

MINISTERIO DE EDUCACION
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS, FISICO-
QUIMICAS Y NATURALES APLICADAS A LA INDUSTRIA

MATHEMATICÆ NOTÆ

BOLETIN

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA

DIRECTOR

BEPPPO LEVI

AÑO NOVENO - FASC. 3-4



ROSARIO
REPUBLICA ARGENTINA

1949

Las "Mathematicae Notae" publican artículos, cuestiones, ejercicios, soluciones y correspondencia. La resolución de las cuestiones propuestas será publicada en números sucesivos de la revista al cabo de un tiempo razonable, a juicio del Director del Instituto, para obtener contestaciones de los lectores; de las cuestiones publicadas bajo el título de ejercicios la dirección se reserva la decisión, en cada caso, de publicar o no las respuestas.

A fin de año se adjudicarán dos premios:

1º Por concurso entre alumnos de la Facultad que contesten satisfactoriamente a cuestiones, problemas o ejercicios.

2º Por concurso entre todos los demás lectores del país o del extranjero que contesten en modo acertado a los mismos.

Los premios consistirán en tratados de extensión cultural o libros de especialización.

Las soluciones deben ser entregadas al Instituto en redacción clara y en hojas distintas para cada cuestión, problema o ejercicio. En cada hoja deberá señalarse el nombre del autor; los alumnos de la Facultad indicarán el año de estudios que cursan en la misma, y, los de primer año, además, la escuela media de la cual provienen. Estos elementos serán tenidos en cuenta para el juicio, conjuntamente con el valor intrínseco de las soluciones y la forma expositiva de las mismas, dándose por la Dirección la máxima importancia a la disposición por la cual se compararán sólo alumnos de igual preparación.

En la sección de Bibliografía se publicarán los análisis críticos de libros recientes que sean enviados al Instituto de Matemática.

I N D I C E

	PÁG.
Unas desigualdades entre los elementos de un tetraedro en geometría no-euclidiana (L. A. SANTALÓ)	113
Sobre la aproximación de segundo orden en los entornos de un par de puntos correspondientes en una transformación conforme (J. OLGUÍN)	118
Post-multiplication by a unitary Matrix (J. L. BRENNER)	130
Estudio complejo de los pares de triángulos relacionados (V. INGLADA)	137
La objeción de Grandjot a la teoría de Peano del número natural (P. PI CALLEJA)	143
El tercero incluido en la contraparadoja de Russell (P. PI CALLEJA) ..	152
A propósito de la Nota del Dr. Pi Calleja - Sobre paradojas lógicas y Principio del <i>Tertium non datur</i> (B. LEVI)	155
Ejercicios y problemas (resueltos)	160
Ejercicios y problemas (propuestos)	163
Bibliografía	165

UNAS DESIGUALDADES ENTRE LOS ELEMENTOS DE UN TETRAEDRO EN GEOMETRIA NO-EUCLIDIANA

POR

L. A. SANTALÓ

1. *Enunciado de los resultados.* — Sean l_i las longitudes de las aristas de un tetraedro del espacio euclidiano y α_i los ángulos diedros correspondientes ($i=1, 2, \dots, 6$). Es sabido que entre estos elementos valen las siguientes desigualdades (*)

$$2 \sum \alpha_i l_i < \pi \sum l_i < 3 \sum \alpha_i l_i \quad (1.1)$$

donde la suma, aquí y en todo lo que sigue se entiende extendida de 1 a 6.

El objeto de esta nota es generalizar estas desigualdades al caso de las geometrías no-euclidianas o bien, lo que es equivalente, a tetraedros de un espacio de curvatura constante K .

El resultado a que se llega es el siguiente:

Teorema 1. — *Para todo tetraedro del espacio tridimensional de curvatura constante K , cuyas aristas tengan longitudes l_i y cuyos ángulos correspondientes sean α_i ($i=1, 2, \dots, 6$), tienen lugar las desigualdades*

$$2 \sum \alpha_i l_i < \pi \sum l_i + 4KV < 3 \sum \alpha_i l_i - 2KV \quad (1.2)$$

donde V es el volumen del tetraedro.

(*) G. POLYA - G. SZEGO, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Berlin, 1925, Vol. II, pág. 166.

Para $K=0$ se tienen las desigualdades (1.1) del caso euclidiano; para $K>0$ las correspondientes al caso no euclidiano elíptico, y para $K<0$ las del caso hiperbólico. Supondremos por simplicidad $|K|=1$, lo que evidentemente no constituye restricción.

Las desigualdades, lo mismo que en el caso euclidiano, sólo pueden convertirse en igualdades cuando el tetraedro degenera en un segmento, sea por confundirse en una sola tres aristas concurrentes (en cuyo caso es la segunda desigualdad de (1.2) la que degenera en igualdad), sea por reducirse a puntos dos aristas opuestas (en cuyo caso es la primera desigualdad (1.2) la que se reduce a igualdad).

Ordenando convenientemente los términos de las desigualdades (1.2) el teorema se puede enunciar:

Entre las longitudes l_i , los ángulos diedros correspondientes α_i y el volumen V de un tetraedro del espacio no euclidiano, valen las desigualdades

$$\frac{1}{4} \sum (2\alpha_i - \pi) l_i < V < \frac{1}{6} \sum (3\alpha_i - \pi) l_i \quad (1.3)$$

para el espacio elíptico, y las

$$\frac{1}{6} \sum (\pi - 3\alpha_i) l_i < V < \frac{1}{4} \sum (\pi - 2\alpha_i) l_i \quad (1.4)$$

para el espacio hiperbólico.

Estas acotaciones para V tienen interés por el hecho de que el volumen de un tetraedro del espacio no euclidiano se sabe que no se puede expresar mediante funciones elementales de las longitudes de las aristas y de los ángulos diedros. (Expresiones mediante integrales no expresables por funciones elementales pueden verse, por ejemplo, en J. L. Coolidge, *The elements of non-euclidean geometry*, Londres, 1909, págs. 183-185; H. W. Richmond, *The volume of a tetrahedron in elliptic space*, Quarterly Journal of Mathematics, Vol. XXXIV, 1903). Las desigualdades anteriores dan acotaciones para estas integrales, acotaciones que no se pueden mejorar, puesto que se convierten en igualdades para los casos de degeneración mencionados.

2. *Demostración.* — La demostración que vamos a dar sigue el mismo camino que la dada por Pólya en el caso euclidiano. Sólo necesitamos ciertas fórmulas integrales de los espacios de curvatura constante que hemos dado en la Nota *Geometría Integral en los Espacios de Curvatura constante* de este mismo volumen (págs. 1-28).

Recordemos que la densidad para medir conjuntos de planos vale (loc. cit. fórmula (2.15)),

$$de = \cos^2 k\rho [d\Omega d\rho] \quad (2.1)$$

y que con esta densidad la medida de los planos que cortan a un cuerpo convexo Q de volumen V y curvatura media M vale (loc. cit. fórmula (10.4)),

$$m(Q \cdot e \neq 0) = M + KV. \quad (2.2)$$

Si Q es un tetraedro, según la observación b) del n.º. 7 del trabajo citado (fórmula (7.4)), la curvatura media vale

$$M = \frac{1}{2} \sum (\pi - \alpha_i) l_i = \frac{1}{2} \pi \sum l_i - \frac{1}{2} \sum \alpha_i l_i \quad (2.3)$$

con lo cual (2.2) queda

$$m(Q \cdot e \neq 0) = \frac{1}{2} \pi \sum l_i - \frac{1}{2} \sum \alpha_i l_i + KV. \quad (2.4)$$

Por otra parte consideremos una curva C del espacio, rectificable y de longitud L . La densidad de puede expresarse también (fórmula (2.13) del loc. cit.) por

$$de = [d\Omega dt] \quad (2.5)$$

donde dt representa el elemento de longitud normal a e en un punto P del mismo y $d\Omega$ es el elemento de área sobre la esfera euclidiana unidad de centro P correspondiente a la dirección normal a e . Si e corta a C , tomemos por punto P un punto de la intersección. Llamando ϑ al ángulo entre la normal a e y la tangente a C en P y ds al elemento de arco de C , es $dt = |\cos \vartheta| ds$.

Sustituyendo en (2.5) e integrando $d\Omega$ a la semiesfera unidad (para considerar todos los planos que pasan por P) y luego integrando s a toda la curva C (para tener en cuenta todos los planos que cortan a C), resulta el valor πL . De esta manera cada plano ha quedado contado tantas veces como puntos de intersección tiene con C ; llamando n a este número es, pues,

$$\int n \, de = \pi L \quad (2.6)$$

extendida la integración a todos los planos para los cuales es $n \neq 0$, fórmula bien conocida para el caso euclidiano y que vemos vale lo mismo para cualquier espacio de curvatura constante.

Aplicando (2.6) al conjunto de las 6 aristas del tetraedro considerado al principio, será

$$\int n \, de = \pi \sum l_i \quad (2.7)$$

Observemos que para las aristas de un tetraedro sólo puede ser $n=3$ o $n=4$. Llamando m_3 , m_4 a las medidas de los conjuntos de planos que cortan respectivamente a 3 o a 4 aristas (2.4) y (2.7) se pueden escribir, respectivamente,

$$m_3 + m_4 = \frac{1}{2} \pi \sum l_i - \frac{1}{2} \sum \alpha_i l_i + KV$$

$$3m_3 + 4m_4 = \pi \sum l_i$$

de cuyo sistema se deduce

$$m_3 = \pi \sum l_i - 2 \sum \alpha_i l_i + 4KV$$

$$m_4 = \frac{3}{2} \sum \alpha_i l_i - \frac{1}{2} \pi \sum l_i - 3KV.$$

Como las medidas m_3 , m_4 no pueden ser negativas, resultan las desigualdades

$$\pi \sum l_i + 4KV \geq 2 \sum \alpha_i l_i \quad (2.8)$$

$$3 \sum \alpha_i l_i \geq \pi \sum l_i + 6KV. \quad (2.9)$$

La igualdad en (2.8) sólo valdrá cuando sea $m_3=0$, o sea cuando todos los planos que cortan al tetraedro corten a 4 aristas, lo cual sólo puede ocurrir en el caso en que el tetraedro degenera en un segmento por haberse reducido a puntos dos aristas opuestas. La igualdad en (2.9) sólo valdrá cuando $m_4=0$, o sea cuando todos los planos corten al tetraedro en 3 puntos, lo cual sólo ocurre cuando el tetraedro degenera en un segmento por haberse confundido tres aristas concurrentes.

Para tetraedros no degenerados valen en (2.8) y (2.9) los signos de desigualdad y ellas equivalen a las desigualdades (1.2) que queríamos demostrar.

Haciendo $K=1$ o $K=-1$ y ordenando convenientemente los términos se obtienen las desigualdades (1.3), (1.4).

FACULTAD DE CIENCIAS FISICOMATEMATICAS.
LA PLATA.

SOBRE LA APROXIMACION DE SEGUNDO ORDEN EN LOS ENTORNOS DE UN PAR DE PUNTOS CORRESPONDIENTES, EN UNA TRANS- FORMACION CONFORME

por

JUAN OLGUÍN

Esta nota tiene origen en la cuestión n°. 13, propuesta en el Fasc. 1, Año V de esta misma revista, a raíz del artículo de L. A. Santaló: *Un teorema sobre representación conforme*, aparecido en el mismo fascículo. El teorema a que se refiere el mencionado artículo es el siguiente: *En una representación conforme entre los planos (xy) (XY) , la correspondencia entre los puntos Q , centros de curvatura correspondiente al punto P de las curvas γ del plano (xy) , que pasan por este punto, y los puntos Q' centros de curvatura de las curvas transformadas γ' del plano (XY) , correspondientes al punto P' , transformado de P , es una proyectividad entre los planos (xy) , (XY) .*

La cuestión propuesta era la siguiente:

I. — *Cualquier transformación conforme se puede aproximar alrededor de un punto por una transformación cuadrática (conforme, no necesariamente birracional). En base a esta observación se invita a estudiar, desde un punto de vista algebraico, las proposiciones demostradas por L. A. Santaló con consideraciones de geometría diferencial.*

II. — *De las proposiciones de ese artículo se deduce fácilmente que si un sistema de curvas que pasan por P tienen círculos osculadores en este punto que forman un haz, las curvas transformadas por una transformación conforme tienen igualmente por círculos osculadores en el punto P' , correspondiente de P , los círculos de un haz. Dada la transformación conforme y el punto P (y por tanto P') resulta definida entre los planos una nueva correspondencia puntual en la cual se corresponden los segundos puntos de dichos haces.*

Se pide estudiar tal correspondencia y su relación con la correspondencia proyectiva estudiada por Santaló.

I

1. - Sean

$$X = X(xy); \quad Y = Y(xy) \quad (1)$$

las ecuaciones de una transformación conforme entre los planos Σ_1 y Σ_2 . Supondremos los sistemas de referencia $xy; XY$, cartesianos ortogonales con orígenes en los puntos correspondientes P, P' .

Se sabe que la transformación conforme está caracterizada por las condiciones (1)

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \pm \frac{\partial Y}{\partial y}; \quad \frac{\partial X}{\partial y} = \mp \frac{\partial Y}{\partial x}. \quad (2)$$

Llamaremos aproximaciones polinómicas de una dada transformación (1) de los distintos órdenes $1, 2, \dots, n \dots$ alrededor de un determinado par de puntos correspondientes P, P' a las transformaciones que se definen cortando después de cada uno de los grupos homogéneos de términos de dichos órdenes a los desarrollos de Taylor de los segundos miembros de (1) referidos a ese par de puntos como origen. Vale entonces la proposición:

La aproximación polinómica de orden n de una dada transformación alrededor de un determinado par de puntos correspondientes está caracterizada por reunir las dos propiedades de ser representada por polinomios de orden n y de aproximar la transformación propuesta en los entornos de dichos puntos, hasta el orden infinitesimal n .

Si se observa que en los desarrollos de Taylor de los segundos miembros de las igualdades (1) las ecuaciones (2) van im-

(1) Como se sabe los dobles signos no afectan las propiedades específicas de la representación conforme y su interpretación depende de las orientaciones de los planos Σ_1 y Σ_2 . En aquellos casos en que Σ_1 y Σ_2 estén superpuestos o por alguna razón estas orientaciones estén impuestas, puede siempre pasarse de los signos superiores a los inferiores o reciprocamente, cambiando X en $-X$ (o Y en $-Y$) o geométricamente agregando una simetría. En las consideraciones que siguen adoptaremos los signos que permitan una exposición más breve suponiendo previamente efectuados los cambios de signos o simetrías necesarias.

poniendo progresivamente a los coeficientes de los grupos de términos de un mismo grado nuevas condiciones que de hecho son satisfechas si de dichos desarrollos se consideran sólo los grupos de términos hasta un cierto orden, puede enunciarse:

Las aproximaciones polinómicas de cualquier orden de una transformación conforme son también conformes (en grande).

