Instituto Politécnico

Universidad Nacional de Rosario

Función cuadrática

3º Año

Cód. 1306-19

Prof. María del Luján Martínez
Prof. Carla Nápoli
Prof. Jorgelina Osés

Matemática

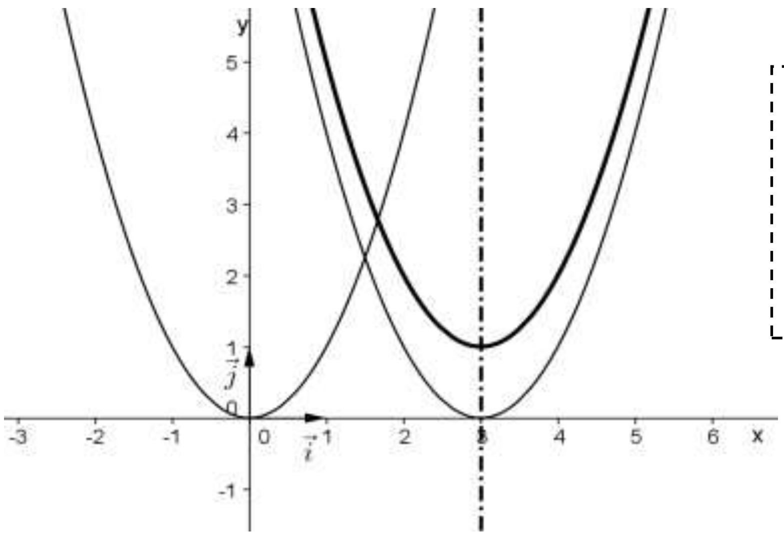
Dpto. de Matemática

Masterización: RECURSOS PEDAGOGICOS

FUNCIÓN CUADRÁTICA

En el capítulo de "Funciones" hemos estudiamos la función $f(x) = x^2$, siendo su dominio **R** y su gráfica, una **parábola**. Además ,por transformaciones aplicadas a $f(x)$, pudimos obtener las gráficas de funciones tales como: $h(x) = x^2 + 4$, $t(x) = \left(x + \frac{1}{3}\right)^2$, etc.

Grafiquemos: $g(x) = (x-3)^2 + 1$



Este tipo de gráficas tiene la particularidad de ser **simétricas respecto de un eje paralelo al eje y,** llamado **eje de simetría.**

Si trabajamos algebraicamente g(x) se obtiene: $g(x) = x^2 - 6x + 10$ que es una función polinómica de segundo grado.

Definición

Toda función polinómica de la forma: $f(x) = a x^2 + b x + c$ con $a \neq 0$; a, b y $c \in R$ se denomina **función cuadrática o función de segundo grado**, cuyo dominio es **R** y su gráfico es una curva llamada parábola.

Cada término de la función cuadrática posee un nombre:

- $\mathbf{ax^2}$ el término cuadrático
- **bx** el término lineal
- **c** el término independiente

En el ejemplo la función g(x) en su expresión polinómica:

- x^2 el término cuadrático y su coeficiente es $a = 1$
- $-6x$ el término lineal y su coeficiente es $b = -6$
- 10 el término independiente, es decir $c = 10$

Como observamos la función g(x) está expresada de dos formas distintas una es la **Forma Polinómica** y la otra se llama **Forma Canónica de la función cuadrática** que se expresa de la siguiente manera:

