnos no son ajenas al caso.*
Fundamento	*Se intenta fomentar el **pensamiento crítico** a través de preguntas que tienen las intencionalidades de que el alumno justifique sus decisiones.*

En el fundamento de la propuesta del G1 se subraya la promoción del “*pensamiento crítico*” en los estudiantes. Al respecto, cabe preguntarse qué están entendiendo con relación a este término y de qué modo se ha trabajado en la carrera qué se entiende por pensamiento crítico, asunto para avanzar en próximas ediciones.

Tabla 4.5. Notas para el docente elaboradas por G2

Parte	Contenido
Tema	*En este caso se examina un concepto matemático: la noción de Probabilidad. Alumnos de secundaria se enfrentan al problema de decidir qué **empresa de viaje** contratar para realizar su viaje de egresados.*
Trama	*Para cumplir con este objetivo deberán tener en cuenta diversas variables tales como el costo, cantidad de excursiones, cantidad de días, liberados, entre otros. Simultáneamente estas variables juegan distintos papeles en cada propuesta.* *Bajo las condiciones de este caso, la noción de Probabilidad permite analizar la probabilidad que tiene de ser elegida cierta empresa asignándole o no un valor numérico.*
Fundamento	*Como fundamento a este caso se encuentran las siguientes ideas:* *El empleo de la Matemática **puede influir en la decisión** que se adopte sobre la elección de una empresa.* *La noción de Probabilidad permite **predecir los resultados** de ciertos acontecimientos.* *Los datos obtenidos se emplean para **calcular la probabilidad**. Cuanto mayor sea la cantidad de datos, más confiable será la predicción.* *Cuando se calcule la probabilidad, es importante identificar las suposiciones subyacentes.* *Las **preferencias personales** en cierta edad, a veces difieren de posiciones más objetivas.*

Con respecto a que "*la noción de Probabilidad permite predecir los resultados de ciertos acontecimientos"* en la puesta en común se trabajó la idea de que "*a través de la Probabilidad podemos cuantificar la posibilidad de ocurrencia de un conjunto de resultados de una experiencia aleatoria*".

Tabla 4.6. Notas para el docente elaboradas por G3

Parte	Contenido
Tema	*El empleo de la Matemática puede* ***afectar en la elección*** *de un club.* *Los datos obtenidos se emplean para calcular la probabilidad, mientras* ***más datos haya más certera será la predicción****.* *En la vida real* ***hay factores por fuera de la razón y la lógica*** *que influyen a la hora de tomar una decisión. En este caso, la elección de no ir a un club donde no vaya ningún conocido puede afectar en la elección del club.*
Trama	*Analizar y visualizar fenómenos aleatorios a partir de una situación de la vida cotidiana de los alumnos. Que el alumno sea protagonista, que tome sus propias decisiones y que pueda argumentarlas. En este caso examinamos la noción de Probabilidad.*
Fundamento	*Se tienen en cuenta las siguientes ideas como fundamento del caso:* *El uso de la Matemática permite analizar el problema presentado, estudiar qué variables influyen y cómo se relacionan.* *La noción de Probabilidad ayuda a* ***predecir la ocurrencia de un evento****. En este caso, nos ayuda a estimar la probabilidad de que la pileta de tal club se encuentre habilitada un día aleatorio del verano.*

En cuanto a que "*el empleo de la Matemática puede afectar en la elección de un club*" se precisó que "*la aplicación de diferentes herramientas de la Matemática, puede resultar útil en la decisión de la elección de un club para concurrir en el verano, o en las vacaciones*". Acerca de la expresión "*los datos obtenidos se emplean para calcular la probabilidad…*", debería aclararse la probabilidad "*de qué*" o decirse "*se emplean para calcular diferentes probabilidades*".

Tabla 4.7. Notas para el docente elaboradas por G4

Parte	Contenido
Tema	*En esta historia se puede observar la implementación de la Matemática en casos de la vida real. Una egresada universitaria enfrenta el problema de decidir* ***cuál es el destino más apropiado*** *para realizar su viaje (...)*
Trama	*(...) para lo cual deberá tomar en cuenta variables como el costo del viaje, de qué manera lo paga (compra anticipada, en cuotas), tiempo del viaje, temporada, la probabilidad de poder realizar las excursiones planeadas, clima, como también la probabilidad de que el lugar escogido sea de aporte para lo que estudió. Cuanto mayor sea la cantidad de datos disponibles para calcular la probabilidad de un acontecimiento, más preciso será el resultado calculado. Otras funciones matemáticas de aplicación en el caso incluyen el cálculo de intereses, la comparación entre costos, interpretación de información, cálculo de porcentajes.*
Fundamento	*Es interesante destacar que esta actividad puede utilizarse para abordar temas correspondientes a Geografía. Y aún más, puede utilizarse también para tratarlo desde ambas disciplinas a la vez (Matemática y Geografía) para realizar un trabajo interdisciplinario.* *Entre las grandes ideas que sirven de fundamento a este caso se incluyen las siguientes:* *1. El empleo de la Matemática puede* ***influir en la decisión*** *que se adopte sobre una compra.* *2. La noción de Probabilidad permite* ***predecir los resultados*** *de ciertos acontecimientos.* *3. Los datos obtenidos se emplean para* ***calcular la probabilidad****. Cuanto* ***mayor sea la***

	***cantidad de datos**, más confiable será la predicción.* *4. En los cálculos matemáticos, la razón y la lógica pasan a veces a segundo plano en **presencia de preferencias personales**.*

Acerca de "*estimar o predecir las variables*" se aclaró que lo que se "*estima son ciertos valores característicos de una variable*". Con relación al posible "*trabajo interdisciplinario*" se hizo notar que el mismo requiere una integración más profunda y sistemática entre las disciplinas involucradas; de todos modos, se rescata la intencionalidad de articular entre sí a distintas materias habituales de la escolaridad secundaria.

Una primera apreciación de las notas para el docente elaboradas por los grupos (Tablas 4.4 a 4.7) es que se ven influenciadas por las notas para el docente del caso "La insoportable fealdad del Subaru" de Wassermann (1994), empleado como material bibliográfico. Presentan una introducción en la que se comenta de manera sucinta el "tema del caso" mediante una breve descripción de la idea central (temática) del relato. Corresponden a la elección de jugadores para la selección de fútbol (G1), una empresa de viaje de egresados del secundario (G2), un destino de vacaciones de una egresada universitaria (G3) o un club para el verano (G4). En el desarrollo de las notas o "trama del caso" se mencionan las variables que los estudiantes consideran que se deben tener en cuenta y se plantean posibles técnicas de análisis, como ser la elaboración de tablas y la consideración de la relación entre variables para la toma de decisiones. Para concluir las notas, los estudiantes especifican las ideas que les sirvieron de fundamento para elaborar el caso, resaltando la importancia de la Probabilidad en la toma de decisiones, en la predicción de resultados y la incorporación de preferencias personales entre los aspectos a considerar.

De los cuatro grupos, G1 fue el grupo que presentó menos influencias de las notas para el docente de Wassermann (1994), proponiendo notas específicas para el caso que elaboraron. De los tres grupos restantes, G4 presentó un formato diferente al de la autora de referencia, donde el "tema" forma parte del "fundamento" del caso.

Cabe advertir que no se coartó la creatividad en las propuestas aun cuando estas no eran las adecuadas o fáciles de responder. Se parte del supuesto que se aprende mejor en un contexto donde se explicitan las creencias de cada uno.

4.2.2.2. El relato

A continuación, se presenta un breve resumen de los relatos elaborados por cada uno de los grupos. Se exponen de manera completa en los Anexos A.2 a A.5.

G1- "Pasaje a Rusia"

Este caso presenta el dilema acerca de comprar un boleto para viajar a Rusia a ver a la selección argentina de fútbol, sin saber aún si clasificó o no para el mundial del año 2018. Se expone la situación de la selección argentina, de sus rivales, de los partidos ganados y perdidos, el historial de los candidatos a formar parte de la selección. Los estudiantes deben seleccionar qué jugadores propondrían, de una lista donde aparecen distintas estadísticas y variables, las cuales deberán reconocer, identificar y analizar para sacar sus propias conclusiones. También se detallan tablas de posiciones y diferentes escenarios posibles.

G2- "¿El viaje de tu vida?"

El relato narra las dificultades que atraviesan los alumnos de 4° año de la escuela Nº 187 en la localidad de Firmat a la hora de elegir una empresa para su viaje de egresados. Juan, uno de los alumnos, presenta al curso la propuesta de la empresa Travel Rock para su esperado viaje a Bariloche. El dilema de la elección de la empresa surge debido a que María, Valentina y Pedro tienen otras propuestas. Como no es posible llegar a un acuerdo, acceden a que cada chico pase al frente para que exponga la propuesta de la empresa sin interrupciones. Para cumplir con este objetivo deberán presentar la información referida a la cantidad de días de estadía, el tipo de traslado, la cantidad de excursiones, la cantidad de alumnos liberados, las noches de boliche o libres, la necesidad o no de alquiler de ropa y el costo del viaje. Simultáneamente estos aspectos juegan distintos papeles en cada propuesta.

G3- "¡Faltan 336 horas para el verano!"

Joaquín llega corriendo a su casa muy contento dado que pasó a segundo año de la secundaria sin llevarse ninguna materia. Su padre le pregunta qué va a hacer en el verano con tanto tiempo libre. Joaquín le cuenta que quiere hacer algún deporte e ir a alguna pileta, así que piensa anotarse a algún club, pero no sabe a cuál. Entre Joaquín, su papá, su mamá y su hermano empiezan a analizar diferentes clubes, como son el Club de los Pescadores, Club Progreso, CUSA o el de la Universidad, y las ventajas y desventajas de cada uno. Entre los aspectos que debaten se incluyen la cercanía a su casa, el tipo de pileta, cada cuánto se realiza la limpieza de la pileta, los deportes que se practican en cada club, el medio para trasladarse, el costo de inscripción y de la cuota, entre otros.

Todos los relatos elaborados consideran las características presentes en la Figura 3.1, que consisten en un personaje, con el que el alumno se puede identificar, el cual debe tomar una decisión en una situación de incertidumbre, donde intervienen diversas variables y se incluyen preferencias personales. Para resolver el dilema en el que se encuentra, el personaje consulta a otra persona (amigo, familiar o asesor) con el fin de que lo ayude a analizar las variables para tomar la decisión que le resulte más conveniente.

G4- "Nadando en un mar de posibilidades"

Carla se recibió de Bióloga Marina, destacándose con el mejor promedio de su promoción. Debido a esto, recibe una importante beca de un monto de $15.000 y, sin dudarlo, decide destinarlo a un viaje. Muy emocionada por la noticia se lo comunica a su primo Nicolás, que está estudiando Hotelería y Turismo, para que la ayude a decidir el destino y a organizar el viaje. Su primo se toma unos días para averiguar precios y paquetes, y le consigue tres grandes ofertas. Carla debe analizar los distintos destinos, el tiempo del viaje, la temporada, la cantidad de días de cada paquete, los lugares de interés, la temperatura pronosticada para esa fecha en cada destino, al igual que la probabilidad de precipitaciones que pueda llegar a afectar la realización de las excursiones planeadas, el costo de cada paquete y formas de pago, antes de tomar su decisión.

Un caso elaborado con la intencionalidad de ser utilizado como metodología de enseñanza, con las características antes descritas, generando interés y necesidad de aprendizaje, interacción con compañeros y debate, se encuentra en concordancia con el DCJ el cual establece:

> Como no hay modo de aprender sin cambiar, sin ser movido o conmovido por una inquietud o una necesidad que se convierte en un problema a resolver con otros, es que desde la vinculación entre los sujetos, desde el pensamiento y las acciones que priorizan el encuentro con, y el vivir con, se pretende promover y explorar más posibilidades desde la apertura de sentidos compartidos, la valoración de la propia palabra y la del otro, el escuchar y ser escuchado porque es de este modo que el aprendizaje es posible (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2014, p.12).

4.2.2.3. Las preguntas críticas

A continuación, se presentan las preguntas críticas correspondientes a los casos elaborados por cada grupo. Así como en las notas para el docente (subapartado 4.2.2.1), es posible apreciar una influencia de las preguntas críticas propuestas por Wassermann (1994) en el caso propuesto como ejemplo, distinguiéndose tres características (que se distinguen en color):

- La importancia o la ayuda que brinda la Matemática a las resoluciones de situaciones problemáticas.
- La relevancia de cuantificar la posibilidad de ocurrencias de ciertos sucesos cuando se abordan problemas que responden a situaciones no determinísticas.
- El deseo propio de la personalidad o del rol que ocupa la persona que debe tomar la decisión.

G1

*1. Los números y las estadísticas de los equipos y jugadores, ¿**ayudan** a Sampaoli para tomar la decisión de su formación de equipo? ¿De qué manera?*

*2. El fanatismo de Jorge Sampaoli por River no es desconocido para nadie, el DT no reniega de su amor por la banda. ¿**Influirá esta pasión** a la hora de seleccionar los jugadores? Justifiquen.*

3. ¿La formación y juego del equipo rival afecta en la elección de Sampaoli? ¿Por qué?

*4. En su opinión, ¿**agregarían algún otro jugador** entre las opciones? (En caso afirmativo, ¿cuál?). ¿Por qué?*

*5. ¿**Qué tendrían en cuenta** para elegir a los cuatro jugadores? ¿Qué jugadores elegirían de las opciones presentadas?*

*6. Si hoy es el último día para comprar los aéreos a Rusia, ¿**comprarían los pasajes**? Justifiquen.*

G2

*1. En su opinión, ¿**cómo puede ayudar** la Matemática a los chicos de 4° año a tomar una decisión adecuada en lo que se refiere a la elección de una de las empresas?*

*2. ¿**Cuál es la probabilidad** de que los padres de Pedro elijan el viaje a Brasil? ¿Qué suposiciones o datos fundamentan tu elección?*

*3. ¿**Cuál es la probabilidad** de que los padres de María elijan la empresa Auckland? ¿Qué suposiciones o datos fundamentan tu elección?*

*4. ¿**Cuál es la probabilidad** de que los padres de Valentina elijan la empresa Fernando Tour? ¿Qué suposiciones o datos fundamentan tu elección?*

*5. ¿**Cuál es la probabilidad** de que los padres de Juan elijan la empresa Travel Rock? ¿Qué suposiciones o datos fundamentan tu elección?*

*6. ¿**Cuál es la probabilidad** de que la empresa elegida por la mayoría de los padres sea Auckland? ¿De que sea Fernando Tour? ¿De que sea Travel Rock? ¿Cuál es la probabilidad de que el destino elegido sea Brasil?*

*7. Si fueras uno de los alumnos, ¿qué empresa elegirías? ¿**Influye que hayas averiguado** el pack de alguna de las empresas?*

*8. Si fueras uno de los padres, ¿**qué empresa elegirías**? ¿En base a que se justifica tu elección?*

G3

*1. ¿Creen que la Matemática puede **ayudar** a Joaquín y a su padre a elegir el club para asistir en el verano? ¿De qué manera?*

*2. ¿**Cuál creen que es la probabilidad** de que la pileta del Club de los Pescadores esté disponible algún día cualquiera del verano? ¿Influirá en los cálculos la consulta del pronóstico del clima para el verano?*

*3. ¿**Cuál creen que es la probabilidad** de que alguna pileta del Club Progreso esté disponible algún día cualquiera del verano? ¿Influirá en los cálculos la consulta del pronóstico del clima para el verano?*

4. Al tomar una decisión sobre qué club elegir, ¿cuánto creen que influye la elección de no ir a un club donde no se conoce a nadie por sobre los cálculos matemáticos?

5. ¿Qué club le aconsejarían a Joaquín? ¿En qué datos se basa esta elección?

G4

*1. ¿Cómo puede **ayudar** la Matemática a Carla a tomar una decisión adecuada en lo que se refiere a la elección de su viaje?*

*2. Recurriendo a lo que conocen sobre la noción de Probabilidad, ¿**cuál o cuáles viajes tiene/n mayor probabilidad** de hacer aportes a su experiencia como bióloga marina?*

*3. ¿**Cuál o cuáles de los paquetes tiene/n más probabilidad** de tener temperaturas más altas según la fecha? ¿Creen que esta variable influirá en su elección?*

*4. ¿**Cuál o cuáles de los paquetes tiene/n más probabilidad** de tener bajas precipitaciones? ¿Creen que esta variable influirá en su elección?*

*5. ¿Cómo calcularían la **diferencia entre los costos** por pagar en 12 o 6 cuotas o de contado?*

*6. ¿Cuál de los viajes **le conviene más**? Especificar todas las variables tenidas en cuenta.*

En las inquietudes que se desprenden de los casos formulados, se advierte que el “cálculo” de las probabilidades en cuestión en principio no encuadran en los significados clásico o frecuencial de Probabilidad (subapartado 2.2.1), si bien podrían constituirse en disparadores de los mismos, tienen características más cercanas al significado subjetivo.

Las preguntas críticas planteadas invitan al “alumno” (potencial alumno de nivel medio) a pensar y reflexionar sobre cada una de las variables emergentes de cada relato y su influencia en la toma de decisión que debe realizar el personaje. La finalidad de las preguntas es fomentar el pensamiento crítico, mediante el análisis conjunto de las variables, incluyendo las preferencias personales. Esto se condice con las capacidades que, según el DCJ, se espera que desarrollen los estudiantes de secundaria, tales como: comprender, interpretar, producir y comunicar diversidad de textos; enfrentar y resolver problemas de diversa naturaleza y en diferentes contextos; pensar de manera crítica y creativa; trabajar y convivir con otros (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2014).

Acerca de lo observado en la segunda dimensión de análisis, “Enseñanza de Probabilidad en primer año”, los estudiantes del PM realizan propuestas para introducir un pensamiento no determinista al inicio del nivel secundario de educación que se plasman en decisiones de enseñanza (*KCT*) previendo situaciones de aprendizaje de sus futuros estudiantes del nivel (*KCS*). Todas ellas, basadas en intenciones constructivistas.

Las posibilidades reportadas de modo espontáneo (consigna 2) fueron variadas y bastante estándar. El método de casos como posibilidad metodológica no surgió entre las opciones iniciales aunque los futuros profesores sí pudieron concretar el pedido cuando fueron invitados a proponer casos (consigna 5) de manera completa: notas para el docente, relato y preguntas críticas. Las temáticas fueron variadas y el estilo predominante fue similar al caso dado como ejemplo (Subaru), con modos de expresión cercano a los potenciales alumnos de secundaria.

4.3. Análisis de casos

En esta dimensión se efectúa una interpretación del análisis de casos que los participantes de la investigación realizaron a través de las respuestas a las preguntas críticas y la elaboración de notas para el docente de un caso de la bibliografía (subapartado 4.3.1) y de un caso elaborado por sus compañeros (subapartado 4.3.2).

4.3.1 Caso de la bibliografía

Los alumnos debieron responder las preguntas críticas del caso propuesto "La insoportable fealdad del Subaru" (subapartado 4.3.1.1) y luego plantear las notas para el docente que considerasen pertinentes al caso en cuestión (subapartado 4.3.1.2).

4.3.1.1. Respuesta a las preguntas críticas

En las Tablas 4.8 a 4.16 se recorren de manera sucinta las respuestas elaboradas por los cuatro grupos para cada una de las ocho preguntas que plantea Wassermann (1994) para el caso "La insoportable fealdad del Subaru", con el objetivo de hacer explícito el desempeño de los estudiantes ante la resolución del caso.

Tabla 4.8. Respuestas grupales a la pregunta crítica nº1 del caso propuesto (Subaru)

En su opinión, ¿cómo puede ayudar la Matemática a Bonnie y Miko a tomar una decisión adecuada en lo que se refiere a la compra de un auto usado?	
Grupo	**Respuesta**
G1	*La Matemática puede ayudar a Bonnie y Miko a tomar una decisión adecuada* ***analizando distintas variables*** *como el año de fabricación del auto, kilometraje, gastos posibles en reparaciones en su primer año a partir de la compra, consumo, costo del auto e interés de financiamiento. Su decisión puede estar afectada por* ***deseos*** *u otros factores que la Matemática no puede analizar.*
G2	***Ayudará a calcular*** *los costos de financiación de cada auto así como también la probabilidad de una rotura en el primer año de uso desde la compra.*
G3	*La Matemática ayuda a pensar la situación como un* ***problema*** *y analizarlo, para desglosarlo e identificar las diferentes* ***variables y cómo se relacionan****.*
G4	*La Matemática puede ayudar para hacer un* ***análisis comparativo*** *en cuanto a los gastos de mantenimiento, consumo de cada automóvil, costo inicial, reparaciones, intereses.*

Según lo consignado en la Tabla 4.8, los cuatro grupos coinciden en que la Matemática ayuda a plantear situaciones cotidianas como problemas, identificando las variables y cuantificándolas para facilitar la comparación entre ellas y su repercusión en la toma de decisiones. El G1 trae a colación, cuestiones que escapan a la Matemática como ser el deseo personal. En cuanto a la ventaja de poder plantear situaciones de la vida real en lenguaje matemático, el DCJ establece:

> (...) el hacer Matemática es un trabajo de modelización cuyo motor es la resolución de problemas. Así planteado, modelización y resolución de problemas están íntimamente imbricados. La modelización se caracteriza por reconocer y recortar una problemática de la situación considerada, elegir una teoría para tratarla en función de las relaciones entre las variables y producir conocimientos nuevos sobre dicha problemática; permite una mirada integradora de la actividad matemática (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2014, p.47).