2. - Consideremos en particular la aproximación de segundo orden

$$\begin{aligned} X &= Ax + By + Cx^2 + 2Dxy + Ey^2; \\ Y &= A_1x + B_1y + C_1y^2 + 2D_1xy + E_1y^2 \end{aligned} \quad (3)$$

que de acuerdo a (2) deberá satisfacer las igualdades

$$\begin{aligned} A + 2Cx + 2Dy &= B_1 + 2D_1x + 2E_1y \\ B + 2Dx + 2Ey &= -A_1 - 2C_1x - 2D_1y. \end{aligned} \quad (4)$$

que imponen las condiciones

$$A = B_1; \quad B = -A_1; \quad C = -E = D_1; \quad D = E_1 = -C_1$$

con lo cual las (3) se escriben

$$\begin{aligned} X &= Ax + By + C(x^2 - y^2) + 2Dxy; \\ Y &= -Bx + Ay - D(x^2 - y^2) + 2Cxy \end{aligned} \quad (5)$$

que será la forma genérica de la aproximación polinómica de segundo orden alrededor del origen, de una transformación conforme referida a ejes coordenados cuyos orígenes se corresponden.

3. - Efectuando en Σ_1 el giro

$$x' = (A^2 + B^2)^{-\frac{1}{2}} (Ax + By); \quad y' = (A^2 + B^2)^{-\frac{1}{2}} (-Bx + Ay), \quad (6)$$

en las transformadas de las ecuaciones (5) se anulará el coeficiente de y' en la primera y el de x' en la segunda, y como, por otra parte, por efecto del giro la transformación no habrá dejado de ser conforme, los coeficientes de los términos de segundo grado deberán presentar la disposición característica de (5). Por lo tanto las (5) tomarán la forma (2)

(*) En estas ecuaciones se han restituido los dobles signos y para mayor sencillez suprimido los ápices de las variables.

$$\begin{aligned} X &= \pm (ax + b(x^2 - y^2) + 2cxy); \\ Y &= ay - c(x^2 - y^2) + 2bxy. \end{aligned} \quad (7)$$

Estas últimas expresiones pueden llevarse a una forma más simple, operando sobre ambos sistemas de referencia las rotaciones de igual amplitud

$$\begin{aligned} X' &= \lambda X + \mu Y & x' &= \lambda x + \mu y \\ Y' &= -\mu X + \lambda Y & y' &= -\mu x + \lambda y \end{aligned} \quad (8); \quad (8')$$

$$(\lambda^2 + \mu^2 = 1)$$

con lo cual las (7) se transforman en:

$$\begin{aligned} X' &= a(\lambda^2 + \mu^2) x' + \{(b\lambda - c\mu)(\lambda^2 - \mu^2) + 2(b\mu + c\lambda)\lambda\mu\} (x'^2 - y'^2) + \\ &\quad + 2\{(b\mu + c\lambda)(\lambda^2 - \mu^2) - 2(b\lambda - c\mu)\lambda\mu\} x' y' \\ Y' &= a(\lambda^2 + \mu^2) y' - \{(b\mu + c\lambda)(\lambda^2 - \mu^2) - 2(b\lambda - c\mu)\lambda\mu\} (x'^2 - y'^2) + \\ &\quad + 2\{(b\lambda - c\mu)(\lambda^2 - \mu^2) + 2(b\mu + c\lambda)\lambda\mu\} x' y', \end{aligned}$$

que, poniendo en evidencia el factor $\lambda^2 + \mu^2$, se escriben

$$\begin{aligned} X' &= (\lambda^2 + \mu^2)(ax' + (b\lambda + c\mu)(x'^2 - y'^2) + 2(c\lambda - b\mu)x'y') \\ Y' &= (\lambda^2 + \mu^2)(ay' - (c\lambda - b\mu)(x'^2 - y'^2) + 2(b\lambda + c\mu)x'y'). \end{aligned}$$

Disponiendo de las indeterminadas λ, μ de manera que se anule el coeficiente $(c\lambda - b\mu)$ (o el $(b\lambda + c\mu)$) [condición, que agregada a la de ser $\lambda^2 + \mu^2 = 1$, determina las rotaciones (8)] las (7) toman las formas (9) (o 9') siguientes (2):

$$\begin{aligned} X &= \pm (Ax + B(x^2 - y^2)) & X &= \pm (Ax + 2Bxy) \\ & (9); & & (9'). \\ Y &= Ay + 2Bxy & Y &= Ax + B(y^2 - x^2). \end{aligned}$$

Todavía aplicando a estas ecuaciones las dilataciones

$$\left\{ \begin{array}{l} X' = \frac{B}{A^2} X \\ Y' = \frac{B}{A^2} Y \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{A}{B} x' \\ y = \frac{A}{B} y' \end{array} \right. \quad (10)$$

ellas se reducen a las formas sin parámetros

$$\begin{aligned} X &= \pm (x + (x^2 - y^2)) & X' &= \pm (x + 2xy) \\ Y &= y + 2xy & Y &= y + (y^2 - x^2) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} (11); \\ (11') \end{array}$$

Teniendo en cuenta eventuales traslaciones necesarias para hacer coincidir los orígenes en los puntos correspondientes P, P' y el significado de (6), (6'), (8), (8'), (10), puede enunciarse:

Toda transformación conforme puede aproximarse hasta el segundo orden, alrededor de un par de puntos correspondientes, a menos de semejanzas, por una transformación libre de parámetros de la forma (11) (o (11')) y a menos de congruencias, por una transformación de la forma (9) (o (9')).

Todavía las ecuaciones (11), (11') y el proceso seguido para obtenerlas permiten enunciar:

Todas las aproximaciones de segundo orden, alrededor de cualquier par de puntos correspondientes, subordinadas a transformaciones conformes, son semejantes.

3.- En virtud de lo expuesto anteriormente puede ahora demostrarse el teorema:

Dada una transformación conforme T y en ella un par de puntos correspondientes P, P' , siempre es posible hallar una bien determinada inversión T_1 y en ella un par de puntos correspondientes Q, Q' tales que en sus entornos la aproximación de segundo orden sea idéntica a la aproximación de segundo orden de la correspondencia T alrededor de P, P' ⁽³⁾.

Sean

$$X = \frac{kx}{x^2 + y^2} \quad Y = \frac{ky}{x^2 + y^2} \quad (12)$$

las ecuaciones de una inversión T_1 referida a un par de ejes cartesianos por su centro, en la cual al punto genérico del eje de las x de coordenadas $(x_0; 0)$ corresponde el punto de coor-

⁽³⁾ Salvo, desde luego, un cambio del sentido de las rotaciones.

denadas $(\frac{k}{x_0}; 0)$. Si efectuamos los desarrollos de Taylor alrededor del punto $(x_0; 0)$ de los segundos miembros de (12) y tomamos los términos hasta el segundo grado, su aproximación polinómica de segundo orden resulta:

$$X = -\frac{k}{x_0^2}x + \frac{k}{x_0^3}(x^2 - y^2); \quad Y = \frac{k}{x_0^2}y - 2\frac{k}{x_0^3}xy.$$

Suponiendo la aproximación polinómica de la T , alrededor de P, P' expresada en la forma (9), para que la (12) sea idéntica a esta última deberá ser:

$$A = \frac{k}{x_0^2}, \quad B = -\frac{k}{x_0^3},$$

ecuaciones que determinan unívocamente la constante k y la abscisa x_0 de Q , e indirectamente la de Q' , quedando por lo tanto demostrado el teorema.

Si se tiene en cuenta la posible imposición de determinados ejes coordenados, y las eventuales congruencias que esta circunstancia podría introducir en el cálculo, la proposición anterior toma la siguiente forma:

Toda transformación conforme puede aproximarse hasta el segundo orden, alrededor de un par de puntos correspondientes, por una afinidad circular.

4. - Si con γ y c indicamos, respectivamente, una curva cualquiera y su círculo osculador en un punto P , y con γ' y c' sus transformados por una afinidad circular, por transformar esta última círculos en círculos y conservar el orden de contacto resultará c' un círculo y precisamente el círculo osculador a γ' en P' . Con esta observación puede demostrarse que:

La afinidad circular que aproxima la transformación original alrededor de un punto P , es la misma transformación que hace corresponder a los círculos osculadores en P de las curvas que pasan por este punto, los círculos osculadores en P' , correspondiente de P , de las curvas transformadas por la transformación original.

En efecto, si llamamos T a la transformación conforme original, T_1 a la afinidad circular que la aproxima alrededor de

P , γ' y γ'_1 a las curvas transformadas por T y T_1 respectivamente de una misma curva γ por P , se tiene que, por aproximar T_1 a T hasta el segundo orden, γ' y γ'_1 tienen en P el mismo círculo osculador, y además por ser T_1 una afinidad circular, este círculo osculador será (por la observación hecha al principio de este párrafo) el correspondiente en T_1 del círculo osculador a γ en P .

De lo dicho precedentemente se deduce que a una familia de curvas que pasan por el punto P y tal que los círculos osculadores en él constituyen un haz, corresponde una familia de curvas cuyos círculos osculadores en P' constituyen también un haz, que será el transformado por T_1 del primero. Por consiguiente T_1 será también la transformación (a que se refiere el punto II de la cuestión propuesta) que hace corresponder los segundos puntos bases.

5.- Consecuencia casi inmediata es el teorema enunciado al principio de esta nota sobre la proyectividad que existe entre los centros de curvatura. Basta observar que, dado un punto arbitrario C_1 , puede considerarse como centro de un bien determinado círculo por P , al cual corresponderá en la afinidad circular un único círculo, cuyo centro C_2 será el correspondiente de C_1 . Por otra parte a los círculos que pasan por P y tienen sus centros sobre una recta l_1 , constituyendo por lo tanto un haz, corresponden los círculos de un haz por P' y por consiguiente sus centros estarán sobre una cierta recta l_2 . Vale decir, que la correspondencia entre los centros de curvatura siendo biunívoca y haciendo corresponder puntos de una recta a puntos de una recta, es una proyectividad.

Particularizando todavía pueden hacerse las siguientes observaciones:

a) A los haces de círculos que tienen sus dos puntos bases unidos en P , corresponden haces de círculos con sus puntos bases unidos en P' . Los centros de curvatura de cada haz de este tipo, están sobre la normal a la tangente por P (o por P') a los círculos del haz.

b) La totalidad de estas tangentes por P y las análogas por P' constituyen haces de rectas que resultan congruentes por ser la representación conforme.

c) Las rectas por P y por P' , correspondientes en la pro-

yectividad entre los centros de curvatura, describen por lo tanto haces que también son congruentes.

En consecuencia, si se suponen los planos Σ_1 , Σ_2 superpuestos y los puntos P y P' coincidentes, la proyectividad puede reducirse a una homología de centro P , efectuando previamente el giro que lleva a superponer los haces de centros P y P' .

II

1. - La conclusión del anterior n.º. 4 contesta implícitamente, como notamos, al punto II de la cuestión transcrita al principio de esta nota; vamos, sin embargo, a retomar este punto para desarrollar sobre el mismo algunas consideraciones sintéticas.

Si consideramos un sistema de curvas por el punto P , cuyos círculos osculadores en este punto forman un haz, al lugar geométrico de sus centros, que como se sabe es una recta (eje central del haz), corresponderá, en la proyectividad entre los centros de curvatura, una recta constituida por los centros de los círculos osculadores en P' de las curvas transformadas. Estos círculos constituirán, por consiguiente, también un haz que tendrá como eje central la segunda recta.

Quedará establecida de esta manera una correspondencia entre los haces de círculos del plano Σ_1 con un punto base fijo en P y los haces de círculos de Σ_2 con un punto base fijo en P' . Se deduce de aquí que para cada punto de Σ_1 considerado como segundo punto base de uno de estos haces queda determinado, por la transformación conforme, un punto correspondiente, segundo punto base del haz de Σ_2 correspondiente del primero. Los segundos puntos bases de estos haces correspondientes definen así una nueva correspondencia entre los planos Σ_1 Σ_2 . Para estudiarla supondremos los planos Σ_1 y Σ_2 superpuestos con los puntos P y P' coincidentes y recordando que en este caso la proyectividad entre los centros de curvatura se descompone en una rotación seguida de una homología, podremos considerar solamente esta última, pues la primera sólo tiene por efecto agregar un giro sin variar sus propiedades características.

2. - En lo sucesivo llamaremos «homólogos» a los elementos correspondientes en la homología entre centros de curvatura y simplemente «correspondientes» a los correspondientes en la correspondencia de puntos bases.

Sean P , e , i' , j'' el centro, el eje y las rectas límites de la homología ⁽⁴⁾ y distingamos con uno y dos ápices a elementos homólogos y con los subíndices 1 y 2 a elementos correspondientes, según la convención hecha.

Para obtener el correspondiente de un punto genérico A_1 se procede de acuerdo con lo dicho de la siguiente manera: Se halla el eje central a' asociado de A_1 (mediatriz del segmento PA_1), se determina la recta a'' (eje central del haz transformado) homóloga de a' y el punto simétrico de P con respecto a a'' será el A_2 .

Si el punto A_1 recorre una recta m_1 , su eje central asociado a' envolverá, según una propiedad bien conocida, una parábola c' de foco P y directriz m_1 y a'' , homóloga de a' , envolverá por lo tanto una cónica c'' homóloga de c' . Los puntos A_2 correspondientes del punto variable A_1 , estarán situados sobre las normales por P a las tangentes a c'' y a una distancia de P doble de la distancia de las respectivas tangentes. Vale decir que los correspondientes de A_1 , cuando éste recorre una recta, se desplazan sobre una curva que no es otra que la transformada por una homotecia de razón 2 con centro en P , de la podaria con respecto a este último de c'' . Observando que P resulta también foco de c'' (pues siendo P centro de homología todas las rectas que pasan por él son unidas y por lo tanto la involución de rayos normales se conserva) la podaria resultará, en general, una circunferencia y por consiguiente también su homotética. Por ser las c' parábolas, todas las c'' resultan tangentes a j'' y por lo tanto el punto Q , simétrico de P con respecto a j'' pertenece a todas las circunferencias transformadas. Puede afirmarse entonces: *A las rectas corresponden, en la transformación de puntos bases, circunferencias que pasan por el punto fijo Q simétrico de P con respecto a j'' .*

En particular a los rayos de homología corresponden circunferencias tangentes a éstos en el centro de homología. En efecto (fig. 1), si un punto A_1 se desplaza sobre una recta m_1 por P , sus ejes centrales asociados a' , serán normales a m_1 y paralelos entre sí y sus homólogos a'' constituirán un haz de

(4) Al centro, al eje, y a las rectas límites, las supondremos en posición genérica, pues los razonamientos que siguen con leves modificaciones pueden ser aplicados aún en el caso de tener estos alguna particular disposición.

centro T'' homólogo del punto impropio común. Los pies de las normales por P a las rectas de este haz estarán, por consiguiente, sobre una circunferencia de diámetro PT'' y su transformada, por la homotecia de centro P y razón 2, será la correspondiente de m_1 . Además, siendo PT'' normal por construcción a m_1 resultará esta última tangente a la circunferencia en P .