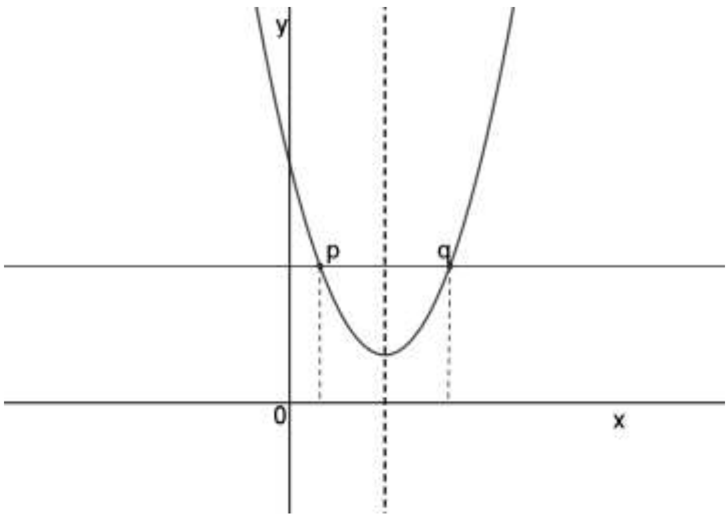
$$\boxed{f(x) = a\,(x+h)^2 + k \qquad a \neq 0, a \in R,\ h \in R \ \text{ y } \ k \in R}$$

DETERMINACIÓN DE LAS COORDENADAS DEL ***VÉRTICE*** DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA EN SU FORMA POLINÓMICA

Definición:

Se llama **vértice** de una parábola al punto de intersección de la misma y su eje de simetría.

Simbolizaremos al **vértice** de la siguiente manera $v\,(x_v; y_v)$



Consideraremos $x_p \ \ y \ \ x_q \ \in Dom(f)$, las abscisas de dos puntos distintos cualesquiera de la parábola, tal que $f(x_p) = f(x_q)$

La abscisa del vértice es: $x_v = \frac{x_p + x_q}{2}$ (*), dado que el mismo se encuentra sobre el eje de simetría.

Como $f(x_p) = f(x_q)$, entonces:

$$ax_p^2 + bx_p + c = ax_q^2 + bx_q + c$$
$$0 = a(x_q^2 - x_p^2) + b(x_q - x_p)$$
$$0 = a(x_q - x_p)(x_q + x_p) + b(x_q - x_p)$$
$$0 = (x_q - x_p)\left[a(x_q + x_p) + b\right]$$

de donde $x_q - x_p = 0 \quad \vee \quad a(x_q + x_p) + b = 0$

y como $x_q \neq x_p$ resulta $(x_q + x_p) = -\frac{b}{a}$ (**)

reemplazando en (*) por (**), se tiene $x_v = -\frac{b}{2a}$ y para obtener y_v bastará evaluar $f(x_v)$.

Entonces las coordenadas del vértice son: $\boxed{v\left(-\frac{b}{2a}; f(x_v)\right)}$

Considerando nuevamente la función $g(x) = x^2 - 6x + 10$ resulta:

- el vértice de esta parábola es v (3 ; 1)
- el eje de simetría es x = 3

RELACIÓN ENTRE ***LOS COEFICIENTES "a", "b" Y "c" DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA Y "h" Y "k" DE LA EXPRESIÓN CANÓNICA.***

$$f(x) = a\ (x + h)^2 + k$$
$$f(x) = a\ \left(x^2 + 2xh + h^2\right)^2 + k$$
$$f(x) = a\,x^2 + \underbrace{2ah}_{b}\,x + \underbrace{ah^2 + k}_{c}$$

$$\text{resulta que :}\quad 2ah = b \Rightarrow h = \frac{b}{2a} \quad (1)$$

$$ah^2 + k = c \;\Rightarrow\; k = c - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \;\Rightarrow\; k = c - \frac{b^2}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Notemos que según lo visto anteriormente si $x_v = -\frac{b}{2\,a}$ resulta que $x_v = -\ h$

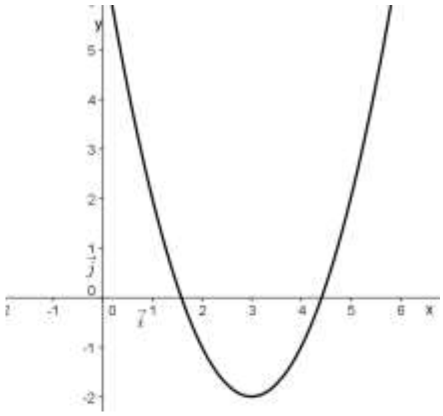
Evaluando $f(-h)$ se obtiene que $f(-h) = k$, entonces el vértice de la parábola es $v\left(-h;\ k\right)$ que se determina inmediatamente cuando la función cuadrática esta dada en la forma canónica.