De los cuatro grupos, como se observa en la Tabla 4.9, los dos primeros refieren a la probabilidad del suceso "no deba ser reparado durante el primer año", pudiéndose diferenciar entre "casi nula" y "menor al 50%"; mientras que los restantes dos aluden a la probabilidad del complemento del suceso, es decir: "deba ser reparado durante el primer año", de una manera más cualitativa, afirmando que la probabilidad es "alta". Respecto a si probar el auto facilitaría o no el cálculo de la probabilidad, tres de los grupos dicen que no, mientras que para G3 sí facilitaría el cálculo si hubiera un desperfecto, ya que eso aumentaría la probabilidad de necesitar repararlo durante el primer año.

Tabla 4.9. Respuestas grupales a la pregunta crítica nº2 del caso propuesto (Subaru)

Recurriendo a lo que conocen sobre Probabilidad, ¿qué probabilidad creen que hay de que el Honda Prelude modelo 84 que ha recorrido 400.000 kilómetros, no tenga que ser reparado durante un año, contado a partir de la compra? ¿Facilitará los cálculos el hecho de probar el auto? ¿Qué suposiciones se están haciendo?	
Grupo	**Respuesta**
G1	*Creemos que la probabilidad es **casi nula** de que no tenga que ser el Honda reparado durante un año a partir de la compra, ya que cuenta con 400.000 km recorridos y 8 años de antigüedad. **No facilitará** los cálculos el hecho de probar el auto, pues suponemos que el vendedor presenta en buenas condiciones al mismo pero no significa que en unos meses no pueda tener una falla.*
G2	*Analizando las distintas variables vemos que en el caso del auto Honda Prelude tenemos cinco variables para analizar: Cantidad de dueños anteriores, Accidentes que tuvo, Años de antigüedad, Km recorridos, Precio. Consideramos como variables positivas que haya tenido un solo dueño y no tuvo accidentes, mientras que negativas el tener 8 años de antigüedad y 400.000 km recorridos. Al mismo tiempo nos parece que las variables negativas tienen mucho más impacto en la probabilidad de rotura, por lo que la probabilidad de que no sea reparado durante el primer año es **inferior al 50%. No facilitará** los cálculos probar el auto, puesto que si no falla en la prueba no nos asegurará que no falle posteriormente.*
G3	*Basándonos en lo que dice el vendedor, creemos que la probabilidad de que el Honda Prelude 84 **deba ser reparado** en un año es **alta**, ya que tiene 8 años de antigüedad y 400.000 kilómetros recorridos. Con los datos del problema no se puede calcular la probabilidad. Probar el auto **facilitará** los cálculos en caso de notar algún desperfecto en la recorrida, lo que aumenta la probabilidad de repararlo en el año.*
G4	*Creemos que, si bien, el auto no tuvo ningún accidente y funciona bien, al tener ocho años de uso y 400.000 km de recorrido podemos decir que la **probabilidad de ser reparado** el primer año **es alta**. El hecho de probar y que ande correctamente el automóvil **no me asegura** que a futuro no necesite reparaciones.*

Como emergente de la propuesta interesó analizar:

> Cómo estimar empíricamente cuál es la probabilidad de que un auto honda, modelo 84 con ocho años de antigüedad y 400.000 km recorridos no tenga que ser reparado en el transcurso del primer año después de su compra.

Como vemos, los estudiantes hacen referencia a que la probabilidad de que un Honda, de las características señaladas, no requiera reparación en el transcurso del primer año después de su compra es menor al 50%, cuando lo correcto sería decir menor a 0,50. No correspondería usar porcentajes cuando el conjunto es infinito. Lo correcto es emplear números probabilísticos. Como señala Klimovsky (1997), “los enunciados probabilísticos plantean una serie de cuestiones epistemológicamente complejos. Son difíciles de verificar y refutar. De lo que se dispone generalmente como dato para controlar hipótesis probabilísticas son proporciones en las muestras” (p.75). En una muestra (subconjunto finito de una población) sería correcto sostener que menos del 50% de los autos necesitó reparación.

Adicionalmente, en la instancia de puesta en común se ahondó acerca de qué se entiende por “reparar”, concluyendo que es a su vez un término complejo (por la multiplicidad de elementos componentes).

Las respuestas consignadas en la Tabla 4.10 son muy similares a la pregunta anterior (Tabla 4.9), pero la estimación de la probabilidad se ve influenciada por el comentario del vendedor respecto a los dos años más de antigüedad. Se logra entrever un pensamiento determinista respecto de cómo afectarían esos dos años en las averías o necesidad de reparación del auto. Parece haber alguna relación entre la antigüedad y la probabilidad de necesitar reparación; sin contemplar otras posibles variables, como por ejemplo “mantenimiento del auto”.

Tabla 4.10. Respuestas grupales a la pregunta crítica nº3 del caso propuesto (Subaru)

¿Qué probabilidad creen que hay de que el Célica modelo 82 no tenga que ser reparado durante un año, contado a partir de la compra? ¿Facilitará los cálculos el hecho de probar el auto? ¿Qué suposiciones se están haciendo?	
Grupo	**Respuesta**
G1	*Creemos que la **Probabilidad es casi nula** de que el Célica modelo 82 no tenga que ser reparado durante el primer año a partir de su compra, pues el auto posee 10 años de antigüedad y el vendedor (con su experiencia formada con el sentido común de la Probabilidad) le advierte que tendrá que pensar en gastos por mantenimiento mecánico a corto plazo. Consideramos **las mismas suposiciones que en la pregunta 2**.*
G2	*Analizando las distintas variables vemos que en el caso del auto Toyota Célica tenemos dos variables: Precio, Años de antigüedad. Si bien el precio es favorable, por estar acorde al monto de dinero con el que cuenta Bonnie, consideramos que influye en mayor medida el hecho de que sea un auto con muchos años de antigüedad, 10 años, lo que nos hace suponer que ha recorrido una cantidad considerable de kilómetros a lo largo de estos. Por lo tanto, podemos concluir que **la probabilidad de no rotura** en menos de un año de uso será i**nferior al 30 %**.*
G3	*Al tener dos años más de antigüedad, **aumenta la probabilidad** de repararlo durante un año. Probar el auto facilitará los cálculos en caso de notar algún desperfecto en la recorrida, lo que aumenta la probabilidad de repararlo en el año. Al igual que en la respuesta anterior, **dependerá de si se nota algún desperfecto en la prueba**.*
G4	*Al tratarse de un auto con más de 10 años de uso, **la probabilidad de que no tenga que ser reparado es muy baja**, comparado con el caso anterior.*

Al igual que en la pregunta anterior, interesó analizar:

> Cómo estimar empíricamente cuál es la probabilidad de que un auto Célica modelo 82 no tenga que ser reparado durante un año, contado a partir de la compra.

En este caso, en lugar de la expresión “**es inferior al 30%**”, lo correcto sería decir que la probabilidad de que un Célica, de las características señaladas, no requiera reparación en el transcurso del primer año después de su compra es menor a 0,30.

Los elementos considerados y la connotación que le dieron los participantes (Tabla 4.11) se presentan resumidos en la Tabla 4.12 donde se listan las variables en cuestión (precio, kilometraje, averías) en distintos colores, que referencian:

- Blanco: no considera la variable.
- Celeste: considera la variable sin valoración o de modo neutro.
- Verde: considera la variable con valoración positiva.

- Rojo: considera la variable con valoración negativa.

Tabla 4.11. Respuestas grupales a la pregunta crítica nº4 del caso propuesto (Subaru)

¿Cómo calcularían ustedes la diferencia de costos entre lo que tendría que pagar Bonnie en conceptos de intereses por un préstamo de $3.500 a tres años de plazo y a una tasa de 12,5% anual, contraído para comprar el auto más nuevo (el Prelude modelo 87), y lo que tendría que pagar por la reparación de las probables averías mecánicas que sufriría, a lo largo de tres años, el auto más barato y más antiguo (el Célica modelo 82)?	
Grupo	**Respuesta**
G1	*El auto Prelude modelo 87 cuesta $8000, de los cuales deberían pagar en efectivo $4500 y el resto ($3500) es financiado en tres años con un interés de $4812,5 - $3500= $1312,5. Hay que tener en cuenta que el auto tiene 200.000 km realizados en cinco años, un promedio de 40.000 km por año, siendo que lo normal es 20.000 km anuales. Con lo cual es un número a considerar, pues seguramente va a tener averías mecánicas. El auto Célica modelo 82 cuesta $2900 más impuestos. Al ser un auto con más antigüedad que el anterior y teniendo en cuenta que en general luego de los 3 años de comprar un vehículo cero kilómetro hay que empezar a repararlo,* ***va a ser bastante probable que se tengan gastos de mantenimiento durante el primer año luego de adquirirlo****.*
G2	*Para calcular la diferencia de costos entre ambos autos, nos parece que, si bien son altos los costos de financiación, al ser "nuevo" no tendrá que gastar tanto en arreglos, como sí para el auto Célica modelo 82. Sobre este último podemos decir que tiene un precio acorde a la cantidad de dinero con la que cuenta Bonnie, pudiendo ahorrar la diferencia para futuras averías, pero* ***es probable que aún necesite más dinero para estas****.*
G3	*A los costos por el auto más nuevo contando los intereses de la financiación los podemos calcular porque tenemos todos los datos. Por otro lado,* ***no podemos estimar el gasto que tendrá en reparaciones el auto más viejo, y tampoco podemos dar por hecho que el auto nuevo no va a tener ninguna avería en los próximos tres años****.*
G4	*Costos de los autos: Prelude $8000. Modelo 82 $2900. Inicialmente Bonnie cuenta con $3000 dólares que le regala su abuela más $1500 de sus ahorros, sumando un total de $ 4500. Si Bonnie aceptara el préstamo de $3500 a tres años de plazo con una tasa anual del 12,5%, terminaría pagando dicho préstamo por un monto de $ 812,5. 4812.5 + $ 4500 = $9132,5. Finalmente el costo total del Prelude sería de $9132,5. El Célica modelo 82 al ser el más antiguo tiene mayores probabilidades de sufrir averías a lo largo de tres años.* ***Como la diferencia entre el costo de estos autos es de $6400, puede que gaste más de esta cifra en reparar el Célica****.*

Tabla 4.12. Síntesis de variables y connotaciones consideradas en la pregunta nº4 del caso propuesto (Subaru)

Grupo	**G1**		**G2**		**G3**		**G4**	
Auto	*Prelude 87*	*Célica 82*	*Prelude 87*	*Célica 82*	*Prelude 87*	*Célica 82*	*Prelude 87*	*Célica 82*
Precio								
Km								
Averías								

Para calcular la diferencia de costos entre ambos autos, dos grupos (G1 y G4) proponen cálculos similares contemplando los precios de venta y las tasas de interés del auto más moderno. Los otros dos grupos explicitan que a esos cálculos se los puede realizar, sin entrar en detalle de cómo los harían. Respecto a los gastos por posibles averías, G2 y G4 establecen que es probable que sean mayores que los gastos de financiamiento. De los cuatro grupos, G1 es el único que considera los km del Prelude 87 como causa de las posibles averías que podría sufrir, incurriendo así en un mayor gasto. Respecto al precio de los autos, G2 valora negativamente el precio del Prelude 87, mientras que G3 valora positivamente el precio del Célica, por ser más acorde al dinero que dispone Bonny. Solo G3 establece que no pueden asumir que el auto Prelude 87 no va a tener ninguna avería por ser el más nuevo, como tampoco puede estimar los gastos de mantenimiento del Célica 82. Ninguno de los grupos contempla la posibilidad de recuperar el dinero invertido en el caso de vender el auto más nuevo en un futuro.

En la instancia de puesta en común se trabajó la idea de que, si se considera que el costo de reparación de autos con ciertas características similares varía aleatoriamente, en ese contexto sería razonable estimar el costo medio de reparación de un auto de esas características (como por ejemplo el Célica modelo 82) y se podría eventualmente usar ese costo medio para predecir el valor del costo de reparación de las probables averías.

Tabla 4.13. Respuestas grupales a la pregunta crítica nº5 del caso propuesto (Subaru)

<table>
<tr><th colspan="2">¿Cómo calcularían el costo de operación durante un año del Toyota Célica modelo 82? ¿Del Honda Prelude modelo 84? ¿Del Prelude modelo 87? ¿Del Subaru modelo 90? ¿Qué variables incluirían en el cálculo?</th></tr>
<tr><th>Grupo</th><th>Respuesta</th></tr>
<tr><td>G1</td><td>Respecto a lo que cuesta mantener a cada uno de los autos en un año tendríamos en cuenta los siguientes costos: combustible, seguro vehicular, mantenimiento e impuestos (patente, etc.). El combustible, si todos tienen el mismo motor, es el mismo para todos (Toyota Célica modelo 82, Honda Prelude modelo 84, Honda Prelude modelo 87, Subaru modelo 90). El consumo es proporcional al tamaño del motor. Respecto al mantenimiento, va a tener más gastos el auto que tenga más antigüedad y km realizados, es decir, el Toyota Célica y el Honda Prelude modelo 84 tendrán más gastos que los demás autos. El seguro e impuestos son proporcionales al año de antigüedad del auto.</td></tr>
<tr><td>G2</td><td>Para calcular el costo de operación de los autos tuvimos en cuenta las siguientes variables: precio, impuestos y/o intereses, averías, combustibles, seguro.
Sumaríamos todas estas variables proporcionales a las características de cada auto según especificamos en las preguntas anteriores.</td></tr>
<tr><td>G3</td><td>Para calcular el costo de operación de cada auto analizamos las siguientes variables: antigüedad, km recorridos, consumo y la probabilidad de avería. En base a esto, podemos estimar que el Subaru es el auto con menos costo de operación. El siguiente con menos costo es el Honda Prelude 87. Luego el Honda Preluce 84. Y por último el auto con mayor costo de operación será el Toyota Célica 82.</td></tr>
<tr><td>G4</td><td>Variables a tener en cuenta a la hora de hacer un análisis comparativo de los autos:
*Costo de operación durante un año
<table>
<tr><td>Toyota Célica:
-Combustible
-Reparaciones
-Impuestos
-Costo*: $2900
-Antigüedad:10años</td><td>Honda 84:
-Combustible
-Reparaciones
-Impuestos 400.000
-Costo*: $3995
-Antigüedad:8 años</td><td>Prelude 87:
-Combustible
-Reparaciones
-Impuestos 200.000
-Costo*: $8000
-Antigüedad:5 años</td><td>Subaru:
-Combustible
-Reparaciones
-Impuestos 70.000
-Costo*: $6995
-Antigüedad:2 años</td></tr>
</table>
Con respecto al Toyota Célica, para calcular el costo de operación durante un año tendríamos que tener en cuenta que deberá tener más reparaciones, lo cual aumentaría los gastos por tener 10 años de uso. Otro factor a tener en cuenta es el costo del combustible; sin embargo, no podemos dar un dato certero de cuánto gastaría cada auto ya que no hay suficiente información de este tipo. Los impuestos, al ser un auto con muchos años, son un poco menos costosos que los restantes. Con respecto al Honda 84, para calcular el costo de operación con sus reparaciones, son costosas, pero menos que el Célica, ya que se trata de un auto con 8 años de uso.
Los impuestos aumentan el precio un poco más que el Célica por ser un auto más nuevo.</td></tr>
</table>

Como se aprecia en la Tabla 4.13, los cuatro grupos listan las variables explicitadas en el texto y algunas agregadas por ellos. Particularmente G3 propone una lista de los autos ordenados según el costo estimado de menor a mayor. Por su parte, G4 presenta cierta sistematización al momento de analizar las variables mediante el armado de un cuadro comparativo donde se explicitan las mismas cinco variables para todos los autos, completando a su vez con los datos que tenían a disposición para cada uno, y finaliza con un análisis descriptivo de otros factores de los que no disponen información.

Tabla 4.14. Respuestas grupales a la pregunta crítica nº6 del caso propuesto (Subaru)

Al tomar una decisión sobre la compra de un auto, ¿en qué medida la variable de la preferencia personal debería tener prioridad sobre los cálculos matemáticos? Al elegir un auto, ¿se dejarían guiar por los números o por sus sentimientos? ¿Cómo justifican su posición?	
Grupo	**Respuesta**
G1	*Al tomar una decisión sobre la compra de un auto la variable de la preferencia personal debe ser* ***menos importante*** *que los cálculos matemáticos, pero no dejarla de lado, pues los sentimientos pueden afectar al humor de una persona y perjudicarla en un futuro.*
G2	*En nuestra opinión,* ***la variable de preferencia personal no debería tener demasiado impacto*** *en la decisión ya que consideramos como más importante que la decisión sea mayormente objetiva. Si bien el deseo influye a la toma de decisión, este puede "caerse abajo" debido a que el auto sufra demasiadas averías mientras que una buena decisión sobre un auto que no sufra problemas será satisfactoria a largo plazo.*
G3	*A la hora de comprar un auto* ***hay que tener en cuenta las dos variables****, y que ninguna tenga mucha preponderancia sobre la otra. Para elegir un auto lo hacemos en función de las posibilidades económicas y de la necesidad de tener el auto, pero no por eso vamos a comprar un auto que no nos guste.*
G4	*Consideramos que la preferencia personal influye en la decisión de comprar un auto, pero creemos que* ***no tiene prioridad sobre los cálculos matemáticos****. Estos últimos nos aportan información aproximada de los costos para poder tomar una decisión más acertada.*

Como se desprende de la Tabla 4.14, tres de los cuatro grupos (G1, G2 y G4) consideran que la variable de la preferencia personal debería tener menos prioridad que los cálculos matemáticos; en cambio G3 sostiene que ambas variables deben considerarse, sin explicitar una prioridad. Se observa en todas las respuestas una marcada tendencia al "deber ser" o considerar que los cálculos matemáticos llevan a una elección más acertada, aun habiendo realizado esos cálculos con suposiciones.

A continuación, se presenta parte del intercambio de opinión que tuvo lugar entre los estudiantes en el segundo encuentro, generado respecto de considerar la preferencia personal o los cálculos matemáticos, a la hora de tomar una decisión como es la compra de un auto:

> 2.T.343: ¿Ustedes qué harían entonces? Ella ya dijo y compartió. Se guiarán por los deseos… sería mitad y mitad…
> 2.E.344: Yo no...
> 2.E.345: ¡**No vas a manejar un auto que no te gusta**!
> 2.E.346: Pero ¿qué no te puede gustar?
> 2.E.347: Yo dije "no me voy a comprar un auto ni que sea blanco ni bordó", o sea esa era mi condición...
> 2.E.348: **Un auto es un auto**.
> 2.E.349: No, después del primero decime... (Risas).
> 2.E.350: Eso tiene que ver mucho con la personalidad de cada uno, **yo priorizaría más la necesidad, que el deseo, el modelo del auto**, el color...

A la hora de recomendar un auto debiendo excluir el Subaru (Tabla 4.15), G1 es el único que propone el Célica, mientras que los otros tres grupos recomiendan el Honda Prelude 87. En particular G3 plantea una alternativa (Honda Prelude 84) según el uso que se le planee dar: si solo se va a utilizar para pasear los fines de semana consideran que las averías serían menos probables y entonces recomendarían comprar un auto más viejo, con menor costo de compra.

Tabla 4.15. Respuestas grupales a la pregunta crítica nº7 del caso propuesto (Subaru)

Excluyendo el Subaru, ¿cuál de los autos creen ustedes que representa la mejor opción desde el punto de vista de la relación entre el valor y el precio? ¿En qué cálculos se basa esa elección?	
Grupo	**Respuesta**
G1	*Representa la mejor opción el auto **Toyota Célica** desde el punto de vista de la relación entre el valor y el precio. Esta elección se basa teniendo en cuenta el modelo de año del auto, kilometraje, precio e intereses de financiamiento, cantidad de dueños anteriores, costos de mantenimiento mecánico.*
G2	*Excluyendo el Subaru, consideramos que el **Prelude modelo 87** es la mejor opción desde el punto de vista de la relación valor – precio debido a que, aunque los costos de financiación sean elevados, las características generales del auto son buenas como se especifica en el texto y en parte de la pregunta 4.*
G3	*La mejor opción a la hora de elegir un auto depende del uso que se le va a dar. Por ejemplo, si se va a usar "mucho" elegiríamos comprar el **Honda Prelude 87**, en cambio si se quiere por ejemplo solo para pasear los fines de semana, al no tener mucho uso, es menos probable que se averíe, entonces elegiríamos comprar uno más viejo, pero con menor costo de compra, como el **Honda Prelude 84**.*
G4	*Desde el punto de vista de relación entre el valor y precio de los autos, la mejor elección sería el **Honda Prelude modelo 87**, ya que se encuentra en buenas condiciones y comparado con los demás autos es el que menos años de uso tiene, por ende los gastos en reparaciones probablemente sean menores que los otros.*

Cuando tuvieron que realizar la recomendación para la compra del auto (Tabla 4.16), y luego del análisis al que los invitan las preguntas críticas, cada uno de los cuatro grupos elige recomendar a Bonnie un auto distinto. G1 recomienda el Toyota Célica, G2 el Subaru, G3 el Honda Prelude 84 y G4 el Honda Prelude 87.