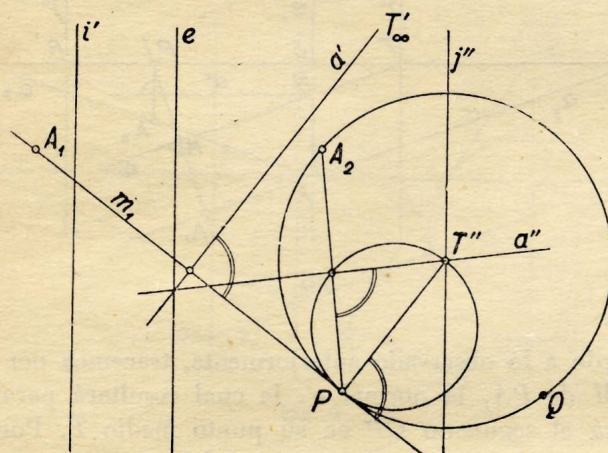


Fig. 1

Para caracterizar el sistema de rectas cuyas correspondientes son rectas (caso límite de circunferencia), basta observar que siendo la correspondiente de una recta m_1 la figura homotética de la podaria con respecto a P (foco) de c'' , esta podaria deberá resultar una recta y, por tanto, c'' una parábola, es decir, deberá ser tangente a la recta impropia y, por consiguiente, c' tangente a i' . Las rectas m_1 que originan parábolas c' tangentes a i' son las que constituyen el haz de centro O simétrico de P con respecto a i' . Resulta así que en la transformación de puntos bases al haz de rectas de centro O , corresponde el haz de rectas de centro Q . Se puede demostrar, además, que estos haces resultan perspectivas, con e como eje de perspectividad y de simetría.

En efecto (fig. 2): llamemos S, T, R , a las intersecciones de la normal por O a e , con e y con las rectas límites i' y j'' . Recordando que en una homología resultan los segmentos PR y ST iguales y teniendo en cuenta que Q y O son, por construcción, simétricos de P con respecto a R y T respectivamente,

les. Por otra parte, los ángulos X_2QP y X_1OQ son iguales por la simetría que existe entre los haces de centros O y Q . Resultan así los triángulos QX_2P y OPX_1 semejantes y por consiguiente el producto de los segmentos $\overline{QX_2}$ por $\overline{OX_1}$ constante e igual al producto $\overline{QP} \cdot \overline{OP}$.

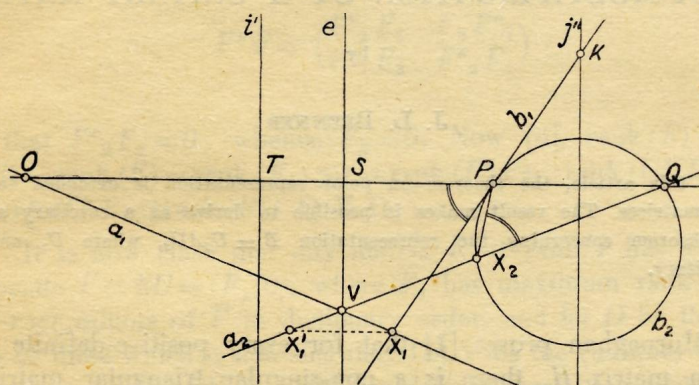


Fig. 3

Si indicamos con X'_1 el simétrico de X_1 con respecto a e resultarán X'_1X_2Q alineados y el segmento $\overline{OX_1} = \overline{QX'_1}$ y por tanto el producto $\overline{QX'_1} \cdot \overline{QX_2}$ constante. Esto nos indica que X'_1 y X_2 se corresponden en una inversión de centro Q y potencia igual al producto $\overline{QP} \cdot \overline{OP}$.

Resumiendo resulta: *La correspondencia entre los segundos puntos bases se descompone en una simetría seguida de una inversión.*

INSTITUTO DE MATEMÁTICA,
ROSARIO, AGOSTO 1950.

POST-MULTIPLICATION BY A UNITARY MATRIX

by

J. L. BRENNER

In this article, the theorem on polar representation is extended to singular matrices. The result makes it possible to derive as a corollary a certain theorem concerning the representation $B = U_1 A U_2$, where U_1 and U_2 are unitary.

Murnaghan proves [1] that for every positive-definite hermitian matrix H , there is a non-singular triangular matrix T such that $TT^* = H$. The T which he finds is not unique; post-multiplication of T by any diagonal unitary matrix will give a matrix $W = TU$ such that W is triangular also, and $WW^* = H$.

In this note we show how to define a unique canonical form C for any matrix A under post-multiplication by a unitary matrix U : $C = AU$. The term *canonical form* may properly be used in this connection; the relation of equivalence under post-multiplication is reflexive, symmetric, and transitive.

Two matrices A, B connected by the equation $B = AU$ belong to the same equivalence class; C will be the unique canonical representative of the entire class.

In special cases, results pertaining to this problem have appeared in the literature [2, 3]. In the present instance, the canonical form for a matrix A may be thought of as a generalization of the absolute value of a complex number, for the canonical form of a 1×1 matrix (a) is defined to be $(|a|)$. Moreover if A is square and non-singular, C is the positive-definite hermitian matrix P in the polar representation $A = PU$ (U , unitary) [2].

Lemma 1. If E is any matrix of complex number, $\text{rank}(E) = \text{rank}(E^* E)$.

Proof: Set $F = EU$, where U is a unitary matrix so chosen that the square matrix $F^*F = U^*(E^*E)U$ is diagonal [4, 5] and has principal (diagonal) elements arranged as follows: $F^*F = \text{diag}(A_1, A_2)$, where A_1 has maximum rank r ; $A_2 = 0$; $\text{rank}(F^*F) = \text{rank}(A_1)$. Abbreviate the first r columns of F by F_1 : $F = (F_1, F_2)$. Then

$$F^*F = \begin{pmatrix} F_1^*F_1 & F_1^*F_2 \\ F_2^*F_1 & F_2^*F_2 \end{pmatrix}$$

so that $F_2^*F_2 = 0$; whence $F_2 = 0$. Now [6], $\text{rank}(E) = \text{rank}(EU) = \text{rank}(F) = \text{rank}(F_1) \leq r = \text{rank}(F^*F) = \text{rank}(U^*(E^*E)U) = \text{rank}(E^*E) \leq \text{rank}(E)$, Q. E. D.

It is now clear that any matrix E of rank r has a *right-associate* $F = EU = (F_1, 0)$, where F_1 has maximum rank r . List the $r \times r$ minors of F in dictionary order, and let D be the first one of these which is non-singular. Let V be the (unique) unitary matrix such that DV is a positive-definite hermitian matrix [2]. Then the definition

$$C = EU \cdot \text{diag}(V, 1)$$

is unique.

[If W is unitary, $CW = C$, then W must have the form $W = \text{diag}(1, W_2)$, where 1 is the $r \times r$ identity matrix; conversely, if W has this form, then clearly $CW = C$].

Corollary [7]. If A has rank r , there exist unitary matrices U_1, U_2 such that the matrix $U_1^*AU_2$ has the form

$$\text{diag}(s_1 s_2, \dots, s_r)$$

bordered on the right and below by zeros,

$$s_j \text{ real}; \quad s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_r.$$

Proof: Find V_1, V_2 , unitary so that $V_1^*AV_2$ is an r^2 positive-definite hermitian matrix bordered by zeros; apply a unitary transformation.

BIBLIOGRAPHY

- (1) MURNAGHAN, D. F., *The Theory of Group Representations*. Baltimore, Johns Hopkins Press, 1938, pp. 20-22.
- (2) Ibid., p. 27; p. 320.
- (3) LEE, H. C., *Canonical Factorization of Pseudo-unitary Matrices*. London Math. Soc. Proceedings (2) 50 (1949), p. 235.
- (4) SCHUR, I., *Über die charakteristischen Wurzeln einer linearen Substitution mit einer Anwendung auf die Theorie der Integralgleichungen*. Math. Annalen, 66 (1909), pp. 488-510.
- (5) MURNAGHAN, ibid., pp. 25-26.
- (6) MACDUFFEE, C. C. *The Theory of Matrices*, Berlin, Julius Springer, 1933, p. 11, cor. 8.3.
- (7) SPECHT, W., *Zur Theorie der Matrizen*. Jahresb. d. Deutsche Math. - Verein. 46 (1936) pp. 45-50.

THE STATE COLLEGE OF WASHINGTON.

RESUMEN

En este artículo se generaliza a las matrices singulares el teorema sobre representación polar. Se aplica luego este resultado para deducir un teorema relativo a la representación $B = U_1 A U_2$, donde U_1 y U_2 son matrices unitarias.

ESTUDIO COMPLEJO DE LOS PARES DE TRIANGULOS RELACIONADOS

POR

VICENTE INGLADA
Madrid

Las aplicaciones de las coordenadas complejas a la Geometría plana son muy numerosas y de ellas se encuentran frecuentes ejemplos en la obra «*Inversive Geometry*», de F. y F. V. Morley. El reciente libro del autor «*Métodos para la resolución de los problemas geométricos*» contiene asimismo tres capítulos dedicados exclusivamente a la resolución en este sistema de coordenadas complejas de las principales cuestiones de la Geometría plana. No es difícil, sin embargo, encontrar nuevas aplicaciones ventajosas de las antedichas coordenadas y, en confirmación de esto, vamos a utilizarlas en el presente trabajo para estudiar brevemente algunos sistemas de triángulos relacionados. Mas, por ser fundamento esencial de las cuestiones que van a tratarse, resulta conveniente que nos ocupemos previamente en el estudio de

TRES INVARIANTES COMPLEJOS DE UN PAR DE TRIANGULOS RELACIONADOS

Sean $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ y $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ los números complejos correspondientes a los vértices A_1, B_1, C_1 y A_2, B_2, C_2 de dos triángulos T_1 y T_2 , relacionados en un plano, y sean además vértices homólogos los designados con la misma letra. Si tomamos tres números reales l, m, n , de suma no nula, y ponemos

$$\delta_1 = \frac{l\alpha_1 + m\beta_1 + n\gamma_1}{l+m+n}, \quad \delta_2 = \frac{l\alpha_2 + m\beta_2 + n\gamma_2}{l+m+n}, \quad (1)$$

los tres números complejos ⁽¹⁾

$$\delta_{\alpha\alpha} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \bar{\alpha}_2 & \bar{\beta}_2 & \bar{\gamma}_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Phi_{\alpha\alpha} = l\alpha_1(\bar{\delta}_2 - \bar{\alpha}_2) + m\beta_1(\bar{\delta}_2 - \bar{\beta}_2) + n\gamma_1(\bar{\delta}_2 - \bar{\gamma}_2),$$

$$\varphi = \frac{(\alpha_1 - \gamma_2)(\beta_1 - \alpha_2)(\gamma_1 - \beta_2)}{(\beta_1 - \gamma_2)(\gamma_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \beta_2)} \quad (2)$$

son tres invariantes del par de triángulos. Que estos números son independientes del sistema de coordenadas complejas adoptado, es decir, no varían al referir los triángulos a otro par cualquiera de ejes ortogonales ⁽²⁾, es consecuencia de la invariancia de las expresiones (2) en las dos transformaciones $z = z' + \lambda$, $z = \tau z'$ ($|\tau| = 1$), que corresponden a una traslación del origen y a un giro en torno de éste del par de ejes coordenados, respectivamente. Y esta invariancia resulta evidente para φ ; para $\Phi_{\alpha\alpha}$ se deduce de $\bar{\tau} = \frac{1}{\tau}$ y de la identidad

$$l(\bar{\delta}_2 - \bar{\alpha}_2) + m(\bar{\delta}_2 - \bar{\beta}_2) + n(\bar{\delta}_2 - \bar{\gamma}_2) = 0, \quad (3)$$

obtenida a su vez de (1); y es para $\delta_{\alpha\alpha}$ consecuencia de propiedades elementales de los determinantes.

Veamos ahora qué cambios experimentan los invariantes (2) al invertir el orden de los dos triángulos. Los nuevos valores son

$$\delta'_{\alpha\alpha} = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \bar{\alpha}_1 & \bar{\beta}_1 & \bar{\gamma}_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Phi'_{\alpha\alpha} = l\alpha_2(\bar{\delta}_1 - \bar{\alpha}_1) + m\beta_2(\bar{\delta}_1 - \bar{\beta}_1) + n\gamma_2(\bar{\delta}_1 - \bar{\gamma}_1),$$

$$\varphi' = \frac{(\alpha_2 - \gamma_1)(\beta_2 - \alpha_1)(\gamma_2 - \beta_1)}{(\beta_2 - \gamma_1)(\gamma_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \beta_1)}$$

⁽¹⁾ Según la costumbre, si x es un número complejo, representamos por $\bar{x}$ el número complejo conjugado.

⁽²⁾ $\delta_{\alpha\alpha}$, $\Phi_{\alpha\alpha}$ y φ se conservan invariables solamente si se mantiene fijo además el sentido de orientación de los ejes coordenados, pues cambiando ese sentido las expresiones (2) se convierten en sus valores conjugados. Estos invariantes dependen, pues, de los dos triángulos y del sentido positivo de giro adoptado en el plano.

y por tanto, para el primero y el tercero tenemos las relaciones

$$\delta'_{\alpha\alpha} = -\bar{\delta}'_{\alpha\alpha}, \quad \varphi' = \frac{1}{\varphi};$$

y para el segundo, como consecuencia de

$$(l\alpha_2 + m\beta_2 + n\gamma_2) \bar{\delta}_1 = (l+m+n) \delta_2 \bar{\delta}_1 = (l\bar{\alpha}_1 + m\bar{\beta}_1 + n\bar{\gamma}_1) \delta_2,$$

tenemos esta otra

$$\Phi'_{\alpha\alpha} = l\bar{\alpha}_1(\delta_2 - \alpha_2) + m\bar{\beta}_1(\delta_2 - \beta_2) + n\bar{\gamma}_1(\delta_2 - \gamma_2) = \bar{\Phi}_{\alpha\alpha}.$$

Por último, para el primero y último invariantes resulta fácil encontrar un significado geométrico que confirma su invariabilidad, pues φ es evidentemente el producto de las tres razones simples complejas $(\gamma_2 \alpha_1 \beta_1)$, $(\alpha_2 \beta_1 \gamma_1)$ y $(\beta_2 \gamma_1 \alpha_1)$, o también

$$\varphi = (\gamma_2 z \alpha_1 \beta_1) (\alpha_2 z \beta_1 \gamma_1) (\beta_2 z \gamma_1 \alpha_1), \quad (4)$$

puesto que se verifica

$$(z \alpha_1 \beta_1) (z \beta_1 \gamma_1) (z \gamma_1 \alpha_1) = 1,$$

cualquiera que sea el complejo z . El invariante $\delta_{\alpha\alpha}$ depende, a su vez, de las áreas S_1, S_2 de los triángulos T_1, T_2 y de las de otros dos que se deducen de ellos. El primero, de área S_m , y cuyos vértices son los puntos medios de los pares de vértices homólogos de T_1 y T_2 , lo denominaremos *triángulo medio* de éstos. El otro, el *segundo triángulo medio*, es el triángulo medio de T_1 y de uno de los que resultan girando T_2 el ángulo $\frac{\pi}{2}$ alrededor de un punto cualquiera del plano y tiene por área S'_m . Y ahora las dos identidades

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \beta_1 + \beta_2 & \gamma_1 + \gamma_2 \\ \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 & \bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2 & \bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \bar{\alpha}_1 & \bar{\beta}_1 & \bar{\gamma}_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \bar{\alpha}_2 & \bar{\beta}_2 & \bar{\gamma}_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \delta_{\alpha\alpha} - \bar{\delta}_{\alpha\alpha}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 + i\alpha_2 & \beta_1 + i\beta_2 & \gamma_1 + i\gamma_2 \\ \bar{\alpha}_1 - i\bar{\alpha}_2 & \bar{\beta}_1 - i\bar{\beta}_2 & \bar{\gamma}_1 - i\bar{\gamma}_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \bar{\alpha}_1 & \bar{\beta}_1 & \bar{\gamma}_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \bar{\alpha}_2 & \bar{\beta}_2 & \bar{\gamma}_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - i(\delta_{\alpha\alpha} + \bar{\delta}_{\alpha\alpha})$$

dan, en virtud de la conocida expresión

$$S = -\frac{1}{4i} \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

del área de un triángulo en coordenadas complejas,

$$R\delta_{\alpha\alpha} = 8S_m - 2(S_1 + S_2), \quad I\delta_{\alpha\alpha} = 2(S_1 + S_2) - 8S_m. \quad (5)$$