Por ejemplo:

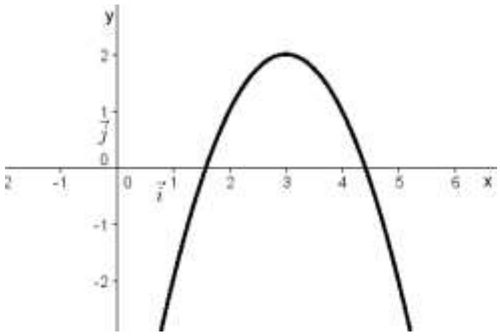
Si $f(x) = (x + 2)^2 - 1$ resulta el vértice $v\left(-2;\ -1\right)$ y el eje de simetría es $x = -2$

- En la expresión de la función cuadrática, el coeficiente ***a***, tiene importancia para poder establecer la concavidad de la parábola.

  - Si a>0, las ramas de la parábola se dirigen hacia arriba (cóncava hacia arriba) y se puede observar que la ordenada del vértice es el menor valor del conjunto Imagen (**mínimo**)



- Si a<0, las ramas de la parábola se dirigen hacia abajo (cóncava hacia abajo) y la ordenada del vértice es el mayor valor del conjunto Imagen (**máximo**)



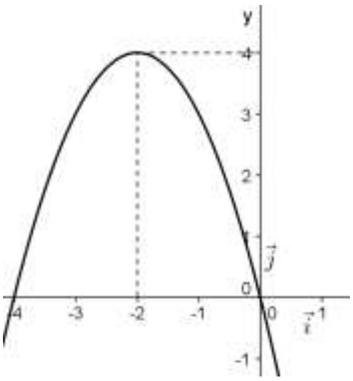
PRÁCTICA

1) Dada $f(x) = -2(x-3)^2 + 2$

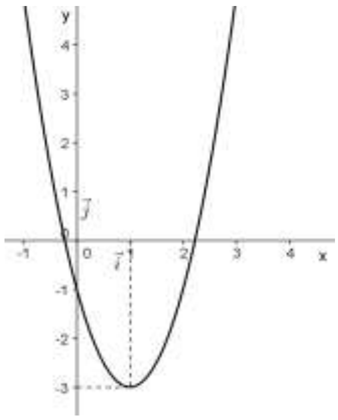
   a) Indica, a partir de ella, el vértice, su eje de simetría y el conjunto imagen.
   b) Halla $a / f(a) = -4$
   c) Determina el valor de su coeficiente lineal.

2) Dadas las siguientes gráficas expresa la ley de la función cuadrática en forma polinómica

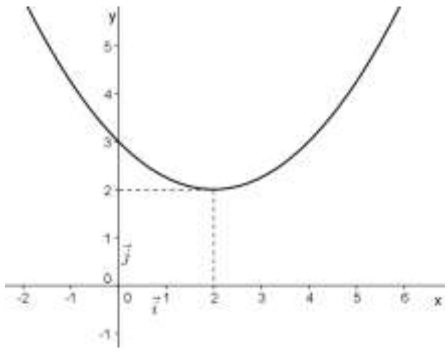
   a)



   b)



   c)



CEROS DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Problema:
Se lanza una pelota hacia arriba desde 25m del suelo. La altura, en metros, que alcanza la pelota en función del tiempo, en segundos, viene dada por la función $h(t) = 20t - 5t^2 + 25$ ¿Cuánto tarda en llegar al piso?
Resolver este problema implica saber cuando la altura de la pelota es nula, para lo cual tendremos que encontrar las soluciones de la siguiente ecuación:

$$20\,t - 5\,t^2 + 25 = 0$$

Es evidente que no podemos despejar la variable en forma directa por lo que aprenderemos nuevas herramientas.