Tabla 4.16. Respuestas grupales a la pregunta crítica nº8 del caso propuesto (Subaru)

¿Qué auto debería comprar Bonnie? ¿Qué le aconsejarían? ¿Qué datos respaldan su elección?	
Grupo	**Respuesta**
G1	*Teniendo ahora en cuenta el Subaru cuyo precio es $6.995, Bonnie si compra este auto tendrá que pagar $4.500 en efectivo y financiar $2.495, más los gastos que deberá considerar para su mantenimiento (menor a los demás autos por tener 2 años de antigüedad). Bonnie debería comprar el **Toyota Célica**, pues es uno de los autos que prefiere (seguiría sus sentimientos) y le conviene en relación valor-precio por lo que justificamos en la pregunta anterior.*
G2	*Las mejores opciones a considerar son el Subaru y el Prelude modelo 87. Creemos que la mejor decisión sería comprar el Subaru, ya que es un auto en muy buenas condiciones: dos años de uso en comparación a cinco del Prelude, 70.000 km contra 200.000 y $6.900 contra más $8000. Pensamos que es importante comprar algo con lo que nos sintamos a gusto pero en este caso las condiciones del **Subaru** son altamente favorables.*
G3	*Como en la respuesta anterior dependería del uso que le va a dar. Podemos asumir que por la edad que tiene no le va a dar mucho uso. Entonces le recomendaríamos comprar el **Honda Prelude 84**, que incluso puede pagarlo con el dinero que ya tiene.*
G4	*Le aconsejaremos comprar a Bonnie el **Honda Prelude modelo 87** pues se aproxima a lo que puede pagar y es uno de los más nuevos. Si bien el Subaru modelo 90 es la mejor opción a la hora de comprar la relación entre los valores y precios, tenemos en cuenta la variable del "no deseo" que expresó Bonnie hacia el Subaru.*

El siguiente es un fragmento de la conversación de cierre de actividad que se dio a la consigna 3 en el segundo encuentro:

> 2.T.365: Después de todo lo analizado, veamos qué recomiendan… **el primer grupo, el Célica**, que coincide ahí la respuesta, **el segundo grupo el Subaru,** en realidad es como que dan los dos, dice... bueno, el Subaru y el Prelude 87... Pero entre los dos, se quedan con el Subaru y arman una tablita. Bueno, no una tablita, pero comparan...
> (...)
> 2.T.390: Bueno, y el grupo de NE, de las dos opciones **termina eligiendo el Prelude 84 y el grupo de NE termina recomendando el 87**.
> (...)
> 2.T.399: Bueno, así que las recomendaciones son **todas distintas**...
> (...)
> 2.T.405: … dependiendo de cómo sea tu amigo, vas a terminar eligiendo uno u otro. ¿Y qué suponen que le va a recomendar Miko?
> 2.E.406: El Subaru.
> 2.E.407: ¡El Subaru! (Risas).

A continuación, se presentan dos fotos del pizarrón de instancias de puesta en común del segundo encuentro, donde se fueron registrando las variables contempladas por los estudiantes (Fig. 4.1) así como consideraciones para la elección del auto (Fig. 4.2).

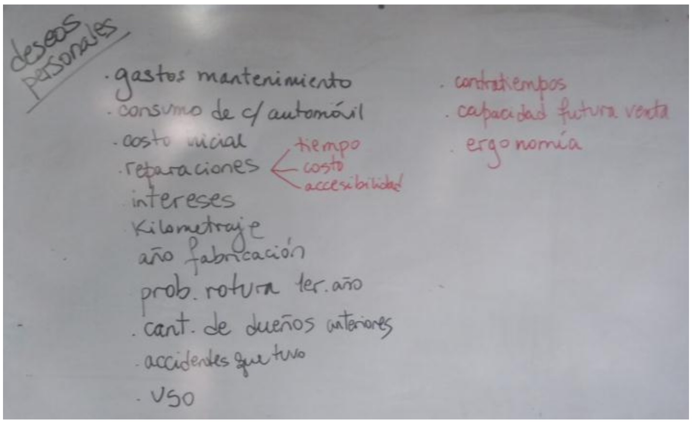


Figura 4.1. Variables emergentes en el análisis del caso (Subaru)

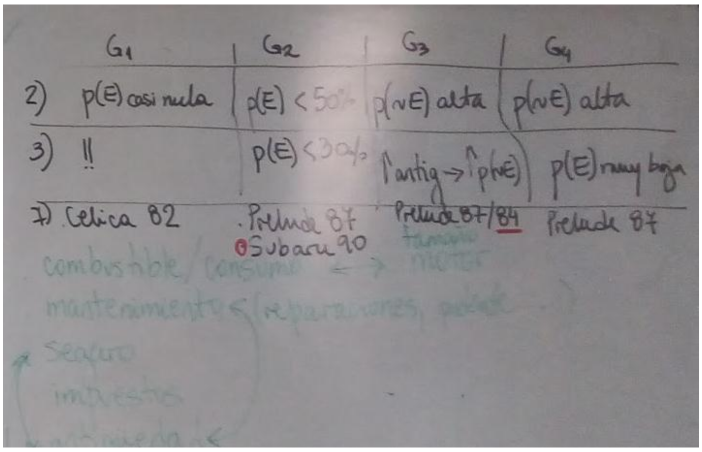


Figura 4.2. Consideraciones en la elección del auto por grupo

En las respuestas de las preguntas críticas del caso surgieron variables (Tabla 4.17) de las que se disponía información precisa, y otras de las que no se disponía informacion, generando incertudubre y sobre las que se realizó una estimacion subjetiva.

Tabla 4.17. Variables emergentes en la puesta en común (caso Subaru)

Variables	Característica
Deseos Personales	Subjetivo
Gastos de mantenimiento	Valoración subjetiva
Consumo de cada automóvil	Valoración subjetiva
Costo inicial	Determinado
Reparaciones (tiempo, costo, accesibilidad)	Valoración subjetiva
Intereses	Determinado
Kilometraje	Determinado
Año de fabricación	Determinado
Probabilidad de rotura al primer año	Valoración subjetiva
Cantidad de dueños anteriores	Determinado
Accidentes que tuvo	Determinado
Uso	Valoración subjetiva
Capacidad futura de venta	Valoración subjetiva
Ergonomía	Subjetivo

4.3.1.2. Respuestas a las notas para el docente

En la Tabla 4.18 se presentan las notas para el docente que los estudiantes propusieron para el caso "La insoportable fealdad del Subaru" (*consigna 4* del instrumento aplicado), sin tener conocimiento de las notas propuestas por la autora del caso.

Tabla 4.18. Notas para el docente propuestas por los estudiantes (Subaru)

Grupo	Respuesta
G1	*Se planteó este caso en la clase para que:* *El alumno tenga en cuenta diferentes variables, algunas analizándolas (las variables planteadas en la situación) y suponiendo otras (de las cuales la situación no presenta información).* *El alumno tenga un acercamiento a la noción de que existen* ***variables aleatorias****.* *El alumno tenga una visión de la Matemática que va más allá del álgebra y la aritmética.* *El alumno* ***tome una decisión justificando adecuadamente****.* *El alumno forme un pensamiento crítico.*
G2	*Consideramos que esta actividad está pensada para:* *Mostrar que la Matemática no es únicamente determinista.* *Hacer notar a los alumnos que los problemas* ***no poseen siempre una única*** *y precisa respuesta.* *Dar a conocer a los alumnos que la Matemática engloba ramas tales como la Probabilidad que se relacionan con* ***fenómenos aleatorios****.* *Nos parece que la actividad, si bien no la propondríamos para introducir un tema, sí la haríamos para introducir la Probabilidad como rama de la Matemática.*
G3	*Momento de la clase: introducción al tema Probabilidad, o fenómenos aleatorios antes de adentrarse.* *Objetivos: analizar y visualizar* ***fenómenos aleatorios*** *a partir de una situación de la vida cotidiana de los alumnos. Que el alumno sea protagonista y* ***tome sus decisiones, que pueda argumentarlas****.* *Da lugar a la subjetividad de los alumnos, al debate o puesta en común.* ***Rompe con la idea determinista*** *de la Matemática.*
G4	*Análisis de distintos casos teniendo en cuenta las variables involucradas.* *Capacidad de* ***tomar decisiones para formar alumnos críticos****.* *Intuición del concepto de Probabilidad.* *Actividad para identificar variables y formas de representación más convenientes de acuerdo a los*

	datos en estudio y su comunicación. *Vinculación de la Matemática con situaciones cercanas a la realidad.* *Relación de Probabilidad y porcentaje.*

De las notas para el docente elaboradas por los estudiantes (Tabla 4.18), se puede observar que las ideas fundamentales que piensan que dieron origen al caso “La insoportable fealdad del Subaru” fueron el reconocimiento de fenómenos aleatorios y las variables intervinientes en una situación, la toma de decisión y la justificación de la misma, la formación de alumnos críticos, la introducción de nociones de Probabilidad “intuitiva” y la posibilidad de mostrar otra rama de la Matemática.

En lo que sigue se comparten las respuestas orales de algunos de los estudiantes respecto a las notas para el docente o ideas fundamentales que consideran que dieron lugar al caso, en el marco de la puesta en común realizada en el segundo encuentro:

> 2.E.444: Nosotras pusimos que se planteó este caso en la clase para que el alumno tenga en cuenta diferentes variables, algunas analizándolas, que serían las variables planteadas en la situación, y suponiendo otras, en las cuales la situación no presenta información. Después que el alumno tenga un acercamiento a la noción de que existen **variables aleatorias**, que el alumno tenga una visión de la Matemática que va más allá del álgebra y la aritmética, que el alumno tome una decisión justificando adecuadamente y que el alumno logre formar un pensamiento crítico.
> (...)
> 2.E.450: Nosotras pusimos tres ítems, como que primero… **comprender que la Matemática no es únicamente determinista**, después hacer notar a los alumnos que los problemas no siempre poseen una única y precisa respuesta y dar a conocer a los alumnos que la Matemática engloba otras ramas, tales como la Probabilidad que se relacionan con **fenómenos aleatorios**…y pusimos algo aparte, que no sé si era parte de la consigan o no, pero que nos parecía que la actividad no la propondríamos para introducir un tema específico, pero sí para mostrar esto de las ramas de la Matemática…
> (...)
> 2.E.452: A diferencia de ellas pusimos que esto es para introducir el tema (Risas) y como objetivos, analizar y **visualizar fenómenos aleatori**os a partir de una situación de la vida cotidiana en los alumnos, que el alumno sea protagonista y **tome decisiones**, que pueda **argumentarla**s, dar lugar a la subjetividad de los alumnos, al debate y puesta en común... y rompe con la idea determinista de la Matemática…
> (...)
> 2.E.455: A nosotras nos pareció que en algún momento de la clase podía ser introducción porque moviliza un poco esto de tengo que responder estas ocho preguntas y no tengo ningún dato. ¿Qué sumo? ¿Qué calculo? O sea, movilizar por algún lado...
> (…)
> 2.E.463: Sí, bueno, nosotras también pusimos lo mismo, como análisis de distintos casos, teniendo en cuenta el análisis de las variables involucradas, capacidad de t**omar decisiones, para formar alumnos críticos**, intuición del concepto de Probabilidad, actividad para identificar variables en forma de representación más conveniente de acuerdo con los datos del estudio y su comunicación, vinculación de la Matemática con situaciones cercanas a la realidad. Y relación de probabilidad y porcentaje...

4.3.2. Casos elaborados por compañeros

En la Tabla 4.19 se muestran las retroalimentaciones que cada grupo recibió del caso elaborado y que resolvió otro grupo de compañeros (*consigna 6*). La retroalimentación abarca las tres partes del caso: las notas para el docente, el relato y las preguntas críticas. Cabe aclarar que G1 resolvió y realizó la retroalimentación del caso elaborado por G3, y viceversa. De igual manera trabajaron G2 y G4.

Se observa que la retroalimentación que realiza cada grupo del caso que les fue asignado resolver se basa en las características básicas que debería tener un caso, con todas sus partes, para ser utilizado para la enseñanza de algún contenido (Fig. 3.1).

Tabla 4.19. Retroalimentación entre los grupos respecto a los casos por ellos elaborados

Parte	Grupo	Retroalimentación
Notas para el docente	G1	(No especificado).
	G2	*Las variables especificadas en las notas para el docente no se utilizaron en nuestro análisis.*
	G3	*Muchos de los objetivos se ven reflejados en la reflexión a la que te lleva la resolución de las preguntas planteadas.*
	G4	(No especificado).
Relato	G1	*Debería ser más* ***corto y conciso****, debe ser necesario que al grupo de alumnos* ***le guste el futbol****.* *No aproxima al alumno al concepto de Estadística.* ***Las variables no están claras****.* *Hay que tener en cuenta que este tipo de problema es temporal.* *Narrar en primera persona para ayudar a identificarse con el personaje.*
	G2	***Lenguaje utilizado cercano a los alumno****s.* ***Relato interesante****.* *Es una situación que se da cada año en las instituciones* *Correcta distribución de la información.* *La Probabilidad no influye mucho en las decisiones.* *En todos los paquetes tendrían que estar especificados las cantidades de días, para que sea más confiable la predicción.*
	G3	*Plantea una* ***situación que puede ser cotidiana para los alumnos de secundaria****.* *Tiene una* ***narrativa*** *en la cual es* ***sencillo*** *poder visualizar las variables a considerar y caracterizarlas.* *Está muy evidenciada* ***la importancia de los gustos y deseos de la elección****.*
	G4	*Muchas opciones sin mar.* ***Explicitan las variables****.* *No tuvimos en cuenta la temporada.* *Integra Geografía con Matemática.*
Preguntas críticas	G1	*La última pregunta es* ***muy abierta****.* *Las preguntas deben estar más orientadas al lector.* *Las preguntas están orientadas a que el alumno* justifique *y* ***dan lugar al debate****.*
	G2	*Preguntas 2 y 5 muy similares.*
	G3	***Son abiertas*** *y orientadas al alumno a responder y argumentar de manera concisa.*
	G4	*Las preguntas* ***tienen respuesta única****, porque los datos están casi explícitos.* *Las preguntas no están guiadas hacia el verdadero objetivo del caso que es elegir un paquete donde Carla pueda poner en práctica lo que estudió y adquirir experiencia.*

En lo que refiere a las notas para el docente, solo G2 y G3 recibieron retroalimentación. Para el grupo que resolvió el caso planteado por G2, las variables especificadas no le fueron de utilidad, mientras que para el grupo que resolvió el caso de G3 los objetivos presentes en las notas se vieron reflejados en la resolución de las preguntas críticas.

Respecto a la narrativa del caso, este debe tener un comienzo intrigante, centrarse en sucesos, importantes, intensificar puntos de vista conflictivos, generar interés por los personajes ("*debe ser necesario que al grupo de alumnos* ***les guste el fútbol***", "***Relato interesante***"), tratarse de casos creíbles ("*Es una situación que se da cada año en las instituciones*", "*Plantea una* ***situación que puede ser cotidiana para los alumnos de secundaria***"), concluir con un dilema, concordar con los temas del currículum, cuidar la lecturabilidad ("*Debería ser más* ***corto y conciso***", "***Las variables no están claras***", "***Lenguaje utilizado cercano a los alumnos***", "*Tiene una* ***narrativa*** *en la cual es* ***sencillo*** *poder visualizar las variables*") e involucrar sentimientos intensos ("*Está muy evidenciada* ***la importancia de los gustos y deseos de la elección***").

Acerca de las preguntas, estas deben ser claras, evitar abstracciones, no ser sugerentes, no poderse responder con "Sí/No" y no ser generales. Referido a esto se observa que G1 recibió la apreciación de ser muy abierta o general y no estar orientada al lector. G2 solo recibió como observación que dos de las preguntas críticas son similares entre sí. Según el grupo que respondió las preguntas de G3, estas son abiertas y orientadas al alumno, invitándolo a la reflexión y justificación. Por otro lado, respecto a las preguntas críticas propuestas por G4, la retroalimentación hace foco en que tienen respuestas únicas y que no guían al lector a resolver el dilema.

A continuación, se recorren algunas devoluciones y bocetos de propuestas emergentes que se realizaron en el momento de la clase (encuentro 4). Acerca de las propuestas, cabe advertir que, si bien algunas situaciones abordadas no encuadran rigurosamente dentro de algunos modelos conocidos, fueron consideradas a fin de aplicar una primera aproximación al tema, en términos disparadores, con una función didáctica en ese sentido.

Acorde a lo planteado por Behar Gutiérrez y Grima Cintas (2004), se trata de una primera aproximación con los estudiantes de Profesorado que a su vez están pensando una primera aproximación con sus "alumnos" de secundario. En tales primeros pasos resulta saludable convivir con cierta imprecisión hasta que se van precisando los conceptos involucrados mediante un desarrollo en espiral.

Al caso "**Pasaje a Rusia**" (elaborado por G1; resuelto por G3)

> 4.E.184: A nosotros no pareció que era muy largo y muy como pesada la lectura. O sea, como que a lo mejor podría haber sido más corta o llevadera, pero bueno, también será que leímos los cuatro trabajos y este era como, ¡wow!... un montón de hojas. (Risas).
> 4.E.185: La lectura te atrapa, por más de que sea largo, o que a nosotras nos pareció largo porque tuvimos que hacerlo acá en un ratito, pero si miramos uno de los puntos del cuadrito que tenemos, lo de la lecturabilidad, es largo, ¿sí?, pero no es confuso, ni nada...
> (…)

4.E.186: El tema es muy interesante, actual y se nota que hubo trabajo, que buscaron información. O sea, hicieron todo el trabajo, que a veces parece de periodista, tiene expresiones de periodista deportivo, está muy bueno, incluso, se acercó al ámbito donde está pensado esto.
(…)
4.E.192: Sí, eso también, tiene que ser sí o sí... gente que le gusta el fútbol, porque a nosotros nos pasó que, por ahí NE que no estaba tan en el tema, había cosas que no podíamos resolver. Pero bueno, eso es muy poco... hay que saber que, si aplicamos esto, que a todos les guste el fútbol, porque el que no, queda muy afuera.
(…)
4.E.200: Sí. Las preguntas debían estar orientadas a que uno pueda responderlas más en primera persona, y el relato también. Por ejemplo, la 1 dice: "si los números y la estadística ayudan a Sampaoli", la verdad que no sé si a Sampaoli o a Juancito, lo ayudan o no lo ayudan. Cuando tenemos que... responder... que uno de los puntos era como meterse en el personaje, entonces como que las preguntas están muy referidas a otros... a lo que harían otros, no lo que haría yo...

En el planteo de la situación se introdujeron ideas relativas a combinatoria (¿cuántas posibilidades hay?) en un diagrama de árbol (Fig. 4.3), como parte del eje Estadística y Probabilidad. También el cálculo o estimación de algunas probabilidades de interés, así como posibles recogidas de datos para un posterior análisis.

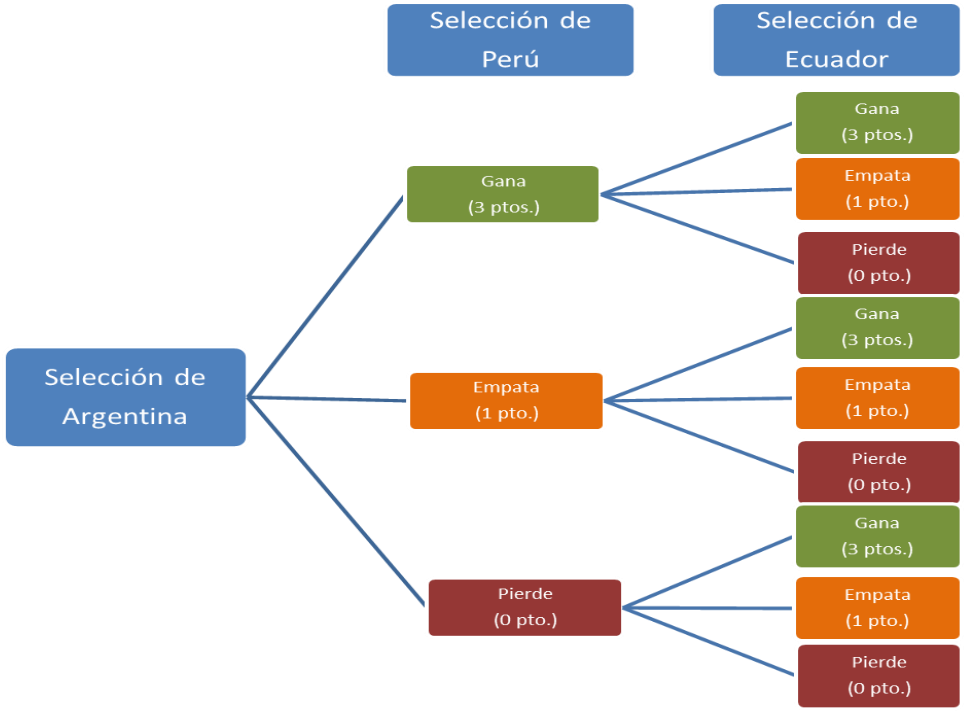


Fig. 4.3. Diagrama de árbol de los posibles resultados en los próximos dos partidos de la selección argentina de fútbol

Si todos los resultados fuesen igualmente probables, ¿cuáles son los posibles valores de los puntajes que suman[5] y sus respectivas probabilidades?