TRIANGULOS METAPARALELOS Y ORTOLOGICOS

Estos pares de triángulos corresponden a los casos en que el invariante $\delta_{\alpha\alpha}$ es real o imaginario puro. En efecto: si $\delta_{\alpha\alpha}$ es real, se tiene

$$\delta_{\alpha\alpha} = \alpha_1(\bar{\beta}_2 - \bar{\gamma}_2) + \beta_1(\bar{\gamma}_2 - \bar{\alpha}_2) + \gamma_1(\bar{\alpha}_2 - \bar{\beta}_2) = [r]^{(3)}, \quad (6)$$

luego el sistema lineal

$$(z - \alpha_1)(\bar{\beta}_2 - \bar{\gamma}_2) = [r], \quad (z - \beta_1)(\bar{\gamma}_2 - \bar{\alpha}_2) = [r], \quad (z - \gamma_1)(\bar{\alpha}_2 - \bar{\beta}_2) = [r]$$

resulta compatible (es (6) precisamente la resultante de eliminar la variable z entre las tres ecuaciones anteriores y esta eliminación se logra sumándolas), y como aquel sistema es equivalente al formado por las

$$\frac{z - \alpha_1}{\beta_2 - \gamma_2} = [r], \quad \frac{z - \beta_1}{\gamma_2 - \alpha_2} = [r], \quad \frac{z - \gamma_1}{\alpha_2 - \beta_2} = [r],$$

(³) Cuando a un número, generalmente complejo, z se le quiere obligar a ser real sin precisar cual es su valor, expresaremos esta condición en la forma simbólica $z = [r]$. De igual manera, $z = [ip]$ representa la condición de que z sea un número imaginario puro cualquiera.

y cada una de éstas representa la recta paralela a un lado del triángulo $A_2B_2C_2$ y trazada por el vértice correspondiente del $A_1B_1C_1$, estas tres rectas concurren y los triángulos son, pues, *metaparalelos*. De igual manera, la condición

$$\delta_{\alpha\alpha} = [ip] \quad (3) \quad (7)$$

equivale a la compatibilidad del sistema

$$\frac{z-\alpha_1}{\beta_2-\gamma_2} = [ip], \quad \frac{z-\beta_1}{\gamma_2-\alpha_2} = [ip], \quad \frac{z-\gamma_1}{\alpha_2-\beta_2} = [ip],$$

y como éstas son las ecuaciones de las rectas trazadas por los vértices del primer triángulo perpendicularmente a los lados del segundo, los triángulos son *ortológicos* en este caso. Y las fórmulas (5) demuestran por tanto: *La cuarta parte de la suma de las áreas de los triángulos es igual en los triángulos metaparalelos al área del triángulo medio y en los ortológicos a la del segundo triángulo medio.*

Cuando $\delta_{\alpha\alpha} = 0$ se cumplen (6) y (7) y los triángulos resultan ortológicos y metaparalelos a la vez⁽⁴⁾. Pero la anulación del determinante (2) exige que los elementos de una fila sean combinación lineal de los de las otras dos, luego

$$\alpha_1 = \lambda\alpha_2 + \mu, \quad \beta_1 = \lambda\beta_2 + \mu, \quad \gamma_1 = \lambda\gamma_2 + \mu$$

y puesto que $z = \lambda z' + \mu$ representa una antisemejanza, los triángulos son *antisemejantes*. Observando también que (7) se satisface para $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$ se obtiene el teorema de la concurrencia de las alturas de un triángulo.

La forma tan sencilla de las dos condiciones (6) y (7) permite dar demostraciones muy breves de las propiedades de los triángulos ortológicos y metaparalelos. Por ejemplo, de la identidad

(4) Además los pares de vértices homólogos de los dos triángulos son los mismos en las dos correspondencias en las que resultan ortológicos y metaparalelos.

$$\delta_{\alpha\alpha} + \delta_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\gamma} \equiv \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 & \alpha_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 & \beta_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

se deduce que dos triángulos que son ortológicos o metaparalelos de dos maneras cíclicas lo son también de la tercera. Denominaremos a estos triángulos *triortológicos* y *trimetaparalelos*, respectivamente. Esta otra identidad

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ l\alpha_2 + m\alpha_3 + n\alpha_4 & l\beta_2 + m\beta_3 + n\beta_4 & l\gamma_2 + m\gamma_3 + n\gamma_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = l \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + m \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + n \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

(l, m, n números reales) prueba: Si los triángulos A_2, B_2, C_2 , A_3, B_3, C_3 y A_4, B_4, C_4 son ortológicos o metaparalelos al A_1, B_1, C_1 , también lo son todos los triángulos cuyos vértices A, B, C tienen las mismas coordenadas baricéntricas (l, m, n) con relación a los triángulos A_2, A_3, A_4 , B_2, B_3, B_4 , C_2, C_3, C_4 , respectivamente o tales que los cuadrivértices AA_2, A_3, A_4 , BB_2, B_3, B_4 , CC_2, C_3, C_4 sean afines entre sí.

TRIANGULOS MEDIORTOLOGICOS Y MEDIOMETAPARALELOS

La condición geométrica que satisfacen los triángulos en los casos en que $\phi_{\alpha\alpha}$ es real se encuentra sin más que observar que

$$\frac{z - \alpha_1}{\delta_2 - \alpha_2} = [r], \quad \frac{z - \beta_1}{\delta_2 - \beta_2} = [r], \quad \frac{z - \gamma_1}{\delta_2 - \gamma_2} = [r],$$

representan las paralelas trazadas por los vértices A_1, B_1, C_1 a las rectas A_2, D_2 , B_2, D_2 , C_2, D_2 y que la resultante de eliminar z entre estas tres ecuaciones, obtenida multiplicándolas por

$l(\delta_2 - \alpha_2)(\bar{\delta}_2 - \bar{\alpha}_2)$, $m(\delta_2 - \beta_2)(\bar{\delta}_2 - \bar{\beta}_2)$ y $n(\delta_2 - \gamma_2)(\bar{\delta}_2 - \bar{\gamma}_2)$,
sumándolas después y teniendo en cuenta (3), es precisamente

$$\Phi_{\alpha\alpha} = [r].$$

Aquella condición es, pues, que las tres paralelas mencionadas resultan concurrentes. Análogamente, notando que la resultante de las ecuaciones

$$\frac{z - \alpha_1}{\delta_2 - \alpha_2} = [ip], \quad \frac{z - \beta_1}{\delta_2 - \beta_2} = [ip], \quad \frac{z - \gamma_1}{\delta_2 - \gamma_2} = [ip],$$

que definen las perpendiculares a las rectas $A_2 D_2, B_2 D_2, C_2 D_2$ trazadas por los vértices A_1, B_1, C_1 , es

$$\Phi_{\alpha\alpha} = [ip],$$

se justifica que los casos en que concurren las tres perpendiculares antedichas corresponden a los valores imaginarios puros del invariante $\Phi_{\alpha\alpha}$. Y, por último, dada la equivalencia de las condiciones $\Phi_{\alpha\alpha} = [r]$ con $\bar{\Phi}_{\alpha\alpha} = [r]$ y $\Phi_{\alpha\alpha} = [ip]$ con $\bar{\Phi}_{\alpha\alpha} = [ip]$, queda probado el doble teorema: *Si los dos triángulos son tales que las paralelas (perpendiculares) trazadas por los vértices A_1, B_1, C_1 del primero a las rectas $A_2 D_2, B_2 D_2, C_2 D_2$ del segundo concurren en un punto, también resultan concurrentes las paralelas (perpendiculares) trazadas por los vértices A_2, B_2, C_2 del segundo triángulo a las rectas $A_1 D_1, B_1 D_1, C_1 D_1$ del primero.*

Expresemos la primera condición (paralelas) satisfecha por los triángulos mediante la forma simbólica $A_1 B_1 C_1 \parallel_{lmn} A_2 B_2 C_2$ y la segunda (perpendiculares) por esta otra: $A_1 B_1 C_1 \perp_{lmn} A_2 B_2 C_2$. La identidad

$$\begin{aligned} & \Phi_{\alpha\alpha} + \Phi_{\beta\alpha} + \Phi_{\gamma\alpha} \\ &= (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) [l(\bar{\delta}_2 - \bar{\alpha}_2) + m(\bar{\delta}_2 - \bar{\beta}_2) + n(\bar{\delta}_2 - \bar{\gamma}_2)] = 0, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \Phi_{\beta\alpha} &= l\beta_1(\bar{\delta}_2 - \bar{\alpha}_2) + m\gamma_1(\bar{\delta}_2 - \bar{\beta}_2) + n\alpha_1(\bar{\delta}_2 - \bar{\gamma}_2), \\ \Phi_{\gamma\alpha} &= l\gamma_1(\bar{\delta}_2 - \bar{\alpha}_2) + m\alpha_1(\bar{\delta}_2 - \bar{\beta}_2) + n\beta_1(\bar{\delta}_2 - \bar{\gamma}_2), \end{aligned}$$

prueba ahora: De $A_2 B_2 C_2 \parallel_{lmn} A_1 B_1 C_1$ y $A_2 B_2 C_2 \parallel_{lmn} B_1 C_1 A_1$ se deduce $A_2 B_2 C_2 \parallel_{lmn} C_1 A_1 B_1$. Si se cumple $A_2 B_2 C_2 \perp_{lmn} A_1 B_1 C_1$ y $A_2 B_2 C_2 \perp_{lmn} B_1 C_1 A_1$ se verifica también $A_2 B_2 C_2 \perp_{lmn} C_1 A_1 B_1$.

En el caso particular $l=m=n=1$ las rectas $A_1 D_1$, $B_1 D_1$, $C_1 D_1$ son las medianas del triángulo T_1 ; el invariante $\Phi_{\alpha\alpha}$ se reduce a

$$\Phi''_{\alpha\alpha} = \frac{1}{3} [(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1)(\bar{\alpha}_2 + \bar{\beta}_2 + \bar{\gamma}_2) - 3(\alpha_1 \bar{\alpha}_2 + \beta_1 \bar{\beta}_2 + \gamma_1 \bar{\gamma}_2)]$$

y los triángulos se llaman *mediometaparalelos* ($\parallel_{111}$) y *mediortológicos* ($\perp_{111}$), respectivamente⁽⁵⁾. Los triángulos que son mediometaparalelos o mediortológicos de dos maneras cíclicas lo son, por tanto, de la tercera manera y se denominan *trimedimetaparalelos* y *trimediortológicos*, respectivamente. Pero si convenimos en poner

$$\begin{aligned}\alpha_1 \bar{\alpha}_2 + \beta_1 \bar{\beta}_2 + \gamma_1 \bar{\gamma}_2 &= \mu_{\alpha\alpha}, \\ \alpha_1 \bar{\beta}_2 + \beta_1 \bar{\gamma}_2 + \gamma_1 \bar{\alpha}_2 &= \mu_{\alpha\beta}, \\ \alpha_1 \bar{\gamma}_2 + \beta_1 \bar{\alpha}_2 + \gamma_1 \bar{\beta}_2 &= \mu_{\alpha\gamma},\end{aligned}$$

como es

$$(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1)(\bar{\alpha}_2 + \bar{\beta}_2 + \bar{\gamma}_2) = \mu_{\alpha\alpha} + \mu_{\alpha\beta} + \mu_{\alpha\gamma},$$

resulta inmediatamente

$$\begin{aligned}\Phi''_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{3} [(\mu_{\alpha\beta} - \mu_{\alpha\alpha}) + (\mu_{\alpha\gamma} - \mu_{\alpha\alpha})] = \frac{1}{3} (\delta_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\gamma}), \\ \Phi''_{\alpha\beta} &= \Phi''_{\gamma\alpha} = \frac{1}{3} [(\mu_{\alpha\alpha} - \mu_{\alpha\beta}) + (\mu_{\alpha\gamma} - \mu_{\alpha\beta})] = \frac{1}{3} (\delta_{\alpha\gamma} - \delta_{\alpha\alpha}) \\ \delta_{\alpha\alpha} &= \Phi''_{\alpha\gamma} - \Phi''_{\alpha\beta}, \quad \delta_{\alpha\beta} = \Phi''_{\alpha\alpha} - \Phi''_{\alpha\gamma},\end{aligned}$$

que prueban: Los triángulos trimediortológicos forman la misma clase que los triortológicos y la de los trimedimetaparalelos es también idéntica a la de los trimetaparalelos.

⁽⁵⁾ Véase AGRONOMOF, *Revista matemática hispano-americana*, 1927, págs. 299-304.

TRIANGULOS COSOGONALES Y OTROS ANALOGOS

La fórmula (4) y las propiedades de la razón doble compleja permiten determinar en seguida qué pares de triángulos corresponden a los valores particulares $\varphi = [r]$, $\varphi = [ip]$ y $|\varphi| = 1$ del tercer invariante (2). Como la resultante de eliminar la variable z entre las tres ecuaciones

$$(\gamma_2 z \alpha_1 \beta_1) = [r], (\alpha_2 z \beta_1 \gamma_1) = [r], (\bar{\beta}_2 z \gamma_1 \alpha_1) = [r] \quad (8)$$

es justamente $\varphi = [r]$ y puesto que (8) son ecuaciones complejas de los círculos $C_2 A_1 B_1$, $A_2 B_1 C_1$, $B_2 C_1 A_1$, estos círculos tienen un punto común en el primer caso. Análogamente,

$$(\gamma_2 z \alpha_1 \beta_1) = [ip], (\alpha_2 z \beta_1 \gamma_1) = [ip], (\bar{\beta}_2 z \gamma_1 \alpha_1) = [ip]$$

representan los círculos trazados por A_1, B_1 ; B_1, C_1 ; C_1, A_1 y ortogonales a los $C_2 A_1 B_1$, $A_2 B_1 C_1$, $B_2 C_1 A_1$, respectivamente, y, si es $\varphi = [ip]$, aquellos círculos tienen un punto común. Por último, las ecuaciones

$$|(\gamma_2 z \alpha_1 \beta_1)| = 1, |(\alpha_2 z \beta_1 \gamma_1)| = 1, |(\bar{\beta}_2 z \gamma_1 \alpha_1)| = 1$$

definen los círculos que pasan por los vértices C_2, A_2, B_2 y respecto a los cuales son inversos los pares A_1, B_1 ; B_1, C_1 ; C_1, A_1 , respectivamente, luego, si se verifica $|\varphi| = 1$, los tres círculos pertenecen a un haz⁽⁶⁾.