Llamamos **Ecuación de 2º grado** a la expresión:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Utilizando la expresión canónica de la función cuadrática:

$$a(x+h)^2 + k = 0\,, \quad \text{con} \quad h = \frac{b}{2a} \quad \text{y} \quad k = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

reemplazando h y k, se tiene:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = 0 \Rightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{4ac - b^2}{4a} \Rightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left|x + \frac{b}{2a}\right| = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \vee \quad x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \vee \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Siendo x_1 y x_2 las raíces, ceros ó soluciones de la ecuación de segundo grado.
En forma simplificada podemos escribir:

$$\boxed{x_{1-2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

esta fórmula recibe el nombre de **Resolvente de la ecuación de segundo grado.**

Ahora estamos en condiciones de resolver la ecuación del problema propuesto:

$$20t - 5t^2 + 25 = 0\,, \text{ con } \quad a = -5 \quad b = 20 \quad c = 25$$

Reemplazando en la fórmula obtenemos:

$$t_{1,2} = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4(-5)25}}{2(-5)}$$

$$t_1 = -1 \quad \vee \quad t_2 = 5$$

En este problema el valor negativo no tiene sentido, ya que la incógnita es la magnitud tiempo, por lo tanto **la pelota tarda en llegar al piso 5 segundos.**

PRÁCTICA

3) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3 = x^2 + 2x$

b) $x^2 + \sqrt{2}\ x + \frac{1}{2} = 0$

c) $\frac{2}{x+2} + \frac{x}{x-2} = 3 \quad x \neq \pm 2$

d) $x + 2 = \frac{5}{x} \quad x \neq 0$

e) $(x-3)(x+2) = 1$

f) $\frac{2x+2}{x+4} = x - 1 \quad x \neq -4$

g) $\sqrt{2x^2 - x} = \sqrt{6}$

h) $\sqrt{5x^2 - 3x - 10} = 2x$

i) $\sqrt{x+5} + 1 = x$

j) $x^4 - 2x^2 = 0$

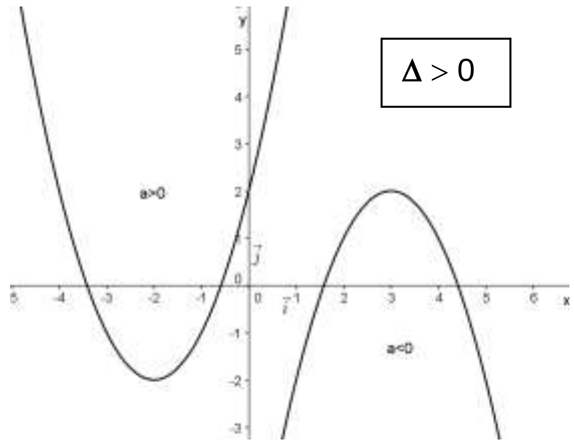
k) $\frac{-8}{x^2 - 4} + \frac{x}{x+2} = -1 \quad x \neq 2 \text{ y } x \neq -2$

Observaciones

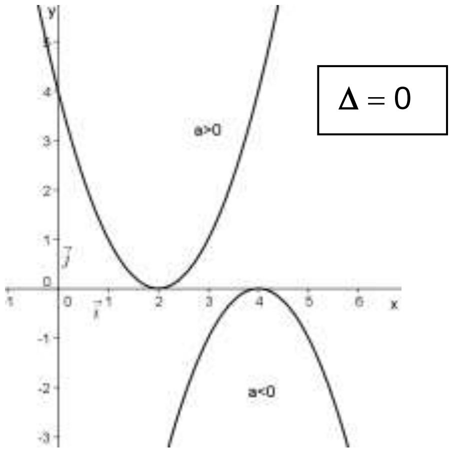
- Al número $b^2 - 4ac$ que aparece en la fórmula de la resolvente, se lo conoce con el nombre de **discriminante** y se la simboliza Δ
- Análisis del discriminante en relación con las soluciones de la ecuación de segundo grado.
  Si $\Delta > 0$ entonces la ecuación tiene dos soluciones reales distintas $(x_1 \neq x_2)$
  Si $\Delta = 0$ entonces la ecuación tiene una solución real doble $(x_1 = x_2)$
  Si $\Delta < 0$ entonces la ecuación no tiene soluciones reales