Si se considera que ganar, empatar o perder cualquier partido son resultados igualmente probables, ¿cuál es la probabilidad de que la selección argentina clasifique sin depender de los demás?

Al final de cada rama del diagrama de árbol, conseguir los puntos que obtendría en cada caso y evaluar luego la probabilidad de obtener ese puntaje.

[5] Recordar: los equipos suman tres puntos si ganan, un punto si empatan y cero si pierden.

> ¿Qué probabilidad hay de que Argentina saque cuatro puntos cuando se sabe que empató con Perú? ¿Qué probabilidad hay de que saque cuatro puntos sabiendo que perdió con Perú?
>
> ¿Son las probabilidades calculadas en el ítem anterior iguales a la probabilidad de que Argentina saque cuatro puntos?

Estas preguntas son propicias para referirse a una probabilidad condicional y luego al concepto de eventos o sucesos independientes.

> A partir de las características de los jugadores y los rivales, ¿qué probabilidad hay de que Pinola sea convocado para el próximo partido? ¿Cómo se podría estimar esta probabilidad? ¿En qué se basan para ello?

Aunque esa probabilidad encuadra dentro de una probabilidad subjetiva, sería factible aplicar una encuesta en un curso (luego podría ser replicable a toda la escuela) en la que se pregunte sobre los jugadores de la selección argentina a convocar para el próximo partido.

Si bien en el DCJ no se pone énfasis en el significado subjetivo de la Probabilidad, se ha incorporado porque en la práctica docente, muchas de las inquietudes que surgen espontáneamente de los alumnos tienen que ver con Probabilidad subjetiva. Por tal motivo se ha introducido de manera incipiente.

Al respecto Santaló (1975) le reconoce un sentido menos preciso, donde la probabilidad se evalúa de una manera más global, no restringiéndose a reglas matemáticas. Puntualiza el reconocido matemático español-argentino:

> Sin embargo, tampoco es exacto decir que no tiene sentido hablar de probabilidad en este caso, pues no hay duda de que es posible cierta evaluación de la misma. Podría, por ejemplo, preguntarse la opinión de 100 personas capacitadas e imparciales de un país neutral y dividir por 100 el número de respuestas favorables a la victoria del país A. Es muy probable que, si el resultado arrojase un saldo favorable del 90%, o sea, una probabilidad P=0,9, este resultado no difiriera mucho del que se obtendría si en vez de 100 personas se consultaran a 1000, igualmente capacitadas e imparciales (p.10).

Por otro lado, Quesada Paloma y García Pérez (1988) reconocen a referentes como Keynes, Jeffreys, Savage y De Finetti esfuerzos en establecer una axiomática de la Probabilidad en términos de grados de creencia. Esta concepción, de tipo subjetiva, no requiere repetición de pruebas de un experimento aleatorio ni estabilidad de las frecuencias relativas.

Ejemplifican tomando una hipótesis H: “existe vida en otro sistema solar” y manifiestan que las personas tienen distintos grados de creencias con relación a H, tales como “es poco probable que exista vida en otro sistema solar”.

Desde la teoría subjetiva de la Probabilidad, se afirma que es posible asignarle a H una probabilidad P(H) que representa numéricamente el grado de creencia de una persona en H. De este modo P(H) será distinta para personas diferentes, dado que estas personas tienen distinta información acerca de H y evalúan esta información de diferente manera. Con el Teorema de Bayes se ve cómo es posible modificar P(H) contando con nueva información o datos.

La axiomática de De Finetti se presenta así: "Consideremos un suceso bien determinado y supongamos que no sabemos si va a ocurrir o no. La incertidumbre o duda, acerca de si va o no a ocurrir, a la que estamos sometidos, se presta a establecer comparaciones y, consecuentemente, 'graduaciones'" (Quesada Paloma y García Pérez, 1988, p.39). Luego parte de un conjunto de axiomas, totalmente cualitativo, para llegar a una medida cuantitativa de la probabilidad que cumple los tres axiomas de la Probabilidad matemática.

Al caso "**¿El Viaje de tu Vida?**" (Elaborado por G2; resuelto por G4)

> 4.E.61: Bueno, como grupo lo analizamos y una de las cosas que nos gustó fue el lenguaje que utilizaron. Era como muy propio de los chicos, eran palabras que utilizan los chicos hoy y bueno, relacionado con eso, también, es que resulta interesante el relato, es como que te llega y te atrapa, es como que te vas imaginando qué es lo que está pasando y eso está muy bueno... eso por ahí, digamos una muy buena propuesta porque si no interesa el tema, es como que no te terminás de meter en el tema...
> (…)
> 4.E.87: Bueno y otra de las cosas, supuestamente para mejorar es que vimos, acá en las notas para el docente, que consideraban para analizar, por ejemplo, las variables de cantidad de excursiones, liberados entre otros y eso a nosotros cuando hicimos el análisis no lo tomamos en cuenta porque cada uno no decía, cada paquete digamos, lo que esto incluía, entonces como que, a la hora de analizarlo no lo tuvimos en cuenta. Pero bueno, eso estaba en las notas para el docente y en el trabajo no y otra de las cosas, que en sí las preguntas que nos hicieron eran por ahí, muy monótonas, muy parecidas... en cuanto a la probabilidad de, la probabilidad de, y que, por ahí ciertas cosas no influían en nuestra decisión...

En la puesta en común hubo consenso en establecer un orden de prioridades entre todas las variables intervinientes (costo, noches de boliche, excursiones, liberados…) desde la perspectiva de los "alumnos" involucrados (quienes están terminando la secundaria y planean su viaje de egresados). Para ello una gráfica conveniente es el diagrama de Pareto. De este modo, si el orden de prioridades fuese el comentado por los alumnos del relato del caso el diagrama correspondiente quedaría como se muestra en la Fig. 4.4.

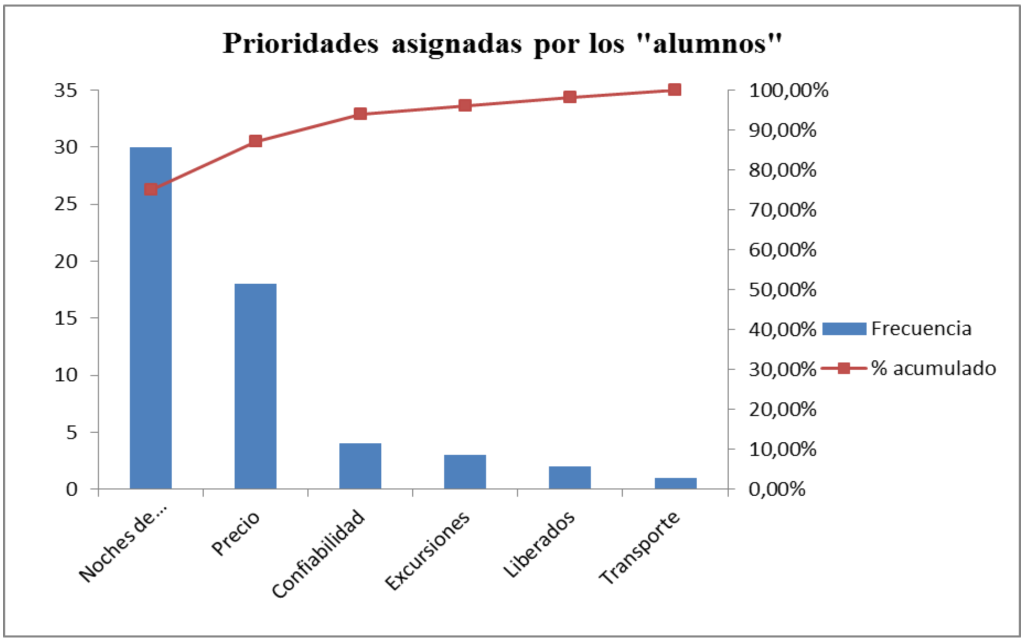


Figura 4.4. Gráfico de Pareto de las variables ordenadas según la prioridad asignada por los "alumnos"

Se puede apreciar la ponderación de las variables intervinientes, la incidencia de las variables y la relación entre las mismas. Por ejemplo, los "alumnos" hacen explícito que la variable "noches de boliche" es prioridad para ellos, al mismo tiempo que la variable "precio", ya que son sus padres los que pagan el viaje y, en última instancia, eligen la empresa.

Al caso "**¡Faltan 336 horas para el verano!**" (Elaborado por G3; resuelto por G1)

> 4.E.238: En cuanto al caso, es bastante sencillo de leer y en cuanto a las variables que había, se veían bien claras, no es que tenías que estarlas buscando, sino que vos tenías, Club Progreso tiene esto, el club tal tiene esto...
> (…)
> 4.E.239: Claro, por ahí tenía como un mínimo de una mezcla, como para que no quede todo tan así, pero estaba bastante caracterizado uno, lo otro… Como para buscar bien las variables y poder hacer, justamente lo que queríamos nosotros, que se nos mezcló un poco, hacer como un cuadro, donde tenías todas las variables….
> (…)
> 4.E.255: Bueno y en cuanto a las preguntas no son cerradas, son abiertas... pero no así abiertas que podés contestar cualquier cosa... sí podés contestar según la opinión de uno mismo.
> (…)
> 4.E.279: El relato es cortito, conciso, pero te centrás, es muy fácil meterte en la narrativa y pensarlo como uno mismo, como si le pasara a un caso común.

Resultó muy fructífera la actividad de organización de la información en un diagrama de decisión por cada club, previa identificación de las variables (distancia casa-club, relaciones sociales familiares-amigos, costo inscripción-cuota, deportes para practicar, características de la pileta), para poder organizarlas con relativa sistematicidad y exhaustividad. En las Fig. 4.5 a 4.8 se va recorriendo cada Club, sombreándose con color verde los aspectos a favor, en amarillo los intermedios y en rojo los desfavorables.

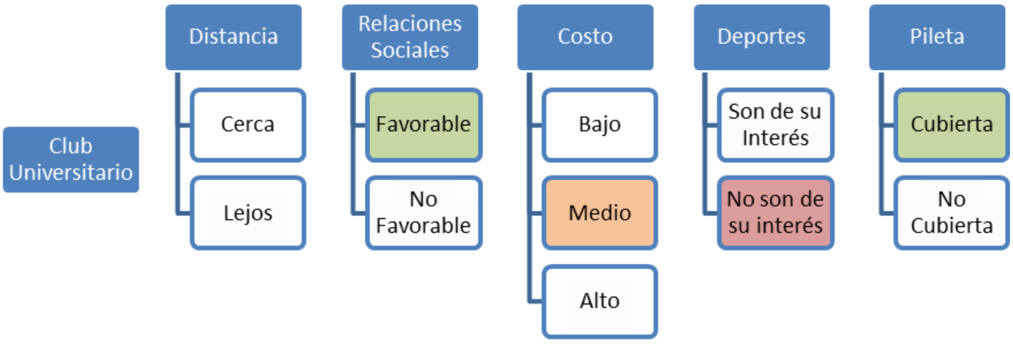


Figura 4.5 Diagrama de decisión de las variables intervinientes en la elección del Club Universitario

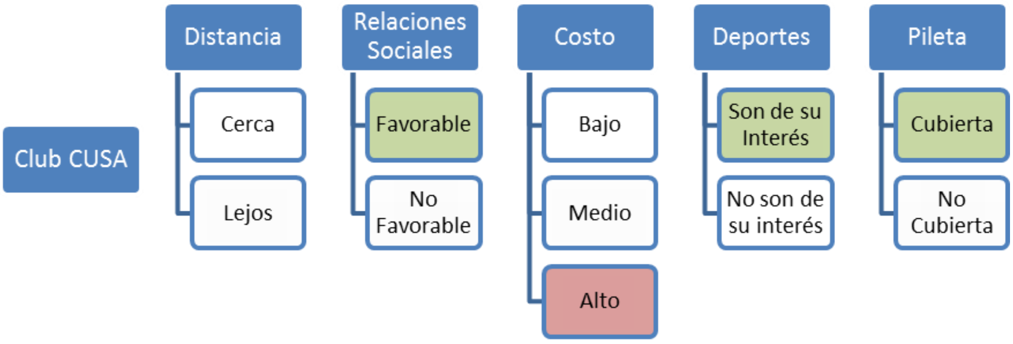


Figura 4.6. Diagrama de decisión de las variables intervinientes en la elección del Club CUSA

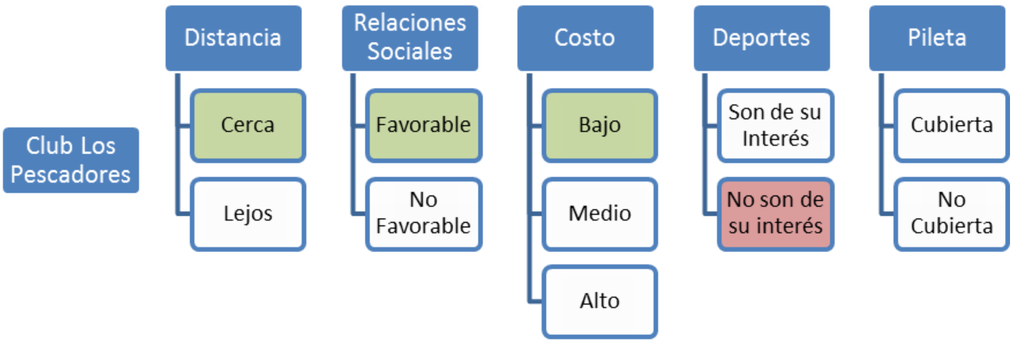


Figura 4.7. Diagrama de decisión de las variables intervinientes en la elección del Club Los Pescadores

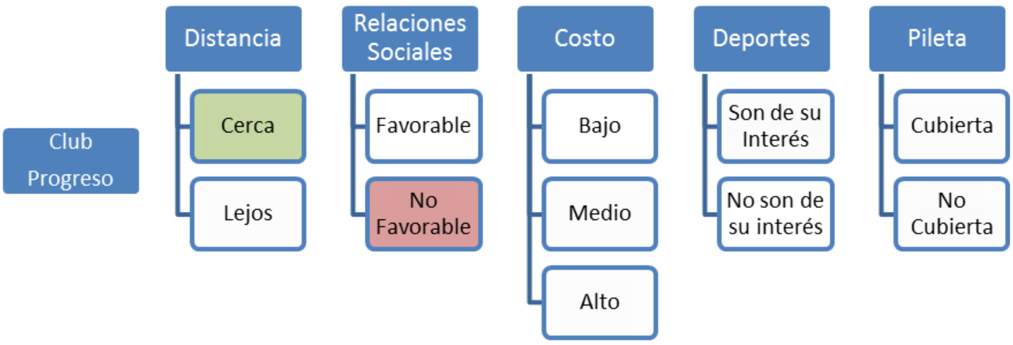


Figura 4.8. Diagrama de decisión de las variables intervinientes en la elección del Club Progreso

De este modo se puede apreciar comparativamente las variables a favor que cada Club en principio tiene, así como las intermedias y desfavorables. También, las variables sobre las que no se dispone, al momento, de mayor información. Para decidir, Joaquín podría ya elegir al Club Universitario (la mejor opción de las cuatro presentadas) o procurar averiguar la información faltante para terminar de decidir. También, podría ponderar las variables (en los casos de empate, como el Club CUSA y de los Pescadores), o desestimar algunos valores, impulsado por deseos personales más allá de la información disponible.

Entre posibles líneas de trabajo emergieron:

> Suponiendo que el objetivo es conocer la incidencia de ciertas variables en torno a cuán satisfechos están los socios con los servicios que ofrece el Club Progreso, interesa estudiar, por ejemplo, a qué distancia viven los socios que asisten al Club y qué actividad deportiva, en primer lugar, quisieran practicar.

Al caso "**Nadando en un mar de posibilidades**" (elaborado por G4; resuelto por G2)

> 4.E.130: Se llama "Nadando en un mar de posibilidades". Bueno, lo primero que nos pareció es que está muy lindo, y algo que nos gustó mucho es el tema de integrar Geografía con Matemática. Fue algo que últimamente nosotras estamos trabajando bastante y eso da la posibilidad de que puedan integrar dos materias diferentes...
> (…)
> 4.E.132: Otra cosa que analizamos fue que primero el viaje estaba basado en las opciones de los destinos y ella, la chica, lo que dice es que quiere ir al mar para poder bucear y analizar las especies marinas y a nosotras nos sorprendió las dos opciones al norte.
> (…)
> 4.E.148: No sé, el encare del relato nos dio la impresión, no sé si errada, de que era muy marcado el hecho de irse a un lugar para poder aplicar los conocimientos que había estudiado, entonces como que dejamos de lado las dos primeras opciones al norte porque era ya, como que el deseo personal era más fuerte que eso, por el estudio.
> (…)
> 4.E.177: Creo que en líneas generales el caso está muy bueno y poner algo de una beca de estudio, que muchas veces uno no hace graduación y decide hacerlo, y más teniendo una beca... y es algo de la vida real, no solo de la beca sino de un viaje en particular que uno quiere realizar y bueno poner eso que decíamos de los cuadros está bueno para ver lo que uno se encuentra cuando va a buscar, como pulir un poco más el objetivo.

Aquí también se propuso organizar la información mediante un árbol de decisión para cada uno de los destinos (Fig. 4.9 a 4.12).