Ahora bien, al invertir el orden de los triángulos ya vimos anteriormente que el invariante φ se cambia en el $\varphi' = \frac{1}{\varphi}$ y como cada una de las condiciones examinadas $\varphi = [r]$, $\varphi = [ip]$, $|\varphi| = 1$ tiene como consecuencia su análoga en φ' , cuando los tres círculos de una de las ternas últimamente consideradas tienen un punto

(6) Por ser $|\varphi| = 1$ los tres círculos tienen un punto común y como consecuencia de esto concurren en un segundo punto. Pues si P es el primer punto (común a los tres círculos) existe otro Q de concurso ya que las tres ecuaciones $\frac{PA_1}{PB_1} = \frac{QA_1}{QB_1}$, $\frac{PB_1}{PC_1} = \frac{QB_1}{QC_1}$, $\frac{PC_1}{PA_1} = \frac{QC_1}{QA_1}$ resultan evidentemente compatibles. P y Q son además los dos puntos del plano cuyas distancias a los vértices del triángulo $A_1 B_1 C_1$ son proporcionales a tres longitudes dadas.

común, lo mismo les sucede a los círculos de la terna homóloga, obtenida permutando los dos triángulos, y hemos probado así estas tres propiedades:

Si dos triángulos $A_1 B_1 C_1$ y $A_2 B_2 C_2$ son tales que los círculos $C_2 A_1 B_1$, $A_2 B_1 C_1$ y $B_2 C_1 A_1$ tienen un punto común, también pasan por un mismo punto los tres círculos $C_1 A_2 B_2$, $A_1 B_2 C_2$ y $B_1 C_2 A_2$.

Cuando dos triángulos cumplen la condición de que los tres círculos trazados por los pares de vértices A_1, B_1 ; B_1, C_1 ; C_1, A_1 y ortogonales, respectivamente, a los $C_2 A_1 B_1$, $A_2 B_1 C_1$, $B_2 C_1 A_1$ tienen un punto común, son igualmente concurrentes los círculos ortogonales a los $C_1 A_2 B_2$, $A_1 B_2 C_2$, $B_1 C_2 A_2$ y que pasan por los pares de vértices A_2, B_2 ; B_2, C_2 ; C_2, A_2 .

Si los círculos que pasan por los vértices C_2, A_2, B_2 y respecto a los cuales son inversos los pares A_1, B_1 ; B_1, C_1 ; C_1, A_1 , respectivamente, pertenecen a un haz, lo mismo les sucede a los círculos trazados por C_1, A_1, B_1 y de manera que sean inversos con relación a ellos los pares A_2, B_2 ; B_2, C_2 ; C_2, A_2 .

A los pares de triángulos que cumplen la primera condición les ha dado el nombre de *cosogonales* el matemático rumano Grunbaum. En los otros dos casos, como no sabemos que hayan recibido denominación alguna, diremos que los triángulos *satisfacen las condiciones I y II*, respectivamente. Ahora la identidad

$$\frac{(\alpha_1 - \gamma_2)(\beta_1 - \alpha_2)(\gamma_1 - \beta_2)}{(\beta_1 - \gamma_2)(\gamma_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \beta_2)} \times \frac{(\alpha_1 - \gamma_2)(\beta_1 - \alpha_2)(\gamma_1 - \beta_2)}{(\gamma_1 - \gamma_2)(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)} \\ \times \frac{(\beta_1 - \gamma_2)(\gamma_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \beta_2)}{(\gamma_1 - \gamma_2)(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)} = 1$$

permite deducir inmediatamente:

Si dos triángulos son cosogonales cuando se relacionan de dos maneras cíclicas lo son también de la tercera (triángulos tricosogonales).

Si dos triángulos satisfacen a la condición I de dos maneras cíclicas son cosogonales de la tercera.

Cuando dos triángulos satisfacen a la condición II de dos maneras cíclicas, también cumplen dicha condición si se relacionan de la tercera manera.

LA OBJECION DE GRANDJOT A LA TEORIA DE PEANO DEL NUMERO NATURAL

POR

PEDRO PI CALLEJA

En el prefacio de «Grundlagen der Analysis» (Leipzig, 1930) de E. Landau se hace referencia a una objeción de Grandjot sobre la definición de suma y produjo para números naturales cuando éstos se introducen a partir de los siguientes cinco axiomas de Peano:

Un conjunto N de elementos llamados *números naturales*, un elemento llamado *uno* y una relación primitiva $sg =$ «siguiente de» quedan axiomáticamente definidos mediante:

Ax. I. — $1 \in N$. (Uno *pertenece* ($\in$) al conjunto N y por tanto éste no es vacío).

Ax. II. — Si $x \in N$, entonces existe *unívocamente* $sg x \in N$. (Es decir, de $x = y$ se deduce $sg x = sg y$).

Ax. III. — Para todo $x \in N$, es $sg x \neq 1$.

Ax. IV. — De $sg x = sg y$ se deduce $x = y$. (Es decir, cada número natural tiene a lo más un solo número del que es siguiente, aunque no dice que lo tenga).

Ax. V. — (Axioma de inducción completa). Si un conjunto $C \subseteq N$ ($\subseteq$ significa «incluido en») tiene las propiedades: (1) $1 \in C$; (2) $x \in C$ implica $sg x \in C$, entonces $N \subseteq C$ (y por tanto C coincide con el conjunto N de números naturales, $C = N$).

De estos axiomas, se deducen los teoremas (cf. obra citada de Landau):

Teor. 1. — $x \neq y$ implica $sg x \neq sg y$.

Teor. 2. — $sg x \neq x$.

Teor. 3. — Para todo número natural $x \neq 1$ existe un número natural u (y sólo uno por el Ax. IV) tal que $x = sg u$.

La objeción de Grandjot se refiere a la necesidad de introducir nuevos axiomas para legitimar la definición recurrente de las operaciones siguientes: I. Suma $x+y$ de números naturales. II. Producto $x \cdot y$ de números naturales. III. Definición de $\sum_{n=1}^m x_n$ y $\prod_{n=1}^m x_n$, una vez introducidas las operaciones $x+y$ y $x \cdot y$ en un determinado campo de números.

En el propósito de examinar esta cuestión agradecemos a los Dres. A. Sagastume Berra y Beppo Levi las indicaciones bibliográficas que nos han suministrado; en particular, el Dr. Beppo Levi nos ha señalado la contribución fundamental que en la teoría de las definiciones recurrentes representa el Vol. I de «Grundlagen der Mathematik» de D. Hilbert y P. Bernays (Berlín, 1934) y que él ya comentó en la atinada crítica que de dicha obra hizo en el «Bolletino della Unione Matematica Italiana», Vol. 14, pg. 32 (Bologna, 1935).

El libro de Hilbert-Bernays establece un formalismo lógico cuyas conclusiones se presentan como contrarias a las establecidas por Landau en el prefacio antedicho, por lo que nos parece interesante dilucidar ambas posiciones.

Basándose en sus cinco axiomas, Peano define la suma para x fijo y todo y mediante:

$$(1) \quad x+1 = sg \, x;$$

$$(2) \quad x+sg \, y = sg \, (x+y);$$

pensando él y sus sucesores que así $x+y$ queda definido generalmente, porque el conjunto de y contiene 1 y también $sg \, y$ si contiene y .

Sin embargo, Landau añade: «Pero $x+y$ no ha sido aún de ningún modo definido».

Nos parece que la interpretación clásica de la definición de Peano está en que la aplicación recurrente de (2) a (1) permite pasar a la construcción de

$$x+2 = x+sg \, 1 = sg \, (x+1) = sg \, (sg \, x);$$

$$x+3 = x+sg \, 2 = sg \, (x+2) = sg \, (sg \, (sg \, x));$$

$$\dots\dots\dots: ;$$

y precisamente en los puntos suspensivos finales está incluída la aplicación esencial del principio de inducción completa, es decir, en admitir como axioma que así queda definida la suma $x+y$ para cualquier y natural.

El problema que atacan Hilbert y Bernays es el de formalizar lógicamente dicha admisión a partir del cálculo lógico predicativo y de los axiomas de Peano, en particular del Ax. V, llegando a una solución negativa, si quiere prescindirse de toda nueva idea primitiva.

De ella cree poder prescindir Landau, pues a éste parece preocupar sólo el problema que la definición recurrente anterior para cualquier y se hace tomando x como *parámetro fijo*. En virtud del mismo principio inductivo, probar la unicidad y la existencia de la suma para *todo* x y *todo* y naturales mediante (1), (2), necesita: (1) probarlas para $x=1$ y todo y ; (2) supuesta probada para x y todo y , deducirla para $sg\ x$ y todo y .

R. Dedekind en su famosa obra «*Was sind und was sollen die Zahlen?*» (Braunschweig, 1888) introduce en general las definiciones recurrentes utilizando el concepto de orden $z \leq y$ que ha obtenido anteriormente mediante su método de las «cadenas»: respecto a la relación primitiva de correspondencia que se ha designado por «sg», el conjunto K es una cadena si para $k \in K$ es $sg\ k \in K$. Si Z_0 representa la intersección de todas las cadenas que contienen z y análogamente Y_0 respecto de y , Dedekind define $z \leq y$ mediante la inclusión $Z_0 \subseteq Y_0$. Pero el método de Peano introduce el orden $z < y$ después de la suma, es decir por la existencia de un número natural que sumado a z dé y .

Landau dice resolver la objeción de Grandjot, sin introducir más axiomas que los cinco de Peano, por un procedimiento basado en una comunicación oral de L. Kalmár, procedimiento estructurado según teoremas todos ellos ya contenidos en la obra citada de Dedekind.

Este procedimiento ha sido reproducido más claramente por P. Dubreil en su «*Algèbre*» (París, 1946), exposición que puntualizándola detenidamente vamos a seguir al desarrollar los siguientes teoremas 4-A y 4-B.

Teor. 4-A. — Para todo elemento $x \in N$ existe a lo más una función $f_x(y)$ de $y \in N$ con $f_x(y) \in N$, que posea las dos propiedades:

$$(1) \quad f_x(1) = \text{sg } x;$$

$$(2) \quad f_x(\text{sg } y) = \text{sg } (f_x(y)).$$

En efecto, si $g_x(y)$ cumple también las condiciones impuestas para $f_x(y)$, sea Y el conjunto de números naturales y para los que

$$f_x(y) = g_x(y).$$

Por (1) es

$$f_x(1) = g_x(1) = \text{sg } x,$$

es decir $1 \in Y$.

Si $y \in Y$, por (2) es

$$f_x(\text{sg } y) = \text{sg } (f_x(y)) = \text{sg } (g_x(y)) = g_x(\text{sg } y),$$

en virtud de los Axs. II y IV. Por tanto, si $y \in Y$, también $\text{sg } y \in Y$ y por el Ax. V es $Y = N$, quedando probado el Teor. 4-A al coincidir las funciones $f_x(y)$, $g_x(y)$.

Teor. 4-B. — Existe efectivamente para todo $x \in N$ una función $f_x(y) \in N$ definida para todo $y \in N$ que cumpla las propiedades (1) y (2) del Teor. 4-A. Escribiremos $x + y$ el valor de esta función $f_x(y)$ que por *definición* es la *suma* de x y de y .

Según la notación usual, las propiedades (1) y (2) se escriben:

$$(1) \quad x + 1 = \text{sg } x;$$

$$(2) \quad x + \text{sg } y = \text{sg } (x + y).$$

Para la demostración de existencia, razonemos así: El conjunto X de elementos $x \in N$ para los que $f_x(y)$ existe, contiene 1, pues la correspondencia para *todo* y :

$$(3) \quad 1 + y = \text{sg } y$$

da la función buscada. En efecto, para $y=1$, (3) cumple (1) ya que

$$1+1=\text{sg } 1.$$

Si (3) es *válida para todo* y podemos poner en (3) $\text{sg } y$ por y , es decir

$$(3') \quad 1 + \text{sg } y = \text{sg } (\text{sg } y),$$

y entonces la función (3) cumple (2), ya que

$$1 + \text{sg } y = \text{sg } (\text{sg } y) = \text{sg } (1+y),$$

justificándose la primera igualdad por (3'), la segunda por (3) y la que une ambos miembros extremos da la propiedad (2) para $x=1$.

Si $x \in X$, es decir $x+y$ existe para todo $y \in N$, probemos que $\text{sg } x \in X$, viendo que la correspondencia para *todo* y :

$$(4) \quad \text{sg } x + y = \text{sg } (x+y)$$

da la función buscada $f_x(y)$ para $\text{sg } x$. En efecto, la función (4) cumple (1) para $y=1$, pues

$$\text{sg } x + 1 = \text{sg } (x+1) = \text{sg } (\text{sg } x),$$

justificándose la primera igualdad por (4), la segunda por (1) para x , mientras que la que une ambos miembros extremos da (1) para $\text{sg } x$.

Además, si (4) es *válida para todo* y , podemos poner en (4) $\text{sg } y$ por y , es decir:

$$(4') \quad \text{sg } x + \text{sg } y = \text{sg } (x + \text{sg } y)$$

y entonces la función (4) cumple (2), ya que

$$\text{sg } x + \text{sg } y = \text{sg } (x + \text{sg } y) = \text{sg } (\text{sg } (x+y)) = \text{sg } (\text{sg } x + y),$$

justificándose la primera igualdad por (4'), la segunda por (2) para x , la tercera por (4), mientras que la que une ambos miembros extremos da (2) para $\text{sg } x$. Por tanto, $\text{sg } x \in X$ si $x \in X$

y por el Ax. V es $X=N$, es decir, quedá probado *por recurrencia* el Teor. 4-B. Así pues, la suma $x+y$ existe para todo x y todo y con resultado único por el Teor. 4-A.

Hagamos una crítica que generalice y simplifique la exposición anterior. Una definición recurrente general que dependa de un parámetro (o de un conjunto de parámetros) $x \in N$, puede simbolizarse por las dos condiciones:

$$(1'') \quad f_x(1) = a_x \in N;$$

$$(2'') \quad f_x(\text{sg } y) = b_x(f_x(y)) \in N.$$

Así, por ejemplo, en la suma $f_x(y) = x + y$ se toma $a_x = \text{sg } x$, $b_x(t) = \text{sg } t$, mientras que en el producto $f_x(y) = x \cdot y$ se toma $a_x = x$, $b_x(t) = t + x$.

El teorema 4-A de unicidad y la existencia recurrente de la operación para x fijo quedan probados por la supuesta existencia de $a_x \in N$ (por ejemplo, la de $\text{sg } x$ ya admitida para todo x en el Ax. II de Peano y que da, sin nueva idea primitiva para x fijo, una *definición explícita* de $x+1$), así como por la existencia del número natural *y unívocamente* determinado por $\text{sg } y \neq 1$ de acuerdo al Ax. IV de Peano y al Teor. 3. Entonces, al primer miembro de (2'') sólo podrá corresponder un solo y , y *si por hipótesis recurrente suponemos existente* $f_x(y)$, la correspondencia b_x dada como unívoca y existente proporciona la definición explícita, unívoca y existente de $f_x(\text{sg } y)$. Sin embargo, la suposición existencial recurrente que antes hemos subrayado es distinta a la verificación de una definición explícita propia y según Hilbert-Bernays, constituye para el caso de la adición y de la multiplicación una idea axiomática primitiva, pues dichos autores demuestran en la obra citada y en el sentido por ellos indicado, que la relación dada por la suma primero y el producto después, no pueden ser respectivamente representadas por fórmulas verificables en el estricto formalismo lógico del cálculo predicativo ampliado con los axiomas de Peano primero y aún después con la idea primitiva de suma recurrente. En cambio, el formalismo lógico del cálculo predicativo ampliado con los axiomas de Peano y las ideas primitivas de suma y producto recurrentes, es suficiente para formalizar en el sentido de Hilbert-Bernays, toda la Teoría de Números y en particular cualquier otra operación in-

troducida en la forma recurrente antedicha. Esto pone de relieve el papel esencial que en la Teoría de Números juegan las operaciones de suma y producto. Así, pues, dentro del formalismo lógico de Hilbert-Bernays, queda justificada la posición de Grandjot, en contra de lo afirmado en definitiva por Landau en el prefacio antedicho.