Si trabajamos con una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, al calcular los ceros, x_1 y x_2 obtendremos los puntos de intersección de la parábola con el eje x. Con la ayuda del discriminante tenemos:

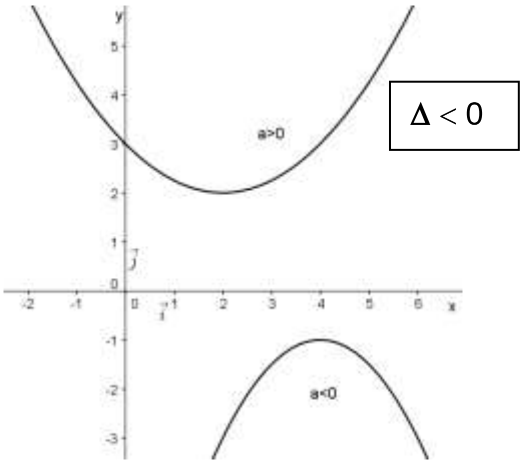
- Si $\Delta > 0$, la parábola corta al eje x en dos puntos



- Si $\Delta = 0$, la parábola toca al eje x en un punto



- Si $\Delta < 0$, la parábola no corta al eje x



PRÁCTICA

4) Sin resolver las ecuaciones, analiza el tipo de solución de las mismas.

a) $2x^2 - 4x - 6 = 0$ b) $3x^2 - 4x + 6 = -2$ c) $-3x^2 + 6x - 3 = 0$

5) Determina **K** de modo que la ecuación:

a) $4x^2 + Kx + 6 = 0$ tenga una solución igual a 1

b) $x^2 - 2x - K = 0$ tenga soluciones iguales

c) $2x^2 - Kx + 8 = 0$ no tenga soluciones reales

6) Encuentra el valor de β de modo que las funciones $f(x) = 4x^2 - 3x - 1$ y $g(x) = 3x^2 + 7x + \beta$ posean ecuaciones asociadas cuyos discriminantes sean iguales.

PROPIEDADES DE LAS RAÍCES DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Siendo x_1 y x_2 los ceros de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, demuestra:

a) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

b) $x_1.x_2 = \frac{c}{a}$

c) $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

La función cuadrática en su FORMA FACTOREADA es:

$$f(x) = a\,(x - x_1).(x - x_2)$$

Recuerda Teorema de Gauss

PRÁCTICA

7) Halla la expresión de una función cuadrática sabiendo que sus ceros son $x_1 = 1$ y $x_2 = 5$ y que el punto $(3;-5)$ pertenece a su gráfica.

8) Determina una ecuación de segundo grado a coeficientes enteros tal que sus soluciones sean:

   a) Los recíprocos de las de $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$
   b) Las terceras partes de las de $4x^2 + 8x - 5 = 0$

9) Dadas las siguientes funciones :

$f(x) = 2x^2 - 4x - 6 \qquad g(x) = -x^2 + 4x - 4 \qquad t(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1 \qquad h(x) = -\frac{1}{3}x^2 - x$

a) Halla el vértice y el eje de simetría de cada una de ellas
b) Encuentra los puntos de intersección de las mismas con los ejes, si es posible.
c) Representa gráficamente las funciones e indica el conjunto imagen de cada una.
d) Expresa en forma canónica t(x) y h(x)
e) Expresa en forma factoreada f(x) y g(x)

10) Determina el dominio en las siguientes funciones

$$f(x) = \frac{x+1}{2x^2 - 3x + 1}$$
$$g(x) = 2\sqrt{3(x-1)(x+2)}$$
$$h(x) = \frac{(x^2 - 1)}{(x^2 - 5x + 6)}$$

11) Determina α si $f(x) = 2(x-1)(x+\alpha)$ tiene nulo el discriminante de la ecuación asociada.