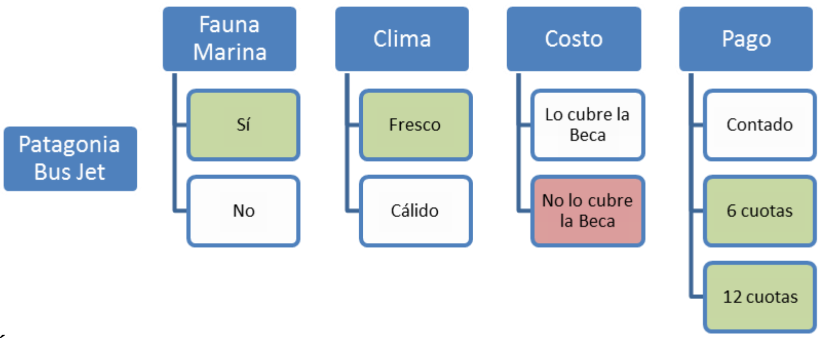


Figura 4.9. Árbol de decisión de las variables intervinientes en la elección de destino a la Patagonia

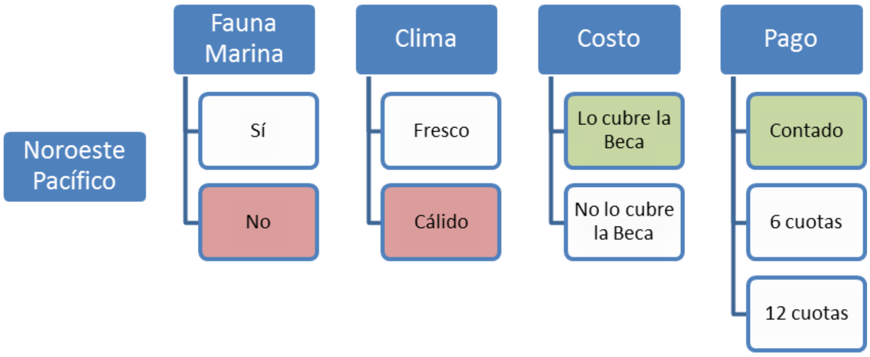


Figura 4.10. Árbol de decisión de las variables intervinientes en la elección de destino Noroeste Pacifico

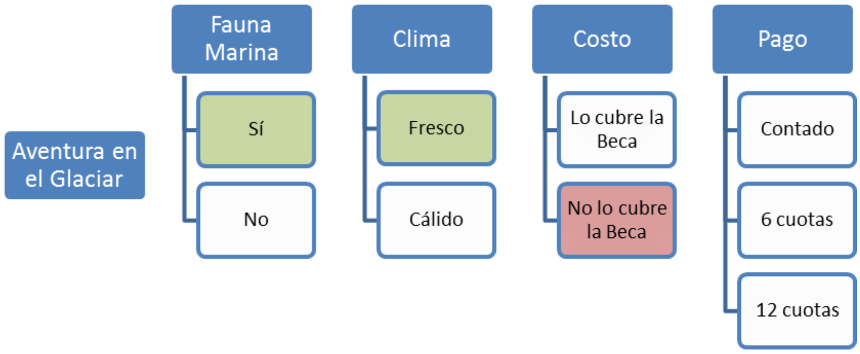


Figura 4.11. Árbol de decisión de las variables intervinientes en la elección de destino el Glaciar

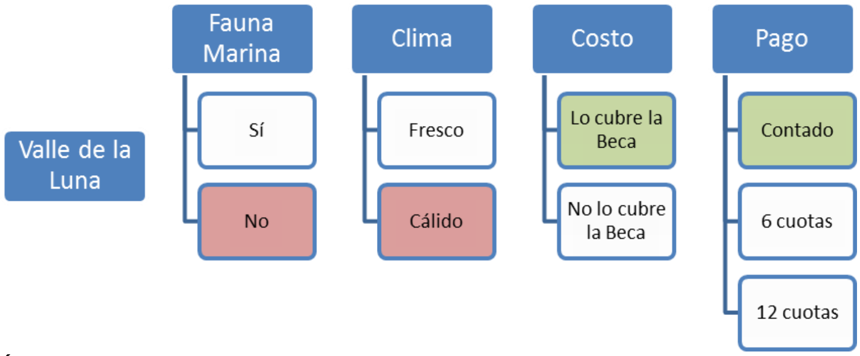


Figura 4.12. Árbol de decisión de las variables intervinientes en la elección de destino al Valle de la Luna

Se particularizó ahondar el trabajo con el dato relativo a las temperaturas que se brinda en el relato del caso. Surgieron propuestas e inquietudes tales como:

> En una ciudad en cada hora se hace registro de la temperatura (primera medición a la 1 hs. y la última a las 24 hs.), ¿cuántos valores se obtienen en un día? Llamamos rango de la temperatura del día a la diferencia entre las temperaturas máxima y mínima observadas. Si el valor del rango es "pequeño" (por ejemplo, 2ºC), ¿significa que hace frío en la ciudad?
>
> Si la temperatura promedio máxima del verano es 30ºC, ¿significa que en ningún día se observó una temperatura superior a 30ºC? ¿Cómo consideran que se habrá procedido para calcular tal temperatura promedio?

Llegado este momento, resulta oportuno realizar una síntesis de los hallazgos y reflexiones pertinentes con el fin de responder a las inquietudes centrales del estudio, motivo del próximo capítulo.

Al recorrer el desempeño estudiantil en la tercera y última dimensión del estudio ("Análisis de casos"), es posible desmenuzar componentes específicos del conocimiento matemático de estos profesores en formación (*SCK*) que se ponen en juego al desglosar respuestas a preguntas críticas (consigna 3) y descifrar intencionalidades matemáticas del caso dado (consigna 4) así como abordar de manera completa los casos propuestos por los grupos de compañeros (consigna 6) incluso estableciendo retroalimentaciones entre ellos.

Tal desempaquetamiento del contenido matemático permitió reconocer posibles variables pertinentes para los casos analizados. También impulsó reconocer la diversidad de información a disposición y las posibles implicancias para los intereses de los personajes involucrados en un marco de toma de decisiones. En correlato, resultó también fructífera la variedad de formas de representar la información (gráficos, esquemas, tablas, palabras) así como las posibles consignas matemáticas que se desprendieron para continuar el trabajo.

CAPÍTULO 5 - Conclusiones

Mediante este capítulo se cierra la tesis, presentándose reflexiones en torno a dos planos de interés: los interrogantes específicos que alentaron el estudio (5.1) así como la génesis de la Ingeniería Didáctica en la formación docente (5.2).

Cabe recordar que el objetivo fundamental de esta tesis es analizar el proceso de configuración del *MKT* en futuros profesores, estudiantes avanzados del PM de la FCEIA, al basarse en el método de casos para introducir un pensamiento no determinista en potenciales alumnos de nivel secundario.

En particular el interés se centra en reconocer los alcances que vislumbran del contenido más allá de una cierta clase; determinar usos específicos del contenido en cuestión que hacen al idear su enseñanza; identificar maneras en que tienen en cuenta al alumno de secundaria en sus propuestas y caracterizar las decisiones didácticas que toman para gestionar sus clases.

La tesis utiliza un método innovador de enseñanza de un contenido específico en un contexto puntual, sin perder de vista que, si bien se ha restringido a nociones de Probabilidad y Estadística Básica, subyace en ella la característica de la Matemática, como ciencia, de proporcionar formas de pensamiento que permiten extenderse y abordar situaciones con diversos niveles de incertidumbre. En particular invita a ser conscientes de la presencia de fenómenos no deterministas en nuestra cotidianidad y también de cómo la Probabilidad y la Estadística pueden servir para analizarlos. Además, los dilemas en el marco de cuestiones no lineales que plantean los casos resultan representativos del tipo de situaciones que el futuro profesor tendrá que resolver prácticamente a diario.

El interés acerca del tema radica en la posibilidad de ampliar el abanico de metodologías a utilizar en la enseñanza, así como de introducir un pensamiento no determinista en los alumnos de nivel medio y fomentar en los estudiantes del PM el desarrollo de material propio. En efecto, los casos diseñados por los estudiantes se constituyen en material útil con valor didáctico, tanto para este PM como posiblemente otros.

5.1. Reflexión en torno a los interrogantes específicos

A continuación, se procura responder a los interrogantes específicos (apartado 1.2) en relación con los cuatros subdominios centrales de *MKT:* Conocimiento en el horizonte matemático (subapartado 5.1.1); Conocimiento especializado del contenido (subapartado 5.1.2);

Conocimiento del contenido y de los alumnos (subapartado 5.1.3); Conocimiento del contenido y de la enseñanza (subapartado 5.1.4).

5.1.1. Conocimiento en el horizonte matemático

Un profesor activa este dominio cuando posee el conocimiento de la trayectoria de un contenido matemático a lo largo de las diversas etapas educativas, así como las conexiones intra y extra matemáticas. A pesar que los estudiantes no explicitan una proyección del contenido en el futuro, sí expresan en las conclusiones que usarían el método de casos en una etapa introductoria, dejando entrever posibles etapas futuras de desarrollo del tema.

Un caso bien elaborado puede ser, y probablemente sea, resuelto en más de una clase. Incluso puede ser elaborado con la intencionalidad de trabajar con él durante varias clases. Dependerá de la longitud, el entramado del relato, la calidad de las preguntas críticas y de las ideas que den fundamento al caso. Cada uno de los casos propuestos por los diversos grupos es diferente y puede constituirse en disparador de ramas específicas del eje Estadística y Probabilidad. Dado que los grupos no simularon una clase donde presentaban su caso, y que no se les solicitó una planificación de cómo lo presentarían, no se puede inferir conclusiones de su proyección para más de una clase o de la posible articulación con contenidos más complejos. Por ejemplo, G1 realizó un relato extenso, con mucha información a analizar, y el grupo que lo resolvió (G3) dio como retroalimentación: "*Debería ser más corto y conciso*", por lo que probablemente hubiera sido un caso para ser resuelto de manera completa en dos clases. Por otro lado, es notoria la importancia que asignan los estudiantes a desarrollar los contenidos desde la práctica a la teoría, formalizando los contenidos en clases posteriores a la resolución del caso.

Cabe destacar que Práctica de la Enseñanza III abarca otros dos módulos (resolución de problemas de conteo y elaboración de proyectos estadísticos), además del correspondiente al método de casos. A modo de cierre del cursado y para aprobar la materia, los alumnos deben realizar un trabajo integrador referido a alguno de esos módulos (a elección). Dos de los cuatro grupos optaron por continuar con los casos que habían elaborado. De este modo planificaron en detalle la clase, especificaron los contenidos a abordar (un grupo desarrolló la definición de variable, variable cualitativa, variable cuantitativa, discreta y continua; mientras que el otro, la definición de moda, media y mediana), plantearon preguntas-guía a realizar, propusieron modos de representación de la información (tablas, diagramas, gráficos). Ambos grupos hacen explícito el objetivo de ir de la práctica a la teoría, e incluso utilizar el caso en dos o más clases, generando debates y formalizando conceptos. Uno de los grupos también incorporó una misma noticia periodística abordada desde diferentes fuentes (diarios), con la finalidad de hacer hincapié en la variedad de interpretaciones que pueden darse de un mismo tema de acuerdo a la perspectiva que se le quiere otorgar, involucrando diferentes conceptos de Estadística.

Transversalmente, como se palpó en varios testimonios, una influencia de las Olimpíadas Matemáticas para dar lugar a una percepción diferente de la Matemática a las nuevas generaciones.

Además de los contenidos matemáticos que se quiere trabajar con un caso, este permite la vinculación con otras asignaturas. Los estudiantes lograron enlazar, aunque de modo incipiente, conceptos básicos de Probabilidad con Costos, Geografía o Biología, como el elaborado por G4; o con situaciones de la vida cotidiana, como los elaborados por G2 y G3. Este aspecto es de fundamental importancia como lo explicita el DCJ: "(…) El aprendizaje está centrado en el estudiante, no en el profesor o solo en los contenidos, de esta manera se estimula el trabajo colaborativo en diferentes disciplinas" (p.132).

Como menciona Godino (2009; citado en Batanero, 2016), un profesor no solo debe tener en cuenta las diversas facetas de su conocimiento matemático-didáctico, sino también las relaciones del tema que enseña con otras materias y con la sociedad en que el estudiante está inmerso.

En los casos elaborados por los estudiantes, a pesar de que se intentó solo abarcar contenidos básicos de Probabilidad y Estadística para un primer año del nivel secundario, no hay que perder de vista que el cimiento en la comprensión de un tema es el primer paso para la aprehensión de otros conceptos de mayor complejidad tanto de la misma asignatura, de años sucesivos o de la vida. Los contenidos desarrollados en los casos posibilitan futuras vinculaciones con situaciones de incertidumbre y azar, inherentes a la vida cotidiana o de la actividad profesional. Un ejemplo son los recursos que se utilizan actualmente en los medios de comunicación para describir la información, los cuales tienen un gran sustento matemático y el ciudadano debe estar preparado para comprender lo que recibe y tomar decisiones a partir de ello. Las personas se encuentran continuamente con expresiones como valor medio, tendencia, estimación, azar, que pertenecen al dominio de la Probabilidad y Estadística.

Como mencionan Batanero et al. (2014), en la actualidad muchas instituciones miden el progreso en la sociedad actual con indicadores estadísticos. Para ello ponen a disposición de los ciudadanos toda clase de datos, con la intención de informarlos y hacerlos partícipes de sus decisiones; un objetivo importante en una sociedad democrática. Pero, para poder desarrollar una mejor comunicación entre estas instituciones y el público a quien se dirigen sus actividades, surge la necesidad de que los ciudadanos sean capaces de valorar dicha información; es decir, que sean estadísticamente cultos.

Un buen manejo de nociones de esta índole puede ser fundamental para la toma de decisiones. Los casos elaborados contribuyen a desarrollar un tipo de pensamiento capaz de resolver problemas, tomar decisiones en situaciones fluctuantes y usar la Probabilidad como modo de cuantificar la incertidumbre. En correlación con esta idea Batanero (2006), como fuera señalado en el subapartado 1.4.1, resalta la necesidad de reforzar la formación del razonamiento probabilístico en la educación primaria y secundaria, y proporcionar con ello a los alumnos un instrumento que oriente la acción ante la incertidumbre.

En particular en la experiencia llevada a cabo se pudo advertir que la génesis del conocimiento matemático, que sostiene y sustenta la propuesta didáctica de un profesor forma parte de su horizonte disciplinar al servicio de la enseñanza (HCK), se encuentra en vías de construcción, dado que por momentos hubo confusiones en torno a nociones clave como determinismo, aleatoriedad, variabilidad, estimación, predicción.

Para su fortalecimiento se requieren ciertas “rupturas” que den lugar a propuestas que consistan en robustecer la integración curricular entre “Probabilidad y Estadística”, “Práctica de la Enseñanza III” e “Historia y Fundamentos de la Matemática”. Un trabajo conjunto entre estos espacios, con propuestas específicas para los futuros profesores y colaboración entre los docentes a cargo, retribuiría sin lugar a dudas a la formación específica.

5.1.2. Conocimiento especializado del contenido

Además del conocimiento matemático, un profesor debe contar con las habilidades que son propias de la profesión, las que le permiten un tipo de desmenuzamiento de la Matemática específico de alguien que la conoce y desea ayudar a aprender a otros. Los estudiantes participantes de la investigación lograron activar este dominio independientemente de que el pensamiento no determinista no fue un contenido fomentado en su educación secundaria ni universitaria. Todos los grupos se aproximaron y valoraron introducir conceptos de Probabilidad sin el uso de fórmulas, tal como lo explicita el DCJ.

Los casos propuestos por los estudiantes invitan a analizar múltiples aspectos de interés para alumnos de secundaria, como por ejemplo la Selección de fútbol, el viaje de egresados, un club para el verano, una beca de estudios; involucrando diversas variables como costos y distancias. Si bien su nivel de comprensión puede conllevar estudios más profundos, resultan adecuados para introducir en un primer año de secundaria, extendiéndose su utilidad a diversas situaciones, ámbitos y conceptualizaciones. Asimismo, en todos los casos se promueve realizar una estimación subjetiva, de la probabilidad de un suceso, del cual no se dispone de la totalidad de la información, y que influye en la toma de decisión final al igual que ciertas preferencias personales.

Resulta importante un buen manejo del contenido para evitar proponer en el relato variables que sean confusas, como le sucedió a G1, donde en la retroalimentación G3 expresó "*Las variables no están claras*". Por otro lado, también conviene tener en cuenta que las variables involucradas sean, en su mayoría, efectivamente factores que influyan en la situación planteada; lo que no fue el caso de G2 que recibió como retroalimentación (de G4): "*Las variables especificadas en las notas para el docente no se utilizaron en nuestro análisis*". Mientras que por otro lado también se debe tratar de evitar hacerlas explícitas, como le sucedió a G3: "*Está muy evidenciada la importancia de los gustos y deseos de la elección*" (por G1) o la de G4: "*Explicitan las variables*" (mencionado por G2).

La intencionalidad matemática de cada uno de los casos se ve reflejada en las notas para el docente, propuestas por cada grupo (subapartado 4.2.2.1). En términos generales se observa que el objetivo de los casos propuestos es analizar y visualizar fenómenos aleatorios a partir de una situación de la vida cotidiana, desarrollar la argumentación en la toma de decisiones, estudiar qué variables influyen y cómo se relacionan, mostrar cómo la Probabilidad y Estadística brindan herramientas que permiten predecir los resultados de ciertos acontecimientos y ayudar a la toma de decisión, considerar la presencia de preferencias personales y fomentar el pensamiento crítico.

La elaboración de un caso que fomente el pensamiento no determinista permitió a los futuros profesores indagar sobre sus propuestas educativas, tomar conciencia de su conocimiento e identificar si sus intenciones educativas coinciden con las establecidas en el DCJ.

5.1.3 Conocimiento del contenido y de los alumnos

Los profesores deben tener la habilidad para predecir lo que a los alumnos les parecerá interesante, motivante, fácil, difícil, aburrido, agobiante y lo que pueden pensar o hacer matemáticamente. A la hora de elaborar consignas matemáticas, los profesores se hacen una imagen de lo que posiblemente harán los alumnos. Esa imagen depende de la capacidad que tienen los profesores para escuchar e interpretar el pensamiento que expresan los alumnos en su lenguaje usual, identificando los conceptos previos, las dificultades de aprendizaje y concepciones erróneas que traen consigo acerca de un contenido matemático particular.

Este subdominio se vio muy presente en la elección de la temática de los casos, ya que lograron elaborar relatos en los que alumnos de primer año de secundaria podrían relacionarse con facilidad (como ser la elección de un destino de vacaciones, una empresa de viaje, un club para el verano o la selección de jugadores de fútbol que representen a Argentina en el mundial 2018), con un lenguaje muy cercano al utilizado por adolescentes, con una narrativa sencilla e incluyendo variables de interés propias de esa edad.

De los cuatro casos planteados por los grupos, el de la elección de un club y el de la elección de una empresa de viaje, son los que presentan situaciones más próximas a la vida real de un estudiante de secundaria, en comparación al caso de la beca de finalización de estudio universitario o a la selección de jugadores para un mundial. Sin embargo, estos últimos no resultan temas ajenos o que no puedan despertar sus intereses y curiosidades, como sucedió con los participantes del estudio (futuros profesores en Matemática, con edades entre 21 y 25 años).

Entre las confusiones más comunes que podrían ocasionarse en alumnos de nivel medio se estima la de querer calcular con precisión la probabilidad de un suceso del que no se dispone la información suficiente. Mediante las preguntas críticas se va guiando al alumno a analizar las diversas variables que influyen en las situaciones independientemente de la valoración numérica, pasando de un pensamiento determinista a uno con mejor manejo de situaciones con incertidumbre. No hay demasiada detención en los conocimientos previos de los estudiantes de secundario relativos al eje en cuestión porque se estaría partiendo del supuesto que esta sería una primera actividad disparadora.

Dadas las temáticas elegidas, el uso de variables cualitativas y cuantitativas, incluso con subjetividad a la hora de resolver el dilema que se plantea en los diversos casos, el aprendizaje del pensamiento no determinista surge de la necesidad de resolver una situación real y cercana a ellos, con altas chances de convocarlos en la tarea.

5.1.4 Conocimiento del contenido y de la enseñanza

Ninguno de los estudiantes ha vivenciado trabajar con el método de casos en su educación secundaria ni en su formación universitaria tampoco habían ahondado acerca de las peculiaridades de un pensamiento de tipo no determinista, por lo que no se encontraban familiarizados con los principios pedagógicos para enseñar ese contenido a través de esta metodología. Es importante destacar que, a pesar de no haber recibido formación específica (método de casos, pensamiento no determinista), lograron elaborar propuestas de enseñanza y en esa misma elaboración y revisión de las propuestas de sus pares, fueron interiorizándose paulatinamente.

Los casos planteados permiten introducir el pensamiento no determinista a la vez que toman en consideración los supuestos de los alumnos, sus opiniones o preferencias subjetivas, adecuando la enseñanza a los saberes de los alumnos más allá del eje (recuperando conocimientos y experiencias anteriores) y combinando la práctica con la teoría.

Dado que los grupos no simularon una clase donde presentar el caso a sus compañeros, sino que cada grupo resolvió un caso asignado, no se pudieron observar diferentes etapas programadas de una clase. Sin embargo, cada grupo procedió a resolverlo de la misma manera: una primera lectura completa del relato de manera individual o grupal, abordaje de las preguntas críticas, relectura del relato en busca de la información necesaria para responder a las preguntas, sistematización de las variables en tablas, gráficos o diagramas y posterior puesta en común con debate.

Los recursos que utilizaron para la elaboración del caso, tantos para la elección de las temáticas de los relatos, las alternativas, las variables intervinientes y datos específicos fueron recopilados mediante búsquedas en Internet y de situaciones de la propia experiencia. En cuanto a la estructuración de las notas para el docente, el relato y las preguntas críticas, usaron como guía el caso "La insoportable fealdad del Subaru" propuesto como ejemplo (Wassermann, 1994) así como las principales características de un caso como metodología de enseñanza (Fig. 3.1). Al respecto, podrían propiciarse próximas etapas de trabajo con los fututos profesores en las que se avance en precisar consignas con intencionalidades claramente delimitadas que, valiéndose de la situación disparadora del caso, propicien la continuación de estudio del eje Estadística y Probabilidad en la escuela.

Batanero (2016) resalta que, puesto que vivimos en un mundo caracterizado por el azar, hemos de preparar a los futuros ciudadanos para desenvolverse mejor en ambientes de incertidumbre, comprender las situaciones aleatorias y tomar decisiones adecuadas. Sin desconocer la complejidad de la tarea, sugiere buscar situaciones específicas que permitan dar más énfasis a la visión subjetiva de la Probabilidad, aplicables en situaciones en que no es posible repetir indefinidamente un experimento aleatorio en las mismas condiciones.

Resulta importante destacar el desempeño realizado por los futuros profesores en la elaboración de casos para introducir un pensamiento no determinista en potenciales alumnos de nivel secundario, logrando en el proceso activar los diversos subdominios del *MKT* en vías de consolidación.