Una observación muy importante, hecha ya por Dedekind y reproducida por Hilbert-Bernays, es que la condición (2'') no será nunca contradictoria con la (1'') por el Ax. III de Peano, pues siendo siempre $sg\ y \neq 1$, el valor adoptado para a_x no podrá entrar en conflicto con el segundo miembro de (2''). Por ejemplo, esto podría ocurrir en la numeración de un reloj en la que el 12 es seguido por el 1.

Así la unicidad y compatibilidad de una definición cualquiera por recurrencia no se debe a la particular estructura que en cada caso tenga la fórmula recurrente (1''), (2''), sino a las propiedades características expresadas por los Axs. IV y III de Peano. Tan así es, que la introducción de definiciones recurrentes no es admisible con un sistema axiomático arbitrario no-contradictorio, pues de dicha admisión general pueden deducirse los Axs. III y IV de Peano, que entonces resultarían superfluos. En efecto, si suponemos $sg\ 1 \neq 1$ e introducimos la función recurrente

$$(1) \quad \alpha(1) = 1;$$

$$(2) \quad \alpha(sg\ x) = sg\ 1,$$

ha de ser $sg\ x \neq 1$ (Ax. III), pues en caso contrario, quedaría

$$sg\ 1 = \alpha(sg\ x) = \alpha(1) = 1,$$

en vez de ser $sg\ 1 \neq 1$.

Introduciendo ahora la función recurrente

$$(1) \quad \delta(1) = 1,$$

$$(2) \quad \delta(sg\ x) = x,$$

de $sg\ x = sg\ y$ se deduce $x = y$ (Ax. IV) si la función $\delta(x)$ está unívocamente determinada.

Admitido el fondo axiomático primitivo que tienen las de-

finiciones recurrentes de suma y producto, creemos que el Teor. 4-B puede sustituirse por la siguiente verificación recurrente de existencia de la suma para *todo* $x \in N$ y *todo* $y \in N$ (y análogamente para el producto).

Introduzcamos la misma definición de Landau-Peano:

Definición 1. — A cada par de números naturales x, y puede hacerse corresponder unívocamente un número natural llamado suma $x + y$, tal que

$$(1) \quad x + 1 = \text{sg } x \text{ para todo } x \in N;$$

$$(2) \quad x + \text{sg } y = \text{sg}(x + y) \text{ para todo } x \in N \text{ y todo } y \in N.$$

Para $x=1$ y *todo* y la anterior definición da un número existente, pues (1) $1+1=\text{sg } 1$ existe por los Axs. I y II; (2) $1+\text{sg } y=\text{sg}(1+y)$ existe por el Ax. II si suponemos existente $1+y$.

Supuesta existente la suma $x+y$ para x y *todo* y , también existe para $\text{sg } x$ y *todo* y , pues (1) $\text{sg } x + 1 = \text{sg}(\text{sg } x)$ existe por el Ax. II; (2) $\text{sg } x + \text{sg } y = \text{sg}(\text{sg } x + y)$ existe por el Ax. II, al existir $\text{sg } x + y$ para *todo* y , ya que $\text{sg } x + 1$ hemos visto existe y si existe $\text{sg } x + y$, también existe

$$(2') \quad \text{sg } x + \text{sg } y = \text{sg}(\text{sg } x + y)$$

por el Ax. II aplicado al segundo miembro de (2'), que no es más que la definición 1-(2) para $\text{sg } x$. Así, pues, en forma recurrente respecto de x , queda probada la existencia de $x+y$ para *todo* x y *todo* y , como afirmaba el Teor. 4-B.

Obsérvese que aquí escribimos (2') en lugar de (2), sustituyendo en ésta x por $\text{sg } x$, para probar la existencia de $\text{sg } x + y$ para *todo* y a partir de $\text{sg } x + 1 = \text{sg}(\text{sg } x)$. Esto nos parece más natural que introducir prematuramente las correspondencias (3) y (4), que equivalen en el fondo a establecer

$$\text{sg } x + y = x + \text{sg } y,$$

propiedad cierta, pero que es mejor aparezca como teorema posterior a la definición de suma. Por otra parte, escribir (4') en lugar de (4), o (3') en lugar de (3), es tomarse un trabajo análogo a escribir (2') en lugar de (2), ahorrándonos en el último

procedimiento la introducción de las correspondencias (3) y (4). Podría objetarse que (4) da efectivamente la función suma $f_x(y)$ para $sg\ x$ mediante el conocimiento de $f_x(y)$ para x , pero creemos que para asegurar la existencia (en sentido axiomático recurrente) de $f_x(y)$ para $sg\ x$, basta conservar $sg\ x$ fijo y recurrir respecto de y , como hemos hecho para $x + y$ con x fijo.

Nos referiremos finalmente a una interesante observación de O. Zariski que incluye una de las notas finales de comentarios a su traducción de la obra citada de Dedekind, publicada en italiano con el título *Essenza e significato dei numeri* (Roma, 1926) y perteneciente a la colección «Per la storia e la filosofia delle matematiche», dirigida por F. Enriques.

Si una operación b hace corresponder a un número n otro $b(n)$ determinado, mediante la b se define por recurrencia (1''), (2'') una nueva operación f así obtenida de la b por lo que podemos llamar criterio general de iteración. En particular, las operaciones aritméticas fundamentales se obtienen por iteración sucesiva de la relación primitiva «sg». La primera iteración da la suma, la iteración de la suma lleva al producto, la iteración del producto introduce la potencia y así podría seguirse sucesivamente. Esta idea es aprovechada por Zariski en la nota citada para introducir las operaciones fundamentales entre los números ordinales trasfinitos.

Añadamos también que esta misma idea ha sido utilizada por W. Ackermann (*Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen*, Math. Ann., 99, 1928), para demostrar constructivamente la existencia de una función recurrente no comprendida en el tipo primitivo (1''), (2''). En efecto, la «recurrencia cruzada» de Ackermann:

$$e_0(x, y) = x + y; \quad e_1(x, y) = x \cdot y; \quad e_2(x, y) = xy; \quad \dots$$

$$e_{n+1}(x, 0) = x, \quad e_{n+1}(x, sg\ y) = e_n(x, e_{n+1}(x, y)), \quad (n \geq 2),$$

proporciona $e_n(n, n)$ que crece más rápidamente que cualquier función que pueda introducirse por una definición recurrente del tipo primitivo (1''), (2'').

LA PLATA, AGOSTO 1950.

FACULTAD DE CIENCIAS FISICOMATEMATICAS.

EL TERCER INCLUIDO EN LA CONTRAPARADOJA DE RUSSELL

por

PEDRO PI CALLEJA

SUMARIO: Objetivando la paradoja clásica de Russell se hace principalmente la observación, acaso original, de que el caso correlativo al que constituye la paradoja y sobre el que la generalidad de los autores no hace mención especial, tiene el interés de ser ejemplo de excepción del principio del tercero excluido. (Presentado al "Primer Congreso Argentino de Filosofía" organizado en Mendoza por la Universidad Nacional de Cuyo, abril 1949 a publicarse en los Anales correspondientes).

La paradoja de Russell⁽¹⁾ sobre conjuntos que puedan o no considerarse como elementos de sí mismos se hace más asequible con la siguiente objetivación de análogo contenido lógico:

Llamemos *biblioteca* al conjunto bien definido de *catálogos* encuadernados que se obtiene agregando a los contenidos en una determinada habitación otro *X* formado en el momento. Entonces tendrá sentido preciso hablar de *todos* los catálogos de esa biblioteca, una vez asegurada la existencia de *X*. Supongamos además que a cada catálogo corresponda biunívocamente un título grabado en sus tapas y apliquemos la siguiente clasificación: a) Si el catálogo reproduce su título impreso en su interior lo llamamos *autocitado*; b) Si el catálogo no reproduce su título en su interior lo llamamos *no-autocitado*.

Si llamamos *catálogo rojo* al que tiene sus tapas de este color, ninguna elucubración lógica sobre predicabilidad impedirá sea posible considerar formado el catálogo *X* por uno *R* en cuyo interior figuren impresos exclusivamente los títulos de *todos*

(¹) B. RUSSELL, *The principles of mathematics*, (Cambridge, 1903).

los catálogos rojos de la biblioteca, incluyendo o excluyendo el del mismo $X=R$, según lo formemos o no de tapas rojas.

Sin embargo, en caso parecidamente análogo, se da la paradoja de Russell de *ser imposible* encontrar en la biblioteca o formar el catálogo $X=N$, tal que en su interior figuren impresos exclusivamente los títulos de *todos* los catálogos *no-autocitados* de dicha biblioteca, pues si contiene el título del mismo catálogo N , éste será autocitado y no debe figurar, mientras que si el título no figura en su interior, dicho catálogo N será no-autocitado, por lo que su título hubiese debido estar impreso en su interior.

La generalidad de los autores pasa por alto, o acota no da lugar a antinomia alguna, el caso que corresponde en esta objetivación al catálogo de los autocitados. No obstante es interesante examinar el «exceso de fortuna» que origina su consideración en relación al principio del tercero excluido. Este parece exigir que un par de condiciones contradictorias como las de catálogo autocitado o no-autocitado deben y pueden atribuirse en alternativa, tanto a todo catálogo de los contenidos en la habitación, como al X formado en el momento.

Pues bien, si queremos que $X=A$ sea un catálogo tal que en su interior figuren exclusivamente impresos los títulos de *todos* los catálogos *autocitados* de la biblioteca, dicho $X=A$ tanto podrá considerarse catálogo autocitado (figurando su título impreso en su interior), como no-autocitado (no figurando su título impreso en su interior) y para resolver la cuestión no será decisivo el principio del tercero excluido.

En toda esta objetivación puede observarse cuán errónea es la opinión de muchos autores⁽²⁾ al considerar la paradoja de Russell propia de los conjuntos *infinitos*. No se trata de finito ni infinito, sino sólo de la idea de totalidad en relación a la de predicabilidad.

Para verlo mejor, *limitemos* nuestra biblioteca a los catálogos existentes «a priori» contenidos en una determinada habitación (dejando de considerar el X que puede hacer impredicable la biblioteca). Entonces, aun cuando sea posible poner en pila todos los catálogos no-autocitados de la biblioteca, el catálogo N

(2) V. g.: R. COURANT & H. ROBBINS, *What is mathematics?* (Oxford Un. P. 1941).

antes definido no podrá existir en la biblioteca, es decir, será ejemplo de *conjunto mal definido*. Sin embargo, la posibilidad de encontrar el catálogo R y no el N indica que la antinomia tiene un alcance superior al semántico. Por otra parte, será posible encontrar en la biblioteca tanto un catálogo no-autocitado A_n como un catálogo autocitado A_s , en cuyo interior figuren impresos exclusivamente los títulos de *todos* los catálogos autocitados de la biblioteca; es decir, ambos tendrán el *mismo texto* que contendrá el título de A_s , pero no el de A_n . Así, para un catálogo ya existente, sea el A_n o el A_s , rige el principio del tercero excluido; sin embargo, este principio *no es constructivo* para formar el conjunto de títulos que constituye el texto anterior. Esta última observación fundamenta la lógica brouweriana o intuicionista en relación al principio del tercero excluido. La *limitación* aplicada a la biblioteca está de acuerdo con la teoría de los tipos lógicos de Russell para solucionar su paradoja dentro de la lógica aristotélica.

LA PLATA.

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS.

A PROPOSITO DE LA NOTA DEL DR. PI CALLEJA

Sobre Paradojas lógicas y Principio del *Tertium Non Datur*

por

B. LEVI

La Nota que precede, del Dr. Pi Calleja, me sugiere algunas consideraciones y recuerdos que me permito evocar.

Es bien conocido que el problema de las llamadas antinomias de la lógica es viejo como el mundo; remonta en efecto a los griegos (y quizás háyanla heredado los griegos de civilizaciones anteriores) la paradoja del mentiroso: el mentiroso que dice «yo miento» ¿miente o bien dice verdad? En seguida se ve que no es muy distinto el caso del catálogo de los catálogos no autocitados, el cual afirma: «yo soy el catálogo de los catálogos no-autocitados» ¿miente o dice verdad? Sin embargo, la diferencia entre los antiguos y los modernos está en que en antiguo la pregunta fué un medio de disputa para los sofistas; modernamente aparece como un ejemplo en contra del principio que afirma que toda proposición o bien es cierta, o bien es falsa; y para unos se asocia al problema más general de las «antinomias lógicas» o «antinomias de la teoría de los conjuntos», para otros justifica la necesidad de hacer lugar a «lógicas plurivalentes». Es sabido que a la entrada del problema en el dominio reservado a la matemática se puede fijar una fecha en los últimos años del siglo pasado.

Habiéndome interesado en la teoría de los conjuntos desde el tiempo de mi juventud, siempre he pensado que antinomias no existen en la lógica y que las aparentes antinomias cubren, de verdad, en todos los casos, una que otra infraacción contra la lógica en su esencia tradicional y sin necesidad de correcciones. Un primer ensayo en este punto de vista he publicado, en efecto, ya

en 1908 con el título «Antinomie logiche?»⁽¹⁾, volviendo aún sobre el argumento en varias oportunidades siguientes.

Creo pueda decirse que el error fundamental que está en el fondo del aparente problema consiste generalmente en alguna *objetivación* más o menos intuitiva, algo sofística, mientras la lógica se ocupa exclusivamente de la *forma* de los razonamientos. Se trata a menudo de la opinión de que pueda pertenecer a la lógica la *formación de juicios*, mientras que sólo le pertenece la *transformación de los juicios*; la decisión inicial de *verdad* o de *falsedad* pertenece a la intuición o la experiencia, a veces al albedrío, en todos los casos a una intervención extra-lógica; pero la lógica establece las reglas por las cuales juicios oportunamente encadenados por relaciones de interdependencia, deben incluirse en las dos clases de los ciertos y de los falsos, a consecuencia de aquellas primeras decisiones. Entre estas reglas el principio del tercero excluido no dice más que esto: Existe una operación lógica, la negación, que aplicada a un juicio cualquiera lo transforma en otro juicio, que se llama su contrario; la afirmación simultánea de dos juicios contrarios constituye lo *absurdo*. La lógica nos impone rechazar lo absurdo y llamamos por lo tanto incompatibles o *contradictorios* sistemas de proposiciones que, a raíz de sus atributos de verdad y falsedad (de origen, como se dijo, extralógico), y por aplicación de las reglas de la lógica, lleven a esa afirmación simultánea de juicios contrarios. Pero aquí se presenta un problema: ¿Existen sistemas de proposiciones no-contradictorios? o, en forma distinta, pero esencialmente equivalente, ¿no podría ser que las reglas de la lógica incluyeran por sí mismas lo absurdo? Este es el *Entscheidungsproblem* de Hilbert: «Allí se entiende en la nueva lógica el problema de encontrar métodos generales para decidir sobre la ilimitada validez (*Allgemeingültigkeit*) y, respectivamente, la posibilidad de cumplir (*Erfüllbarkeit*) con las fórmulas lógicas»⁽²⁾. Resolver este problema fué uno de los fines principales de los *Grundlagen*, sin que pueda decirse alcanzada la respuesta definitiva. La razón del éxito negativo me parece debe buscarse en la observación siguiente: Las fórmulas de la lógica, lo mismo

⁽¹⁾ *Annali di matematica pura e applicata*. Serie III. T. XV.