12) Determinar, sin calcularlos, la cantidad de ceros reales que tienen las siguientes funciones cuadráticas:

   a) $f(x) = x^2 + 6x + 9$
   b) $g(x) = (x-1)^2 - 7$
   c) $h(x) = 2x^2 - 12x + 19$

13) ¿Cuál es la distancia entre los vértices de las gráficas de $f(x)=(x-5)^2+\frac{5}{2}$ y $g(x)=(x-2)^2-\frac{3}{2}$?

14) Plantea y resuelve los siguientes problemas:

a) Determina dos números tales que su suma sea 10 y el producto de los mismos más la suma de los cuadrados sea 79.

b) Encuentra la medida de los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que son tres números naturales consecutivos.

c) Dentro de 11 años la edad de Marcela será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. Calcular la edad de Marcela.

15) La función para calcular el ingreso por la venta de n relojes es $r(n)=n(25-0{,}1n)$.

Determina:

a) La cantidad de relojes que debe venderse para obtener el ingreso máximo.

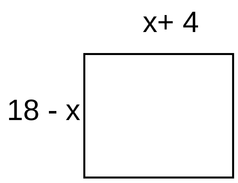
b) El ingreso máximo.

16) La función que permite construir un modelo de los ingresos de una empresa (en pesos) en función de la cantidad de artículos que vende (en unidades de mil) es $I(x)=-5x^2+50x$ y la del costo total (en pesos) es $C(x)=20x+45$. Determinar cuántos artículos deben venderse para poder cubrir los costos.

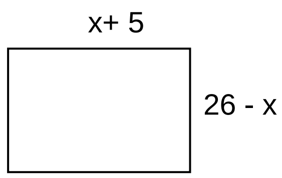
Comprueba, a través del software Geogebra, la solución del problema.

17) Para cada rectángulo encontrar el valor de x tal que el área sea máxima. Calcula el área máxima.

a)



b)



18) Grafica una parábola para cada situación:

a) Los puntos de intersección con el eje “x” son $(-3;0)$ y $(4;0)$ y en el vértice tiene un máximo.

b) Interseca al eje "y" en $y = 3$, el coeficiente lineal es el doble del coeficiente cuadrático y el punto $(2;7)$ pertenece a la gráfica de la función.

c) Los puntos $(1;3)$ y $(3;-3)$ pertenecen a su gráfica y el coeficiente lineal es - 4

19) Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 7x + 10$ y $g(x) = -x^2 - 4x + 5$, determina:

a) $A = \{x / f(x) < 0\}$

b) $B = \{x / g(x) \geq 0\}$

20) Dada la parábola $y = -(x-1)^2 - 4$, determina analíticamente y gráficamente si hay puntos de intersección con cada una de las siguientes rectas:

a) $y = -4$

b) $-\frac{1}{2}x + y + \frac{3}{2} = 0$

c) $y = -3x + 1$

Respuestas de los problemas propuestos

1) a) V(3;2) - Eje de simetría x=3 - $Im(f) = (-\infty\ ;\ 2]$

b) $a = \sqrt{3} + 3 \quad \vee\ a = -\sqrt{3} + 3$

c) Coeficiente lineal =12

2) a) $f(x) = -x^2 - 4x$ b) $f(x) = 2x^2 - 4x - 1$ c) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 3$