5.2 Reflexión en torno a la génesis de la Ingeniería Didáctica

Como primera experiencia de aplicación del método de casos en el PM, se logró transitar por todas las fases de la Ingeniería Didáctica (apartado 3.3) en el tiempo disponible para la obtención de la información pertinente para la investigación. El grupo de estudiantes fue muy colaborativo, activo y con muy buena predisposición hacia metodologías de enseñanza innovadoras. La Ingeniería Didáctica, en su doble función, como metodología de investigación y como producción de situaciones de enseñanza y aprendizaje (Douady, 1996), permite recuperar en parte al profesor como actor de tiempo completo en el sistema, obligándolo a analizar y cuestionar sus prácticas, a la vez que representa un desafío en tanto salir de la rutina y buscar nuevas formas, que les resulten más convenientes a los alumnos y que lo entusiasmen como profesor.

Esta metodología (método de casos) para la introducción de este contenido (pensamiento no determinista) se ha desarrollado a modo disparador hacia alternativas de trabajo (a la tradicional) que, sin duda, pueden seguir robusteciéndose. En el contexto en que se llevó a cabo la experiencia (PM de la UNR, plan de estudio 2002) ha sido incipiente con una intencionalidad de provocar inquietudes y abrir un panorama distinto a los futuros profesores.

Al finalizar el cursado, los alumnos realizaron una devolución de lo que consideran que aprendieron en la materia PEIII. Respecto a la experiencia del método de casos, algunas de las opiniones son:

> *Adoptando la modalidad por casos, creo que los alumnos se acercan a la vida real, ponen en juego habilidades como trabajar en grupos, poder tomar decisiones, entre otras, y pueden ver que la Matemática no es siempre determinista, con una respuesta única y exacta (E3).*
>
> *Me interesó el trabajo con casos para contenidos probabilísticos, porque promueve la participación activa de los alumnos, su valoración de los conocimientos que trae, la formación y desarrollo de criterios propios, genera un clima de debate, y promueve la formación del pensamiento crítico (E4).*
>
> *Considero muy novedosos los trabajos realizados en los "Casos" ya que, como la grilla, no los conocía y me pareció una muy buena manera de presentar la noción de Probabilidad y de que se vea el lado no determinista de la Matemática (E9).*
>
> *Me gustó mucho el bloque de la materia destinado a Estudio de Casos, me parece una forma diferente e innovadora de poder introducir la Estadística y me pareció muy buena la forma en que fue abordada, las actividades fueron claras y significantes (E14).*

Además de los aportes señalados por los estudiantes, en particular luego de realizar este estudio se considera que su utilidad se fundamenta por ser un método dinámico que se puede ir mejorando práctica a práctica y también flexible tanto en los contenidos a enseñar como en el nivel de dificultad de los mismos. Además, promueve oportunidades para que los estudiantes aprendan a pensar y aprendan a convivir. Estas cualidades son fundamentales para lograr la triple finalidad establecida por la Ley de Educación Nacional para el nivel secundario: educación para la ciudadanía, para el trabajo y para la continuidad de los estudios (Ministerio de Educación de la Nación, 2006a). Asimismo, propicia la exploración de diversas posibilidades desde la apertura de sentidos compartidos, la valoración de la propia palabra y la del otro, el escuchar y ser escuchado porque es de este modo que el aprendizaje es posible. Acorde con el DCJ, permite desarrollar en las clases de Matemática:

> (…) deben asumirse los desafíos de la sociedad actual, que exigen sujetos involucrados en la resolución de problemas, que buscan alternativas y desarrollan estrategias flexibles y adaptables a contextos diversos. La enseñanza de la Matemática debe asumir la responsabilidad de que todos los estudiantes generen confianza en sus propias posibilidades de pensar y hacer, donde el error sea tomado como parte del proceso de aprendizaje (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2014, p.48).

Si se piensa en futuras aplicaciones del método (plan de estudios 2018), cuando comience a desarrollarse la asignatura análoga a PEIII en 2020, de carácter anual (no semestral) con una carga horaria triplicada, se contará con más de tiempo para que los estudiantes resuelvan distintos ejemplos de casos antes de hacerles elaborar uno. De este modo dispondrán de mayor variedad de estilos de notas para el docente, relatos y preguntas críticas que les sirvan de guía o incluso alentar la elaboración de nuevos formatos. También se podrían interiorizar más acerca de las características propias de un pensamiento con rasgos no determinista (vs. determinista) independizándolo a priori de nociones que por momentos se asociaron de manera confusa, tales como no conductista, subjetivo, diversidad de formas de resolución. Además, sería interesante que cada grupo simule una clase donde presenta su caso y sus compañeros deben resolverlo. Esto resultaría muy beneficioso para los estudiantes, ya que recibirían la retroalimentación de sus casos desde varios grupos y del grupo-clase en su conjunto, visualizando qué aspectos deben mejorar. De esta manera obtendrían ideas para la elaboración de futuros casos, incluso para otros contenidos matemáticos y también para profundizar el trabajo con propuestas que permitan enfatizar las variables no deterministas en escena.

Se espera que los resultados aporten a la mejora del proceso formativo de los alumnos del PM, posibilitando que los estudiantes sean capaces de afrontar las demandas de la profesión con una mayor diversidad de herramientas, cada una de ellas acorde a las necesidades que se presenten. Además, a largo plazo, impactará en sus futuros alumnos de nivel medio, que transitan por clases más enriquecidas. Por otro lado, los resultados de esta investigación pueden ser considerados en otros Profesorados del país.

También es deseable que los resultados mostrados en este trabajo motiven a otros profesores a incorporar este método en sus prácticas como a la vez a incursionar en otros métodos para introducir un pensamiento no determinista en sus alumnos, reflexionar acerca de los conocimientos que se ponen en juego durante el desarrollo de una clase y así promover su crecimiento académico como profesional de la Educación Matemática.

“El aprendizaje de la Probabilidad nos ayuda a evitar ilusiones en la toma de decisiones y por ello no hay ciencia más digna de nuestro estudio ni más útil para que se incluya en el sistema público de educación” (Laplace, 1825)

Bibliografía

Ander-Egg, E. (2003). *Repensando la investigación-acción participativa*. Buenos Aires: Lumen-Hvmanitas.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ball, D. y Bass, H. (2009). *Mit einem Auge auf den mathematischen Horizont: Was der Leher braucht für die Zukunft seiner Schüler*. Conferencia presentada en la 43 Jahrestagung für Didaktik der Mathematik. Oldenburg, marzo.

Ball, D.L., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *8*(3), 247-263.

Batanero, C. (2006). Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: Un desafío educativo. En P. Flores y J. Lupiáñez (Eds.). *Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y Azar* (p.s.n.). Granada: Sociedad de Educación Matemática Thales.

Batanero, C. (2016). Retos en la investigación sobre didáctica de la probabilidad. En R. Flores (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp.844-851). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Batanero, C. y Díaz, C. (2007). *Probabilidad, grado de creencia y proceso de aprendizaje*. Conferencia presentada en las XIII Jornadas Nacionales de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Granada, julio.

Batanero, C., Gea, M.M., Arteaga, P. y Contreras, J.M. (2014). La estadística en la educación obligatoria: análisis del currículo español. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, *14*(2), 1-14.

Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. Jones (Ed.). *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp.15-37). Nueva York: Springer.

Batanero, C., Ortiz, J.J. y Serrano, L. (2007). Investigación en didáctica de la probabilidad. *Uno*, *XIII*(44), 7-16.

Behar Gutiérrez, R. y Grima Cintas, P. (2004). La Estadística en Educación Superior. ¿Formamos Pensamiento Estadístico? *Ingeniería y Competitividad*, *5*(2), 84-90.

Burbano, V.M.A. (2016). Aspectos epistemológicos y didácticos del concepto de probabilidad en la enseñanza preuniversitaria. En I. Álvarez y C. Sua (Eds.). *Memorias del II Encuentro Colombiano de Educación Estocástica* (pp.105-113). Bogotá: Asociación Colombiana de Educación Estocástica.

Campos, C.R. (2016). Probabilidad, juegos de azar y educación estadística crítica. En I. Álvarez y C. Sua (Eds.). *Memorias del II Encuentro Colombiano de Educación Estocástica* (pp.312-318). Bogotá: Asociación Colombiana de Educación Estocástica.

Cañizares, M.J., Ortiz, J.J., Batanero, C. y Serrano, L. (2002). Probabilistic language in Spanish textbooks. En B. Phillips (Ed.). *ICOTS-6 papers for school teachers* (pp.207-211). Ciudad del Cabo: International Association for Statistical Education.

De la Fe, C., Vidaurreta, I., Gómez, A. y Corrales, J.C. (2015). El método de estudio de casos: Una herramienta docente válida para la adquisición de competencias. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, *18*(3), 127-136.

Douady, R. (1996). Ingeniería didáctica y evolución de la relación con el saber en las matemáticas de collège-seconde. En E. Barbin y R. Douady (Eds.). *Enseñanza de las matemáticas: Relación entre saberes, programas y prácticas* (pp.241-256). París: Institut de Recherche en Enseignement des Mathématiques.

Esteban, R., Batanero, C., Serrano, L. y Contreras, J.M. (2016). ¿Reconocen los estudiantes de educación secundaria obligatoria las secuencias de resultados aleatorios? En C. Fernández, J.L. González, F.J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XX* (pp.135-145). Málaga: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Estrada, A. y Alfaro, K.L. (2015). El método de casos como alternativa pedagógica para la enseñanza de la bibliotecología y las ciencias de la información. *Investigación Bibliotecológica*, *29*(65), 195-212.

Godino, J.D., Batanero, C. y Cañizares, M.J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid: Síntesis.

Gonzalo Sanz, L.M. (2007). *Entre libertad y determinismo*. Madrid: Cristiandad.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación* (4ª ed.). México: Mc Graw Hill.

Hernández-Salmerón, E., López-Martín, M.M. y Batanero, C. (2017). Estudio exploratorio sobre el lenguaje del azar en educación secundaria obligatoria. En J.M Muñoz, A. Arnal-

Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp.305-314). Zaragoza: Universidad de Zaragoza.

Klimovsky, G. (1997). *Las desaventuras del conocimiento científico*. Buenos Aires: AZ.

Lawrence, P. (1953). The Preparation of Case Material. En R.A. Kenneth (Ed.). *The Case Method of Teaching Human Relations and Administration* (pp.215-224). Cambridge: Harvard University Press.

Litwin, E. (2008). *El oficio de enseñar. Condiciones y contextos*. Buenos Aires: Paidós.

Ministerio de Educación de la Nación (2006a). *Ley de Educación Nacional Nº 26006*. Buenos Aires: Autor.

Ministerio de Educación de la Nación (2006b). *Núcleos de Aprendizaje Prioritarios. Matemática*. Buenos Aires: Autor.

Ministerio de Educación de Santa Fe (2014). *Diseño Curricular Jurisdiccional Área Matemática*. Santa Fe: Autor.

Moreno, A. y Cardeñoso, J. (2014). *La alfabetización probabilística: Un reto para los profesores de secundaria*. Ponencia presentada en el Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación. Buenos Aires, noviembre.

Neter, J., Wasserman, W. y Whitmore, G.A. (1980). *Fundamentos de Estadística para Negocios y Economía*. México: Compañía Editorial Continental S.A.

Ortiz, J.J. (1999). *Significados de los conceptos probabilísticos en los libros de texto de Bachillerato*. Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Osorio, M.A., Suárez, A. y Uribe, C.C. (2011). Revisión de aspectos asociados a la problemática del aprendizaje de la Probabilidad. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, (38), 127-142.

Pereira, A.D. (2018). *Formação continuada de professores do ensino médio para uma aula investigativa sobre probabilidade*. Teses e Dissertações do Programa de Pós-graduação Stricto sensu em Educação Matemática. San Pablo: Universidade Anhanguera de São Paulo.

Pérez-Escoda, N. y Aneas Álvarez, M.A. (2014). *Metodología del caso en orientación*. Barcelona: Universitat de Barcelona.

Prigonine, I. (1997). *The End of Certainty*. Nueva York: The Free Press.

Quesada Paloma, V. y García Pérez, A. (1988). *Lecciones de Cálculo de Probabilidades*. Madrid: Díaz de Santos.

Rodríguez-Alveal, F., Díaz-Levicoy, D. y Vásquez, C. (2018). Evaluación de la alfabetización probabilística del profesorado en formación y en activo. *Estudios Pedagógicos*, *44*(1), 135-156.

Sanabria, G. y Núñez, F. (2017). La probabilidad como elemento orientador de la toma de decisiones. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, *17*(2), 1-13.

Santaló, L.A. (1975). *Probabilidad e Inferencia Estadística. Monografía Nº11*. Washington: Organización de los Estados Americanos.

Serradó, A., Azcárate, P. y Cardeñoso, C. (2005). Randomness in textbooks: the influence of the deterministic thinking. En M. Bosch (Ed.). *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp.559-569). Sant Feliu de Guíxols: FUNDEMI IQS, Universidad Ramon Llull y European Society for Research in Mathematics Education.

Sherman, R. y Webb, R. (Ed.). (1988). *Qualitative Research in Education: Focus and Methods*. Londres: Taylor & Francis.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14. Traducción castellana (2005): El saber y entender de la profesión docente. *Estudios Públicos*, (99), 195-224.

Shulman, L.S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-22. Traducción castellana (2005): Conocimiento y enseñanza: fundamento de la nueva reforma. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado*, *9*(2), 1-30.

Vargas, C. (2009). El método del caso en la enseñanza del Derecho: experiencia piloto de un piloto novel. *Revista de Formación e Innovación Educativa Universitaria*, *2*(4), 193-206.

Vásquez, C., Díaz-Levicoy, D., Coronata, C. y Alsina, A. (2018). Alfabetización estadística y probabilística: primeros pasos para su desarrollo desde la Educación Infantil. *Cadernos Cenpec*, *8*(1), 154-179.

Wassermann, S. (1994). *El estudio de casos como método de enseñanza*. Buenos Aires: Amorrortu.

Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, *67*(3), 221-248.

Anexos

A.1. Caso: “La insoportable fealdad del Subaru” (Wassermann, 1994)

“¡No lo puedo creer! ¡Realmente no lo puedo creer!”. Bonnie colgó el teléfono y se volvió hacia su madre. “La abuela acaba de decirme que como regalo de cumpleaños me va a dar tres mil dólares, para que pueda comprarme un auto. ¡Mamá, es grandioso, casi no lo puedo creer!”.

La señora Clark dejó el lápiz sobre el legajo que había estado revisando y miró el rostro de su hija. ¿Había algo más importante en la vida de una joven de dieciséis años que la perspectiva de tener su propio auto? El pensamiento de Vivian Clark retrocede a la época en que tuvo su primer auto, al cual solo pudo acceder cuando ganaba un buen sueldo como asociada a la firma de abogados Evans, Thornhill y Pattel. El entusiasmo que sintió en ese momento era algo que recordaba como si hubiese sucedido ayer. Fue ese entusiasmo lo que vio en el rostro de Bonnie, un entusiasmo que hacía brillar sus ojos.

“Tengo que llamar a Miko”. Bonnie corrió a su habitación, donde tenía su propio teléfono (aparato) y podía mantener conversaciones en privado. Aunque su madre estaba bastante actualizada, hay cosas que una muchacha solo quiere compartir con su mejor amiga.

Cómodamente apoyada en las amplias y elegantes almohadas de su cama, Bonnie, hablando rápidamente y en voz baja, comunicó a Miko la noticia.

“¿Y qué auto vas a comprar?”, preguntó Miko. Las operaciones eran numerosas, pero la cantidad de dinero de que disponía Bonnie significaba que tendría que ser muy cuidadosa al elegir.

“Bien”, dijo Bonnie, como si hubiera pasado toda su vida haciendo planes para cuando llegara ese momento, “esto es lo que me imagino, Mik-Mik. Con los tres mil dólares de mi abuela y los mil quinientos que tengo ahorrados tal vez pueda conseguir un Honda Prelude usado en buenas condiciones o quizás incluso un Toyota Celica. Pero sé lo que no quiero. Me resultaría insoportable tener que conducir un Subaru. Pienso que es un auto de una fealdad increíble. Por supuesto, si tuviera veinte mil dólares en lugar de cuatro mil quinientos, me compraría un bonito BMW. Pero estamos hablando de compras correspondientes a un nivel de pobreza Mik-Mik. ¿Qué te parece?”.

Miko era la mejor amiga de Bonnie desde que cursaron juntas el quinto grado. Habían estado en las mismas clases, estudiando juntas, e incluso habían salido juntas con muchachos. Bonnie depende de Miko por su seriedad, su inteligencia, su mentalidad lógica. Para Miko, Bonnie era la integrante extrovertida del dúo: creativa, talentosa y sociable. Formaban un dúo compatible.

Miko respondió a la pregunta de Bonnie, como lo había hecho tantas veces durante los últimos seis años, basándose en la lógica. “Sabes lo que pienso Bonnie. Pienso que deberías comprar el mejor auto que se pueda conseguir por esa suma. Uno que no vaya a sufrir una avería cada veinte kilómetros. Uno en el que puedas confiar. Pero te conozco, Bonnie. Probablemente te decidirás por el más grande, rojo y ostentoso de los autos que estén a la vista. Te dejas seducir por lo glamoroso, Bonnie”.

Bonnie se rió ante esa evaluación totalmente correcta que Miko había hecho de su juicio. Sabía que el consejo de Miko era lógico, sensato, racional. Sabía también que Miko había obrado bien al señalar su mayor defecto. Bonnie tenía debilidad por lo glamoroso. ¿Podría contenerse esta vez y elegir un auto confiable? ¿O se decidirá una vez más por el brillo exterior y no por lo realmente valioso?

“Sí, Miko, lo sé, lo sé. Pero esto tengo que hacerlo a mi modo. Te prometo que trataré de no enloquecerme por completo. ¿Me acompañarás a ver autos el sábado?”.

“Sí, por supuesto. Pero estaré verde de envidia. Te veré el sábado y, por el amor de Dios, no compres nada hasta entonces”.

Después de colgar el teléfono, Bonnie se acurrucó entre las almohadas y cerró los ojos. Su cerebro enviaba mensajes sobre Corvettes rojos, cupés deportivos Mercedes de color rojo y Porsches también rojos que danzaban en la cara interna de sus párpados como si estos fueran pantallas de cine y su mente el proyector. En la escena siguiente Bonnie se proyectó a sí misma dentro del Corvette rojo, luego dentro del Mercedes rojo y por último dentro del Porsche rojo. Todas las imágenes le agradaron.

El sábado por la mañana, la señora Clark llevó a las muchachas en su auto hasta el mercado de Automóviles Richmond. Uno de sus colegas en la firma de abogados le había hablado de un vendedor muy experimentado en quien se podía confiar para hacer una buena compra. De no ser por esa recomendación, Vivian tal vez le hubiera aconsejado a Bonnie que consiguiera su auto mediante una compra directa, sin intermediarios. Siempre había tenido una opinión poco favorable de los vendedores de autos usados. ¿Acaso no se suponía que todos ellos eran unos sórdidos estafadores? “No Benny Chan”, le dijo Bill Bracken. “Puedes confiar en él, no se aprovechará de ti”.

Bonnie y Miko se detuvieron a un costado del amplio terreno donde se hallaban estacionados los autos usados y recorrieron con la mirada el pequeño ejército de vehículos que se mantenían firmes, con el capó y los paragolpes bruñidos, como soldados en formación. “¡Miko, mira lo que es ese BMW!”, gimió Bonnie, mientras Miko le hundía el codo en las costillas.

“Bonnie, un poco de seriedad. No puedes pasar aquí el día entero, y si quieres llegar a algún lado tendrás que rebajar tus pretensiones. La suma de que dispones solo te alcanzaría para comprar un BMW que tuviera cuarenta años de uso. Y no creo que los fabricaran hace cuarenta años”.

Benny Chan se acercó y tendió su mano primero a la señora Clark y luego a las muchachas. “Y bien, ¿quién va a comprar el auto?”, preguntó.

“Mi hija”, dijo Vivian Clark, al mismo tiempo que Bonnie decía “Yo”.

“Muy bien. ¿Qué clase de auto estás buscando, Bonnie, y cuánto dinero quieres gastar?”.

“He pensado en un Honda Prelude o un Toyota Celica. Algo deportivo. Tengo cuatro mil quinientos dólares”.

Benny Chan reflexionó un momento. “Permítame que te diga las cosas cómo son, Bonnie. Por cuatro mil quinientos dólares podrías conseguir un Prelude o un Celica que tuvieran por lo menos ocho años de uso. Si te interesa un Civic o un Tercel, serían tal vez cinco años. Pero tengo un Subaru excelente cuyo precio se aproxima al que puedes pagar. Tiene solo dos años de uso y está en muy buen estado; tuvo un solo dueño y ha recorrido solo setenta mil kilómetros. Su dueño lo vendió porque tenía una necesidad urgente de dinero. Su precio es de $6.995 y es una verdadera ganga”.