⁽²⁾ HILBERT u. BERNAYS. *Grundlagen der Mathematik*. Erster Band-p. 8 (Berlin, Springer, 1934).

como los números naturales, se expresan con un número finito de signos (cifras, en el caso de los números); pero son infinitas, por cuanto estos pocos símbolos van repitiéndose y combinándose en modos distintos. El único medio que nosotros tenemos para vencer este infinito es el principio de inducción matemática; no es por nada que matemáticos y filósofos han sido frecuentemente en desacuerdo sobre si fuera este principio de origen lógico o de naturaleza aritmética, pues comparte las dos condiciones. Tomándolo como postulado definitorio de la clase de los números enteros, nosotros podemos deducir propiedades que pertenecen indistintamente a todos los números, porque así lo dice esa misma definición. Pero, ¿puede decirse lo mismo con aplicarlo para una deducción lógica, cuando son precisamente los postulados de la lógica los que se ponen en cuestión? Pocos años antes de la aparición del volumen de Hilbert y Bernays, el mismo Hilbert creyó haber demostrado la validez del principio del tercero excluido precisamente por este camino de la inducción⁽³⁾; no puede extrañar que el mismo autor no pudiera darse por definitivamente satisfecho. Pero es bien cierto que en la verdad del principio el autor, como todos los hombres pensantes, tenía plena confianza, aun siendo plenamente informado de la seudoparadoja del mentiroso y de las teorías de lógicas plurivalentes.

La forma nueva que el Dr. Pi Calleja da a la paradoja de Russell consigue, como dice el autor, el «exceso de fortuna» de dividir los supuestos catálogos en dos clases complementarias que tienen la particularidad de mostrar cada una y conjuntamente la negación del principio del tercero excluido bajo dos caras opuestas. En mi opinión ella es particularmente interesante para aclarar lo dicho antes acerca de la formación de los juicios. Es inútil buscar en una biblioteca el catálogo de los catálogos no-autocitados porque *tal catálogo no existe*, siendo, por definición, idea contradictoria (al suponer su existencia, se le atribuye una propiedad que la definición le niega); y evidentemente nada de cierto o de falso puede decirse de cosa no existente. Puede sí existir, por contrario, en una biblioteca un catálogo de los catálogos autocitados; y, *en cuanto la biblioteca está allí*, está perfectamente determinado por su definición. Pero esta

(3) *Beweis des Tertium non datur*. Goettinger Nachrichten. Math. Phys. Klasse. 1931 (p. 120-125).

definición no es suficiente para decidir si tal catálogo es autocitado o no es, mientras la decisión no queda dudosa cuando aceptamos averiguar si su título está o no inscripto en sus páginas. Se trata, como decíamos, de un juicio de facto, experimental, en el que la lógica no tiene ninguna parte. Y la situación no cambia si, al no existir el tal catálogo, encargáramos a un escribiente de formarlo, poniéndolo por tanto en apuro de decidir si debe o no debe inscribir el título del mismo; se le habrá dado una orden incompleta y su decisión personal (hecho concreto) será siempre la buena.

Algo parecido será el análisis de la paradoja del mentiroso; pero, por tratarse de proposición y no de objeto, necesita un poco más de sutileza: llamemos A a la clase de las proposiciones mentirosas y llamemos a a la particular proposición «yo miento», donde, desde luego, «yo» significa «el mentiroso». Hay que asignar aquí el sentido de la palabra «miento», pues no es posible mentir si no se dice algo capaz de recibir los atributos de verdadero y falso; la hipótesis de que deba entenderse mentiroso el acto mismo de la afirmación queda entonces descartada por esa misma consideración: no es posible atribuir sentido de verdad o falsedad a «miento por decir miento» si ya no sabemos decidir sobre el segundo «miento»; y como este segundo miento está en idéntica situación que el primero, entra aquí en función el principio de inducción matemática; la solución de la paradoja queda en este caso análoga al no-existir del catálogo de catálogos no-autocitados. Pero también puede suponerse desarrollar la afirmación del mentiroso con el sentido de «todas las proposiciones que salen de la boca del mentiroso son mentiras»; entonces a es tal; en símbolos $a \in A$; pero por la definición de la clase A y por el principio del tercero excluido, si x pertenece a A , es cierto $\bar{x}$; en el simbolismo de Hilbert

$$(x) x \in A \rightarrow \bar{x};$$

se sigue

$$a \sim (a \in A) \rightarrow a \cdot \bar{a} = \text{absurdo};$$

concluimos simplemente que la proposición «todas las palabras que salen de mi boca son mentiras» dicho por el mentiroso está

contra la lógica, del mismo modo que lo estaría agregar a los postulados de la geometría euclídea uno que dijera que «cada tres puntos de una recta son equidistantes de un punto».

Todos los ejemplos concuerdan pues, según mi parecer para aclarar el problema de compatibilidad de la lógica; la conclusión $a \sim \bar{a}$, que no es más que la contraria del tercero excluido $a \vee \bar{a}$, no puede presentarse hasta tanto no entra en juego alguna afirmación extralógica, porque las puras reglas de la lógica no comprenden afirmaciones de verdad y falsedad independientes. El caso en que tal conclusión se presentara en un razonamiento comprendiente una afirmación extralógica se excluye de la misma manera que se admite validez a las conclusiones por reducción al absurdo. Hace, sin embargo, excepción la teoría de los números enteros; los números enteros son objetos abstractos definidos por proposiciones de las cuales se afirma la verdad en modo axiomático y por cuanto esencialmente ellos afirman únicamente lo noción de *sucesión*, ellos *preceden más bien que seguir a la lógica*. La observación lleva a concluir que para ellos, y para ellos solamente, es problema el *Entscheidungsproblem* de Hilbert; y es notable que el mismo Hilbert concreta la no-contradicción en demostrar que la deducción lógica no conducirá nunca a la afirmación $1 \neq 1$; la razón hilbertiana para tal determinación del problema parece sin embargo ser más bien formal, pues el mismo Hilbert observa que, dentro de la lógica, todas las proposiciones de la forma $A \sim A$ son equivalentes por deducirse una de otra sin otro recurso que las transformaciones lógicas.

Me permito remitir al lector, por consideraciones, en parte análogas, en parte complementarias, a otra Nota mía, aun de muchos años atrás: «Nota di logica matematica»⁽⁴⁾; particularmente, respecto del tema actual, el § 10 y las notas al pie de página que a ello se refieren.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA.

(4) *Rendiconti dell'Istituto Lombardo di lettere e scienze*. Vol. LXVI, 1933 (p. 239-252).

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

RESUELTOS

N.º 150. — Dadas dos esferas de radios R, r , se pregunta en qué posición debe ponerse un punto luminoso para que, siendo igual a una constante k^2 el producto de sus distancias de los centros de las esferas, sea máxima la suma de las áreas de los casquetes iluminados de las dos esferas.

Indíquense con x, y las distancias desconocidas del punto luminoso de los centros de las dos esferas; se tiene pues la condición

$$xy = k^2. \quad (1)$$

Las flechas de los casquetes iluminados serán expresadas respectivamente por

$$R - \frac{R^2}{x} \quad \text{y} \quad r - \frac{r^2}{y};$$

luego las áreas de los dos casquetes serán proporcionales a

$$R^2 - \frac{R^3}{x} \quad \text{y} \quad r^2 - \frac{r^3}{y}.$$

La suma de estas áreas será máxima cuando sea mínima

$$\frac{R^3}{x} + \frac{r^3}{y} = \frac{R^3y + r^3x}{k^2};$$

debe luego ser también mínima

$$(R^3y + r^3x)^2 - 2R^3r^3k^2 = R^6y^2 + r^6x^2,$$

o, poniendo por brevedad $x^2 = z$ y reemplazando $y^2 = \frac{k^4}{x^2} = \frac{k^4}{z}$

$$f(z) = r^6 q + \frac{R^6 k^4}{z}. \quad (2)$$

Es

$$f'(z) = r^6 - \frac{R^6 k^4}{z^2};$$

luego, debiendo ser $z > 0$, $f'(z)$ es negativa, nula o positiva, según sea

$$z <, o =, o > \text{ de } \frac{R^3}{r^3} k^2.$$

El valor $x^2 = z = \frac{R^3}{r^3} k^2$ es pues minimizante para $f(z)$; pero x e y deben todavía satisfacer las condiciones

$$(x-y)^2 \leq d^2 \leq (x+y)^2,$$

donde d representa la distancia entre los centros de las dos esferas; teniendo en cuenta (1) esta condición se traduce en

$$d^2 + 2k^2 \geq z + \frac{k^4}{z} \geq d^2 - 2k^2; \quad (3)$$

siendo $2k^2$ el mínimo de $z + \frac{k^4}{z}$, la segunda condición es efectiva sólo si $k < \frac{d}{2}$.

Deben por lo tanto distinguirse dos casos:

1º. $k \geq \frac{d}{2}$. - De la primera desigualdad (3) se deduce

$$\frac{d^2 + 2k^2 - \sqrt{d^2(d^2 + 4k^2)}}{2} \leq z \leq \frac{d^2 + 2k^2 + \sqrt{d^2(d^2 + 4k^2)}}{2}; \quad (4)$$

suponiendo, como es posible, $R \geq r$, se nota que el valor de z que hace mínima $f(z)$ es mayor que el primer miembro de (4); la solución del problema será dada por

$$z = \min \left(\frac{R^3}{r^3} k^2, \frac{d^2 + 2k^2 + d \sqrt{d^2 + 4k^2}}{2} \right).$$

2º. $k < \frac{d}{2}$. - La segunda desigualdad (3) impone que

$$z \leq \frac{d^2 - 2k^2 - \sqrt{d^2(d^2 - 4k^2)}}{2} \text{ o bien } z \geq \frac{d^2 - 2k^2 + \sqrt{d^2(d^2 - 4k^2)}}{2}$$

y, conjuntamente con (4), se obtiene que z debe satisfacer una de las desigualdades

$$\begin{aligned} \frac{d^2 + 2k^2 - \sqrt{d^2(d^2 + 4k^2)}}{2} &\leq z \leq \frac{d^2 - 2k^2 - \sqrt{d^2(d^2 - 4k^2)}}{2} \\ \frac{d^2 - 2k^2 + \sqrt{d^2(d^2 - 4k^2)}}{2} &\leq z \leq \frac{d^2 + 2k^2 + \sqrt{d^2(d^2 + 4k^2)}}{2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Se nota en seguida que los dos intervalos representados por estas desigualdades no tienen partes comunes; pueden entonces presentarse 4 casos distintos, según la posición que tiene el número $\frac{R^3}{r^3} k^2$ respecto de ellos:

a) $\frac{R^3}{r^3} k^2 \leq \frac{d^2 + 2k^2 - \sqrt{d^2(d^2 + 4k^2)}}{2}$; la solución del problema está dada por este último número.

b) $\frac{R^3}{r^3} k^2 \geq \frac{d^2 + 2k^2 + \sqrt{d^2(d^2 + 4k^2)}}{2}$; nuevamente la solución está dada por el último número.

c) $\frac{R^3}{r^3} k^2$ es interno a uno de los intervalos (5); entonces da él mismo la solución.

d) $\frac{R^3}{r^3} k^2$ está en el espacio entre los dos intervalos (5); la solución estará dada por uno de los números

$$\frac{d^2 - 2k^2 - \sqrt{d^2(d^2 - 4k^2)}}{2}, \quad \frac{d^2 - 2k^2 + \sqrt{d^2(d^2 - 4k^2)}}{2}$$

entre los cuales habrá que elegir por examen directo.

En cuanto a la posición que ocupará el punto luminoso en los distintos casos, se vé que, cuando el valor de $z=x^2$ que dá la solución es $\frac{R^3}{r^3} k^2$ (casos 1º. parcialmente y 2º. c), tal posición podrá ser un punto cualquiera sobre un determinado círculo con centro sobre la recta que une a los centros de las esferas, en el plano perpendicular a esta recta. En todos los demás casos será un punto de esta recta.

Desde luego la solución obtenida supone despreciar la sombra que una de las esferas puede proyectar sobre la otra; si esta sombra quisiera llevarse en consideración el problema se haría mucho más difícil y podría todavía ser estudiado.

Una solución menos detallada ha sido enviada por el señor NÉSTOR DISTÉFANO, alumno del III curso de Ingeniería Civil en la Facultad.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

PROPUESTOS

164. — Se considera la sucesión de los valores de $\text{sen}(k\pi e \cdot n!)$ donde k es un número racional fijo, mientras n recorre una sucesión infinita de valores enteros crecientes. ¿Cómo se puede determinar una ley para la sucesión de los n de manera que la sucesión de valores considerada tenga límite determinado y cuál será este límite?

Resolver el mismo problema para la sucesión $\text{sen}(\pi e m n!)$ donde m es un entero positivo dado y para la sucesión $n \text{sen}(k\pi e \cdot n!)$.

165. — Demostrar que la función representada por la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n^k x^n$ para k entero positivo es racional y calcular su expresión en términos finitos.

¿Existen por x valores racionales para los cuales todas estas series toman valores enteros?

166. — Determinar la integral general de la ecuación diferencial.

$$\left(\frac{d}{dx} + x\right)\left(\frac{d}{dx} - x\right)y = f(x).$$

167. — Estudiar el problema análogo para la ecuación

$$\left(x^4 \frac{d^2}{dx^2} - c^2\right)^2 y = f(x).$$

168. — Demostrar con consideraciones elementales que la suma de los ángulos internos de un triángulo curvilíneo formado por arcos de circunferencias de centros alineados es $< \pi$ o bien $> \pi$ según la recta de los centros no corta o bien corta al triángulo. ¿Cuál es en el primer caso el límite inferior de la suma de los ángulos y en el segundo el límite superior? ¿Puede en ambos casos aproximarse como se quiera la suma al valor π ?

CUESTIONES

15. — Puede demostrarse fácilmente que condición necesaria y suficiente para que tres segmentos representen las sumas de los pares de aristas opuestas de un tetraedro es que con ellos se pueda construir un triángulo. Es evidente por otro lado que, suponiendo dados estos tres segmentos, su partición para formar con ellos el tetraedro no puede ser arbitraria. ¿Es posible precisar condiciones?

BIBLIOGRAFIA

B. FINZI - M. PASTORI. *Calcolo Tensoriale e Applicazioni*, N. Zanichelli, Bologna 1949, 427 págs.

Se trata de una clara exposición de los conceptos y métodos principales del cálculo tensorial con sus aplicaciones a la geometría diferencial, a la mecánica de los medios continuos y cuerpos deformables, al electromagnetismo y a la teoría de la relatividad. Está actualmente tan difundido el uso del cálculo tensorial que libros de esta naturaleza, como el ya clásico de Brillouin, son sin duda de utilidad a un vasto campo de lectores, tanto matemáticos, como físicos o ingenieros.