3) a) $x = 1 \vee x = -3$ b) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $x = 1 + \sqrt{5} \quad \vee\ a = 1 - \sqrt{5}$

d) $x = -1 + \sqrt{6} \quad \vee\ a = -1 - \sqrt{6}$ e) $x = \frac{1 + \sqrt{29}}{2} \quad \vee \quad x = \frac{1 - \sqrt{29}}{2}$

f) $x = 2 \vee x = -3$ g) $x = 2 \vee x = -\frac{3}{2}$ h) $x = 5$ i) $x = 4$

j) $x = 0 \vee x = \sqrt{2} \quad \vee\ x = -\sqrt{2}$ k) $x = -1$

4) a) Dos soluciones reales distintas

b) No tiene soluciones reales

c) Tiene una solución real

5) a) $k = -10$ b) $k = -1$ c) $-8 < k < 8$

6) $\beta = 2$

7) $f(x) = \frac{5}{4}(x-1)(x-5)$

8) a) $x^2 - x - 2 = 0$

b) $36x^2+24x-5=0$

9) a) b) c)

Función	Vértice	Eje de simetría	Inters. eje x	Inters. eje y	Im(…)
f(x)	$(1\ ;-8)$	$x = 1$	$(3\ ;0)$ $(-1\ ;0)$	$(0\ ;-6)$	$[-8\ ;+\infty)$
g(x)	$(2\ ;0)$	$x = 2$	$(2\ ;0)$	$(0\ ;-4)$	$[0\ ;+\infty)$
t(x)	$\left(-1\ ;\frac{1}{2}\right)$	$x = -1$	No posee	$(0\ ;1)$	$\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$
h(x)	$\left(-\frac{3}{2}\ ;\frac{3}{4}\right)$	$x = -\frac{3}{2}$	$(0\ ;\ 0)$ $(-3\ ;0)$	$(0\ ;\ 0)$	$\left[\frac{3}{4};+\infty\right)$

d) $t(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{2}$ $\qquad h(x) = -\frac{1}{3}\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

e) $f(x) = 2(x-3)(x+1)$ $g(x) = -(x-2)^2$

10) $Dom(f) = R - \left\{1; \frac{1}{2}\right\}$

$Dom(g) = (-\infty; -2] \cup [1; \infty)$ $Dom(h) = R - \{3; 2\}$

11) $\alpha = -1$

12) a) un cero b) dos ceros c) no posee ceros reales

13) $d(V_1; V_2) = 5$

14) a)3 y 7 b)3; 4 y 5 c)21años

15) a)125 relojes b)$1562,5

16) 3 artículos

17) a) $x = 7$ A=121 b) $x = 10,5$ A=325,5

18) A cargo del alumno

19) $A = (2;5)$ $B = [-5;1]$

20) Analíticamente

a) $x = 1$ b) No tienen puntos de intersección c) $(3;-8)$ y $(2;-5)$

Gráficamente a cargo del alumno

BIBLIOGRAFIA:

- Matemática /Polimodal Funciones 1 Altman-Comparatone-Kurzrok. Editorial Longseller . Año 2002- Bs As –Argentina
- Matemática /Polimodal Funciones 2 Altman-Comparatone-Kurzrok. Editorial Longseller . Año 2002- Bs As –Argentina
- Matemática Zapico- Micelli-Tajeyan-Vera Ocampo. Editorial Santillana .Serie Perspectiva- Año 2008-Bs As-Argentina
- Matemáticas.Bachillerato 1 Guzmán-Colera-Salvador .Editorial Amaya-Año 1987-Madrid-España
- Precálculo .Stewart-Redlin-Walson Tercera edición-Editorial Thomson Learning- Año 2001 –México DF México
- Precálculo –J.Douglas Faires- James DeFranza . Editorial Internacional Thomson .Editores 2º edición. Año 2001-México DF-México
- Apunte de Función cuadrática, Función exponencial y su inversa-Ecuaciones. Editado en el Instituto Politécnico Superior. 3ºaño .Año 2011 - Cod 1310