Bonnie miró a Miko y luego, casi con aire de súplica, a su madre. “No quiero un Subaru. Es feo y ni muerta me verán en uno. Parece que lo hubiera diseñado un alumno de segundo año en un taller de mecánica del automóvil. No tiene clase. En absoluto. De ningún modo. No”.

Benny Chan se echó a reír. “Veo que ya has tomado una decisión y no voy a tratar de convencerte de que la cambies. La gente se siente atraída por distintas clases de autos, y lo que a uno le gusta es lo que a uno le gusta. Eso es algo que yo respeto. Pero antes de que me pegues por intentarlo déjame decirte que a pesar de lo que piensas sobre su apariencia, el Subaru es un auto que rara vez sufre averías. Es confiable. Tratándose de un modelo de solo dos años de antigüedad, probablemente lo usarías durante tres o cuatro años, o quizás cinco, sin tener que preocuparte por las reparaciones. Consume poco combustible y su mantenimiento es económico. Como negocio, no puedes esperar nada mejor". Bonnie miró otra vez a su madre. "Es inútil, señor Chan. No voy a comprar un Subaru y estamos perdiendo el tiempo. ¿Podemos ver qué otras cosas tienen para ofrecernos? Chan cambió una mirada con Vivian Clark y se encogió de hombros. "Muy bien, Bonnie. Entiendo. Veamos algunos Preludes".

"¿No tienen también los Honda un buen funcionamiento?", terció de pronto Miko tratando de ayudar.

"Sí, por cierto. Pero cuando un auto tiene ocho años de uso hay que prever que puede presentar algunos problemas. Las piezas que componen un auto solo duran cierto tiempo como las lamparitas eléctricas. Por supuesto que cuando se los cuida bien la duración de las piezas es mayor. Pero, así como las lamparitas se queman, a la larga las piezas de un auto se gastan y hay que cambiarlas".

"De todos modos quiero ver el Prelude", dijo Bonnie haciendo un mohín, poco dispuesta a dejarse convencer.

"Bien, déjame mostrarte lo que tengo y luego decidirás por ti misma". Chan las condujo hacia una fila de autos cuya belleza y aspecto reluciente desmentían cualquier posible defecto mecánico.

"Este es un Honda Prelude modelo 84. Tuvo un solo dueño y ningún accidente. Eso es importante. Pero ha recorrido cuatrocientos mil kilómetros lo que es mucho. El interior es bastante elegante. Funciona bien. Pero debes recordar que tiene ocho años de uso. Tratándose de un auto se puede decir que es viejo. El precio $3.995, es conveniente para ti. Más los impuestos, es justo lo que puedes pagar".

Luego señaló, tres autos más allá, un Toyota Celica. "Ese tiene dos años más. Es un auto elegante y funciona bien. El precio es de $2900 más impuestos. Aunque podrás ahorrarte algún dinero, ciertamente tendrás que pensar en el mantenimiento mecánico ya que se trata de un auto con más de diez años de uso".

"Señor Chan, ¿cuánto costaría un modelo más reciente del Prelude?" preguntó a Vivian Clark. "Tal vez podría usted indicarnos algunos precios y decirnos lo que costaría financiar la diferencia entre la suma de que dispone Bonnie y el precio del auto. Quizás sea más sensato comprar un modelo más reciente y pagar intereses por el préstamo que gastar dinero en reparar un modelo más antiguo".

"Es una buena idea, señora Clark. ¿Qué dices Bonnie?".

Bonnie tenía ya los ojos vidriosos. Las diferencias en los modelos, la antigüedad, el precio y la posibilidad de que se produjeron averías mecánicas, los intereses a pagar por préstamos, están empezando a marearla. Estaba cansada de calcular cuál sería la mejor compra que podría hacer con su dinero. Se sentía tensa y quería tomar una decisión y terminar con el asunto. De mala gana se volvió hacia Chan, suspiró y dijo "Está bien, señor Chan. Veamos lo que tiene". Las tres mujeres siguieron al vendedor hasta otra hilera de autos. Así Benny señala un hermoso Honda Prelude de color plateado. "Es modelo 87. Tiene solo cinco años y puedes recorrer aún muchos kilómetros sin sufrir averías mecánicas. Está en excelentes condiciones, interior muy elegante, tiene una radio AM/FM y una unidad de cinta y ha recorrido solo doscientos mil kilómetros. El precio que figura en la etiqueta es de $8000, pero te diré lo que haremos. Si te gusta este auto y si estás dispuesta a financiar el saldo con nosotros, me haré cargo de los impuestos. Harás un buen negocio". Presiona algunas teclas de su calculadora de bolsillo y mira las cifras. "Si me pagas $4500, en efectivo quedarán pendientes 35 cuotas mensuales de $137,50 cada una. Eso es lo que resulta aplicando nuestra tasa corriente de intereses sobre préstamos, es decir el 12,5%".

Bonnie estaba comenzando a sentirse aturdida y pensó que necesitaba salir de ahí sin demora y aclarar sus ideas. Mira a su madre y a Miko, y ambas percibieron su ansiedad.

"Señor Chan, es usted muy amable", dijo Bonnie mientras extendía su mano. "Ahora tengo que ir a mi casa a tomar una taza de té y analizar todo cuidadosamente. Pero mañana por la mañana vendré, probaré los autos que realmente me interesen y le haré saber mi decisión". Alcanzó a añadir "gracias" mientras se volvía y se alejaba rápidamente de la turbadora formación de alternativas en cuatro ruedas que brillaban al sol del mediodía.

En la cocina de los Clark las tres mujeres se sentaron para volver a examinar las opciones de Bonnie. Miko, racional como siempre, tomó un lápiz y un block de notas y dijo "Mira, voy a colaborar calculando para cada uno de los autos, los costos y la probabilidad de que durante un año no se produzca ninguna avería mecánica. Tal vez teniendo los números a la vista te será más fácil decidir". Con la ayuda de Miko y aplicando sus conocimientos de Matemática, comenzaron por hacer una lista de las variables importantes que Bonnie debería tomar en cuenta al decidir:

Antigüedad del auto.

Costo inicial.

Mantenimiento incluyendo: consumo de combustible; probabilidad de que necesita reparaciones durante el primer año; interés del préstamo.

"Si podemos llenar esos espacios en blanco en el caso de cada uno de los autos que te mostró el señor Chan, tendrás una idea adecuada de la relación entre el valor del auto y su costo", anunció Miko con cierto aire de autoridad.

La señora Clark sonrió y miró a Miko y a Bonnie. "Hay una cosa más Miko, que deberías incorporar a tus cálculos: las variables del deseo. Es difícil de cuantificar, pero resulta evidente que influyen en la decisión de Bonnie sobre el Subaru, que podría ser fácilmente la mejor opción desde el punto de vista de la relación entre el valor y el costo".

Bonnie suspiró y miró el fondo de su taza como si las hojas del té pudieran darle la respuesta correcta "Mik-Mik", dijo en voz baja "veamos si podemos resolver esto".

A.2. Caso: "Pasaje a Rusia" (G1)

La selección argentina deberá sacar la calculadora y hacer números para saber si podrá estar o no en el Mundial de Rusia 2018. Todavía depende de sí misma para clasificar, aunque se debe dar algo que no sucedió en este camino de eliminatorias: ganar dos partidos seguidos en una instancia crítica.

Los dos rivales que le quedan a la Argentina son Perú y Ecuador. Recibirá al conjunto de Gareca en el próximo mes -se está evaluando que no sea en el Monumental- y luego visitará a Ecuador en la altura de Quito. Solo si gana los dos se clasificará de forma directa al Mundial sin depender de nadie más.

Si no gana los dos, comenzará a depender de los resultados de sus rivales directos, sobre todo Chile, Perú y Colombia. Allí deberá hacer números para saber si consigue pasar directo o queda en repechaje, lugar actual, y se enfrenta con Nueva Zelanda.

La tabla de posiciones al día de hoy es:

Pos.	PAIS	Pts.	J	G	E	P	Dg	Gf	Gc
1	BRA	37	16	11	4	1	27	38	11
2	URU	27	16	8	3	5	10	28	18
3	COL	26	16	7	5	4	3	19	16
4	PER	24	16	7	3	6	1	26	25
5	ARG	24	16	6	6	4	1	16	15
6	CHI	23	16	7	2	7	1	24	23
7	PAR	21	16	6	3	7	-6	17	23
8	ECU	20	16	6	2	8	0	24	24
9	BOL	13	16	4	1	11	-20	14	34
10	VEN	8	16	1	5	10	-17	18	35

Clasificado Repechaje

<u>Los rivales</u>:

Perú: Es un equipo agresivo, que toca, es profundo y físicamente están muy bien. Hace línea de cuatro, con una defensa compacta y busca salir jugando con el enganche Cristian Cueva y definir con el potente Guerrero, jugando de 9.

¿Cómo lo va a marcar a Messi? Escalonado, porque hacer una persecución no es el estilo de Gareca (su DT).

Actualmente, la tabla de posiciones muestra a Perú como clasificado del Mundial, producto de una última victoria eufórica.

Argentina empezó a tener pesadillas con Paolo Guerrero ya que “El Depredador” (su apodo en Flamengo) se ubica en el top ten de los goleadores de eliminatorias.

Ecuador: La selección de Ecuador está atravesando su momento más crítico en la eliminatoria y tiene escasas chances de clasificarse al Mundial 2018. Después de la derrota en casa ante Perú, los ecuatorianos quedaron en la octava posición.

El periódico Late, de la ciudad de Cuenca, apeló a la ironía en su título: “No todo está perdido. Falta perder con Chile y Argentina”.

Son cuatro las caídas de manera consecutiva de Ecuador, que no gana desde noviembre de 2016, cuando goleó a Venezuela 3-0 como local. Más tarde perdió con Paraguay en Asunción (2-1), con Colombia en Quito (2-0) y con Brasil en Porto Alegre (2-0) antes de besar la lona con los incaicos.

El DT de la selección argentina Jorge Sampaoli tiene que elegir a cuatro jugadores del fútbol local (un arquero, un defensor, un volante y un delantero). Las opciones que considera son las siguientes:

Delanteros:

<u>Darío Benedetto</u>

Darío Ismael Benedetto (Berazategui, Buenos Aires, 17 de mayo de 1990) es un futbolista argentino. Se desempeña en la posición de delantero y desde 2016 juega en Boca Juniors de la Primera División de Argentina. También es internacional con la Selección Argentina.

En la temporada 2017-2018, su gran momento futbolístico le valió para ganarse la convocatoria para la Selección Argentina por primera vez en su carrera.

El 27 de agosto de 2017 fue convocado por el entrenador Jorge Sampaoli para jugar la doble jornada clasificación a la Copa Mundial de Fútbol de 2018 contra Uruguay y Venezuela. Benedetto jugó parte del segundo tiempo del encuentro contra la selección venezolana, que finalizó empatado a un gol.

Tras un análisis periodístico, se reveló que Benedetto, a mediados de septiembre, ocupa el cuarto puesto entre los goleadores mundiales en 2017, con 20 tantos en igual cantidad de partidos jugados, siendo solo superado por Harry Kane (promedio 1,07), Lionel Messi (1,03) y Edinson Cavani (1,00, en 34 PJ).

El “Pipa” es un animal y un tipo que entrena como nadie. Es una persona muy tranquila y dentro del área no te perdona. Es muy buena persona y siempre les habla a sus compañeros, principalmente a los chicos. Es un genio y la que tiene abajo del arco, te liquida.

En el último torneo 2016-2017, jugó 25 partidos, en los cuales convirtió 21 goles y tuvo 3 asistencias, resultado de 32 disparos al arco. Recibió 32 faltas, 4 tarjetas amarillas y ninguna tarjeta roja.

Ignacio Fernández

Ignacio Martín Fernández (9 de Julio, Buenos Aires, Argentina; 12 de enero de 1990) es un futbolista argentino. Juega como mediocampista y su equipo actual es River Plate de la Primera División de Argentina.

A comienzos del año 2016 se sumó al plantel de River Plate haciendo su debut como titular en uno de los Superclásicos de verano, con una muy buena actuación. Luego se convirtió en uno de los jugadores habitualmente titulares, siendo uno de los pilares del equipo en el primer semestre del año 2017, en el que River Plate terminó segundo en el Campeonato de Primera División 2016-17 y primero en la fase de grupos de la Copa Libertadores 2017.

Con la camiseta de “La Banda” ha conseguido dos títulos, la Recopa Sudamericana 2016 jugando de titular los dos partidos contra Independiente Santa Fe, y la Copa Argentina 2015-2016, torneo en el cual anotó contra Sportivo Rivadavia y Estudiantes de San Luis, y fue seleccionado para el equipo ideal.

Respecto de sus preferencias futbolísticas, Fernández reconoció su gusto por moverse en la parte central del mediocampo: “Si juego de interno tengo más contacto con la pelota y el desgaste físico es intenso porque tenés que llegar de área a área, pero me gusta”, señaló.

“Igual donde te ponen tenés que jugar, la competencia interna del plantel es muy buena y hay que estar listo para lo que decida el entrenador, pero es verdad que me siento más cómodo jugando por dentro que por la raya”, advirtió.

En el torneo 2016-2017, jugó 26 partidos con la camiseta de “La Banda”, en los cuales no convirtió ningún gol, pero tuvo 2 asistencias, resultado de 9 disparos al arco. Recibió 20 faltas, 2 tarjetas amarillas, pero ninguna tarjeta roja.

Marco Ruben

Marco Gastón Ruben (Capitán Bermúdez, 26 de octubre de 1986) es un futbolista argentino. Juega como delantero y su actual equipo es Rosario Central de la Primera División de Argentina. Tiene una gran habilidad para la definición, así como para el juego colectivo. Se lo considera el máximo referente en la actualidad del equipo, por su entrega y por ser un hincha confeso del cuadro “Canalla”.

El delantero canalla fue operado en junio de este año de un sobrehueso en el talón izquierdo que le impedía pisar cómodamente y le causaba molestias.

En relación con la Selección, fue convocado para un amistoso ante Guatemala que se llevó a cabo en Los Ángeles en febrero de 2008 en preparación para los Juegos Olímpicos de 2008. Marcó el último gol de la victoria por 5 a 0.

El 29 de abril de 2011, fue convocado por primera vez para la selección mayor, para disputar dos partidos amistosos, contra Nigeria y Polonia, y en la que solo fueron convocados jugadores menores de 25 años. Su debut se produjo en el partido contra Polonia, en el que marcó el gol argentino (2 a 1).

En el último torneo 2016-2017, jugó 20 partidos, de los cuales convirtió 6 goles y tuvo 1 asistencias, resultado de 20 disparos al arco. Recibió 32 faltas, 1 tarjeta amarilla y 1 tarjeta roja.

Volantes:

Fernando Gago

Fernando Gago (Ciudadela, Buenos Aires, Argentina; 10 de abril de 1986) es un futbolista argentino que juega como mediocampista y su equipo actual es Boca Juniors de la Primera División de Argentina. Ha jugado en la selección argentina. Además de atravesar un buen momento futbolístico, Gago es el jugador más importante que tiene el plantel de Boca, último campeón local que conduce Guillermo Barros Schelotto por todas las funciones que cumple. Es el capitán del equipo.

Tiene presencia, personalidad, buen pie, voz de mando, visión de juego, orden táctico y condición natural de líder.

Si el DT de Boca necesita saber algo de cuestiones de grupo lo consulta a Gago. El diálogo entre el capitán y Guille es fluido, constante, semana a semana, partido a partido. Pintita (el apodo de Gago) no es solo un portador de la cinta, como muchas veces pasa en el fútbol argentino de hoy en día. En Boca lleva el brazalete por todas estas razones y varias más de las que no están a la vista en el terreno de juego. Además de ser el nexo principal entre el cuerpo técnico y el plantel, el volante es quien habla con los dirigentes ante cualquier circunstancia.

Y la cintura de Gago para los diálogos serios y constructivos también incluye a los pibes o a los que andan caídos. Por características naturales, es uno de los consejeros que tiene el grupo.

En la selección argentina jugó desde el año 2007 al 2015, 60 partidos sin convertir goles pero tuvo 7 asistencias.

En Boca Juniors durante la temporada 2016-2017 jugó 37 partidos donde convirtió 2 goles e hizo 3 asistencias. Tuvo 30 disparos al arco y 8 tarjetas amarillas.

Leonardo Ponzio

Leonardo Daniel Ponzio (Las Rosas, Santa Fe, Argentina; 29 de enero de 1982) es un futbolista argentino. Juega de volante de corte en River Plate de la Primera División de Argentina. Es considerado uno de los jugadores más importantes de la historia contemporánea de la institución, ganándose el afecto y la consideración de los hinchas por su entrega y amor hacia la camiseta. El 14 de febrero de 2016 llegó a 200 partidos con La Banda y desde julio de 2016 es el capitán del equipo y máximo referente del plantel millonario.

Ha sido internacional con la Selección Argentina en numerosas oportunidades contando Eliminatorias y partidos amistosos pero nunca se afianzó como habitual titular. Jugó 18 partidos convirtiendo un solo gol. Ganó la Copa Mundial de Fútbol Sub-20 de 2001, estando presente desde el comienzo en la final de la misma contra Ghana.

En las últimas temporadas jugó 57 partidos sin convertir goles y con 1 asistencia. Cometió 95 faltas, teniendo 16 tarjetas amarillas y 2 rojas.

Defensores:

<u>Nicolás Tagliafico</u>

Nicolás Alejandro Tagliafico “el guerrero” de 25 años juega de defensor lateral izquierdo y su equipo actual es el Club Atlético Independiente de la Primera División de Argentina. Es considerado uno de los mejores jugadores argentinos en su puesto. Gracias a que su rendimiento fue en alza cada vez más, ganó el cariño y el apoyo de la gente. Ya en 2017, asume el rol de capitán en Independiente y se convierte en el nuevo portador de la cinta con tan solo 24 años. Desde el 2016 ha jugado 60 partidos para Independiente contando con 2 goles y 7 disparos al arco. Además, desde que ha comenzado la temporada 2017-2018 solo ha tenido 15 partidos, contando con 2 tarjetas amarillas y 1 roja.

<u>Javier Pinola</u>

Javier Pinola, el zaguero de 34 años, está atravesando un gran momento en River Plate y ya está repuesto al ciento por ciento de la prolongada lesión (fractura de peroné) que lo marginó de las canchas el año 2016 cuando jugaba en Rosario Central.

Pinola se caracteriza por ser la voz de mando para que los atacantes tengan un partido incómodo y sin espacios para desplegar su técnica y velocidad. Suele no fallar en ningún cierre, gana los duelos mano a mano y también es prolijo con la pelota en los pies.

Javier desde el 2016 lleva jugados 42 partidos teniendo 2 goles (este último año), 1 asistencia y 4 disparos al arco; cometió 13 faltas, de las cuales obtuvo 9 tarjetas amarillas y 2 expulsiones.

Arqueros:

<u>Guido Herrera</u>

Guido Herrera (Ciudad de Río Cuarto, Córdoba, Argentina; 29 de febrero de 1992) es un futbolista argentino. El arquero empezó en Club Deportivo Río Cuarto y, tras varias pruebas, en Belgrano de Córdoba. En 2016 pasa a Talleres de Córdoba como arquero suplente y más tarde como titular; fue sin dudas una de las piezas fundamentales del equipo y consiguió el récord de imbatibilidad en el club con 701 minutos sin que le conviertan goles; marca histórica en el fútbol cordobés y en AFA. Terminó el 2016 con la valla menos vencida del campeonato. En la Copa Desafío de 2017 en Mar del Plata frente a Rosario Central; el resultado final fue 1 a 1 por lo que se tuvo que definir al ganador desde el punto de penal, Guido atajó dos penales y convirtió uno en la definición lo que le permitió a su club llevarse la victoria.

En total ha tenido 35 partidos jugados con 89 atajadas y 35 goles metidos; además cuenta con solamente 2 tarjetas amarillas.

<u>Sebastián Torrico</u>

Sebastián Alberto Torrico “el cóndor” (22 de febrero de 1980) juega de arquero y su club actual es San Lorenzo de la Primera División de Argentina. Debutó en 2001 en Godoy Cruz. En la temporada 2005- 2006 de la B Nacional, se consagró como gran héroe al tapar dos mano a mano en el alargue con Nueva Chicago cuando el partido estaba igualado; partido donde lograrían el ascenso a Primera venciendo 3-1. Jugó además en Argentinos Juniors antes de ingresar a San Lorenzo. El 15 de junio de 2013, hace su debut por el torneo local en el arco de San Lorenzo en un partido frente a Independiente que culminaría 1-0 a favor de San Lorenzo y que decretaría el descenso del equipo de Avellaneda. En 2015 el Banco Santander, patrocinador de la Conmebol, distinguió a Torrico como el mejor arquero de la edición 2014.

Desde el 2016 jugó 56 partidos con 152 atajadas y 57 goles metidos; tiene 1 tarjeta amarilla.

A.3. Caso: "¿El Viaje de tu Vida?" (G2)

Transcurrida la primera semana de clases de los alumnos de 4° año de la Escuela Nº 187 en la localidad de Firmat, Juan le presentó al curso la propuesta de Travel Rock para su esperado viaje a Bariloche.