En el libro que reseñamos los Autores han procurado conservar siempre el sentido geométrico e intuitivo, fácil de perder en una disciplina de tan exuberante simbolismo. Para ello han prescindido, acertadamente, de generalizaciones casi siempre innecesarias o que el lector puede hacer por su cuenta si algún día las necesita, o bien, en otros puntos, se han limitado a indicar resultados, prescindiendo de la demostración de los mismos cuando ella no cuadraría dentro del marco, podríamos decir elemental, de la obra. En este sentido solo notaríamos a faltar la indicación bibliográfica correspondiente. Si bien al final contiene una bibliografía casi completa de tratados (no de memorias), no se hace referencia a ella en el texto, lo cual hubiera sido muy útil para el lector que quisiera completar una demostración no dada (por ejemplo la expresión general de los tensores múltiples isotropos, págs. 99-100, o la demostración de Einstein, pág. 397) o bien proseguir el estudio de cuestiones tan solo esbozadas (como en el caso de los espacios no-riemannianos, Cap. V, § 9).

El contenido de la obra es el siguiente:

El Cap. I titulado Campos Vectoriales es un excelente y completo resumen de cálculo vectorial, con las fórmulas más útiles, ejemplos y aplicaciones del mismo.

Los Cap. II (Tensores y álgebra tensorial) y III (Homografías vectoriales) contienen las definiciones clásicas de tensores, operaciones entre los mismos y sus relaciones más usuales.

Los Cap. IV (Campos tensoriales en los espacios euclideos) y V (Campos tensoriales en los espacios noeuclideos) son destinados al cálculo tensorial (derivación, operadores diferenciales, tensores de curvatura,...) primero en los espacios euclideos y luego en un espacio de Riemann general. El Cap. V termina con un interesante esbozo sobre la integración en campos tensoriales de un espacio de Riemann (lástima sin citas bibliográficas para ser comple-

tado) y de unas nociones, tal vez demasiado breves, sobre espacios no-riemannianos.

Los Cap. VI y VII están dedicados a las aplicaciones a la geometría diferencial para el caso de superficies el primero y para espacios de Riemann el segundo (observemos que los Autores llaman espacio de Riemann a las variedades contenidas en un espacio euclidiano).

El Cap. VIII trata de la mecánica de los cuerpos deformables. El Cap. IX estudia el campo electromagnético, con la propagación de ondas en dieléctricos homogéneos y en el espacio tiempo. En el Cap. X se expone un resumen de la teoría de la relatividad, empezando por la restringida y siguiendo con la generalizada, terminando con unas breves indicaciones sobre cosmología relativista.

Cada capítulo termina con una tabla que resume las principales fórmulas obtenidas en el mismo.

Como puede verse por el contenido y teniendo en cuenta la claridad y forma sistemática de exposición, el libro es altamente recomendable para quienes se inicien en el cálculo tensorial o tengan interés en las aplicaciones del mismo. Para la lectura no hacen falta más que los conocimientos de cálculo infinitesimal y geometría analítica que se acostumbran a estudiar en los dos o tres primeros años de nuestras facultades de ciencias.

La impresión y presentación de la casa Zanichelli sigue igual que antes de la guerra: excelente.

L. A. Santaló

CORTÉS PLA, *El enigma de la luz*, con un Prólogo de George Sarton. Editorial Kraft. Buenos Aires, 1949, págs. 328.

Indudablemente, si hay fenómeno natural para el cual el título de *enigma* elegido por el Ing^o. Pla resulta acertado en su pleno sentido, aún trágico, este es el de la luz. Pues, si pensamos en este máximo don que Dios ha concedido al hombre para que gozara el encanto de la naturaleza, para estimularlo a comprender la naturaleza y para que en la naturaleza buscara comprenderse a sí mismo; y si pensamos en el camino recorrido por la humanidad desde que el sol alumbró a la Tierra y las estrellas señalan, celestes mojones, las profundidades del espacio; bien podemos repetir las palabras con las que cierra Sarton su Prólogo: “A la cuestión tan emocionante. ¿Qué es la luz? fácilmente se insertan otras todavía más emocionantes: ¿Qué es la humanidad? ¿Qué piensa? ¿A quién sirve? ¿Quo vadimus? El enigma de la luz es, en cierta medida, el enigma de la vida humana”. Pero, también, ¿Por cuál razón preguntar qué es? ¿Tiene eso un sentido? ¿Es racionalmente posible llegar a las raíces de las cosas? ¿Quién guía la curiosidad del hombre?

En este libro Pla nos conduce a través de 25 siglos, el tiempo que más o menos conocemos de la civilización occidental, para enseñarnos, con abundancia de testimonios, las respuestas contrastantes que la filosofía natural ha

dato sucesivamente a la pregunta sobre la esencia del maravilloso fenómeno de la visión; contrastantes sí en el concepto de los autores, y sin embargo no tanto de verdad como para que, mirando el camino de lejos en perspectiva, no tengamos la impresión de que alguna adivinación también dirige el pensamiento.

Ya desde el principio el enigma sugiere a la filosofía griega dos soluciones conceptualmente opuestas: por una la luz está compuesta de rayos rectilíneos por medio de los cuales el individuo se esfuerza para ponerse en contacto con las cosas; por la otra son las cosas que emanan alguna parte de si mismas para llegar al individuo; la primera encarna evidentemente el principio de la pura afirmación experimental; la segunda la sed de la explicación constructiva. A la primera se adheriran con volver los siglos los espíritus matemáticos de Euclides, Heron, Ptolomeo, la segunda tendrá adeptos más tempranos en Demócrito, Epicuro, Empedocles. En medio los filósofos morales levantarán inútilmente sus dudas, sean ellos Sócrates en juzgar de palabrero y sofístico el intento de explicación o bien Aristóteles elevando el palabrerismo a método de pura descripción. El hombre seguirá buscando, corrigiendo y entremezclando hipótesis; pero ¿no está esbozado desde entonces el dilema de onda y corpúsculo? Y, sin embargo, ¿cuán largo el camino!

Para intentar una explicación constructiva del fenómeno luminoso faltaban a los antiguos muchos conocimientos experimentales, si bien para muchos, por tratarse de la luz, puede pensarse faltara solamente la finura de observación, aunque sin duda era también mucha. Pero, propiamente por esto pudieron ellos desarrollar sobre la base de la simple observación, una óptica geométrica que, propagándose y perfeccionándose a lo largo de los siglos y milenios hasta Kepler y Galileo, llega finalmente al anteojo, punto de partida para nuevos descubrimientos. En el intermedio, antes del año mil, en plena edad media, el genio del árabe Alhazen intenta por primera vez una teoría física de la propagación luminosa y su aplicación a la fisiología de la visión; pero el occidente no está preparado para tanto y Descartes que le sigue en 700 años le queda todavía atrás. Nos asomamos así al siglo XVIII. Al difundirse el método de la investigación experimental, nuevos fenómenos y nuevos problemas dan impulso a la teoría y los nombres de Newton y de Huygens se disputan la ventaja. Pero hemos llegado ahora demasiado cerca de nosotros y Plá abandona gradualmente la pura emocionante narración de las etapas del pensamiento para internarse en el examen de las teorías. Al lector interesado están destinados los últimos capítulos: *La revancha de la teoría ondulatoria*, *La teoría electromagnética*, *El retorno al discontinuo*, *Algunas acotaciones relativas a la influencia del progreso científico* y el Apéndice: *Utilidad práctica de las especulaciones abstractas*, que, con sus títulos, no necesitan mayor presentación. Pero allí está el *Quo vadimus*. Repetimos todavía con Sartre: "A decir verdad, mientras el historiador se limita a describir los acontecimientos tan conscientemente como es posible, casi no arriesga equivocarse y sus relatos conservan siempre gran valor, pero desde que empieza a interpretar las experiencias y los descubrimientos (y no puede evitarlo si intenta explicarlos), hay muchas probabilidades de que sus conclusiones sean precarias". El resumen que ofrece el último capítulo en relación a la influencia del progreso científico sobre la evolución de los conceptos y aun de las imágenes con las que la

ciencia busca apoyo en la intuición, muy rico en consideraciones y en referencias y quizás forzosamente demasiado rápido y demasiado denso a pesar de extenderse en más de 13 páginas, puede confirmar esta reflexión. Y, volviendo la mirada hacia la utilidad, si, como decíamos al principio, Dios dió la luz al hombre para el goce de admirar, querer y comprender, bien podemos creer que la *aplicación* es acaso la comprobación última de haber comprendido; pero, por contrario, la *utilidad* puede ser la ilusión traicionera; tal vez no fuera menos feliz el hombre primitivo que se esmeraba en grabar la piedra para adornar su cueva que el hombre de hoy que se afana para alcanzar un asiento en el cine.

El camino sobre el cual andamos todavía no lo conocemos.

El libro, conclusión evidente de largo estudio y de mucho carifio, no desprecia tampoco los alicientes de la presentación editorial; está adornado con una cantidad de grabados para hacernos conocer el aspecto físico de los actores del drama, como los vieron o los imaginaron los contemporáneos más o menos próximos; y enriquecido por un índice de los nombres citados, muy importante por las fechas, elemento esencial de la historia.

B. Levi

- El precio de suscripción a “Mathematicae Notae” es de 8 \$ (m/n) anuales.
- El Instituto de Matemática publica también una colección de Notas y Memorias bajo el título “Publicaciones del Instituto de Matemática de la Facultad de Ciencias etc.”, cuyo precio de suscripción es de 10 \$ (m/n) por volumen. Se pueden adquirir los fascículos sueltos de las publicaciones al precio señalado en la pág. 4 de esta misma tapa.
- Para todo lo relacionado al Instituto, a las Publicaciones y a “Mathematicae Notae” dirigirse al Director del Instituto de Matemática — Avenida Pellegrini 250 — Rosario (R. Argentina).
- Para suscripciones y adquisición de los fascículos sueltos dirigirse al Director del Instituto o bien al Bibliotecario de la Facultad de Ciencias Matemáticas, etc., Avenida Pellegrini 250, Rosario (Rep. Argentina). Los importes deberán remitirse en efectivo o bien por giros postales o bancarios pagaderos en la ciudad de Rosario, con preferencia sobre el Banco de la Nación Argentina.
- Los suscriptores en la República Oriental del Uruguay pueden dirigirse al señor Prof. F. Sayagués, Constituyente 1863, Montevideo.

INDICE DEL FASCICULO 1-2

Geometría integral en los espacios tridimensionales de curvatura constante (L. A. SANTALÓ)	1
La diferencial en los espacios métricos afines (M. Balanzat)	29
Medidas invariantes en los espacios topológicos compactos (M. COTLAR y R. A. RICABARRA)	52
On the harmonic analysis of hypergeometrical functions (A. WINTNER) ..	78
Sobre la figura polar de una dada respecto de un círculo con centro en el baricentro (P. PI CALLEJA)	88
Ejercicios y problemas resueltos	94
Ejercicios y problemas propuestos	102
Bibliografía (B. LEVI)	103

SE TERMINÓ DE IMPRIMIR
EN LA IMPRENTA DE LA UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL LITORAL
EL DÍA 21 DE JUNIO 1950
AÑO DEL LIBERTADOR GENERAL SAN MARTÍN

Fascículos aparecidos en las "PUBLICACIONES" del Instituto de Matemáticas

		m\$u.
Vol. I.	1 - B. LEVI — Sobre el sistema $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xy)dx = p(y); \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xy)dy = q(x)$	1.00
	2 - L. A. SANTALÓ — Geometría integral de figuras ilimitadas	1.80
	3 - F. AMODEO — Origen y desarrollo de la Geometría proyectiva. Trad. de Nicolás y José Babini	8.00
	4 - B. LEVI — Una teoría intuicionista de las funciones racionales enteras de una variable	1.00
Vol. II.	1 - P. MONTEL — Funciones armónicas y subarmónicas	1.00
	2 - G. FUBINI — La ley de la media para funciones no derivables. B. LEVI — Sobre un teorema de Weierstrass, el teorema de Rolle y el anterior teorema de Fubini	1.00
	3 - L. A. SANTALÓ — Una demostración de la propiedad isoperimétrica del círculo	1.20
	4 - L. A. SANTALÓ — Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas	1.50
	5 - I. Antecedentes de la creación del Instituto. — II. Acto de inauguración oficial del Instituto. — C. PLA, Origen y propósitos del Instituto. — J. REY PASTOR, La matemática italiana en el último medio siglo y la posición del Dr. Beppo Levi en ella. — B. LEVI, Evolución del pensamiento matemático	1.50
	6 - E. GASPAS — Fórmulas integrales referentes a intersección de una figura plana con bandas variables	1.50
	7 - A. ROSENBLATT — Sobre el teorema de los grandes números en la teoría de la probabilidad	1.00
	8 - M. COTLAR — Sobre conjuntos no medibles y generalización de la integral de Lebesgue - Prólogo por B. Levi	1.50
	9 - B. LEVI — La noción de "dominio deductivo" como elemento de orientación en las cuestiones de fundamentos de las teorías matemáticas	1.50
Vol. III.	1 - Homenaje a la memoria de V. Volterra y J. J. Thomson. C. PLA — Semblanza de Sir Joseph J. Thomson. B. LEVI — La personalidad de Vito Volterra	1.00
	2 - G. FUBINI — Algunas propiedades de los grupos discontinuos finitos	2.50
	3 - B. LEVI — Teoría de la integral de Lebesgue independiente de la noción de medida	3.00
	4 - B. LEVI — Sobre la inversión de una integral definida	1.20
	5 - L. A. SANTALÓ — Curvas extremales de la torsión total y curvas-D.	2.00
	6 - A. TERRACINI — Orígenes de algunos conceptos geométricos	2.00
	7 - L. A. SANTALÓ — Complemento a la Nota "Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas"	1.30
Vol. IV.	1 - L. A. SANTALÓ. — Sobre ciertas variedades con carácter de desarrollable en el espacio euclidiano de cuatro dimensiones	3.00
	2 - M. COTLAR — Funciones univalentes sobre un conjunto de puntos del contorno de un dominio de holomorfismo	2.00
	3 - JOSÉ L. MASSERA. — Fórmulas en diferencias finitas con aplicación a la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales de primer orden	3.50
	4 - A. KOMISCHKE. — Sobre las relaciones entre la luz y la gravitación	2.50
	5 - R. LAGUARDIA y B. LEVI. — Sobre la representación por integrales de algunas funciones definidas por desarrollos de Taylor y aplicación a las soluciones de ecuaciones en derivadas parciales	2.00
Vol. V y VI.	Memorias ofrecidas por varios amigos, alumnos y admiradores en homenaje al Dr. Julio Rey Pastor	30.00
Vol. VII.	1 - J. C. VIGNAUX y M. COTLAR. — Las familias totalmente normales de funciones analíticas	6.00
	2 - J. V. USPENSKY. — Sobre el problema de la ruina de los jugadores	2.50
	3 - F. I. TORANZOS — Sobre proyectividad en los espacios de Hilbert	1.00
	4 - E. A. SAGASTUME BERRA — El álgebra moderna y sus problemas	2.00
Vol. VIII.	1 - B. LEVI - L. A. SANTALÓ - C. DEMARÍA — Estudios numerativos sobre las variedades de contacto de las superficies en un espacio de n dimensiones	4.50
	2 - G. GRIOLI. — Sul comportamento di un vincolo concentrato nel centro di una piastra circolare	2.00
	3 - M. COTLAR - E. ZARANTONELLO. — Grupos semiordenados y L-ideales de Riesz-Birkhoff	6.00
	4 - P. CAPELLI. — Algunas observaciones sobre las funciones univalentes y una clase particular de las mismas	3.50