Discusiones se armaron en torno al tema ya que María, Valentina y Pedro tenían otras propuestas.

Intentaron entre todos armar un cuadro con las distintas características de cada propuesta, pero esto no fue posible porque se superponían las opiniones y las propuestas no quedaban claras. Como no era posible llegar a un acuerdo, accedieron a que cada chico pase al frente para que exponga la propuesta de la empresa sin interrupciones y luego poder tomar una decisión.

Entre lo que mencionó Juan se encontraba que la empresa ofrecía una estadía de 10 días y 9 noches, un traslado en avión y uno en colectivo (a elección), 6 excursiones incluidas en el precio, un liberado cada 10 pasajeros y de las 9 noches, 5 de boliche, 2 de bowling y 2 libres.

"¿¡5 noches de boliche nada más!?" dijo Valentina. "Mejor cuento la propuesta de Fernando Tour" y se dispuso a exponer las propuestas de la empresa. "Fernando Tour nos da todas las noches de boliche, con repetición a elección. Tenemos también 6 excursiones incluidas, 2 liberados si son como mínimo 15 pasajeros y el traslado es en colectivo. El precio es aproximadamente $30000. Lo único malo es que tenemos que alquilar el traje de nieve allá".

Inmediatamente después se armó un debate entre los alumnos, algunos charlaban en grupos, otros intentaban convencer a sus compañeros de su opinión y otros simplemente no estaban interesados.

"Auckland es más caro, pero nos regala la mochila y el alquiler del salón para la graduación" dijo María. "¡Esperá María!, no entendés que vamos pasando de a uno con las propuestas. Todavía no es tu turno" gritó Alan.

"Antes de que siga Pedro quiero decir algo" dijo Valentina. "Este comentario es muy de vieja, pero posta que Fernando Tour es confiable, son del pueblo y mis papás viajaron también con ellos". El comentario de Valentina no tuvo mucho impacto por lo que Pedro continuó con su propuesta.

"Mucho Bariloche, pero para mí la onda ahora es irse a Brasil, hay playa y es más barato". La propuesta trajo aparejada una discusión más intensa encontrando opiniones contradictorias debido a que la mayoría quería ir a Bariloche. Igualmente, Pedro trató de convencer a sus compañeros planteando que la estadía es de 15 días, incluye fiestas en las playas y, al hacer calor, se reduce el equipaje y en consecuencia implica un gasto menor al no tener que comprar ropa especial para el frío. "El precio es de aproximadamente $22000" terminó Pedro.

Por último, María comenzó a contar su propuesta. "Yo averigüé con Auckland porque es una de las más conocidas, mucha gente que yo conozco se fue con esa y tuvieron una buena experiencia. Tenemos excursiones todas las tardes y boliche todas las noches, o sea ¡¡tenemos 9 noches de joda!! Lo malo es que sale $40000".

Un bullicio importante se armó en torno al tema y se destacaron comentarios como:

- "Lo más importante es poder ir al boliche todas las noches"

- “Está bueno que nos den el salón para la fiesta, pero hay que ver qué salón nos dan y qué condiciones tenemos que cumplir”
- “Hay que comparar precios para mí, y Juan no nos dijo nada sobre eso”
- “No nos fijemos solo en el precio, sino en el pack que nos ofrecen”
- “Lo bueno de Auckland es que tenemos las mañanas libres para dormir”

Pedro tomó la palabra e intentó hacer un comentario sobre lo bueno que estaría ir a Brasil, tratando de convencer a sus compañeros. “El hotel es 4 estrellas con media pensión y estaríamos a una cuadra de la playa, además tenemos incluida la excursión a un parque acuático”.

“¡¡Pedro ya te dijimos que no queremos ir a Brasil, no jodas más!!” dijo Alan.

Juan interrumpió y comentó que se había olvidado de decir el precio, pero que rondaba por los $35000.

“¿Y el traslado María?”. “De eso no me dijeron nada, podemos averiguar si hay chances de ir en avión”, contestó María. “Igual hay que ver, seguro nos aumentan el precio, y ya es bastante saladito” se escuchó por el fondo del salón.

“Tantos números y paquetes me están mareando”, dijo Rosa y varios coincidieron con ella.

Ya estaban todos cansados cuando a Alan se le ocurrió la siguiente idea: “ya que no nos podemos poner de acuerdo y además quienes nos pagan el viaje son ellos, creo que deberíamos preguntarles a nuestros viejos qué opinan sobre las distintas propuestas y qué creen que es lo mejor”.

“¡Al final Alán tuvo una buena idea!” dijo Rosa. “La semana que viene cada uno trae la opinión de su casa y tomamos la decisión” concluyó.

A.4. Caso: “¡Faltan 336 horas para el verano!” (G3)

Joaquín llega corriendo a su casa muy contento.

-J: ¡Mamá! ¡Papá! ¡Pasé a segundo año! ¡No me llevo ninguna materia!

Gabriel, el padre de Joaquín, deja de cocinar y va a su encuentro muy emocionado.

-G: ¡Muy bien! Felicitaciones… ¿Ahora qué vas a hacer en el verano con tanto tiempo libre?

-J: Quiero hacer algún deporte e ir a alguna pileta, pero no sé en qué club anotarme. ¿Cuál me convendrá?

-Diego: Y... venite conmigo al universitario. (Exclama el hermano mayor de Joaquín quien está en primer año de la universidad).

-J: Pero yo quiero jugar un deporte de equipo y ahí son todos más grandes. Mauro va al CUSA y ahí hay equipos de mi categoría.

Irrumpe Andrea, la madre de los chicos:

-A: ¿Pero el CUSA no es muy caro? Creo que sale alrededor de $1000 la inscripción, más la cuota cuesta mucho… ¿Por qué no averiguás en el Club de Pescadores que está a cinco cuadras y además es de los más baratos? Nosotros, con tu papá, vamos los fines de semana.

-D: O sino podés ir al Club Progreso, que está a diez cuadras, pasando la estación.

-J: Uh no sé, voy a averiguar, porque en el de Pescadores no hay muchos deportes, aunque está bueno porque podría irme caminando y los fines de semana disfrutaría con ustedes.

Joaquín decide averiguar información sobre los clubes. Primero se acerca al Club de Pescadores y descubre con decepción que, a causa de una intensa lluvia del día anterior, el río había crecido y el club permanece cerrado.

Luego se dirige al Club Progreso que no queda muy lejos de su casa. Ahí puede practicar vóley y además tiene canchas de tenis para jugar recreativamente, la inscripción sale $600, la cuota $400 y cuenta con dos piletas, parrilleros y una cantina.

Al día siguiente en el almuerzo le cuenta a su familia lo que averiguó:

-D: ¡Te re conviene el Progreso!

-J: Pero no voy a meterme solo en un club donde no conozco a nadie.

-A: Diego, ¿cuánto pagás vos en el Universitario?

-D: A mí me sale $100, pero porque soy estudiante, sino creo que sale $400, más la inscripción. Igual si empezás ahí te puedo llevar en el auto, en el verano voy todos los días.

-J: Uh, pero no hay equipos de mi categoría, aunque me gustaría por la pileta y el gimnasio.

-D: Sí, la pileta es lo mejor que tiene porque es re grande y está siempre disponible ya que el agua no necesitan cambiarla porque tiene filtro.

-J: Ah, está bueno eso. Mauro me dijo que la del CUSA tiene un techo corredizo así que puedo ir cuando llueve también. En cambio, al de los Pescadores no puedo ir ni cuando llueve ni el día después porque queda todo embarrado.

-D: Igualmente tené en cuenta que a la del CUSA la cambian cada 15 días.

-G: Hijo entonces vas a tener que analizar el pronóstico del tiempo para el verano para tener una idea de cuánto uso le vas a poder dar a la pileta de cada club. (Exclamó el padre quien escuchaba atentamente la conversación).

-A: Bueno hijo, seguí pensando que todavía faltan dos semanas para que arranque la temporada. A mí me encantaría que vengas con nosotros al de los Pescadores.

-J: No sé, son tantas cosas a tener en cuenta… Que si llueve, que si se inunda, que la inscripción, que la cuota, que los deportes y encima que no sé cuándo voy a poder usar la pileta. (Dice Joaquín muy aturdido).

-G: Tranquilo hijo, vení que te ayudo, vamos a organizar toda la información que conseguiste.

A.5. Caso: “Nadando en un mar de posibilidades” (G4)

Carla se recibió de Bióloga Marina el pasado junio, destacándose con el mejor promedio de su promoción. Debido a esto, recibe una importante beca de un monto de $15.000 y sin dudarlo decide destinarlo a un viaje.

Muy emocionada por la noticia se lo comunica a su primo Nicolás, que está estudiando Hotelería y Turismo, para que la ayude a decidir el destino y a organizar el viaje. Carla le comenta que le gustaría conocer el sur argentino, dado que allí se encuentran variadas especies sobre las que estuvo estudiando. Él se toma unos días para averiguar precios y paquetes, y a principio de agosto le consigue tres grandes ofertas:

Paquete 1: Noroeste Pacífico

Precio: $10.208

SAM TRAVEL FERIADOS DESTACADOS DESTINOS MÁS...

Noroeste Pacífico

Salida: 29 de Octubre 2017
12 y 19 de Noviembre 2017
Salidas en Feriados

Duración: 07 noches / 10 días

Salidas desde: Rosario, San Lorenzo, Arocena, Santo Tomé, Santa Fe, Esperanza, Humboldt, Rafaela, Sunchales, Arrufo, Ceres.
Consulte detalles para cada fecha de salida particular.

Los Precios Incluyen:
-Traslados Bus Privado Semi-cama.
-Coordinador durante todo el recorrido, Guías locales.
-7 noches de alojamiento: 1 en Tucumán + 2 en Jujuy + 3 en Salta + 1 en Tafi del Valle.
-Régimen: Media Pensión.
-Excursiones Incluidas.
-Excursiones opcionales.

Recorridos y Excursiones Incluidas:
-City tour Santiago del Estero.
-Visita a Termas de Río Hondo: Dique Frontal y Presa.
-City Tour San Miguel de Tucumán.
-Dique El Cadillal.
-Quebrada de Humahuaca.
-City tour San Salvador de Jujuy.
-City tour Salta Capital.
-Valle de Lerma.
-Quebrada de Cafayate.
-Ruinas de Quilmes.
-Abra del Infiernillo.
-City tour Tafí del Valle.
-Dique La Angostura.
-El Mollar.
-Parque Los Menhires.
-Quebrada de Los Sosa.
-Mirador El Indio.

Excursiones Opcionales:
(Se contratan en viaje)
-Salinas Grandes.
-Cachi.
-Peña Boliche Balderrama.
-San Antonio de Los Cobres.
-Termas de Reyes (llevar traje de baño).
-Visita a Casa Histórica.

Itinerario Detallado:
Ver Itinerario Completo
El orden del itinerario puede realizarse en sentido inverso para asegurar el correcto del desarrollo del tour.

Paquete 2: Valle de la Luna

Precio: $6.979

SAM TRAVEL FERIADOS DESTACADOS DESTINOS MÁS...

Recorrido Pacífico | Recorrido Largo A | Recorrido Largo B | Talampaya + Noroeste

Recorrido Pacífico

Salidas: 12 de Octubre 2017.
Salidas en Feriados

Duración: 03 Noches / 04 Días

Salida desde: Rosario.

Los Precios Incluyen:
-Traslado en Bus Exclusivo de Turismo, semicama.
-Coordinación y guía permanente.
-03 noches de Alojamiento.
-Régimen: Media Pensión. Cenas fuera del hotel.
-Excursiones Incluidas.
-Excursiones Opcionales.

Excursiones Incluidas: -CITY TOUR LA RIOJA.
-CAÑON DE TALAMPAYA (a realizarse con móviles adecuados para tal fin, incluidos en el programa).
-VALLE DE LA LUNA (travesía por el imponente valle de Ischigualasto a realizarse con móviles adecuados para tal fin, incluidos en el programa).
No incluye ingresos a los parques, que se abonarán en destino

Excursiones Opcionales:
(Se contratan en viaje)

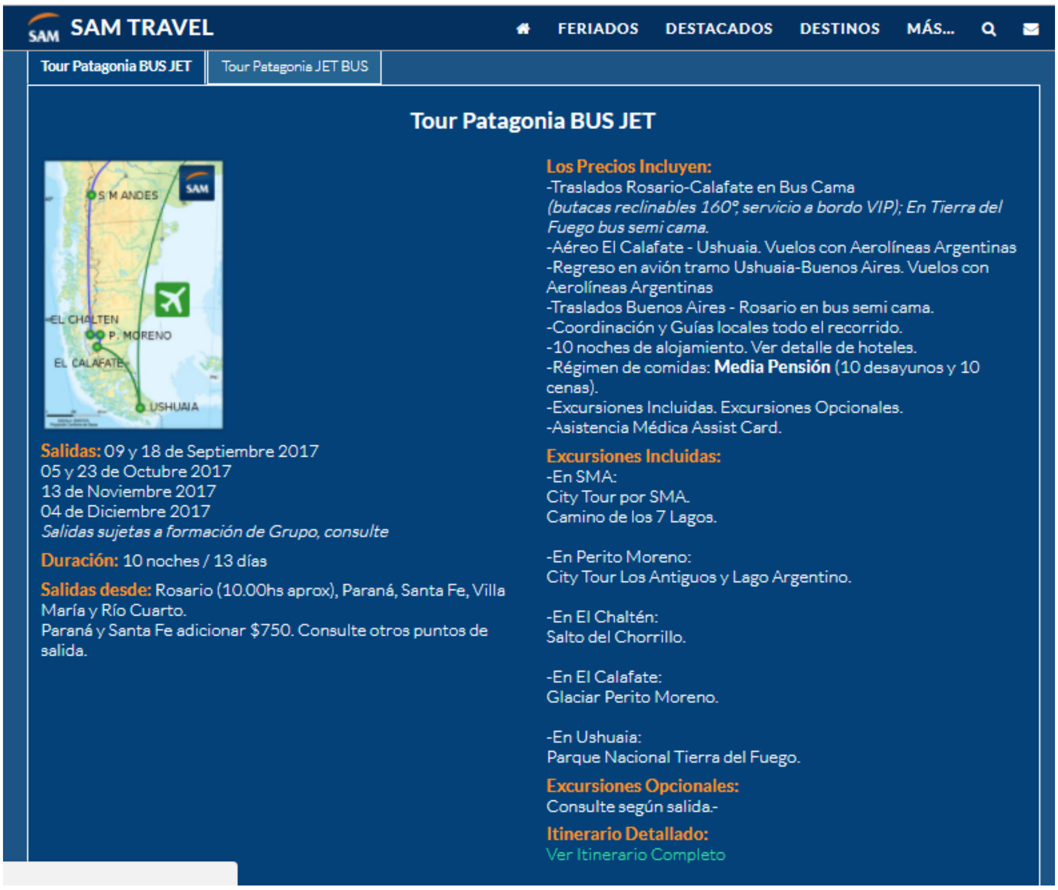
Paquete 3:

Precio: $22.555

Paquete 4:

Precio: $25.540

Solo queda disponible la salida del 4 de diciembre



Luego de que su primo le presenta estas opciones, Carla decide hablarlo con su mejor amiga Irina para que la ayude a tomar una buena elección. Para esto, comienzan a analizar cada uno de los paquetes, teniendo en cuenta todas las variables que se ponen en juego.

Irina: -No lo dudes amiga, elegí el paquete 4, ¡es increíble!

Carla: -La verdad que sí, fue el que más me gustó… El problema es la oferta laboral que me salió para principios de diciembre.

Irina: -Bueno, sí… pero fuiste a cinco entrevistas, seguro te llaman de alguna otra, o hasta tal vez te permitan arrancar después.

Luego de hablar con Irina, Carla se queda pensando todo el día en cuál combo elegir. Se imagina buceando con las diferentes especies de peces para analizarlos.

Al día siguiente se encuentra con Nicolás en un cumpleaños, y no faltó el momento en el que tuvieran un tiempo para hablar sobre el tema. Nicolás trata de convencerla para que elija uno de los dos primeros destinos ya que son muy baratos.

Nicolás: -No podés desperdiciar estas increíbles promociones (Refiriéndose al precio, sin tener en cuenta que en esos destinos no hay mar y no va a poder aplicar sus flamantes conocimientos).

Sin dudarlo, decidió acompañarla a la empresa de turismo donde él trabaja para que el gerente, experto en el tema y conocedor de los lugares presupuestados y climatología en las fechas indicadas, le especifique los lugares que puede visitar en cada destino y las características que le ofrecen las promociones. El señor dirige su venta al viaje de la Patagonia, por verla demasiado motivada con el destino teniendo en cuenta que en el Noroeste y en San Juan el clima es elevado para la fecha con temperaturas de 32 a 34°C y en la Patagonia el clima es de 15°C. Y le presenta el siguiente cuadro con las temperaturas y precipitaciones.

CIUDAD	Temp. Verano (Promedio)		Temp. Invierno (Promedio)		Precipitaciones	
	Máx.	Mín.	Máx.	Mín.	Promedio anual:	Precipitaciones > 100mm
BARILOCHE	24°C	6°C	7°C	-1°C	782 mm	Mayo a agosto
BUENOS AIRES	30°C	20°C	17°C	8°C	1306 mm	Octubre a abril
CAFAYATE	27°C	16°C	20°C	3°C	206 mm	-
COMODORO RIVADAVIA	25°C	13°C	12°C	3°C	239 mm	-
CÓRDOBA	31°C	18°C	18°C	6°C	770 mm	Noviembre a abril
EL CALAFATE	19°C	7°C	5°C	-3°C	123 mm	-
ESQUEL	22°C	8°C	7°C	-2°C	504 mm	-
LA RIOJA	34°C	21°C	22°C	5°C	410 mm	Enero
MAR DEL PLATA	27°C	15°C	14°C	3°C	924 mm	Diciembre, enero y marzo
MENDOZA	31°C	18°C	17°C	3°C	190 mm	-
NEUQUÉN	31°C	15°C	14°C	1°C	187 mm	-
PUERTO IGUAZÚ	32°C	21°C	22°C	11°C	1919 mm	Todo el año
RESISTENCIA / CORRIENTES	33°C	21°C	23°C	12°C	1478 mm	Octubre a abril
ROSARIO	30°C	18°C	16°C	5°C	994 mm	Enero a marzo, octubre y noviembre
SALTA	27°C	17°C	22°C	4°C	755 mm	Diciembre a marzo
SAN FERNANDO DEL VALLE DE CATAMARCA	34°C	21°C	20°C	4°C	458 mm	Enero
SAN JUAN	34°C	19°C	16°C	2°C	100 mm	-
SAN LUIS	31°C	16°C	16°C	4°C	573 mm	Diciembre y enero
SAN MARTÍN DE LOS ANDES	27°C	9°C	10°C	1°C	1500 mm	Mayo a septiembre
SAN MIGUEL DE TUCUMÁN	31°C	20°C	20°C	7°C	966 mm	Diciembre a marzo
SAN RAFAEL	33°C	17°C	16°C	1°C	190 mm	-
SAN SALVADOR DE JUJUY	30°C	18°C	20°C	6°C	778 mm	Diciembre a marzo
SANTA FÉ / PARANÁ	32°C	20°C	17°C	7°C	1030 mm	Octubre a abril
SANTA ROSA	30°C	15°C	15°C	3°C	686 mm	Noviembre y diciembre
TAFÍ DEL VALLE	26°C	13°C	16°C	0°C	440 mm	Enero y febrero
TRELEW	29°C	14°C	15°C	1°C	209 mm	-
USHUAIA	15°C	5°C	5°C	-2°C	558 mm	-

Carla plantea que su disponibilidad financiera no le alcanza para abonar el paquete sugerido, por tal motivo el vendedor le propone diversas formas de financiación del saldo de entrega que dispone Carla con un interés diverso según el plan de pago que elija o con adelantos de cuotas y tasas preferenciales, especificándole que si lo paga en 12 cuotas el interés es del 15% del monto total del paquete elegido mientras que en 6 cuotas el interés es del 5%.

En ese momento, se siente confundida. Decide llevarse anotadas las posibilidades de cancelación y estudiarlas tranquila en su casa, con la mirada en conjunto de su amiga Irina, en la cual confía plenamente.

Con mate de por medio, se sientan a evaluar cada presupuesto:

- Fecha del viaje (sujeta a salida laboral disponible)
- Destino (Mar / Sierras / Montañas)
- Costo (Planes de pago / Intereses / Seña)
- Transporte (Bus / Aéreo)
- Hoteles (Estadía / Desayuno / Media pensión)
- Excursiones (Incluidas / Opcionales).
- Deseo de ver fauna marina
- Clima (Temperatura y Precipitaciones)

Carla aún indecisa continuó con sus mates, pensando en que podría resolver esto en una próxima mateada.